UNIVERSIDADE LUTERANA DO BRASIL
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

INVESTIGANDO A UTILIZAÇÃO DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE FUNÇÕES POLINOMIAIS DE 1º E 2º GRAUS

AUTORA: JEANE GARDÊNIA COSTA DO NASCIMENTO

ORIENTADORA: Dra. CARMEN TERESA KAIBER

CANOAS, 2009

UNIVERSIDADE LUTERANA DO BRASIL
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE
CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

INVESTIGANDO A UTILIZAÇÃO DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE FUNÇÕES POLINOMIAIS DE 1º E 2º GRAUS

JEANE GARDÊNIA COSTA DO NASCIMENTO

Dra. CARMEN TERESA KAIBER

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil para obtenção do titulo de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

CANOAS, 2009

Dados Catalográficos:

Nascimento, Jeane Gardênia Costa do
N244i
Investigando a utilização de uma seqüência didática para o ensino de funções polinomiais de 1º e 2º graus. / Jeane Gardênia Costa do Nascimento. – Canoas- RS, 2009.
147f.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Luterana do Brasil. ULBRA. Canoas, 2009.

Orientadora: Profª Carmen Teresa Kaiber

1. Funções polinomiais de 1º e 2º graus. 2. Engenharia didática. 3. Representações semióticas. I. Título.

CDD 515

INVESTIGANDO A UTILIZAÇÃO DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE FUNÇÕES POLINOMIAIS DE 1º E 2º GRAUS

JEANE GARDÊNIA COSTA DO NASCIMENTO

ORIENTADORA:

PROFª. Dra. CARMEN TERESA KAIBER

BANCA EXAMINADORA:

PROF.ª Dra. MARIA CRISTINA KESSLER

PROF.ª Dra. CLAUDIA LISETE OLIVEIRA GROENWALD

PROF.ª Dra. PATRICIA ROSANA LINARDI

DISSERTAÇÃO APRESENTADA E APROVADA EM: 28 DE MAIO DE 2009

AGRADECIMENTOS

A Deus que me guiou até que fosse possível estar aqui. Tenho a convicção de que tudo que aconteceu foi em virtude de sua infinita bondade e misericórdia.

A todos que compartilharam do desejo de subir mais um degrau da escada das oportunidades que a vida oferece, as quais não se pode deixar passar.

A minha mãe Rita, a quem sempre dedicarei todas as vitórias obtidas e a quem ofereço todo amor e respeito por tudo que ela representa em minha vida.

Ao meu amado Carlos que esteve presente em todos os momentos, fossem estes bons ou ruins, me apoiando sempre.

A minha orientadora, Profª. Dra. Carmen Kaiber, pois com a sua brilhante orientação e cativante ternura, me fez enxergar capacidades as quais desconhecia.

A todos os professores do programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil, em especial à Profª. Dra. Cláudia, que ajudou-me no início do trabalho.

Aos colegas, Katia, Edenise e Geraldo, pois nossa relação de amizade tornou possível vencer cada etapa do curso.

Muito Obrigada!

RESUMO

O presente trabalho resulta da pesquisa realizada com 24 estudantes de um curso de Ensino Médio integrado ao Técnico em Informática, na modalidade EJA, no Campus do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí - IFPI, localizado na cidade de Parnaíba/Piauí. Tem como objetivo investigar a utilização de uma sequência didática que alie um *software* educativo a atividades de lápis e papel para o estudo de funções polinomiais de 1º e 2º graus. Teoricamente, a investigação buscou respaldo na teoria das representações semióticas, desenvolvida por Raymond Duval (2004, 2005), bem como nos níveis de compreensão do conceito de função estabelecidos por Bergeron e Herscovics (1982). Metodologicamente, a investigação está inserida em uma perspectiva qualitativa ancorada nos pressupostos da engenharia didática. A investigação apóia-se no desenvolvimento de quatro grupos de atividades que foram trabalhadas junto aos estudantes, em seções semanais, ao longo de nove semanas. A ênfase nas atividades constantes da sequência didática recaiu sobre a resolução de problemas, sendo que o *software* utilizado foi o Winplot. Resultados apontam para a evolução satisfatória dos estudantes frente a aprendizagem das funções trabalhadas, a partir do reconhecimento de características expressas nas representações algébrica e gráfica das funções propostas, articuladas à representação em língua natural, o que possibilitou a apropriação das idéias e conceitos estudados. O processo investigativo revelou, também, a passagem dos estudantes pelos níveis compreensão intuitiva, matematização inicial, abstração, bem como alguns traços da formalização, níveis estabelecidos, teoricamente, por Bergeron e Herscovics. Assim, é possível afirmar que a abordagem utilizada apresentou resultados bastante satisfatórios e oportunizou reais situações de aprendizagem aos estudantes.

Palavras-Chave: funções polinomiais de 1º e de 2º graus, engenharia didática, representações semióticas, informática na educação.

ABSTRACT

The present work results of the research accomplished with 24 students of a classroom of high school associated to professional teaching of informatics, in modality EJA, in Campus of Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí - IFPI, localized in the city of Parnaíba/Piauí. It has as purpose to investigate the using of a didactic sequence which associates an educative *software* to pencil and paper for the studying of polynomial functions of 1º and 2º degrees. In theory, the investigation sought basis in the theory of semiotic representations, developed by Raymond Duval (2004, 2005), as well as in level of comprehension of function's concept established by Bergeron and Herscovics (1982). Methodologically, the investigation is inserted in a qualitative perspective based on the didactic engineering. The investigation is supported in development of four groups of activities which were worked with the students, in periods of weeks, alongside of nine weeks. The emphasis in continuous activities in didactic sequence fell again on resolution problems with use of the *software* Winplot. Results showed the satisfactory evolution of classmates who got better their learning of the worked functions, from the recognition of expressed characteristics of algebric and graphic representations of proposed functions, linked to representation in natural language, which possibilited the appropriation of studied ideas and concepts. The investigative process also reveals the changing of the students by the levels of intuitive comprehension, initial matematization, abstraction, as well as some traces of formalization, established levels, in theory, by Bergeron and Herscovics. In this way, it is possible to affirm that the used approach showed very satisfactory results and gave opportunity for real situations of learning to students.

KEY WORDS: polynomial functions of 1º and 2º degree, didactic engineering, semiotic representations, informatics in education.

INDICE DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Enquanto ciência, a Matemática apresenta-se como um corpo de conhecimentos de caráter formal e abstrato, onde a lógica e a precisão aliam-se ao rigor de suas conclusões. Porém, pondera-se que sua origem é o mundo real, constituindo-se em um instrumento que tem um extenso campo de aplicações nas outras ciências e em situações do cotidiano.

No âmbito escolar, é indiscutível o papel da Matemática na estruturação do pensamento, no desenvolvimento do raciocínio lógico e dedutivo e de capacidades intelectuais que possibilitem ao estudante resolver problemas dentro da própria Matemática e fora dela.

No Brasil, as mudanças no sistema educacional, a partir da nova Lei de Diretrizes e Bases da Educação, promulgada em 1996, bem como as contribuições advindas da evolução dos estudos e pesquisas da Educação Matemática, vêm acarretando inúmeros questionamentos e reflexões acerca dos objetivos da Matemática em todos os níveis de ensino e sua contribuição para a construção da cidadania.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1999) apontam que, em virtude da integração à sociedade da informação, é oportuno que a educação esteja voltada ao desenvolvimento de capacidades de comunicação, resolução de problemas, tomada de decisões, realização de inferências, aperfeiçoamento de conhecimentos, valores e ao trabalho coletivo e, nesse sentido, a Matemática tem muito a contribuir.

Entende-se que a escola deve estar atenta às necessidades e demandas educacionais de uma sociedade em constante mudança, não só constatando problemas e procurando resolvê-los, mas, principalmente, construindo propostas curriculares que se antecipem às necessidades, introduzindo inovações e fazendo previsões como caminho para cumprir seu papel educativo.

Uma realidade bem presente no cenário educacional brasileiro refere-se à parcela da população que nunca frequentou a escola ou que, antes de concluir o ciclo da educação básica, afastou-se da mesma.

Essa população, constituída de jovens e adultos, tem políticas educacionais específicas, que buscam atender suas necessidades e anseios através do desenvolvimento de projetos que os contemplem. Porém, na realidade das escolas propostas voltadas para esse público, que têm características próprias, nem sempre se fazem presentes.

Desse modo, entende-se que são necessárias ações direcionadas a essa população de jovens e adultos e é nesse contexto que essa investigação, a qual contempla, especificamente, a Matemática, se insere.

O trabalho aqui apresentado objetiva investigar a viabilidade da utilização de uma sequência didática, que conta com o recurso de um *software* educativo, aliado a atividades de lápis e papel, para o estudo de Funções Polinomiais do 1° e 2° graus.

O foco no estudo de Funções pareceu bastante oportuno, por ser um conteúdo presente em todos os cursos de nível médio, quer sejam regulares ou profissionalizantes e uma noção central na Matemática. Também se considerou, concordando com Barufi (2001, p.5), que "o conceito de função traz dentro de si um grau de dificuldade epistemológica muito grande para os alunos, fato esse que pode ser historicamente comprovado", o que evoca a necessidade de uma constante qualificação dos seus processos de ensino e aprendizagem.

A opção pela utilização de recursos tecnológicos para a elaboração da sequência didática ocorreu, por se tratar de uma proposta direcionada a um público já adulto, que busca, na escola, além de um conhecimento básico, o qual possibilite o desenvolvimento de capacidades amplas, um aprendizado mais específico, prático e inovador.

Assim, a investigação foi realizada com um grupo de estudantes de um curso de Ensino Médio integrado ao Técnico em Informática, na modalidade EJA, no Campus do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí - IFPI, localizado na cidade de Parnaíba/Piauí. O curso é noturno e faz parte do PROEJA, que é um programa do governo federal de educação profissionalizante para jovens e adultos e que, no IFPI, é oferecido em nível de Ensino Médio, funcionando nos moldes do Ensino Médio Integrado ao Técnico.

No contexto do estudo de Funções, julgou-se pertinente buscar apoio teórico na Teoria das Representações Semióticas de Duval (2004, 2005). Essa escolha deu-se, principalmente, em virtude da percepção de que, no caso específico de funções, os estudantes, frequentemente, confundem o objeto matemático com a sua representação, de tal modo que a notação f(x) passa a ser, ela própria, a função, o que se considera um entrave para a apropriação do seu conceito.

Com o apoio da referida teoria buscou-se, junto aos níveis de compreensão do conceito de Função, definidos por Bergeron e Herscovics (1982), aporte específico para a elaboração da sequência didática. Entende-se que o uso dos níveis de compreensão do conceito de função representa uma alternativa bastante viável à percepção, por parte do professor de Matemática, de elementos que indiquem dificuldades de aprendizado, bem como de evolução do mesmo dentro de uma perspectiva de ensino.

Metodologicamente, a investigação segue os pressupostos da Engenharia Didática, principalmente, devido a sua possibilidade de se constituir, tanto em uma metodologia para a prática em sala de aula, quanto para a realização da pesquisa.

Trata-se de uma metodologia de pesquisa específica, realizada através de uma sequência de aulas concebidas, organizadas e articuladas no tempo por um professor, que desenvolve um projeto de aprendizagem com um grupo de alunos, o qual evolui através de um processo de trocas entre educador e alunos, em função das escolhas e decisões do professor (ARTIGUE, 1995). Segundo a autora, uma engenharia didática é organizada em quatro fases: análises preliminares, análise *a priori* e concepção da engenharia, experimentação e análise *a posteriori* e validação.

Não obstante, seguindo a ideia inicial de se levar ao grupo de jovens e adultos a possibilidade de interação com recursos tecnológicos, lançou-se mão da utilização do *software* educativo Winplot, um programa para a construção de gráficos de funções, tanto em duas, como em três dimensões, poderoso em recursos e disponível gratuitamente para *download* na *internet*.

Salienta-se que a opção pelo uso do *software*, ocorreu por aspectos que enfatizam a mobilidade e interatividade dentro de uma perspectiva de utilização de tecnologias, considerada pelos Parâmetros Curriculares Nacionais, bem como pela boa estrutura de laboratórios de informática disponível no Campus Parnaíba, cenário de realização da pesquisa.

Assim, este trabalho encontra-se organizado em cinco capítulos. O primeiro aborda aspectos gerais de justificativa e contextualização da investigação. O segundo apresenta o problema de pesquisa e seus objetivos.

No terceiro capítulo, encontra-se a fundamentação teórica de pesquisa, ancorada pela teoria das representações semióticas de Duval e pelos estágios de compreensão do conceito de função desenvolvidos por Bergeron e Herscovics, como já explicitado.

O quarto capítulo traz a opção metodológica, o grupo investigado e os instrumentos de investigação. São explicitadas as idéias fundamentais da Engenharia Didática que servem tanto de referencial para a elaboração da sequência didática, a ser desenvolvida junto ao grupo de alunos, como de aporte metodológico para a investigação.

O capítulo cinco apresenta a engenharia didática em todas as suas fases. São explicitados todos os elementos que levaram à organização da sequência didática, apresentada a fase de experimentação e a análise a *posteriori*, que levam às conclusões.

Espera-se, com a realização dessa investigação, contribuir para a construção de uma educação de jovens e adultos voltada aos anseios e interesses dessa parcela de estudantes. Especialmente, em relação à Matemática, que os conhecimentos tratados na escola, afora sua importância intrínseca, contribuam, também e, principalmente, para o desenvolvimento de cidadãos autônomos, conscientes dos seus direitos e deveres, para consigo e com a sociedade.

1 JUSTIFICATIVA E CONTEXTUALIZAÇÃO

Entende-se que um dos principais papéis da escola é a formação de cidadãos, a qual passa, necessariamente, pela oferta de oportunidades. No contexto da educação brasileira, existem dificuldades referentes ao aprendizado da Matemática indicadas, por exemplo, pelo desempenho obtido nas avaliações realizadas pelo INEP[1] através do SAEB e da Prova Brasil. Assim, é de extrema relevância que o professor conheça sobre essa realidade e sua responsabilidade na busca por alternativas que oportunizem minimizar tais dificuldades através do desenvolvimento de projetos que possibilitem uma qualificação do ensino.

No Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí - IFPI, e mais especificamente, no Campus de Parnaíba, é possível perceber as dificuldades que considerável parte dos estudantes enfrenta com relação à Matemática, traduzidas em um aproveitamento e rendimento distantes do desejável. Um exame dos dados do ano de 2007, sobre o desempenho dos estudantes do Campus Parnaíba, que oferece, dentre outros cursos, o Ensino Médio Integrado ao Técnico, evidencia essa realidade.

Nesse ano, a partir do estudo dos mapas de notas, verificou-se, por exemplo, que cerca de 80% os alunos do 1º ano não conseguiram atingir a média aprovativa 6,0(seis), na avaliação de Matemática, no período destinado ao estudo do conteúdo Funções. Tal constatação levou a crer na existência de dificuldades de aprendizado em relação a esse conteúdo e sugeriu a necessidade de organização de estratégias de ensino que permitam ao estudante a reversão desse quadro.

Percebe-se que, quando se lança um olhar para a Matemática no Ensino Médio como um todo, as dificuldades se mantêm e até mesmo se agigantam. Se for considerado, ainda, um curso de nível médio profissionalizante, noturno, direcionado a jovens e adultos, que se constitui no alvo da investigação aqui proposta, pode-se esperar uma realidade bem particular, com necessidades específicas que precisam ser consideradas no momento da organização e estruturação do curso e, especificamente, das disciplinas que o compõem.

Dentro dessa realidade, considera-se que o distanciamento ou até mesmo a desvinculação existente entre os temas da Matemática e as situações e problemas

---

[1] INEP – Instituto Nacional de Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Endereço eletrônico: www.inep.gov.br

próximos da realidade do estudante, constitui-se em fator que pode ser considerado como gerador de dificuldades de aprendizagem, não só na Matemática, como nas demais disciplinas. Através da adequação de atividades que possam introduzir o conteúdo matemático, nas situações do cotidiano, acredita-se que haverá uma melhoria significativa na aprendizagem do tema que se deseja apresentar.

Este entendimento encontra respaldo nas Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais ao Ensino Médio - PCN+, onde é preconizado que:

> Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação (BRASIL, 2002, p. 111).

Dentro do contexto não só de um curso voltado para a educação de jovens e adultos, mas também em qualquer outra modalidade de ensino, percebe-se a necessidade de uma maior ênfase à aplicabilidade dos conteúdos na vida dos estudantes, bem como a modificação da abordagem matemática de alguns livros didáticos.

Partindo dessas considerações iniciais, o presente trabalho propõe investigar a viabilidade da organização de uma sequência didática, para o ensino e aprendizagem de funções polinomiais do primeiro e segundo graus, que tenha por base a realização de tarefas e a solução de problemas, utilizando como ferramenta um *software* educativo.

A proposta de trabalho junto aos estudantes, um grupo de jovens e adultos de um curso de Ensino Médio Integrado ao Técnico do programa PROEJA, a qual serve de base para a investigação, opta por abordar os conteúdos, partindo da resolução de situações-problema do cotidiano, buscando desenvolver idéias e conceitos matemáticos a partir do entendimento e solução dos mesmos, com o auxílio do *software* Winplot.

Ao organizar atividades dentro das características descritas, pretende-se proporcionar aos estudantes a participação, de maneira efetiva, de uma realidade conhecida, além de oportunizar a utilização da Matemática como instrumento, conforme proposto pelos PCNEM:

> No que diz respeito ao caráter instrumental da Matemática no Ensino Médio, ela deve ser vista pelo aluno como um conjunto de técnicas e estratégias para serem aplicadas a outras áreas do conhecimento, assim como para a atividade profissional. Não se trata de os alunos possuírem muitas e sofisticadas estratégias, mas sim de desenvolverem a iniciativa e a segurança

> para adaptá-las a diferentes contextos, usando-as adequadamente no momento oportuno (BRASIL, 2002, p.40).

Assim, essa proposta busca oferecer recursos para que o estudante seja capaz de, gradativamente, compreender a importância do que é estudado na escola para sua vida, trabalho e cidadania dentro do panorama social atual, não esquecendo, também, de vislumbrar a Matemática como ciência estruturada em definições, demonstrações, encadeamentos conceituais e lógicos, e com papel de construtora de novos conceitos e estruturas, a partir de outros, que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas.

É oportuno, também, refletir sobre relação da Matemática com a tecnologia, tomando por base a informática e o uso de calculadoras, sem que esses constituam o centro da questão. Dentro dessa perspectiva, os PCNEM afirmam que:

> Esse impacto da tecnologia, cujo instrumento mais relevante é hoje o computador, exigirá do ensino de Matemática um redirecionamento sob uma perspectiva curricular que favoreça o desenvolvimento de habilidades e procedimentos com os quais o indivíduo possa se reconhecer e se orientar nesse mundo do conhecimento em constante movimento (BRASIL, 2002, p.44).

Ainda, conforme ideias desse documento, habilidades como selecionar e analisar as informações obtidas e, a partir delas, tomar decisões, exigirá linguagem, procedimentos e formas de pensar matemático que devem ser desenvolvidos ao longo do Ensino Médio, bem como a capacidade de avaliar limites, possibilidades e adequação das tecnologias em diferentes situações.

Considerando esses aspectos e a idéia de que o uso da tecnologia contém elementos mais atraentes e diferenciados em relação às aulas de “quadro e giz”, podendo despertar nos estudantes atitudes que demonstrem um maior empenho na realização de atividades solicitadas optou-se, então, por formular uma proposta que incluísse a utilização de ferramentas computacionais para o seu desenvolvimento.

Sobre o uso dessas ferramentas, Gladcheff, Zuffi e Silva (2001, p.1) consideram que:

> O computador também pode ser considerado um grande aliado do desenvolvimento cognitivo dos alunos, principalmente na medida em que possibilita o desenvolvimento de um trabalho que se adapta a distintos ritmos de aprendizagem e favorece a que o aluno aprenda com seus erros.

Além disso, contribuiu para a decisão de utilizar ferramentas tecnológicas a estrutura física do Campus Parnaíba, a qual possui laboratórios de informática bem estruturados e equipados. Os mesmos oferecem conforto aos estudantes, os equipamentos encontram-se em perfeito estado de conservação e há acesso à *internet*. A figura 1 apresenta imagens das instalações de um desses laboratórios.

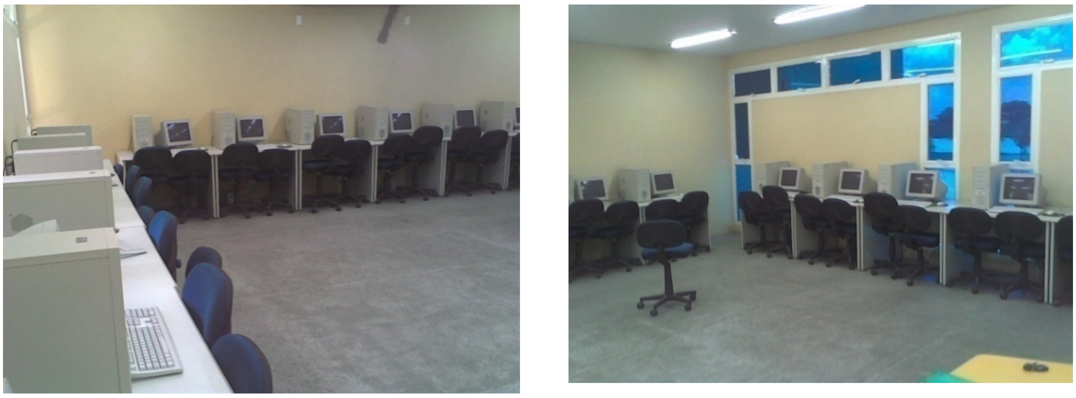


Figura 1: imagens das instalações de um Laboratório de Informática do Campus Parnaíba.

Deseja-se, dentro da proposta de trabalho, ter o computador como elemento auxiliar que, associado a um *software* considerado adequado, promova a mobilidade na construção de gráficos e possibilite o estabelecimento de conexões entre os conceitos estudados. Busca-se, também, e concordando com Gonçalves (2004), a ênfase na dimensão educacional e tecnológica que proporcione campo fértil para um trabalho o qual promova a inclusão social e a construção da cidadania.

Considerando, ainda, a utilização de programas educativos, Fernandes (2006), pondera que aulas de Matemática, com o auxílio de um *software,* podem se constituir em aulas mais dinâmicas e lúdicas, estimulando os alunos e despertando interesse aos desafios propostos.

Existe, atualmente, uma gama de programas com o propósito de contribuir para o ensino de praticamente todos os tópicos da Matemática, inclusive Funções. Na busca de um *software* adequado à proposta de trabalho e considerando um prévio conhecimento da pesquisadora, optou-se pelo *software* Winplot[2], criado por Richard Parris professor da Philips Exeter Academy e que se encontra disponível gratuitamente na *internet.* O Winplot possui versão traduzida para a língua portuguesa pelo professor Adelmo Ribeiro de Jesus, docente da Universidade Federal da Bahia. É de fácil

[2] O Apêndice 5 apresenta uma breve descrição do Winplot e de seus recursos.

operação não perdendo, contudo, a qualidade de realização de tarefas, o que o torna perfeitamente adequado aos objetivos da pesquisa.

Considera-se que a utilização do computador como ferramenta de apoio ao desenvolvimento da pesquisa propicia a ampliação de conhecimentos referentes ao mesmo, possibilitando aos estudantes explorar mais uma maneira de utilizá-lo. A utilização do *software* educativo proposto torna-se mais um, dentro da gama de *software* com os quais os estudantes potencialmente têm a oportunidade de ter contato, tendo seu uso plenamente justificado, também, em função de que os alunos investigados são do curso técnico de informática.

Também, ainda justificando a utilização do *software*, verifica-se que o mesmo propõe-se perfeitamente à realização de tarefas relacionadas à conversão de linguagem, uma vez que com ele é possível de forma hábil, a construção de gráficos de funções dos mais diferentes tipos e graus de complexidade a partir de sua representação algébrica.

Contudo, vale ressaltar, que o uso do computador em atividades de sala de aula já é bastante difundido em várias pesquisas e trabalhos científicos, não sendo tomado aqui como inovação, pois o mesmo está inserido no cotidiano da grande maioria dos brasileiros, direta ou indiretamente.

2 PROBLEMA DE PESQUISA E OBJETIVOS

A realização desta pesquisa ocorreu pelo entendimento de que são necessárias alternativas e ferramentas que viabilizem uma aprendizagem sólida e desatrelada, pelo menos em parte, do que se considera tradicional e, em certos casos, pouco eficiente na realidade escolar atual, principalmente nas escolas públicas de Ensino Médio profissionalizante.

Observa-se que, o cenário da educação básica aponta para uma adequação do conhecimento adquirido no cotidiano escolar ao que é necessário para a vida e o mercado de trabalho, tentando incluir em seu sistema, certa parcela da população que permaneceu, durante muito tempo, vivendo à margem. Nesse sentido os PCN + referem que:

> A reformulação do ensino médio no Brasil, estabelecida pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN) de 1996, regulamentada em 1998 pelas Diretrizes do Conselho Nacional de Educação e pelos Parâmetros Curriculares Nacionais, procurou atender a uma reconhecida necessidade de atualização da educação brasileira, tanto para impulsionar uma democratização social e cultural mais efetiva pela ampliação da parcela da juventude brasileira que completa a educação básica, como para responder a desafios impostos por processos globais, que têm excluído da vida econômica os trabalhadores não-qualificados, por conta da formação exigida de todos os partícipes do sistema de produção e de serviços (BRASIL, 2002, p. 07e 08).

Desse modo, não se pode mais admitir um ensino básico e, no caso, o Ensino Médio profissionalizante, do qual trata esse trabalho, atrelado a antigos modelos educacionais. A utilização de propostas e recursos metodológicos para um trabalho diferenciado é um desafio e o educador contemporâneo, entre outras habilidades, deve ser criativo, utilizando a seu favor ferramentas que favoreçam a aprendizagem dos estudantes. Interdisciplinaridade e acesso à tecnologia deve ser rotina em sala de aula.

Nesse contexto questiona-se:

O ensino de Funções Polinomiais de 1º e 2º graus a um grupo de estudantes do Campus Parnaíba será favorecido com a utilização de uma sequência didática que relacione um *software* educacional a atividades com lápis e papel?

Buscando responder à questão proposta, a pesquisa tem por objetivo investigar, junto a um grupo de estudantes do IFPI – Campus Parnaíba, a viabilidade de utilização de uma sequência didática que alie um *software* educativo e atividades com lápis e papel para o estudo de Funções Polinomiais de 1º e 2º graus.

Para viabilizar o alcance do objetivo geral, o mesmo está detalhado em objetivos específicos, como segue:

- identificar as principais dificuldades de aprendizado relacionadas à construção e interpretação de gráficos de Funções no 1º módulo do curso PROEJA;
- organizar e aplicar uma sequência didática, que incorpore a utilização de um *software* educativo, para o desenvolvimento dos conceitos relativos a Funções Polinomiais de 1º e 2º graus;
- investigar o desenvolvimento dos conceitos propostos a partir da sequência didática aplicada.

Com base nos objetivos estabelecidos, buscando apresentar soluções ao problema de pesquisa, foram elaboradas atividades em uma sequência didática para concretização da investigação aqui apresentada.

3 ORIENTAÇÕES TEÓRICAS

3.1 Funções: Tópicos da Evolução Histórica e Orientações Curriculares Brasileiras

A noção de Função foi estabelecida, matematicamente, em tempos mais ou menos recentes, devido a dificuldades intrínsecas e, provavelmente, inerentes à sua formalização bastante sofisticada (BARUFI, 2001, p.5). Porém, registros da relação funcional são encontrados desde a antiguidade.

Um exemplo dessa afirmação pode ser encontrado em Oliveira (1997, p. 14), o qual relata que por volta de 2000 a.C, o povo babilônio já realizava a confecção de tabelas sexagesimais de quadrados e de raízes quadráticas, cubos e raízes cúbicas, revelando indícios de que concebia o conceito de função, além de demonstrar um "instinto funcional".

O autor destaca que, apesar desse instinto, para os babilônios, cada problema era uma nova situação que exigia uma nova análise, visto que não haviam desenvolvido procedimentos ou regras gerais para resolução de problemas semelhantes.

Na Grécia antiga, os pitagóricos aparecem como precursores da idéia de função a partir do estudo da interdependência quantitativa de diferentes quantidades físicas. Nesse sentido, Oliveira (1997, p. 15) relata o estudo realizado sobre a relação existente entre o comprimento e a altura da nota emitida por cordas da mesma espécie: estas, quando pinçadas com tensões iguais, revelaram uma interdependência inesperada, até então, entre número, espaço e harmonia.

No século XVI, o problema central da Física era o estudo do movimento. As necessidades da vida diária e o desenvolvimento da ciência conduziram a Física a esse problema e a outros, onde aparece a interdependência de magnitudes variáveis (ALEKSANDROV et all, 2003).

No início do século XVII, quando o estudo da natureza começou a se basear na observação de fenômenos e no estabelecimento de leis que procuravam explicá-los, surgiram as primeiras idéias sobre o conceito de função. Galileu Galilei (1564-1642) e Isaac Newton (1643-1727) utilizaram, em seus trabalhos, as noções de lei e dependência entre fenômenos, que estão diretamente ligados ao conceito de função. Galileu não buscava descobrir as causas dos fenômenos da natureza, mas, descrevê-los algebricamente para que, de posse das condições iniciais, pudesse prever o comportamento de determinados acontecimentos mediante equações (Chaves, 2004).

Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) foi quem, pela primeira vez, utilizou o termo função para designar um certo tipo de fórmula matemática. Ele a concebia, segundo Baumgart (1992, p.83), “como qualquer quantidade associada a uma curva, como as coordenadas de um ponto da curva, o comprimento de uma tangente a curva e assim por diante”.

Não obstante, o conceito formal de função, tal como conhecido atualmente, só começou a ser configurado, quando, em 1718, Jean Bernoulli, a partir de um critério algébrico, utilizou o termo para designar valores obtidos a partir de operações entre variáveis e constantes representando as Funções através da notação Φx (CHAVES, 2004).

Entretanto, de acordo com Boyer (1996), foi Leonhard Euler (1707-1783) quem cunhou a expressão $f(x)$ para designar uma função cuja variável independente é x. Utilizando um critério geométrico, Euler definia função como a relação entre duas coordenadas dos pontos de uma curva traçada a mão em um plano.

Apesar do conceito de função ter sido amplamente utilizado durante o século XVIII, a definição que mais se aproximou da atualmente aceita foi apresentada apenas na primeira metade do século XIX, pelo matemático alemão Peter G. Lejeune Dirichlet (1805-1859). Segundo Baumgart (1992, p.84), Dirichlet afirmava que “y é uma função de x se y toma um ou mais valores definidos para cada um de certos valores que x pode assumir em um dado intervalo x_0 a x_1”. Essa definição se diferencia da atual pelo fato de que, na época, ainda não tinha sido desenvolvida a Teoria dos Conjuntos.

A definição de função atualmente utilizada é atribuída a Bourbaki (Século XX) – grupo de matemáticos franceses, cuja ocupação era estudar e desenvolver teorias matemáticas (Eves, 2002). Dando maior ênfase à área da álgebra abstrata, dentro do universo da Teoria dos Conjuntos, essa definição foi proposta em 1939 e pode ser expressa por:

Sejam A e B dois conjuntos, uma relação entre uma variável de $x \in A$, e uma variável $y \in B$ é dita relação funcional se qualquer que seja $x \in A$, existe um único elemento y de B, que esteja na relação considerada.

Ao acompanhar essa breve cronologia do desenvolvimento do conceito de Função e considerando a complexidade de relações que a mesma exige como objeto mental, é possível vislumbrar a possibilidade de tal processo construtivo ser, pelo menos em parte, desenvolvido na sala de aula. Isso pode ocorrer a partir de situações didáticas conduzidas pelo professor de forma gradativa, objetivando a aprendizagem dos estudantes.

Essa possibilidade toma corpo quando, ao analisar as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (Brasil, 2006), observa-se que elas indicam que o estudo de funções pode ser iniciado com uma exploração qualitativa das relações entre duas grandezas em diferentes situações. Tal afirmação permite acreditar que a idéia de função deva ser construída, por exemplo, numa perspectiva de observação dos acontecimentos que possam ser retirados de situações cotidianas.

Outro aspecto também apontado refere-se à possibilidade de se desenvolver, junto aos alunos, um trabalho que considere as diferentes formas de representação da relação funcional (língua natural, algébrica, gráfica) como caminho para apropriação de idéias e conceitos relativos ao tema.

Nesse sentido, as Orientações Curriculares indicam que:

> Também é interessante provocar os alunos para que apresentem tantas outras relações funcionais e que, de início, esbocem qualitativamente os gráficos que representam essas relações, registrando os tipos de crescimento e decrescimento (mais ou menos rápido). É conveniente solicitar aos alunos que expressem em palavras uma função dada de forma algébrica, por exemplo, $f(x) = 2x + 3$, como a função que associa a um dado valor real o seu dobro, acrescido de três unidades (BRASIL, 2006, p. 72).

Esse tipo de abordagem poderá facilitar o entendimento do estudante sobre o tema, além de propiciar-lhe a identificação do conceito dentro de outras situações e em outras disciplinas do currículo, ficando em perfeita sintonia com as orientações gerais para o Ensino Médio, explicitadas nos PCNEM, quando apontam que:

> O currículo do Ensino Médio deve garantir também espaço para que os alunos possam estender e aprofundar seus conhecimentos sobre números e álgebra, mas não isoladamente de outros conceitos, nem em separado dos problemas e da perspectiva sócio-histórica que está na origem desses temas. Estes conteúdos estão diretamente relacionados ao desenvolvimento de habilidades que dizem respeito à resolução de problemas, à apropriação da linguagem simbólica, à validação de argumentos, à descrição de modelos e à capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real. (BRASIL, 2002. p. 44)

Em virtude de tais orientações, entende-se como conveniente a utilização de situações e problemas relacionados ao cotidiano dos estudantes para dar inicio à investigação que visa ao ensino de funções polinomiais de 1º e 2º graus, apresentada neste trabalho.

Partindo dessa ideia, foi proposta uma sequência didática estruturada e organizada seguindo os níveis de compreensão do conceito de função proposto por Bergeron e Herscovics (1982), articulado à Teoria das Representações Semióticas de Duval (2004, 2005), suporte teórico da investigação que será apresentado posteriormente.

Com tal proposta de trabalho, esperava-se que, em médio prazo, fosse possível a obtenção de subsídios ao avanço para os modelos funcionais, lineares e quadráticos, e posteriormente, ao modelo exponencial. Esse último não tratado durante a investigação, mas constava do plano de estudos do curso investigado.

Desejava-se, também, por meio de um entendimento global de propriedades figurais e do estudo do comportamento de "famílias de funções", a construção de gráficos para as funções polinomiais propostas, visto que a elaboração desse tipo de representação, a partir da simples transcrição de dados tomados em uma tabela numérica, não se considera suficiente para permitir um avanço na compreensão do comportamento das Funções em questão.

Nessa perspectiva de aprendizagem, merece destaque a afirmação que Coll faz sobre a obtenção de conceitos por parte dos estudantes. O autor afirma que "[...] a aquisição de conceitos baseia-se na aprendizagem significativa, que requer uma atitude ou orientação mais ativa com respeito a própria aprendizagem, na qual o aluno deve ter mais autonomia na definição de seus objetivos, suas atividades e seus fins" (COLL, 2000, p. 23) considerando, ainda, que o tipo de aprendizagem será determinada basicamente pela abordagem dada a mesma pelo professor.

Verifica-se, com isso, que o foco dado aos conteúdos é que nortreará a relevância da aprendizagem a qual se deseja que o estudante adquira. Quanto mais significativa, mais a mesma ajudará a formação de conceitos e esses por sua vez, oferecerão suporte para novas aprendizagens. No Ensino Médio profissionalizante, este é, sem dúvida, o grande desafio.

Seguindo as orientações curriculares descritas nos PCNEM, dentro da definição do papel que o Ensino Médio deve desempenhar, também é enfatizada a necessidade de uma visão ampla no que se refere aos aspectos de conteúdos tecnológicos, associados ao aprendizado científico e matemático, como parte essencial da formação cidadã em sentido universal e não somente no sentido profissionalizante.

Nesse sentido, optou-se pelo desenvolvimento de uma proposta de ensino que incorpora a utilização de uma ferramenta tecnológica específica, no caso, o *software* Winplot, do qual os estudantes fizeram uso durante as atividades e que já foi apresentado e descrito anteriormente.

Salienta-se a preocupação que mais uma vez é demonstrada, pelo caráter formativo que a escola exerce perante a sociedade, bem como a responsabilidade que a mesma possui no contexto de aprendizagem em que está inserida, considerando-se, nesse caso, que aprender Funções é bem mais que efetuar alguns cálculos e fazer um "desenho" de um gráfico.

Diante disso, é necessário voltar aos significados que cada aprendizagem traz consigo e mostrando como é importante que os conhecimentos adquiridos no ambiente escolar estejam voltados para a vida fora da escola.

Sobre esse aspecto, as Orientações Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN + (BRASIL, 2002) afirmam que, na sociedade atual, o conhecimento matemático é necessário em uma grande diversidade de situações, como apoio a outras áreas do conhecimento, como instrumento para lidar com situações da vida cotidiana ou, ainda, com forma de desenvolver habilidades de pensamento.

Além disso, os próprios PCNEM afirmam que o estudo da Matemática deve proporcionar ao estudante a oportunidade de:

- compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que lhe permitam desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral;
- aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;
- analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade;
- desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo;
- utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;
- expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática;

- estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo;
- reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações;
- promover a realização pessoal mediante o sentimento de segurança em relação às suas capacidades matemáticas, o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação.

Assim, dentro do contexto desta pesquisa, é oportuno lembrar que são finalidades do ensino de Matemática, à luz dos PCNEM, assumir valor formativo, ajudar a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, bem como desempenhar papel instrumental, constituindo-se em ferramenta que servirá para a vida cotidiana e para inúmeras atividades humanas, devendo o professor buscar atingir essas finalidades com suas estratégias de ensino.

Além disso, a Matemática como ciência, com suas definições, demonstrações, encadeamentos conceituais e lógicos constrói novos conceitos e estruturas a partir de outras já existentes, validando intuições, dando sentido a técnicas aplicadas e configurando o desenvolvimento de capacidades mais amplas, como a abstração, o raciocínio, a resolução de problemas, a investigação, a análise e compreensão de fatos da realidade.

Busca-se, assim, um ensinar e aprender Matemática dentro de contextos que propiciem o desenvolvimento de competências e habilidades que são basicamente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do estudante, além de capacitá-lo a compreender e interpretar situações, para se ajustar a linguagens específicas, a argumentos, análise e avaliação, de modo a tirar conclusões próprias, tomar decisões e muitas outras ações necessárias à sua formação.

3.2 Os Níveis de Compreensão do Conceito de Função

Atualmente, a introdução do conceito de Função aos estudantes baseia-se na ideia elementar de par ordenado e no estabelecimento de relações entre conjuntos. Aliada à tradicional organização linear do currículo de Matemática, essa abordagem transformou o estudo de Funções, no Ensino Médio e nos primeiros semestres dos cursos universitários da área científica e tecnológica, em algo extremamente abstrato e formal (KAIBER, 2002).

Barufi (2001) considera que, em um curso de nível médio, não se deve ter como objetivo alcançar uma formalização completa no estabelecimento do conceito de função, uma vez que o mesmo traz, dentro de si, um grau de dificuldade epistemológica muito grande para os alunos.

Zuffi (2001) relata que, em pesquisa por ela realizada, foi possível detectar que os mesmos obstáculos epistemológicos que ocorriam com os alunos, também surgiam para os professores investigados. Dificuldades em determinar variáveis dependentes e independentes, bem como a utilização de apenas o conjunto dos inteiros como domínio de funções, foram amplamente identificadas, também, entre os professores.

Considerando o grau de complexidade que conceito de Função abrange, entende-se que sua aquisição não somente necessita do desenvolvimento prévio das idéias básicas de regularidade, existência de variável, dependência e generalização, como também de um trabalho que possibilite ao estudante transitar entre a concepção de variável discreta e contínua e a atribuição de significados a variáveis que assumam valores no universo dos números reais.

Tinoco (1998) considera que as pesquisas sobre o tema função estão, em sua grande maioria, voltadas para o desenvolvimento do conceito formal e/ou utilização de máquinas de calcular ou computadores nesse processo. Considera, citando Leal (1990), que a falta de uma preparação dos alunos para a construção do conceito de função, ao longo dos sete primeiros anos de escolaridade, é uma das principais responsáveis pelas dificuldades de aprendizagem desse tópico. A autora cita, ainda, Sierpinska (1992, p.45) a qual considera que "a falta de familiaridade com a álgebra torna a compreensão das funções muito difícil, se não impossível".

Tal quadro evidencia a necessidade de elaboração de instrumentos de trabalho para o professor que direcionem, aprofundem e fortaleça tanto aspectos referentes ao seu conhecimento sobre o tema, como ao seu processo de ensino e aprendizagem.

Nesse sentido, buscou-se inspiração em trabalho desenvolvido para alunos a partir da 5ª série do Ensino Fundamental e apresentado por Tinoco (1998). Nesse trabalho, a idéia é de que a construção das noções e o conceito de Função devem passar por diferentes estágios e só se efetivarem de maneira mais formal no Ensino Médio.

Entende-se que, concordando com Barufi (2001), como se trata de estudantes do nível médio, não se pretende que essas ideias e conceitos sejam, de imediato e com profundidade, entendidos e dominados. Na verdade, o ideal é que essa construção tenha início já no Ensino Fundamental, sendo ampliada e aprofundada no Ensino Médio.

Assim, a sequência didática apresentada nesta investigação procurou resgatar, para estudantes de um 1º ano de Ensino Médio, todas as etapas tomadas como essenciais para a construção do conceito de Função, considerando os níveis de compreensão do mesmo, estabelecidos por Bergeron e Herscovics (1982).

Os autores propõem um modelo que considera diferentes níveis para a compreensão do conceito de Função, o qual é de inspiração construtivista, sendo que os níveis e a ordenação dos conceitos refletem uma visão, por um lado, epistemológica, e por outro, estruturalista do mesmo. Assim, essa compreensão passa, necessariamente, por quatro níveis: a compreensão intuitiva, a matematização inicial, a abstração e a formalização.

> Cada um desses níveis apresenta características gerais próprias que vão desde a utilização do conhecimento informal do cotidiano passando pela organização e quantificação das primeiras noções intuitivas, pela generalização que possibilita que o conceito se destaque do procedimento efetuado para alcançá-lo até a utilização da linguagem simbólica que caracteriza a formalização (KAIBER, 2002, pp. 2-3).

Segundo Bergeron e Herscovics (1982), no nível de **compreensão intuitiva** não está envolvido, propriamente, o conceito de Função, mas sim um conceito prévio. Baseados em idéias piagetianas, consideram que a noção intuitiva de função aparece muito cedo nos estudantes tendo, como ponto de partida, operações e casualidade, resultado, tanto da abstração física, quanto da reflexiva. Esse nível, constituído por conhecimentos informais, caracteriza-se pela utilização de conceitos prévios, estando baseado em percepções visuais, ações espontâneas e em aproximações nada refinadas.

O nível de **matematização inicial** é o primeiro passo para a organização e quantificação das primeiras noções intuitivas. Essas idéias intuitivas, associadas a conhecimentos prévios, constituem a primeira construção do conceito de Função. Nesse nível, o conceito, frequentemente, é confundido com o procedimento que leva a sua construção. Estão presentes o reconhecimento de variáveis dependentes e independentes, a construção e interpretação de gráficos cartesianos simples associados a situações concretas e o reconhecimento do domínio analisado no contexto.

A **abstração** é o nível em que o conceito se destaca do procedimento que levou a sua construção, adquirindo existência própria. Evidencia-se pela generalização, invariância do objeto matemático e reversibilidade das transformações. Nesse nível, fica caracterizada a relação funcional, que começa a ser entendida independente de contextos, sendo representada por expressões analíticas e gráficos cartesianos.

O nível de **formalização** caracteriza-se pela utilização da linguagem simbólica, justificação lógica das operações e descontextualização, considerando-se que tenha ocorrido uma abstração prévia.

A figura 2 apresenta um quadro com a descrição dos níveis de compreensão do conceito de função, adaptado de Tinoco (1998).

Compreensão Intuitiva	**Matematização Inicial**	**Abstração**	**Formalização**
• Reconhecimento de dependência (não quantificada). • Estabelecimento de leis de formação simples e visuais. • Construção e interpretação de tabelas e gráficos de coluna e setor.	• Quantificação das leis. • Reconhecimento de variáveis dependentes e independentes. • Interpretação de gráficos cartesianos. • Construção de gráficos cartesianos simples. • Reconhecimento do Domínio (analisado no contexto).	• Escrita de expressões analíticas. • Distinção entre equações e funções. • Construção e interpretação de gráficos convencionais e não-convencionais. • Caracterização de relações funcionais.	• Utilização de linguagem simbólica (notação): $F: A \rightarrow B$, $y = f(x)$ • Domínio, imagem independente de contextos. • Classificação. • Operações com funções.

Figura 2: níveis de Compreensão do Conceito de Função.

Assim, a elaboração da sequência didática, elemento chave dessa investigação, tomou como elementos norteadores os descritores dos níveis estabelecidos, buscando a construção de problemas e atividades que possibilitassem o trânsito pelos mesmos. O ponto de partida dessas atividades considerou a apresentação de situações ligadas ao dia-a-dia, como forma de possibilitar ao estudante a familiarização com as várias formas de representação de Funções, ou seja, verbal, gráfica e analítica, buscando apropriar-se de idéias e conceitos relativos ao tema. A utilização de um *software* educativo foi o caminho encontrado para ampliar as possibilidades, tanto de acesso à tecnologia, como de apropriação do conhecimento em questão.

Concordando com Tinoco (1998, p.7), que considera que a "flexibilidade na passagem de uma representação a outra e o uso da representação em linguagem corrente, oralmente e por escrito, são fundamentais para a construção do conceito de função", entendeu-se ser oportuno buscar, na Teoria das Representações Semióticas de Duval, respaldo para enfocar esses aspectos ao longo da investigação.

3.3 A Teoria das Representações Semióticas

O desenvolvimento das noções e conceitos relativos a Funções passa, necessariamente, pelo desenvolvimento e apropriação, por parte do estudante, das diferentes formas de representação desse objeto matemático.

Representações por meio de sistemas de escritas algébricas e simbólicas (expressões matemáticas) e gráficas (gráficos formais e informais, tabelas) devem somar-se a representações em linguagem natural (oralmente ou por escrito). Porém, em termos de construção de conhecimento, a Teoria das Representações Semióticas de Duval (2004,2005) preconiza que não basta apenas representar, mas, fundamentalmente, articular essas diferentes formas de representação. Assim, buscando discutir aspectos dessa teoria que contribuam para a pesquisa em desenvolvimento, seus princípios passam a ser apresentados.

A teoria das Representações Semióticas é de cunho cognitivo e originou-se nos trabalhos do filósofo e psicólogo de formação Raymond Duval, surgindo em pesquisas concernentes à aquisição do conhecimento matemático, à organização de situações referentes à aprendizagem desse conhecimento e problemas relativos a essa aprendizagem.

Como aporte teórico à investigação aqui apresentada, entendeu-se que tal teoria possui características bem apropriadas aos objetivos da pesquisa. Esse entendimento deu-se, principalmente, em virtude da forte ênfase dada à utilização de representações, as quais Duval (2004, 2005) denominou de semióticas, como forma primordial de acesso e aquisição do conhecimento matemático. Ressalta-se que, embora seja feita uma explanação que revele aspectos da teoria como um todo, a investigação vai se apoiar em pontos específicos, que serão identificados posteriormente.

Nesse sentido, Machado (2005) pondera que uma análise do conhecimento matemático é, essencialmente, uma análise do sistema de produção das representações semióticas referente a esse conhecimento. Para a autora:

> A maneira matemática de raciocinar e de visualizar está intrinsecamente ligada à utilização das representações semióticas, e toda comunicação em matemática se estabelece com base nessas representações. Assim, a abordagem cognitiva adotada por Duval, desenvolvida em estreita relação com o "funcionamento" matemático, no que ele tem de específico, torna sua teoria operatória, por excelência (MACHADO, 2005, p.8).

Para melhor entender do que trata a teoria de Duval, é importante a reflexão sobre três questões que o autor sugere como pontos de partida para o conhecimento da mesma: “Como compreender as dificuldades muitas vezes insuperáveis que muitos alunos têm na compreensão da Matemática? Qual a natureza dessas dificuldades? Onde elas se encontram?” (DUVAL, 2005, p.11).

Duval afirma que tais questionamentos recebem amplitude e importância particulares, em virtude da exigência atual de uma maior formação inicial em Matemática que os alunos devem ter, no sentido de uma preparação adequada para enfrentar os desafios do ambiente informático e tecnológico atuais. O autor pondera, ainda, que, para responder a essas questões, não é possível ficar restrito ao campo matemático ou da sua história. É necessária uma abordagem cognitiva que contribua para o desenvolvimento geral das capacidades de visualização, raciocínio e análise dos estudantes. Nesse sentido, para o autor:

> A originalidade da abordagem cognitiva está em procurar inicialmente descrever o funcionamento cognitivo que possibilite a um aluno compreender, efetuar e controlar ele próprio a diversidade dos processos matemáticos que lhe são propostos em situação de ensino (DUVAL, 2005 p. 12).

A teoria de Duval assegura que os sistemas cognitivos necessários para aceder aos objetos matemáticos são específicos, ou seja, são aqueles cujo desenvolvimento e aquisição são próprios da atividade matemática. Indica, ainda, que a atividade cognitiva requerida pela Matemática não deve ser procurada nos conceitos, mas nas seguintes características: na importância primordial das representações semióticas e na grande variedade de representações semióticas utilizadas em Matemática.

A importância das representações semióticas, também, é destacada por Flores (2006), que considera tais registros essenciais, tanto para a criação de objetos matemáticos, como para a sua apreensão. Evidencia, indicando episódios e períodos na história da Matemática, o papel central do desenvolvimento das representações semióticas na evolução do pensamento matemático.

Sistemas de numeração, escritas algébricas e formais, figuras geométricas, representações gráficas e a língua natural são apontadas por Duval (2004, 2005) como parte da variedade de representações semióticas utilizadas em Matemática. Para o autor, quatro tipos diferentes de registros podem ser encontrados, na atividade matemática, considerando duas características: serem algoritmizáveis ou não e apresentarem representação discursiva ou não.

A figura 3 apresenta uma classificação dos diferentes tipos de registros, segundo Duval (2005, p.14).

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO-DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: os tratamentos não são algoritmizáveis.	Língua natural. Associações verbais (conceituais). Forma de raciocinar: • argumentação a partir de observações e crenças; • dedução válida a partir de definição ou de teoremas.	Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3): • apreensão operatória e não somente perceptiva; • construção com instrumentos.
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: os tratamentos são principalmente algoritmos.	Sistemas de escritas: • numéricas (binária, decimal, fracionária,...); • algébricas; • simbólicas (figuras formais). Cálculo	Gráficos cartesianos: • mudanças de sistemas de coordenadas; • interpolação e extrapolação.

Figura 3: classificação dos diferentes registros de representação, segundo Duval.

O autor considera, ainda, que a originalidade da atividade matemática reside na mobilização simultânea, de ao menos, dois diferentes registros de representação, ou na possibilidade de trocar de registros (DUVAL, 2005).

Outro aspecto fundamental da teoria é a existência de dois tipos de transformações de representações semióticas, os quais são radicalmente diferentes: os *tratamentos* e as *conversões*. O autor salienta que a distinção entre tratamentos e conversões é decisiva para toda a análise do funcionamento cognitivo da atividade matemática, tanto sob a ótica do ensino, como da aprendizagem. A figura 4 apresenta um esquema que evidencia as diferenças apontadas pelo autor.

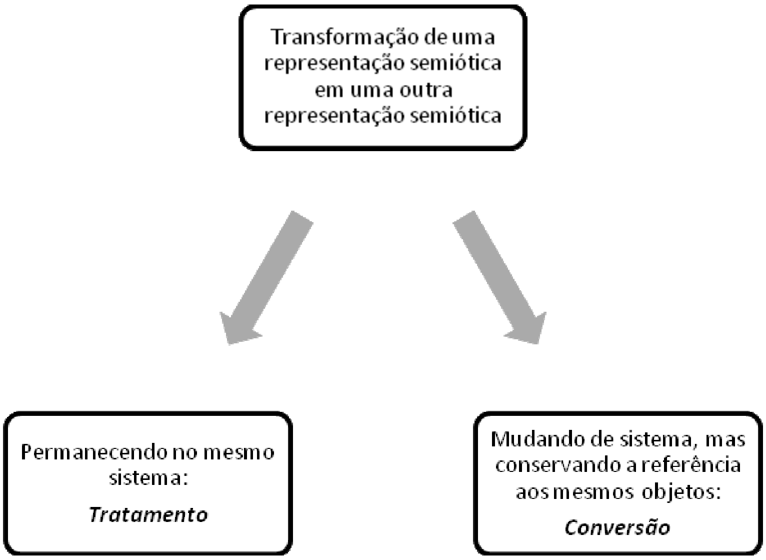


Figura 4: esquema dos tipos de transformações de representações semióticas

Os tratamentos, segundo o autor, são transformações de representação dentro de um mesmo registro, correspondendo a procedimentos de justificação. Como exemplos, podem ser citados: resolver equações ou sistemas de equações, completar uma figura segundo critérios de simetria, efetuar um cálculo ficando estritamente no mesmo sistema de escrita ou representar os números.

Por outro lado, as conversões são transformações de representação que se efetivam por meio da mudança de registro, conservando os mesmos objetos focados. A capacidade de converter implica a coordenação de registros mobilizados, podendo ser citado como exemplo passar da escrita algébrica de uma função à sua representação gráfica.

O autor pondera que, quase sempre, a transformação realizada é somente de tratamento, pois essa corresponde a procedimentos de justificação, o que é mais facilmente entendido pelos estudantes. Já as conversões ficam em segundo plano, uma vez que os estudantes demonstram dificuldades em reconhecer o mesmo objeto se ele for apresentado através de duas representações diferentes. Contudo, Duval salienta:

> Mas, do ponto de vista cognitivo, é a atividade de conversão que, ao contrário, aparece como a atividade de transformação representacional fundamental, aquela que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão. No entanto, essa diferença entre o estrito ponto matemático e o ponto de vista cognitivo não é muitas vezes levada em conta nas pesquisas em didática e no ensino de Matemática (DUVAL, 2005, p.16).

Entretanto, o autor enfoca que é importante ter clareza com relação à irredutibilidade da conversão a um tratamento. Converter não deve ser simplesmente associado a “traduzir”. Ela passa, necessariamente, pela apreensão global e qualitativa do objeto a ser estudado. Duval exemplifica tal afirmação quando diz que a conversão entre gráficos e equações supõe que se consiga levar em conta, de um lado, as variáveis e, de outro, os valores escalares das equações. Isso implica a articulação entre as variáveis cognitivas específicas do funcionamento de cada um dos dois registros.

Além disso, quando se fala de conversões, o autor considera que ambos os sentidos da mesma devem ser considerados e não se deve pensar que, efetuando um sentido, o outro sentido está automaticamente sendo efetuado. Duval classifica esse fenômeno como a heterogeneidade dos dois sentidos da conversão.

Pode-se, ainda, de acordo com a teoria, observar o fenômeno das variações de congruência e de não-congruência, o que é esclarecido quando o autor elucida que:

> Para analisar a atividade de conversão, é suficiente comparar a representação no registro de partida com a representação terminal no registro de chegada. Esquematicamente, duas situações podem ocorrer: ou a representação terminal transparece na representação de saída e a conversão está próxima de uma situação de simples codificação – diz-se então que há congruência –, ou ela não transparece absolutamente e se dirá que ocorre a não-congruência (DUVAL, 2005, p. 19).

A teoria de Duval assegura que a compreensão em Matemática implica a capacidade de mudança de registro, não devendo, de forma alguma, ser confundido o objeto matemático com sua representação e que o acesso aos objetos matemáticos passa necessariamente, por representações semióticas. O autor coloca essas idéias em termos de um paradoxo da compreensão em Matemática: como podemos não confundir um objeto e sua representação se não temos acesso a esse tal objeto a não ser por meio de sua representação?

Duval afirma que tal problema não se verifica em outros domínios do conhecimento científico, pelo menos não em etapas mais elementares, indicando que a dificuldade de associação entre objeto e representação se dá em virtude de o objeto representado não poder ser identificado com o conteúdo da representação que o torna acessível.

Desse modo, o ponto decisivo e pouco observado é que o conteúdo de uma representação depende mais do registro de representação do que do objeto representado. Isso porque, passar de um registro a outro implica não somente a mudança de registro, mas também em explicar propriedades e aspectos diferentes de um mesmo objeto.

Seguindo esse raciocínio, verifica-se que é a articulação dos registros que constitui a condição de acesso à compreensão matemática, e não o inverso (DUVAL, 2005, p. 22).

Entende-se que propiciar ao estudante a possibilidade de reconhecer um objeto matemático por meio de múltiplas representações, feitas em diferentes registros de representação, é condição fundamental para a transferência ou modificação de formulações e representações de informações durante a resolução de um problema. Duval alega que a atividade matemática deve ser estudada naquilo que ela tem de específico, diferentemente das ciências baseadas na observação e experimentação. Dentro desse enfoque, o autor assegura que:

> [...] a utilização de um modelo comum para a aquisição de todos os conhecimentos, matemáticos e não-matemáticos, arrisca ser, então, pouco pertinente e pouco operatória para esclarecer os problemas de aprendizagem em matemática (DUVAL, 2005, p. 23).

Em virtude dessa posição, Duval apresenta a necessidade de responder ao seguinte questionamento referente às condições para pesquisa sobre processos de aprendizagem: Como estudar os processos de aprendizagem da Matemática?

Para o autor, os processos de aprendizagem em Matemática implicam fenômenos complexos, uma vez que é necessária a articulação entre as exigências científicas próprias do conteúdo e o funcionamento cognitivo do conhecimento humano, de modo que, sendo objetivo de pesquisa evidenciar mecanismos de compreensão da Matemática, aspectos do funcionamento cognitivo devem ser descritos.

Dentro da pesquisa sobre os processos de aprendizagem da Matemática, segundo Duval, os métodos a serem utilizados devem ser sempre relacionados à natureza dos fenômenos a estudar, garantindo a observação verdadeira das produções dos estudantes, com a distinção cuidadosa do que se sobressalta no tratamento em um registro e do que se sobressalta em uma conversão, diferenciando mudança de registros e mobilização simultânea de dois registros diferentes considerando, contudo, a natureza monofuncional ou multifuncional do mesmo, em conformidade com o já explicitado no quadro da figura 3.

Duval (2005) também enfatiza que a utilização da conversão como instrumento de análise de produção dos estudantes implica, por um lado, colocar em evidência as variáveis cognitivas próprias do funcionamento de cada registro e, por outro, explorar as variações de congruência e não-congruência que podem surgir entre dois registros nas múltiplas representações dos objetos matemáticos. O mesmo lança duas questões indispensáveis à pesquisa da aprendizagem matemática: quais os critérios para categorizar os dados coletados e para organizar os resultados interpretáveis? E qual o modelo matemático para descrever as condições da aquisição de conhecimentos matemáticos?

Como resposta à primeira questão, ele explica que aquilo que na visão matemática, é tido como acerto ou erro, não tem nenhum valor do ponto de vista cognitivo, os quais considera um agrupamento de itens para determinar os acertos, de modo que:

> É necessário ser capaz de reconhecer no que diferem duas representações cujas componentes significantes, salvo uma, são as mesmas, ou que superficialmente parecem diferir somente por uma única componente, a qual na realidade combina duas diferenças (DUVAL, 2005, p. 27).

Já para o segundo questionamento, o autor defende que o modelo deve estar centralizado nas condições cognitivas de compreensão, ou seja, condições de acesso aos objetos matemáticos, pois:

> Desse ponto de vista, as representações semióticas – ou, mais exatamente, a diversidade dos registros de representações – têm papel central na compreensão. A compreensão requer a coordenação dos diferentes registros. Ora, uma tal coordenação não se opera espontaneamente e não é conseqüência de nenhuma "conceitualização" a – semiótica (DUVAL, 2005 p. 29).

Duval defende, em sua teoria, que se analisem as dificuldades de aprendizado, dando prioridade às conversões das representações e não aos tratamentos, sendo necessária a perfeita distinção desses tipos de transformações o que, segundo o autor, raramente ou jamais é feito em virtude da crença de que conversão seria apenas uma forma particular de tratamento.

Ainda de acordo com o autor, também é equivocada a idéia de que a conversão depende de uma atividade puramente mental, lembrando que é enganosa a idéia de que todos os registros de representações de um mesmo objeto tenham igual conteúdo ou que se deixem perceber uns nos outros (DUVAL, 2005, p. 31).

Considerando os aportes da Teoria das Representações Semióticas de Duval, entende-se que, principalmente em relação ao enfoque cognitivo, a mesma oferece o suporte apropriado à elaboração da sequência didática, principal instrumento de investigação para a pesquisa aqui apresentada, além de apresentar informações importantes à análise das produções dos estudantes do grupo investigado. Embora a teoria refira-se, prioritariamente, à aprendizagem, entende-se que uma leitura com foco no ensino poderá indicar boas alternativas para o efetivo trabalho do professor em sala de aula.

Assim, considera-se que a teoria de Duval, aliada e articulada ao estudo dos níveis de compreensão do conceito de Função descritos por Bergeron e Herscovics se constitui em um aporte bastante sólido para o planejamento de uma ação com foco no ensino e aprendizagem de Funções.

4 ORIENTAÇÕES METODOLÓGICAS

4.1 O Grupo Investigado

A investigação teve como local o Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia do Piauí, em seu Campus situado na cidade de Parnaíba. Parnaíba é uma cidade que está localizada, ao norte do estado do Piauí, na região litorânea, a cerca de 340 quilômetros da capital Teresina. De acordo com dados do senso populacional do IBGE de 2007 apresenta uma população de cerca de 140.839 habitantes.

O Campus Parnaíba foi inaugurado no ano de 2007 (com o nome de UNED – Parnaíba, uma vez que a Instituição ainda era Centro Federal de Educação Tecnológica do Piauí) e, na ocasião de sua implantação, foram oferecidos cursos técnicos, com duração de três semestres, em Administração, Edificações, Eletrotécnica e Informática, destinados a estudantes que possuíssem pelo menos o primeiro ano do Ensino Médio regular ou equivalente. O Centro também oferecia o Ensino Médio Integrado ao Ensino Técnico em Edificações, Eletrotécnica e Informática, esses com duração de quatro anos e destinados a alunos oriundos do Ensino Fundamental.

Além dos cursos citados houve, na ocasião, a implantação do curso profissionalizante integrado ao Ensino Médio na modalidade Educação de Jovens e Adultos (EJA). O ingresso dessa nova turma suscitou o interesse na realização de uma investigação que acompanhasse seu desenvolvimento, na disciplina de Matemática.

Desse modo, a investigação contou com a participação de um grupo composto de 24 estudantes do curso noturno do PROEJA, Programa Nacional de Integração da Educação Profissional com a Educação Básica na Modalidade de Educação de Jovens e Adultos. Esse programa foi idealizado com a finalidade de oferecer oportunidade de retomada dos estudos a uma parcela da população que, por algum motivo, tenha abandonado a sala de aula em alguma etapa de sua vida.

O documento base do programa, datado de agosto de 2007, considera que:

> A Educação de Jovens e Adultos (EJA) no Brasil, como modalidade nos níveis Fundamental e Médio, é marcada pela descontinuidade e por tênues políticas públicas, insuficientes para dar conta da demanda potencial e o cumprimento do direito, nos termos estabelecidos pela constituição federal de 1988 (DOCUMENTO BASE DO PROEJA, 2007, p. 9).

O documento enfatiza que, várias vezes, tais políticas resultaram de iniciativas individuais de pequenos grupos voltados, em sua maioria, para o âmbito da alfabetização, não acompanhando o avanço das políticas públicas educacionais que vêm aumentando a oferta de matrículas para o Ensino Fundamental e Médio.

O perfil da clientela que procura por esse tipo de ensino, em sua maioria, são pessoas de baixa renda e excluídas, de alguma forma pela sociedade, que vive em ambiente pouco propício à transformação e, por esse fato, são tratadas de maneira secundária, sendo-lhes oferecida uma educação de pouca ou nenhuma qualidade.

Objetivando alterar esse quadro, o governo federal estabeleceu o PROEJA, atendendo tanto o Ensino Fundamental e Médio como a Educação Indígena. O documento base do programa estabelece que:

> O PROEJA é, pois, uma proposta constituída na confluência de ações complexas. Desafios políticos e pedagógicos estão postos e o sucesso dos arranjos possíveis só materializar-se-á e alcançará legitimidade a partir da franca participação social e envolvimento das diferentes esferas e níveis de governo em um projeto que busque não apenas a inclusão nessa sociedade desigual, mas a construção de uma nova sociedade fundada na igualdade política, econômica e social; em um projeto de nação que vise uma escola vinculada ao mundo do trabalho numa perspectiva radicalmente democrática e de justiça social (DOCUMENTO BASE DO PROEJA, 2007 p. 6).

Originado no Decreto nº. 5.478, de 24/06/2005[3], e, a princípio, nomeado de Programa de Integração da Educação Profissional ao Ensino Médio na Modalidade Educação de Jovens e Adultos, e já com sigla PROEJA, refletia a preocupação do governo em atender à demanda de jovens e adultos com oferta de educação profissional técnica de nível médio, da qual, em geral, foram deixados de fora, em muitas situações, inclusive, no próprio Ensino Médio.

Inicialmente, o alicerce do programa foi a Rede Federal de Educação Profissional e Tecnológica, uma vez que, antes do Decreto nº 5.478/2005, algumas instituições da referida rede já apresentavam experiências de educação profissional com jovens e adultos. Com o surgimento do programa, houve alguns questionamentos sobre a possibilidade de expansão do mesmo, sendo sugerida a ampliação, em termos de abrangência, e aprofundamento em seus princípios epistemológicos.

A partir dessas experiências e em conformidade com os pressupostos referenciais do programa, observou-se a real necessidade de ampliar seus limites,

---

[3] Os Decretos nº 5.478/2005 de 24/06/2005 e nº 5.840/2006 de 13/06/2006 podem ser encontrados em http://portal.mec.gov.br/setec/arquivos/pdf.

visando à universalização da educação básica, unificada à formação para o trabalho, com acolhida exclusiva a jovens e adultos com histórico de abandono escolar, seja por qual motivo.

Após revogação do Decreto nº 5.478/2005 e promulgação do Decreto nº 5.840, de 13 de julho de 2006, houve modificações no programa, dentre as quais a ampliação da abrangência, inserindo-se o Ensino Fundamental e a aceitação dos sistemas de ensino estaduais e municipais, bem como entidades privadas nacionais de serviço social, aprendizagem e formação profissional.

Com base no referido programa, em 2006, o Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia do Piauí passou a ofertar em seu quadro de cursos o PROEJA, tanto em sua sede, como em todos os Campi, sendo o Campus de Parnaíba o local da presente investigação.

Posteriormente, e já fazendo parte da investigação realizada, serão apresentadas características mais detalhadas do grupo investigado.

4.2 A Opção pela Pesquisa Qualitativa

Para a realização de uma pesquisa, faz-se necessária a adequação da mesma a um tipo específico, coerente com os objetivos que se pretende alcançar. Sendo assim, a investigação aqui apresentada visou, sobretudo, à análise de aspectos comportamentais e cognitivos ligados ao processo de ensino e aprendizagem. Tal característica sugere que a pesquisa encontra-se em consonância com uma investigação que requer uma abordagem qualitativa.

De acordo com Bogdan e Biklen (1991, pp. 47-50), as cinco características básicas que configuram a pesquisa qualitativa são:

- ambiente natural como fonte direta de dados e o pesquisador como seu principal instrumento;
- os dados coletados são predominantemente descritivos;
- a preocupação com o processo é muito maior do que com o produto;
- o significado que as pessoas dão às coisas e à sua vida são focos de atenção especial pelo pesquisador (capturar a perspectiva dos participantes);
- a análise de dados tende a seguir um processo indutivo.

Ainda, de acordo com os autores, a preocupação dos investigadores qualitativos está no significado, o qual conduz a discussão dos fundamentos teóricos da abordagem em questão e ainda construídos através das interações entre os sujeitos que compartilham experiências.

Tal abordagem refere-se à fenomenologia dos acontecimentos e interações ocorridas durante o desenvolvimento da investigação, ou seja, à compreensão interpretativa humana. Dentro dessa perspectiva, é possível afirmar que, ainda que existam diversas formas de investigação qualitativa, todas partilham, até certo ponto, o objetivo de compreender os sujeitos com base em seus pontos de vista (BOGDAN e BIKLEN, 1991, p.54).

Ressalta-se que, nem sempre, na pesquisa qualitativa, todos os pesquisadores compartilham dos mesmos objetivos, mas, de modo geral, visam melhor compreender os comportamentos e experiências humanas e têm a intenção de contribuir para melhorar condições de vida de seus sujeitos investigados.

Dentro dessa perspectiva qualitativa, a investigação está pautada nos aportes advindos da Engenharia Didática, que serve, tanto de referencial para a elaboração da sequência didática a ser desenvolvida, junto ao grupo de alunos, como de referencial metodológico para a investigação. Considera-se que essa opção metodológica deu o espaço e a liberdade necessária para interpretação crítica dos resultados baseados no referencial teórico de Duval.

Durante o desenvolvimento da Engenharia Didática, pretende-se ter uma visão dos aspectos investigados a partir da utilização de instrumentos e procedimentos como questionários, entrevistas, registros em diário, interpretação e análise de escritos, o que reforça características da pesquisa qualitativa.

4.3 A Engenharia Didática

Conforme já mencionado, o aporte metodológico para a realização da pesquisa está baseado nos pressupostos da Engenharia Didática, a qual caracteriza uma forma particular de organização dos procedimentos metodológicos da pesquisa em Didática da Matemática, com a finalidade de analisar situações didáticas.

A concepção subjacente à Engenharia Didática contempla, tanto a dimensão teórica como experimental da pesquisa em didática. Uma das vantagens dessa forma de conduzir a pesquisa decorre dessa sua dupla ancoragem, interligando o plano teórico da racionalidade ao trabalho experimental da prática educativa (PAIS, 2002, p.99).

Sendo empregado desde a década de 80, esse termo segundo, Douady (1995),

> [...] designa um conjunto de seqüências de aulas concebidas, organizadas e articuladas no tempo de maneira coerente por um professor-engenheiro, com o fim de realizar um projeto de aprendizagem para uma população determinada de alunos. No transcurso das interações entre o professor e os alunos, o projeto evolui a partir das reações dos estudantes e em função das seleções e decisões do professor (DOUADY, 1995, p.61).

Por outro lado, segundo a autora, a Engenharia Didática designa, de igual forma, uma metodologia de investigação particularmente interessante, por permitir levar em conta a complexidade dos fenômenos e relações da sala de aula. Essa dupla característica se constitui em um dos argumentos que valoriza sua escolha na condução da investigação do fenômeno didático, pois sem uma articulação entre a pesquisa e ação pedagógica, cada uma dessas dimensões tem seu significado reduzido.

Douady (1995) considera, ainda, que a noção de Engenharia Didática foi se construindo, na Didática da Matemática, com dupla função, podendo ser compreendida, tanto como um produto resultante de uma análise a priori, caso da metodologia de pesquisa, quanto como uma produção para o ensino.

Assim, considerando essas características, a Engenharia Didática, nas palavras de Artigue (1995), se caracteriza por um esquema experimental, baseado em "realizações didáticas" em sala de aula, ou seja, sobre a concepção, realização, observação e análise de sequências de ensino.

Segundo Machado (2002), é importante ressaltar que a singularidade da Engenharia Didática não repousa sobre seus objetivos, mas em suas características de funcionamento metodológico.

Quando uma Engenharia Didática tem por objeto o estudo de um determinado assunto e leva em conta, de maneira local, a complexidade dos fenômenos de sala de aula, refere-se à chamada microengenharia, contexto no qual a presente investigação se insere. Por outro lado, quando referir-se a domínios mais amplos, permitindo compor a complexidade das pesquisas de microengenharia com fenômenos ligados à duração nas relações de ensino e aprendizagem, estará enquadrando-se ao que Artigue (1995) denomina como macroengenharia. Embora pesquisas de macroengenharia sejam consideradas mais complexas, ambas se complementam, sendo indispensáveis.

A Engenharia Didática se caracteriza, também, pelo registro dos estudos feitos sobre o caso em questão e, principalmente, pela validação da pesquisa a qual é feita, sobretudo, internamente, baseando-se na confrontação entre a análise a *priori*, que, por sua vez, se apoia no quadro teórico e a análise a *posteriori*. Essa característica a coloca, definitivamente, no campo na investigação qualitativa.

O processo experimental da Engenharia Didática é composto por quatro fases:

- análises preliminares;
- concepção e análise *a priori* das situações didáticas;
- experimentação;
- análise a *posteriori* e validação.

Cada uma dessas etapas possui características bem definidas e que, se entendidas e executadas de forma fidedigna, podem revelar, durante a investigação, aspectos relevantes ao desenvolvimento de estratégias de ensino. Também é importante ressaltar que essa estruturação em fases não deve caracterizar o processo como dividido em etapas que se sucedem linearmente, com pouca ou nenhuma articulação entre as mesmas. Entende-se que, para ser bem sucedida, uma Engenharia Didática deve manter uma interação dinâmica entre as diversas fases, de maneira que o desenvolvimento de uma subsidie a organização e desenvolvimento das outras e, dependendo da necessidade, a qualquer momento, se possa retomar e reorganizar o processo.

Com relação às características das fases da metodologia Engenharia Didática, Machado (2002) estabelece que as análises preliminares para a concepção da engenharia são feitas através de considerações sobre o quadro teórico didático geral e os conhecimentos didáticos já adquiridos sobre o assunto em questão, bem como sobre:

- a análise epistemológica dos conteúdos contemplados pelo ensino;
- a análise do ensino atual e de seus efeitos;
- a análise da concepção dos alunos, das dificuldades e obstáculos que determinam sua evolução;
- a análise do campo dos entraves no qual vai estar situada a efetiva realização didática.

As análises preliminares devem considerar os objetivos específicos da investigação e serem realizadas para embasar a concepção da engenharia, podendo ser retomadas e aprofundadas durante todo o desenvolvimento trabalho.

Na presente engenharia, que será detalhada no capítulo 5, essa fase foi estruturada a partir da elaboração do referencial teórico que embasou o trabalho, do estudo do perfil do grupo a ser investigado, da definição de instrumentos de investigação e do desenvolvimento de uma atividade para a verificação de conhecimentos prévios.

Na fase de concepção e de análise *a priori*, é delimitado certo número de variáveis pertinentes ao sistema sobre o qual o ensino irá atuar, sendo essas chamadas de variáveis de comando. Artigue (1995) distingue tais variáveis como:

- macrodidáticas ou globais, que se referem à organização geral da engenharia;
- microdidáticas ou locais, as quais dizem respeito à organização de uma sessão ou uma fase da engenharia.

É oportuno lembrar que a validação, na Engenharia Didática, deve ocorrer desde a fase de concepção e da análise *a priori*. Nesse sentido, Artigue (1995) considera que:

> Uma das originalidades da metodologia engenharia didática, como já havíamos assinalado antes, reside no modo de validação que é em essência, interna. Desde a fase de concepção se começa o processo de validação, por meio das análises a priori das situações didáticas da engenharia, diretamente ligada à concepção local dessa última (p.44).

Ainda sobre a análise *a priori*, Artigue (1995) elucida que a mesma comporta uma parte de descrição e outra de previsão, sendo necessário, nessa fase:

- descrever cada escolha local feita;
- analisar qual o desafio da situação para o aluno, decorrente das possibilidades de ação, escolha, decisão, controle e validação de que ele disporá durante a experimentação;
- prever os comportamentos possíveis e mostrar no que a análise efetuada permite controlar o sentido desses comportamentos, devendo-se assegurar que, se tais comportamentos ocorrerem, resultarão do desenvolvimento do conhecimento visado pela aprendizagem.

Nessa fase, a engenharia proposta contou com a definição das idéias, noções e conceitos específicos que seriam abordados no universo do estudo de Funções, quando foram estabelecidos as variáveis macro e microdidáticas. A sequência didática foi estruturada e as atividades foram delineadas, sendo que a descrição das escolhas, análises e previsões serão apresentadas ao longo da experimentação. Também foram definidos os instrumentos referentes à avaliação do desenvolvimento da aprendizagem ao longo da evolução da engenharia.

A fase de aplicação didática ou experimentação é de suma importância para garantir a proximidade dos resultados práticos com a análise teórica pertinente. A experimentação desenvolvida neste trabalho foi dividida em nove etapas de dois tempos de 45 minutos cada um e em dias alternados, o que possibilitou registro em diário de campo e análise de cada encontro. O uso de um diário de bordo para cada estudante, como instrumento de investigação, propiciou aos participantes a oportunidade de expressar opiniões e idéias, relatar dificuldades e dar sugestões.

Salienta-se que, geralmente, quando a experimentação prevê mais de uma sessão, é aconselhável fazer-se uma análise a *posteriori* local, após uma ou algumas sessões, confrontando com as análises *a priori* feitas para eventuais correções da "rota prevista". Neste trabalho, como a engenharia previa um considerável número de seções, essa análise a *posteriori* local foi realizada sempre que se julgou necessário, e de forma sistemática após o desenvolvimento de cada um dos quatro grupos de atividades.

A fase final de uma engenharia didática refere-se à análise a *posteriori*, onde se efetiva o tratamento das informações obtidas por ocasião da aplicação das sequências didáticas, considerada a parte experimental da pesquisa. A análise a *posteriori* se apóia sobre todos os dados colhidos durante a experimentação: observações realizadas durante cada sessão de ensino, análise das produções dos alunos em classe ou fora dela, da análise dos registros nos diários. Muitas vezes, para uma melhor compreensão e interpretação dos dados e informações coletados, tornam-se necessários dados complementares, como: entrevistas individuais ou em pequenos grupos, realizadas tanto durante a experimentação, quanto no final dela, questionários, gravações em vídeo, diálogos, entre outras.

É importante salientar que com base na confrontação das análises a *priori* e a *posteriori* é que se validam ou não as hipóteses estabelecidas no começo da engenharia. Ressalta-se que essa validação é essencialmente interna obtida, justamente, a partir da confrontação mencionada. Além disso, o termo "hipóteses" não tem a mesma conotação, com relação à validação, de quando é utilizado em pesquisas de base quantitativa.

O quadro apresentado na figura 5 mostra, de maneira resumida, como foi estruturada e organizada a Engenharia Didática apresentada neste trabalho.

Análises preliminares	Concepção e análise a *priori*	Experimentação	Análise a *posteriori* e validação
• Composição da base teórica. • Definição dos primeiros instrumentos de investigação. • Aplicação do questionário para definir o perfil do grupo. • Desenvolvimento de atividades para a verificação de conhecimentos prévios.	• Definição do conteúdo matemático a ser trabalhado. • Definição das variáveis de comando. • Concepção das seqüência de atividades. • Definição dos demais instrumentos de investigação.	• Desenvolvimento da seqüência didática em diferentes ambientes.	• Organização e análise dos resultados obtidos ao longo da experimentação a partir dos instrumentos utilizados. • Confrontação das análises a *priori* e a *posteriori* e validação. • Considerações finais.

Figura 5: quadro da organização da Engenharia Didática.

4.4 Os Instrumentos de Investigação

Para o desenvolvimento da pesquisa, fez-se necessária a definição de instrumentos que propiciassem o fornecimento de dados, resultados e fatos ocorridos durante o processo investigativo.

A importância dessa definição se dá em virtude de que as análises a serem realizadas na Engenharia Didática necessitam de dados bem organizados, que permitam inferir conclusões dentro da realidade focada na investigação, além de permitirem o retorno a fases anteriores, quando necessário.

Seguindo tal necessidade, considerou-se oportuna a organização de seis instrumentos para coleta de dados e que foram utilizados ao longo de toda a investigação. O primeiro desses instrumentos foi um questionário (Apêndice 1) que delineou o perfil do grupo de alunos, sujeitos da pesquisa, contando com questões objetivas e subjetivas que serão detalhadas na apresentação das análises preliminares.

Além desse instrumento, considerou-se importante a realização de um grupo de atividades (Apêndice 2) que proporcionassem a identificação do nível de conhecimento dos estudantes em relação a conteúdos identificados como básicos e essenciais para o desenvolvimento matemático na série e de possíveis dificuldades. O objetivo era dispor de informações para compor um quadro que, com base nos referenciais teóricos levassem a organização da seqüência didática, sendo este considerado o segundo instrumento de investigação.

A partir da necessidade de coletar a maior quantidade possível de dados, o desenvolvimento da engenharia contou com a observação participativa da professora/investigadora, havendo o registro de todos os fatos ocorridos durante o processo. Esse registro foi feito em uma ferramenta chamada diário de campo, sendo esse o terceiro instrumento de investigação.

O referido instrumento também teve uma versão utilizada pelos estudantes que compunham o grupo investigado que, individualmente, ao fim de cada sessão registravam suas opiniões a respeito do trabalho desenvolvido, sobre o seu aprendizado individual, suas dificuldades e dúvidas a respeito do tema proposto.

O quarto instrumento de investigação foi a sequência didática em si. A produção dos estudantes durante o desenvolvimento da mesma pode ser considerada como o principal instrumento de investigação da pesquisa. Essa sequência foi composta por quatro grupos de atividades, a saber: Grupo A, Grupo B, Grupo C e Grupo D, que objetivavam a aprendizagem de aspectos específicos do conteúdo Função. A descrição detalhada das atividades e seus objetivos específicos serão apresentados na fase de análise *a priori*.

O próximo instrumento diz respeito às verificações de aprendizagem (Apêndice 3) dos estudantes dentro do contexto de atividades proposto. Elas ocorreram durante o desenvolvimento de todo o conjunto de atividades que compõem a sequência e serviram como elemento que proporcionou aos estudantes notas referentes às avaliações exigidas pela organização didática da escola.

Para finalizar, lançou-se mão de um questionário final (Apêndice 4), respondido pelos estudantes, onde os mesmos expressaram suas opiniões sobre a proposta de ensino, bem como seus relatos de aprendizagem adquiridos ao longo do processo.

Os instrumentos de investigação foram construídos, principalmente, nas fases de análises preliminares e concepção e análise a *priori* da engenharia proposta, conforme pode ser observado no quadro da figura 5. Porém, é importante salientar que, a partir de uma definição inicial, esses instrumentos foram sendo aprimorados para melhor atender aos objetivos da investigação. Assim, delineado o processo metodológico da investigação, passou-se ao desenvolvimento da engenharia.

5 DESENVOLVIMENTO DA ENGENHARIA DIDÁTICA

A Engenharia Didática desenvolvida busca evidências sobre a possibilidade do ensino e aprendizagem de Funções Polinomiais do 1º e 2º graus, em um curso profissionalizante da Educação de Jovens e Adultos, ser favorecido, considerando a utilização de uma sequência didática e tendo como ferramenta de apoio o *software* Winplot.

Seguindo as orientações metodológicas, a investigação foi estruturada segundo as fases da Engenharia Didática, que passam a ser apresentadas. Com relação à fase de experimentação, que prevê mais de uma seção, e seguindo orientações de Artigue (1995), foram realizadas análises *a posteriori* locais, logo após uma ou algumas sessões, para possíveis alterações e correções das ações e atividades previstas.

5.1 Análises preliminares

A organização de uma Engenharia Didática em fases não significa que as mesmas se desenvolvem isoladamente, de forma estanque. Isso porque ela tem como forte característica uma articulação orgânica entre todos os seus segmentos, de maneira que o trabalho inicial sirva de substrato e potencialize as próximas ações e que, a qualquer momento, essas possam ser revistas e reorganizadas.

Nesse contexto, o desenvolvimento da fase de análises preliminares da engenharia ocorreu no primeiro módulo do curso PROEJA investigado, no período de 05 de maio a 30 de junho de 2008, e permitiu a composição do quadro teórico que ancorou a organização das fases posteriores. Nessa etapa inicial da pesquisa, houve a aplicação de um questionário para o delineamento do perfil do grupo (Instrumento de Investigação 1) e a realização de atividades que visavam identificar dificuldades e entraves referentes a ideias, conceitos e relações matemáticas que direcionaram a elaboração do trabalho com Funções (Instrumento de Investigação 2).

A partir da análise do questionário, foi possível compor o perfil do grupo participante da investigação. Entende-se que o conhecimento das características do grupo foi fundamental para o desenvolvimento do trabalho, especialmente por se tratar de um grupo em um curso destinado a jovens e adultos, estudantes que apresentam peculiaridades próprias, em função de todas as questões que envolvem o seu afastamento e retorno aos estudos.

O grupo investigado constitui-se de 24 estudantes, 15 do sexo masculino e 9 do sexo feminino, com idade média de 25 anos, sendo considerado um grupo bastante jovem no contexto da educação de jovens e adultos. Na continuidade desse trabalho, os estudantes, sujeitos da investigação, serão designados pela letra A seguida de numeração em ordem crescente (A_1, A_2, A_3, ...).

No grupo, 14 estudantes afirmaram estarem empregados em atividades que exigiam carga horária superior a 40 horas semanais. Os 10 alunos restantes se encontravam desempregados ou nunca haviam trabalhado e consideraram que a situação de desemprego devia-se, principalmente, à falta de oportunidades.

Ainda dentro da temática emprego e oportunidades, todos os estudantes investigados afirmaram ter como expectativas para o curso o ingresso ao mercado de trabalho e/ou a melhoria de emprego, pois os que trabalhavam exerciam atividades cansativas e mal remuneradas.

Salienta-se o fato de que dois dos estudantes entrevistados tinham como expectativa a preparação para o vestibular, o que não se constitui em objetivo do curso PROEJA.

Sobre o grau de escolaridade, todos haviam concluído o Ensino Fundamental regular e, surpreendentemente, apenas *um* dos vinte e quatro alunos não havia concluído o Ensino Médio regular. Esse fato fez emergir a discrepância entre o público alvo, indicado no edital de ingresso ao curso elaborado pela Instituição, que apontava para estudantes que não portassem o Ensino Médio, e o perfil real do grupo que estava no curso. A constatação de que a quase totalidade do grupo investigado já havia cursado um Ensino Médio regular levou a uma reflexão sobre as possíveis influências desse fato sobre o trabalho a ser desenvolvido, as quais foram consideradas na organização e planejamento das atividades, conforme será descrito na concepção da engenharia.

Outro aspecto a ser considerado é que apenas nove, dentre os vinte e quatro estudantes, estavam há mais de cinco anos sem estudar, visto que os demais estavam cursando pré vestibular (8 estudantes) ou haviam concluído o Ensino Médio no ano anterior ou há no máximo seis meses.

Os nove estudantes que interromperam os estudos indicaram como motivo principal não conseguir conciliar trabalho e estudo, além de dificuldades financeiras para o caso dos seis estudantes do sexo masculino. Para as três estudantes do sexo feminino a principal causa da interrupção dos estudos foi casamento e não terem com quem deixar os filhos enquanto iam à escola.

Esse conjunto de informações permitiu perceber que, embora o curso fosse destinado a jovens e adultos, o grupo não apresentava características próprias do público dessa modalidade: a exceção de um estudante, todos os demais já haviam cursado o Ensino Médio não profissionalizante, somente nove estudantes haviam interrompido os estudos por período superior a cinco anos e, inclusive, oito estudantes freqüentavam cursos preparatórios para o vestibular.

Quando indagados sobre a importância da Matemática, as respostas convergiram para a sua necessidade para o trabalho e para o desenvolvimento do raciocínio.

Em virtude de a proposta de trabalho contemplar, fortemente, a utilização de uma ferramenta informática, no caso, um *software* educacional, percebeu-se a conveniência de questionar sobre a questão do acesso ao computador e formas de utilização do mesmo pelos estudantes.

Assim, dos 24 estudantes, 15 afirmaram utilizar o computador para acesso à *internet*, jogos, músicas e atividades no trabalho, sendo que os demais não têm acesso ao mesmo. Sobre a sua utilização para a aprendizagem de conteúdos escolares, o grupo ficou dividido entre os que afirmaram que já o haviam utilizado, 12 estudantes, e os que afirmaram nunca tê-lo utilizado para tal fim (10 estudantes), e ainda dois estudantes que não responderam à pergunta.

Também foi questionado se gostariam de estudar algum conteúdo matemático com o auxilio do computador e, para essa questão, apenas um estudante respondeu que seria indiferente e outro não respondeu à questão, sendo que os demais demonstraram interesse por essa temática.

Com relação ao instrumento de investigação que previa o desenvolvimento de atividades de verificação de conhecimentos prévios (Apêndice 2), considera-se que as mesmas foram primordiais para a definição do caminho a ser seguido pela pesquisa, principalmente, em virtude da identificação da heterogeneidade de conhecimentos apresentadas pelo grupo.

A realização dessas atividades permitiu a percepção de dificuldades referentes à interpretação e resolução de problemas, sobretudo a interpretação, uma vez que, quando auxiliados nesse aspecto, os estudantes conseguiam efetuar as operações matemáticas necessárias.

Um exemplo que ilustra essa afirmação e que causou grande discussão foi um problema retirado de Goulart (1999):

Dividindo certo número natural por 20, obtém-se quociente 7 e resto o maior possível. Qual é o número?

A maioria das dúvidas esteve relacionada ao que seria esse elemento chamado *maior possível*, podendo ser percebidas através das falas dos estudantes A1 e A5:

A1: “ — É que número?”

A5: “ — Pode ser vários números e por isso varias respostas!”

Além disso, com essa questão, foi possível identificar dificuldades referentes à técnica operatória da operação divisão, principalmente com divisores com dois algarismos.

Outro problema bastante polêmico entre o grupo, também retirado de Goulart (1999), é apresentado a seguir:

Augustus De Morgan, matemático e lógico que viveu no século XIX, tinha x anos de idade no ano x^2*. Descubra em que ano isso ocorreu.*

Nessa questão, aliado ao raciocínio a respeito do século que seria decisivo à resolução do problema, houve o fato de ser feita confusão entre x^2 e *2x*, sendo possível perceber que boa parte do grupo não estava tratando, adequadamente, potência.

Na sequência, deu-se início a um estudo introdutório sobre Estatística, enfatizando, principalmente, a construção e interpretação de tabelas e gráficos, buscando estabelecer um trabalho já no âmbito da compreensão intuitiva estabelecido por Bergeron e Herscovics (1982), considerado como ponto de partida para o trabalho com Funções.

Aliado a essa ideia, o estudo introdutório à Estatística também possibilita, dentro do contexto da teoria de Duval (2005), a utilização de representações e conversões, consideradas fundamentais para a compreensão do conceito de Função. O marco teórico que sustenta essa investigação parte do pressuposto de que atividades de conversão são absolutamente necessárias para o desenvolvimento cognitivo e a apropriação, por parte do estudante, do objeto matemático em estudo.

Paralelamente a esse estudo introdutório, considerou-se oportuna a primeira visita ao laboratório de informática e a apresentação do *software* que, futuramente, seria utilizado na aplicação da sequência didática.

Para esse primeiro contato com o *software*, os alunos organizaram-se em duplas. O grupo mostrou-se bastante agitado e com certa ansiedade frente às expectativas sobre a nova atividade, o que ocasionou certa dificuldade para o desenvolvimento do trabalho. Iniciou-se a uma pequena apresentação em *Power Point* sobre a história do Winplot surgindo, em seguida, questionamentos e opiniões: "- A senhora vai usar esse programa nas aulas? Mas não sabemos usar esse tal s*oftware*..."

Deu-se início à apresentação de alguns comandos, com ênfase, nesse primeiro momento, a elementos estéticos, pois se acreditava que seria uma forma de chamar a atenção, fato confirmado, quando foi observado que a maioria dos estudantes estava bastante interessada.

Atentos e curiosos, alguns tentavam descobrir outros comandos, e durante pelo menos 45 minutos, foi possível estar mais próximo de cada estudante, observando seus comportamentos e buscando eliminar dúvidas que naturalmente surgiam.

Ainda ocorreram mais dois momentos de familiarização com o *software* no laboratório, os quais foram bem mais proveitosos, já que se conseguiu conquistar alguns estudantes que na primeira experiência, haviam se mostrado pouco interessados pela proposta de trabalho.

A análise do questionário e o desenvolvimento das atividades, apoiados no referencial teórico que estava sendo constituído, permitiram a definição e o direcionamento apropriado para a elaboração da sequência didática e para o desenvolvimento da investigação.

5.2 Análise *a priori* e concepção da engenharia

O estudo da teoria de Duval (2004, 2005) e dos níveis de compreensão do conceito de Função definidos por Bergeron e Herscovics (1982), aliados às atividades realizadas no primeiro módulo do curso, forneceram o respaldo necessário à elaboração de uma sequência didática que estabelecesse condições para a aprendizagem das Funções Polinomiais de 1º e 2º graus.

Em termos de organização global (variáveis macrodidáticas), a Engenharia Didática apoiou-se em uma sequência didática, sendo que a elaboração das atividades constantes da mesma teve como ponto de partida as conexões que poderiam ser feitas entre temas do cotidiano e o conteúdo matemático, dentro da perspectiva de trânsito pelos níveis de compreensão do conceito de Função. Optou-se, ainda, pela utilização de ferramentas informáticas e um trabalho articulado entre pequenos grupos e o grande grupo, como caminho para o desenvolvimento das atividades.

As escolhas locais (microdidáticas) basearam-se na potencialidade do *software* indicado para utilização possibilitar a representação geométrica das Funções estudadas de maneira rápida e clara, permitindo ao estudante fazer representações, refletir, comparar, questionar e conjecturar. Nesse sentido, as atividades foram organizadas com base na teoria de Duval, buscando oportunizar ao estudante diferentes tipos de representação do mesmo objeto matemático, como caminho para apropriação do mesmo.

Basearam-se, também, na proposta de situações didáticas[4] dos tipos situação de ação e de formulação (PAIS, 2002, p.72). A idéia era proporcionar aos estudantes a possibilidade de realizar procedimentos mais imediatos, de natureza mais experimental e intuitiva (situação de ação), como também, realizar ações mais elaboradas, que encaminhassem a articulação de esquemas de natureza teórica, indo além do procedimento experimental (situação de formulação).

O fato de vinte e três dos vinte e quatro estudantes do grupo já terem cursado o Ensino Médio regular, também foi considerado no planejamento das atividades. Porém, mesmo tendo conhecimento de que os estudantes já tinham tido contato com o conteúdo Funções no Ensino Médio já cursado, mas, considerando o trabalho proposto bastante diferenciado (uso da tecnologia, resolução de problemas) e o fraco desempenho dos estudantes nas atividades de verificação de conhecimentos prévios, optou-se por organizar atividades que iniciavam com a compreensão intuitiva e buscavam uma evolução pelos demais níveis.

Assim, quatro grupos de atividades foram elaborados para constituir a sequência didática, grupos A, B, C, e D, os quais são apresentados a seguir. O detalhamento dos grupos será realizado na apresentação da fase de experimentação da engenharia proposta.

Grupo de Atividades A

O grupo A de atividades foi elaborado, tendo como objetivo trabalhar, por meio da resolução de problemas, traços da compreensão intuitiva e da matematização inicial, descritas nos níveis de compreensão referentes à Função Polinomial do 1º grau. Foi

---

[4] Segundo Pais (2002, p.65), a teoria das situações didáticas foi descrita por Brousseau em 1986, sendo que, uma situação didática é formada pelas múltiplas relações pedagógicas estabelecidas entre o professor, os alunos e o saber, com a finalidade de desenvolver atividades voltadas para o ensino e aprendizagem de um conteúdo específico.

organizado em três problemas e uma atividade, chamada de Atividade de Retomada que buscava, com base nas respostas apresentadas, um debate geral acerca das questões que compunham o grupo como um todo. O trabalho foi desenvolvido em pequenos grupos com discussões de finalização no grande grupo e sem recorrer ao Winplot.

Grupo de Atividades B

Esse grupo, constituído de nove atividades, foi organizado visando à utilização do *software* Winplot como elemento que propiciasse a construção, observação e análise das representações gráficas das funções propostas, na busca da construção do conhecimento sobre o tema Função Polinomial do 1º grau. As atividades, abordando tratamento de informações, construções e interpretações de gráficos, foram organizadas, ainda, dentro do nível de matematização inicial, porém, já buscando desenvolver aspectos do nível da abstração. Ao propor distintas formas de representação de uma mesma situação (construção de tabelas e gráficos, estabelecimento de lei de formação, justificativa em linguagem natural), buscava, com base na teoria de Duval, dar espaço para a ampliação de tarefas com ênfase em conversões.

Grupo de Atividades C

O grupo C de atividades teve como objetivo, de forma análoga ao proposto no grupo A, fomentar a resolução de problemas no contexto dos níveis de compreensão intuitiva e matematização inicial, mas referente à Função Polinomial do 2º grau. Esse grupo foi composto de três problemas.

Grupo de Atividades D

O grupo D foi constituído de dez atividades para serem realizadas, utilizando o *software* Winplot, objetivando o estudo da Função Polinomial de 2º grau, a partir da sua representação gráfica. Enfocou o trânsito entre os níveis de matematização inicial e abstração, bem como transformações do tipo conversões, de maneira similar ao que foi desenvolvido no grupo B para Funções Polinomiais de 1º grau.

O quadro da figura 6 apresenta, de forma resumida, os quatro grupos de atividades da Sequência Didática. Destacam-se como cada grupo foi organizado, os aspectos abordados relacionados à aprendizagem do conteúdo e à formação de idéias consideradas essências para a compreensão do conceito de Função, a estratégia de desenvolvimento das atividades e o tempo destinado para a aplicação do grupo.

ATIVIDADES	ORGANIZAÇÃO	ASPECTOS ABORDADOS	ESTRATÉGIA DE DESENVOLVIMENTO	TEMPO
GRUPO A	- Três situações-problema. - Uma atividade de retomada.	- Relação de dependência entre variáveis. - Compreensão intuitiva do conceito de função. - Idéia de função de 1º grau. - Matematização inicial. - Conversões.	- Trabalho em pequenos grupos. - Trabalho individual. - Discussão no grande grupo. - Resolução de problemas com lápis e papel.	- Três encontros de 45 minutos cada.
GRUPO B	- Nove atividades.	- Utilização de expressões analíticas. - Características do gráfico da função do 1º grau através dos coeficientes de sua representação algébrica. - Abstração/formalização. - Conversões.	-Uso do software Winplot. - Discussão no grande grupo.	- Quatro encontros de 45 minutos cada.
GRUPO C	- Três situações-problema.	-Relação de dependência entre variáveis. - Compreensão intuitiva do conceito de função de 2º grau. -Abstração. - Conversões.	- Trabalho em pequenos grupos. - Trabalho individual. - Discussão no grande grupo. - Resolução de problemas com lápis e papel.	- Três encontros de 45 minutos cada.
GRUPO D	-Dez atividades.	- Identificação de características do gráfico da função polinomial do 2º grau através dos coeficientes de sua representação algébrica; - Abstração/formalização. -Conversões.	- Trabalho em pequenos grupos.	-Quatro encontros de 45 minutos cada.

Figura 6: quadro da organização da sequência didática

5.3 Experimentação

A experimentação, terceira fase do desenvolvimento da Engenharia Didática, contou com a colaboração dos 24 estudantes que participaram efetivamente das atividades, inclusive, em duas ocasiões, aos sábados. Essa fase desenvolveu-se no período de 01 de setembro a 30 de novembro de 2008. Nesse período, 14 h/a destinaram-se ao desenvolvimento da sequência didática, intercaladas por aulas que visavam a uma retomada dos aspectos estudados buscando, não só estruturação para os conhecimentos trabalhados na sequência, como também, a abordagem de aspectos do conteúdo não contemplados na mesma. A carga horária semanal da disciplina era de 2 h/a e foram organizados, ainda, dois encontros de 4 h/a cada, aos sábados, totalizando, no período considerado, 28 h/a.

No seu aspecto formativo, a sequência didática proposta buscou estabelecer condições didáticas para que os estudantes desenvolvessem habilidades referentes à apropriação do conceito de Função Polinomial de 1º e de 2º grau, identificando e diferenciando os dois modelos, a partir das situações estudadas, representando-os de diferentes formas (algébrica, gráfica, linguagem natural). No seu aspecto investigativo, possibilitou o acompanhamento do quadro evolutivo apresentado pelos estudantes no que se refere à proposta formativa da sequência.

A seguir, serão expostos em detalhes todos os acontecimentos ocorridos durante a aplicação da sequência didática.

5.3.1 Desenvolvimento das Atividades do Grupo A

O objetivo desse grupo de atividades, além dos já descritos, foi o de promover o contato com problemas cotidianos que permitissem o estabelecimento de noções de variáveis e relação de dependência entre as mesmas para a introdução do conteúdo Função Polinomial de 1º grau. Seguindo os níveis de compreensão do conceito de função descritos por Bergeron e Herscovics (1982), nesse primeiro momento, foram realizadas tarefas que contemplavam o que os autores chamam de compreensão intuitiva e matematização inicial, priorizando o que Duval estabelece como conversões.

Para a realização desse grupo de atividades e resolução das questões propostas, os alunos organizaram-se em duplas ou individualmente. Após esse período, os estudantes apresentaram sua produção para o grande grupo, havendo um debate sobre como foram resolvidas as questões, acertos ou erros. Essa discussão foi conduzida pela pesquisadora através de questionamentos que buscavam encadear idéias e lançar desafios que alavancassem a aprendizagem dos conceitos aos quais as atividades se referiam.

A seguir apresenta-se a descrição das atividades, seu desenvolvimento, bem como análise da produção e ação dos estudantes.

Situação apresentada na 1ª Questão

Os Restaurantes Populares

Restaurantes Populares são Unidades de Alimentação e Nutrição, destinadas ao preparo e à comercialização de refeições saudáveis, oferecidas a preços acessíveis à população, localizadas preferencialmente em grandes centros urbanos de cidades com mais de 100 mil habitantes. A cidade de Parnaíba conta, desde o ano de 2007, com uma dessas unidades, fornecendo refeições ao preço de R$ 1,00.

A figura mostra imagem do ambiente de uma dessas unidades.

Imagem de um restaurante popular. Fonte: www.mds.gov.br/ programas/segurança-alimentar-e-nutricional-san/restaurantepopular

a) Com base nas informações dadas, organize uma tabela com as possibilidades de valores a serem pagos se um grupo de pessoas, que pode variar de 2 a 15 pessoas, resolver almoçar no restaurante.
b) Você conhece alguma outra forma de organizar e apresentar os dados da tabela? Caso conheça, apresente essa outra possibilidade.
c) O valor a ser pago pelo grupo é variável?
d) Do que depende o valor final a ser pago pelo grupo?
e) Na tabela, é estabelecida alguma relação entre os valores em reais? Explique.
f) É possível relacionar os valores encontrados a alguma expressão matemática? Qual?
g) Represente por uso de uma expressão matemática o preço a ser pago, de acordo com um número qualquer de pessoas que frequentarem o restaurante.

Essa primeira atividade proposta foi desenvolvida em um encontro de 45 minutos e teve a finalidade de identificar aspectos da compreensão intuitiva e matematização inicial relativos ao conceito de Função. Para tal, utilizou-se uma temática bastante comentada pela comunidade na ocasião: a implantação, na cidade, de um restaurante popular.

Conforme é possível observar, utilizou-se um pequeno texto com explicações sobre o que é um restaurante popular, apontando para a situação em que a refeição, no mesmo, tinha o custo de R$1,00 por pessoa.

Sobre as respostas apresentadas com relação à alternativa a, considera-se que todos os 24 estudantes responderam de forma correta, entretanto, 4 dessas respostas foram classificadas como incompletas. Tal classificação se deve ao fato da não colocação, na tabela, de todas as informações referentes ao número de pessoas, bem como a situação em que um estudante descreveu as possibilidades de alguns valores sem a montagem da tabela solicitada.

A figura 7 ilustra a produção de uma tabela construída pelo estudante A2, considerada como incompleta.

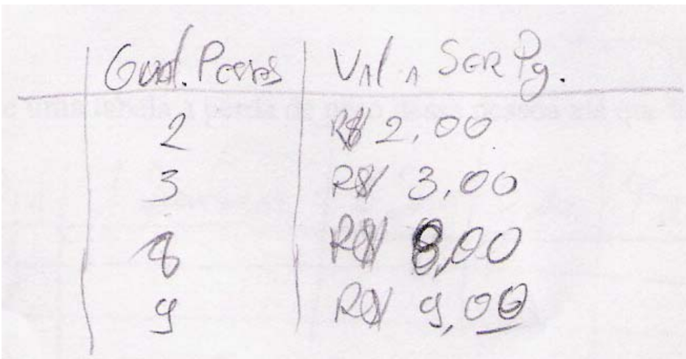


Figura 7: resposta apresentada por A2 para questão 1a, grupo A.

Embora incompleta, inclusive não apresentando os extremos, pode-se observar que os valores foram ordenados. Já a produção do estudante A9, apresentada na figura 8, mostra que, além de incompleta, também não foi construída seguindo uma ordem numérica, o que é desejável quando, por exemplo, espera-se observar regularidades e estabelecimento de uma lei de formação. Essa resposta provocou o alerta para a necessidade de uma maior orientação sobre a importância da organização adequada dos dados.

QUANT. DE PESSOAS	VALOR A SER PAGO
5	5,00
7	7,00
4	4,00
10	10,00
6	6,00
12	12,00

Figura 8: resposta apresentada por A9 para questão 1a, grupo A.

Na alternativa <u>b</u>, pretendia-se identificar se os estudantes conseguiam promover a mudança de registro de representação, de uma tabela para outro tipo de representação.

Apesar de doze estudantes afirmarem conhecer outra forma de apresentação dos dados, apenas um construiu um gráfico de colunas, sendo que os demais realizaram tão somente a mudança de posicionamento da tabela construída no item anterior. Essa situação é ilustrada nas figuras 9 e 10, que indicam a produção do estudante A1.

PESSOAS	VALOR
2	2,00
3	3,00
4	4,00
5	5,00
6	6,00
7	7,00
8	8,00
9	9,00
10	10,00

11	11,00
12	12,00
13	13,00
14	14,00
15	15,00

Figura 9: resposta apresentada por A1 para questão 1a, grupo A.

P/ REFEIÇÃO	~~[illegible]~~	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
PESSOAS P/ REFEIÇÃO	~~[illegible]~~	2,00	3,00	4,00	5,00	6,00	7,00	8,00	9,00	10,00	11,00	12,00	13,00	14,00	15,0

Figura 10: resposta apresentada por A1 para questão 1b, grupo A.

Os demais 12 estudantes afirmaram não conhecer outra forma de apresentação dos dados da tabela construída no item <u>a</u>.

Da análise das respostas dos estudantes emergiram duas conjecturas: observando-se a redação da tarefa, considera-se que a colocação do termo “apresentar” pode ter levado os estudantes a pensarem que era para apresentar, de outra a maneira, a própria tabela, o que justifica a simples mudança de uma escrita vertical para uma horizontal (figuras 8 e 9), apresentada por doze deles; por outro lado, não ocorreram questionamentos e apenas um estudante teve a idéia de construir um gráfico, embora pelo perfil do grupo de estudantes, que já frequentaram um Ensino Médio regular, fosse esperada uma conduta mais ousada.

No item c, questionava-se se o valor a ser pago pelo grupo de frequentadores do restaurante era variável e, nesse caso, apenas um aluno respondeu que não. Complementando, o item d interrogava a respeito do que dependia o valor final a ser pago pelo grupo. Os mesmos 23 alunos que responderam afirmativamente o item anterior declararam que esse valor dependia do número de pessoas, considerando-se essas respostas um indicativo do domínio dos estudantes, mesmo que pontual, sobre noções de variável e relação de dependência.

Como exemplos, são destacadas as respostas apresentadas pelos alunos A10 e A21:

- A10 “... depende da quantidade de pessoas do grupo, quanto maior o número de pessoas do grupo mais o grupo têm que pagar.”
- A21 “.... também depende de quantas vezes cada pessoa comer e de quantas pessoas comerem, pois o bandejão é 1 real cada unidade.”

A próxima alternativa, o item e, questionava sobre a existência de alguma relação entre a situação apresentada na questão e os valores, em reais, apresentados na tabela do item a, pedindo ainda uma explicação que justificasse a resposta apresentada. Dezoito estudantes afirmaram que existia uma relação e seis estudantes afirmaram não haver relação entre os valores sem, no entanto, apresentar justificativas para suas respostas.

Dentre as explicações para as respostas afirmativas, salientam-se as explanações de A5, A12, A16 e A24:

- A5 “... sim, a quantidade de pessoas que forma o grupo.”
- A12 “... sim o tanto de pessoas vai ser a conta a ser paga.”
- A16 “... sim, os valores em reais tem relação com o número de pessoas do grupo.”
- A24 “... sim, tem relação com o número de pessoas.”

No item f, perguntou-se sobre a possibilidade de relacionar os valores encontrados com alguma expressão matemática e, se afirmativa a resposta, qual a seria essa expressão. Os estudantes A22 e A23 não apresentaram nenhuma resposta. A2, A9, A13, A14, A18 e A20 apresentaram resposta afirmativa, bem como a expressão ou uma explicação sobre como encontrar a mesma, conforme é possível verificar nas respostas dos estudantes A9 e A14:

- A9 "... sim, npe . 1 = ta."(npe = número de pessoas e ta = total arrecadado)
- A14 "... sim, multiplicando a quantidade de pessoas pelo valor do prato."

Os demais dezesseis estudantes limitaram-se a responder negativamente, sem apresentar justificativa para a mesma.

Assim, verifica-se que as soluções apresentadas no item f evidenciam que em torno de 25% dos estudantes referem-se a uma situação, buscando distintas formas de descrevê-la ou representá-la, quer seja em língua natural ou estabelecendo códigos, conseguindo expressar corretamente a relação matemática existente. Entretanto, considera-se esse percentual muito tímido frente ao perfil do grupo, como já comentado anteriormente. É possível que esse restrito número de respostas adequadas esteja relacionado ao tipo de trabalho ou atividade desenvolvida. Os estudantes estão pouco habituados a trabalhar com questões abertas, que admitem distintas soluções corretas, onde o caminho a ser percorrido já não esteja delineado.

Para finalizar a primeira questão, foi solicitado que os estudantes representassem, por meio de uma expressão matemática, o preço a ser pago pelo grupo, de acordo com o número de pessoas que frequentarem o restaurante (vale lembrar que, na questão anterior, perguntou-se sobre a possibilidade de existência da expressão, já para essa questão, é afirmada a sua existência).

As respostas seguiram o mesmo padrão apresentado na questão anterior, sendo que os estudantes A8, A13, A17, A19 e A20 não apresentaram a expressão, mas escreveram algumas sugestões sobre o que deveria ser feito, como é mostrado, abaixo na produção de A8.

-A8"... multiplica o número de pessoas pelo número do valor da refeição."

Percebe-se que estudantes que, no item f, não haviam se manifestado, agora o fizeram, como A2, A9, A13, A14 e A18. Além disso, estudantes que responderam a esse item, de maneira satisfatória, não responderam ao último item (talvez por considerá-lo idêntico ao anterior). No total, 18 estudantes não apresentaram resposta ao item g.

O estudante A5 apresentou uma resposta considerada inadequada, conforme destacado a seguir. Essa tentativa pode ilustrar o não entendimento do que foi solicitado pela questão.

- A5 "$a = b \Rightarrow 2 = 2$ e $4 = 4$", Ao término do trabalho com essa primeira questão, seguiram-se discussões sobre as repostas apresentadas, que se estenderam à aula seguinte. As dificuldades dos estudantes em expressar suas idéias, através da escrita (e de diferentes escritas) e a falta de conexões entre as respostas dos itens apontaram para a pertinência da continuidade da proposta, sendo que esse trabalho inicial serviu de base para o desenvolvimento das atividades seguintes.

Situação apresentada na 2ª questão

Dando sequência às atividades do grupo A, com a segunda questão desejou-se oportunizar um trabalho para um melhor entendimento da dependência entre variáveis e construção de expressões matemáticas. Como, durante o desenvolvimento da primeira questão desse grupo de atividades, detectaram-se dificuldades por parte dos estudantes nesses aspectos, considerou-se essa questão pertinente. O tempo de realização da mesma foi de 45 minutos.

Dieta Alimentar

Uma pessoa pesando[5], atualmente, 70 kg, deseja voltar ao peso normal de 56kg. Suponha que uma dieta alimentar resulte em um emagrecimento de exatamente 200g por semana.

a) Fazendo essa dieta, quando a pessoa alcançará seu objetivo?
b) Apresente, numa tabela, a perda de peso dessa pessoa até que ela alcance seu objetivo.
c) O sucesso da dieta, ou seja, o alcance do objetivo, que é a perda de peso, depende de que fator?
d) É possível estabelecer uma expressão matemática que forneça a quantidade de peso perdida pela pessoa a cada semana?
e) Se a pessoa desejar chegar ao peso de 50 kg, quando isso ocorrerá? Use a expressão encontrada anteriormente para achar o resultado.
f) Até que ponto você acredita que seja saudável essa pessoa emagrecer?

O item <u>a</u> deixava o estudante livre para organizar os dados, respondendo da forma que lhe fosse mais conveniente. Como resultado, apenas 5 alunos não apresentaram respostas consideradas condizentes, um deles, por deixar em branco e os

---

[5] No texto da atividade foi utilizado o termo peso para designar a quantidade de massa, por esse termo ser usual. Contudo, discutiu-se a questão com o grupo.

demais, por apresentarem apenas o resultado final sem demonstrar como o mesmo foi encontrado, conforme é exemplificado na figura 11, referente à resposta de A7.

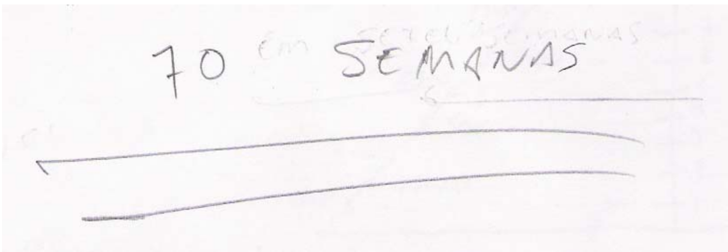


Figura 11: resposta apresentada por A7 para questão 2a, grupo A.

Um fato a ser observado sobre esse item é que todos os 19 alunos que responderam, de forma correta, optaram por converter gramas em quilos, relacionando a perda de 1 kg, a 5 semanas de dieta. Tal conversão propiciou uma diminuição significativa na quantidade de cálculos a ser realizada. Salvo diferenças de organização, as respostas apresentadas são equivalentes à resolução dada por A13 e mostrada na figura 12.

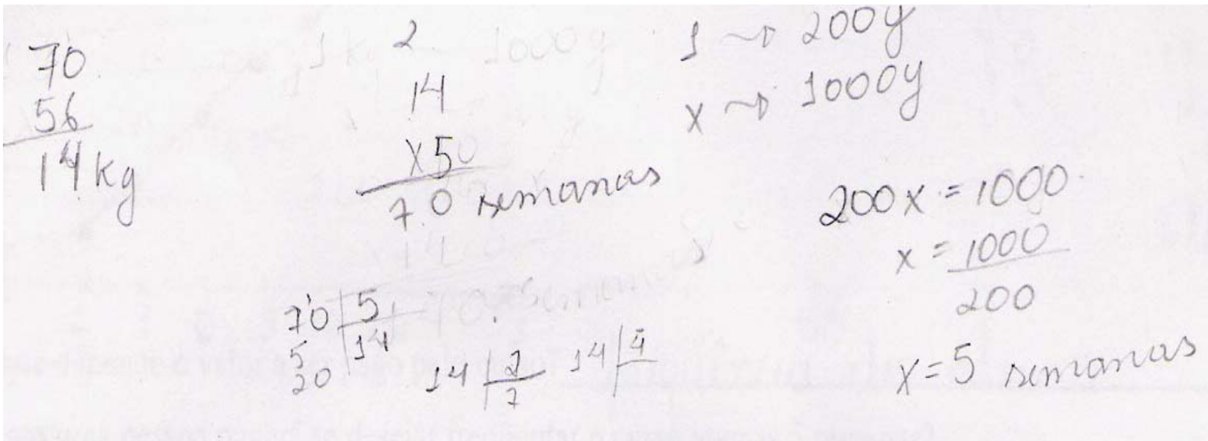
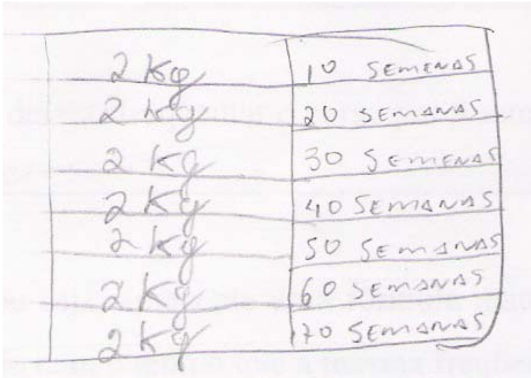


Figura 12: resposta apresentada por A13 para a questão 2a, grupo A.

Na alternativa b, também não foram especificadas as unidades de medida, sendo que 17 alunos optaram por construir uma tabela com o tempo variando de cinco em cinco semanas. Entretanto, outros estudantes organizam suas soluções de maneira diferente, como a apresentada pelo estudante A11 e mostrada na figura 13.

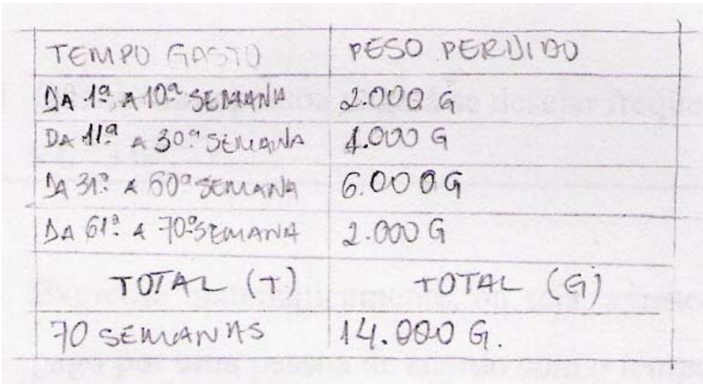


2 kg	10 SEMANAS
2 kg	20 SEMANAS
2 kg	30 SEMANAS
2 kg	40 SEMANAS
2 kg	50 SEMANAS
2 kg	60 SEMANAS
2 kg	70 SEMANAS

Figura 13: resposta apresentada por A11 para a questão 2b, grupo A.

Considera-se que, embora seja possível perceber a intenção do aluno, a relação entre as duas colunas da tabela, a cada linha a partir da segunda, não é correta, pois a massa pedida a cada semana manteve-se constante.

Ainda houve tabelas como a apresentada na figura 14 com a produção de A5, que dão informações corretas de forma resumida.



TEMPO GASTO	PESO PERDIDO
DA 1ª A 10ª SEMANA	2.000 G
DA 11ª A 30ª SEMANA	4.000 G
DA 31ª A 60ª SEMANA	6.000 G
DA 61ª A 70ª SEMANA	2.000 G
TOTAL (T)	TOTAL (G)
70 SEMANAS	14.000 G.

Figura 14: resposta por A5 para a questão 2b, grupo A.

Ao todo, considerando respostas como a de A5, verificou-se que 22 estudantes ofereceram respostas corretas e apenas os estudantes A11 e A10 não alcançaram tal objetivo, este último por ter deixado a alternativa em branco.

Para o item c, foi enfatizada a noção de dependência entre variáveis. Desse modo, foram obtidas respostas que convergiam para o mesmo ponto, ou seja, que o sucesso da dieta dependia fundamentalmente do tempo. Porém, foi considerado que a disciplina da pessoa também influía.

Entretanto, embora tenha sido realizado um trabalho nesse sentido na primeira questão, ainda houve dois estudantes, A14 e A19, que não conseguiram expressar o entendimento sobre a existência de dependência, no caso em relação ao tempo, apresentando respostas que, embora corretas, não atendiam, ao esperado para a questão, em termos matemáticos, conforme é ilustrado nas respostas:

- A14: "... uma dieta, associado a uma atividade física."
- A19: "... da alimentação balanceada."

A alternativa d pontuava sobre a possibilidade do estabelecimento de uma expressão matemática que fornecesse a quantidade de massa perdida pela pessoa a cada semana. Para essa segunda tentativa de instigá-los a apresentar uma expressão matemática, os resultados ainda não foram considerados satisfatórios, visto que, embora afirmativas, as respostas apresentadas resumiram-se a um "sim", salvo o caso de A13, que apresentou a expressão P = T – G.S, explicando o significado da mesma, conforme é possível visualizar na figura 15.

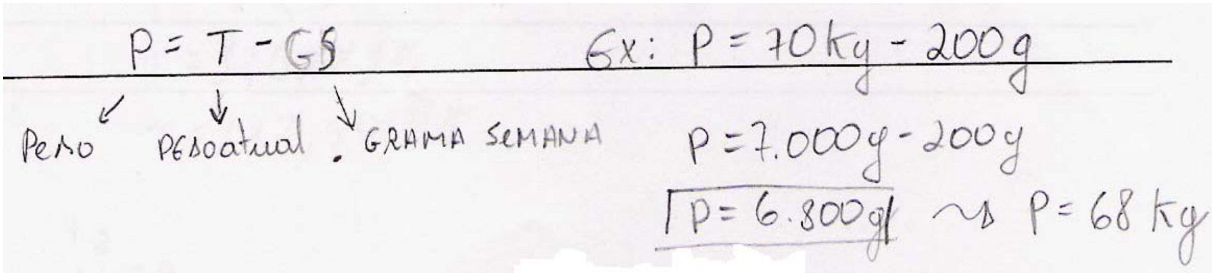


Figura 15: resposta apresentada dor A13 para questão 2d, grupo A.

Apesar da resposta dada apresentar problemas de unidades, o que levou a um resultado errado (p=68 kg), a expressão apresentada é correta, o que indica o entendimento sobre o que deveria ser feito. Trata-se de caso isolado, o qual apontou a necessidade de aprofundamento do trabalho nesse sentido.

No item e, a resposta solicitada deveria ser apresentada utilizando a expressão estabelecida no item anterior, o que não foi realizado, uma vez que 23 estudantes não estabeleceram a expressão matemática solicitada em d. Porém, embora não realizando a apresentação da resposta de acordo com a solicitação, treze estudantes responderam à questão, expressando-se de maneira similar às respostas dadas no item a, ou seja, efetuando operações e apresentando o resultado numérico de 100 semanas, conforme é possível verificar na produção de A9, apresentada na figura 16.

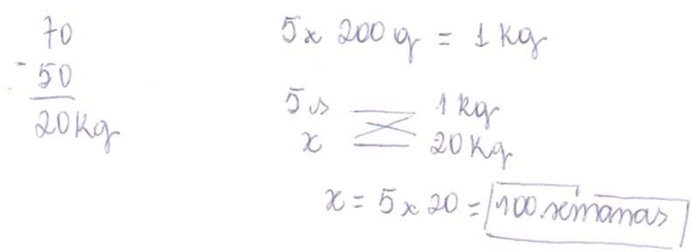


Figura 16: resposta apresentada por A9 para a questão 2e, grupo A.

Para finalizar, o item f perguntava até que ponto os estudantes consideravam ser apropriado emagrecer, remetendo à questão de pessoas que desejam emagrecer sem observar o limite entre boa forma física e saúde. Essa pergunta gerou um debate com opiniões interessantes e com possibilidade de discussões a respeito do tema.

Uma análise global da atividade indica que, embora o grupo, de modo geral, tenha compreendido as questões abordadas, estabelecendo relações e sabendo justificar as mesmas, não conseguia expressar essas idéias, organizar as informações em termos de uma expressão matemática. Considerando que o objetivo era proporcionar condições para os estudantes chegarem ao nível de abstração da classificação de Bergeron e Herscovics, além de desenvolver atividades que oportunizassem a vivência de situações de conversões de maneira satisfatória, foi necessário, antes de dar continuidade à sequência didática, dedicar mais dois períodos de 45 minutos para a retomada das situações que tinham gerado mais dúvidas.

Situação apresentada na 3ª questão

Clube de Natação

A taxa de inscrição num clube de natação é de R$150,00 para um curso de 12 semanas. Se uma pessoa se inscreve após o início do curso, a taxa é reduzida de acordo com a quantidade de semanas em que ela deseja permanecer matriculada.

a) Represente graficamente as possibilidades de valores a serem pagos, de acordo com o tempo de frequência no curso.
b) Do que depende o valor a ser pago pelo curso?
c) Quanto uma pessoa pagará, se desejar frequentar o curso por apenas 5 semanas?
d) Quanto uma pessoa pagará, se desejar frequentar o curso por 9 semanas?
e) Expresse matematicamente, ou seja, apresente uma fórmula matemática que relacione o valor a ser pago por uma pessoa, de acordo com o tempo que a mesma frequentar o curso de natação.
f) É possível fazer uma estimativa do valor a ser pago, se houver um aumento na quantidade de semanas do curso, por exemplo, se esse aumentar de 12 para 15 semanas de duração?

A expectativa para a terceira questão era de aprofundamento e apropriação das ideias referentes às noções de dependência entre variáveis e, ainda, possibilitar e aprofundar o trabalho com diferentes formas de representação, além de buscar evidências do progresso do grupo referente ao expressar-se matematicamente.

As respostas apresentadas para o item a indicaram um bom domínio dos estudantes em relação à construção de gráficos, pois, mesmo não apresentando todos os dados referentes à quantidade de semanas descritas na questão, as respostas podem ser consideradas corretas para 21 dos 24 estudantes. Exemplo do tipo de gráfico construído pode ser visto na figura 17, que mostra a produção do estudante A12.

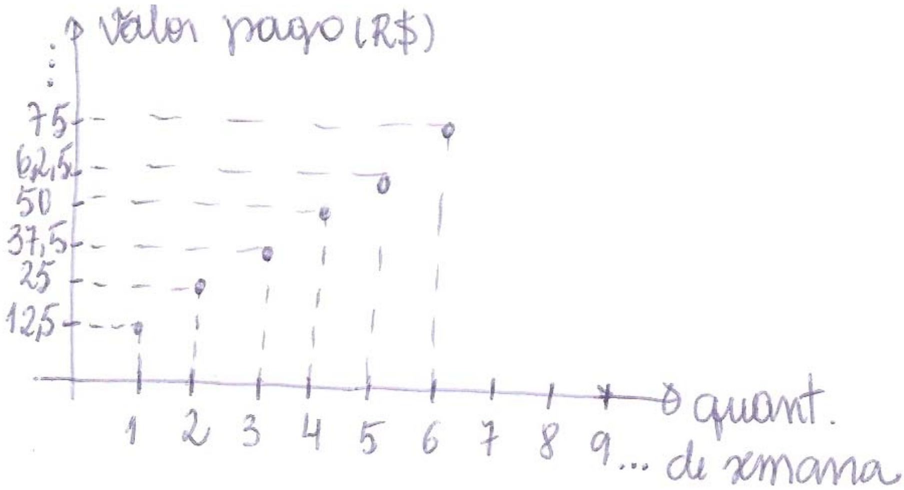


Figura 17: gráfico apresentado por A12 para a questão 3a, grupo A.

Entende-se que o fato de, na questão 1 a quase totalidade dos estudantes não representar as informações dadas na tabela utilizando um gráfico, as construções apresentadas nessa terceira questão apontam para a situação descrita por D´Amore (2005) de que os estudantes, isoladamente, dominam distintas representações de um mesmo objeto, mas não as articulam, de maneira a não perceber se referem ao mesmo objeto matemático. Para Duval (2004, 2005), somente quando o sujeito conseguir articular pelo menos duas representações de um mesmo objeto é que estará se apropriando do mesmo, sendo que é no sentido dessa articulação que a presente engenharia didática busca atuar.

Ainda com relação a essa representação gráfica da situação proposta, foi discutida a adequação ou não do traçado da reta apresentada na figura, iniciando-se, com isso, um debate sobre continuidade.

Para o item b, perguntou-se do que dependia o valor a ser pago pelo curso, não havendo dificuldades por parte dos estudantes na apresentação de respostas corretas, visto que todos afirmaram que dependia da quantidade de semanas de permanência no mesmo. O item c perguntava quanto uma pessoa pagaria se desejasse permanecer por 5 semanas no curso e logo na sequência o item d fazia essa mesma pergunta, porém para o caso de permanência por 9 semanas. Em ambos os casos também foram obtidos resultados positivos, uma vez que não houve respostas consideradas incorretas para nenhum dos dois itens.

No item e, era solicitada a apresentação, por meio de expressão matemática, do custo do curso em decorrência da quantidade de semanas de permanência no mesmo. Considera-se que ocorreu um significativo progresso do grupo em relação a esse aspecto, pois somente cinco alunos não apresentaram resposta adequada. Os demais, utilizando as mais diversas formas de representar as variáveis, apresentaram respostas corretas, como as exemplificadas a seguir, produzidas pelos estudantes A6, A11, A15 e A24.

- A6: "C = *12,5 x S*"

- A11: "$C = \frac{150}{12}.S$ "

- A15: "*C = 12,5n*"

- A24: "*C = a.12,5*"

Com relação às demais respostas, os estudantes A10 e A21 deixaram o item em branco e os estudantes A3, A8 e A13, através das representações a seguir, apresentaram respostas consideradas incorretas:

- A3 "... subtrai 150 – 12 = 148,5 e *-12"

- A8 "x.c = d"

- A13 "... número de semanas . tempo = total"

Analisando a produção desses três estudantes conjectura-se que, como a discussão apontava para a necessidade de algum tipo de representação algébrica e sem compreender efetivamente o que estavam tratando, os estudantes lançaram mão de expressões quaisquer, apenas para não deixar em branco. A investigação não permitiu, e também não era objetivo, detectar qual o pensamento dos alunos para apresentarem tais expressões.

Por fim, a alternativa f, que questionava sobre a possibilidade de se saber o valor a ser pago pelo curso, se a quantidade de semanas aumentasse de 12 para 15, novamente foram obtidos bons resultados, já que os mesmos 19 estudantes que haviam respondido satisfatoriamente à alternativa anterior também responderam satisfatoriamente a essa.

O estudante A8, o qual não havia apresentado solução satisfatória no item anterior, apresentou uma solução expressa por "uma semana R$ 12,50, então 15 semanas R$187,50" e, mesmo não tendo utilizado a expressão que deveria ter sido encontrada no item e, apresentou solução considerada correta. Os outros quatro alunos não apresentaram nenhuma resposta, deixando em branco a alternativa.

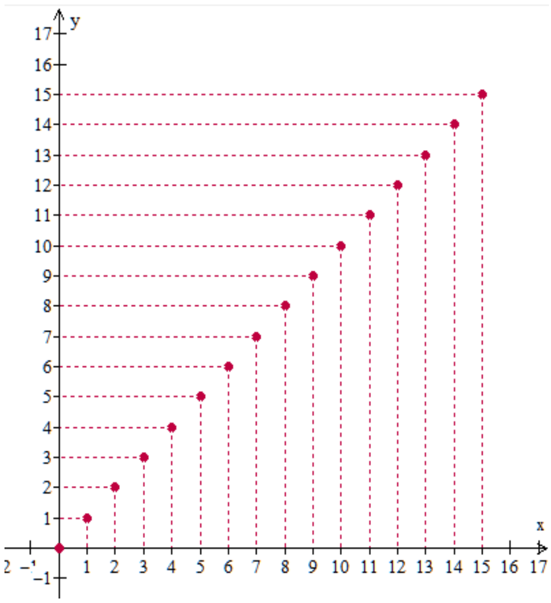
Seguiu-se a finalização da questão com a discussão sobre as soluções apresentadas por todos os participantes.

Atividade de Retomada

A atividade de retomada se constituiu de uma série de questionamentos que tinham por objetivo aprofundar a discussão sobre aspectos considerados importantes como domínio, variáveis contínuas e discretas, bem como a busca de uma expressão matemática que represente a situação descrita. A seguir, apresentam-se exemplos do encaminhamento dado a essa atividade, ressaltando que o apresentado não constitui a totalidade das reflexões efetuadas.

Retornando aos Restaurantes Populares

Ao resolver a atividade referente a restaurantes populares, foi solicitado que se construísse um gráfico para representar os valores arrecadados, de acordo com a quantidade de frequentadores e, em seguida, foi solicitada uma expressão que permitisse calcular valores arrecadados para um número qualquer de frequentadores. Muitos alunos chegaram à expressão $V = 1.f$ e construíram um gráfico muito próximo do apresentado a seguir:



a) Poderíamos unir esses pontos? De que forma? Por quê?

b) Existe um valor correspondente ao valor arrecadado quando a quantidade de pessoas varia entre 3 e 4? Por quê?Explique.

c) E entre 11 e 12 pessoas, existe um valor a ser arrecadado? Explique.

Relembrando a dieta alimentar

a) Se for observado o gráfico construído para essa situação, seria possível fazer a união desses pontos?
b) Existe a possibilidade de perda de peso quando a pessoa estiver entre a décima e a décima primeira semana de dieta?
c) Explique a resposta dada na questão anterior.
d) Qual a diferença entre o que ocorreu para essa situação e o ocorrido para a situação dos palitos descrita na questão anterior
e) E a diferença relativa ao caso dos restaurantes populares?

A taxa de inscrição num clube de natação

a) Se recordarmos o gráfico dessa questão, seria possível fazer a união dos pontos?
b) Explique a resposta dada na questão anterior.
c) Qual a diferença entre o que ocorreu para essa situação e o ocorrido para as situações descritas anteriormente?Explique.

Com relação à questão sobre os restaurantes populares, ao serem apresentados os gráficos construídos e o questionamento sobre a possibilidade de união dos pontos houve um intenso debate. Ocorreu grande discussão entre o grupo de 22 estudantes, que defendia a possibilidade de união dos pontos, e o de dois estudantes, que afirmavam não ser possível tal união.

Para resolver o impasse, buscou-se a resposta nas resoluções apresentadas pelos estudantes para os itens d e e, na mesma questão, de modo que foi possível a constatação, por parte do grupo como um todo, após muita discussão, que, para a situação, não era possível unir os pontos.

Em seus diários, os estudantes A4 e A20 afirmaram:

- A4 "... foi muito interessante descobrir quando é que pode ligar os pontos do gráfico"
- A20 "... pensei que sempre devia ligar os pontos do gráfico, mas descobri que não é bem assim, depende do caso que estamos falando."

Seguindo a mesma metodologia, ao serem indagados sobre a possibilidade de união de pontos no gráfico que tratava da questão da dieta alimentar, também foram identificadas dificuldades em concluir se isso seria possível ou não, visto que 13 estudantes não identificaram que, para o caso da perda de peso, é possível que esta ocorra dentro do intervalo que varia de 0 a 200 gramas.

Os estudantes A12 e A15 escreveram em seus diários de bordo:

- A12 "... pensei que também não podia ligar os pontos do gráfico, pois, não sabia que poderia considerar o caso de perder menos de 200 gramas."
- A15 "...acho melhor agora prestar mais atenção em cada problema para depois decidir se liga ou não liga os pontos."

Para finalizar essa atividade, utilizou-se o problema do clube de natação, mantendo as mesmas perguntas sobre o gráfico. Foi possível perceber a mudança de atitude nos estudantes, visto que, ao contrário de casos anteriores, agora os mesmos optaram por uma reflexão antes de apresentar a resposta final, o que conduziu à apresentação de apenas duas respostas consideradas não satisfatórias.

Através desse trabalho de retomada, considera-se que foi possível uma evolução na questão de identificação do domínio e a formação de expressões matemáticas, já com vista à formalização do conceito de Função, explorado com mais intensidade nas atividades do grupo B da sequência didática.

5.3.2 Desenvolvimento das Atividades do Grupo B

Após a realização do primeiro grupo de atividades, passou-se à segunda etapa de aplicação da sequência didática com as atividades do grupo B, Função Polinomial de 1º grau com o Winplot, composto por nove questões. O trabalho foi desenvolvido no Laboratório de Informática, contando com a utilização do *software* Winplot. Considerou-se que seria oportuno dispor de maior espaço de tempo para a realização da atividade, sendo marcada, com a turma, uma aula em um sábado no turno da tarde, com três horas de duração. Ressalta-se que, embora o encontro tenha ocorrido em dia fora do horário normal de aula, contou-se com os 24 estudantes, que demonstraram bastante interesse, participando, efetivamente, durante todo o período de aplicação da atividade.

O objetivo geral da atividade foi a familiarização e apropriação da expressão formal $\boldsymbol{y = ax + b}$ para a Função Polinomial de 1º grau e o estabelecimento de relações entre os coeficientes a e b e a representação gráfica. Dentro dessa perspectiva, especifica-se que cada questão da atividade possuía objetivos específicos conforme é destacado a seguir.

Com a primeira questão, almejava-se reforçar o elo entre as atividades do grupo A, envolvendo problemas do cotidiano, e as Funções Reais. Também se almejava o aprofundamento da ideia de lei de formação, questionando-se as possibilidades de domínio em Função do contexto apresentado.

Na segunda questão, buscou-se conduzir os estudantes à compreensão e à percepção de que, ao construir o gráfico de uma função polinomial de 1º grau, o valor referente ao coeficiente linear *b* representará a ordenada do ponto de interseção do gráfico com o eixo *y*, independentemente do valor do coeficiente angular *a*.

Para a terceira questão, em complemento à segunda, a proposta foi reforçar condições para que os estudantes percebessem a não necessidade de construção do gráfico da Função Polinomial de 1º grau para identificar o ponto de interseção do mesmo com o eixo *y*.

A quarta questão teve o objetivo de promover a interpretação e a percepção de compressões verticais (STEWART, 2002) do gráfico da Função Polinomial de 1º grau em face às variações dos valores do coeficiente angular *a*.

As questões 5, 6, 7 e 8 procuraram levar os alunos à percepção de que a posição do gráfico da Função Polinomial de 1º grau é definida pelo valor do coeficiente angular. Nessa etapa foram, enfatizadas informações sobre crescimento e decrescimento, de acordo com o sinal de <u>*a*</u> ($a > 0$ e $a < 0$).

Para finalizar, a questão 9 propôs a identificação das características do gráfico, de acordo com os coeficientes, sem a necessidade de construção do mesmo. A seguir, passa-se ao detalhamento do desenvolvimento das atividades do grupo B.

Função Polinomial de 1º Grau com o Winplot

Situação apresentada na 1ª questão

Lembre-se da atividade sobre os restaurantes populares. Nela, foi encontrada a expressão para representar o valor arrecadado, em dinheiro, baseado na quantidade de pessoas que o frequentavam, sendo que a expressão encontrada foi **V = *1.f*** com ***V*** representando o valor arrecadado em reais e ***f***, o número de frequentadores. Construa no Winplot o gráfico da função ***f(x) = x (na linguagem Winplot 1*x).***

a) O gráfico construído tem algo em comum com o gráfico que você construiu para representar o valor arrecadado em função dos freqüentadores? Explique.

b) Qual o domínio de $f(x) = x$:

- Sendo considerado o caso do restaurante popular.
- Não sendo considerado o caso do restaurante popular.

- Por que isso ocorre?

A alternativa a apresentou uma reflexão sobre a atividade dos restaurantes populares, sendo que os estudantes deveriam comparar o gráfico construído durante a atividade e o gráfico obtido, para a expressão $f(x) = x$, com o uso do *software,* explicando o que havia de comum entre os dois.

Como resposta, todos os estudantes, a princípio, afirmaram tratar-se de uma reta, não considerando as discussões já ocorridas sobre domínio.

Contudo, 18 estudantes responderam corretamente quando perguntados, no item b, sobre qual o domínio para o caso da questão dos restaurantes populares e qual o domínio para o caso do gráfico construído com o *software*. Merecem destaque, as justificativas apresentadas por A5 e A17, apresentadas a seguir.

- A5 "... no restaurante fala de pessoas e não existe meia pessoa, logo o domínio é o conjunto Z já na função pode escolher qualquer número"

- A17 "... no restaurante o domínio está relacionado ao número de pessoas por isso não pode ser negativo nem fracionário"

Entre as 6 respostas consideradas incorretas, foi possível identificar o não-estabelecimento de diferença entre os dois casos, conforme mostram as falas dos estudantes A3, A7.

- A3 " — para os dois casos temos os mesmos valores de x."

- A7 "— por que no restaurante está especificado o número de pessoas, e em relação a função não fizemos nenhuma especificação."

Situação apresentada na 2ª questão

Reconsiderando a função $f(x) = x$, estudada na questão anterior, e acrescentando a ela uma unidade, a mesma terá a seguinte forma: $f(x) = x + 1$, o mesmo ocorrendo para o acréscimo de 2, -1 e -2, onde teremos $f(x) = x + 2$, $f(x) = x - 1$ e $f(x) = x - 2$.

2.1 Construa, no Winplot, os gráficos que representam essas novas funções e, em seguida, também o gráfico que representa a $f(x) = x$. Há alguma semelhança ou diferença entre elas? Se houver, explique.

- Semelhança:
- Diferença:

2.2 Construa, com o auxílio do Winplot e em um mesmo sistema de eixos cartesiano, os gráficos das funções $f(x) = x + 1$; $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$; $f(x) = 2x + 3$; $f(x) = 3x + 4$, $f(x) = -3x + 5$, $f(x) = x - 3$, $f(x) = 3x + 7$. Compare os posicionamentos das retas e identifique as características dos gráficos comparados às suas respectivas expressões algébricas e tente explicar o que ocorreu. Refaça quantas vezes considerar necessário.

Em *f(x) = x +1* características do gráfico:

Em *f(x)* = $\frac{1}{2}x + 2$, características do gráfico:

Em *f(x) = 2x +3,* características do gráfico:

Em *f(x) = 3x +4,* características do gráfico:

Em *f(x) = -3x +5,* características do gráfico:

Em *f(x) = x - 3,* características do gráfico:

Em *f(x) = 3x +7,* características do gráfico:

Após a construção desses gráficos, o que se pode concluir, sempre comparando-os com suas expressões algébricas? Você também pode comparar os gráficos entre si.

A produção dos estudantes em relação a essa questão foi bem extensa, originando muitas justificativas. Com relação ao item 2.1, a análise da produção dos estudantes permitiu estabelecer que todos os 24 alunos afirmaram terem encontrado retas, 21 indicaram que eram paralelas, 12 perceberam que, além de paralelas todas estavam inclinadas para a direita e 9 desses 12 estudantes perceberam que, além de paralelas, o gráfico interceptava o eixo *y* justamente no ponto de valor coincidente ao coeficiente *b*. Esses nove estudantes também deram indícios de terem percebido a movimentação, tanto horizontal como vertical, que ocorreu na construção da sequência de gráficos solicitada, o que se considerou bastante positivo.

Como exemplo, observe-se a resposta apresentada por A13.

- A13 "... percebi que, quando colocou o +1, a reta ficou em cima da f(x) = x; quando colocou o +2 a reta ficou em cima da f(x) = x + 1 quando colocou o -1 a reta ficou em baixo do f(x) = x e que, quando colocou o -2, a reta ficou em baixo do f(x) = x – 1, também vi que as retas passavam por 1 no y e -1 no x, 2 no y e -2 no x -1 no y e 1 no x e -2 no y e 1 no x."

A figura 18 apresenta os gráficos construídos por A13 com o auxílio do *software*.

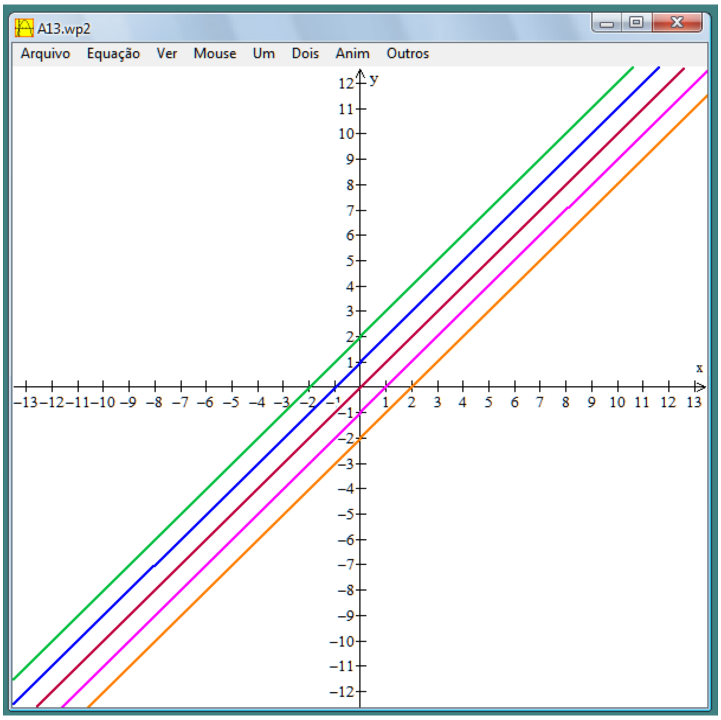


Figura 18: gráfico da família f(x) = x + b apresentado por A13 para questão 2.1, grupo B

Salienta-se que 8 dos 9 estudantes ainda registraram que, "no eixo *x* havia a intersecção como um ponto simétrico ao do coeficiente linear", expressando a percepção de uma característica particular para a sequência de funções *f(x) = x + 1*, *f(x) = x + 2*, *f(x) = x - 1* e *f(x) = x – 2* (como o coeficiente angular a era unitário, o zero da função tinha o mesmo valor do coeficiente linear com sinal trocado). Embora não fosse objetivo discutir essa questão que já encaminhava para a identificação das raízes, fez-se uma discussão também considerando os resultados obtidos no item 2.1.

No segundo item (2.2), ainda com o intuito de promover a identificação e generalização da característica do gráfico de *f(x) = ax + b*, associada ao coeficiente *b*, foram apresentadas funções com coeficientes angulares diferentes dos lineares, para que fosse observado somente o coeficiente linear. Foi possível perceber a melhoria do entendimento referente a esse aspecto, pois apenas dois estudantes não conseguiram, ao fim da tarefa, perceber que o gráfico interceptava o eixo *y* no ponto com ordenada de valor coincidente ao coeficiente *b*.

Situação apresentada na 3ª questão

Com a ajuda do Winplot, ou seja, construindo o gráfico da Função, identifique a característica comum entre os gráficos das funções:

a) *f(x) = -5x + 6* e *f(x) = 3x + 6*

b) *f(x) = -5x + 4* e *f(x) = 3x + 4*

c) $f(x) = 5x - 1$ e $f(x) = 3x - 1$

d) $f(x) = -x - 3$ e $f(x) = 3x - 3$

e) $f(x) = x - 5$ e $f(x) = 3x - 5$

f) $f(x) = -2x + 1$ e $f(x) = 3x + 1$

g) Você acha que seria necessário construir os gráficos para identificar tal característica? Explique.

A terceira questão buscou generalizar a identificação da ordenada do ponto de interseção do gráfico de $f(x) = ax + b$ com o eixo y, sendo que, dessa vez, todos os 24 estudantes identificaram corretamente a ordenada do ponto em questão.

Ao término dessa questão, efetuou-se uma retomada das ideias trabalhadas até então, buscando promover uma síntese que encaminhasse a uma organização teórica das ideias, estabelecendo conceitos. Aqui, foi discutida a questão dos zeros de uma função e sua relação com a representação gráfica.

É importante ressaltar que essas retomadas serão efetuadas ao longo de toda a experimentação, considerando que é a partir das ideias e noções postas e discutidas na sequência didática que se pretende atingir uma construção teórica efetiva sobre o tema.

Situação apresentada na 4ª questão

O que aconteceria com a função $f(x) = x$, se o coeficiente 1 fosse trocado pelos coeficientes $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ e $\frac{1}{5}$? Construa, com o auxílio do Winplot, em um mesmo sistema cartesiano os gráficos das funções: $f(x) = x$; $f(x)=\frac{1}{2}x$; $f(x)=\frac{1}{3}x$; $f(x)=\frac{1}{4}x$ e $f(x)=\frac{1}{5}x$.

a) Que características você percebeu, à medida que foi trocando os coeficientes?

b) Se esses coeficientes fossem números como, por exemplo: 2, 3, 4 e 5, como seriam os gráficos comparados ao gráfico $f(x) = x$?

c) Se forem comparados os gráficos nos quais os coeficientes de x são maiores que 1, como os gráficos cujos coeficientes são menores que 1, há alguma característica que se pode observar? Explique.

A quarta questão visava à percepção da compressão vertical (STEWART, 2002) de $f(x) = x$, solicitando a construção dos gráficos das funções $f(x)=\frac{1}{2}x$, $f(x)=\frac{1}{3}x$,

$f(x)=\frac{1}{4}x$ e $f(x)=\frac{1}{5}x$ para verificação da referida característica, durante a modificação do coeficiente angular. Para o item a, 19 estudantes identificaram que, quanto menor o coeficiente angular, mais o gráfico se distanciava do eixo *y* e se aproximava do eixo *x*, sendo que os demais estudantes não apresentaram respostas.

No item b, foi feito o mesmo questionamento, considerando as funções *f(x) = x*, *f(x) = 2x* , *f(x) =3 x* , *f(x) = 4x* e *f(x) = 5x*. Sem a construção do gráfico, nenhum estudante conseguiu concluir algo sobre as possibilidades de posicionamento dos gráficos, contudo, após a construção, todos os 24 estudantes perceberam que os gráficos se distanciaram do eixo *x* e se aproximaram do eixo *y*. Nesse sentido, considera-se que, no que se refere ao estabelecimento de previsões e conjecturas, os estudantes ainda não demonstravam terem suficiente autonomia, estando atrelados à necessidade de primeiro construir o gráfico para, posteriormente, arriscarem uma resposta.

As figuras 19 e 20 apresentam os gráficos construídos, pelos estudantes, para os itens a e b, e que serviram de base para a resolução da questão.

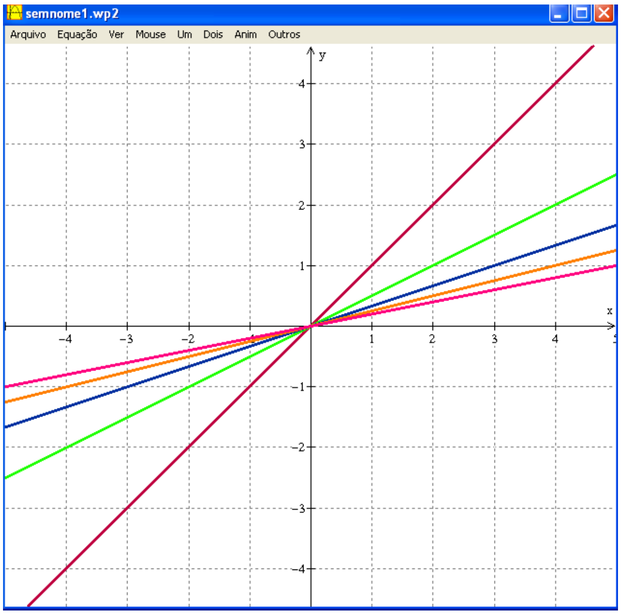


Figura 19: gráficos construídos para a questão 4a, grupo B.

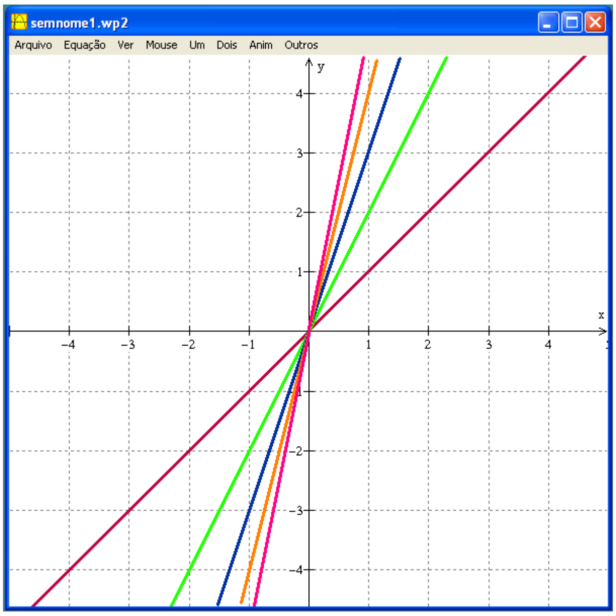


Figura 20: gráficos construídos para a questão 4b, grupo B.

Finalizando a questão, no item c, os estudantes puderam expressar suas conclusões à luz dos dados obtidos nos itens anteriores, sendo que 20 dos 24 estudantes concluíram corretamente a relação existente entre o valor do coeficiente *a* e a inclinação da reta representativa de *f(x) = ax* com relação aos eixos do plano cartesiano. As idéias expressas pelos estudantes são refletidas nas respostas dadas pelos estudantes A12 e A17.

- A12 "... sempre que diminuía o valor de a o gráfico ficava mais perto do eixo x."
- A17 "... quanto maior o valor de a mais próximo do eixo y o gráfico fica."

Situação apresentada na 5ª questão

A característica observada na questão anterior só vale para funções do tipo *f(x) = ax*? Tente verificar se isso ocorre também para funções do tipo *f(x) = ax + b* utilizando sempre o mesmo valor para *b*, alterando apenas o valor de *a*.

Buscando oportunizar aos estudantes o desenvolvimento de ações mais autônomas, a questão era mais genérica, não indicando funções específicas para serem representadas graficamente. A partir da representação *f(x) = ax + b* e respeitando algumas condições iniciais, os estudantes estavam livres para escolher os coeficientes *a* e *b*. Para a apresentação das respostas, eles optaram por uma discussão no grupo em forma de debate, de modo que foram sugeridas as funções *f(x) = 2x + 1*, *f(x) = 3x +1*, *f(x) = 4x + 1*, *f(x) = 5x + 1*, *f(x) = 2x + 1*, *f(x) = 3x +2*, *f(x) = 4x + 3* e *f(x) = 5x + 4* para análise da posição dos gráficos.

Na sequência, ocorreu a construção dos gráficos e anotações dos estudantes sobre as características por eles identificadas nos mesmos. Os estudantes indicaram que as características observadas em relação à influência do coeficiente *a* se mantém, independentemente do coeficiente linear *b*. Nas discussões sobre a questão, apresentaram-se aos estudantes as definições de inclinação da reta e declividade. As conclusões foram formuladas a partir da construção de gráficos como os apresentados nas figuras 21 e 22.

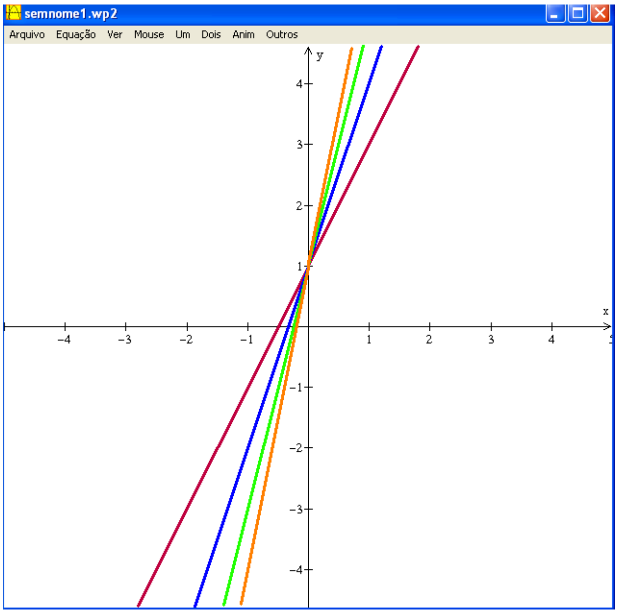


Figura 21: gráficos das funções f(x)= 2x + 1, f(x)= 3x + 1, f(x)= 4x + 1 e f(x)= 5x + 1.

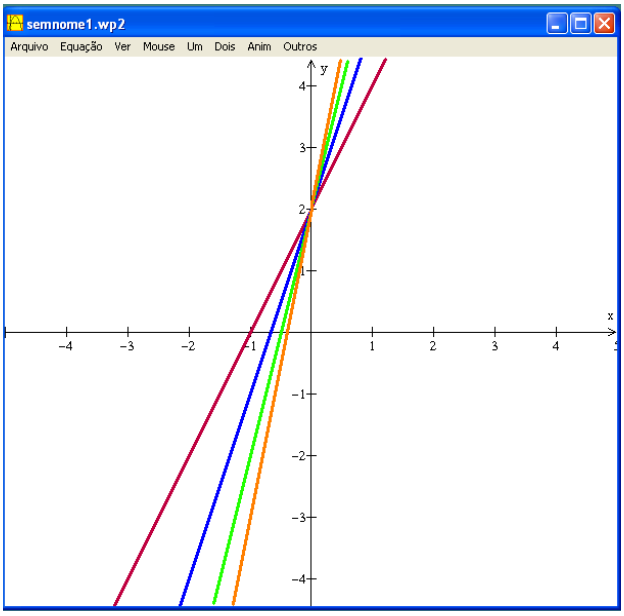


Figura 22: gráficos das funções f(x) = 2x + 2, f(x) = 3x + 2, f(x) = 4x + 2 e f(x) = 5x + 2.

Ressaltam-se as afirmações dos estudantes A5, A 12 e A21 sobre a questão:

- A5 "... no inicio foi difícil identificar as características do gráfico quando é mudado o valor de a, mas na discussão foi ficando mais claro."

- A12 "... com a construção dos gráficos ficou visível que o a influencia na reta estar mais perto ou mais distante do eixo y."

- A21 "... quando aumentamos o valor de a, a reta fica mais próxima do eixo y e mais distante do eixo x."

Nessa fase da experimentação, já era possível identificar resultados satisfatórios da proposta de ensino, visto que todos os estudantes souberam explicar a variação do posicionamento do gráfico frente às mudanças no coeficiente angular da função polinomial do 1º grau.

Situação apresentada na 6ª questão

Observando os gráficos $f(x) = x$, $f(x) = -x$, há alguma diferença que se verifica? Descreva.

A questão abordava a reflexão em torno do eixo x. Baseados na percepção visual os estudantes não apresentaram dificuldades em afirmar, após a construção dos gráficos, a diferença entre $f(x)=x$ e $f(x)=-x$, conforme é possível identificar na anotação que A3 realizou em seu diário de bordo:

- A3 "... foi bom perceber que um simples sinal é capaz de mudar a direção do gráfico da função."

Porém, três estudantes apresentaram dificuldade em explicar a diferença entre os gráficos, dentre eles A1, por exemplo, o qual afirmou em seu diário de bordo que:

- A1 "... não percebi mudança alguma, só depois que vi todo mundo comentando."

Situação apresentada na 7ª questão

Em relação às funções $f(x)= - 4x$, $f(x) = 4x$, o que se pode ver de diferença ou semelhança? Qual?

Ainda trabalhando com a simetria de reflexão, a sétima questão oportunizou ampliar as discussões e, a partir dela, os estudantes geraram construções de outros pares de retas onde pudesse ser observada. Dessa forma, a identificação da mudança na inclinação do gráfico pôde ser confirmada e os 24 estudantes apresentaram respostas corretas.

Contudo, ressalta-se que a percepção dos estudantes foi notadamente visual. Embora se tenha indicado que a reflexão era em torno do eixo x, a questão não chamou a atenção deles. Considerou-se que a discussão não deveria ser aprofundada nesse momento, pois no trabalho com a Função Quadrática seria possível retomar a ideia de reflexão.

Situação apresentada na 8ª questão

Se forem construídos os gráficos de $f(x) = x - 3$, $f(x) = 2x - 5$, $f(x) = 5x - 6$, $f(x) = x - 7$, em um mesmo plano, quais características serão comuns a todos eles?

Respondendo a questão 17 estudantes apontaram, antes da construção do gráfico, duas características: por se tratarem de retas os gráficos teriam um ponto de intersecção com o eixo *y* e a inclinação dessas retas seria “à direita” (indicando ângulo de inclinação menor que 90º). Os demais estudantes apresentaram apenas a primeira característica, não mencionando a questão da inclinação da reta. Após a construção dos gráficos, com o *software,* houve uma discussão geral sendo chamada a atenção para a necessidade de sempre se tentar buscar mais de uma característica a uma dada função, questionando o que mais pode ser observado, não se restringindo a apontar uma única característica.

Situação apresentada na 9ª questão

Se forem construídos os gráficos de $f(x) = - x - 3$, $f(x) = - 2x - 5$, $f(x) = - 5x - 6$, $f(x) = - x - 7$, em um mesmo sistema cartesiano, quais características serão comuns a todos eles? Tente responder sem o auxílio do *software* e depois confirme sua resposta com o Winplot.

Para o fechamento da atividade, a nona questão apresentou as funções da questão anterior, porém trocando o sinal do coeficiente *a*. Os estudantes perceberam a alteração na inclinação do gráfico, confirmada após a construção do mesmo com o auxílio do *software*. Todos os 24 estudantes responderam corretamente a essa questão.

Essa atividade apresentou excelentes resultados, visto que todos os estudantes realizaram explicações detalhadas sobre todas as características dos gráficos das funções propostas, demonstrando grande euforia durante a verificação dos resultados com o Winplot.

Os alunos A3 e A18 escreveram em seus diários:

- A3 “... a melhor parte da tarefa foi no final quando vi que tinha acertado como ficava o gráfico mesmo antes de fazer [...] nunca pensei que poderia faze uma coisa dessas.”

- A18 “... fiquei tão feliz acertando as questões da tarefa eu sempre tive tanta dificuldade e agora tá parecendo mais fácil matemática.”

Ao fim desse grupo de atividades, ocorreram mais quatro encontros em sala de aula, tratando do tema Funções do 1º grau. Nesses encontros, foram retomados aspectos do conteúdo trabalhados durante as atividades, buscando uma sistematização dos mesmos. Também foram abordados conteúdos do plano de estudos dos alunos e que não constavam das atividades propostas, bem como, realizados exercícios.

No seu conjunto, considera-se que as atividades dos grupos A e B atingiram o objetivo de, em primeiro lugar, familiarizar o estudante com um tipo de trabalho onde sua participação e envolvimento são absolutamente necessários. Não havia como permanecer no grupo sem, em maior ou menor grau, fazer as tarefas, registrar soluções, envolver-se nas discussões. Também foi necessária familiarização com uma postura diferenciada na hora da realização das tarefas. Embora elas se constituíssem em uma série de indicações do que deveria ser feito, para realizá-las, a todo o momento, o estudante era chamado a tomar decisões e, principalmente, explicar e justificar o que estava realizando e por quê.

Nesse sentido, as atividades, considerando a teoria de Duval, permitiram que os estudantes utilizassem três tipos de registros de representações algébrica, gráfica e língua natural, bem como conversões entre os mesmos, como caminho, não só para apropriação dos conteúdos trabalhados, mas também, como explicita a teoria, buscando contribuir para o desenvolvimento cognitivo dos sujeitos. No que se refere propriamente ao conteúdo Funções, o trânsito entre os três primeiros níveis estabelecidos por Bergeron e Herscovics, (compreensão intuitiva, matematização inicial e abstração) foi permanentemente perseguido e quase que em sua totalidade atingido, ainda, com incursões para o nível de formalização.

No processo de verificação da aprendizagem, após a realização desses dois primeiros grupos de atividades referente a Funções Polinomiais do 1º grau, foi aplicada uma atividade de avaliação de desempenho (Apêndice 5), considerando a necessidade de seguir os critérios de avaliação adotados pela Instituição. Essa atividade também se constituiu em instrumento de investigação.

Os resultados dessa avaliação mostraram que, dos 24 estudantes participantes da investigação, 14 obtiveram notas iguais ou superiores a média 6,0 (seis), utilizada pela instituição para aprovação. Esse índice foi considerado satisfatório, por refletir principalmente, um período de adaptação à metodologia aplicada. Uma discussão mais aprofundada sobre essa avaliação e seus resultados será realizada na análise a *posteriori*.

5.3.3 Desenvolvimento das Atividades do Grupo C

O grupo C de atividades, composto de três questões, foi estruturado objetivando desenvolver idéias e conceitos referentes à Função Polinomial de 2º grau, seguindo as mesmas idéias propostas no grupo A: partindo da solução de problemas, transitar pelos três primeiros níveis de compreensão do conceito de Função propostos por Bergeron e Herscovics, buscando uma apropriação das idéias e conceitos, considerando a ênfase em atividades de conversão, conforme proposto por Duval em sua teoria das representações semióticas. Assim, a seguir, é apresentado o relato da aplicação das atividades desse grupo, em que cada uma das questões foi desenvolvida em um período de 45 minutos.

Situação apresentada na 1ª Questão

Gabriel é fazendeiro e pretende fazer um cercado quadrado para dar início a uma criação de galinhas poedeiras. Ele ainda não calculou qual será a área do cercado, mas sabe que precisará comprar uma tela para delimitar o espaço a ser utilizado e um revestimento apropriado para o piso.

a) Se Gabriel fizer um cercado com lado igual a 5 metros, quantos metros de tela ele terá que comprar?

b) Para o mesmo valor de lado, quanto de revestimento para o piso será necessário?

c) Se o lado do cercado fosse de 5,5 metros ou de 6,2 metros, quanto de tela seria necessário?

d) Para o caso de 5,5 metros ou de 6,2 metros, quais seriam as quantidades de revestimento necessárias para o piso?

e) É possível apresentar uma expressão matemática para o cálculo da quantidade de tela a ser utilizada?

f) E para a quantidade de piso?

g) A quantidade de tela depende de quê?

h) E a quantidade de revestimento para o piso?

i) Represente graficamente a possível quantidade de tela a ser utilizada de acordo com o tamanho do cercado.

J) Faça um gráfico que represente as possibilidades de quantidade de revestimento necessária para o piso, de acordo com o tamanho do cercado.

No item a, oito estudantes apresentaram dificuldade em entender que “um cercado com lado igual a 5 metros” referia-se a um cercado “quadrado” que teria por característica as medidas dos lados iguais. Superada essa questão, todos responderam a questão satisfatoriamente.

Os estudantes também responderam satisfatoriamente os itens b, c e d, não surgindo nenhuma dificuldade com relação aos cálculos, ora de área, ora de perímetro solicitados.

No item e, era solicitada uma expressão matemática que indicasse a quantidade de tela necessária para um cercado com medida de lado qualquer, sendo que apenas um estudante não respondeu satisfatoriamente. Todos os demais apresentaram soluções consideradas corretas, como pode ser observado na produção de A7 apresentada na figura 23.

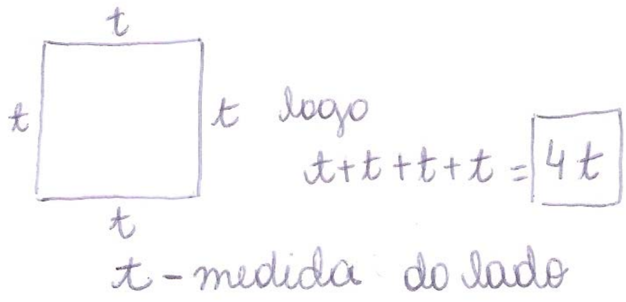


Figura 23: solução apresentada por A7 para a questão 1e, grupo C.

O item f também se referia à apresentação de uma expressão matemática, porém, para indicar a área do piso da construção. Novamente não houve dificuldades e o grupo, à exceção de dois alunos, apresentou soluções satisfatórias. Dos dois estudantes que não apresentaram soluções consideradas satisfatórias, o estudante A5 optou por não responder e A17 apresentou uma solução onde afirmava ser necessária a realização da soma das medidas dos lados do quadrado.

Os itens g e h tratavam das relações de dependência, ou seja, do que dependia a quantidade de tela e de revestimento do piso. O grupo foi unânime em afirmar que ambos dependiam da medida do lado, porém, de maneiras distintas, o que se considera um indicativo do bom entendimento dos mesmos sobre relações de dependência.

Nos últimos dois itens (i e j), era solicitada uma representação gráfica das possíveis quantidades de tela e de piso a serem utilizadas para delimitar e revestir o piso do galinheiro.

As soluções apresentadas a esses dois itens foram agrupadas em três situações, sendo que quatro estudantes não apresentaram solução:

- gráfico cartesiano, com pontos unidos por linha contínua apresentado por oito estudantes;
- gráfico cartesiano, sem união de pontos apresentado por onze estudantes;
- gráfico de colunas, apresentado por um estudante.

As soluções apresentadas oportunizaram a retomada da discussão sobre domínio e continuidade. Também foi analisada com o grupo a pertinência da representação do estudante A8, que utilizou um gráfico de colunas, conforme mostra a figura 24.

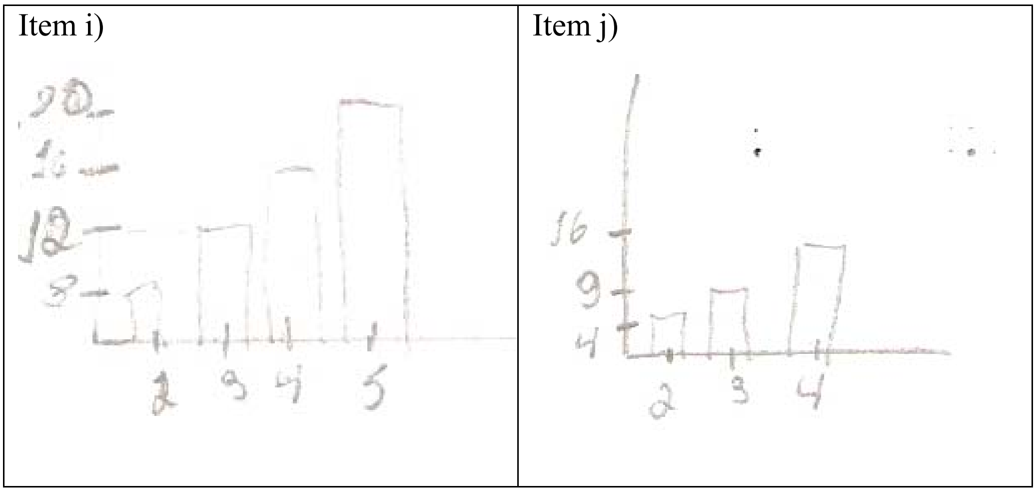


Figura 24: gráficos apresentados por A8 para as questões 1i e 1j, grupo C.

Considera-se que o desenvolvimento dessa primeira questão do Grupo C ocorreu de maneira bem mais tranquila do que as propostas nos grupos anteriores. Entende-se que tal ocorrência se deve, principalmente, à familiarização dos estudantes com a proposta de trabalho. A discussão sobre a questão se deu sem grandes polêmicas, não significando, entretanto, que os mesmos encontravam-se desestimulados.

É importante destacar o fato de um estudante ter observado a possibilidade da existência de distintas funções, a partir das situações descritas. A20 expôs oralmente a seguinte interrogação:

- "... a expressão encontrada no item e serve como função do 1º grau e a encontrada no item f dá pra ser outra função?"

Tal questionamento despertou nos demais estudantes a curiosidade sobre qual seria a reposta adequada, sendo que a mesma começou a ser respondida quando da resolução da situação apresentada na 2ª questão.

Situação apresentada na 2ª Questão

Deseja-se revestir com ladrilhos uma parede medindo 16 m de comprimento por 1,6 m de altura, usando, para tal, caixas de ladrilhos que possuem $2m^2$ cada uma.

a) Qual a área a ser revestida?

b) Quantas caixas de revestimento serão necessárias?

c) Do que depende a área a ser revestida?

d) Do que depende a quantidade de revestimento a ser utilizado?

e) Faça uma tabela com as possibilidades de quantidade de revestimento para o caso de as medidas da parede serem: 16m x 1,4m, 16m x 1,5m, 16m x 1,3m, 16m x 1,2m, 16m x 1,1m e 16m x 1,7m.

Na 2ª questão, utilizou-se o cálculo de área, já encaminhando a construção do modelo $y = x^2$ para, posteriormente, ser trabalhado o conceito de função polinomial do 2º grau. Foram priorizados tratamentos (no contexto da teoria de Duval) onde a idéia de relação de dependência foi novamente enfatizada. O tempo destinado para a desenvolvimento dessa questão foi de 45 minutos.

Com relação aos itens a e b, relacionados ao cálculo da área a ser revestida e da quantidade de caixas de ladrilhos necessária, as soluções apresentadas foram plenamente satisfatórias e os estudantes não apresentaram nenhum tipo de dificuldade.

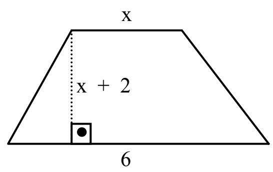
As soluções e respostas apresentadas aos itens c e d, relacionados a questionamentos sobre relação de dependência, indicaram um bom entendimento dos estudantes sobre a questão. Esse fato já vinha sendo observado desde a realização do primeiro grupo de atividade, apresentando uma melhora significativa durante o desenvolvimento do grupo aqui apresentado.

No item e, foi solicitada aos estudantes a construção de uma tabela com as possíveis quantidades de revestimento, em função de algumas medidas apresentadas para o comprimento e a altura da parede. Esse item apresentou bom resultado, pois foram apresentadas tabelas organizadas, claras e com dados corretos.

Durante o período de resolução da questão e no espaço aberto a discussões, foi possível perceber que os estudantes se conduziam com desenvoltura, já integrados à forma como as atividades estavam se desenvolvendo. Nesse ponto da aplicação da sequência didática, já se conjecturava sobre uma considerável melhora no rendimento dos estudantes.

Situação apresentada na 3ª questão

A área da região em forma de trapézio é dada por $A = \frac{(B+b).h}{2}$, em que **B** é a base maior, **b** é a base menor e **h** é a altura.



a) Qual a área desse trapézio?
b) Se $x = 3$ qual será a área do trapézio?
c) Pode-se escolher qualquer valor para *x*?
d) De que depende a área do trapézio?
e) Pode-se ter $x = 3{,}2$ ou $x = 1{,}7$?
f) Qual a área do trapézio, se *x* assumir os valores: *1,3; 2,4; 5,1; 3,7 e 4,5*?
g) É possível expressar, através de um gráfico, as possíveis áreas do trapézio?

Para finalizar esse grupo de atividades, a 3ª questão tratava novamente do cálculo de área como caminho à aprendizagem de funções polinomiais de 2º grau. Além de abordar a questão da relação de dependência, possibilitava tratamentos e conversões. O tempo previsto para o trabalho com essa questão era de 45 minutos. A solução do item a encaminhava para a obtenção de uma expressão quadrática, a partir da proposta do cálculo da área de um trapézio, o qual tinha duas de suas medidas (base menor e altura) colocadas em tem termos da variável *x.* Assim, ao ser solicitada a área do trapézio, a mesma deveria ser expressa em função dessa variável. Na solução desse item os estudantes, de modo geral, apresentaram dificuldade em representar a área do trapézio em função da letra *x*, entretanto, após uma discussão no grande grupo, todos conseguiram apresentar a expressão $A = \frac{x^2 + 8x + 12}{2}$.

O estudante A16 escreveu em seu diário:

- A16 "... tive um pouco de dificuldade para entender que podia encontrar a área usando o x, mas ainda fiquei com duvida, pois o que apareceu não foi um número e sim uma fórmula."

As palavras do estudante revelam que é muito forte a ideia de que, ao se calcular uma área, necessariamente, deve resultar um número, evidenciando uma insegurança com a compreensão da ideia de variável. A questão mostrou o não entendimento de um resultado final em forma de expressão matemática e provocou bastante discussão na turma.

A solução do item b contribuiu para esclarecer dúvidas e dificuldades encontradas no item a, uma vez que os estudantes começaram a identificar que o *x* era uma variável e que, dependendo do seu valor, é que se teria o valor da área do trapézio. Essa percepção de variável fez com que alguns estudantes comentassem que a expressão era uma Função. A fala de A9 reflete tal constatação.

- A9 "— se é uma expressão com x e se pode colocar sem qualquer número no lugar de x, então é função."

No item c foi exatamente o fato de poder, ou não, escolher um valor qualquer para *x* que gerou a maior discussão; dez estudantes afirmaram que qualquer valor poderia ser escolhido, enquanto os demais afirmavam que não. Contudo, a fala do estudante A15 colocou fim à discussão:

- A15 " — se é área não posso colocar x = 0, pois aí o trapézio vira triângulo!"

Todos os estudantes demonstraram surpresa com a afirmação, porém, após alguns minutos de reflexão, concordaram com o colega. Na sequência, a pesquisadora fez uma indagação sobre a possibilidade de os valores de x serem negativos, o que provocou novas dúvidas. O estudante A7 escreveu em seu diário:

- A7 "... achava que poderia colocar qualquer número no lugar de x, mas, percebi depois que se colocar valor negativo não dá para calcular a área do trapézio [...] mas se pensar que a expressão é função, aí sim pode colocar qualquer valor para o *x*."

Tal afirmação do estudante demonstra que o mesmo foi capaz de identificar o domínio da função, conhecimento típico do nível de abstração da compreensão do conceito de Função.

O item d, perguntava do que dependia a área do trapézio e, mais uma vez, os estudantes apresentaram bom entendimento das relações de dependência, conforme já vinha ocorrendo em questões anteriores. Na sequência, os itens e e f apresentavam possíveis valores para *x*, perguntando se esses poderiam, ou não, ser utilizados, de modo que, também para esse item não houve problemas na resolução.

Questionados sobre a possibilidade, ou não, de serem expressas, através de gráfico as possíveis áreas do trapézio, treze estudantes apresentaram os gráficos representativos considerados como resposta satisfatória para a questão. Os demais onze estudantes não apresentaram nenhuma resposta.

Ao se investigar, junto a esses estudantes, o motivo da não-apresentação de uma solução para a questão, as justificativas convergiram para a dificuldade em representar, no sistema cartesiano, os valores referentes à x, x^2 e y. Para os estudantes, no sistema cartesiano, deveria ter espaço para representar x, x^2 e y, não considerando y como uma forma de representar x^2. Essa ideia dos estudantes indica que os mesmos ainda têm dificuldade com a compreensão da relação de dependência referente a aspectos de abstração e formalização, como o estabelecimento de leis de formação. Dentro de uma compreensão intuitiva e matematização inicial, têm o domínio sobre relação de dependência, mas quando essa relação passa a ser expressa formalmente, se confundem. Nesse momento, julgou-se oportuno retomar e discutir a questão, oportunizando aos estudantes espaço para reflexão.

Essa última atividade do Grupo C mostrou que as dúvidas e dificuldades dos estudantes centravam-se no entendimento do uso da expressão representativa para a área do trapézio seguida de dificuldades na construção do gráfico para essa expressão. Entende-se que essas dificuldades estão relacionadas, tanto à questão da abstração necessária para o entendimento e tratamento da questão de forma correta, como também a não-articulação entre as diferentes formas de representação da situação, que possibilitaria as conversões pertinentes.

Considera-se que, em função da sequência didática encontrar-se próxima à conclusão, há uma tendência, por parte dos estudantes, de não apresentarem tantas dúvidas, como ocorreu no início da experimentação. Contudo, o último grupo de atividades reserva elementos que serão indispensáveis à passagem pelos níveis de compreensão do conceito de função proposto (noção intuitiva, matematização inicial e abstração).

5.3.4 Desenvolvimento das Atividades do Grupo D

A aplicação do grupo de atividades D contou novamente com o uso do *software* educativo Winplot e foi desenvolvida no Laboratório de Informática do Campus de Parnaíba. Composto por dez questões, esse grupo de atividades buscava oferecer aos estudantes a possibilidade de, através dos registros de representação em sentido duplo, promover a compreensão e a aquisição do conceito de Função. Também buscava um trabalho no nível de abstração proposto por Bergeron e Herscovics e um avanço para o último nível, o de formalização.

A sistemática de trabalho para esse grupo de atividades foi semelhante à adotada para o grupo B, de forma que foi marcado um horário em um sábado à tarde para o desenvolvimento do mesmo. Os alunos foram organizados individualmente e receberam a atividade por escrito, onde era possível a anotação de resultados e questionamentos. Ao todo, foram 3 horas de trabalho com os estudantes, sendo que o desempenho dos mesmos pôde ser observado e acompanhado detalhadamente.

Função Polinomial do 2º Grau com o Winplot

Situação apresentada na 1ª questão

Hoje será retomada a atividade sobre o cercado que o fazendeiro Gabriel planejava construir. Nela, encontram-se duas expressões: a primeira relaciona a quantidade em metros de tela que Gabriel deveria comprar em função da medida do lado do cercado quadrado, ou seja, $Qt = 4.l$ (com *Qt* sendo a quantidade de tela a ser comprada e *l* o comprimento do lado do cercado quadrado) e a segunda que relaciona a quantidade de revestimento para o piso a ser comprado também em função da área do cercado quadrado, isto é, $Qp = l.l = l^2$ (como *Qt* sendo a quantidade de revestimento e *l* a medida do lado do cercado quadrado).

Para o caso $Qt = 4.l$, buscando-se uma representação geral para a expressão como realizado nas atividades sobre Função do 1º grau, pode-se representá-la por $f(x) = 4x$ e assim trabalhar da mesma maneira já trabalhada anteriormente.

Para o caso $Qp = l.l = l^2$ fazendo-se o mesmo tipo de unificação já realizada anteriormente obtém-se $f(x) = x.x = x^2$. Nessa situação, a expressão que representa a função não é do 1º grau, e sim do 2º grau e é com ela que se trabalhará agora no Winplot.

Faça o que se pede:

a) Construa, no Winplot, o gráfico de $f(x) = x^2$ (linguagem no Winplot, f(x)=x^2) e descreva as características do mesmo.

b) A sua representação gráfica para o problema do fazendeiro Gabriel ficou parecida com a feita com o *software*?

c) Se considerasse o caso do fazendeiro Gabriel, quais poderiam ser os valores de x?

d) E para o caso da função f(x)?

A 1ª questão propunha uma retomada da atividade do grupo C, buscando interligar o que já havia sido realizado com o procedimento proposto (utilização do *software*). Foi solicitada a construção do gráfico de $f(x) = x^2$ e a descrição de suas características em linguagem natural. Em seguida, no item b, foi perguntado se o gráfico construído anteriormente, com lápis e papel, coincidia com o gráfico construído como o auxílio do *software*.

Como respostas, 20 estudantes afirmaram que o gráfico construído com o *software* ficou parecido no que se referia aos dados numéricos, porém, no desenho apresentava diferenças. Tais afirmações foram decorrentes de duas situações: uma refere-se ao fato dos estudantes, na atividade C, não terem considerado valores negativos (uma vez que se tratava de uma situação prática, envolvendo as dimensões de um cercado, só foram atribuídos valores positivos), de modo que o gráfico foi construído somente no primeiro quadrante. Já utilizando o *software,* o gráfico foi construído em todo o domínio real da função. O outro aspecto que interferiu no modo como os estudantes identificaram semelhanças nas duas construções foi a escala utilizada pelos mesmos nas construções com lápis e papel.

Os demais estudantes não perceberam, a princípio, a diferença entre os gráficos, contudo, após a discussão, concluíram que, por falta de atenção, não haviam notado os aspectos citados. Nesse sentido, o estudante A9 escreveu em seu diário de bordo:

- A9: "... por não prestar atenção não percebi que o gráfico que tinha feito no exercício passado não era igual ao gráfico que fiz no Winplot."

A figura 25 apresenta o comparativo feito entre o gráfico construído pelo estudante A9 nas atividades mencionadas.

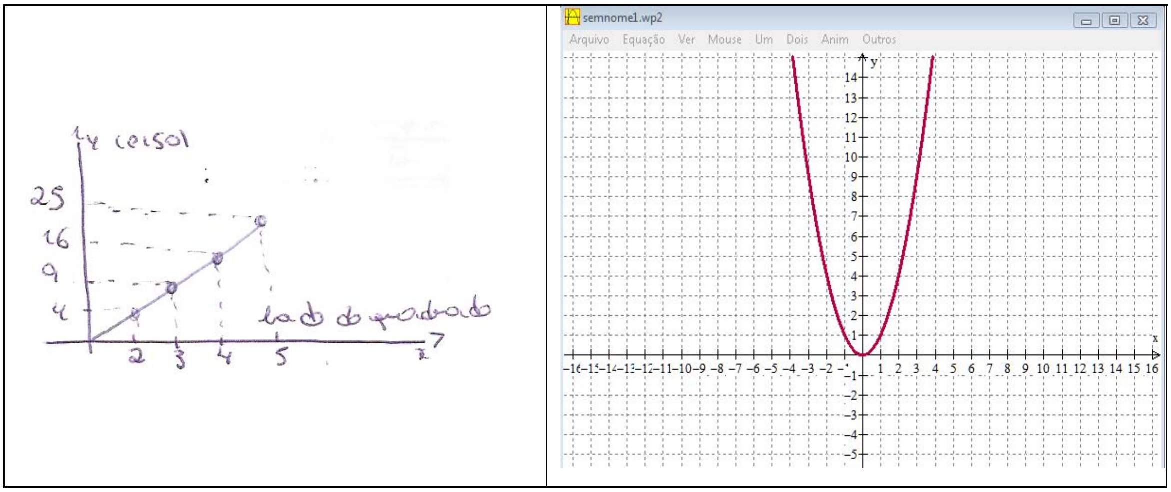


Figura 25: comparativo das construções realizada pelo estudante A9.

As discussões foram produtivas no sentido de aprofundar os dois aspectos que geraram mais dúvidas com relação às representações das duas situações: a questão do domínio e a da utilização adequada da escala na construção de gráficos.

Após as discussões da primeira parte da atividade, os itens c e d, os quais inseriam a questão do domínio adequado para distintas situações, foram resolvidos de maneira satisfatória por todos os estudantes.

Situação apresentada na 2ª questão

Faça o que é solicitado:

a) Construa com o Winplot, no mesmo plano cartesiano e usando cores diferentes, os gráficos de $f(x)=x^2$; $f(x)=2x^2$; $f(x)=3x^2$ e $f(x)=4x^2$. O que você observou?

b) Construa no Winplot, num mesmo plano cartesiano e usando cores diferentes os gráficos de $f(x)=x^2$; $f(x)=\frac{1}{2}x^2$; $f(x)=\frac{1}{3}x^2$ e $f(x)=\frac{1}{4}x^2$. O que você observou?

c) Comparando os gráficos dos itens a) e b), o que você pode dizer a respeito do ocorrido? Explique com o máximo de detalhes.

Para a segunda questão, o objetivo foi a observação de que diferenças na forma de representação algébrica de uma função, implicam modificações em sua representação gráfica. No caso específico, a questão se referia a **compressões** e **esticamentos** (STEWART, p.39) geradas pela transformação g(x)=*c*f(x) com $c > 1$ ou $0 < c < 1$. Assim, no item a, foi solicitado aos estudantes que verificassem as características dos gráficos de $f(x)=x^2$; $f(x)=2x^2$; $f(x)=3x^2$ e $f(x)=4x^2$, pontuando suas observações.

A princípio, os estudantes demonstraram dificuldades em apontar características diferentes da relacionada à concavidade da parábola voltada para cima, visto que apenas 8 perceberam os **esticamentos** verticais ocorridos em virtude da mudança de valor do coeficiente de x^2. Foram necessárias algumas indagações sobre a atenção dedicada à observação das representações gráficas, para que os mesmos detectassem o afastamento e a aproximação da parábola em relação ao eixo *y*, o que naturalmente implica afastamento e aproximação da mesma, quando relacionada ao eixo *x*.

As explicações dos estudantes para o ocorrido, basicamente giram em torno de afirmações como a apresentada pelo estudante A15:

- A15 “... o gráfico vai fechando, ou seja, se afastando de *x*, quanto maior foi o *a*, mais fecha.”

De maneira semelhante, o item b apresentava as representações algébricas de $f(x) = x^2$; $f(x) = \frac{1}{2}x^2$; $f(x) = \frac{1}{3}x^2$ e $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ e solicitava o mesmo que foi solicitado para o item a. Para esse, item os estudantes demonstraram uma melhor percepção das características a serem apontadas, uma vez que apenas dois estudantes não identificaram as modificações ocorridas de maneira satisfatória.

O estudante A15 apontou corretamente as alterações ocorridas em seu registro:

- A15 “... o gráfico vai abrindo, ou seja, se aproximando de *x*, quanto menor foi o *a*, mais abriu a parábola.”

Para o fechamento da questão, foi perguntado aos estudantes que conclusões poderiam ser apontadas em relação ao observado nos itens a e b. Exceto os dois estudantes que já não haviam respondido o item anterior, todos os demais apresentaram conclusões dentro da expectativa para a questão, conforme é possível verificar nas anotações de A3 e A21:

- A3 “... o gráfico vai abrindo ou fechando de acordo com o valor de a, se a é grande vai fechando e se a for pequeno vai abrindo.”
- A21 “... sempre que aumentamos o valor de *a*, o gráfico vai se aproximando do eixo *y* e se diminuirmos o valor de *a* o gráfico vai se afastando do eixo *y* e se aproximando do eixo *x*.”

Situação apresentada na 3ª questão

O que se pode afirmar sobre os gráficos que representam as funções abaixo, com relação aos eixos x e y? Construa-os de dois em dois com o Winplot e responda.

a) $f(x) = \frac{3}{4}x^2$ e $f(x) = \frac{4}{3}x^2$

b) $f(x) = 2x^2$ e $f(x) = \frac{5}{2}x^2$

c) $f(x) = \frac{3}{2}x^2$ e $f(x) = 6x^2$

d) $f(x) = \frac{7}{2}x^2$ e $f(x) = 4x^2$

e) Se você não tivesse usado o *software*, conseguiria responder à questão? Explique.

Para essa questão, que retomava a identificação de comportamentos relacionados aos **esticamentos** e **compressõe**s, o aproveitamento foi bastante satisfatório, uma vez que todos conseguiram apresentar características relacionadas ao posicionamento dos gráficos com relação aos eixos. Contudo, vale a ressalva que, para o item e, cinco estudantes afirmaram que talvez não conseguissem apresentar as características do gráfico sem a construção do mesmo, o que fica bem claro na resposta apresentada por A7:

- A7 "... talvez sim, mas demoraria muito pois teria dificuldade para construir todos os gráficos para depois comparar."

Afirmações semelhantes a do aluno A7 indicavam que o objetivo de se apresentar características da representação gráfica a partir de sua representação algébrica antes da construção do gráfico não havia, ainda, sido atingido. Foi observado que grande parte dos estudantes, mesmo sem declarar, não tinha domínio suficiente para fazê-lo. No desenvolvimento da engenharia, considerava-se essa conversão (a partir da representação algébrica, descrever em linguagem natural as características da representação gráfica) um forte indicativo da apropriação das idéias e conceitos que estavam sendo estudados, o que continuou sendo perseguido nas próximas questões.

Situação apresentada na 4ª questão

Com a ajuda do Winplot, indique o que aconteceria com o gráfico de:

a) $f(x)=x^2$ se fosse escrito $f(x)=-x^2$

b) $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ se fosse escrito $f(x)=-\frac{1}{2}x^2$

c) $f(x)=3x^2$ se fosse escrito $f(x)=-3x^2$

d) $f(x)=-\frac{3}{4}x^2$ se fosse escrito $f(x)=\frac{3}{4}x^2$

e) $f(x)=\frac{12}{13}x^2$ se fosse escrito $f(x)=-\frac{12}{13}x^2$

f) Baseado nas suas respostas, a que conclusão se pode chegar?

A quarta questão apresentou representações algébricas para funções, visando à observação de **reflexões** em torno do eixo *x*. Essa característica foi prontamente observada pelos estudantes, que demonstraram entusiasmo durante a realização desse exercício. A avaliação, pelos estudantes, de que a mudança em relação à concavidade da parábola estava relacionada ao sinal do coeficiente de x^2 foi quase que imediata e unânime, podendo ser representada pela justificativa dada por A1:

- A1 "... quando o *a* é positivo a concavidade da parábola fica para cima e quando o *a* é negativo, a concavidade da parábola fica para baixo."

Situação apresentada na 5ª questão

Construa o gráfico das funções $f(x) = -\frac{2}{3}x^2$; $f(x) = -x^2$; $f(x) = -\frac{1}{7}x^2$ e $f(x) = -12x^2$

a) Que características os gráficos dessas funções têm em comum?

b) Se você não tivesse construído os gráficos, saberia descrever como ficariam?

c) A que você atribui as características dos gráficos?

d) Como ficariam os gráficos de $f(x) = \frac{2}{3}x^2$; $f(x) = x^2$; $f(x) = \frac{1}{7}x^2$ e $f(x) = 12x^2$. Você consegue dar essa resposta sem construir os gráficos?

Como consequência do bom desempenho apresentado na quarta questão, não houve dificuldade para os estudantes na 5ª questão, não havendo, inclusive, a necessidade de construção dos gráficos para que os mesmos apresentassem suas respostas de maneira correta.

Considerou-se a quarta e quinta questões muito importantes para o desenvolvimento desse grupo D de atividades, uma vez que por abordarem característica facilmente identificáveis visualmente, trouxeram segurança aos estudantes e indicavam, de maneira bem clara, o tipo de análise que as tarefas requeriam. Percebeu-se um significativo avanço em relação à conversão que era solicitada (da representação algébrica à descrição em linguagem natural).

Situação apresentada na 6ª questão

Construa, no Winplot, os gráficos das funções abaixo representadas:

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = x^2 + 1$

c) $f(x) = x^2 + 2$

d) $f(x) = x^2 + 3$

e) $f(x) = x^2 - 1$

f) $f(x) = x^2 - 2$

g) $f(x) = x^2 - 3$

h) Você percebeu algo diferente no gráfico de $f(x)=x^2$, quando se acrescenta ou diminui um número a dessa Função?

Com a sexta questão, pretendia-se verificar os **deslocamentos verticais** do gráfico representativo da função polinomial do 2º grau, dado f(x)= x²+ c, com *c* pertencente ao conjunto dos números Reais.

As respostas apresentadas atenderam às expectativas, visto que todos os estudantes conseguiram identificar os deslocamentos ocorridos sem grandes dificuldades e ainda apresentaram boas justificativas. As anotações dos estudantes A17 e A18 refletem esse quadro de entendimento:

- A17 "... quando foi acrescentado um número, o gráfico subiu o eixo *y* e quando foi diminuído um número, o gráfico desceu no eixo *y*."
- A18 "... o numero que foi somado ou diminuído foi também o local onde o vértice da parábola ficou no eixo *y*."

Situação apresentada na 7ª questão

O que ocorreu na questão anterior também é válido para $f(x)=\frac{1}{2}x^2$; $f(x)=\frac{1}{2}x^2+1$; $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2$; $f(x)=\frac{1}{2}x^2+3$; $f(x)=\frac{1}{2}x^2-1$; $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2$; $f(x)=\frac{1}{2}x^2-3$? Tente construir e chegue a uma resposta.

a) Para as Funções $f(x)=\frac{3}{5}x^2+\frac{1}{2}$; $f(x)=\frac{3}{5}x^2+\frac{1}{4}$; $f(x)=\frac{3}{5}x^2+\frac{1}{8}$; $f(x)=\frac{3}{5}x^2-\frac{1}{2}$; $f(x)=\frac{3}{5}x^2-\frac{1}{4}$ e $f(x)=\frac{3}{5}x^2-\frac{1}{8}$, que características podem ser reconhecidas? Construa no Winplot e confirme se suas respostas coincidem com os gráficos do software.

b) Se forem utilizadas as Funções $f(x)=\frac{1}{2}x^2$; $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\sqrt{3}$; $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\sqrt{2}$; $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\sqrt{3}$ e $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\sqrt{3}$, o que acontecerá?

c) Baseado nas suas respostas, a que conclusões se pode chegar? Explique.

Considerando o desempenho na sexta questão, a sétima constitui-se em um aprofundamento e discussão sobre possíveis dúvidas. Os estudantes resolveram a questão satisfatoriamente, não apresentando dificuldades. Considerou-se um avanço significativo no objetivo maior de consolidar a compreensão, não só no nível de abstração, como também nas conversões propostas.

Situação apresentada na 8ª questão

Construa os gráficos representantes das funções em um mesmo plano cartesiano:

a) $f(x) = x^2$, $f(x) = (x+1)^2$; $f(x) = (x+2)^2$; $f(x) = (x+3)^2$ e $f(x) = (x+4)^2$. O que aconteceu?

b) Agora, construa os gráficos de $f(x) = x^2$; $f(x) = (x-1)^2$; $f(x) = (x-2)^2$; $f(x) = (x-3)^2$ e $f(x) = (x-4)^2$. O que aconteceu?

c) Você poderia explicar o motivo do acontecimento? Tente.

Na sequência, a oitava questão abordou representações algébricas que provocam **deslocamentos horizontais**, $f(x)=(x+c)^2$ com c pertencente ao conjunto dos números Reais.

O **deslocamento horizontal** para a esquerda, tratado no item a, assim como o deslocamento para a direita tratado no b, foram observados, sem grandes problemas, após a construção dos gráficos. Entretanto, para o item c, que solicitava uma explicação para tais deslocamentos, os estudantes apresentaram, em um primeiro momento, dificuldade em expressar uma justificativa. Aos poucos e diante das discussões ocorridas, conseguiram apresentar boas respostas, que foram sendo discutidas e aprimoradas. Seguem algumas justificativas apresentadas pelos estudantes para os deslocamentos:

- A12 "... a função $f(x) = x^2$ pode aparecer aumentando ou diminuindo números, quando isso acontece o gráfico anda pelo eixo *x* para a direita e para a esquerda."

- A5 "... se pensarmos na função $f(x) = x^2$ ela pode ter seu gráfico alterado de várias formas, isso depende do número que somamos ou diminuímos em *x* entes de elevar ao quadrado, então o gráfico anda pelo eixo *x*."

A figura 26 mostra os deslocamentos horizontais ocorridos para funções do tipo $f(x) = a(x+c)^2$.

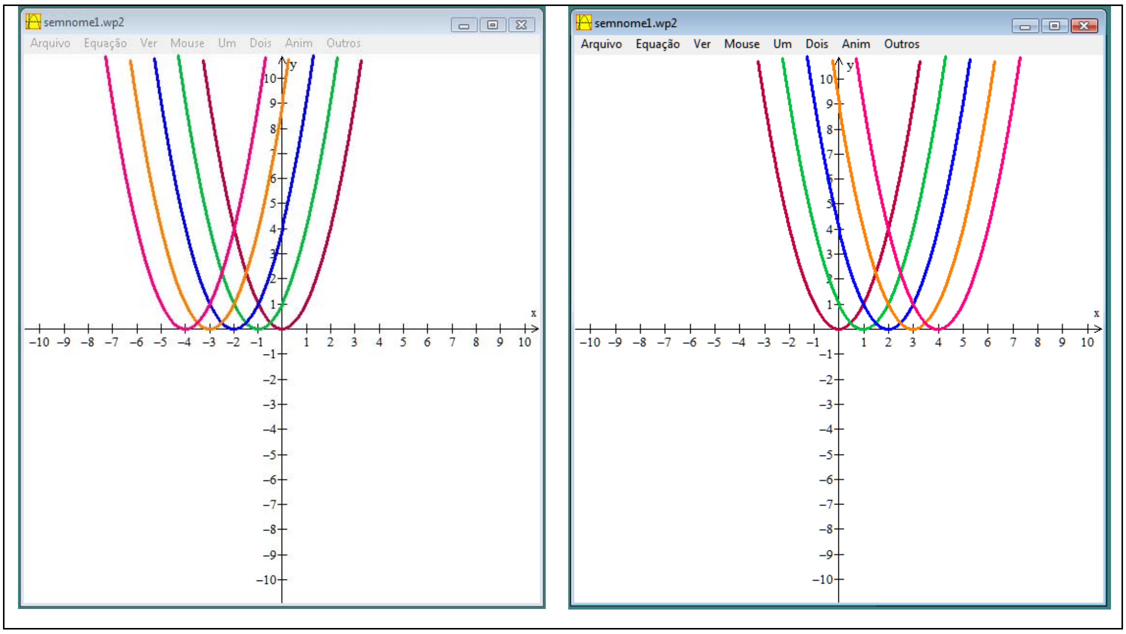


Figura 26: deslocamentos horizontais para funções do tipo $f(x) = a(x+c)^2$.

As discussões em torno da questão ainda consideraram como as funções foram apresentadas algebricamente, utilizando a forma fatorada da expressão quadrática. Na organização das atividades e querendo-se trabalhar os deslocamentos horizontais optou-se por, inicialmente, apresentar aos estudantes a expressão fatorada. Fez parte da atividade, o estudante reescrever a expressão, desenvolvendo as operações indicadas, retornando a seguir para a forma fatorada.

A partir do desenvolvimento da questão, percebeu-se que os estudantes entenderam as alterações gráficas, porém não conseguiram traduzir esse entendimento em termos de uma justificativa em linguagem natural. Considerou-se que a transformação realizada era bastante complexa, o que justificou sua apresentação na forma fatorada. Mesmo prevendo certa dificuldade por parte dos alunos, julgou-se necessário abordar essa movimentação horizontal, que continuou sendo trabalhada na questão 9.

Situação apresentada na 9ª questão

Utilizando-se as Funções $f(x) = 2x^2$, $f(x) = 2(x-1)^2$, $f(x) = 2(x-2)^2$, $f(x) = 2(x-3)^2$, como ficam os gráficos? Justifique.

A nona questão buscava mostrar aos estudantes que a movimentação horizontal ocorreria mesmo com o coeficiente de x^2 diferente da unidade.

Foi possível identificar, por meio das discussões, o entendimento dos estudantes a respeito de como ficariam os gráficos representativos das funções no que diz respeito aos deslocamentos horizontais. Além disso, pôde-se, também perceber que os mesmos identificaram que essa modificação independe do coeficiente a. As anotações dos estudantes A7, A14 e A24 demonstram esse entendimento.

- A7 "... os gráficos irão ficar mais localizados do lado direito do eixo y, com os vértices passando por 0, 1, 2 e 3 no eixo *x*."
- A14 "... não mudou o valor de a, então todos os gráficos terão a mesma abertura mas ficarão mais para o lado direito sempre que aumentar o valor do c."
- A24 "... será formada uma fila de gráficos com distâncias iguais, sempre com o vértice no eixo *x*, mudando de lugar conforme mude o valor de c, para $c = 0$ o vértice fica em $x = 0$, para $c = -1$ o vértice fica em $x = 1$ e assim por diante."

Essas escritas indicam, conforme já explicitado, o bom entendimento dos estudantes sobre as características do gráfico representativo de uma função, sem a necessidade de construção do mesmo, somente observando a representação algébrica.

Esse resultado só não foi considerado como muito bom em virtude da não-observação, por parte de todos os estudantes, da característica referente à abertura da concavidade da parábola, que se manteve a mesma em todas as situações da questão nove, porém, só foi citada por 8 estudantes.

Situação apresentada na 10ª questão

Baseado nos resultados das questões 8 e 9, quais seriam as suas conclusões?

Finalizando o grupo D, a décima questão solicitava aos estudantes que, baseados nos resultados da oitava e nona questão, tirassem suas conclusões.

Como respostas, ocorreram afirmações semelhantes às já apresentadas anteriormente, sendo fortemente ressaltadas as características referentes à escolha da constante c, como fator decisivo ao posicionamento do gráfico representativo da função. Os estudantes não apresentaram dificuldades em suas respostas e foi possível observar, durante a discussão sobre a questão, o desenvolvimento de capacidades referentes ao entendimento almejado pela sequência.

Todos os estudantes apresentaram respostas plausíveis, conforme é possível identificar nas justificativas apresentadas por A9, A13, A16 e A20:

- A9 "... sempre é possível saber mais ou menos como vai ficar o gráfico da função, basta observar as características da sua representação algébrica."
- A13 "... quando enxergarmos uma representação de uma função, do tipo $f(x) = a(x+c)^2$, fica fácil saber com é seu gráfico pois essa é uma função polinomial

do 2º grau que tem gráfico em forma de parábola, o valor do *a* vai indicar se a abertura fica para cima ou para baixo e o *c* indica onde vai ficar o vértice."

- A16 "... se olhar para a função $f(x) = a(x+c)^2$ como ela é do 2º grau, então sua representação gráfica é uma parábola e dependendo do valor de *c* o gráfico vai ficar mais pra direita ou pra esquerda."

- A20 "... quando temos uma representação como as da oitava e as da nona, o gráfico pode ser construído olhando para o valor de *a* e o valor de *c*, pois eles vão dizer se a parábola fica para cima ou para baixo e para esquerda ou para a direita."

Com essa atividade, foi dado o encerramento da sequência didática, contudo ressalta-se que o trabalho em sala de aula prosseguiu, à medida que se fez necessária a abordagem de aspectos relativos às funções polinomiais de 1º e 2º graus, que não foram apresentados durante o desenvolvimento da engenharia.

Após o encerramento das atividades dos grupos C e D, do mesmo modo que havia ocorrido após a realização dos dois primeiros grupos de atividades, foi realizada uma verificação de aprendizagem.

Nessa segunda verificação, somente três estudantes não conseguiram atingir nota maior ou igual à média. Entende-se que esse resultado indica, por um lado, a adaptação e aprovação por parte dos estudantes da metodologia desenvolvida e, por outro, uma apropriação bastante significativa dos conteúdos desenvolvidos. Os resultados dessa segunda avaliação também serão discutidos na análise a *posteriori*.

5.4 Análise *a posteriori*

Finalizada a etapa de experimentações, passou-se à realização da quarta etapa da engenharia, ou seja, a análise *a posteriori*, a qual ocorreu ancorada no quadro teórico delineado e nos resultados obtidos ao longo da pesquisa.

Tais resultados referem-se às produções dos estudantes em sala de aula e no Laboratório de Informática, nas opiniões expressas nos diários de campo da pesquisadora e nos diários de bordo dos estudantes, visto que, conforme explana Artigue (1995), a validação das hipóteses formuladas na investigação surge no momento da confrontação dos dados e aspectos apontados nas análises *a priori* e *a posteriori*.

Durante o processo de investigação, principalmente em virtude de a professora pesquisadora ser a titular da turma, ocorreu um contato prolongado com os estudantes, o que favoreceu o conhecimento de cada um de modo detalhado, facilitando, em parte, realização das análises sobre o processo de aprendizagem.

A análise do trabalho desenvolvido na sequência visa, entre outros aspectos:

- identificar as principais dificuldades de aprendizado relacionadas ao estudo de funções polinomiais de 1º e 2º graus, em consonância com os níveis de compreensão desse conceito, definidos por Bergeron e Herscovics (1982);
- verificar se as alternativas de estudo apresentadas, apoiadas na teoria das representações semióticas de Duval, propiciaram a aprendizagem de idéias e conceitos referentes Funções polinomiais do 1º e 2º graus.

Durante o desenvolvimento da engenharia foi possível identificar, logo nas primeiras atividades da prática, o trânsito pelos níveis de **compreensão intuitiva** e **matematização inicial** do conceito de Função. Esse ato de identificar foi caracterizado a partir da observação de como se modificava um quadro de dificuldade em realizar transformações de dados em leis de formação simples, bem como o de entendimento sobre a construção de gráficos, apresentado inicialmente pelos estudantes.

Do mesmo modo, com a evolução das atividades foi possível perceber, por parte dos estudantes, atitudes que indicavam segurança quanto ao domínio sobre as atividades que estavam sendo realizadas. A evolução de idéias expressas em termos de uma **matematização inicial** para uma escrita de expressões algébricas formais também esteve presente, indicando um domínio já no nível de **abstração**, o que foi observado de maneira significativa.

Uma análise sob a ótica da teoria dos registros de representação semiótica indicou que, inicialmente, os estudantes apresentaram dificuldades que se referiram, principalmente, à realização de conversões (mudanças de registros de representação), bem como à articulação entre os diferentes tipos de registros de representação. Essas dificuldades, de acordo com a teoria de Duval, interferem na apropriação por parte dos estudantes do objeto de estudo, no caso Funções. Nesse sentido, o encaminhamento da sequência didática buscava estabelecer condições para eles vencerem essas dificuldades.

Para o melhor esclarecimento das situações ocorridas em cada atividade, as análises das mesmas serão apresentadas a seguir.

5.4.1 A análise dos resultados da experimentação do grupo de atividades A

A experimentação do Grupo A contou com a aplicação de três questões e, para o seu complemento, foi considerada mais uma quarta atividade. Nessa etapa da seqüência didática, ocorreram grandes transformações, tanto no sentido de modificação de atitudes dos estudantes frente à proposta de ensino, como em referencia ao aprendizado em si, uma vez que se entende como consequência ao compromisso dos mesmos com as atividades, a melhoria significativa de seus conhecimentos sobre o conteúdo abordado. Estudantes que, a princípio, mostram-se, de certa forma, apáticos e pouco interessados na proposta de trabalho, foram se socializando, aprendendo a compartilhar informações e, com os demais membros do grupo, discutindo as questões propostas, apresentando soluções.

A figura 27 apresenta dados referentes aos resultados obtidos na solução da primeira questão do referido grupo sobre os restaurantes populares.

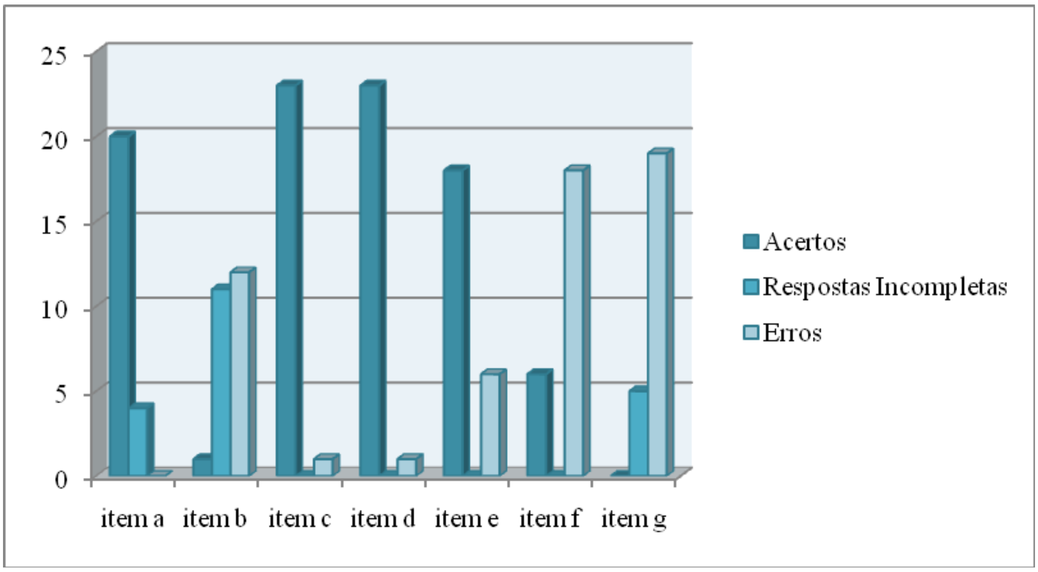


Figura 27: gráfico do desempenho na 1ª questão do grupo A.

Os resultados indicam certa irregularidade do desempenho entre os distintos itens que compunham a questão. Para o item a, por exemplo, foi obtida uma produção bastante satisfatória, em virtude da boa capacidade de construção de tabelas apresentada pelos estudantes, um dos elementos necessários à **matematização inicial**, de acordo com os níveis de compreensão do conceito de Função definidos por Bergeron e Herscovics.

Entretanto, percebeu-se, no item b, uma grande dificuldade na realização da mudança de registro da representação solicitada, pois 11 dos 12 estudantes que afirmaram conhecer outras formas de representação não a apresentaram. A situação mais interessante identificada nessa alternativa refere-se à realização da mudança apenas no posicionamento da tabela construída no item a (troca de apresentação na vertical pela horizontal,) como sendo a mudança de registro solicitada. Porém, como já discutido na apresentação da atividade, a análise das respostas dos estudantes levou a duas considerações: observando-se a redação da tarefa, entendeu-se que o uso do termo “apresentar” pode ter levado os estudantes a pensarem que era para apresentar de outra a maneira a própria tabela, o que justifica a simples mudança de uma escrita vertical para uma horizontal, apresentada por doze deles. Por outro lado, não ocorreram questionamentos e apenas um estudante teve a idéia de construir um gráfico embora, pelo perfil do grupo de estudantes que já frequentaram um Ensino Médio regular, fosse esperada uma conduta mais ousada. Considerando que a dificuldade em representar e articular, através de diferentes registros, um mesmo objeto matemático, de acordo com teoria das representações semióticas, pode se constituir em obstáculo à apropriação desse objeto percebe-se a necessidade de trabalhar fortemente nesse sentido nas próximas atividades.

Para os itens c, d, e e, os resultados deram mostras de que os estudantes apresentaram sinais claros de entendimento referente ao reconhecimento, mesmo que pontuais, sobre o aspecto das relações de dependência, o que é característico do nível de **compreensão intuitiva**. Em contrapartida, verificaram-se dificuldades quanto à apresentação de expressões matemáticas que estabeleçam relação com os dados expostos na tabela, o que indica, também, a dificuldade de articular diferentes tipos de representação. Esses obstáculos são apresentados nos itens f, e g, sendo que para esse ultimo percebeu-se um acentuado percentual de erros, o que se considerou indicativo de dificuldades dos estudantes com aspectos importantes do nível de compreensão intuitiva.

Entende-se que os resultados obtidos no todo dessa primeira questão se devem, principalmente, ao fato de que os estudantes não estão habituados a trabalhar com questões que não requeiram apenas uma mecanização da atividade matemática. Essa constatação diz respeito às dificuldades detectadas, junto aos estudantes, de interpretação e de uso efetivo da capacidade de raciocínio, uma vez que, durante os debates sobre as respostas apresentadas, observou-se surpresa por parte dos mesmos com a simplicidade das respostas que deveriam ser dadas.

Na segunda questão, sobre a dieta alimentar, percebeu-se um declínio de rendimento no que se refere à apresentação de uma expressão matemática que representasse a situação proposta, visto que nenhum estudante, ao contrário de cinco para a questão anterior, conseguiu apresentar a expressão solicitada. Tal quadro indicou a necessidade de se aprofundar a questão, o que foi realizado a partir de discussões e esclarecimentos, tomando como base as próprias respostas apresentadas pelos estudantes sobre formação de expressões matemáticas.

A figura 28 apresenta um gráfico com o desempenho dos estudantes na segunda questão.

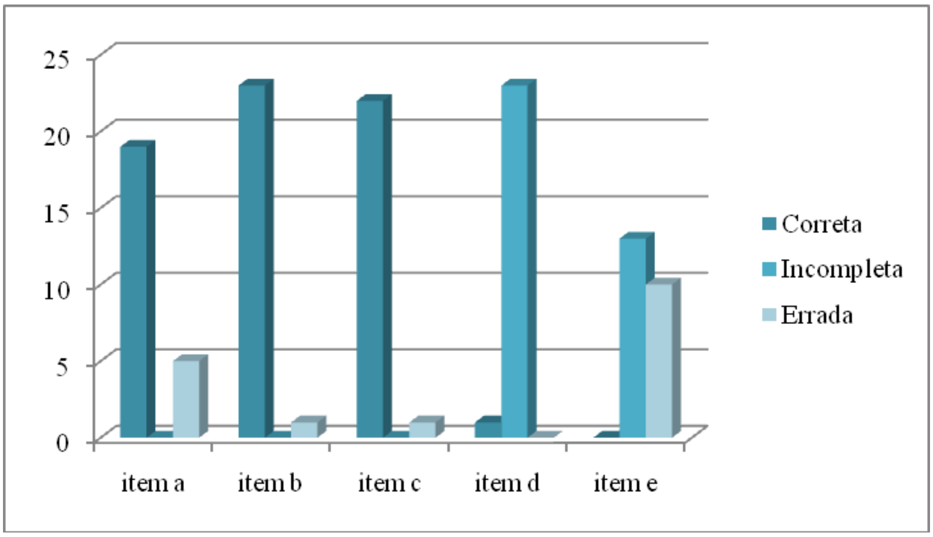


Figura 28: gráfico do desempenho na 2ª questão do grupo A.

Assim, com essa segunda questão, foi possível detectar a ausência de problemas para a construção de tabelas, embora isso não significasse articulação entre diferentes registros. Porém, noções de dependência não foram, em parte, bem caracterizadas, indicando uma evolução pouco satisfatória dos estudantes no nível de **compreensão intuitiva.**

Com o desenvolvimento da 3ª questão, sobre o clube de natação, foi possível perceber considerável mudança nos elementos identificados como os mais preocupantes, ou seja, a formação de expressões matemáticas a partir de situações-problema e a noção de dependência. Essa afirmação é sustentada pelo desempenho dos estudantes na questão, o que pode ser observado no gráfico da figura 29.

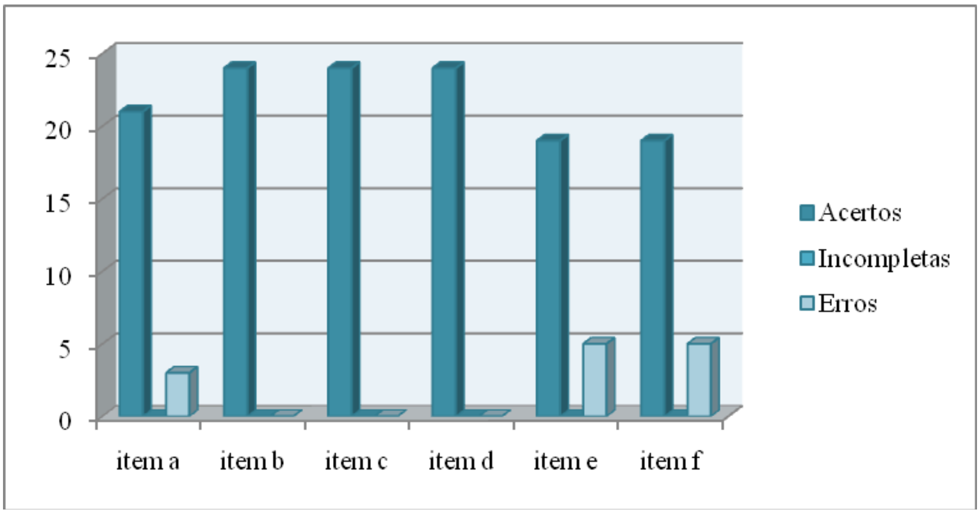


Figura 29: gráfico do desempenho na 3ª questão do grupo A.

O elevado número de soluções corretas nos itens b c e d, mostrou uma melhora considerável na identificação de relações de dependência em um contexto.

No item e, verificou-se a melhoria significativa no aspecto da formação de expressões a partir de situações propostas, uma vez que 19 alunos conseguiram obter a expressão matemática adequada, bem como utilizá-la de maneira correta para fazer a estimativa de valores a serem pagos para o caso de outros períodos de tempo, ou seja, 12 e 15 semanas, identificados no item f. Entende-se esse resultado como reflexo positivo das constantes discussões e esclarecimentos que entremearam a realização das atividades.

Porém, para essa questão, percebia-se, ainda, a persistência de dúvidas no que se referente à construção de gráficos, como é possível verificar com o resultado do item a.

Considerando o grupo de atividades como um todo, verificou-se que o entendimento e a interpretação das questões propostas aumentaram significativamente, pois, a princípio, os estudantes não conseguiam construir tabelas corretamente e, principalmente, realizar as conversões adequadas dos dados de tabela para uma representação gráfica, ou de problemas formulados em termos de uma situação concreta, em língua natural, para expressões matemáticas. Ao longo das atividades desse grupo esses aspectos evoluíram consideravelmente, indicando que a proposta de ensino estava no caminho certo.

Aspectos teóricos considerados importantes ou que os estudantes ainda dominavam de maneira frágil, como o reconhecimento de variáveis, o trabalho com variáveis contínuas e discretas, a discussão sobre continuidade de funções e o entendimento do estabelecimento do domínio em situações concretas foram viabilizados pela realização da atividade de retomada.

Essa se caracterizou por grande debate entre os estudantes e controvérsias sobre as respostas apresentadas para os exercícios propostos. Considerou-se que tal discussão foi bastante salutar e mais um indicativo da já citada mudança de atitude dos estudantes frente ao trabalho proposto. Ressalta-se que, durante a realização das atividades do grupo A, sempre que necessário e conveniente, foram realizadas sistematizações e formalizações de aspectos do conteúdo desenvolvido. Ao final, durante a atividade de retomada, as sistematizações necessárias à organização dos conteúdos abordados foram realizadas.

Um ponto alto do trabalho e considerado bastante produtivo ocorreu quando foi discutida a possibilidade de união, ou não, de pontos do gráfico, o que refletiria diretamente na formulação do conceito de função e da noção de continuidade.

É importante ressaltar que não se pretendia esgotar as idéias e noções abordadas nesse grupo de questões. Entende-se, concordando com Vergnaud (1995), que conceitos não devem ser confundidos com definições e que um conceito, para ser construído, necessita, além de um conjunto de situações que vão lhe dando forma, procedimentos que revelem os conhecimentos relativos ao mesmo bem como o domínio das distintas maneiras de representá-lo.

5.4.2 A análise dos resultados da experimentação do grupo de atividades B

O grupo de atividades B visava, principalmente, explorar o estabelecimento das relações entre os coeficientes a e b da expressão matemática que representa a função polinomial do primeiro grau com a representação gráfica da mesma.

Para a análise desses dados, entendeu-se não ser conveniente a apresentação de gráficos com os erros e acertos das questões, como na análise realizada no grupo A. Os resultados foram obtidos a partir da interpretação dada pelo estudante, em decorrência de seu entendimento para cada situação, e que foram registrados nos protocolos com as atividades e no diário de bordo.

Na primeira questão, o objetivo era estabelecer um elo entre o grupo de atividades A e o grupo de atividades em questão, a partir da comparação entre o gráfico apresentado para o item a da primeira questão do grupo A e o gráfico construído com o auxílio do *software* no segundo grupo.

Inicialmente, todos os estudantes afirmaram que os dois gráficos se tratavam de retas, desconsiderando a discussão ocorrida durante a retomada das atividades do grupo A sobre variáveis discretas e situações concretas. Entretanto, bastou um questionamento sobre a união que deveria, ou não, ser feita entre os pontos obtidos na construção de todo e qualquer gráfico que os estudantes começaram a reformular suas colocações. Por fim, 18 dos 24 estudantes reformularam as respostas que passaram a incluir a percepção sobre a representação gráfica e o domínio da função nas duas situações: que com o *software* estava se representando uma Função no domínio $\Re$, enquanto que, para o caso dos restaurantes populares, o domínio era o conjunto dos inteiros não negativos.

Essa **matematização inicial,** apresentada pelos estudantes por meio dos registros das soluções da questão, indicou a possibilidade de passagem para o nível de **abstração**, entretanto, entendeu-se que essa passagem deveria ser gradativa, dando-lhes tempo e espaço para, de fato, apropriarem-se das idéias trabalhadas. Nesse sentido, e considerando toda a sequência didática, o domínio do nível de **abstração** era objetivo a ser perseguido ao longo de toda a fase de experimentação.

Sobre a identificação de domínio e imagem para funções, considerou-se que os estudantes já os dominavam de maneira bastante satisfatória, indicando já uma incursão no nível de **formalização.** Nesse sentido, identificou-se na utilização do *software* como ferramenta de apoio, um forte aliado, pois o mesmo permitiu a construção dos gráficos de maneira rápida, possibilitando comparações, análises, conjecturas, além do seu forte apelo visual.

É importante ressaltar que não se defende aqui o uso exclusivo do *software*, ou a impossibilidade de construção de gráficos com lápis e papel, e sim a associação de ambos, como forma de propiciar uma aprendizagem que possa ser utilizada de maneira ampla. O uso do *software* refere-se à possibilidade de rápida articulação entre representação algébrica e gráfica e vice versa.

Para a segunda questão, verificou-se que os estudantes conseguiram identificar a característica de que o valor do coeficiente linear b corresponde ao valor da ordenada do ponto de interseção do gráfico representativo da expressão matemática com o eixo y. Contudo, destaca-se que tal característica não foi imediatamente observada. Primeiramente, os estudantes observaram apenas o paralelismo existente entre as retas, mas a experimentação com construção de diferentes gráficos, as conjecturas e discussões estabelecidas possibilitram tal verificação.

Outro ponto que merece evidência é a idéia que A13 expõe em seu diário de bordo sobre o "corte" do eixo *y* pelo gráfico no ponto de ordenada com valor correspondente ao coeficiente linear *b* e "o mesmo ocorrendo para o eixo *x* no simétrico de *b*".

Esse tipo de observação, embora incorreto, pois o estudante formulou como uma propriedade geral o que era particular, é de considerável importância. Mostra que o mesmo estava atento à percepção das relações que podem ser estabelecidas entre os diferentes tipos de representação, principalmente se levado em conta que, ao final da atividade, o objetivo era que o aluno conseguisse construir o esboço do gráfico da Função polinomial do 1º grau sem a necessidade da organização de uma tabela.

Na realidade, idéias como a de A13 necessitam apenas de um refinamento visto que já demonstram a atenção do estudante para aspectos que realmente devem ser considerados quando se faz referência ao gráfico representativo de $f(x) = ax + b$.

Após o entendimento sobre as relações com o coeficiente *b*, buscou-se, com a quarta e quinta questão, apresentar a característica que pode ser identificada através da observação do valor referente ao coeficiente angular *a*. As respostas apresentadas para essa questão refletiram a dificuldade que os estudantes, inicialmente, tiveram para identificar a compressão vertical (STEWART, 2002) que a mudança dos valores do referido coeficiente pode acarretar. Foram necessárias muitas representações gráficas e discussões para que tal característica fosse identificada.

Desse modo, gradualmente e, principalmente, em virtude do empenho dos estudantes, chegou-se à verificação e descrição de cada alteração ocorrida durante a construção dos gráficos. Nesse sentido, a quinta questão, que orientava os estudantes a propor equações representativas de funções polinomiais para identificação das características possibilitou uma generalização dos aspectos estudados.

Foi possível perceber que o desenvolvimento das idéias e conceitos já estava ocorrendo no âmbito do nível de abstração, tanto que, na sexta questão, mesmo os estudantes não se arriscando a estabelecer muitas características em relação às representações gráficas de (x)=x e f(x)=-x, foram unânimes em afirmar que os gráficos interceptariam no eixo *y* no ponto (0,0).

Já na oitava e nona questão, que traziam funções com coeficientes *a* e *b* distintos, o progresso dos estudantes ficou evidente. Na oitava questão, 17 estudantes descreveram, em língua natural, as características do gráfico "reta que intercepta *y* em -3 e tem um ângulo de inclinação menor que 90º". Na sequência, deu-se a confirmação das respostas apresentadas com a construção dos gráficos com o *software* e as discussões no grande grupo, o que promoveu um rendimento geral bastante significativo.

Os depoimentos nos diários de bordo refletiram a satisfação dos estudantes ao constatarem a realização correta do que lhes foi solicitado, conforme é possível verificar nas escritas de A12 e A17 e A23:

- A12 "... sempre quis acertar de primeira as respostas mais em matemática isso quase nunca aconteceu."
- A17 "... quando vi que tinha acertado as questões fiquei feliz, pois matemática pra mim sempre foi muito difícil de entender."
- A23 "... cada vez que ia colocando a função no computador e a resposta coincidia com o eu escrevi ia vendo que não sou tão burro como sempre achei que fosse, pois ia acertando tudo."

Embora não estivessem previstas (não foram solicitadas) na investigação, as manifestações dos estudantes sobre o seu desempenho e o reconhecimento de que "estavam aprendendo" acabaram se constituindo em aspectos que chamaram a atenção, considerando-se um aspecto da engenharia que pode ser investigado mais profundamente.

Após o término dos dois primeiros grupos de atividades, foi possível a identificação da passagem dos estudantes de forma integral pelos dois primeiros níveis de compreensão do conceito de função definidos por Bergeron e Herscovics, como **compreensão intuitiva** e **matematização inicial,** visto que, nas manifestações orais e escritas, bem como no desempenho das atividades e nas avaliações, os mesmos apresentaram todas as características indicadas pelos referidos níveis. Além disso, elementos presentes nos níveis de **abstração** e **formalização** também foram identificados não se podendo, porém, afirmar que estivessem integralmente alcançados.

Com relação à articulação de diferentes tipos de registros de representação para um mesmo objeto matemático que, segundo a teoria de Duval, possibilita o alcance e apropriação do mesmo, foi possível perceber que os estudantes alcançaram um progresso significativo, especialmente em relação à descrição das características do possível gráfico de uma função a partir da sua representação algébrica. A previsão das características dos gráficos, antes da sua construção, foi considerada o elemento articulador entre as representações algébrica e gráfica, constituindo em aspecto fundamental para a apropriação do conhecimento que estava sendo trabalhado.

5.4.3 A análise dos resultados da experimentação do grupo de atividades C

O grupo C de atividades apresentou situações que remetiam ao conceito de função polinomial do 2º grau. Através de problemas utilizando elementos de geometria, os estudantes tiveram a oportunidade de associar os referidos elementos ao conceito proposto. O principal objetivo do grupo de atividades foi possibilitar um aprofundamento da apropriação do conceito de Função que vinha sendo construído desde o início da sequência didática.

Se forem comparados os resultados apresentados entre os grupos A e C de atividades, que apresentam o mesmo tipo de trabalho, uma para funções de 1º grau e outra, para as de 2º grau, é possível identificar o progresso dos estudantes logo de início. Questões que os estudantes relutavam em resolver, declarando não saber o que fazer ou como iniciar no grupo C, deixaram de ser problema.

Na primeira questão desse grupo, apesar dos progressos, oito estudantes ainda apresentavam dificuldade com relação à interpretação do enunciado da questão. Esse tipo de dificuldade já havia sido identificado ainda nas análises preliminares e foi objeto de atenção durante todas as atividades.

Já no que se refere ao entendimento e domínio sobre relações de dependência, os estudantes resolveram essa primeira questão do grupo com segurança e praticamente não cometeram erros, o que evidencia fortemente um domínio nos níveis de **compreensão intuitiva** e **matematização inicial,** já verificadas nos grupos anteriores.

A conversão da linguagem escrita para a linguagem matemática, através da apresentação de expressão matemática para a situação proposta, ocorreu também sem dificuldades. Porém, considera-se o fato de um estudante não ter apresentado a expressão solicitada para o caso que remetia à função de 1º grau e dois estudantes não apresentarem a expressão matemática para o caso da Função Polinomial do 2º grau, ainda na primeira questão do grupo, um indicativo de que o nível de **abstração** ainda não estava dominado.

É importante observar que as representações gráficas pedida para as funções citadas mostraram resultados muito bons tendo em vista que vinte, dos vinte e quatro estudantes, apresentaram os gráficos, tanto para o caso da função de 1º grau como para a de 2º grau, indicando significativo avanço em um aspecto que até então os estudantes apresentavam dificuldade. Esses resultados deixam claro que o grupo atuava no nível de **abstração.**

Ainda relacionado a primeira questão, é importante salientar que a apresentação dos gráficos solicitados refletiu dificuldades que dizem respeito, principalmente, a elementos do domínio e imagem, o que se considerou indicativo de que os estudantes ainda não estão no nível de **formalização.** Contudo, a conversão da linguagem escrita para a linguagem gráfica ocorreu de forma considerada excelente.

Na figura 30, é apresentado o desempenho dos estudantes para a primeira questão do grupo C.

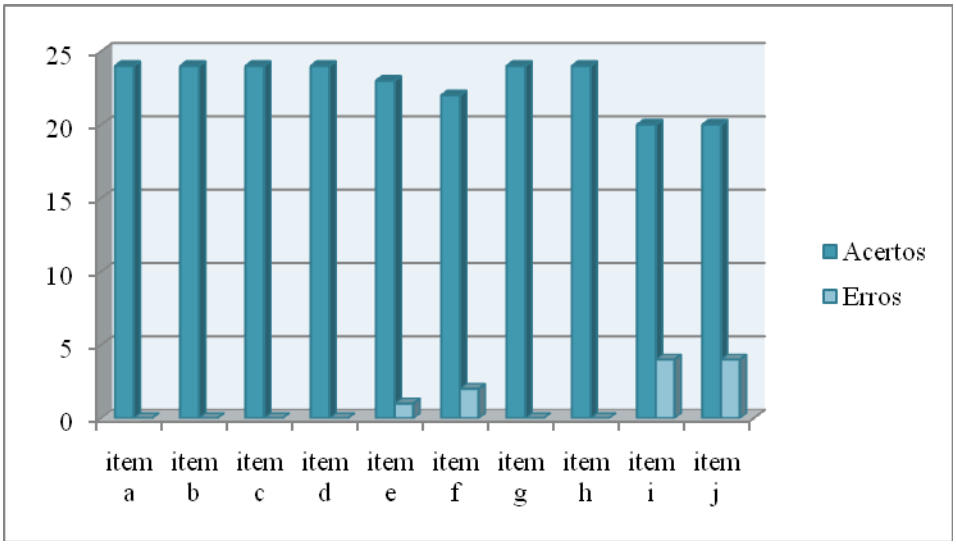


Figura 30: gráfico do desempenho na 1ª questão do grupo C.

Conforme é possível verificar no gráfico, quase todas as questões foram respondidas de forma totalmente correta.

Para a segunda questão do grupo, foram abordadas apenas noções de dependência e construção de tabelas. Não foram detectadas dificuldades e os estudantes apresentaram 100% de aproveitamento, o que se entendeu como um amplo domínio dos níveis de **compreensão intuitiva** e **matematização inicial**.

A última questão foi considerada dentro do grupo como de retomada das noções trabalhadas nas questões anteriores, o que possibilitou aos estudantes a realização de tratamentos e conversões que resultaram em um maior entendimento e refinamento do conceito de função polinomial do 2º grau. Buscava relacionar, de forma mais efetiva, a expressão utilizada para o cálculo da área do trapézio com a expressão algébrica de uma função polinomial do 2º grau. Considerou-se o desempenho dos estudantes muito bom, visto que, para todos os itens, as respostas apresentadas foram consideradas corretas.

A figura 31 apresenta o gráfico do desempenho dos estudantes para a questão.

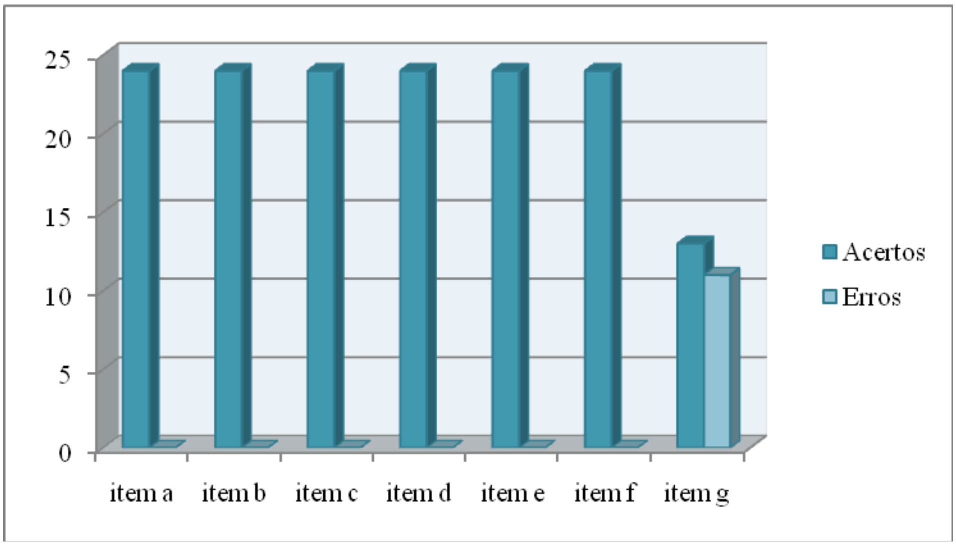


Figura 31: gráfico do desempenho na 3ª questão do grupo C.

Observando com atenção a figura 31, é possível identificar um quadro excelente de resultados com o tratamento de informações e relações de dependência. Entretanto, a **conversão** que a questão solicitava apresentou um desempenho considerado pouco satisfatório (item g). Dos vinte e quatro estudantes, apenas treze apresentaram o gráfico solicitado pelo item, sendo que os demais o deixaram em branco.

O baixo desempenho na conversão solicitada indicou a existência de dificuldades, ainda, no nível de **abstração,** que devem ser vencidas ou, pelo menos, diminuídas, para se chegar ao nível de **formalização**.

5.4.4 A análise dos resultados da experimentação do grupo de atividades D

Finalizando a aplicação da sequência didática com o grupo D de atividades, foi possível diminuir dúvidas que os estudantes apresentaram, com bastante frequência, durante toda a experimentação, ligadas, principalmente, à representação gráfica das funções e à determinação do domínio.

As atividades do grupo D buscavam estabelecer um elo com as noções e conceitos estudados no grupo C (como já havia sido feito entre os grupos A e B), contando com o apoio do *software* educativo. A partir da primeira questão do grupo C foi delineado todo um contexto de atividades a serem desenvolvidas em D.

As três primeiras questões desse grupo referiam-se a **esticamentos** e **compressões** e, ao longo do desenvolvimento das mesmas, os estudantes foram aprimorando a percepção da característica em destaque. Sucessivas alterações no coeficiente de $f(x)=ax^2$ geraram uma família de curvas através da qual as características iam sendo percebidas e, principalmente, descritas. Os estudantes mostraram, também, que estavam familiarizados com a notação de função, o que os colocava no nível de **abstração** do modelo teórico estudado, com um bom desenvolvimento do nível de **formalização.**

O contexto de comparações entre representação algébrica e geométrica da função polinomial de 2º grau, assim como a descrição em língua natural, permitiu aos estudantes, de imediato, a identificação da reflexão em torno do eixo *x*, trabalhado na quarta questão.

Após as quatro primeiras questões, percebeu-se que os estudantes já conseguiam, mesmo antes da construção do gráfico, identificar características próprias das funções através da análise da expressão algébrica. O desempenho dos mesmos na quinta questão reflete tal afirmação.

O trabalho com deslocamentos verticais na sexta e sétima questão inseriu, definitivamente, os estudantes no nível de **formalização.** De imediato, praticamente todos perceberam os deslocamentos propostos e sua relação com a expressão que designava as funções estudadas.

Porém, os deslocamentos horizontais trabalhados nas questões 8 e 9, trouxeram momentos de dificuldade para os estudantes. Embora todos tenham percebido visualmente os deslocamentos verticais, foi muito difícil explicá-los, em parte, devido ao desenvolvimento da expressão $f(x)=a(x+k)^2$, que os estudantes realizaram na busca de identificação de todos os coeficientes da função.

Essa dificuldade pode ser bem percebida durante a análise das explicações apresentadas na décima questão. Entretanto, após a retomada teórica, quando se confrontou o trabalho prático realizado com o modelo formal dos deslocamentos horizontais, foi possível observar uma melhora parcial desse quadro.

5.4.5 Considerações Finais

Buscando traçar um panorama da evolução dos estudantes ao longo do desenvolvimento das atividades, considerando o estabelecido por Bergeron e Herscovics nos níveis de compreensão do conceito de função, foi organizado o quadro da figura 32, que mostra o desempenho dos estudantes nos diferentes grupos de atividades e em relação a determinadas características dos referidos níveis.

	Grupo A	Grupo B	Grupo C	Grupo D
Reconhecimento da relação de dependência em um contexto	95,83%	__	100%	__
Estabelecimento de leis de formação	30,17%	__	95,83%	__
Construção e interpretação de gráficos	71,87%	100%	68,75%	100%
Reconhecimento e estabelecimento De domínio	87,5%	74,88%	79,16%	83,33%
Reconhecimento de dependência entre variáveis (formal)	100%	__	100%	__
Reconhecimento e utilização da notação	__	100%	__	100%

Figura 32: panorama do desempenho dos estudantes com base nos níveis de compreensão do conceito de funcão

Com base nos resultados mostrados no quadro, é possível afirmar que os estudantes conseguiram atingir bons níveis de aprendizagem das noções e conceitos trabalhados, considerando que nas questões relativas à relação de dependência, reconhecimento e estabelecimento de domínio e construção de gráficos eles obtiveram excelentes progressos. Em sua trajetória, é possível identificar, considerando os níveis de compreensão do conceito de função de Bergeron e Herscovics, uma evolução plenamente satisfatória nos níveis de **compreensão intuitiva** e **matematização inicial**.

Considera-se que os estudantes também evoluíram satisfatoriamente no nível de **abstração**, mas entende-se que o trabalho nesse nível deve ser constante e permanente, pois é em questões relacionadas à abstração e formalização de ideias matemáticas que estão as maiores dificuldades dos estudantes. Os estudantes também trabalharam no nível de **formalização**, mas se considera que o trabalho de investigação deva ser aprofundado nesse nível, pois os resultados não permitem dimensionar a evolução e domínio dos estudantes no mesmo.

No contexto da teoria das representações semióticas, Duval (2005) pondera que o sujeito só se apropria de um determinado objeto matemático quando consegue representá-lo por meio de, pelo menos, dois diferentes registros de representação. Nesse contexto, entende-se que as conversões entre a representação algébrica, geométrica e língua natural, insistentemente trabalhada ao longo de toda a sequência didática, deram o suporte necessário para a apropriação dos conceitos trabalhados.

Nesse sentido, a utilização do *software* Winplot se constituiu em ferramenta essencial para uma das formas de representação fortemente utilizada, a representação gráfica. A fácil *interface* do *software*, aliada a sua excelente potencialidade para representações das funções trabalhadas, agilizou e ampliou as possibilidades de representação, possibilitou o contato e interação dos estudantes com uma ferramenta tecnológica, transformando o estilo das aulas às quais eles estavam habituados. Foi a partir do trabalho com o Winplot que os estudantes passaram a observar e descrever características e regularidades, efetuaram previsões e conjecturas, expandindo sua visão sobre o tema trabalhado.

Um outro elemento que corroborou a idéia da apropriação das noções e conceitos por parte dos estudantes foi o desempenho dos mesmos nas duas avaliações realizadas nos moldes exigidos pela instituição, o qual foi satisfatório, percebendo-se um sensível incremento do mesmo da primeira para a segunda avaliação, pois na primeira, 10 estudantes não atingiram a média exigida e na segunda isso ocorreu somente com 3 estudantes. A Figura 33 apresenta um gráfico comparativo entre os resultados obtidos na primeira e na segunda avaliação.

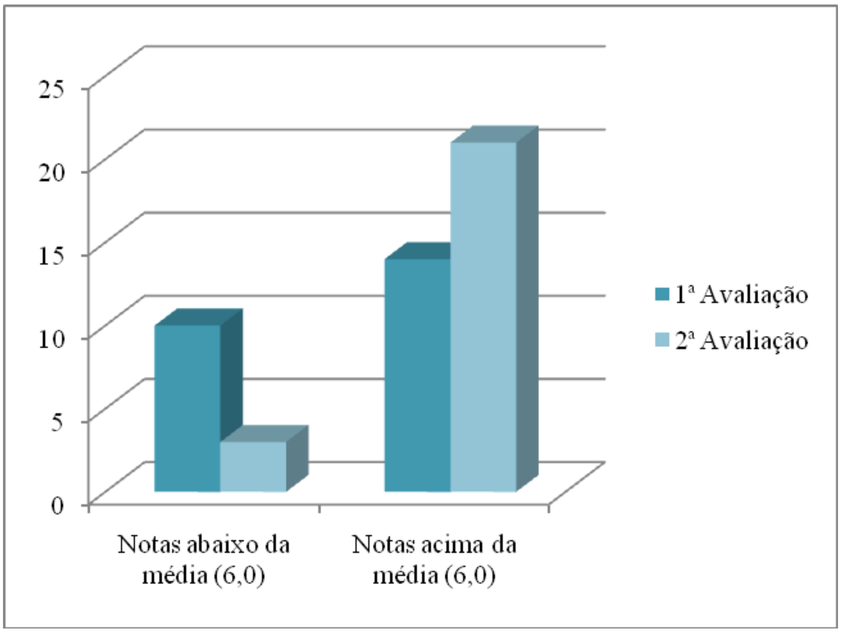


Figura 33: gráfico comparativo das notas obtidas pelos estudantes na primeira e segunda avaliação.

Salienta-se que, após a aplicação da sequência, foi solicitado aos estudantes que, em seus diários, escrevessem pequenos textos com suas opiniões de maneira livre, a respeito do trabalho desenvolvido. A leitura desses textos permitiu identificar importantes elementos, tais como:

- todos os estudantes asseguraram ter gostado da proposta de trabalho, afirmando ser essa melhor que as aulas que normalmente frequentam, principalmente em virtude de estarem cursando um Curso Técnico integrado ao Ensino Médio;
- todos afirmaram que as atividades mostraram outra forma de aprender Matemática e que isso era bom;
- cinco dos vinte e quatro estudantes declararam que, embora tenham gostado da metodologia de ensino, não conseguiram assimilar tudo o que foi trabalhado ressaltando, principalmente, aspectos referentes ao estabelecimento de leis de formação;
- dezoito estudantes afirmaram que a utilização do *software* permitiu que fossem observados elementos que, de outra maneira, passariam despercebidos, em virtude da preocupação dos mesmos com cálculos que originariam pontos para construção do gráfico da função.

Por outro lado, as observações e registros realizados pela pesquisadora, durante a fase de experimentação, permitiram o estabelecimento de possibilidades e proposições sobre o desenvolvimento da engenharia como um todo e sobre o desenvolvimento e desempenho do grupo investigado, que passam a ser apresentadas.

Embora os estudantes já tivessem cursado o Ensino Médio, ficou bem caracterizado o pouco conhecimento referente ao conteúdo Função pois, inicialmente, apresentaram certa dificuldade em relação à proposta de trabalho, principalmente, nos debates em grupo. O contato com o grupo permitiu perceber que boa parte dos estudantes, frente a essa nova situação, precisou vencer a timidez.

Com a apropriação gradativa do conteúdo e a familiarização com o trabalho, as dificuldades e resistências iniciais foram sendo substituídos por interesse, segurança e autonomia. No desenvolvimento das atividades dos grupos C e D, naturalmente, os estudantes respondiam e debatiam sobres suas respostas.

A ideia de uma aula de Matemática conhecida pelos estudantes (expositiva dialogada com resolução de exercícios) foi sendo substituída, ao longo da experimentação, por aulas dinâmicas e participativas. Dessa forma, as aulas passaram a serem vistas como um momento de troca de experiências e não somente como um tempo para escutar o professor, prestar atenção, copiar.

A busca de soluções para problemas apresentados e a autonomia na tomada de decisões atingidas pelo grupo permite considerar que o trabalho atingiu os objetivos, visto que o grupo adaptou-se perfeitamente à metodologia, desenvolvendo-se de maneira bastante satisfatória. Com a apropriação da proposta pelo grupo, o mesmo passou a participar de maneira comprometida e ativa sendo, a todo o momento, realizadas inferências e opiniões numa nítida demonstração de satisfação dos mesmos com a proposta.

Sobre o conteúdo Função Polinomial de 1º e 2º graus, entende-se que o aproveitamento foi bastante satisfatório, porque o trabalho oportunizou um espaço para a construção de significados que se consolidaram de maneira formal ao longo do processo. A metodologia adotada proporcionou um trânsito entre a teoria e a prática, de modo a permitir ao grupo analisar situações, estabelecer hipóteses, concluir e validar resultados, componentes indispensáveis à estruturação do pensamento matemático.

Para a professora pesquisadora, a experiência mostrou a importância da pesquisa conjunta ao do trabalho do educador em sala de aula, permitindo verificar que uma escolha metodológica que ofereça aulas que possam ser, ao mesmo tempo, fonte de pesquisa, proporciona um maior empenho na organização e observação de aspectos das mesmas. Avaliar, de maneira permanente e continuada, o trabalho do professor e dos estudantes permite a melhoria significativa, não só do domínio de conteúdos, mas, essencialmente, do desenvolvimento de aspectos referentes à tomada de decisões e a liberdade de escolha.

De maneira geral, levando-se em conta os objetivos formulados e propostos para a investigação, bem como os objetivos específicos da sequência didática, elemento central da engenharia didática proposta, pode-se afirmar que:

- os objetivos foram atingidos, uma vez que foram identificadas as dificuldades de aprendizado e, com base nas mesmas, implementou-se uma sequência didática que, incorporando um *software* educativo, permitiu o desenvolvimento dos conceitos relativos a funções polinomiais de 1º e de 2º graus;
- a partir da sequência implementada, foi possível perceber um significativo avanço dos estudantes, afim de vencer as dificuldades detectadas nas análises preliminares;
- verificou-se, também, que os estudantes apropriaram-se, satisfatoriamente, das ideias e conceitos propostos a partir da aplicação da sequência didática proposta;
- a participação efetiva no processo de aprendizagem vivida pelos estudantes permite afirmar que a engenharia didática desenvolvida teve um surpreendente e feliz resultado, pois permitiu que os mesmos identificassem em si potencialidades desconhecidas até então.

CONCLUSÃO

Com base tanto no trabalho de investigação, quanto no desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem de Funções Polinomiais de 1º e 2º graus, pode-se considerar que foi possível identificar elementos que favoreceram amplamente a aprendizagem das ideias e conceitos propostos. O grupo investigado mostrou uma grande evolução, a partir do quadro estabelecido nas análises preliminares, até a concretização da fase de experimentação.

O trabalho desenvolvido foi caracterizado por momentos em que a evolução dos estudantes em relação à aprendizagem pretendida, em vista do alcance dos objetivos de pesquisa, parecia ser insatisfatória. No início da fase de experimentação, o grupo não mostrava interesse pela proposta de trabalho, com preocupantes sinais de desânimo e descrédito. Entretanto, no decorrer das atividades, foi possível perceber uma mudança de atitude para com a proposta, pois os estudantes frequentemente afirmavam que estavam “entendendo” e “conseguindo fazer”.

A abordagem adotada, orientada teoricamente por Bergeron e Herscovics (1982) e Duval (2004, 2005) e contando com o apoio do *software* Winplot, revelou-se relevante e significativa ao ensino de jovens e adultos, característica do público alvo da investigação. A utilização do *software* se mostrou especialmente produtiva, despertando o interesse dos estudantes e servindo de elemento integrador à utilização da tecnologia.

A partir dos dados analisados, é possível afirmar que os estudantes desenvolveram-se, satisfatoriamente, nos níveis de **compreensão intuitiva**, **matematização inicial** e **abstração** do conceito de função definidos por Bergeron e Herscovics, contudo, no que se refere ao nível de **formalização**, ainda há espaço para um amplo desenvolvimento. Esses resultados eram previsíveis, considerando que as atividades não estavam focadas no nível de formalização.

Compreender o conceito de Função, dentro da perspectiva de aprendizagem, torna-se um elemento balizador, que pode mostrar ao professor como funciona o pensamento dos estudantes, oferecendo suporte à metodologia de ensino escolhida para a apresentação desse tema da Matemática.

A utilização de diferentes formas de representações para o objeto estudado, dentro da teoria de Duval, permitiu e foi decisiva à concretização da proposta, considerando que segundo a teoria, é a diversidade de representações que proporciona a apreensão do objeto matemático. Nessa perspectiva, estimula-se a realização de trabalhos que considerem a teoria das representações semióticas de Duval.

O planejamento das atividades, com base na análise prévia das atitudes dos estudantes, permitiu que as mesmas fossem totalmente direcionadas ao foco de dificuldades do grupo e, em virtude dessa abordagem, acredita-se que os resultados tenham sido positivos.

Entende-se que a Engenharia Didática, aqui apresentada, mostrou ser um importante meio à obtenção, de forma sistemática e organizada, dos objetivos de pesquisa, propiciando, também, bom encadeamento de situações que, em conjunto, permitiram e facilitaram o desenvolvimento das atividades em sala de aula.

Espera-se que os resultados obtidos com essa investigação contribuam para futuras ações a serem desenvolvidas por professores, em suas salas de aula, como também, para a evolução das pesquisas na área de Educação Matemática, especialmente no Estado do Piauí.

REFERÊNCIAS

ALEKSANDROV, Aleksandr Danilovoch. et. al. **La Matematica: su contenido, métodos y significado**. Madrid: Alianza Universidad, 2003.

ARTIGUE, Michele. Ingeniería didáctica. In: GÓMEZ, Pedro (editor). **Ingeniería didáctica em educación matemática.** México: Grupo Editorial Iberoamérica, 1995.

BARUFI, Maria Cristina B., LAURO, Maira M. **Funções elementares, equações e inequações – uma abordagem utilizando microcomputador.** São Paulo: CAEM-IME/USP, 2001.

BAUMGART, John K. **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula**. São Paulo: Atual, 1992.

BERGERON, Jacques C., HERSCOVICS, Nicolas. **Levels in the Understanding of the Function Concept**. Proceedings of the Workshop on Functions. Foundation of Curriculum Development, Enschede, Netherlands, 1982.

BODGAN, Robert, BIKLEN, Sari. **Investigação Qualitativa em Educação**. Porto: Porto Editora, 1991.

BOYER, Carl B. **História da Matemática.** São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio.** Brasília, 1999.

_______, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias.** Brasília, 2000.

_______, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio.** Brasília, 2002.

_______, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio.** Brasília, 2006.

_______, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Educação Profissional Técnica de Nível Médio Documento Base Proeja**. Brasília, 2007.

CHAVES, Maria Isaura Albuquerque. **Formalização do conceito de Função no Ensino Médio: Uma Sequência de Ensino-Aprendizagem.** Anais do VIII ENEM, Recife, 2004.

CHIELE, Joél Nardi. **A geometria no Ensino Médio: um estudo sobre o desenvolvimento dos conceitos de comprimento, área e volume.** Dissertação de Mestrado. ULBRA, CANOAS-RS, 2007.

COLL, Cesar. **Psicologia e Currículo.** São Paulo: Ática, 2003.

D'AMORE, Bruno. **Epistemologia e Didática da Matemática.** São Paulo: Escrituras, 2005.

DOUADY, Régine. La ingeniería didáctica y la evolución de su relación com el conocimiento. In: GÓMEZ, Pedro (editor). **Ingeniería didáctica em educación matemática.** México: Grupo Editorial Iberoamérica, 1995.

DUVAL, Raymond. **Semiosis y Pensamiento Humano:** Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales. Universidad del Valle: PeterLang S. A., 2004.

_______, Raymond. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. **Aprendizagem em matemática: Registros de representação semiótica.** Campinas: Papirus, 2005.

EVES, Haward. **Introdução a História da Matemática.** Campinas: Unicamp, 2002.

FERNANDES, Carlos Alberto Ferreira. **Softwares Educativos Matemáticos como Recurso Didático nas aulas.** Centro Universitário Metropolitano de São Paulo UNIMESP, 2006.

FLORES, Claudia Regina. Registros de representação semiótica em matemática: história, epistemologia, aprendizagem. **Bolema**, ano 19, nº 26, 2006, pp. 77-102

GLADCHEFF, Ana Paula; ZUFFI, Edna Maura; SILVA, Dilma Menezes. **Um Instrumento para Avaliação da Qualidade de Softwares Educacionais de Matemática para o Ensino Fundamental**. In: VII WORKSHOP DE INFORMÁTICA NA ESCOLA, Fortaleza, CE, Brasil, julho/agosto, 2001. Anais.

GONÇALVES, Jean Piton. Reflexões sobre os processos de ensino/aprendizagem de Matemática baseados no software educativo FORMEL. **Revista Brasileira de Informática na Educação**, vol.12, p. 51-55, 2004.

GOULART, Marcio Cintra. **Matemática no ensino médio, vol. 1**. São Paulo: Scipione, 1999.

IEZZI, Gelson, [et al.]. **Matemática: ciências e aplicações, 1ª série: ensino médio**. São Paulo: Atual, 2004.

KAIBER, Carmen Teresa. A prática da resolução de problemas no estudo de funções reais. **Anais do IV Simpósio de Educación Matemática**. Chivilcoy, Argentin, 2002.

KAIBER, Carmen Teresa. CONCEIÇÃO, Cristiano Pereira. Softwares educativos e o ensino de trigonometria. **Educação Matemática em Revista**, RS, n. 8, p.37-50. 2007.

MACHADO, S. D. A. **Educação Matemática. Uma Introdução**. São Paulo: Educ, 2002.

OLIVEIRA, Nanci. **Conceito de Função: Uma Abordagem do Processo Ensino-Aprendizagem**. Dissertação de Mestrado PUC-SP, 1997.

PAIS, Luis Carlos. **Didática da Matemática. Uma Análise de Influência Francesa**. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

STEWART, James. **Cálculo.** São Paulo: Pioneira/Thomson Learning, 2002.

TINOCO, Lucia. **Construindo o Conceito de Função no 1º Grau**. Projeto Fundão – IM/UFRJ, Rio de Janeiro, 1998.

VERGNAUD, Gerard. Teoria dos Campos Conceituais. In: **Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro.** Rio de Janeiro, 1995, pp.1-26.

ZUFFI, Edna Maura, et al, Um Instrumento para Avaliação da Qualidade de Softwares Educacionais de Matemática para o Ensino Fundamental. Congresso da Sociedade Brasileira de Computação. **VII Workshop de Informática na Escola.** Anais Fortaleza, CE, Brasil, 2001.

APÊNDICES

Apêndice 1

INSTRUMENTO DE INVESTIGAÇÃO JUNTO AOS ALUNOS I

Prezado (a) aluno (a)

Este questionário tem por objetivo a coleta de dados para a pesquisa cujo tema é a utilização de softwares educacionais no ensino e aprendizagem de Funções. Agradeço a sua colaboração em respondê-lo com atenção, procurando não deixar questões sem resposta. Você não precisa se identificar.

1. Gênero: ( ) feminino ( ) masculino
2. Idade: _______anos
3. Você trabalha: ( ) sim . Nesse caso:

a) Sua jornada de trabalho semanal é de quantas horas:

____

b)Que tipo de trabalho você faz?

____

( ) ainda não

( ) no momento não. Qual o motivo?

____

4. Você cursou o Ensino Fundamental na modalidade:

   ( ) regular ( ) EJA ( ) outros:

____

5. Você já cursou o Ensino Médio regular? ( ) não ( ) sim - quais séries?

   ____

6. Você cursou o Ensino Médio EJA anteriormente? ( ) não ( ) sim - quais ciclos?____

7. Você já interrompeu seus estudos? ( ) não ( ) sim - por quanto tempo?

____

Se você respondeu positivamente a questão anterior, responda as questões 8 e 9.

8. Por que você parou de estudar?

( ) Não conseguiu conciliar estudo e trabalho	( ) Não conseguia acompanhar as aulas
( ) Ficou desempregado	( ) Problemas de saúde / doença
( ) Mudança de domicílio	( ) Difícil acesso à escola
( ) Viagem	( ) Não tem quem cuide dos filhos
( ) Problemas com os professores	( ) Dificuldade financeira
( ) Casamento	( ) Outros ____________________

9. Por que você voltou a estudar?

( ) Terminar o que comecei	( ) Provar a mim mesmo que sou capaz de aprender
( ) Conseguir emprego	( ) Para me manter atualizado(a) intelectualmente
( ) Mudar de cargo ou emprego	( ) Conhecer novos amigos
( ) Exigência da empresa que trabalho	( ) Outros ____________________

10. Quais as suas expectativas, o que você espera do Curso Informática na Modalidade Eja?

____

____

____

____

____

____

____

11. Qual a importância do que você aprende em Matemática para a sua vida, para o seu trabalho?

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

12. Você tem acesso ao computador?

( ) Não

( ) Sim Onde: ( ) Escola

( ) Casa

( ) Casa de amigos

( ) Trabalho

( ) Computadores públicos

( ) Outros.

Especifique:____

13. Se você usa o computador, indique quais as utilizações que você faz do mesmo (escolha múltipla):

( ) Jogos

( ) Música

( ) Salas de bate papo

( ) Pesquisa na internet

( ) Digitação de textos

( ) Realização de trabalhos escolares

( ) Outros.
Especifique:____

____

14. Você já utilizou o computador anteriormente na escola para o aprendizado de algum conteúdo?

( ) Não ( ) Sim. Quais disciplinas?____

____

15. Você gostaria de desenvolver algum conteúdo de Matemática utilizando o computador?

( ) Sim

( )Não

( ) Indiferente

16. Você já utilizou algum software educacional para aprender Matemática?

( ) Sim. Especifique quais, se possível:

____

____

( ) Não.

( ) Não sei responder.

17. Você acredita que a utilização de um software educacional matemático ajudaria a aprender conteúdos de Matemática?

( ) Sim.

( ) Não.

( ) Indiferente.

( ) Não sei responder.

18. Descreva como você gostaria que fossem as aulas de Matemática.

Apêndice 2

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DO PIAUÍ- CEFETPI
UNIDADE DE ENSINO DESCENTRALIZADA DE PARNAÍBA
GERÊNCIA DE ENSINO
PROFª. : JEANE GARDENIA
DISCIPLINA: MATEMÁTICA

CEFET-PI

Atividades Propostas

1-Quantos números naturais são maiores que 147 e menores que 164?

2- Dividindo certo número natural por 20, obtém-se quociente 7 e resto o maior possível. Qual é o número?

3- Certo ano, em uma cidade do interior, os candidatos aprovados para a segunda fase de um grande vestibular, foram distribuídos em salas de 35 lugares, tendo ficado uma sala incompleta com 18 candidatos. No ano seguinte, o número de candidatos para a segunda fase, naquela cidade, aumentou em 42. Considerando que foram ainda usadas salas de 35 lugares, quantos candidatos ficaram em uma sala incompleta?

4-Em nosso sistema usual de numeração (o sistema decimal; algarismos indos-arábicos), existem quantos números naturais grafados com dois algarismos? E, idem, com três algarismos?

5-Um numero natural é representado por quatro algarismos, em nosso sistema usual de numeração. O último algarismo (o das unidades) é triplo do penúltimo (o das dezenas). O primeiro algarismo é um terço do penúltimo e o segundo algarismo é a diferença: último menos o primeiro. Qual é o número?

6-Se a soma de três números inteiros consecutivos é – 3, qual o valor do produto desses três números?

7-Quantos passageiros viajam em um ônibus, sabendo que se dois passageiros ocupassem cada banco, vinte e seis ainda ficariam em pé, e se três passageiros se sentassem em cada banco, dois bancos ficariam vazios.

8-Um número inteiro positivo de três algarismos termina em 7. Se este ultimo algarismo for colocado antes dos outros dois, o novo número assim formado excede de 21 o dobro do número original. Qual é o número inicial? Justifique sua resposta.

9-Ao fazer seu testamento, uma pessoa decidiu que dividiria sua fortuna entre sua filha, que estava grávida, e a prole resultante dessa gravidez, do seguinte modo: cada criança que nascesse receberia o dobro daquilo que caberia à mãe, se fosse do sexo masculino, e o triplo daquilo que caberia à mãe se fosse do sexo feminino. Nasceram trigêmeos, sendo dois meninos e uma menina. Como veio a ser partilhada a herança legada?

10- Qual é a soma da quinta parte de 1,75 com a sexta parte de 0,3?

11- Obtenha, na forma de numero decimal, o valor da razão $\frac{x}{y}$, sabendo que $\frac{x}{y}$ = 0,625.

12- Augustus De Morgan, matemático e lógico que viveu no século XIX, tinha x anos de idade no ano x^2. Descubra em que ano isto ocorreu.

13-Quantos anos viveu Diofante?

A equação abaixo traduz para a linguagem Matemática o curioso epitáfio de Diofante, matemático grego que teria vivido no 2º ou 3º século a.C. Sua solução indica o número de anos que ele viveu. $\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x$.

Apêndice 3

Avaliação sobre Função polinomial do 1º Grau

CEFET-PI	**CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DO PIAUÍ** **UNIDADE DE ENSINO DESCENTRALIZADA DE PARNAÍBA** **CURSO: PROEJA** **DISCIPLINA: MATEMÁTICA** **PROFESSOR(A): *JEANE GARDÊNIA***	**NOTA**
ALUNO(A)____ Nº _____ **SÉRIE / MÓDULO II TURNO: NOITE DATA: ___/09/2008**		
INSTRUÇÕES: Leia atentamente as questões antes de respondê-las; Use caneta azul ou preta, sem rasuras; Respostas estruturadas de forma completa; Uso obrigatório da linguagem padrão; Letra legível e capricho; Tenha seu estilo próprio, sem cópias; SUCESSO.		

Avaliação Bimestral

1. Certa loja aluga microcomputadores para usuários que desejem navegar pela Internet. Para utilizar o serviço, o usuário paga uma taxa de R$1,00, acrescida de R$1,50 por hora (completa, ou não) de utilização a mais da máquina. Com base nessas informações, responda:

   a) Apresente através de tabela, as possibilidades de valores a serem pagos, quando a utilização do computador variar de uma a oito horas.

   b) Quanto pagaria uma pessoa que desejasse utilizar o computador por 5 horas?

   c) Apresente uma expressão matemática que represente a situação descrita acima.

   d) Do que depende o valor a ser pago pelo cliente que deseja utilizar o microcomputador da loja?

   e) Construa um gráfico no plano cartesiano, para representar a situação descrita.

2. Na questão anterior, qual o domínio da função encontrada se considerarmos:

   a) Somente a situação da loja?

   b) Se considerarmos qualquer situação?

3. Observando as funções, complete a tabela:

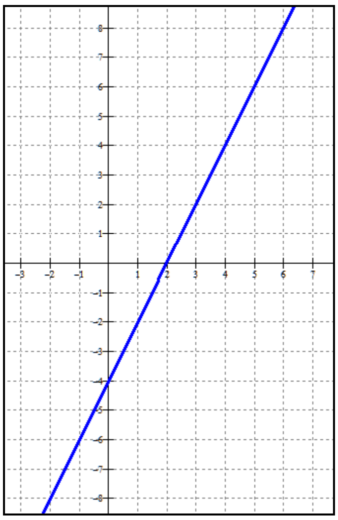
Função	Coeficiente angular	Coeficiente linear	Inclinação do gráfico
f(x) = 2x + 1			
f(x) = -1 + 3x			
f(x) = -x + 6			
f(x) = $\sqrt{2}\,x$			
f(x) = -2x – 1			
f(x) = 7x + $\frac{1}{5}$			

4. Identifique, sem construir os gráficos, características que sejam comuns aos gráficos representativos das seguintes funções:

a) f(x) = x + 2, f(x) = 2x + 2, f(x) = 3x + 2 e f(x) = 4x + 2

b) f(x) = -x – 6, f(x) = -2x – 6, f(x) = -3x – 6 e f(x) = -4x – 6

5. Observando o gráfico abaixo identifique, se possível, qual a expressão da função que deu origem ao mesmo?



6. O que aconteceria com o gráfico representativo de f(x) = x se ao mesmo acrescentássemos -1? E +1?

7. Construa em um mesmo plano cartesiano, o esboço do gráfico das funções reais abaixo, indicando a posição relativa das retas representativas dos mesmos.

a) $$\begin{aligned} f(x) &= x+2 \\ f(x) &= x-3 \end{aligned}$$

posição relativa : ________________________

b) $$\begin{cases} f(x) = 2x - 3 \\ f(x) = x + 1 \end{cases}$$

$posição\ \ relativa$: ______________________

Você poderia explicar o que torna as retas paralelas? Ou concorrentes?

Concentre-se e faça uma boa prova!

<u>ESPAÇO DESTINADO A BORRÕES</u>

Avaliação sobre Função polinomial do 2º Grau

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DO PIAUÍ
UNIDADE DE ENSINO DESCENTRALIZADA DE PARNAÍBA
CURSO: PROEJA
DISCIPLINA: MATEMÁTICA
PROFESSOR(A): *JEANE GARDÊNIA*

NOTA

ALUNO(A)____ Nº _____

SÉRIE / MÓDULO II TURNO: NOITE DATA: ___/11/2008

INSTRUÇÕES: Leia atentamente as questões antes de respondê-las; Use caneta azul ou preta, sem rasuras; Respostas estruturadas de forma completa; Uso obrigatório da linguagem padrão; Letra legível e capricho; Tenha seu estilo próprio, sem cópias; SUCESSO.

Avaliação Bimestral

1. Num campeonato de futebol cada clube vai jogar duas vezes com o outro, em turno e returno. Assim, o número **p** de partidas do campeonato é dado em função do número **n** de clubes participantes, conforme a tabela a seguir:

Número de clubes(n)	Número de partidas(p)
2	2(2-1) = 2
3	3(3-1) = 6
4	4(4-1) = 12
5	5(5-1) = 20
…	…

f) Observe a tabela e escreva a equação da função **p(n)** que relaciona o número de partidas **p** ao número de clubes **n**.

g) Se o número de clubes for 10, qual será o total de partidas do campeonato?

h) Se o número de partidas é 132, quantos times participam do campeonato?

2. A medida do lado do quadrado 2 é o triplo da medida do lado do quadrado 1.

c) Quantas vezes a área do quadrado 2 é maior que a área do quadrado 1?

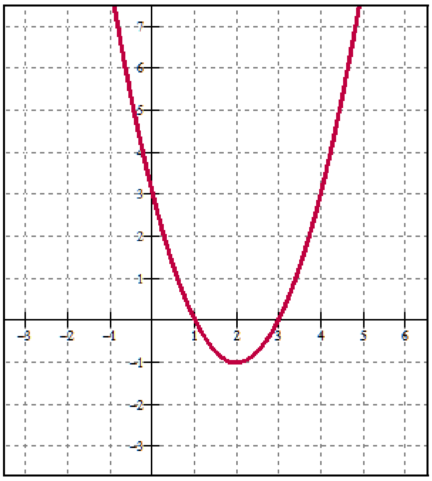
d) Do que depende a área de um quadrado?

e) Se aumentarmos 3 vezes a medida do lado do quadrado, a sua área aumenta ou não na mesma proporção?

f) Se o lado de um quadrado qualquer for chamado de **x** e sua área for chamada de **S**, qual é a expressão matemática que relaciona **S** e **x**?

g) Qual é a forma do gráfico da área **(S)** de um quadrado em função da medida **(x)** de seu lado?

3. Observe o gráfico abaixo, e na sequência, completa a tabela.



X	0	1	2	3	4
Y					

Você seria capaz de identificar alguma característica relacionada aos coeficientes da função que deu origem ao gráfico? Explique.

4. Sejam as funções abaixo indicadas, identifique as características solicitadas, completando a tabela.

	$f(x)=x^2-3$	$f(x)=-6x^2$	$f(x)=(x+3)^2$	$f(x)=2x^2+2$	$f(x)=-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}$
Concavidade para cima ou para baixo?					
Ponto de interseção					

com o eixo y					
Deslocamento vertical para cima ou para baixo?					
Deslocamento horizontal para a direita ou para a esquerda?					
Valor máximo ou mínimo? Qual?					

5. Faça o esboço do gráfico das funções:

$f(x) = x^2 - x - 3$	$f(x) = x^2 - 2x$	$f(x) = -x^2 + 4$	$f(x) = x^2 - 4x + 3$

Concentre-se e faça uma boa prova!

<u>ESPAÇO DESTINADO A BORRÕES</u>

Apêndice 4

Questionário Final Sobre as Opiniões dos Estudantes

1. Qual a sua opinião a respeito da forma como foi ensinado o conteúdo Função Polinomial de 1º e de 2º grau?

2. Você achou interessante a possibilidade de construir gráficos usando o computador? Por quê?

3. Você conseguiu fazer todas, ou quase todas, as atividades?

4. Caso tenha ocorrido, qual foi a sua dificuldade?

5. O debate ocorrido em sala de aula sobe as respostas apresentadas em cada tarefa, lhe ajudou de alguma forma? Se sim, qual? Se não por quê?

6. Você gostaria que esse tipo de atividade fosse realizada para o aprendizado de outros conteúdos da Matemática?

Apêndice 5

Sobre o Software Winplot

O Winplot foi desenvolvido pelo professor Richard Parris da Philips Exeter Academy em meados dos anos oitenta (mais precisamente 1985), sua primeira versão, chamada PLOT rodava no antigo DOS em linguagem C, com o lançamento do Windows 3.1 o programa recebeu o nome atual. A versão para o Windows 98 surgiu em 2001 em linguagem **C**++ , sua tradução para o português (do Brasil) foi feita pelo professor Adelmo Ribeiro de Jesus (UFBA).

O Winplot é um programa gráfico para uso geral, que permite o traçado e animação de gráficos em 2D e em 3D, através de diversos tipos de equações. Encontra-se disponível em http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html, podendo ser seu download rapidamente, mesmo em conexões lentas, é bem simples de ser manuseado e poderoso em recursos, adequando-se perfeitamente ao propósito da pesquisa aqui apresentada. Sua utilização é baseada na digitação da função através de comando específico do software e logo na seqüencia, o gráfico é apresentado ao operador.

Após o download, o que aparecerá será um arquivo com o ícone apresentado na figura 1:

Figura 1: Ícone do Winplot antes da descompactação

Esse ícone pode ser descompactado com winzip. Se o usuário não o possuir esse software descompactador é possível extrair os arquivos com o descompactador WinRar, em ambos os casos clicando inversamente no ícone acima e em seguida clicando em **Extract files** da maneira indicada pelo ícone da figura 2.

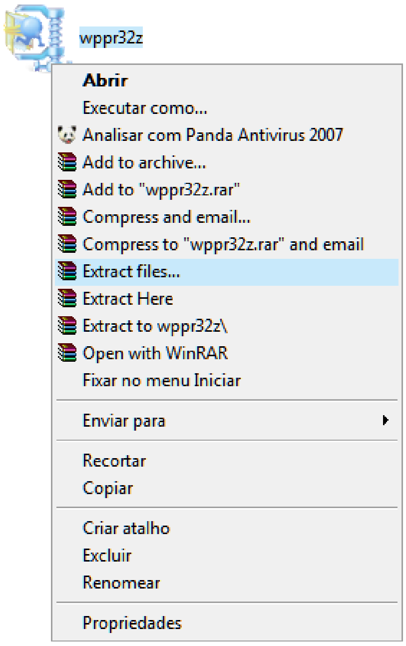


Figura 2: Clique inverso para a descompactação do winplot

Criando uma pasta que contém o ícone do Winplot conforme a figura 3.

Figura **3**: Ícone do Winplot após a descompactação

Esse ícone pode ser colocado na área de trabalho para facilitar seu uso posterior. Quando clicamos no ícone da figura acima o software mostra seu layout conforme vemos na figura 4:

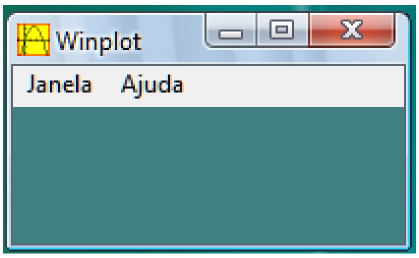


Figura **4**: Layout do Winplot

Para as atividades propostas pela pesquisa usaremos o menu 2-dim que se refere a gráficos construídos em duas dimensões no sistema de eixos cartesiano. A figura 5 ilustra o menu a ser utilizado.

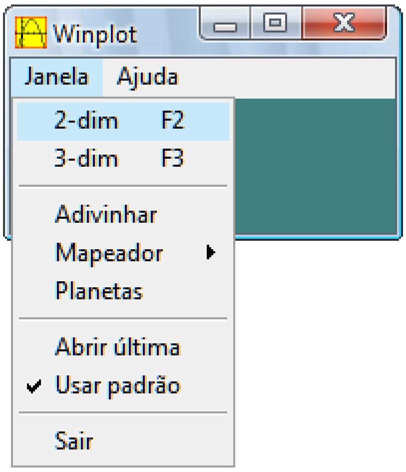


Figura 5: Menu 2dim

Os comandos são bem simples, quando é aberto o menu 2-dim aparecem menus que são o ponto de partida das atividades, para efeito dessa pesquisa o menu "Equações" será o mais utilizado, nele existem opções de plotagem de funções explicitas, paramétricas, implicitas e em coordenadas polares, isso é visível através da figura 6.

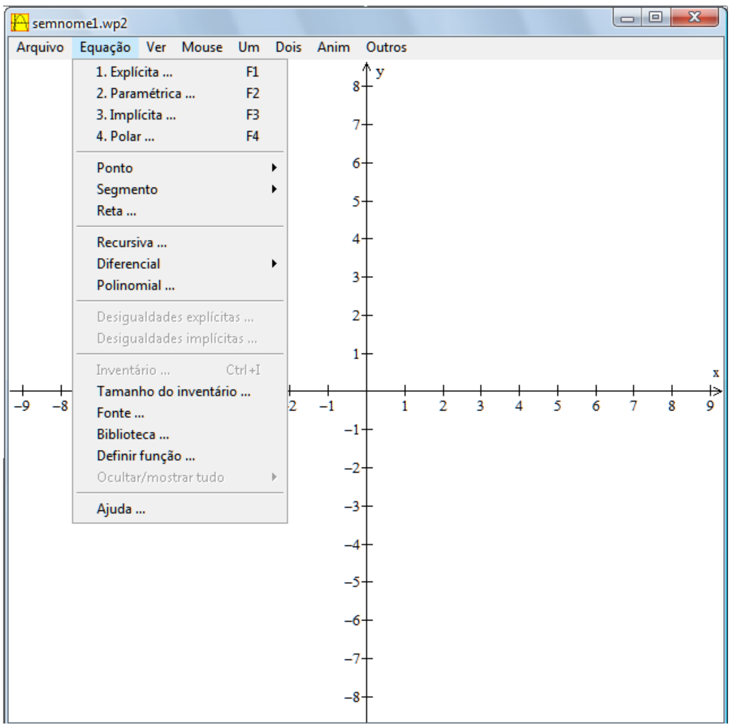


Figura 6: Menu Equação

Há também a possibilidade de marcação de pontos quaisquer além de uma biblioteca com explicações sobre como devem ser dados os comandos de digitação de funções de acordo com a linguagem do software, a figura 7 mostra um quadro contendo alguns desses comandos.

Função/ constante	***Comando***	***Função/constante***	***Comando***
o número pi	Pi	Seno	Sin
logaritmo neperiano	Ln	Cosseno	Cos
Logaritmo	Log	Tangente	Tan
Exponencial	Exp	Módulo	abs(x)
função do 1º grau	a*x	raiz quadrada	sqr ou sqrt
função do 2º grau	x^2	função com varias variáveis	joinx(f|c,g|d,...,h)

Figura 7: Quadro com alguns comandos do Winplot

Letras maiúsculas e minúsculas não são diferenciadas. Colchetes, chaves e parênteses podem ser usados como símbolos de agrupamento. Espaços serão ignorados. É possível adicionar novas funções à biblioteca. A cada entrada deverá ser dada um nome e depois definida, como uma função de x, ou como uma função de x e y, marcando o botão apropriado antes de pressionar Enter. O programa checa se o nome é novo e se a fórmula faz sentido, depois a adiciona à lista.

Para facilitar a visualização de pontos em determinado gráfico podemos acrescentar uma grade quadriculada ao eixo cartesiano, conforme apresentado na figura 8:

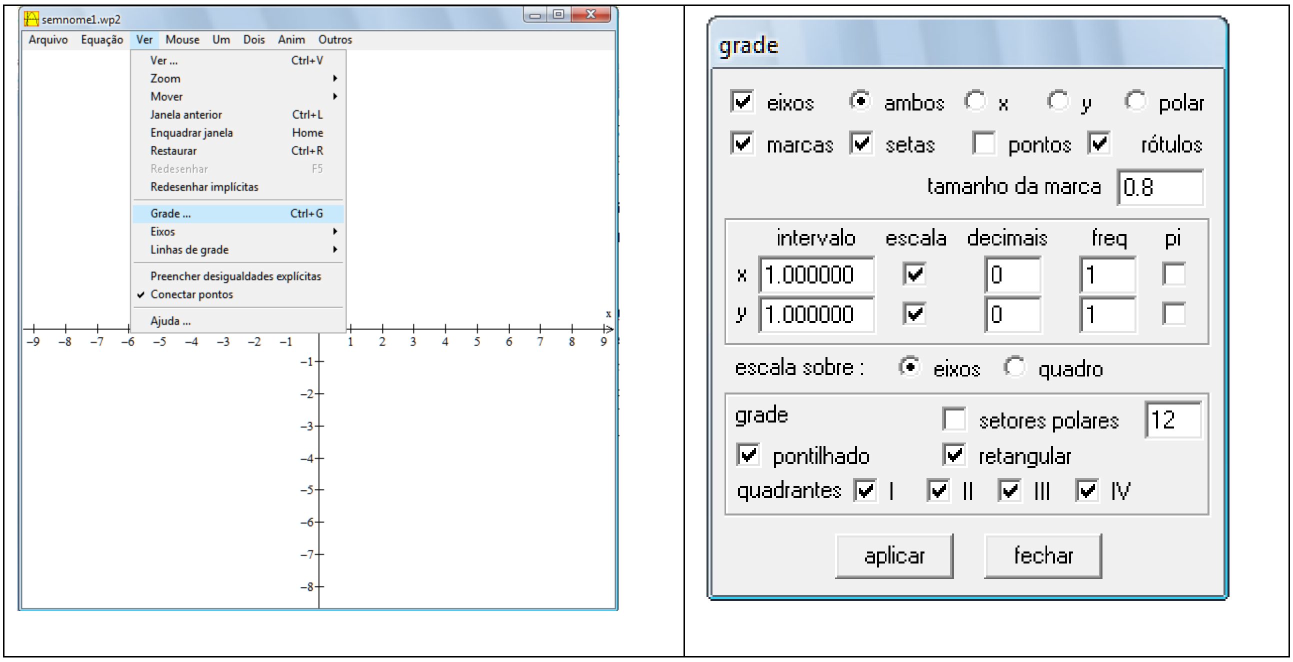


Figura 8: Uso do menu grade

O resultado pode ser visto na figura 9, ou seja, será uma tela com as características abaixo:

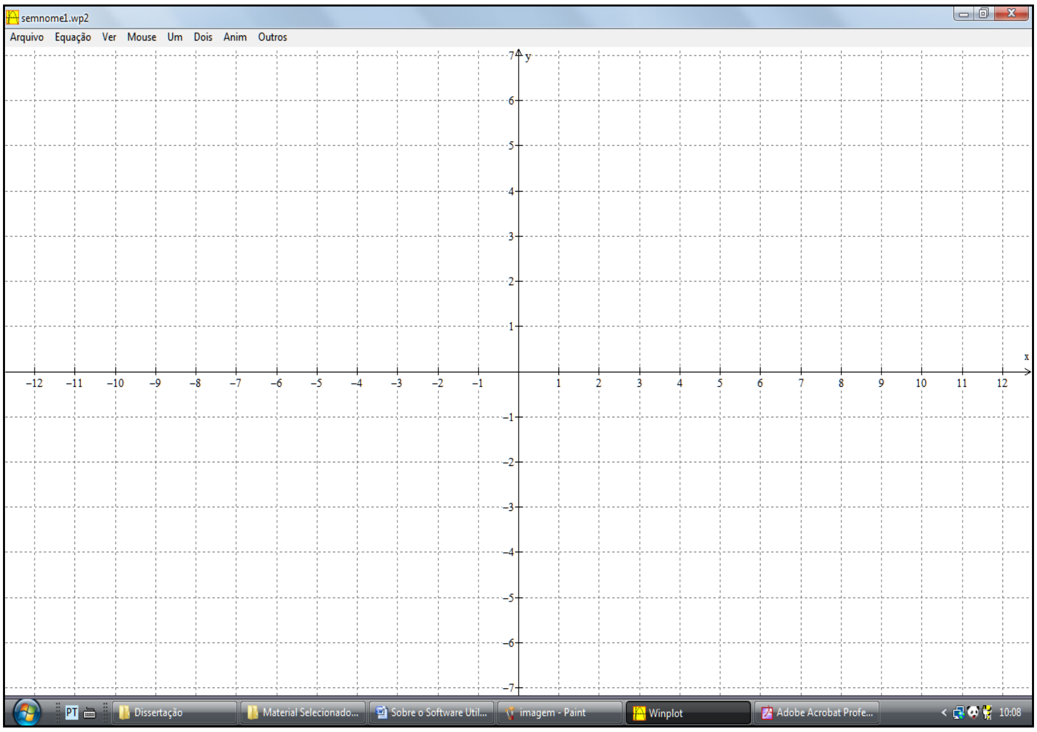


Figura 9: Layout da tela gradeada do Winplot

Como já mencionado, o Winplot é bastante rico em recursos, existe a possibilidade de rotações e translações, de exibir as coordenadas cartesianas de interseção de gráficos. No menu “OUTROS” há a possibilidade de mudança na cor do plano de fundo no tipo de fonte e muito mais. Todas essas ferramentas devem ser fonte de estudo em sala de aula/laboratório onde o professor deve criar um ambiente de pesquisa exploração das mesmas.

Para ilustrar um dos recursos mencionados vamos demonstrar como pode ser realizada a plotagem do gráfico de *f(x)* = *2x* (pode ser digitada da forma mostrada ou 2*x) e do gráfico de *f(x)* = $x^2 - 3$(que deve ser digitada como x^2 – 3). Não podemos deixar de destacar que sempre que é solicitada a plotagem de um gráfico, seguidamente aparecerá o inventário que permite fazer diversas alterações na função selecionada conforme ilustrado na figura 10.

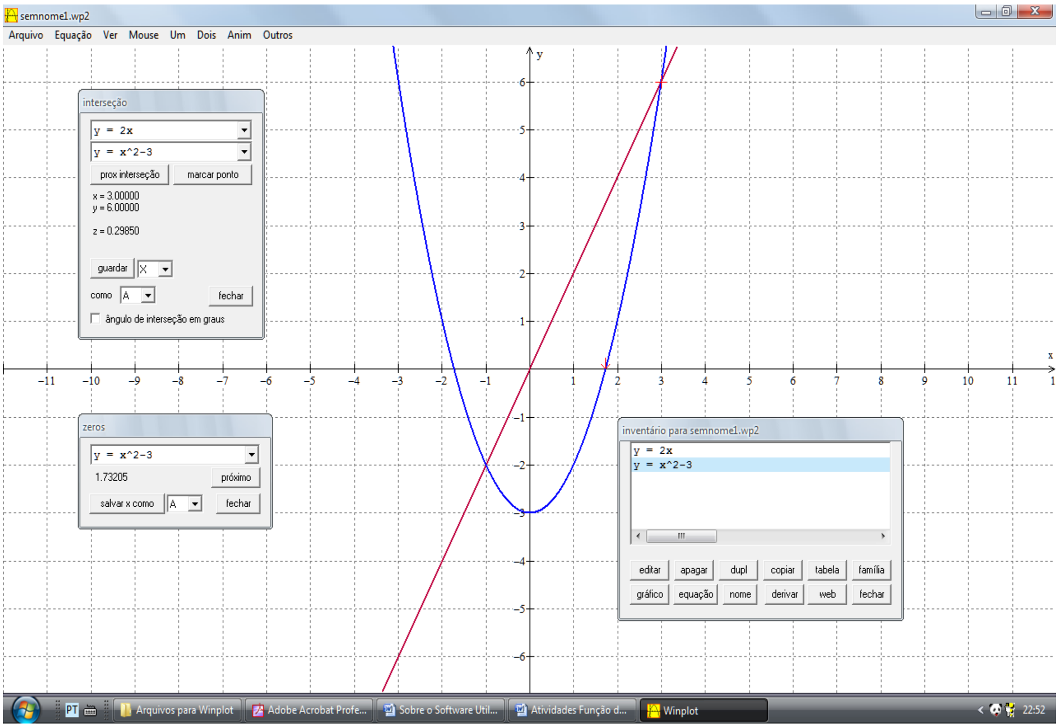


Figura 10: Plotagem dos gráficos de f(x) = 2x e f(x) = x^2 - 3

Se observamos a figura 11, esta refere-se ao inventário que aparece após a plotagem de qualquer gráfico.

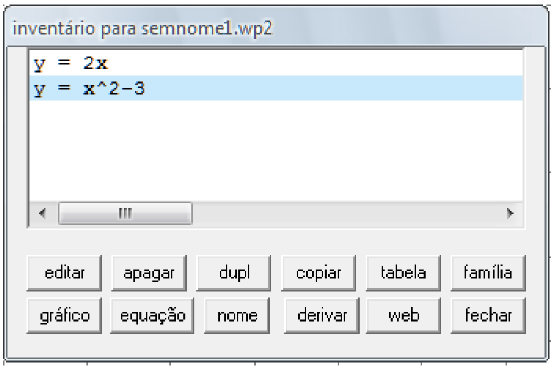


Figura 11: Inventário do winplot

Eis alguns dos comandos que podemos manipular ao utilizarmos o inventário:

- Editar – permite fazer alterações no gráfico da função de modo geral, pois retorna à caixa de diálogo inicial;
- Apagar – apaga a função selecionada;
- Duplicar – permite plotar novas funções sem a necessidade de retornar ao menu equações, apenas deve-se tomar cuidado para não apagar os gráficos já plotados;
- Copiar – copia a equação selecionada;

- Tabela – mostra coordenadas de pontos que são obtidos através de valores de x pré-determinados pelo software;
- Família – oferece a possibilidade de visualizar gráficos com características semelhantes às do gráfico selecionado;
- Gráfico – esconde ou mostra o gráfico de equação selecionada;
- Equação – esconde ou mostra a equação selecionada;
- Nome – nomeia a equação selecionada de acordo com o gosto do operador;
- Lembramos que a exposição acima trata-se de um breve comentário sobre o software e que no interesse por mais informações deve-se consultar o site onde o mesmo foi adquirido e os manuais ou tópicos de ajuda disponíveis no próprio software.