

**UNIVERSIDADE LUTERANA DO BRASIL**  
**PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE**  
**CIÊNCIAS E MATEMÁTICA**



**REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA E GEOMETRIA**  
**ANALÍTICA: UMA EXPERIÊNCIA COM O AMBIENTE VIRTUAL**  
**SIENA**

**JOSEIDE JUSTIN DALLEMOLE**

Orientadora: Profa. Dra. Claudia Lisete Oliveira Groenwald  
Co-orientador: Prof. Dr. Lorenzo Moreno Ruiz

Canoas  
2010

JOSEIDE JUSTIN DALLEMOLE

**REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA E GEOMETRIA  
ANALÍTICA: UMA EXPERIÊNCIA COM O AMBIENTE VIRTUAL  
SIENA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós- Graduação  
em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade  
Luterana do Brasil para obtenção do título de Mestre em  
Ensino de Ciências e Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Claudia Lisete Oliveira Groenwald  
Co-orientador: Prof. Dr. Lorenzo Moreno Ruiz

Canoas  
2010

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação – CIP

D146r Dallemole, Joseide Justin.

Registros de representação semiótica e geometria analítica: uma experiência com o ambiente virtual SIENA / Joseide Justin Dallemole. – 2010.

170 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Luterana do Brasil,  
Programa de Pós-

Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, 2010.

Orientadora: Profa. Dra. Claudia Lisete Oliveira Groenwald.

Co-orientador: Prof. Dr. Lorenzo Moreno Ruiz.

Bibliotecária responsável – Heloisa Helena Nagel – CRB 10/981

JOSEIDE JUSTIN DALLEMOLE

**REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA E GEOMETRIA  
ANALÍTICA: UMA EXPERIÊNCIA COM O AMBIENTE VIRTUAL  
SIENA**

Orientadora: Profa. Dra. Claudia Lisete Oliveira Groenwald

Co-orientador: Prof. Dr. Lorenzo Moreno Ruiz

Dissertação apresentada ao Programa de Pós- Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Área de concentração: Ensino e Aprendizagem em Ensino de Ciências e Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Arno Bayer – ULBRA

Profa. Dra. Carmen Teresa Kaiber – ULBRA

Profa. Dra. Cátia Maria Nehring – UNIJUÍ

## **DEDICATÓRIA**

À minha mãe e ao meu namorado  
pelo apoio, compreensão, carinho e amor  
que sempre me dedicaram.

## **AGRADECIMENTOS**

À Deus pela vida, saúde e por minhas conquistas.

À minha mãe Eneli, por estar sempre ao meu lado me apoiando e me incentivando.

Ao meu namorado Cristian, pelo apoio, dedicação, amor e compreensão durante todo este tempo.

Em especial à professora Claudia, minha orientadora, pela paciência, dedicação, sabedoria transmitida, confiança e principalmente pelo seu carinho de mãe, o qual é uma característica sua não só para comigo, mas para com todos seus orientandos.

Ao meu co-orientador, professor Lorenzo Moreno Ruiz, da ULL, pela atenção que me dedicou.

Aos professores Arno Bayer, Carmen Teresa Kaiber e Cátia Maria Nehring pelas preciosas sugestões apresentadas na banca de qualificação.

Aos professores Tania Seibert, Iaqchan Homa e ao aluno Bruno Honório pelo apoio.

Aos alunos do curso de Licenciatura em Matemática da ULBRA que se dispuseram a participar desta pesquisa.

À ULBRA pelo acolhimento, e aos professores do curso de Mestrado pelo conhecimento transmitido.

## RESUMO

A teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval, que trata do desenvolvimento cognitivo matemático, tem sido cada vez mais utilizada como base em pesquisas que envolvem a compreensão e a apreensão do conhecimento matemático, revelando-se uma alternativa na organização de situações de ensino e aprendizagem de tais conhecimentos. Este trabalho interligou a referida teoria com o conteúdo de Geometria Analítica. Esta investigação faz parte da pesquisa conjunta entre o Grupo de Estudos Curriculares de Educação Matemática (GECEM), da Universidade Luterana do Brasil (ULBRA) em Canoas, Rio Grande do Sul e o Grupo de Tecnologias Educativas da Universidade de La Laguna (ULL), em Tenerife, Espanha. Este convênio está firmado desde 2005 e, como um dos resultados, está o desenvolvimento do Sistema Integrado de Ensino e Aprendizagem (SIENA), que é um sistema inteligente para apoiar o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem, permitindo estudo, avaliação e recuperação de conteúdos escolares. A presente pesquisa busca investigar as possíveis dificuldades que alunos, de Licenciatura em Matemática, apresentam em relação à conversão entre os Registros de Representação Semiótica no conteúdo de Geometria Analítica, mais especificamente nos conteúdos de Reta e Circunferência, e as possíveis contribuições do SIENA para a identificação destas dificuldades e na recuperação individualizada destas dificuldades. Para o desenvolvimento de uma experiência, com o sistema SIENA, foram desenvolvidas as seguintes ações: um grafo, composto de oito nodos, com os conceitos de Reta e Circunferência relacionando-os com os registros de língua natural, algébrico e gráfico; o banco de questões para a realização dos testes adaptativos implementados no SIENA; uma sequência didática para cada nodo do grafo. Adotou-se como metodologia a abordagem qualitativa, com ênfase no método de estudo de caso e foram utilizados como instrumentos de coleta de dados: questionário para determinar o perfil dos alunos; os bancos de dados fornecidos pelo SIENA; os registros dos alunos; observações; filmagens e falas dos alunos durante a experiência. A investigação abrangeu um grupo de dez alunos do curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Luterana do Brasil/Canoas. Foi possível constatar que os acadêmicos apresentaram dificuldades, possuindo uma compreensão limitada destes conteúdos, tendo dificuldades de visualização, interpretação e abstração, além de dificuldades em realizar tratamentos requeridos pelas questões nos testes realizados. As maiores dificuldades dos alunos concentraram-se na *Conversão da Representação Língua Natural para a Representação Algébrica* e vice e versa, tanto em Reta quanto em Circunferência. Mesmo depois de realizada a recuperação de conteúdos, persistiram as dificuldades no nodo referente a Reta. Os melhores resultados foram no nodo *Conversão da Representação Algébrica para a Representação Gráfica da Reta*. Constatou-se ainda, que os alunos que apresentaram menores dificuldades foram os concluintes do curso de Licenciatura. Percebeu-se que quando os alunos voltavam a realizar os testes, após estudos de recuperação, estes apresentavam melhora em seu desempenho, embora suas dificuldades não fossem totalmente sanadas. O SIENA mostrou-se eficiente no desenvolvimento de todo o processo,

contribuindo para a identificação das dificuldades individuais dos alunos e na apresentação da recuperação dos conceitos em que apresentaram dificuldades.

Palavras - chave: Registros de Representação Semiótica. Geometria Analítica. Ensino e Aprendizagem.



## ABSTRACT

The Semiotic Representation Registers Theory, of Raymond Duval, which deals with mathematical cognitive development, has been increasingly used as a basis in research involving comprehension and apprehension of mathematical knowledge, revealing an alternative organization of teaching situations and the learning of such skills. This work has linked the referred theory with the contents of Analytical Geometry. This research is part of a joint investigation between the Group of Mathematics Education Curriculum Studies (GCEM), Universidade Luterana do Brasil (ULBRA) in Canoas, Rio Grande do Sul, and the Educational Technology Group at the Universidade de La Laguna (ULL) in Tenerife, Spain. The joint project began officially in 2005 and, as a result, is the development of the Integrated System of Teaching and Learning (SIENA), which is an intelligent system that supports the development of teaching and learning, allowing for study and the assessment and recovery of class content. This research aims to investigate the possible difficulties that students of mathematics present in relation to the conversion between the semiotic representation registers in the content of analytic geometry, and more specifically line and circumference, and possible contributions of SIENA in the identification of these difficulties and their individual recovery. For the development of an experiment the following actions were conducted by SIENA: a graph, consisting of eight nodes, with the concepts of Line and Circumference, and linking them with the records of natural language, both algebraic and graphic; a list of questions for the realization of achievement tests implemented by SIENA; and a didactic sequence for each node of the graph. The adopted methodology was the qualitative approach with and emphasis given to case study. The instruments for data collection were the following: a questionnaire to determine the profile of the students, the databases provided by SIENA, student records, observations, film footage, and comments of the students during the experiment. The investigation consisted of a group of ten students, enrolled as math majors at the Universidade Luterana do Brasil-Canoas. It was found that the students had difficulties and a limited understanding of these concepts, having trouble visualizing, interpreting, and abstracting, including difficulties in carrying out the required responses to the questions on the tests. The major difficulties of the students focused on the *Conversion of Natural Language and Algebraic Representation*, and vice versa, as much as in line as in circumference. Even after they performed the recovery of contents, students continued with difficulties in the node referring to Line. The best results were at the node of *Conversion of Algebraic Representation for Graphical Representation of Line*. It was further observed that students who had minor difficulties were those who had already graduated. Also, when students returned to conduct the tests after the recovery of their studies, an improvement was noted in their performance, although their difficulties were not fully resolved. SIENA showed itself efficient in the development of the whole process, helping to identify the difficulties of individual students and the presentation of the recovery of the concepts in which they had difficulties.

Keywords: Registers of semiotic representation. analytic geometry. teaching and learning.

## LISTA DE FIGURAS

|   |    |
|---|----|
| Figura 1: esquema do Sistema Informático SIENA .....  | 21 |
| Figura 2: Esquema do sistema SCOMAX.....  | 21 |
| Figura 3: Exemplo do banco de dados de um teste adaptativo de um nodo do PCIG.....  | 23 |
| Figura 4: Esquema do sistema SIENA .....  | 23 |
| Figura 5: Exemplo de um banco de dados fornecido pelo SIENA em um dos nodos do PCIG .....   | 29 |
| Figura 6: Exemplo de um banco de dados fornecido pelo SIENA de um teste de um nodo do PCIG.....   | 29 |
| Figura 7: Alunos do Curso de Licenciatura em Matemática realizando as atividades da pesquisa .....  | 32 |
| Figura 8: Tríade de Ogden e Richards. ....  | 37 |
| Figura 9: Quadro dos tipos e funções de representações.....   | 42 |
| Figura 10: Esquema do paradoxo cognitivo do pensamento matemático. ....   | 50 |
| Figura 11: Quadro da classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático.....   | 51 |
| Figura 12: A distinção decisiva entre os dois tipos de transformação de representações semióticas. ....   | 56 |
| Figura 13: Esquema de organização semiótica e do funcionamento das representações gráficas.....   | 59 |
| Figura 14: Esquema com conceitos de reta e circunferência.....  | 68 |
| Figura 15: PCIG dos nodos sobre reta e circunferência .....   | 69 |
| Figura 16: Exemplos de questões do nodo Conversão da Representação Língua Natural para a Representação Algébrica e da Representação Algébrica para a Língua Natural da Reta .....           | 72 |
| Figura 17: Exemplos de questões do nodo Conversão da Representação Língua Natural para a Representação Gráfica e da Representação Gráfica para a Língua Natural da Reta. ....               | 73 |
| Figura 18: Exemplo de questão do nodo Conversão da Representação Algébrica para a Representação Gráfica da Reta. ....   | 74 |
| Figura 19: Exemplo de questão do nodo Conversão da Representação Gráfica para a Representação Algébrica da Reta. ....   | 74 |
| Figura 20: Exemplos de questões do nodo Conversão da Representação Língua Natural para a Representação Algébrica e da Representação Algébrica para a Língua Natural da Circunferência ..... | 75 |
| Figura 21: Exemplos de questões do nodo Conversão da Representação Língua Natural para a Representação Gráfica e da Representação Gráfica para a Língua Natural da Circunferência           | 76 |
| Figura 22: Exemplo de questão do nodo Conversão da Representação Algébrica para a Representação Gráfica da Circunferência .....   | 77 |
| Figura 23: Exemplo de questão do nodo Conversão da Representação Gráfica para a Representação Algébrica da Circunferência.....  | 77 |

|  |     |
|--|-----|
| Figura 24: Cenário da sequência didática do nodo Conversão da Rep. Gráfica para a Rep. Algébrica da Reta .....   | 79  |
| Figura 25: Página do texto História da Geometria Analítica .....   | 80  |
| Figura 26: <i>Slide</i> do <i>link</i> coeficientes da reta.....   | 80  |
| Figura 27: <i>Slides</i> do <i>link</i> coeficientes da reta .....   | 81  |
| Figura 28: Quadro dos sites disponibilizados sobre o conteúdo de reta.....   | 82  |
| Figura 29: Imagem do conteúdo do site Matemática Essencial .....   | 83  |
| Figura 30: Atividade de preencher as lacunas no <i>JClic</i> . .....   | 84  |
| Figura 31: Atividade de associação simples no <i>JClic</i> .....   | 85  |
| Figura 32: <i>Quiz</i> desenvolvido com o software <i>flash</i> para o SIENA.....  | 86  |
| Figura 33: Jogo batalha naval desenvolvida com o software <i>flash</i> para o SIENA.....   | 87  |
| Figura 34: Atividade didática com coordenadas de pontos desenvolvida com o software <i>flash</i> para o SIENA .....  | 88  |
| Figura 35: Cenário da sequência didática do nodo Conversão da Rep. Língua Natural para Algébrica e da Rep. Algébrica para a Língua Natural da Circunferência ..... | 89  |
| Figura 36: <i>Slide</i> do resumo sobre circunferência .....   | 89  |
| Figura 37: <i>Slides</i> do resumo sobre circunferência.....   | 90  |
| Figura 38: Quadro dos sites disponibilizados sobre o conteúdo de circunferência.....   | 91  |
| Figura 39: Imagem do conteúdo do site Só Matemática .....  | 91  |
| Figura 40: Atividade de preencher lacunas no <i>JClic</i> .....  | 92  |
| Figura 41: Jogo de associação complexa no <i>JClic</i> .....   | 93  |
| Figura 42: <i>Quiz</i> desenvolvido com o software <i>flash</i> .....  | 94  |
| Figura 43: Problema desenvolvido com o software <i>flash</i> .....   | 95  |
| Figura 44: Atividade com animação gráfica desenvolvida com os softwares <i>winplot</i> e <i>flash</i> . ..   | 96  |
| Figura 45: Gráfico da faixa etária dos alunos participantes da pesquisa.....   | 97  |
| Figura 46: Gráfico do número de disciplinas cursadas pelos alunos participantes da pesquisa no curso de Licenciatura em Matemática .....                           | 98  |
| Figura 47: Gráfico do rendimento dos alunos no primeiro teste em cada nodo do PCIG.....  | 100 |
| Figura 48: Gráfico do rendimento dos alunos no segundo teste em cada nodo do PCIG .....  | 101 |
| Figura 49: Gráfico do rendimento dos alunos no terceiro testes em cada nodo do PCIG.....   | 103 |
| Figura 50: Registro 1 do aluno 8 .....   | 104 |
| Figura 51: Teste 1 realizado pelo aluno 4 no nodo Conversão da Língua Natural para Algébrica e da Representação Algébrica para a Língua Natural da Reta.....       | 105 |
| Figura 52: Teste 2 realizado pelo aluno 4 no nodo Conversão da Língua Natural para Algébrica e da Representação Algébrica para a Língua Natural da Reta.....       | 106 |
| Figura 53: Teste 3 realizado pelo aluno 4 no nodo Conversão da Língua Natural para Algébrica e da Representação Algébrica para a Língua Natural da Reta.....       | 106 |
| Figura 54: Gráfico do rendimento dos alunos no nodo Conversão da Língua Natural < -- > Representação Algébrica da Reta .....                                       | 109 |
| Figura 55: Registro do aluno 7 .....   | 110 |
| Figura 56: Gráfico do desempenho dos alunos no nodo Conversão da Conversão da Língua Natural < -- > Representação Gráfica da Reta.....                             | 111 |
| Figura 57: Teste 1 realizado pelo aluno 7 no nodo Conversão da Língua Natural < -- > Representação Gráfica da Reta.....  | 112 |
| Figura 58: Teste 2 realizado pelo aluno 7 no nodo Conversão da Língua Natural < -- > Representação Gráfica da Reta.....  | 113 |
| Figura 59: Gráfico do Rendimento dos alunos dos alunos no nodo Conversão Representação Algébrica -- > Representação Gráfica da Reta .....                          | 115 |
| Figura 60: Registro 2 do aluno 8 .....   | 115 |

|   |     |
|---|-----|
| Figura 61: Teste 1 realizado pelo aluno 2 no nodo Conversão da Representação Algébrica -- > Representação Gráfica da Reta.....              | 116 |
| Figura 62: Teste 2 realizado pelo aluno 2 no nodo Conversão da Representação Algébrica -- > Representação Gráfica da Reta.....              | 116 |
| Figura 63: Teste 3 realizado pelo aluno 2 no nodo Conversão da Representação Algébrica -- > Representação Gráfica da Reta.....              | 117 |
| Figura 64: Registro do aluno 4 .....  | 118 |
| Figura 65: Gráfico do rendimento dos alunos no nodo Conversão da Representação Gráfica -- > Representação Algébrica da Reta.....            | 119 |
| Figura 66: Teste 1 realizado pelo aluno 8 no nodo Conversão da Representação Gráfica -- > Representação Algébrica da Reta. ....             | 120 |
| Figura 67: Teste 2 realizado pelo aluno 8 no nodo Conversão da Representação Gráfica -- > Representação Algébrica da Reta.....              | 120 |
| Figura 68: Registro 3 do aluno 8 .....  | 122 |
| Figura 69: Teste 1 realizado pelo aluno 10 no nodo Conversão da Língua Natural < -- > Representação Algébrica da Circunferência.....        | 122 |
| Figura 70: Teste 2 realizado pelo aluno 10 no nodo Conversão da Língua Natural < -- > Representação Algébrica da Circunferência.....        | 123 |
| Figura 71: Gráfico do rendimento dos alunos no nodo Conversão da Língua Natural < -- > Representação Algébrica da Circunferência.....       | 124 |
| Figura 72: Gráfico do rendimento dos alunos no nodo Conversão da Língua Natural < -- > Representação Gráfica da Circunferência .....        | 126 |
| Figura 73: Registro do aluno 6 .....  | 127 |
| Figura 74: Teste 1 realizado pelo aluno 5 no nodo Conversão da Língua Natural < -- > Representação Gráfica da Circunferência .....          | 127 |
| Figura 75: Teste 2 realizado pelo aluno 5 no nodo Conversão da Língua Natural < -- > Representação Gráfica da Circunferência .....          | 128 |
| Figura 76: Teste 3 realizado pelo aluno 5 no nodo Conversão da Língua Natural < -- > Representação Gráfica da Circunferência .....          | 129 |
| Figura 77: Registro 1 do aluno 2 .....  | 131 |
| Figura 78: Registro 2 do aluno 2 .....  | 131 |
| Figura 79: Gráfico do rendimento dos alunos no nodo Conversão da Representação Algébrica -- > Representação Gráfica da Circunferência ..... | 132 |
| Figura 80: Teste 1 realizado pelo aluno 10 no nodo Conversão da Representação Algébrica --> Representação Gráfica da Circunferência .....   | 133 |
| Figura 81: Teste 2 realizado pelo aluno 10 no nodo Conversão da Representação Algébrica --> Representação Gráfica da Circunferência .....   | 133 |
| Figura 82: Teste 3 realizado pelo aluno 10 no nodo Conversão da Representação Algébrica --> Representação Gráfica da Circunferência .....   | 134 |
| Figura 83: Exemplo de gráfico apresentado para calcular o raio.....   | 135 |
| Figura 84: Gráfico do rendimento dos alunos no nodo Conversão da Representação Gráfica --> Representação Algébrica da Circunferência.....   | 136 |
| Figura 85: Teste 1 realizado pelo aluno 8 no nodo Conversão da Representação Gráfica -- > Representação Algébrica da Circunferência.....    | 137 |
| Figura 86: Teste 2 realizado pelo aluno 8 no nodo Conversão da Representação Gráfica -- > Representação Algébrica da Circunferência.....    | 137 |
| Figura 87: Teste 3 realizado pelo aluno 8 no nodo Conversão da Representação Gráfica -- > Representação Algébrica da Circunferência.....    | 138 |

## LISTA DE TABELAS

|   |     |
|---|-----|
| Tabela 1- Desempenho dos alunos em cada nodo do PCIG .....  | 99  |
| Tabela 2- Desempenho dos alunos no nodo Conversão da Língua Natural < -- > Representação Algébrica da Reta .....                | 108 |
| Tabela 3- Desempenho dos alunos no nodo Conversão da Língua Natural < -- > Representação Gráfica da Reta .....                  | 111 |
| Tabela 4- Desempenho dos alunos no nodo Conversão Representação Algébrica -- > Representação Gráfica da Reta.....               | 114 |
| Tabela 5- Desempenho dos alunos no nodo Conversão da Representação Gráfica -- > Representação Algébrica da Reta .....           | 118 |
| Tabela 6- Desempenho dos alunos no nodo Conversão da Língua Natural < -- > Representação Algébrica da Circunferência.....       | 124 |
| Tabela 7- Desempenho dos alunos no nodo Conversão da Língua Natural < -- > Representação Gráfica da Circunferência .....        | 125 |
| Tabela 8- Desempenho dos alunos no nodo Conversão da Representação Algébrica -- > Representação Gráfica da Circunferência ..... | 131 |
| Tabela 9- Desempenho dos alunos no nodo Conversão da Representação Gráfica -- > Representação Algebrica da Circunferência.....  | 135 |

## SUMÁRIO

|   |           |
|---|-----------|
| <b>INTRODUÇÃO</b> .....   | <b>15</b> |
| <b>1 PRESSUPOSTOS METODOLÓGICOS</b> .....   | <b>19</b> |
| 1.1 SISTEMA INFORMÁTICO SIENA .....   | 19        |
| 1.2 TEMA .....  | 24        |
| 1.3 PROBLEMA .....  | 24        |
| 1.4 OBJETIVOS .....   | 25        |
| 1.4.1 Objetivo Geral .....  | 25        |
| 1.4.2 Objetivos Específicos .....   | 26        |
| 1.5 METODOLOGIA DA INVESTIGAÇÃO .....   | 26        |
| <b>2 PRESSUPOSTOS TEÓRICOS</b> .....  | <b>33</b> |
| 2.1 SEMIÓTICA: CONCEITO E UM BREVE HISTÓRICO .....  | 33        |
| 2.2 OS DIFERENTES TIPOS DE REPRESENTAÇÃO .....  | 40        |
| 2.3 OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA E O ENSINO E<br>APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA .....  | 47        |
| <b>3 O CENÁRIO VIRTUAL DE INVESTIGAÇÃO</b> .....  | <b>68</b> |
| 3.1 CONSTRUINDO O <i>DESIGN</i> DO CENÁRIO VIRTUAL NO SIENA .....   | 68        |
| 3.1.1 O Banco de Questões para os Testes Adaptativos .....  | 71        |
| 3.1.2 A Sequência Didática com Geometria Analítica e os Registros de Representação<br>Semiótica .....   | 77        |
| <b>4 ANÁLISE DOS RESULTADOS</b> .....   | <b>97</b> |
| 4.1 PERFIL DOS ALUNOS .....   | 97        |
| 4.2 ANÁLISE DOS BANCOS DE DADOS DO SIENA E DOS REGISTROS DOS<br>ALUNOS NO DESENVOLVIMENTO DOS TESTES ADAPTATIVOS .....  | 98        |
| 4.2.1 Análise do nodo Conversão da Representação Língua Natural para a<br>Representação Algébrica e da Representação Algébrica para a Língua Natural da Reta<br>..... | 103       |
| 4.2.2 Análise do nodo Conversão da Representação Língua Natural para a<br>Representação Gráfica e da Representação Gráfica para a Língua Natural da Reta ...          | 109       |
| 4.2.3 Análise do nodo Conversão da Representação Algébrica para a Representação<br>Gráfica da Reta .....  | 114       |
| 4.2.4 Análise do nodo Conversão da Representação Gráfica para a Representação<br>Algébrica da Reta .....  | 117       |

|  |            |
|--|------------|
| <b>4.2.5 Análise do nodo Conversão da Representação Língua Natural para a Representação Algébrica e da Representação Algébrica para a Língua Natural da Circunferência .....</b> | <b>121</b> |
| <b>4.2.6 Análise do nodo Conversão da Representação Língua Natural para a Representação Gráfica e da Representação Gráfica para a Língua Natural da Circunferência .....</b>     | <b>125</b> |
| <b>4.2.7 Análise do nodo Conversão da Representação Algébrica para a Representação Gráfica da Circunferência .....</b>   | <b>130</b> |
| <b>4.2.8 Análise do nodo Conversão da Representação Gráfica para a Representação Algébrica da Circunferência.....</b>  | <b>134</b> |
| <b>4.3 AS OBSERVAÇÕES E FILMAGENS REALIZADAS E FALAS DOS ALUNOS .....</b>  | <b>139</b> |
| <b>CONCLUSÃO.....</b>  | <b>141</b> |
| <b>REFERÊNCIAS .....</b>   | <b>146</b> |
| <b>APÊNDICES .....</b>   | <b>150</b> |
| <b>ANEXOS .....</b>  | <b>154</b> |



## INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas, de acordo com Pais (2002), constatou-se um grande estímulo nas reflexões referentes à Educação Matemática, tanto no Brasil como em outros países. Estas reflexões, segundo o autor, abrangem temas e questões ligadas ao processo de ensino e aprendizagem do conhecimento matemático e buscam responder aos desafios de uma crise generalizada que atinge toda a educação escolar, apresentando um desagrado com o ensino da Matemática em todos os níveis de escolaridade.

Nesta perspectiva, segundo Machado (2003), Raymond Duval, autor de várias pesquisas que tratam principalmente do funcionamento cognitivo na aprendizagem Matemática, buscando compreender as dificuldades que muitos alunos apresentam na compreensão desta área, desenvolveu um modelo de funcionamento cognitivo do pensamento, em termos de mudança de Registros de Representação Semiótica, em sua obra *Sémiosis et pensée humaine*.

Duval (2004), em sua teoria dos Registros de Representação Semiótica estabelece que toda a atividade Matemática e toda comunicação nesta área se dá com base nas representações semióticas, e aponta sua teoria como uma possibilidade para o educador desenvolver situações de ensino e aprendizagem nesta disciplina, enfatizando a importância de se trabalhar com a diversidade de registros de representação que possui um objeto matemático e a articulação entre eles para que o aluno compreenda e realize os diferentes processos cognitivos requeridos pela Matemática.

Entretanto, de acordo com Damm (2002), pesquisas em Educação Matemática revelam que os alunos apresentam dificuldades em transitar entre os diferentes registros de representação de um objeto matemático, ou seja, os alunos realizam tratamentos em diversos registros de representação de um mesmo objeto matemático, mas não conseguem passar de uma representação para outra, realizando as conversões para a apreensão deste objeto.

Com relação a Geometria Analítica, objeto de estudo no Ensino Médio e Superior, o qual apresenta uma riqueza conceitual relevante para o desenvolvimento cognitivo do pensamento matemático, e está presente em muitas áreas da ciência, como na medicina em exames por imagem computadorizadas, na engenharia desde a fabricação de peças de aço até a construção de cenários virtuais, na astronomia, no GPS, nos radares dos aeroportos e dos aviões, Silva (2006), constatou que muitos alunos do Ensino Médio mostram dificuldades em articular com as diversas representações gráficas e algébricas de curvas planas, além da dificuldade para compreender a diferença entre o objeto matemático e sua representação.

Para Bezerra (2009), sua experiência como professora no Ensino Médio, constatou que “quase sempre o ensino e aprendizagem da Geometria Analítica é um ensino centrado na transmissão de fórmulas, descontextualizado da realidade e da própria Matemática, em total descompasso com os avanços tecnológicos.”(BEZERRA, 2009, p. 2). A autora afirma ainda que, o desenvolvimento dos conceitos neste conteúdo, se dá de forma mecanicista, priorizando a memorização de fórmulas e algoritmos, deixando de lado o raciocínio lógico e espacial.

Baier e Schwertl (2006, p.10), mencionam que,

ao ensinar Geometria Analítica, o professor normalmente faz uso da representação gráfica apenas para a dedução de uma fórmula. Demonstrada a fórmula, o desenho é praticamente abandonado. Os livros didáticos, em sua maioria, trazem um grande número de problemas de Geometria Analítica envolvendo apenas aplicações de fórmulas já demonstradas e dificilmente o aluno recorre à representação gráfica para recordá-las.

Especificamente, para a Geometria Analítica as Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (2006), afirmam que esta possibilita a articulação entre a geometria e álgebra, devendo o professor trabalhar o entendimento de figuras geométricas por meio de equações, e o entendimento de equações por meio de figuras geométricas, abandonando a simples apresentação de equações sem explicações fundadas no raciocínio lógico, evitando memorizações excessivas de fórmulas. Evidencia-se nesta afirmação, com base na teoria dos Registros de Representação Semiótica, uma necessidade de utilização de diferentes Registros de Representação Semiótica, o registro gráfico e o registro algébrico, e um trabalho, por parte do professor, que promova a articulação, ou seja, a conversão entre esses registros.

A partir destes pressupostos, considera-se importante desenvolver uma investigação baseada na teoria de Duval, sobre os Registros de Representação Semiótica, e com o conteúdo de Geometria Analítica. Conjectura-se a possibilidade de que exista dificuldades,

por parte dos estudantes do Ensino Médio, na coordenação entre os diferentes Registros de Representação Semiótica neste conteúdo, mais especificamente para Reta e Circunferência, e que tais dificuldades se estendem aos cursos de Licenciatura em Matemática.

Esta investigação faz parte do convênio de pesquisa, firmado desde 2005, entre o grupo de Tecnologias Educativas da Universidade de La Laguna (ULL) em Tenerife, Espanha juntamente com o grupo de Estudos Curriculares de Educação Matemática (GECM), da Universidade Luterana do Brasil (ULBRA). A pesquisa que está sendo realizada por estes grupos tem como título: Inovando o Currículo de Matemática através da Incorporação das Novas Tecnologias, e como um dos resultados, está o desenvolvimento do Sistema Integrado de Ensino e Aprendizagem (SIENA), o qual é um sistema inteligente para apoiar o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem, e permite estudo, avaliação e recuperação de conteúdos de uma disciplina qualquer, aliando a tecnologia, enquanto recurso pedagógico, à este processo.

Assim, busca-se investigar quais as possíveis dificuldades que alunos de Licenciatura em Matemática apresentam em relação à conversão entre os Registros de Representação Semiótica no conteúdo de Geometria Analítica, mais especificamente nos conteúdos de Reta e Circunferência, e as possíveis contribuições do sistema inteligente SIENA para a identificação das dificuldades individuais e na recuperação dos conceitos nos quais os mesmos apresentaram dificuldades.

Para melhor organização, este trabalho está dividido em quatro capítulos, sendo todos distintos e interligados.

No primeiro capítulo, apresentam-se os pressupostos metodológicos descrevendo-se o sistema informático SIENA, o tema escolhido, a problemática, os objetivos da investigação, a metodologia e os instrumentos de pesquisa utilizados na obtenção dos resultados e a experiência realizada com dez alunos do curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Luterana do Brasil- ULBRA, campus Canoas.

No segundo capítulo, apresenta-se a fundamentação teórica da investigação, a qual está ancorada na teoria dos Registros de Representação Semiótica desenvolvida pelo pesquisador francês Raymond Duval e já utilizada em muitas pesquisas relacionadas à aquisição do conhecimento matemático.

No terceiro capítulo, apresenta-se a construção do cenário virtual de investigação, com base na fundamentação teórica escolhida e nos conteúdos de Reta e Circunferência, descrevendo-se o desenvolvimento do Grafo Instrucional Conceitual Pedagógico com estes

conteúdos relacionando-os com os registros língua natural, algébrico e gráfico, o banco de questões para a realização dos testes adaptativos e a sequência didática eletrônica que visou contribuir para a assimilação dos conceitos nos quais os alunos viessem a apresentar dificuldades (APÊNCICE A).

No quarto capítulo, descreve-se o perfil dos alunos pesquisados, os dados coletados na investigação, bem como a análise e interpretação dos mesmos.

Espera-se que esta investigação possa contribuir para uma discussão e reflexão sobre o processo de ensino e aprendizagem da Geometria Analítica, mais especificamente Reta e Circunferência aqui abordadas, como também da Matemática, permeada pela teoria dos Registros de Representação Semiótica, e conseqüentemente contribuir para melhorar a qualidade deste processo e a formação de professores de Matemática.

## 1 PRESSUPOSTOS METODOLÓGICOS

Nesta seção, apresentam-se os itens da pesquisa relacionados ao sistema informático SIENA, ao tema escolhido, a problemática, os objetivos da investigação, a metodologia utilizada na obtenção dos resultados e a experiência realizada com alunos do curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Luterana do Brasil- ULBRA, campus Canoas.

### 1.1 SISTEMA INFORMÁTICO SIENA

Segundo Grossi (2008 apud Groenwald et al, 2009) os educadores têm como desafio, descobrir maneiras diferentes de ensinar a mesma coisa, pois os estudantes têm ritmos e históricos variados, além disso o sistema educacional, historicamente, é projetado igualmente para todos os estudantes, de forma que o aluno deve adaptar-se em um contexto educacional definido. Para este autor, o professor além de questionar a abordagem do conteúdo, deve despertar a curiosidade do educando e demonstrar sua utilização em diferentes situações da vida real. Assim, um dos desafios que os professores podem encontrar, em sala de aula, é identificar as diversas dificuldades individuais dos alunos referentes a determinado conteúdo, criando atividades metodológicas que possibilitem saná-las dentro do tempo que lhe é disponível.

Nesse sentido, o uso de recursos informáticos, de acordo com Groenwald e Ruiz (2006), pode influenciar beneficentemente quando utilizados como suporte do trabalho docente, contribuindo para a agilização das tarefas dos mesmos, como fonte de informação do conhecimento real dos alunos, ou na utilização de sistemas inteligentes que auxiliem o professor na sua docência.

Kampff, et al. (2004), postulam que em uma sociedade de bases tecnológicas, com mudanças contínuas, não é mais possível desprezar o potencial pedagógico que as Tecnologias de Informação e Comunicação apresentam quando incorporadas à educação. Assim, o computador é um instrumento pertinente no processo de ensino e aprendizagem, cabendo à escola utilizá-lo de forma coerente com uma proposta pedagógica atual e comprometida com uma aprendizagem significativa.

Além disso, segundo Perrenoud ( apud Kampff et al.2004, p.2):

Por parte do professor, supõe-se que tenha competência para criar situações desafiadoras, utilizando recursos didáticos variados, até mesmo aqueles que tenham sido desenvolvidos para outros fins – destaca, nesse contexto, os *softwares* educacionais e os aplicativos de uso geral, já incorporados no cotidiano de várias tarefas intelectuais. Para que ambientes de aprendizagem baseados em computadores venham a possibilitar ganhos pedagógicos é necessário que sejam realizadas atividades fundamentais no processo de desenvolvimento do conhecimento.

Nesta perspectiva, o Sistema Integrado de Ensino e Aprendizagem (SIENA) organizado pelo grupo de Tecnologias Educativas da Universidade de La Laguna (ULL) em Tenerife, Espanha juntamente com o grupo de Estudos Curriculares de Educação Matemática (GECEM), da Universidade Luterana do Brasil (ULBRA), baseado no conhecimento (SBC), é um sistema inteligente que, conforme Groenwald e Ruiz (2006, p.26) é :

capaz de comunicar informações sobre o conhecimento dos alunos em determinado tema, com o objetivo de auxiliar no processo de recuperação de conteúdos matemáticos, utilizando a combinação de mapas conceituais e testes adaptativos.

Ainda, segundo Groenwald e Ruiz (2006), este sistema irá permitir ao professor uma análise do nível de conhecimentos prévios de cada aluno, e possibilitará um planejamento de ensino de acordo com a realidade dos mesmos podendo proporcionar uma aprendizagem significativa. O processo informático permite gerar um mapa individualizado das dificuldades dos alunos, o qual estará ligado a um hipertexto, que servirá para recuperar as dificuldades que cada aluno apresentar no conteúdo desenvolvido auxiliando no processo de avaliação.

O SIENA é um sistema inteligente para apoio ao desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem de um conteúdo qualquer, fundamentado em uma aprendizagem significativa conforme Ausubel et al (1980), utilizando o ensino eletrônico como recurso pedagógico. (MORENO ET AL., 2007; MURLICK e GROENWALD, 2009).

O SIENA foi desenvolvido através de uma variação dos tradicionais mapas conceituais (NOVAK e GOWIN, 1988), sendo denominado de Grafo Instrucional Conceitual Pedagógico - PCIG (*Pedagogical Concept Instructional Graph*), que permite a planificação do ensino e da aprendizagem de um tema específico. O PCIG deve ser desenvolvido segundo relações do tipo “o conceito A deve ser ensinado antes do conceito B”, começando pelos nodos dos conceitos prévios, seguindo para os conceitos fundamentais, até atingir os nodos objetivos. A figura 1 apresenta o esquema do sistema informático SIENA.

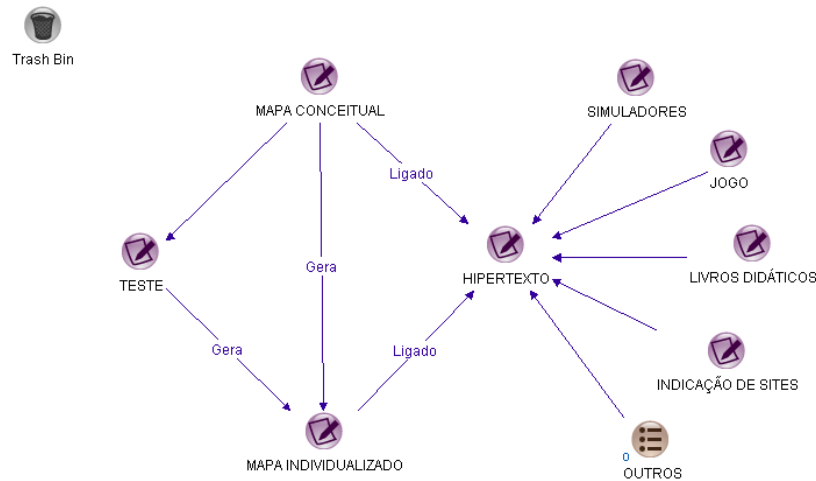


Figura 1: Esquema do Sistema Informático SIENA (GROENWALD e RUIZ, 2006)

Este sistema é composto pelo SCOMAX e SCOMIN. O SCOMAX (*Student Concept Map Explore*), cujo significado é a exploração do mapa conceitual de um aluno, possibilita ao professor importar um PCIG, utilizando o *software Compendium*, de um conteúdo qualquer, criar um banco de questões e ligá-lo a um teste adaptativo (MORENO et al, 2007), gerando uma série de perguntas seguindo a estrutura hierárquica descrita no PCIG. Das respostas obtidas de cada estudante se obtém um mapa conceitual personalizado que descreve o que cada aluno conhece *a priori* do conteúdo do PCIG, o que gera o mapa individualizado das dificuldades do aluno, conforme a figura 2.

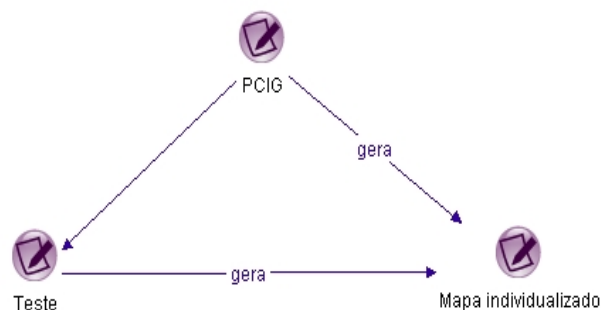


Figura 2: Esquema do sistema SCOMAX. (MORENO et al. 2007)

Para cada conceito do PCIG, devem ser cadastradas perguntas que irão compor o banco de questões do teste adaptativo, com o objetivo de avaliar o grau de conhecimento que o aluno possui de cada conceito. As perguntas são de múltipla escolha, classificadas em fáceis, médias e difíceis, sendo necessário definir, para cada pergunta: o grau de sua relação

com o conceito; o grau de sua dificuldade (fácil, média ou difícil); a resposta verdadeira; a possibilidade de responder a pergunta considerando exclusivamente sorte ou azar; a estimativa do conhecimento prévio que o aluno tem sobre esse conceito e o tempo de resposta (em segundos) para o aluno responder a pergunta.

As definições desses parâmetros são fundamentais para que seja possível, através do teste adaptativo, estimar o grau de conhecimento do aluno para cada conceito, de acordo com as respostas do estudante. Para isso, o teste adaptativo vai lançando perguntas aleatórias ao aluno, com um nível de dificuldade de acordo com as respostas do estudante ao teste. Quer dizer, se o aluno for respondendo corretamente, o sistema vai aumentando o grau de dificuldade das perguntas, e ao contrário, se a partir de um determinado momento o aluno não responde corretamente, o sistema diminui o nível de dificuldade da pergunta seguinte. O sistema dispõe de um mecanismo de parada, quando já não pode obter uma maior estimativa sobre o grau de conhecimento de um conceito, ou quando não existam mais perguntas. Por essa razão cada nodo do PCIG deve ter um número suficiente de perguntas, de diferentes níveis de dificuldade.

A ferramenta informática parte dos conceitos prévios, definidos no PCIG, e começa a avaliar os conceitos, progredindo sempre que o aluno consegue uma nota superior ao estipulado pelo professor, no teste. Quando um conceito não é superado o sistema não prossegue avaliando por esse ramo de conceitos do PCIG, pois se entende que esse conceito é necessário para a compreensão do seguinte, abrindo para o estudante a possibilidade de realizar a sua recuperação. É importante dizer que o sistema poderá prosseguir por outras ramificações do PCIG.

O desempenho do aluno é calculado a partir da fórmula  $\frac{D \times P}{D \times P + (1-P) \times L}$ , onde: D é a dificuldade da pergunta; L é o nível de adivinhação da pergunta; P é a nota da pergunta anterior.

O sistema mostrará para cada conceito, através do seu banco de dados, quais foram as perguntas realizadas, quais foram respondidas corretamente e qual a estimativa realizada por ele sobre o grau de conhecimento de cada conceito, conforme o exemplo representado na figura 3.



| <a href="#">Inicio</a> <a href="#">Ayuda</a> <a href="#">Perfil Usuario</a> <a href="#">Cerrar Sesión</a> |                    |  |  |              |
|---|--------------------|--|--|--------------|
|   |                    | <a href="#">Lista de asignaturas</a> <a href="#">Lista de Grupos</a> |  |              |
|   |                    | <a href="#">Lista de competencias</a>                                |  |              |
| <b>Acabado:</b> true  |                    |  |  |              |
| <b>Nota:</b> 0.143  |                    |  |  |              |
| Respuesta   | Respuesta correcta | Tiempo(antes de que se acabe)  | Pregunta   | Puntos antes |
| 0   | false              | 337  | O coeficiente linear da reta perpendicular à reta de equação $-x-3y+4=0$ que intersecta o ponto $(1,-2)$ está de acordo com o gráfico: | 0.100        |
| 1   | false              | 169  | A representação correta dos pontos $A(1,3)$ , $B(-2,-1)$ , $C(3,1)$ , $D(0,-3)$ , $E(-1,0)$ é:   | 0.100        |
| 3   | false              | 233  | A reta de equação $x-2y+4=0$ tem coeficiente linear igual a:   | 0.100        |
| 3   | false              | 229  | Em qual dos gráficos os pontos $A(0,-2)$ , $B(-2,0)$ , $C(1,-1)$ e $D(-3,1)$ estão colocados de maneira certa?                         | 0.100        |
| 1   | true               | 229  | O gráfico que melhor representa as retas de equação $2x-y+1=0$ e $x-y-2=0$ é:  | 0.100        |
| 0   | false              | 0  | O gráfico que representa a equação $2x + y + 1 = 0$ é  | 0.143        |
| <a href="#">Atrás</a>   |                    |  |  |              |

Figura 3: Exemplo do banco de dados de um teste adaptativo de um nodo do PCIG

A validação do SCOMAX foi desenvolvida na dissertação de Descovi (2008), que realizou uma experiência na quinta série de Ensino Fundamental com o conjunto do Números Naturais.

Ligado a esse sistema está o SCOMIN (*Student Concept Map Introspection*), cuja expressão significa: refletindo o mapa conceitual de um estudante. O SCOMIN propicia a recuperação individualizada de conteúdos, de acordo com as informações geradas pelo SCOMAX, conforme a figura 4.

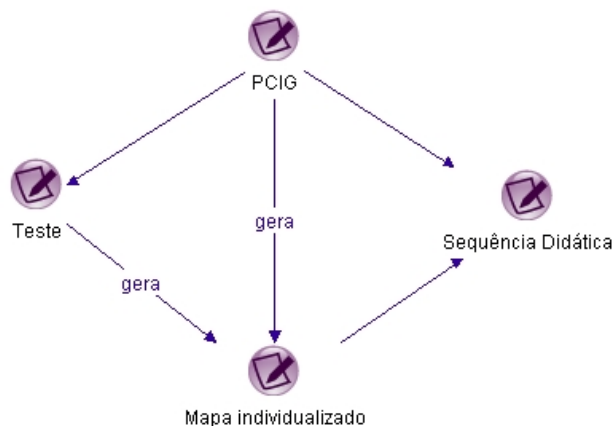


Figura 4: Esquema do sistema SIENA (SCOMIN e SCOMAX). (MORENO et al. 2007)

A validação do SCOMIN foi desenvolvida na dissertação de Murlick (2009), que

realizou a segunda investigação sobre o conjunto dos Números Naturais em uma turma de doze alunos da quinta série do Ensino Fundamental.

Assim, o sistema SIENA composto pelo SCOMAX e SCOMIN, possui duas opções de uso. A primeira serve para o aluno estudar os conteúdos dos nodos do PCIG e realizar o teste, para informar quais são seus conhecimentos sobre determinados conteúdos. A segunda opção oportuniza, ao aluno, realizar o teste e estudar os nodos nos quais apresentou dificuldades, sendo possível uma recuperação individualizada dos conteúdos nos quais não conseguiu superar a média estipulada como necessária para avançar no PCIG. Todos os nodos do PCIG estão ligados a uma sequência didática que possibilita ao aluno estudar os conceitos ou realizar a recuperação dos nodos em que apresenta dificuldades.

## 1.2 TEMA

O tema escolhido para esta investigação é: Registros de Representação Semiótica e recuperação individualizada de conteúdos de Geometria Analítica utilizando Tecnologias de Informação e Comunicação em um curso de Licenciatura em Matemática.

## 1.3 PROBLEMA

Segundo Duval (2004) muitos alunos apresentam dificuldades na compreensão em Matemática. Buscando respostas para compreender tais dificuldades, o autor afirma que é necessário uma abordagem cognitiva procurando descrever o funcionamento cognitivo que leva o aluno a compreender e efetuar os diferentes processos matemáticos propostos no ensino desta disciplina.

Assim, o autor entende que as atividades cognitivas que requerem esses processos matemáticos estão ligadas a utilização de uma variedade de representações semióticas, como os sistemas de numeração, as figuras geométricas, as escritas algébricas e formais, as representações gráficas e a língua natural, pois os objetos matemáticos (conceitos, propriedades, estruturas, relações que expressam diferentes situações) a serem estudados e compreendidos não são diretamente acessíveis à percepção, necessitando para o seu entendimento e apreensão, a mobilização simultânea, para cada objeto, de ao menos dois registros de representação, ou na possibilidade de troca a todo instante de registro de representação, sem que o aluno confunda o objeto envolvido com suas respectivas

representações.

Damm (2002) comenta que, em diversas pesquisas em Educação Matemática se constatou que os alunos apresentam dificuldades de passar de uma representação à outra, isto é, de efetuar a conversão entre os diferentes registros de representação de um objeto matemático, o que é condição necessária para a apreensão deste objeto.

No ensino e aprendizagem de Geometria Analítica, de acordo com Silva (2006), constata-se que muitos alunos apresentam dificuldades ao lidar com as diversas representações gráficas e algébricas de curvas planas. Duval (apud Silva 2006), afirma que a razão das dificuldades identificadas por diferentes pesquisas relacionadas às tarefas de leitura e interpretação de representações gráficas, está no fato do aluno desconhecer a correspondência semiótica entre o registro das representações gráficas e da escrita algébrica.

A preocupação com tais dificuldades mencionadas associada à formação de professores de Matemática, leva ao interesse em investigar quais as possíveis dificuldades que alunos de Licenciatura em Matemática apresentam em relação à conversão entre os Registros de Representação Semiótica no conteúdo de Geometria Analítica, mais especificamente nos conteúdos de reta e circunferência, e as possíveis contribuições do sistema inteligente SIENA para a identificação destas possíveis dificuldades e na recuperação individualizada destes conteúdos.

## 1.4 OBJETIVOS

Para o desenvolvimento dessa investigação foram traçados o objetivo geral e os objetivos específicos que se explicitam a seguir.

### 1.4.1 Objetivo Geral

Investigar quais as possíveis dificuldades que alunos de Licenciatura em Matemática apresentam em relação à conversão entre os Registros de Representação Semiótica no conteúdo de Geometria Analítica, mais especificamente nos conteúdos de Reta e Circunferência, e as possíveis contribuições do sistema inteligente SIENA para a identificação das dificuldades individuais e recuperação dos conceitos nos quais estes apresentaram dificuldades.

### 1.4.2 Objetivos Específicos

Para atingir o objetivo geral foram traçados o seguintes objetivos específicos:

- Desenvolver um grafo para implementação no sistema SIENA, com o conteúdo de Geometria Analítica (Reta e Circunferência), relacionando com os Registros de Representação Semiótica;
- Investigar questões e atividades didáticas sobre Reta e Circunferência, em livros do Ensino Médio, ligadas a conversão entre os Registros de Representação Semiótica;
- Desenvolver o banco de questões para os testes adaptativos e implementar no sistema SIENA;
- Desenvolver uma sequência didática com os conceitos de Reta e Circunferência e implementar no sistema informático SIENA para que cada aluno realizasse a recuperação, conforme as dificuldades que possivelmente viessem a apresentar nesses conceitos;
- Implementar<sup>1</sup> uma experiência no sistema SIENA com o tema Geometria Analítica (Reta e Circunferência) e os Registros de Representação Semiótica.

### 1.5 METODOLOGIA DA INVESTIGAÇÃO

Para o desenvolvimento desta investigação foi adotada a abordagem qualitativa que de acordo com Bogdan e Biklen (1999, p.38): “tem como alvo melhor compreender o comportamento e a experiência humana. Os pesquisadores procuram entender o processo pelo qual as pessoas constroem significados e descrevem o que são aqueles significados”.

Para os autores a abordagem qualitativa em uma pesquisa permite identificar características essenciais como, o ambiente natural como fonte direta de dados e o pesquisador como instrumento fundamental; o caráter descritivo; maior interesse pelo processo do que simplesmente pelos resultados; análise dos dados de forma indutiva e predominantemente descritiva, em que não há preocupação em quantificar os dados; o significado com importância vital neste tipo de abordagem.

A estratégia de pesquisa tem como enfoque o método de estudo de caso, que segundo Lüdke e André (1986), visa a descoberta, enfatiza a interpretação em contexto, busca retratar a realidade de forma completa e profunda utilizando fontes de informação diversificada que

---

<sup>1</sup> Implementar está sendo utilizado, nessa investigação, no sentido de desenvolver, aplicar e avaliar.

permitem generalizações naturalísticas, procura representar os diferentes pontos de vista numa situação social e utiliza uma linguagem e uma forma mais acessível do que outros relatórios de pesquisa.

Yin (2005, p.33) complementa que, “este método abrange tratamento da lógica de planejamento, das técnicas de coletas de dados e das abordagens específicas à análise dos mesmos.” Assim, entende-se que este método permite a coleta de uma variedade dados subjetivos para o objeto em estudo e uma investigação detalhada dos sujeitos envolvidos dentro da realidade em que se encontram inseridos.

Foi realizada uma experiência na Universidade Luterana do Brasil, ULBRA, na cidade de Canoas, com uma amostra de 10 alunos do curso de licenciatura em Matemática, com o conteúdo de Geometria Analítica, mais precisamente com Reta e Circunferência, relacionando-os com os Registros de Representação Semiótica, e utilizando o Sistema Inteligente SIENA. O desenvolvimento da investigação passou então pelas seguintes etapas apresentadas a seguir.

Inicialmente foi realizado um levantamento bibliográfico sobre Registros de Representação Semiótica, e sobre aspectos teóricos e didáticos dos conceitos e atividades com o conteúdo de Geometria Analítica sobre Reta e Circunferência.

A segunda etapa foi o estudo do funcionamento do Sistema Inteligente SIENA.

Na terceira etapa, a partir do levantamento bibliográfico sobre os Registros de Representação Semiótica e da investigação realizada sobre conceitos e atividades com os conteúdos de Reta e Circunferência, foi construído o cenário virtual de investigação, conforme apresentado no capítulo 4. A construção deste cenário teve as seguintes ações:

- construção do PCIG dos nodos<sup>2</sup> sobre os conteúdos de Reta e Circunferência e a conversão entre os Registros de Representação Semiótica: língua natural, escrita algébrica e representação gráfica referente a estes conteúdos. O PCIG foi construído com o auxílio do software *Compendium*<sup>3</sup> e importado para o SIENA;

- construção do banco de questões, que foram cadastradas no SIENA. Para cada nodo do PCIG foram desenvolvidas 30 questões com quatro opções de resposta cada uma (Apêndice A), para a realização dos testes adaptativos. As questões elaboradas tiveram por finalidade a atividade de conversão, por parte do aluno, da língua natural para a representação algébrica e vice-versa, da língua natural para a representação gráfica e vice-versa, da

---

<sup>2</sup> São os títulos dos conceitos que fazem parte do grafo PCIG.

<sup>3</sup> Software para construção de mapas conceituais. Disponível em: <http://www.compendiuminstitute.org/>.

representação algébrica para a representação gráfica e vice-versa, tanto para os conceitos de Reta quanto para os de Circunferência;

- elaboração das atividades da sequência didática (atividades de revisão com o conteúdo de Reta e Circunferência, atividades didáticas com o conteúdo, exercícios, simulações) inseridas no SIENA, para cada nodo do PCIG de Reta e Circunferência, (APÊNDICE A) as quais buscaram conversões entre os Registros de Representação Semiótica propostas em cada nodo e a integração com as Tecnologias de Informação e Comunicação, a fim de contribuir na recuperação individualizada dos alunos, ou seja, na assimilação de conceitos de Geometria Analítica possivelmente ainda não assimilados pelos alunos que viessem a apresentar dificuldades.

Durante esta terceira etapa realizou-se um período de estudos na Universidade de La Laguna em Tenerife- Espanha, no mês de março de 2009, para melhor familiarização com o Sistema SIENA e simulação de funcionamento para a aplicação na pesquisa.

A quarta etapa consistiu na realização da experiência, utilizando o Sistema SIENA, com 10 alunos de diferentes semestres do curso de licenciatura em Matemática da Universidade Luterana do Brasil –ULBRA, campus Canoas.

A quinta e última etapa, consiste na análise dos resultados a partir dos dados colhidos durante a experiência. Os principais instrumentos de coleta de dados foram:

1. O questionário para coleta de informações gerais para determinar o perfil dos estudantes participantes do experimento (Apêndice B).

2. Os bancos de dados do SIENA. O SIENA fornece dois bancos de dados, os quais são disponibilizados pelo sistema ao acesso, também, dos alunos após cada teste realizado. Estes bancos são acessados na lista de trabalhos de cada aluno, a qual apresenta a lista de todos os nodos do PCIG. Em cada nodo do PCIG, nesta lista, acessa-se o primeiro banco de dados, no qual é possível observar quantos testes o aluno realizou no nodo, e as respectivas notas alcançadas por ele. Além da data em que o aluno realizou os testes, se este foi considerado verdadeiro ou falso pelo sistema, ou seja, caso o aluno tenha encerrado o teste e não o sistema, impossibilitando este de fazer uma estimativa fidedigna sobre o grau de conhecimento deste aluno do conceito abordado no nodo em que realizou o teste, o SIENA considera este teste falso. A figura 5 apresenta um exemplo deste primeiro banco de dados fornecido pelo SIENA.

| Fecha de creación | Acabado | Nota   |
|-------------------|---------|--|
| 10.04.2010        | true    | 0.954 <a href="#">Ver</a> <a href="#">Borrar</a> |
| 10.04.2010        | true    | 0.445 <a href="#">Ver</a> <a href="#">Borrar</a> |
| 10.04.2010        | true    | 0.338 <a href="#">Ver</a> <a href="#">Borrar</a> |

[Atrás](#)

Figura 5: Exemplo de um banco de dados fornecido pelo SIENA em um dos nodos do PCIG

O segundo banco de dados do SIENA, é acessado neste primeiro banco de dados no *link Ver*, ao lado da nota de cada teste realizado pelo aluno, conforme figura 5. Este segundo banco de dados apresenta as questões realizadas pelo aluno no respectivo teste do nodo anteriormente acessado, quais foram respondidas corretamente e quais não, qual a opção de resposta escolhida pelo aluno, sendo que os números 0, 1, 2 e 3 correspondem respectivamente as opções a, b, c, e d, o tempo, em segundos, que restava para o aluno responder cada questão no momento em que enviou a sua opção de resposta, além de apresentar novamente a nota alcançada pelo aluno e a veracidade do teste. A figura 6 apresenta um exemplo deste segundo banco de dados fornecido pelo SIENA.

| Respuesta | Respuesta correcta | Tiempo(antes de que se acabe) | Pregunta   | Puntos antes |
|-----------|--------------------|-------------------------------|--|--------------|
| 0         | false              | 527                           | Uma reta que passa na origem e é perpendicular a outra reta que passa nos pontos de abscissas três e zero e ordenadas zero e dois respectivamente tem pontos na forma: | 0.100        |
| 1         | false              | 230                           | Duas retas r e s têm coeficientes angulares iguais a A e B respectivamente. Para que elas sejam perpendiculares a relação verdadeira é                                 | 0.100        |
| 0         | false              | 194                           | A reta com coeficiente linear positivo é   | 0.100        |
| 2         | false              | 228                           | O par de retas paralelas é   | 0.100        |
| 3         | false              | 163                           | O ponto de ordenada -1 e abscissa 2 pertence a reta  | 0.100        |
| 2         | false              | 150                           | A reta que tem coeficiente angular positivo é  | 0.100        |

[Atrás](#)

Figura 6: Exemplo de um banco de dados fornecido pelo SIENA de um teste de um nodo do PCIG

3. Registros do desenvolvimento das questões pelos alunos, para identificar, as dificuldades nas conversões entre os registros língua natural, algébrico e gráfico, conforme propostas nos nodos do PCIG desenvolvido, considerando os tratamentos realizados pelos alunos na resolução destas questões.

Também foram utilizados outros instrumentos para coletar informações durante a pesquisa, os quais se explicitam a seguir:

1. Observações realizadas durante a experiência, conforme protocolo no apêndice C. Para Ludke e André (1986), em uma abordagem qualitativa de uma pesquisa educacional, a observação, tanto quanto a entrevista, possui um papel importante, pois possibilita o contato pessoal e estreito do pesquisador com o fenômeno pesquisado, apresetando vantagens como, a verificação da ocorrência de um determinado fenômeno, permite maior aproximação da perspectiva dos sujeitos, possibilita conhecer novos aspectos de um problema, e por fim, permite coletar dados em situações em que não é possível outras formas de comunicação.

2. Opiniões dos alunos, coletadas ao final do experimento, além de comentários espontâneos, sobre o que acharam das questões e da sequência didática.

3. Filmagens realizadas durante a experiência e as falas dos alunos. Segundo Kenski, (2003 apud Belei et al, 2008), na pesquisa qualitativa, o uso do vídeo permite um certo grau de exatidão na coleta de informações, uma comprovação frente aos tradicionais questionamentos da subjetividade deste tipo de pesquisa. Além disso, o vídeo pode ser revisto possibilitando observar pontos que não foram percebidos com a observação.

Assim, com estes instrumentos e com a triangulação dos dados, esta entendida por Araújo e Borba (2004), como a utilização de diferentes procedimentos para obtenção dos dados, a fim de aumentar a credibilidade de uma pesquisa qualitativa, busca-se encadear e contextualizar os resultados obtidos.

## 1.6 A EXPERIÊNCIA

A experiência, utilizando o sistema informático SIENA, ocorreu com dez alunos do curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Luterana do Brasil- ULBRA, campus Canoas, em cinco encontros presenciais realizados no período de 10 de abril a 15 de maio de 2009, aos sábados pela manhã, no horário das 8h e 30min às 11h e 30min, na sala de Tecnologias para a Aprendizagem, prédio 14 da ULBRA- Canoas.

Para a divulgação da experiência foi construído e distribuído um folder, em sala de



aula, explicando a pesquisa para os alunos do curso de Licenciatura em Matemática. Os alunos interessados se inscreveram na secretaria do curso. Assim, inscreveram-se 10 alunos de diferentes semestres para participar da pesquisa, os quais foram previamente cadastrados no SIENA denominados de aluno1, aluno2, aluno3,... aluno10.

No primeiro encontro, antes dos alunos iniciarem os testes, foi explicado, pela professora pesquisadora, o que é o Sistema Informático SIENA, para que serve e como seria utilizado por eles, para a realização desta pesquisa. Em todos os encontros foram disponibilizados, para cada aluno, um computador *notebook* da HP e folhas de ofício para realização das atividades.

Assim, os alunos acessaram o sistema SIENA pelo site <http://siena.ulbra.br>, através do navegador *Mozilla Firefox*, com seu usuário e senha anteriormente definidos, e iniciaram os testes para cada nodo proposto no PCIG desta pesquisa, apresentado no capítulo 4.

Os testes realizados pelos alunos iniciaram no nodo *Conversão da Representação Língua Natural para Algébrica e da Representação Algébrica para a Língua Natural da Reta*, e se o aluno tivesse um desempenho igual ou superior a média 0,6, o SIENA permitia a realização do próximo teste para o nodo seguinte. Caso o aluno não obtivesse a média no teste de cada nodo, o SIENA apresentava um *link* denominado *recuperación de contenidos*, para o aluno abrir a sequência didática eletrônica (apresentada no capítulo 4), a qual era composta de *links* para o aluno acessar e realizar estudos e atividades, conforme seu interesse em relação as suas dificuldades sobre o conceito abordado no nodo em qual realizou o teste, ou seja, o aluno realizava a chamada recuperação individualizada para então realizar um novo teste sobre este mesmo conceito, e assim sucessivamente.

Desta forma, alguns alunos foram avançando nos testes respectivos a cada nodo, enquanto que outros, mesmo abrindo algumas atividades da sequência didática proposta para estudo do conceito abordado, não avançaram. Por este motivo, no segundo encontro foi decidido, pela professora pesquisadora juntamente com sua orientadora, abrir o teste para cada nodo do PCIG, assim o aluno podia avançar para o teste do nodo seguinte, mesmo sem ter sido aprovado no nodo anterior, por não atingir a média estipulada, mesmo depois de realizar algumas atividades de estudos da sequência didática do respectivo nodo e realizar um segundo teste. A figura 7 mostra alguns alunos realizando a pesquisa.

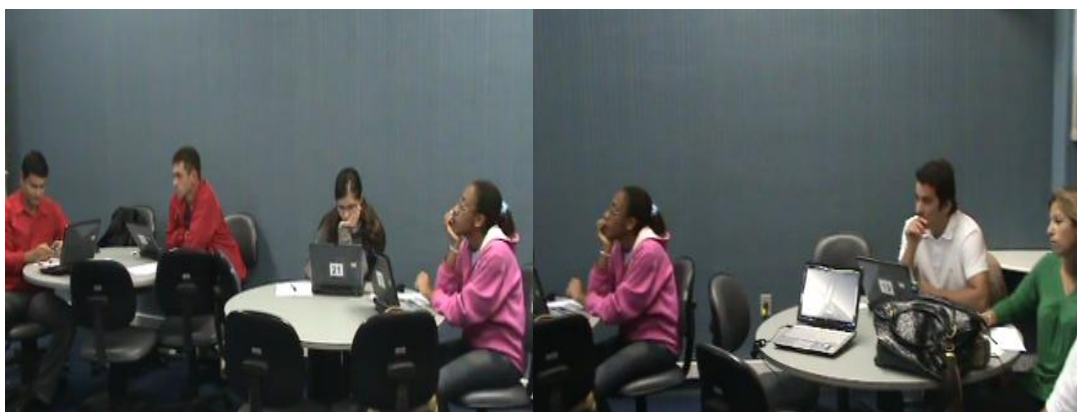


Figura 7: Alunos do Curso de Licenciatura em Matemática realizando as atividades da pesquisa

Do grupo de dez alunos, dois não terminaram a pesquisa e os demais alunos realizaram ao menos um teste para cada nodo do PCIG ao longo de cinco encontros, sendo que desde o primeiro encontro, estes realizavam atividades diferentes, pois para cada teste o SIENA lança questões com um nível de dificuldade conforme a resposta dada pelo aluno na pergunta anterior, ou seja, se o aluno acerta a questão o sistema aumenta o nível de dificuldade da próxima questão, caso contrário ele permanece com uma questão do mesmo nível, no caso do aluno ter errado uma questão fácil, ou então lança uma questão com nível de dificuldade menor que a anterior. Além disso, cada aluno ia realizando estudos de recuperação segundo o seu resultado no teste realizado e abria as atividades propostas na sequência didática correspondente ao nodo em que realizou o teste, conforme sua necessidade em sanar suas dúvidas e dificuldades individuais. No apêndice A, encontra-se um vídeo com alguns momentos da realização da pesquisa.

Alguns alunos, em um ou dois encontros, devido ao fato de que trabalhavam, ou outro imprevisto ficaram impossibilitados de vir até ULBRA para a realização da pesquisa, e como durante a semana, à noite, tinham aula no curso de Licenciatura em Matemática, foi pedido que eles realizassem os testes em casa ou na sala da professora orientadora desta pesquisa em algum horário disponível, e trouxessem as folhas utilizadas na realização das atividades para entregar.

## 2 PRESSUPOSTOS TEÓRICOS

Para o desenvolvimento desta pesquisa considerou-se como fundamentação teórica a teoria do pesquisador francês Raymond Duval sobre os Registros de Representação Semiótica, a qual tem auxiliado estudos referentes à aquisição do conhecimento matemático.

### 2.1 SEMIÓTICA: CONCEITO E UM BREVE HISTÓRICO

O nome Semiótica, conforme Santaella (1999), é de origem grega, *semeion* que quer dizer signos, é denominada como a ciência dos signos, ou seja, a ciência geral de toda e qualquer linguagem, tendo como objetivo “o exame dos modos de constituição de todo e qualquer fenômeno como fenômeno de produção de significação e de sentido.”(SANTELLA, 1999, p.13). Porém, a autora chama a atenção para que não haja confusão entre língua e linguagem, pois a língua que falamos e fazemos uso para a escrita não é a única forma de linguagem pela qual nos comunicamos.

Para Santaella (1999) nós somos mediados por uma rede plural de linguagem, isto é,

que nos comunicamos também através da leitura e/ou produção de formas, volumes, massas, interações de forças, movimentos; que somos também leitores, produtores de dimensões e direções de linhas, traços, cores... Enfim, também nos comunicamos e nos orientamos através de imagens, gráficos, sinais, setas, números, luzes... Através de objetos, sons musicais, gestos, expressões, cheiro e tato, através do olhar, do sentir e do apalpar (SANTAELLA, 1999, p. 10).

Pignatari (1987) afirma que a Semiótica serve para estabelecer as ligações entre um código e outro, entre uma linguagem e outra, para ler o mundo não-verbal (um quadro, uma dança, um filme) e para ensinar a ler o mundo verbal em ligação com o mundo não-verbal. Para o autor, a Semiótica acaba com a ideia de que as coisas só adquirem significado quando traduzidas sob a forma de palavras.

Baseados em Santaella, Viel e Dias (2006) comentam que sendo a Semiótica uma Ciência que investiga as linguagens existentes, examinando os fenômenos em seu significado e sentido, está presente nas demais Ciências, porém não com o objetivo de se apoderar do saber e da investigação específica de outras Ciências, mas de desvendar sua existência enquanto linguagem, isto é, sua ação em termos de signo.

Rodrigues (1991) considera as deduções, os reconhecimentos, as identificações, os comportamentos adotados pelo ser humano ao longo da vida, como atos semióticos que

constituem sua experiência de mundo, como processos de elaboração, de percepção e de interpretação de signos.

Assim, pode-se dizer que todas as experiências que temos ao longo da vida, e isto também ao longo da história da humanidade, passam por processos semióticos já que estamos inseridos num mundo repleto de signos, aos quais é preciso aprender, adaptar-se, reproduzir e consequentemente criar novos para aperfeiçoar nossa comunicação e nossa própria visão do mundo, e assim transformá-lo. “É no homem e pelo homem que se opera o processo de alteração dos sinais (qualquer estímulo pelos objetos do mundo) em signos ou linguagens (produtos da consciência)” (SANTAELLA, 1999, p.13).

Rodrigues (1991) considera ainda, que a linguagem verbal é uma realidade semiótica que não pode ser comparada a outra realidade sensorial, pois entende que só na linguagem verbal a significação do mundo adquire estatuto semiótico, passando as percepções a constituir um mundo, acerca da linguisticidade, propriamente humano, ou seja, todos os fenômenos percebidos, concebidos, comunicados e interpretados pelo homem, têm na linguagem seu ponto de partida e chegada, salientando que o homem só compreende as significações do mundo porque sabe que, mesmo quando não as explicita verbalmente, pode fazer isto sempre que quiser. Em consonância, Santaella (1999, p. 76) diz que “o modelo teórico privilegiado e nuclear é aquele das línguas naturais, quer dizer, o da linguagem verbal.”

A Semiótica, conforme Santaella (1999), é uma Ciência jovem que está em fase de crescimento e sedimentação, e se originou simultaneamente em três locais diferentes: nos Estados Unidos, na União Soviética e na Europa Ocidental, e se iniciou a partir da Revolução Industrial com a proliferação das linguagens e códigos, dos meios de reprodução e difusão das informações e mensagens, emergindo assim “uma *consciência semiótica*. Não foi senão essa consciência de linguagem que gerou a necessidade do aparecimento de uma Ciência capaz de criar dispositivos de indagação e instrumentos metodológicos aptos a desvendar o universo multiforme e diversificado dos fenômenos de linguagem” (SANTAELLA, 1999, p.15 e 16).

Nos Estados Unidos, no século XIX, segundo Santaella (1999), o químico, matemático, físico, astrônomo, e antes de tudo um cientista, Charles S. Peirce iniciou a teoria geral dos signos ou Semiótica. Primeiramente ele considerou a lógica como um ramo da Semiótica, mais tarde adotou uma concepção mais ampla da lógica integrando-a como uma teoria geral de todos os tipos de signos e gradativamente foi emergindo sua teoria lógica, filosófica e científica da linguagem, a Semiótica.

A Semiótica peirciana, compreendida como lógica, como afirma Santaella (1999), não é uma ciência aplicada, seu intuito era configurar conceitos sógnicos tão gerais, a ponto de servir de base para qualquer Ciência aplicada.

Assim, Pierce (2000), menciona a lógica como sendo apenas um outro nome para Semiótica, “ a quase- necessária, ou formal, doutrina dos signos” (PIERCE, 2000, p.45).

Descrevendo a doutrina como “quase- necessária” , ou formal, quero dizer que observamos os caracteres de tais signos e , a partir dessa observação, por um processo a que não objetivarei denominar Abstração, somos levados a afirmações, eminentemente falíveis e por isso, num certo sentido, de modo algum necessárias, a respeito do que devem ser os caracteres de todos os signos utilizados por uma inteligência “científica” , isto é, por uma inteligência capaz de aprender através da experiência. (PIERCE, 2000, p.45).

Torna-se importante definir o que é signo. Santaella (1999) afirma que Pierce apresenta várias definições de signo em seus textos e escolhe a seguinte definição que lhe parece exemplar a seus propósitos:

Um signo intenta representar, em parte pelo menos, um objeto que é, portanto, num certo sentido, a causa ou determinante do signo, mesmo se o signo representar seu objeto falsamente. Mas dizer que ele representa seu objeto implica que ele afete uma mente, de tal modo que, de certa maneira, determine naquela mente algo que é mediatamente devido ao objeto. Essa determinação da qual a causa imediata ou determinante é o signo, e da qual a causa mediata é o objeto, pode ser chamada o interpretante (SANTAELLA, 1999, p.58).

A autora esclarece que signo é uma coisa que representa uma outra coisa: seu objeto, e só pode funcionar como signo se carregar esse poder de representar, substituir uma outra coisa diferente dele, pois o signo não é o objeto, apenas está no lugar do objeto, logo ele só pode representar esse objeto de um certo modo e capacidade.

Nesse sentido, de acordo com Peirce (2000), um signo, ou *representâmen*, é aquilo que de certo modo representa algo para alguém, criando na mente dessa pessoa um signo equivalente ou talvez mais desenvolvido. Ao signo criado o autor denomina como interpretante do primeiro signo, o signo representa seu objeto, esse objeto não é representado em todos os seus aspectos, mas com referência a um tipo de ideia a qual denominou fundamento do *representâmen*.

Como exemplo Santaella (1999), menciona que a palavra casa, a pintura de uma casa, o desenho de uma casa, a fotografia, o esboço, um filme, uma planta baixa, a maquete de uma casa, ou mesmo o seu olhar para uma casa, são todos signos do objeto casa, mas não são

a própria casa, nem a idéia geral que se tem de casa.

Analogamente, na Matemática, pode-se dizer que um número, por exemplo, pode ser representado na forma escrita (decimal, fracionária), na forma algébrica, na língua natural ou por meio de figura, sendo que estas representações são apenas signos do objeto número, mas não são o próprio número, que por sua vez é algo abstrato.

Conforme Santella (1999) Peirce estabeleceu dez tricotomias, ou seja, dez divisões triádicas do signo, cujas combinações resultam em 64 classes de signos e a possibilidade lógica de 59 049 tipos de signos. Na segunda tricotomia, e segundo ele próprio a mais importante divisão dos signos, um signo pode ser denominado ícone, índice ou símbolo.

Para Peirce (2000), um ícone é um signo que se refere ao objeto denotando apenas seus caracteres próprios (uma pintura, um som, por exemplo); um índice é um signo que refere-se ao objeto estabelecendo qualidades em comum com o objeto a que está diretamente conectado, sendo modificado pelo objeto (o girassol que indica o lugar do sol no céu, pegadas na areia, por exemplo); um símbolo é um signo que refere-se ao objeto através de uma associação de idéias que buscam fazer com que o símbolo seja interpretado como se referindo àquele objeto, não representa algo do tipo individual, mas geral (a palavra mulher, por exemplo).

Conforme Pignatari (1987), para Peirce todo pensamento é um signo, assim o próprio homem é um signo, pois em qualquer momento o homem é um pensamento, e sendo um pensamento uma espécie de símbolo, o homem é também um símbolo.

Porém, apesar de todo o esforço de Peirce em enraizar uma teoria geral de todas as possíveis espécies de signos, poucos lógicos o seguiram em sua insistência, de acordo com Santaella (1999). Somente no início da década de oitenta, conforme Pignatari (1987), é que alguns semiólogos europeus deram-se conta que não podiam mais ignorar o fundador da Semiótica, Charles Sanders Peirce.

Segundo Flores (2006), em muitas teorias semióticas o signo é representado pela tríade de Ogden e Richards, conforme figura 8:

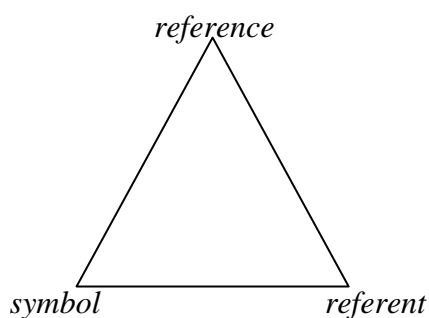


Figura 8: Tríade de Ogden e Richards. (Ogden e Richards 1972, apud Flores ,2006, p.15)

Flores (2006), explica que a cada *symbol* (signo ou significante), corresponde uma *reference* (conceito ou significado) e um *referent* (objeto). A autora complementa que duas representações diferentes de um mesmo objeto possuem em comum a referência, baseando-se em Bkouche (1988) que, ao analisar as problemáticas que possibilitaram as novas escritas algébricas, em matemática, e as novas formas de representar figuras geométricas, levantou a questão de que duas representações distintas podem fazer referência a um mesmo objeto matemático. Assim, ela conclui que o que existe em comum em duas formas de representação, como uma reta desenhada sobre um sistema de eixos coordenados e a relação  $y = ax + b$ , “não será uma dado, mas, como demonstra Bkouche, uma construção historicamente datada, isto é, a invenção da geometria analítica por Descartes e Fermat” (FLORES, 2006, p.16).

Assim, a autora considera que o importante é compreender que o processo de abstração que requer a relação entre representação e referência é o que permite a apreensão do objeto matemático independente da representação que seja utilizada.

Outra fonte de origem da Semiótica, no século XIX, segundo Santaella (1999), está na União Soviética, nos trabalhos dos filósofos A. N. Viesse-lovski e A. A. Potiebniá, que serviram de raízes às descobertas do estruturalismo linguístico no século XX, com o linguista N. I. Marr que, ao desentender-se com Stalin não deu prosseguimento aos estudos, que contudo, foram resgatados por Vigotski e o cineasta S. M. Eisenstein, incluindo relações entre a linguagem e os ritos antigos, como também entre a linguagem dos gestos e a língua articulada.

Na Europa Ocidental, o linguista Ferdinand de Saussure, ministra o curso de Linguística Geral, na Universidade de Genebra, no final da primeira década do século XX, como afirma Santaella (1999), definindo a língua como uma estrutura governada por leis e regras específicas e autônomas. O curso transformado em um livro, teve grande repercussão

não apenas na Europa como no mundo todo, segundo Viel e Dias (2006). “Para Saussure a língua e a fala, inseparáveis, deveriam ter uma ciência de estudo abrangente e vasta e que denominou como Semiologia, o estudo de todos os sistemas de signos na vida social” (VIEL e DIAS 2006, p. 2).

Para Duval, de acordo com Viel e Dias (2006), Peirce foi o primeiro a reconhecer a importância dos diversos tipos de signos, e Chomski (1971) foi quem introduziu, por meio da modelagem da linguagem, questões referentes às relações entre sistemas semióticos diferentes e as possibilidades de conversão entre as representações, o que será tratado mais tarde dentro deste referencial teórico.

Duval (2004), menciona que a evolução dos conhecimentos segue a criação e o desenvolvimento de sistemas semióticos novos e específicos que coexistem com a língua natural, ressaltando que o pensamento científico não pode ser separado do desenvolvimento de simbolismos específicos para representar objetos e suas relações, uma vez que o conhecimento só pode ser mobilizado por meio de uma representação.

Não é possível estudar os fenômenos relativos ao conhecimento sem recorrer a noção de representação . Após Descartes e Kant, a representação tem sido o centro de toda a reflexão que se preocupe com as questões que tem a ver com a possibilidade e a constituição de um certo conhecimento (DUVAL, 2004, p.25)

Especificamente, no conhecimento Matemático, Flores (2006), recorda que durante a Antiguidade e Idade Média a escrita era de forma quase que totalmente retórica, como pode ser percebida em Diophante, Leonardo de Pisa ou Luca Pacioli, empregando-se uma metodologia composta de elementos de origem diversa, ou seja, uma mistura de geometria e retórica, em que os procedimentos geométricos eram o único meio de resolução, e quando havia o uso de símbolos dentro a escrita, é porque foram criados momentaneamente apenas para elaborar um texto, e sua compreensão era restrita a quem os criou.

De acordo com Serfati (apud Flores, 2006) até os meados do século XVII não havia nenhum sistema geral de representação em Matemática, já que não havia nada publicado, até aquele momento, em que fosse possível fazer uma análise do uso de representações nesta área. No entanto, denota que antes mesmo de Descartes, que com a divulgação da sua geometria apresentou um sistema de escritura com mecanismos novos, com François Viète, no final do século XVI, já havia um primeiro sistema de signos, constituído de letras, e no qual Viète introduziu o uso de vogais para representar incógnitas e consoantes para representar constantes. Porém, segue dizendo, que foi somente com Leibniz que ocorreu uma



real abstração do objeto, pois foi ele quem primeiro compreendeu o extraordinário poder do simbólico desenvolvendo uma nova linguagem algébrica.

A partir desta nova compreensão e desta nova linguagem de Leibniz, ocorreu um salto significativo no desenvolvimento de teorias e operações matemáticas, como diz Flores (2006, p.9):

De posse da nova linguagem simbólica e de regras de cálculo, pode-se fazer qualquer tipo de cálculo, mesmo aqueles que antes não eram realizados. Foi isto que possibilitou Leibniz, em 1676, a criar o método de cálculo infinitesimal, definindo desta forma, as operações de integração e derivação. Daí o desenvolvimento da matemática pura, que permitiu a construção, por exemplo, do edifício da teoria das funções, como também da geometria diferencial. Criam-se, enfim, novos símbolos, novas técnicas, novas formas de representação.

Assim, no âmbito do ensino e aprendizagem da Matemática, Duval (2004) preceitua que para se adquirir conhecimentos matemáticos é preciso entender a Semiótica, entender a linguagem matemática, pois uma das suas principais características é a diversidade de registros de representação semiótica. O autor entende que a aprendizagem da Matemática constitui uma área de estudo privilegiado para as análises de atividades cognitivas fundamentais para o desenvolvimento cognitivo do aluno, como a conceitualização, o raciocínio, a resolução de problemas e compreensão de textos, sendo que estas atividades cognitivas requerem a utilização de sistemas de representação diferentes da linguagem natural ou imagens.

D'Amore (2005) utiliza-se de Duval para afirmar que a aquisição conceitual de um objeto matemático passa necessariamente pela aquisição de uma ou mais representações semióticas, ou seja, que não existe *noesis* sem *semiosis*. Duval (2004, p.14) as define como sendo “*semiosis* a apreensão ou a produção de uma representação semiótica, e *noesis* os atos cognitivos como a apreensão conceitual de um objeto [...]”. No mesmo sentido, e com palavras semelhantes D'Amore (2005, p.58), define “*semiosis*- representação realizada por meio de signos, e *noesis*- aquisição conceitual de um objeto.”

O fenômeno importante para compreender o papel da *semiosis* no funcionamento do pensamento e no desenvolvimento dos conhecimentos, não é o emprego de um ou outro tipo de signo e sim a variedade dos tipos de signos que podem ser utilizados. A *semiosis* é inseparável de uma diversidade de tipos de signos disponíveis (DUVAL, 2004, p. 29).

Porém, para que haja a aquisição conceitual de um objeto e a compreensão em Matemática Duval (2004), enfatiza a importância de distinguir o objeto da sua representação.

“Os objetos matemáticos são os números, as funções, as retas, etc, e as representações são as escritas decimais ou fracionárias, os símbolos, os gráficos, os traçados das figuras...”(DUVAL, 2004, p.14), sendo que um mesmo objeto pode ter representações diferentes.

Duval (2003) expressa que é comum em análises do que consiste a compreensão em Matemática e na busca pela razão das dificuldades de compreensão que muitos alunos apresentam, evocar os conceitos matemáticos e suas complexidades epistemológicas, e acentua que esta abordagem não é suficiente para caracterizar o funcionamento do pensamento em Matemática em relação a outras áreas do conhecimento científico. Para o autor, a diferença da atividade cognitiva requerida pela Matemática e a requerida por essas outras áreas está na importância primordial das representações semióticas e na grande variedade dessas representações utilizadas na Matemática.

Por meio destas concepções sobre Semiótica e articulando-as com o ensino e aprendizagem da Matemática, compreende-se que para contribuir com o desenvolvimento das capacidades cognitivas do educando como, de raciocinar, analisar, descrever, visualizar, e sua apreensão de conceitos a ela inerentes, é fundamental entender que as representações são o meio de acesso aos objetos matemáticos e a compreensão dos signos matemáticos é forma de comunicação entre o sujeito que apreende com seu objeto de estudo.

Desta forma, percebe-se que a reflexão, permeada pela Semiótica, acerca das questões que envolvem a compreensão Matemática e a aquisição e funcionamento dos conhecimentos ao longo da história desta Ciência, serve como uma ferramenta para o professor reconhecer e ampliar suas concepções sobre o assunto, como também para questionar sua metodologia e prática de sala de aula que, antes de tudo, deve levar em consideração a necessidade da utilização e reconhecimento das representações semióticas - base para a essência da Matemática - para possibilitar a aquisição do conhecimento sobre um objeto matemático por parte do aluno.

## 2.2 OS DIFERENTES TIPOS DE REPRESENTAÇÃO

De acordo com Duval (2004) não existe conhecimento que um sujeito possa mobilizar sem uma atividade de representação. Em consonância, Flores (2006), afirma que a representação exerce um papel fundamental na aquisição dos conhecimentos “porque para conhecer é preciso ter acesso aos objetos do conhecimento. Logo, a representação será o

modo pelo qual se torna possível a visibilidade, a transparência e, assim, a ordenação dos objetos do conhecimento”(FLORES, 2006, p.10). A autora, complementa que a representação possibilita a mediação entre o sujeito e o objeto.

Com relação a Matemática Moretti (2002, p. 344), menciona que a mesma “guarda uma forte dependência da formas de representações e da manipulação de seus objetos.” Em acordo, Damm (2002), diz que na Matemática, toda a comunicação estabelecida é com base em representações, os objetos estudados são conceitos, propriedades, estruturas, relações que podem expressar diferentes situações, e por isso para ensinar tais objetos é preciso considerar as diferentes formas de representação de um mesmo objeto matemático.

Neste sentido, a autora levanta algumas questões relevantes ao processo de ensino e aprendizagem, pois admitindo-se que o professor é o responsável pela socialização do conhecimento científico conseguiria este conhecer as concepções e representações de cada um de seus alunos sobre um conceito específico? E sendo isto possível, como transformá-las em conhecimento científico? Como trabalhar no sentido de mudar estas concepções se, mesmo que o professor faça tais levantamentos, isto não garante o abandono de uma concepção e a incorporação de uma nova pelo aluno?

D’Amore (2007, p. 157), considera que,

para fins didáticos, seria muito útil conhecer o modelo mental (interno) que os estudantes têm dos vários conceitos matemáticos. Se isso fosse possível, o professor poderia ativar estratégias didáticas personalizadas adequadas e modificar assim os modelos não perfeitamente adequados ao conhecimento matemático, buscando que o estudante os adote. Mas alcançar o modelo mental que um indivíduo tem de um conceito é uma tarefa árdua, talvez até mesmo impossível.

Com base nestas afirmações e questionamentos, é possível considerar que o uso de diferentes representações não só é necessário como fundamental para a aquisição de um conhecimento, principalmente de um conhecimento matemático, porém, primeiramente o professor, ao se utilizar de diferentes representações ou de uma metodologia que parta das representações e concepções prévias dos alunos sobre um conhecimento ou conceito específico com o intuito de transformá-las num saber científico, precisa ter claro o que significam estas representações e definir quais são as mais apropriadas e qual a melhor forma de utilizá-las para promover tal aquisição por parte do aluno.

Para tanto, é importante entender as três aproximações que Duval (2004) estabelece sobre a noção de representação. Segundo o autor, esta noção se apresentou em três ocasiões distintas, sendo a primeira vez como representação mental no estudo de Piaget realizados em

1924-1926 na obra *A representação do mundo na infância*, relativo às crenças e explicações das crianças sobre os fenômenos naturais e físicos. Dam (2002), salienta que podemos considerar que as fantasias sobre a água, fogo, ar, etc., são extraídas das representações mentais.

A segunda ocasião mencionada por Duval (2004), de 1955-1960, se apresentou como representação interna ou computacional, estudada com as teorias que privilegiam o tratamento de informações. E a terceira, mais ou menos desde 1985, aparece como representação semiótica nos trabalhos sobre a aquisição dos conhecimentos matemáticos e sobre os consideráveis problemas que sua aprendizagem suscita.

Duval (2004) classifica as representações mentais em internas e conscientes, as representações internas ou computacionais em internas e não- conscientes e as representações semióticas em externas e conscientes, como apresenta a figura 9.

|                | INTERNA  | EXTERNA  |
|----------------|--|--|
| CONSCIENTE     | <p><b>Mental</b><br/>Função de objetivação</p>                                       | <p><b>Semiótica</b><br/>Função de objetivação<br/>Função de expressão<br/>Função de tratamento intencional</p> |
| NÃO-CONSCIENTE | <p><b>Computacional</b><br/>Função de tratamento automático ou quase instantâneo</p> |  |

Figura 9: Quadro dos tipos e funções de representações. (Duval, 2004, p.35)

Para melhor entender essas representações Duval (2004) começa explicando a oposição entre *consciente/não-consciente* e a oposição entre *externa/interna*. Ele menciona que a oposição *consciente/não-consciente* refere-se entre aquilo que está diante do sujeito e pode ser por ele observado, e o que à ele escapa e não pode ser observado.

Segundo o autor, as representações conscientes são aquelas que apresentam um caráter intencional, ou seja, que é anterior a reflexão e independente dela, e executam a função de objetivação, a qual “corresponde ao descobrimento pelo próprio sujeito daquilo que até então não suspeitava, ainda que outros houvessem explicado” (DUVAL, 2004, p. 33), e é o processo pelo qual o sujeito passa do não-consciente para a consciência.

Duval (2004) segue enfatizando que desde o ponto de vista cognitivo este caráter intencional das representações conscientes é essencial porque permite levar em conta o papel fundamental da significação na determinação dos objetos que o sujeito pode observar, pois, a

apreensão conceitual de um objeto se dá sempre por uma significação, ou seja, a significação é condição necessária para que o sujeito possa tomar consciência daquilo que observa (objetivação).

Já com relação a oposição *externa/interna*, Duval (2004) explica que “é a oposição entre o que de um indivíduo, de um organismo ou de um sistema é diretamente visível e observável e o que, ao contrário, não é” (DUVAL, 2004, p. 33-34). Assim, para o autor, as representações externas são produzidas por um sujeito ou sistema e só podem ser realizadas através da aplicação de um sistema semiótico, ou seja, não são sintomas como a expressão de emoções demonstradas no rosto, por exemplo, elas são por natureza, representações semióticas, enquanto que as representações internas são representações que um sujeito possui e que não são comunicados a outro por meio da produção de uma representação externa (semiótica). Então, conforme a figura 9, Duval (2004) afirma que as representações externas executam a função de comunicação e também funções cognitivas como, de objetivação e são essenciais para a função de tratamento.

Sobre essas atividades de tratamento das representações externas, o autor diz que estas estão ligadas à utilização de um sistema semiótico, e como um exemplo trivial, cita o cálculo numérico, o qual depende do sistema de escrita que se adote para os números, ou seja, não são os mesmos tratamentos utilizados para efetuar uma adição de números na escrita decimal e na escrita fracionária.

As representações mentais são então, internas e conscientes, e cumprem a função de objetivação. Segundo Duval (2004) as representações mentais são as que permitem ver um objeto sem necessitar de estímulos perceptíveis como, imagens, sons, etc., se igualando, de forma geral, com as imagens mentais, ou seja, é todo o conjunto de imagens e concepções que um indivíduo pode ter sobre um objeto, sobre uma situação ou sobre aquilo que lhe está associado. Porém, o autor adverte que as representações mentais cobrem um domínio maior que o das imagens, sendo preciso agrupar a elas não apenas conceitos, noções, ideias, como também crenças e fantasias, e os valores que um sujeito compartilha com seu meio, como um grupo ou com seus próprios desejos.

As representações computacionais são internas e não-conscientes, e possuem a função de tratamento automático ou quase-instantâneo, no qual, segundo Dam (2002), o indivíduo efetua tarefas sem pensar em todos os passos necessários para sua realização, tomando como exemplo, os algoritmos computacionais e os algoritmos das operações, os quais um aluno pode resolver vários sem entender seu significado, apenas resolve de forma

automática ou mecânica. Duval (2004) complementa que se trata de uma codificação da informação, ou seja, na “forma sob a qual uma informação pode ser descrita e levada em conta em um sistema de tratamento” (DUVAL, 2004, p. 26).

Por fim, as representações semióticas são externas e conscientes, tendo a função de objetivação, expressão e tratamento intencional, o qual, para Duval (2004), é um tratamento que dirige-se exclusivamente ao que o sujeito vê ou observa de um objeto de maneira quase instantânea, e só podem ser efetuados um depois do outro, aumentando o seu tempo de reação conforme aumenta o número de informações a se levar em conta. Ele segue afirmando que, estes tratamentos são fundamentais para as atividades cognitivas, mas sua capacidade é limitada e não extensiva em todos os sujeitos, independente do nível de conhecimento destes.

Assim, para o autor, as representações semióticas possibilitam ver um objeto através da percepção de estímulos (pontos, traços, caracteres, sons, etc.), evidenciando que existem uma grande variedade de representações semióticas como, figuras, esquemas, gráficos, expressões simbólicas, expressões lingüísticas, entre outras, e podem ser classificadas em representações analógicas, as quais são as imagens como, fotografias, caricaturas, esboços, gráficos cartesianos, esquemas, figuras geométricas, etc.; e em representações não-analógicas como, as línguas, enunciados, listas, fórmulas, tabelas, etc. Ele comenta ainda, que o interesse em se fazer estas distinções está em chamar a atenção para a diversidade e a heterogeneidade destes registros de representação.

Damm (2002), referindo-se a Duval (1995), ressalta que as representações semióticas têm um papel fundamental específico,

elas são relativas a um sistema particular de signos, linguagem natural, língua formal, escrita algébrica ou gráficos cartesianos, figuras, de um objeto matemático [...]. De onde a diversidade de representações para um mesmo objeto representado ou ainda a dualidade das representações semióticas: forma (o representante) e conteúdo (o representado) (DUVAL apud DAMM, 2002, p. 140).

Sobre os aspectos das representações semióticas: sua forma (o representante) e seu conteúdo (o representado), Damm (2002) afirma que “a forma muda segundo o sistema semiótico utilizado: existem vários registros de representação para o mesmo objeto, correspondendo a cada um deles um tipo diferente de tratamento”(DAMM, 2002, p. 141-142).

Neste contexto, percebe-se a importância da diversidade dos Registros de Representação Semiótica para as atividades cognitivas que requer a Matemática, para o seu ensino e aprendizagem, como também para o seu próprio desenvolvimento, pois é inegável

que todo o conhecimento descoberto e produzido referente a esta ciência, se deve, sobretudo, ao desenvolvimento dos sistemas semióticos e a capacidade cognitiva de se transitar entre eles.

Para ilustrar este ponto de vista, Duval (2004, p.15) menciona que “na Matemática, as representações semióticas não apenas são indispensáveis para fins de comunicação, como também são necessárias para o desenvolvimento da própria atividade Matemática.” Mais adiante, ele segue afirmando que “a noção de representação semiótica pressupõe a consideração de sistemas semióticos diferentes e uma operação cognitiva de conversão das representações de um sistema semiótico à outro” (DUVAL, 2004, p. 27), como por exemplo, representar graficamente uma curva através da expressão algébrica, passar do enunciado de uma relação a sua escrita literal.

As representações mentais e as representações semióticas, sob um olhar genético, de acordo com Duval (2004) analisando os estudos de Vigostky (1985), Piaget (1968a,b) e Denis(1989), não podem se oporem como domínios distintos, visto que o desenvolvimento das representações mentais ocorre com uma interiorização da representações semióticas, assim como as imagens mentais são uma interiorização da percepção. Diante disso, ele prescreve que as representações mentais nunca podem ser consideradas independentes das representações semióticas, pois “a pluralidade de sistemas semióticos permite uma diversificação das representações de um mesmo objeto, que aumenta as capacidades cognitivas dos sujeitos e, portanto, suas representações mentais.” (DUVAL, 2004, p.16).

Em acordo com o autor Viel e Dias (2006) referindo-se a Vigotsky (1962), que considera que o desenvolvimento das representações mentais está ligado à aquisição e interiorização de sistemas de representações semióticas iniciadas pela linguagem, afirmam que no processo de desenvolvimento, o indivíduo passa a utilizar signos internos, ou seja, substituem os objetos do mundo real por representações mentais.

Assim, com base neste pensamento da essencialidade das representações semióticas para as funções cognitivas do ser humano e da implicação recíproca das representações mentais e semióticas (Duval 2004) acentua novamente que não há *noesis* sem *semiosis*, já que afirma que, esta última defini as condições de possibilidade e exercício da primeira.

Entretanto, Duval (2004) chama a atenção para um problema da psicologia ligado às representações mentais e semióticas, em que “geralmente se reduz o emprego das representações semióticas à função de expressão e à subordina ao funcionamento das representações mentais” (DUVAL, 2004, p.36). Se assim fosse, isso implicaria, conforme

Duval (2004), numa correspondência ou quase equivalência entre estas representações, ou seja, “se admitiria que as representações semióticas seriam expressões fiéis das representações mentais” (LARKIN e SIMON apud DUVAL, 2004, p. 36).

Sobre esta visão da relação entre estas duas representações Duval (2004), declara ser ingênua e pouco fundamentada, sendo um problema muito mais complexo devido a três razões. A primeira ele aponta que está no fato de que é possível existir uma enorme diferença entre as representações mentais de um sujeito e as representações semióticas produzidas por este para expressar suas representações mentais, a segunda, está na diferença entre elas, que consiste no fato das representações semióticas apresentarem um grau de liberdade, necessário a todo o tratamento da informação, que as representações mentais não possuem, e a terceira está na existência da diversidade dos sistemas semióticos, as quais permitem diversas representações semióticas para um mesmo objeto.

Assim, conclui o autor, que “não pode haver correspondência direta entre estes dois tipos de representações, a não ser uma interação cuja complexidade ainda escapa dos métodos de investigação e das teorias disponíveis” (DUVAL, 2004, p. 37).

Já, sobre a relação das representações semióticas com as representações computacionais no âmbito do funcionamento cognitivo, Duval (2004) observa que, apesar de ambas possuírem a função de tratamento, elas não têm a mesma natureza, isto é, as representações computacionais são “internas a um sistema e independente de toda a visão do objeto, e as outras são representações conscientes, inseparáveis da visão de alguma coisa que toma *status* de objeto” (DUVAL, 2004, p. 40).

Logo, a diferença entre estas representações, segundo o autor, está nos tipos de tratamentos que cada uma executa: o tratamento automático ou quase-instantâneo que é função das representações computacionais e o tratamento intencional, que é função das representações semióticas, como já mencionados anteriormente, dado que é indispensável que estes se complementem para promover o funcionamento e desenvolvimento cognitivo de um indivíduo.



Toda atividade cognitiva humana se baseia na complementação destes dois tipos de tratamentos. Dada a não extensão da capacidade de tratamento intencional, a diferença dos resultados cognitivos entre os sujeitos depende da diversidade e da arquitetura dos tratamentos quase-instantâneos que eles dispõem. [...] A função destes tratamentos é prover a “percepção imediata” da consciência unidades informacionais mais e mais ricas, para que se possa aspirar a objetos mais complexos ou mais gerais. A aquisição de novos tratamentos quase-instantâneos aparece como condição de todo o progresso qualitativo na aprendizagem. Mas, esta aquisição passa necessariamente por uma fase de tratamentos intencionais. Isto é observado, por exemplo, para as aquisições numéricas elementares como a apreensão de todas as quantidades pequenas ou as operações aritméticas com os inteiros (Fischer, 1992, p.133-134, 139-142). As crianças passam progressivamente de uma atividade intencional (contagem, realização de um algoritmo) com representações semióticas (verbais ou outras) à apreensões imediatas que resultam nas representações computacionais. E isto não sucede de maneira regular e homogênea para todos os números e para as quatro operações (DUVAL, 2004, p. 41).

Diante deste contexto, compreende-se que qualquer atividade cognitiva do ser humano remete aos diferentes tipos de representações para que haja o desenvolvimento do seu pensamento e a aquisição de um conhecimento, por isso a necessidade de se perceber e entender estas diferentes representações diante do processo de ensino e aprendizagem de um objeto.

Relativo ao ensino e aprendizagem da Matemática, salienta-se a importância e necessidade da utilização da diversidade de representações semióticas para promover apreensão conceitual de um objeto matemático. Para tanto, é primordial que o professor tenha clareza deste objeto não o confundindo com suas possibilidades de Registros de Representações Semióticas, a fim de mediar que o aluno os mobilize e chegue também a esta consciência, tornando assim, este objeto e sua aprendizagem mais significativa para ele.

### 2.3 OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA E O ENSINO E APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

A teoria de Raymond Duval sobre Registros de Representações Semióticas - definida por ele como “produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação, os quais têm suas dificuldades próprias de significado e de funcionamento.” (Duval, 1993 apud DAMM, 2002, p.143) - tem se mostrado, de acordo com Machado (2003), um importante instrumento de pesquisas concernentes à aquisição de conhecimentos matemáticos e à organização de situações de aprendizagem desses conhecimentos.

Para Soares e Nehring (2006), a escola tem o desafio de preparar os alunos para o tempo de mudanças, para uma nova sociedade em que o mais importante não será apenas o

saber científico, mas saber dar significado ao conhecimento buscando alternativas para resolver problemas e saber se comunicar. Sendo assim, as autoras acreditam que o objetivo do ensino da Matemática deve transcender a formação de futuros matemáticos, e para tanto, defendem a teoria dos Registros de Representação Semiótica como uma pertinente maneira didático/metodológica que o professor pode fazer uso ao buscar a aquisição dos conceitos por parte dos alunos. Elas complementam ainda que,

a medida que a matemática passa a diversificar os registros de representação, sua aprendizagem específica contribui, fortemente, para o desenvolvimento das capacidades cognitivas globais dos sujeitos, possibilitando esses compreenderem e interpretarem a realidade na qual estão inseridos, serem cidadãos num tempo de mudanças intensas (SOARES e NEHRING, 2006, p.7).

De acordo com Duval (2004, p. 43), “a formação de uma representação semiótica é o recurso a um signo para atualizar a visão de um objeto ou substituir a visão desse objeto”, e D’Amore (2005), complementa, afirmando que o conhecimento é a intervenção e a utilização dos signos, assim, para ele, na aprendizagem da Matemática os alunos são introduzidos em mundo novo, conceitual e simbólico, sobretudo representativo.

Para Duval (2003, p. 13) “é suficiente observar a história do desenvolvimento da Matemática para ver que o desenvolvimento das representações semióticas foi uma condição essencial para a evolução do pensamento matemático.”

Porém, compreender e apreender conceitos matemáticos não tem sido tarefa fácil para a maioria dos alunos, pois estes, segundo Duval (2003), têm apresentado dificuldades muitas vezes insuperáveis na busca pelo saber matemático. Diante de um mundo globalizado e, ainda de acordo com o autor, com a recente exigência de uma maior formação Matemática inicial para todos os alunos, questões sobre como compreender essas dificuldades dos alunos, qual a sua natureza e onde elas se encontram, passaram a ter uma maior importância no objetivo de prepará-los para enfrentar um mundo cada vez mais informatizado e tecnológico e cada vez mais complexo como o que estamos vivendo.

Na busca por respostas a estas questões Duval (2003), diz que não se pode restringir ao campo matemático ou à sua história, é preciso uma abordagem cognitiva, já que o ensino da matemática, em formação inicial, objetiva não formar futuros matemáticos, nem ensinar aos alunos instrumentos que mais tarde lhes possam ser úteis, mas sim contribuir para o desenvolvimento geral de suas capacidades de raciocínio, de análise e de visualização.

Para Machado (2003, p. 8) “a maneira Matemática de raciocinar e de visualizar está

intrinsecamente ligada à utilização das representações semióticas [...]", e esta abordagem cognitiva, de acordo com Duval (2003, p. 12), "está em procurar inicialmente descrever o funcionamento cognitivo que possibilite a um aluno compreender, efetuar e controlar ele próprio a diversidade dos processos matemáticos que lhe são propostos em situação de ensino."

A atividade Matemática para Duval (2003, p. 24) "ressalta fenômenos complexos, pois é necessário ao mesmo tempo levar em conta as exigências científicas próprias dos conteúdos matemáticos e o funcionamento cognitivo do pensamento humano." Assim, ele afirma que a atividade Matemática deve ser estudada no que ela tem de específico, ou seja, no que ela tem de diferente do trabalho de outras áreas da ciência, como no trabalho de um botânico ou de um geólogo no terreno, ou de um físico no seu laboratório. Esta diferença, segundo o autor, está na atividade cognitiva que requer a Matemática em relação a que requerem outras áreas da ciência, a qual não se baseia em conceitos, mas na importância e variedade das representações semióticas utilizadas em Matemática.

Os objetos matemáticos, segundo Duval (2003), a começar pelos números, "não são objetos diretamente perceptíveis ou observáveis com a ajuda de instrumentos. O acesso aos números, está ligado à utilização de um sistema de representação que os permite designar." Em palavras semelhantes, Damm (2002), salienta que a matemática trabalha com objetos abstratos, ou seja, não são objetos diretamente perceptíveis ou observáveis, necessitando para sua apreensão o uso de representações através de símbolos, signos, códigos, tabelas, gráficos, algoritmos, desenhos, pois permitem a comunicação entre os sujeitos e as atividades cognitivas do pensamento matemático.

No entanto, ela salienta que, para a compreensão da Matemática é fundamental que o aluno faça a distinção entre o objeto matemático e sua representação. Neste sentido, em relação à Geometria Analítica, conteúdo ao qual se refere esta pesquisa, e o uso dos Registros de Representação Semiótica, Silva (2006, p.24) comenta que:

Na aprendizagem da matemática verificamos a dificuldade de nossos alunos para compreender a diferença entre objeto matemático e sua representação. É muito importante para a aquisição do conhecimento matemático que esta distinção seja estabelecida, e neste sentido, a teoria das representações semióticas auxilia de maneira decisiva, em particular, no que se refere às diversas representações de pontos, retas e curvas no plano.

D'Amore (2005) destaca o paradoxo de Duval (1993), que consiste na impossibilidade do acesso direto aos objetos matemáticos, a não ser por meio de

representação semiótica, o que torna inevitável a confusão entre estes objetos e suas representações semióticas, e apresenta sua interpretação deste paradoxo através do seguinte esquema como mostra, a seguir, a figura 10.

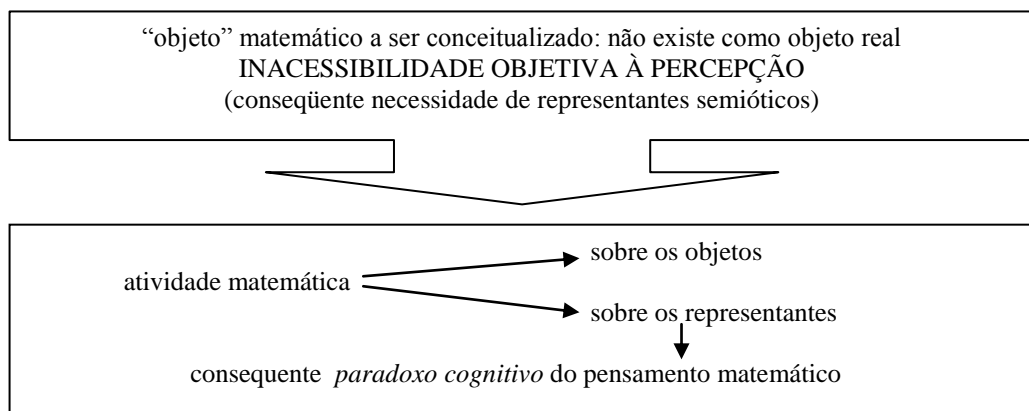


Figura 10: Esquema do paradoxo cognitivo do pensamento matemático (D’AMORE, 2005, p. 51)

D’Amore (2005) chama a atenção para o que acontece com a aprendizagem nesta fase, na qual o professor antes do aluno deve saber distinguir o objeto da sua representação para entender que neste momento, o aluno estará apenas aprendendo a utilizar signos e não aprendendo os conceitos ou os objetos que eles significam.

Nesta fase “paradoxal” da aprendizagem é preciso prestar muita atenção; de um lado, o estudante não sabe que está aprendendo signos que estão no lugar de conceitos e que deveria estar aprendendo conceitos; de outro lado, se o professor nunca refletiu sobre o assunto, acreditará que o estudante está aprendendo conceitos, enquanto ele está, na realidade “aprendendo” apenas a utilizar signos. (D’AMORE, 2005, p. 52).

Sobre a aquisição conceitual de um objeto matemático D’Amore (2005) referindo-se a Duval (1993), afirma que esta se baseia em duas características fortes. A primeira está no uso de diversos Registros de Representação Semiótica ser típico do pensamento humano, e a segunda, está no fato da criação e o desenvolvimento de novos sistemas semióticos serem marcos históricos de progresso do conhecimento.

Para D’Amore (2005), estas características revelam a estreita interdependência entre *noesis* (aquisição conceitual de um objeto) e *semiosis* (representação realizada por meio de signos) e como se passa de uma para outra, assim, para o autor “não apenas não existe *noesis* sem *semiosis*, mas a *semiosis* é assumida como sendo uma característica necessária para garantir o primeiro passo na direção da *noesis*” (D’AMORE, 2005, p.60).

Especificamente na Matemática, Duval (2004), afirma que ela permite uma grande variedade de representações: sistemas de numeração, figuras geométricas, escritas algébricas e formais, representações gráficas e língua natural. Assim, conforme Duval (2003, p.14) “a originalidade da atividade Matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo momento de registro de representação.” Em palavras semelhantes Damm (2002), menciona que é somente através da coordenação de vários registros de representação, pelo indivíduo que apreende, que será possível a apreensão conceitual dos objetos matemáticos.

Entretanto, D’Amore (2005) pontua que, quando Duval refere-se a Registro de Representação Semiótica ele faz referência a um sistema de signos que permite cumprir as funções de comunicação, tratamento e objetivação, como por exemplo, a numeração binária, ou a decimal, porém não faz referência às notações convencionais que não constituem um sistema, como por exemplo, as letras ou os símbolos utilizados para indicar as operações algébricas.

Segundo Duval (2003), existem quatro tipos muito diferentes de Registros de Representações Semióticas, como apresentadas na figura 11.

|  | Representação Discursiva  | Representação não-discursiva   |
|--|---|--|
| <b>REGISTROS MULTIFUNCIONAIS:</b> Os tratamentos não são algoritmizáveis.      | Língua Natural<br>Associações verbais (conceituais).<br>Forma de raciocinar:<br>- argumentação a partir de observações, de crenças...;<br>- dedução válida a partir de definições ou uso de teoremas. | Figuras geométricas planas ou em perspectiva. (configurações em dimensão 0,1,2 ou 3).<br>- apreensão operatória e não somente perspectiva;<br>- construção com instrumentos. |
| <b>REGISTROS MONOFUNCIONAIS:</b> Os tratamentos são principalmente algoritmos. | Sistemas de escritas:<br>- numéricas (binárias, decimal, fracionária...);<br>- algébricas;<br>- simbólicas (línguas formais).<br>Cálculo  | Gráficos cartesianos.<br>- mudanças de sistema de coordenadas;<br>- Interpolação, extrapolação.  |

Figura 11: Quadro da classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático Duval (2003, p.14)

Assim, de acordo com Duval (2003), percebe-se que os registros monofuncionais são os que possuem algoritmos próprios em sua estrutura, e os multifuncionais são aqueles em que os tratamentos não são algoritmizáveis. Os registros multifuncionais têm como representação discursiva a língua natural, ou seja, se manifestam por meio de associações

verbais entre conceitos, pelas as formas de raciocínio argumentativo os quais se baseiam em observações, crenças, etc., e dedutivo que se baseiam em definições, propriedades, teoremas, etc. Eles se apresentam, também, na forma não-discursivas como as figuras geométricas planas e espaciais. Como registros monofuncionais na representação discursiva têm-se os sistemas de escritas numéricas, algébricas e simbólicas, e o cálculo, na representação não-discursiva encontram-se os gráficos cartesianos com as mudanças de sistemas de coordenadas, interpolação, extrapolação.

Cabe aqui ressaltar que, segundo D'Amore (2005), nem todos os autores reconhecem a língua natural como um registro semiótico por se tratar de um registro mais complexo do que outros mais usados em Matemática como, o aritmético, algébrico, figural, etc. Para o autor o registro língua natural permite funcionamentos discursivos muito heterogêneos. Como exemplo disso, Duval (2004) diz que há uma diversidade heterogênea de empregos possíveis para a língua natural, o emprego comum ou social, emprego especializado em diferentes domínios do conhecimento, emprego literário. Assim, conforme D'Amore (2005), o registro língua natural permite um funcionamento espontâneo que é relativo ao das conversações, narrativo, das discussões e um funcionamento especializado que se encontra no raciocínio dedutivo em Matemática, por exemplo.

Duval (2004) estabelece três atividades cognitivas inerentes a *semiosis*, ou seja, para que um sistema semiótico seja um registro de representação é preciso: a formação de representações em um registro semiótico particular, e as duas transformações de representações semióticas, uma denominada tratamento, e a outra denominada conversão, as quais, correspondem a atividades cognitivas diferentes.

D'Amore (2005, p. 62), reforça a ideia de Duval, afirmando que “a construção de conceitos matemáticos depende muito da capacidade de utilizar vários Registros de Representação Semiótica dos referidos conceitos: *representando-os* em um dado registro, *tratando* tais representações no interior de um mesmo registro, e fazendo a *conversão* de um registro para outro.” Assim, para o autor, estes três elementos estão profundamente ligados a aquisição conceitual de um objeto matemático, isto é, a *noesis*.

Estas três atividades cognitivas estão reagrupadas no que se chamam tarefas de produção e tarefas de compreensão. Para Duval (2004), a produção de uma resposta, seja um texto ou esquema, mobilizam simultaneamente a formação de representações semióticas e seu tratamento, enquanto a compreensão de algo, como um texto ou imagem, mobilizam as atividades de conversão e de formação ou ainda as três atividades cognitivas. Ele menciona

também, que há regras de funcionamento próprias a cada uma destas atividades, as quais dependem dos sistemas semióticos e são independentes das restrições que a comunicação pode impor a produção ou a compreensão das representações semióticas.

A formação de uma representação de um registro está atrelada ao que Duval (2004), chama de regras de conformidade, definidas por ele como sendo “aquelas que definem um sistema de representação e, em consequência, os tipos de unidades constituídas de todas as representações possíveis em um registro” (DUVAL, 2004, p. 43). Assim, ele segue afirmando que estas regras permitem o reconhecimento das representações como representações em um registro determinado e que a formação das representações semióticas implica, então, “na seleção de um certo número de caracteres de um conteúdo percebido, imaginado ou já representado em função das possibilidades de representação próprias ao registro determinado” (DUVAL, 2004, p. 44).

Para melhor entender a ideia apresentada por Duval, pode-se comparar a formação de uma representação, segundo Damm (2002), à realização de uma tarefa de descrição, ou seja, os Registros de Representação Semiótica precisam ser identificáveis, seja por meio de um texto em língua natural, de uma figura geométrica, de um gráfico, etc., respeitando regras inerentes a cada sistema de registros.

Esta representação identificável pode ser estabelecida através de um enunciado compreensível em uma determinada língua natural, na composição de um texto, no desenho de uma figura geométrica, na escrita de uma fórmula, de um gráfico...[...] Esta formação deve respeitar regras: gramaticais para a composição de um texto, restrições de construções para as figuras, para a construção, por exemplo do algoritmo da multiplicação, o sistema posicional e o sistema de numeração decimal [...] (DAMM, 2002, p.144).

Desta forma, sintetiza-se, conforme Damm (2002) em consonância com Duval, que para ocorrer uma representação identificável, é necessário selecionar características e dados do conteúdo (objeto) a ser representado, e esta seleção depende de regras que vão assegurar o reconhecimento das representações e a possibilidade de sua utilização para tratamento, isto é, das regras de conformidade, as quais, segundo a autora, já estão estabelecidas na sociedade, tendo um sujeito, apenas que usá-las para reconhecer as representações. Ela complementa que, isto pode ser exemplificado “com o sistema de numeração hindu-arábico, em outras palavras, as escrita de numeração decimal, que possui duas regras de conformidade básicas que são o sistema posicional e a base dez. Estas regras são fundamentais para a construção das operações fundamentais” (DAMM, 2002, p.145).

Com relação ao tratamento, Duval (2004) estabelece que é a transformação de uma representação inicial em outra representação terminal, respectiva a uma questão, a um problema, ou seja, é a transformação de uma representação dentro de um mesmo registro. Por exemplo, “efetuar um cálculo ficando estritamente no mesmo sistema de escrita ou de representação dos números; resolver uma equação ou um sistema de equações; completar uma figura segundo critérios de conexidade e de simetria”(DUVAL, 2003, p. 16).

A uma transformação interna do registro em língua natural, isto é, reformular um enunciado dado, em outro, Duval (2004) denomina de *paráfrasis*, enquanto que uma transformação interna a um registro como, das figuras, ele chama de *anamórfosis*, embora neste caso, não haja conservação da situação representada. Damm (2002), complementa que, a reconfiguração é um tipo particular de tratamento para as figuras, pois é umas das várias operações que dá a este registro seu papel heurístico. A reconfiguração é, portanto, o tratamento que permite reorganizar uma ou várias sub-figuras diferentes de uma figura inicial.

A operação de reconfiguração consiste, basicamente, na complementaridade de formas, ou seja, das partes obtidas por um fracionamento que podem ser reagrupadas em sub-figuras incluídas na figura inicial. Portanto, o fracionamento de uma figura, ou o exame destas a partir de suas partes elementares, permite a aplicação da operação de reconfiguração (MORETTI e FLORES, 2005, p.8).

De acordo com Damm (2002), existem regras de tratamento próprias a cada registro variando sua natureza e número de um registro a outro, como por exemplo, quando se trabalha com as quatro operações com os números naturais no registro algarítmico, o tratamento utilizado requer a compreensão de regras do sistema posicional e da base dez, sem esta compreensão, a utilização deste tratamento não é significativo para a aprendizagem.

A autora preceitua ainda, que os tratamentos estão ligados a forma, ou seja, ao sistema semiótico utilizado e não ao conteúdo do objeto matemático, por exemplo, na adição de dois números racionais ( $0,25 + 0,25 = 0,5$ ), se utilizada a representação decimal destes, a operação vai envolver um tratamento decimal, e se utilizada a representação fracionária dos números ( $1/4 + 1/4 = 1/2$ ), a adição vai envolver um tratamento ligado a forma fracionária, porém, estas duas representações diferentes (decimal e fracionária), mesmo envolvendo tratamentos diferentes, referem-se ao mesmo objeto matemático.

O que acontece na aprendizagem da Matemática, é que os registros de representação utilizados possuem graus de dificuldade diferentes, e este é um dos problemas que segundo Damm (2002) o professor precisa enfrentar no momento de ensinar, sem esquecer que



trabalha com o mesmo objeto matemático, “porém o registro de representação utilizado exige tratamento muito diferente, que precisa ser entendido, construído e estabelecidas relações para o seu uso” ( DAMM, 2002, p. 146).

Já a conversão para Duval (2004), é a transformação externa relativa ao registro da representação de partida, isto é, consiste em mudar de registro conservando os mesmo objetos matemáticos, como por exemplo, passar da escrita algébrica de uma equação à sua representação gráfica ou passar de uma representação lingüística em uma representação figural.

Damm (2002), considera que a conversão

[...] é um passo fundamental no trabalho com representações semióticas, pois a transformação de um registro em outro, conservando a totalidade ou uma parte do objeto matemático que está sendo representado, não pode ser confundida com o tratamento. O tratamento estabelece internamente ao registro, já a conversão se dá entre os registros, ou seja, é exterior ao registro de partida (DAMM, 2002, p.147).

Assim, no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, deve-se levar em conta não só a formação de representações e os tratamentos, como também, a conversão entre os diferentes registros de representação de um mesmo objeto matemático, e isto, de acordo com Damm (2002), estabelece um problema no ensino desta disciplina, pois somente é levado em consideração as duas primeiras atividades cognitiva, e ainda, segundo Duval (2004), principalmente para o registro em língua natural, para os registros numéricos e para os registro de escrita simbólica, enquanto que o garante a apreensão do objeto matemático e a conceitualização, é a coordenação, pelo aluno, entre os vários registros de representação.

Para ilustrar esta idéia, Nehring (1996), menciona que,

não adianta o sujeito resolver uma operação usando material concreto ou através de desenho se não conseguir enxergar/coordenar estes procedimentos no tratamento aritmético (algoritmo da operação), no problema envolvendo esta operação ou mesmo em outro registro de representação qualquer (NEHRING apud DAMM, 2002, p. 147).

Neste sentido, entende-se que para o sucesso do ensino da Matemática não basta o aluno se apropriar de vários registros de representação, além disso, ele precisa coordená-los estabelecendo a diferença entre o registro e seu objeto, para então apreender este objeto matemático envolvido.

Duval (2003, p. 16), coloca que do ponto de vista matemático,

a conversão intervém apenas para escolher o registro no qual os tratamentos a serem efetuados são mais econômicos, mais potentes, ou para obter um segundo registro que serve de suporte ou de guia aos tratamentos que se efetuam em um outro registro. Em outros termos, a conversão não tem nenhum papel intrínseco nos processos matemáticos de justificação ou de prova, pois eles se fazem baseados num tratamento efetuado em um registro determinado, necessariamente discursivo. É por isso que a conversão não chama a atenção como se tratasse somente de uma atividade lateral, evidente e prévia à “verdadeira” atividade matemática.

Porém, do ponto de vista cognitivo, o autor considera que a atividade de conversão é a atividade de transformação representacional fundamental, pois é esta que conduz os sujeitos à compreensão. Assim, percebe-se que para o ensino e aprendizagem da Matemática, Duval atribui maior relevância para a atividade de conversão do que de tratamento, pois, a compreensão nesta área requer eminentemente a coordenação entre os diversos Registros de Representação Semiótica. A figura 12 apresenta, de acordo com Duval (2003) as diferentes características das atividades cognitivas de tratamento e conversão.

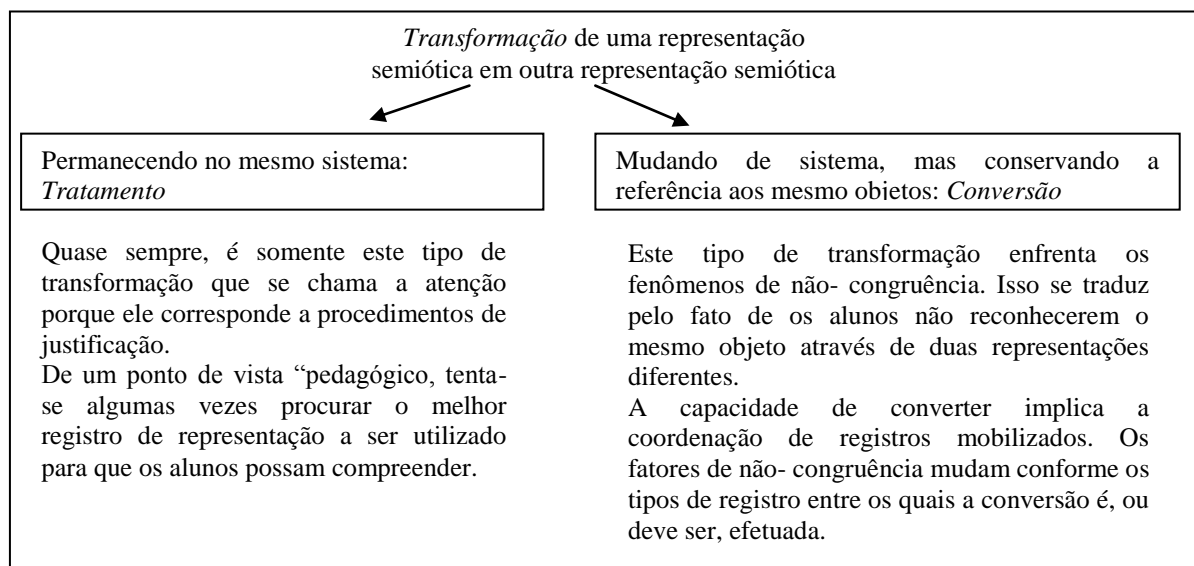


Figura 12: A distinção decisiva entre os dois tipos de transformação de representações semióticas  
DUVAL (2003, p. 15)

D’Amore (2005), apresenta três motivos distintos ao fato de Duval atribuir à conversão um papel central em relação às outras funções, particularmente em relação ao tratamento, que segundo o autor, é considerado decisivo do ponto de vista matemático para outros autores. São eles:

(1) A conversão esbarra em fenômenos de não- congruência que, de maneira alguma são conceituais (enquanto relacionados ao próprio sentido da conversão). Esses fenômenos de não- congruência constituem o obstáculo mais estável que pode ser observado na aprendizagem da Matemática, em todos os níveis e em todos os domínios.

(2) A conversão permite definir variáveis cognitivas independentes, o que torna construir observações e experimentações relativamente precisas e delicadas.[...]

(3) A conversão, em casos de não- congruência, pressupõe uma coordenação dos dois registros de representação mobilizados, coordenação essa que não é dada de início e que não é construída de modo espontâneo, baseando-se apenas no fato que sejam realizadas atividades matemáticas didaticamente interessantes. Aquilo que se denomina “conceitualização” começa somente quando se coloca em ação, mesmo que apenas num esboço, a coordenação de dois distintos registros de representação. (D’AMORE, p. 61).

Todavia, Duval (2004) esclarece que a conversão entre as representações semióticas constitui uma atividade cognitiva menos espontânea e mais difícil de adquirir para a maioria dos alunos. Para o autor, a conversão requer que se perceba a distinção entre o que Frege chamava de sentido e referência dos símbolos ou dos signos, ou entre o conteúdo de uma representação e o que esta representa, pois sem esta percepção a atividade de conversão se torna incompreensível ou impossível.

Duval (2003) explica que esta distinção, que raramente é observada, é essencial para o progresso dos conhecimentos. A dificuldade em fazê-la se deve ao fato que existem apenas representações semióticas como meio de acesso aos objetos matemáticos, assim o conteúdo de uma representação depende mais do registro de representação do que do objeto representado. O autor salienta que, passar de um registro de representação a outro não implica em apenas mudar o modo de tratamento, mas também em explicar as propriedades ou os aspectos diferentes de um mesmo objeto, logo, duas representações de um mesmo objeto em dois registros diferentes não tem de maneira alguma o mesmo conteúdo.

Para compreender esta importante distinção entre sentido e referência, em matemática, Flores (2006), apresenta o seguinte exemplo fornecido por Duval (1988):

[...]  $4/2$ ,  $(1+1)$ , são formas escritas que designam um mesmo número, expressões que fazem referência a um mesmo objeto, e que não possuem a mesma significação uma vez que não são reveladoras do mesmo domínio de descrição ou do mesmo ponto de vista: a primeira exprime o número em função de propriedade de divisibilidade e razão, a segunda em função da recorrência à unidade [...]. Simples mudanças na escrita permitem exibir propriedades diferentes do mesmo objeto, mas mantendo a mesma referência (DUVAL apud FLORES, 2006, p. 17).

Ainda, de acordo com Duval (2003), a compreensão em Matemática depende da disposição de ao menos dois tipos de registros diferentes, pois esta é a única forma para não

confundir o conteúdo de uma representação com o objeto representado, fato que segundo o autor, caracteriza um dos problemas da aprendizagem Matemática relativos aos fracassos ou os bloqueios dos alunos, nos diferentes níveis de ensino, pois os alunos apresentam dificuldades em converter uma representação em outra do mesmo objeto ou quando a mobilização simultânea de dois registros é requerida.

Outra característica da conversão enfatizada por Duval (2003) é que esta, quaisquer que sejam os registros considerados, é irreduzível a um tratamento. Ele afirma que normalmente se considera uma tarefa simples converter a representação de um objeto de um registro a outro. “ É comum descrever a conversão como uma associação preestabelecida entre nomes e figuras (como por exemplo, em geometria), ou reduzi-la a uma codificação” (DUVAL, 2003, p.17). Segundo essa ideia, o autor observa que a conversão seria uma das formas mais simples de tratamento, assim,

passar de uma equação à sua representação gráfica constituiria uma codificação em que seria suficiente aplicar a regra segundo a qual um ponto está associado a um par de números sobre um plano quadriculado por dois eixos agrupados. Ou, ainda, passar de um expressão em português – como “o conjunto dos pontos cuja ordenada é superior à abscissa” – a escrita simbólica – no caso, “  $x > y$  ”- seria igualmente uma codificação, como toda a escrita literal de relações entre números (DUVAL, 2003, p. 17).

No entanto, o autor menciona que esta visão é enganosa no que diz respeito a aprendizagem, e do ponto de vista teórico, pois esta regra possibilita apenas uma leitura pontual das representações gráficas e não permite uma apreensão global e qualitativa, a qual, é necessária para extrapolar, interpolar, ou para utilizar gráficos para fins de controle, ou de exploração, ligados aos tratamentos algébricos.

Em resumo, Duval (2003) pontua que,

a conversão entre gráficos e equações supõe que se consiga levar em conta, de um lado, as variáveis visuais próprias dos gráficos (inclinação, intersecção com os eixos, etc.) e, de outro, os valores escalares das equações (coeficientes positivos ou negativos, maior, menor ou igual 1, etc.) (DUVAL, 2003, p. 17).

Para ilustrar a conversão entre registros gráficos e algébricos Duval (2003) apresenta um esquema, conforme figura 13, da organização semiótica e do funcionamento da representações gráficas.

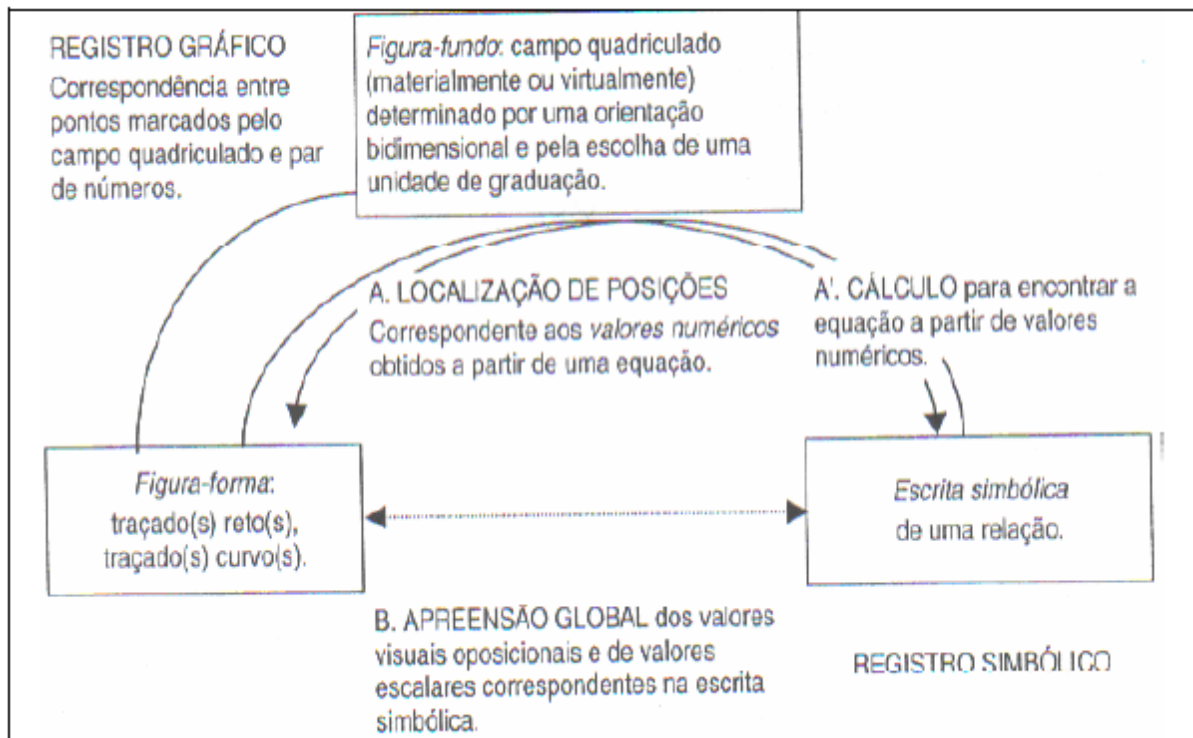


Figura 13: Esquema de organização semiótica e do funcionamento das representações gráficas (DUVAL, 2003,p.18)

Esta organização, segundo Duval (2003), permite três tipos de tratamento, ou seja, operações internas aos gráficos, e dois tipos de conversão com o registro simbólico. As ligações A e A' permitem apenas uma leitura pontual dos gráficos e somente a coordenação B permite uma apreensão global qualitativa, sendo que esta coordenação, segundo o autor, para a maioria dos alunos não é jamais efetuada, mesmo ao fim do Ensino Médio.

Um exemplo de uma conversão do registro gráfico para o simbólico, de acordo com o esquema acima, pode-se citar uma atividade em que dados dois pontos A e B marcados em um campo quadriculado do plano cartesiano, escreve-se as coordenadas dos pontos nos seus respectivos pares de números (“Registro Gráfico”) e traça-se uma reta, este então é o registro de partida. A partir dos valores numéricos das coordenadas dos dois pontos realiza-se cálculos (“A’. Cálculo”) para encontrar a equação da reta ( $y = x + 3$ , por exemplo), assim o registro de chegada é uma representação da reta no registro simbólico, ou seja obteve-se uma conversão do registro gráfico para o registro simbólico.

Agora, para a conversão do registro simbólico para o gráfico toma-se como registro de partida a equação  $y = x + 3$  (“Registro Simbólico”), realizando um tratamento no interior deste registro, isto é, atribuindo valores para a variável “x” e efetuando a soma encontra-se valores para a variável “y”, e por meio da (“A. Localização de Posições”), ou seja, da

correspondência aos valores numéricos obtidos a partir da equação no plano cartesiano traça-se a reta e obtêm-se o registro de chegada (“Registro Gráfico”), realizando assim, uma conversão do registro simbólico para o gráfico.

Desta forma, segundo o esquema de Duval (2003), conforme figura 13, chega-se a uma (“B. Apreensão Global”) dos valores posicionais (gráfico da reta) e de valores escalares (parâmetros “a” e “b” da equação reduzida  $y = ax + b$ ) correspondentes a equação  $y = x + 3$ .

Esta apreensão global mencionada por Duval corresponde, conforme Silva (2006), a uma coordenação de ambas as conversões entre os registros gráfico e simbólico.

De acordo com Duval (apud Moretti, 2003), as representações gráficas possuem três tipos distintos de procedimentos: 1) o procedimento por pontos, 2) o procedimento de extensão de um traçado efetuado, 3) o procedimento de interpretação global das propriedades figurais. Em relação aos dois primeiros procedimentos Moretti (2003, p.151) afirma:

O procedimento 1 é o que mais aparece nos livros didáticos: pontos obtidos por substituição na expressão da função são localizados em um sistema de eixos graduados para que em seguida a curva possa ser traçada por meio da junção desses pontos. Nesse modo, não há ligação entre o gráfico e a expressão algébrica da função correspondente. Diversos problemas podem surgir dessa forma de proceder, pelo fato de que se há congruência semântica entre um par ordenado e sua representação cartesiana, o mesmo não se pode dizer de um conjunto de pontos no plano cartesiano e uma regra matemática a ele equivalente.

Contrário ao procedimento 1, no procedimento 3 o conjunto traçado/eixo, como comenta Moretti (2003, p. 151) “forma uma imagem que representa um objeto descrito por uma expressão algébrica. Esse modo permite que se identifiquem as modificações possíveis conjuntamente na imagem e na expressão algébrica.”

Assim, Duval (apud Moretti 2003, p. 151) diz que “neste tipo de tratamento não estamos em presença da associação um ponto - um par de números, mas na associação variável visual da representação – unidade signitiva da escrita algébrica.”

Segundo Silva (2006), em um estudo relacionado às variáveis visuais próprias dos gráficos, Duval (1988) diz que,

O custo muito desigual das passagens entre escrita simbólica e representação gráfica aparece aqui precisamente. Para ir da escrita simbólica a representação gráfica, é suficiente uma única aplicação ponto a ponto: dão-se valores particulares a  $x$ , sem ter a preocupação das suas propriedades, por encontrar pares de números, ou seja, pontos. Mas para ir da representação gráfica à escrita algébrica, aqui não deixa de ser possível: é necessário indentificar cada um dos valores das variáveis visuais e integrar o todo. Em outros termos, a passagem da representação gráfica à escrita algébrica aumenta uma interpretação global. Ao contrario da aplicação ponto a ponto, ou mesmo o da extensão representativa, a aplicação de interpretação exige que centre a atenção num conjunto de propriedades e não sobre valores específicos tomados um a um (DUVAL apud SILVA, 2006, p. 33).

Diante destas afirmações, percebe-se que Duval acredita que, para uma apreensão global das propriedades inerentes as representações gráfica e algébrica de uma curva, não basta que se trabalhe a conversão em único sentido - e isto também é fato em conversões realizadas com quaisquer dois de registros de representação de um objeto matemático - mas é necessário inverter o sentido da conversão, pois ao fazê-lo permite-se ao aluno a possibilidade de analisar propriedades em que na conversão em apenas um sentido não são valorizadas ou perceptíveis.

Neste contexto, Duval (2003) estabelece dois tipos de fenômenos característicos das conversões de representações: as variações de congruência e não-congruência, e a heterogeneidade dos dois sentidos de conversão. Segundo o autor, para analisar uma atividade de conversão, basta comparar a representação no registro de partida com a conversão no registro de chegada, porém duas situações podem ocorrer, ou a representação terminal transparece na representação de saída e a conversão se aproxima de uma situação de simples codificação e diz-se que há congruência, ou então, ela não transparece absolutamente e se dirá que ocorre a não-congruência, mas existem ainda muitos fatores que determinam o caráter congruente ou não de uma conversão, o que remete a determinar situações intermediárias, como no exemplo da conversão entre o registro gráfico e algébrico apresentado da figura 13.

No caso de uma conversão congruente, Duval (2004, p. 50) apresenta como exemplo:

Tomemos por exemplo a seguinte expressão e sua conversão em escrita algébrica “o conjunto de pontos cuja ordenada é superior à abscissa”  $y > x$ . Se prevê que para efetuar a conversão é suficiente uma correspondência término a término entre as unidades significantes respectivas. Neste caso, a conversão inversa permite voltar para encontrar a expressão inicial do registro de partida.

Já o caso de não-congruência, quando o registro de chegada não transparece no registro de partida, Duval (2004), afirma que não só aumento o tempo de tratamento, como também a conversão pode resultar impossível de efetuar, ou inclusive de compreender, sem

que haja um conhecimento prévio específico da formação e tratamento da representação, próprias a cada registro envolvido. Para este caso Duval (2004, p. 50) apresenta o seguinte exemplo:

Seja agora a expressão: “o conjunto de pontos que tem uma abscissa positiva...”  $x > 0$ . Na escrita algébrica não há uma unidade significativa que corresponda a “positivo”, então, para suprir esta carência, é necessário recorrer a paráfrasis “ $> 0$ ”, que é a combinação de duas unidades significativas. A distância que se deve sobrepassar para efetuar a conversão é mais ampla na seguinte expressão: “o conjunto de pontos cuja abscissa e ordenada tem o mesmo sinal”  $x.y > 0$ . Aqui não há correspondência término a término entre as unidades significativas respectivas das duas expressões: é necessário uma reorganização da expressão dada no registro de partida para obter a expressão correspondente no registro de chegada.

O outro fenômeno característico da conversão de representações é, o qual já comentou-se, o sentido da conversão. Para Duval (2003), nem sempre a conversão se efetua quando se invertem o registro de partida e chegada, ou seja, um aluno pode realizar a conversão entre dois registros em um sentido, porém se tomado o registro de chegada, o aluno pode não voltar ao registro de partida, não efetuando assim, a conversão no sentido inverso. O autor destaca que no ensino, normalmente, um sentido da conversão é trabalhado, acreditando-se que o treinamento efetuado num sentido automaticamente estaria treinando a conversão no outro sentido, e os exemplos de conversão propostos aos alunos são instintivamente escolhidos nos casos de congruência, os quais não são os mais frequentes.

Assim, percebe-se a importância do uso e coordenação de diversos registros de representação para a compreensão em Matemática. No entanto, Damm (2002), questiona qual a necessidade da diversidade de registros de representação para o funcionamento do pensamento humano, e como resposta elucida três posições de Duval sobre o assunto:

1) A economia de tratamento: de acordo com Damm (2002), a existência de vários registros permite a troca de registros, e essa troca objetiva efetuar formas mais econômicas de tratamento e mais eficiente. Como exemplo, a autora ilustra que para efetuar a multiplicação  $32 \times 12$  pode-se adicionar  $32 + 32 \dots$  dozes vezes, ou multiplicar  $32 \times 12 = 4 + 60 + 20 + 300 = 384$ , ou ainda, utilizar o algoritmo da multiplicação. Assim, entende-se que são registros distintos com formas de tratamento diferentes, em que um é mais econômico que outro, porém com graus de dificuldades diferentes. Damm (2002, p.149), complementa que “a economia em tratamento está muito vinculada à aproximação com a língua natural e principalmente a formas mais simples e econômicas aos procedimentos adotados.”



2) A complementaridade de registros: sobre este ponto Damm (2002), considera que a natureza do registro semiótico escolhido para representar um contexto (conceito, objeto, situação) impõe elementos significativos ou informações do conteúdo representado. Por exemplo, “uma linguagem não oferece as mesmas possibilidades de representações que uma figura ou diagrama, ou ainda, a exigência de uma representação intermediária para a compreensão dos problemas, na passagem de um enunciado ao tratamento matemático” (DAMM, 2002, p.149). É esta complementaridade entre os registros escolhidos para representar um objeto que, segundo a autora, exige do professor o trabalho com várias representações de um mesmo objeto, como por exemplo, os gráficos, as tabelas, equações são registros parciais de um mesmo objeto (reta), e faz-se necessário perceber a especificidade de cada um e reforçá-las para favorecer a compreensão do objeto.

3) A coordenação de registros de representação: é a condição fundamental, de acordo com Duval (2004) para a compreensão dos objetos matemáticos, isto é, a articulação simultânea entre dois ou mais registros de representações diferentes é o que permite a conceitualização e a apreensão global de conhecimentos em Matemática. No entanto, o autor observa que essa coordenação não é espontânea e precisa que o professor a estimule para que a compreensão não fique limitada a um único registro de representação.

Desta forma, entende-se que a aquisição de um objeto matemático necessita primordialmente desta variedade de registros e da capacidade cognitiva de coordená-los. Duval (2004), complementa que “uma aprendizagem especificamente centrada na troca e na coordenação do diferentes registros de representação, produz efeitos espetaculares sobre as tarefas de produção e compreensão” (DUVAL, 2004, p. 49), do contrário, a ausência de coordenação entre os diferentes registros representa um obstáculo para a aprendizagem conceitual.

O autor acentua, também, que organizar situações de aprendizagem centradas na coordenação de registros, requer uma identificação prévia das variações cognitivamente pertinentes de uma representação em um registro, de maneira que possa ser realizada pelos alunos uma exploração segundo o método que consiste em fazer variar somente um fator de cada vez, deixando os outros sem troca, em uma representação. Ele recomenda que tais situações sejam propostas desde os primeiros anos do Ensino Médio.

Este método, ao qual se refere Duval (2004), consiste em utilizar a conversão como instrumento de análise de processos de aprendizagem concernentes à mobilização de vários Registros de Representação Semiótica para colocar em evidência as variáveis cognitivas

próprias do funcionamento de cada registro e explorar as variações de congruência e não-congruência entre dois registros nas múltiplas representações dos objetos matemáticos. Em efeito, a utilização deste método, conforme Duval (2003) deve ser feita sob duas condições:

- dar-se a representação mais elementar possível,  $R_1$ , de um objeto em um registro de saída A e sua representação convertida  $R'_1$  em um registro de chegada B;
- proceder todas as variações de  $R_1 \dots R_n$  que conservem nas diferentes representações um valor de representação de alguma coisa no registro de saída A, e observar as variações concomitantes de  $R'_1$  no registro de chegada B. [...] As representações  $R_1 \dots R_n$  do registro A se separam, então, em duas classes: aquelas para as quais existe somente uma representação concomitante  $R'_1$  no registro de chegada B e aquelas que têm cada uma representação concomitante diferente no registro de chegada (DUVAL, 2003, p. 25)

Assim, Duval (2003) estabelece que as variações  $R_1$  para as quais não existe variação concomitante no registro de chegada são cognitivamente neutras, pois elas conservam o mesmo objeto de referência, e ressalta que as variações de representação cognitivamente importantes no registro de partida são as que incitam uma modificação da representação concomitante no registro de chegada, pois isso implica um novo objeto denotado.

O autor utiliza este método em trabalhos sobre a complexidade cognitiva da articulação entre gráficos e equações. Sobre uma exploração das variações sistemáticas próprias de um registro Duval (2004), toma como exemplo, um caso simples, o das representações gráficas de uma reta:

As unidades significantes no registro estão determinadas por oito valores visuais que correspondem a associação de três variáveis visuais pertinentes para o registro dos gráficos cartesianos: o sentido de inclinação da reta, a posição de sua intersecção com o eixo das ordenadas, e sua posição em relação a uma repartição simétrica dos dois quadrantes opostos. Estes oito valores qualitativos não são separados visualmente: assim, os valores relativos a intersecção com o eixo da ordenadas e os relativos ao ângulo desta reta com o eixo das abscissas, se fundamentam para cada ponto desta reta em um só valor visual, não pertinente na representação, de altura que está acima do eixo das abscissas. Para discriminar todos estes valores visuais é necessário fazer variar uma das três variações visuais pertinentes mantendo constantes os valores das outras duas. A cada um dos valores qualitativos destas três variáveis corresponde a uma variação na escrita algébrica da equação da reta representada: seja no sentido de presença ou ausência de certos símbolos, seja no sentido de uma substituição de dois símbolos antagônicos ( - ou +, seja no sentido de uma troca de significado da expressão simbólica que expressa a pendência (pendência maior ou menor que 1). Por último, para cada variação no registro gráfico, obtemos uma variação concomitante de forma no registro e na escrita algébrica ( DUVAL, 2004, p. 79).

Enfim, Duval (2003) afirma que este método permite, então discriminar, entre todas as variações estruturais possíveis das representações em um certo registro, aquelas que são

cognitivamente importantes. Em termos de discriminação, o autor diz que é necessário que um aluno seja capaz de reconhecer no que diferenciam duas representações em que as componentes significantes, exceto uma, são as mesmas, ou que superficialmente parecem deferir somente por uma única componente, a qual na realidade combina duas diferenças, ou seja, “um aluno que consiga reconhecer em um gráfico somente uma de duas retas correspondentes às equações  $y = x$  e  $y = -x$ , ou às equações  $y = 2x$  e  $y = x + 2$  não está ainda no ponto de discriminar o que elas representam” (DUVAL, 2003, p. 27). Neste sentido de discriminação, para o autor, um sucesso matemático não corresponde a um sucesso cognitivo.

Com relação a Geometria Analítica, percebe-se, de acordo com Silva (2006), que historicamente, a conversão entre os Registros de Representação Semiótica, principalmente de registro gráfico para o algébrico e vice-versa, tem papel importante no estudo de curvas. O autor comenta estas conversões a partir do trabalho de Lacroix (1765- 1843):

O princípio da Geometria Analítica surge muito claramente em Lacroix (1799) quando ele diz: “a equação de uma curva é obtida expressando analiticamente uma de suas propriedades” e “uma equação dá lugar a uma curva, cujas propriedades tornam-se conhecidas pela equação” (SILVA, 2006, p. 90).

No que tange o esboço de curvas em matemática, Moretti (2003) comenta que este é um tema relevante e toma bastante espaço nas atividades de livros didáticos, no entanto, apesar da importância dada, o autor constata que,

o esboço ainda é tratado quase que exclusivamente por meio da junção de pontos localizados no plano cartesiano, pontos estes obtidos por intermédio de substituições na expressão matemática correspondente. Para uma nova equação, mesmo pertencendo à mesma família de curvas, todo esse mesmo processo de ponto por ponto deve ser repetido sem que, na maioria das vezes, qualquer relação seja estabelecida com alguma outra curva. Esse modo de proceder esboçar individualmente cada curva, impossibilita que se perceba que modificações na equação são responsáveis por modificações no gráfico e vice-versa (MORETTI, 2003, p. 149-150).

O autor defende ainda, concordando com Duval, que o esboço de curvas deve promover a associação entre a variável visual de representação e a unidade significativa da escrita algébrica. Percebe-se com estas afirmações, que não basta promover atividades em os alunos façam simplesmente uma conversão entre o registro algébrico de uma equação para o seu registro gráfico através da localização de pontos no plano, é necessário, além de fazer a conversão no sentido inverso, fazer modificações nas variáveis visuais das equações e gráficos permitindo ao aluno perceber as implicações destas modificações na correspondente

conversão entre seus respectivos registros, para assim, ocorrer a apreensão global do objeto matemático.

Referente ao ensino e aprendizagem da Geometria Analítica, as Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio caracteriza este conteúdo como:

- a) o estudo das propriedades geométricas de uma figura com base em uma equação (nesse caso, são as figuras geométricas que estão sob o olhar da álgebra);
- b) o estudo dos pares ordenados de números  $(x, y)$  que são soluções de uma equação, por meio das propriedades de uma figura geométrica ( nesse caso, é a álgebra que está sob o olhar da geometria). Esses dois aspectos merecem ser trabalhados na escola.

O trabalho com a geometria analítica permite a articulação entre geometria e álgebra. Para que essa articulação seja significativa para o aluno, o professor deve trabalhar as duas vias: o entendimento de figuras geométricas, via equações, e o entendimento de equações, via figuras geométricas. [...] Entendido o significado de uma equação, deve iniciar o estudo das equações da reta e do círculo. Essas equações devem ser deduzidas e não simplesmente apresentada aos alunos, para que então, se tornem significativas, em especial quanto ao sentido geométrico de seus parâmetros (BRASIL, 2006, p. 77).

Nota-se, que as Orientações Curriculares propõem de forma implícita, para a Geometria Analítica, um trabalho com atividades que promovam a conversão entre os registros algébrico e gráfico, interpretando geometricamente o uso de parâmetros em equações. Porém, não é evidenciado claramente, a necessidade de uma atividade conversão voltada para variação das unidades significantes em um registro.

Assim, no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, nas atividades propostas aos alunos e em análises de produções destes, acredita-se, conforme Duval (2003, p.24) que,

[...] é necessário distinguir cuidadosamente o que sobressalta no tratamento em um registro e o que sobressalta em uma conversão, esta consistindo em uma simples mudança de registros ou em uma mobilização em paralelo de dois registros diferentes. Essa distinção raramente é feita na análise das produções dos alunos, mesmo em problemas de geometria.

Entretanto, o autor complementa que é preciso levar em conta a natureza de cada registro, pois além de existir uma maior dificuldade relação à tratamentos que envolvem registros plurifuncionais, o mesmo pode ocorrer em atividades de conversão, a qual pode ser mais complexa se houver necessidade ou não de passagens entre registro monofuncional e registro plurifuncional (passar da representação gráfica para a representação em língua natural, por exemplo).

Assim, para Duval (2003) a articulação entre dois registros de um objeto matemático

deve abordar tarefas que tratem dos dois sentidos da conversão, sendo que para cada sentido deve haver caso de congruência e casos mais ou menos complexos de não- congruência, podendo ser importante ainda que estes registros sejam, de um lado um par de registros monofuncionais, e de outro um par de registros em que um é multifuncional e outro monofuncional.

Diante do contexto da teoria dos Registros de Representação Semiótica e da sua importância no ensino e aprendizagem da Matemática, entende-se o importante papel mediador do professor na aquisição conceitual dos objetos matemáticos, pois, de acordo com Andrade (2008, p.41), “os docentes devem primar pela construção de um conhecimento significativo, levando os estudantes a articularem seu pensamento, proporcionando o desenvolvimento das capacidades e habilidades cognitivas dos mesmos.” Nehring e Pozzobon (2009), destacam que é necessário um agir do professor na busca por propor situações que potencializem as atividades de conversão entre os diferentes registros de um objeto, para o entendimento matemático, e Andrade e Kaiber (2010), complementam essa ideia afirmando que, o papel do professor, no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, é ser um intermediário, procurando estabelecer situações de aprendizagem, em que é preciso, primeiro, representar, em seguida tratar e, por fim, converter.

Assim, compreende-se que o desenvolvimento cognitivo matemático do educando está diretamente vinculado às ações metodológicas que priorizam uso da diversidade de Registros de Representação Semiótica e as atividades de conversão entre elas. Buscando diversificar situações que englobem estas atividades, o professor propiciará ao aluno não apenas que este apreenda progressivamente conceitos matemáticos, mas contribuirá para que este evolua em suas capacidades de raciocínio, análise, visualização, interpretação, e consequentemente, para a formação de um cidadão crítico, criativo, mais participativo e capaz de ser agente de mudanças positivas na sociedade em que vive.

### 3 O CENÁRIO VIRTUAL DE INVESTIGAÇÃO

Nesta seção, apresenta-se como foram desenvolvidos, com base nos Registros de Representação Semiótica, o PCIG dos nodos com Reta e Circunferência, construído no *software Compendium*, o banco de questões para os testes adaptativos e a sequência didática eletrônica para cada nodo do PCIG.

#### 3.1 CONSTRUINDO O *DESIGN* DO CENÁRIO VIRTUAL NO SIENA

Para a implementação da experiência no SIENA construiu-se inicialmente um esquema, conforme figura 14, com os conceitos prévios, básicos, intermediários e conceitos avançados, com simulações que poderiam ser construídas com o auxílio dos *softwares winplot e flash*, sobre os conteúdos de Reta e Circunferência, para as questões e atividades didáticas.

|  |  |
|--|--|
| <b>Conceitos Avançados:</b>  |  |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Simulação gráfica que represente o lançamento de um míssil à um determinado alvo;</li> <li>✓ Animação gráfica que represente a translação de uma circunferência paralelamente ao eixo das abscissas, simulando uma bicicleta andando em um plano;</li> <li>✓ Simulação de engrenagens;</li> <li>✓ Simulação de um sistema articulado de polias circulares de diferentes tamanhos cujos pontos animados sempre se encontram.</li> </ul>  |  |
| <b>Conceitos Intermediários: Lugar Geométrico:</b>   |  |
| <p><b>Reta:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Postulados de Euclides: 2 pontos determinam uma reta (R. Ling. Natural);</li> <li>✓ Relação de Pitágoras na determinação da equação de uma reta;</li> <li>✓ Equação geral da reta (R. Algébrica);</li> <li>✓ Equação reduzida da reta (R. Algébrica);</li> <li>✓ Coeficiente angular e linear da reta;</li> <li>✓ Posições relativas entre retas (paralelismo, perpendicularismo, concorrência);</li> <li>✓ Equação paramétrica da reta (R. Algébrica);</li> <li>✓ Representação gráfica da reta;</li> <li>✓ Distância entre ponto e reta;</li> <li>✓ Área da região triangular.</li> </ul> | <p><b>Circunferência:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Definição através da distância entre o centro e um ponto qualquer de uma circunferência (R. Ling. Natural);</li> <li>✓ Equação geral e reduzida da circunferência (R. Algébrica);</li> <li>✓ Estudo do raio e centro a partir da sua equação geral e reduzida;</li> <li>✓ Comprimento da circunferência e área limitada pela circunferência;</li> <li>✓ Equação polar e paramétrica da circunferência (R. Algébrica);</li> <li>✓ Representação gráfica da circunferência;</li> <li>✓ Translação da circunferência.</li> </ul> |
| <b>Conceitos básicos:</b>  |  |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Eixo real;</li> <li>✓ Segmento orientado;</li> <li>✓ Sistema cartesiano ortogonal;</li> <li>✓ Quadrantes;</li> </ul>  | <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Representação de um ponto;</li> <li>✓ Representação, construção e medida de um segmento.</li> </ul>   |
| <b>Conceitos Prévios:</b>  |  |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Quatro operações, potenciação, radiciação;</li> <li>✓ Valor absoluto;</li> <li>✓ Teorema de Pitágoras;</li> <li>✓ Resolução de equações e sistemas de equações;</li> </ul>  | <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Trigonometria;</li> <li>✓ Trigonometria no triângulo retângulo.</li> </ul>  |

Figura 14: Esquema com conceitos de reta e circunferência

A seguir, desenvolveu-se o PCIG dos nodos com os objetos matemáticos, Reta e Circunferência, fundamentado nos conceitos apresentados no esquema conforme a figura 14, e na conversão de Registros de Representação Semiótica. O PCIG foi construído no *software Compendium* e importado para o SIENA, e possui oito nodos: *Conversão da Representação Língua Natural para Algébrica e da Representação Algébrica para a Língua Natural da Reta*; *Conversão da Representação Língua Natural para a Representação Gráfica e da Representação Gráfica para a Língua Natural da Reta*; *Conversão da Representação Algébrica para a Representação Gráfica da Reta*; *Conversão da Representação Gráfica para a Representação Algébrica da Reta*; *Conversão da Representação Língua Natural para Algébrica e da Representação Algébrica para a Língua Natural da Circunferência*; *Conversão da Representação Língua Natural para a Representação Gráfica e da Representação Gráfica para a Língua Natural da Circunferência*; *Conversão da Representação Algébrica para a Representação Gráfica da Circunferência*; *Conversão da Representação Gráfica para a Representação Algébrica da Circunferência*, conforme representados na figura 15.

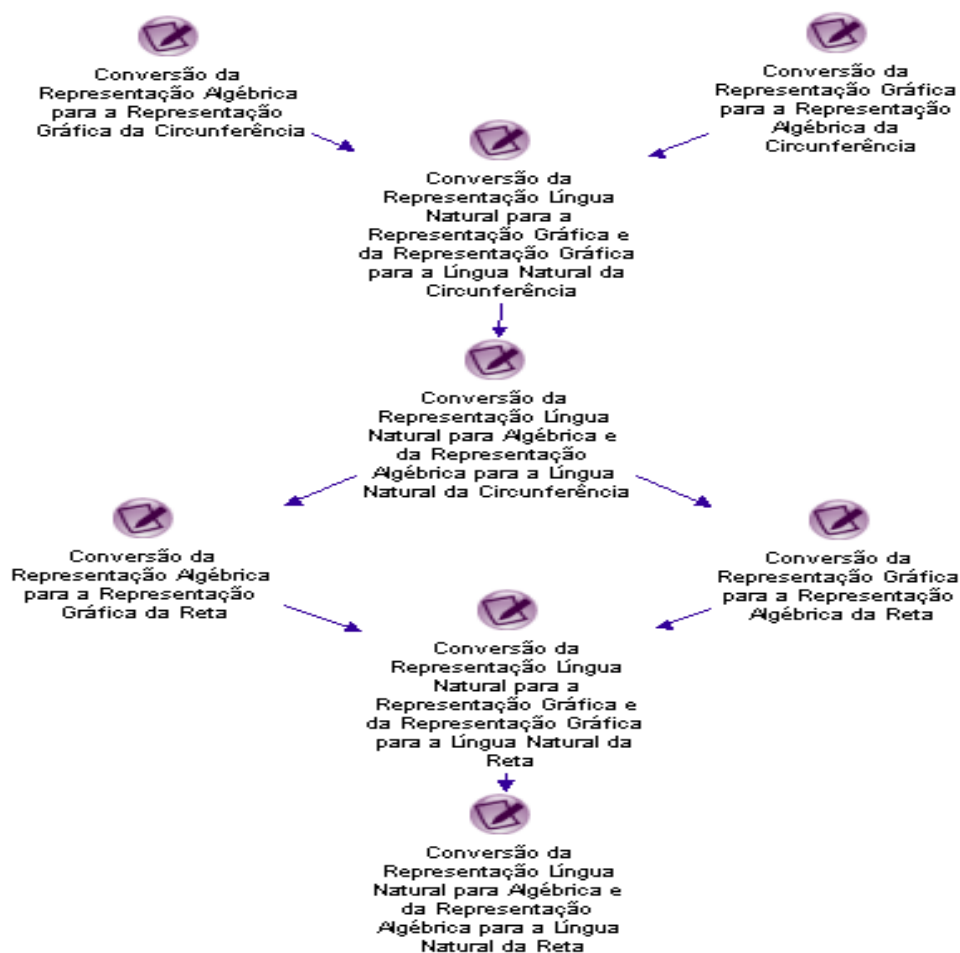


Figura 15: PCIG dos nodos sobre reta e circunferência

O nodo *Conversão da Representação Gráfica para a Representação Algébrica da Reta*, não foi agrupado com o nodo *Conversão da Representação Algébrica para a Representação Gráfica da Reta*, e da mesma forma não agrupou-se estes mesmos nodos respectivos à Circunferência, como as conversões de registros abordadas nos demais nodos, porque objetivou-se analisar as possíveis dificuldades, dos alunos pesquisados, na conversão do registro gráfico para o algébrico separadamente das possíveis dificuldades na conversão do registro algébrico para o gráfico, pois conforme já explicitado no problema apresentado nesta pesquisa, de acordo com Duval (apud Silva 2006), a razão das dificuldades identificadas por diferentes pesquisas relacionadas às tarefas de leitura e interpretação de representações gráficas, está no fato do aluno desconhecer a correspondência semiótica entre o registro das representações gráficas e da escrita algébrica; e ainda, porque na maioria das vezes, o ensino parte da representação algébrica para a representação gráfica desenvolvendo menos atividades de conversão no sentido oposto.

Então, todas as questões lançadas pelo SIENA em um teste adaptativo para estes nodos, aos alunos participantes da pesquisa, iriam abordar, num teste, somente a conversão do registro gráfico para o algébrico, e em outro, somente a conversão do registro algébrico para o gráfico, enquanto que em cada teste dos demais nodos, as questões lançadas pelo SIENA, poderiam ser tanto da primeira conversão para a segunda quanto da segunda para a primeira conforme abordada em cada nodo do PCIG, abordando assim, mais ou menos questões em um sentido de conversão.

De acordo com o PCIG, apresentado na figura 15, os testes adaptativos, realizados pelos alunos, para cada nodo, seguem a ordem de baixo para cima, pois o SIENA entende o PCIG desta forma, sendo que cada nodo, seguindo a indicação das setas, é predecessor do nodo acima.

Assim, primeiro seriam realizados, pelos alunos, todos os testes dos nodos referentes aos conceitos de Reta e só então iniciados os testes dos nodos referentes aos conceitos de Circunferência, pois mesmo os alunos pesquisados já tendo estudado Geometria Analítica no Ensino Médio, e alguns também na graduação, organizou-se os nodos do PCIG nesta ordem devido aos livros didáticos para o Ensino Médio abordarem primeiro o conteúdo sobre Reta e após o conteúdo sobre Circunferência, ou seja, Reta é conhecimento prévio para estudar Circunferência, de acordo com os livros didáticos para o Ensino Médio e, também, de acordo com as Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio.

Então, os testes, realizados pelos alunos, iniciariam no nodo *Conversão da*



*Representação Língua Natural para Algébrica e da Representação Algébrica para a Língua Natural da Reta*, e a medida em que estes fossem sendo aprovados, o SIENA iria abrir o teste para o nodo seguinte. Caso o aluno não fosse aprovado no teste de cada nodo, o SIENA iria apresentar um *link* denominado *recuperación de contenidos*, para o aluno abrir a sequência didática eletrônica e realizar estudos e atividades sobre o conceito abordado no nodo em qual realizou o teste, para então realizar um novo teste sobre este mesmo conceito, e assim sucessivamente.

Após importado o PCIG para o SIENA, foi desenvolvido o banco de questões, para a realização dos testes adaptativos, e a sequência didática, para cada nodo do PCIG, de acordo com o tema proposto.

### **3.1.1 O Banco de Questões para os Testes Adaptativos**

O banco de questões (APÊNDICE A) para o desenvolvimento dos testes adaptativos é composto de 30 questões para cada nodo do PCIG, representado na figura 15, divididas em 10 fáceis, 10 médias e 10 difíceis para o aluno, sendo que cada questão possui quatro alternativas de respostas e um tempo, em segundos, para a sua resolução, o qual foi estabelecido de 120 a 720 segundos, conforme o nível de dificuldade e o tempo estimado da resolução, pelo aluno, para cada questão, em particular. Para o grau de dificuldade das questões foi definido os valores de 0,3 para as questões fáceis, 0,35 para as questões médias e 0,6 para as difíceis em todos os nodos do PCIG. Para o nível de adivinhação da cada pergunta foi definido o valor de 0,2, para o grau de sua relação com o nodo o valor de 0,9 em todas as questões de todos os nodos, e para o grau de estimativa do conhecimento prévio que o aluno possui sobre o conceito abordado em cada nodo foi estabelecido o valor de 0,1. A média definida para considerar o aluno aprovado no teste adaptativo é 0,6, sendo que os alunos poderiam obter como resultados os valores entre 0,1 e 1,0.

A partir desses valores e das respostas dos alunos para cada questão o SIENA, para cada teste adaptativo, lança questões até o momento em que não é mais possível fornecer uma maior estimativa sobre o grau de conhecimento do aluno sobre o nodo.

Após a investigação de atividades em livros didáticos de Matemática do Ensino Médio, como Lima et al. (2004), Dante (2004), Guelli (2003), Paiva (2003), Filho e Silva (2003), Bezerra (2001), as questões de cada nodo do PCIG, foram elaboradas de forma modificada e ampliada das questões encontradas nestes livros, e baseadas no esquema de

conceitos sobre Reta e Circunferência, conforme figura 14, e nos Registros de Representação Semiótica, sendo que para cada nodo do PCIG buscou-se desenvolver questões, em que ao resolvê-las, os alunos pesquisados deveriam articular entre os diferentes Registros de Representação Semiótica, entre os conceitos de Reta e Circunferência, conforme a conversão proposta em cada nodo.

O nodo *Conversão da Representação Língua Natural para Algébrica e da Representação Algébrica para a Língua Natural da Reta* é composto de 15 questões que propõem a conversão do registro Língua Natural para o registro Algébrico e outras 15 que propõem a conversão do registro Algébrico para a Língua Natural dentro de conceitos de Reta, ou seja, para a língua natural aborda-se questões e opções de respostas com a linguagem matemática, de forma discursiva, que envolve o conteúdo de Reta. Cada grupo de 15 questões possui 5 fáceis, 5 médias e 5 difíceis. Organizou-se as questões desta forma pelo fato de que o SIENA escolhe aleatoriamente as questões seguindo o nível de dificuldade, assim torna-se possível que ao fazer o teste adaptativo o aluno receba questões que visem não só a conversão do primeiro registro para o segundo como também do segundo para o primeiro conforme explicitados acima. Cabe ressaltar que nas questões deste nodo é utilizado também o sistema de escrita numérica, como a representação numérica de pontos. A figura 16 apresenta dois exemplos de questões deste nodo.

|   |   |
|---|---|
| <p>1) Uma reta que passa na origem e é perpendicular a outra reta que passa nos pontos de abscissas três e zero e ordenadas zero e dois respectivamente tem pontos na forma:</p> <p>a) <math>(x, -2/3x)</math><br/> b) <math>(2x, -x/3)</math><br/> c) <math>(x, -3/2x)</math><br/> d) <math>(2x, -3x)</math></p> | <p>2) Sobre a equação da reta <math>-kx - 2y + 4 = 0</math>, onde <math>k</math> é um número real não negativo podemos afirmar que quando <math>k</math> varia em valores crescentes:</p> <p>a) A reta gira em torno do ponto de abscissa zero e ordenada quatro no sentido anti-horário.<br/> b) A reta se desloca verticalmente passando pelo ponto de abscissa zero e ordenada quatro.<br/> c) A reta gira em torno do ponto de abscissa zero e ordenada dois no sentido horário<br/> d) A reta se desloca horizontalmente na direção positiva passando pelo ponto de abscissa zero e ordenada quatro.</p> |
|---|---|

Figura 16: Exemplos de questões do nodo *Conversão da Representação Língua Natural para a Representação Algébrica e da Representação Algébrica para a Língua Natural da Reta*

O nodo *Conversão da Representação Língua Natural para a Representação Gráfica e Representação Gráfica para a Língua Natural da Reta* também é composto de 15 questões que propõem a conversão do registro Língua Natural para o registro Gráfico e outras 15 que propõem a conversão do registro Gráfico para a Língua Natural dentro de conceitos de Reta, sendo que a organização do número de questões fáceis, médias e difíceis segue da mesma forma que o nodo anterior e também pelo mesmo motivo. Neste nodo foram propostas algumas questões que tratam da representação gráfica de pontos, já que ponto é um conhecimento prévio para o conteúdo de reta. A figura 17 apresenta dois exemplos de questões deste nodo.

1) A reta bissetriz do ângulo formado pelo encontro de duas retas no ponto de abscissa 0,5 e ordenada 0,5 onde a primeira tem coeficiente angular igual a  $\frac{1}{3}$  e a outra com coeficiente angular igual a 3 é:

a) b) c) d)

2) Dado o gráfico, então podemos dizer:

a) “r” é perpendicular a “s”.  
 b) São retas concorrentes e não perpendiculares.  
 c) São retas que se encontram no ponto de abscissa 1 e ordenada 1.  
 d) O coeficiente linear da reta “s” é três.

Figura 17: Exemplos de questões do nodo *Conversão da Representação Língua Natural para a Representação Gráfica e da Representação Gráfica para a Língua Natural da Reta*.

O nodo *Conversão da Representação Algébrica para a Representação Gráfica da Reta* possui 30 questões que tem por objetivo a conversão do registro Algébrico para o registro Gráfico dentro de conceitos de Reta. Dentre algumas questões propostas neste nodo, foram também utilizadas as representações numéricas, algébricas e gráficas de ponto. A figura 18 apresenta um exemplo de questão proposta neste nodo.

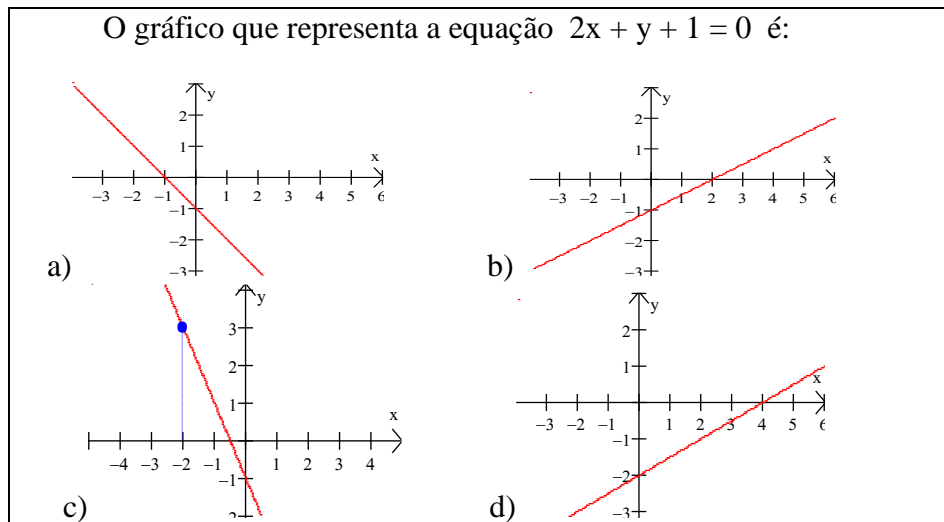


Figura 18: Exemplo de questão do nodo Conversão da Representação Algébrica para a Representação Gráfica da Reta.

O nodo *Conversão da Representação Gráfica para a Representação Algébrica da Reta* possui 30 questões que trabalham a conversão do registro gráfico para o registro algébrico em conceitos de Reta. Em algumas questões deste nodo também utilizou-se da representação numérica e gráfica de pontos. A figura 19 mostra uma questão deste nodo.

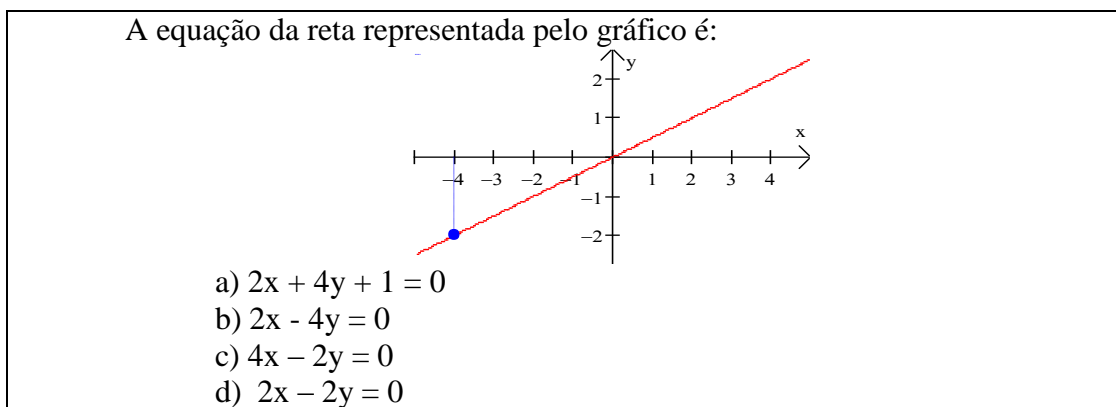


Figura 19: Exemplo de questão do nodo Conversão da Representação Gráfica para a Representação Algébrica da Reta.

O nodo *Conversão da Representação Língua Natural para a Algébrica e da Representação Algébrica para a Língua Natural da Circunferência* é composto de 15 questões que propõem a conversão do registro Língua Natural para o registro Algébrico, e outras 15, que visam a conversão do registro Algébrico para a Língua Natural dentro de conceitos de Circunferência, sendo que a organização do número de questões segue da mesma forma que no nodo do conteúdo de Reta referente a conversão entre estes registros, e também, como já mencionado, esta organização é proposta com o intuito de possibilitar que o aluno

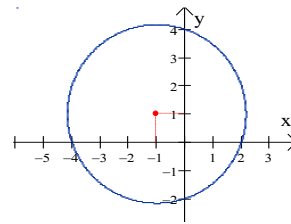
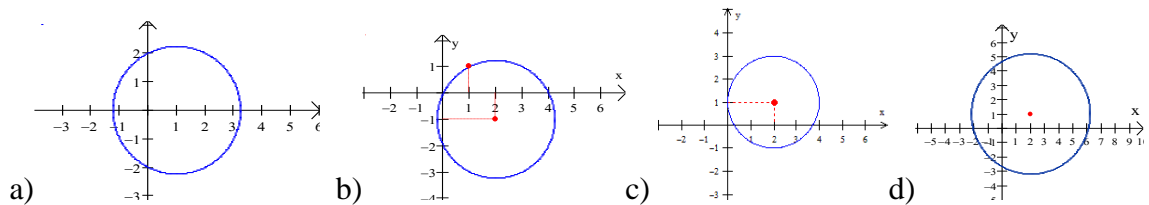
receba questões no ambiente virtual SIENA relacionadas as duas conversões entre os registros mencionados, já que o SIENA escolhe aleatoriamente as questões, conforme o nível de dificuldade. Dentre questões propostas para este nodo, utilizou-se da representação numérica de pontos. A figura 20 apresenta dois exemplos de questões deste nodo.

|   |   |
|---|---|
| <p>1) O conjunto de pontos equidistantes do ponto de abscissa três e ordenada quatro, duas unidades de medida, no sistema cartesiano é:</p> <p>a) <math>x^2 + y^2 - 3x + y = 0</math><br/> b) <math>x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0</math><br/> c) <math>x^2 + y^2 + 2x + 5y - 4 = 0</math><br/> d) <math>x^2 + y^2 - x + y - 1 = 0</math></p> | <p>2) Seja a equação da circunferência <math>(x-a)^2 + (y-a-1)^2 = b^2</math>, então podemos dizer que na medida que “a” varia:</p> <p>a) A circunferência anda sobre o eixo das ordenadas.<br/> b) A circunferência anda sobre uma reta de quarenta e cinco graus de inclinação com o eixo das abscissas.<br/> c) A circunferência anda sobre o eixo das abscissas.<br/> d) A circunferência anda sobre uma reta paralela ao eixo das abscissas.</p> |
|---|---|

Figura 20: Exemplos de questões do nodo Conversão da Representação Língua Natural para a Representação Algébrica e da Representação Algébrica para a Língua Natural da Circunferência

O nodo *Conversão da Representação Língua Natural para a Representação Gráfica e da Representação Gráfica para a Língua Natural da Circunferência* também é composto de 15 questões que propõem a conversão do registro Língua Natural para o registro Gráfico, e outras 15, que propõem a conversão do registro Gráfico para a Língua Natural dentro de conceitos de Circunferência, sendo que a organização do número de questões fáceis, médias e difíceis é dada da mesma forma que o nodo anterior. A figura 21 mostra dois exemplos de questões do nodo.

1) No dia 22/04/2008 às 23:07:43h em São Paulo (SP) - O tremor de terra de 5,2 graus na escala Richter registrado a 200 km da cidade de São Paulo foi sentido também em outros Estados, como no Rio de Janeiro, em Minas Gerais, no Paraná e em Santa Catarina. Se o epicentro estiver de acordo com um sistema cartesiano e localizado no ponto de abscissa dois e ordenada um, sabendo que as coordenadas estão em (quilômetros x 100), então o gráfico que melhor representa a situação acima é:



2) Segundo o gráfico podemos afirmar que:

- Que o raio vale  $\sqrt{10}$ .
- Que as ordenadas dos pontos da circunferência são positivas.
- Que o comprimento da circunferência vale  $6\pi$ .
- A circunferência passa pelo ponto de ordenada 1 e abscissa 2.

Figura 21: Exemplos de questões do nodo Conversão da Representação Língua Natural para a Representação Gráfica e da Representação Gráfica para a Língua Natural da Circunferência

O nodo *Conversão da Representação Algébrica para a Representação Gráfica da Circunferência* possui 30 questões que tem por objetivo a conversão do registro Algébrico para o registro Gráfico dentro de conceitos de Circunferência. Nas questões, também utilizou-se a representação numérica e gráfica de pontos. A figura 22 apresenta um exemplo de questão deste nodo.

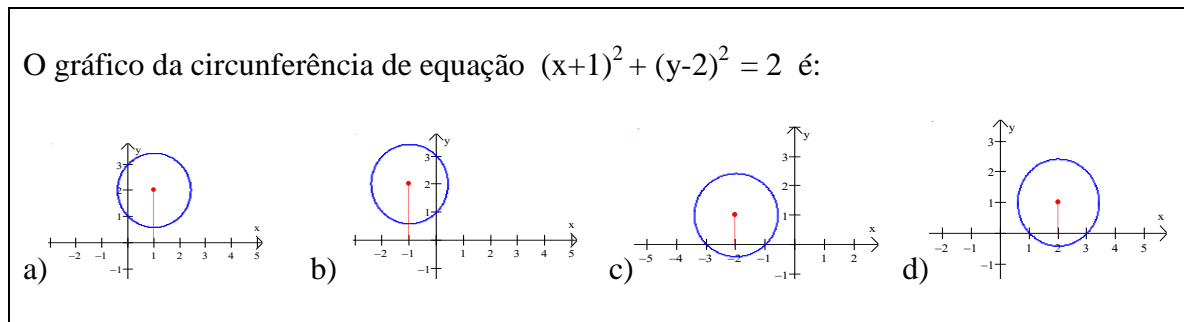


Figura 22: Exemplo de questão do nodo Conversão da Representação Algébrica para a Representação Gráfica da Circunferência

O nodo *Conversão da Representação Gráfica para a Representação Algébrica da Circunferência* possui 30 questões que trabalham a conversão do registro Gráfico para o registro Algébrico em conceitos de Circunferência. Em algumas das questões, também trabalhou-se a representação gráfica e numérica de pontos. A figura 23 mostra um exemplo de questão deste nodo.

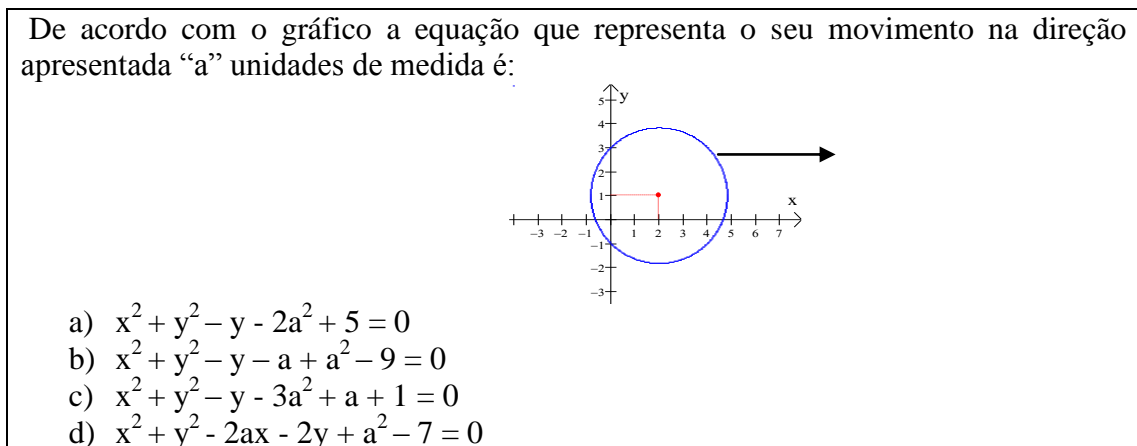


Figura 23: Exemplo de questão do nodo Conversão da Representação Gráfica para a Representação Algébrica da Circunferência

Os gráficos das questões foram desenvolvidos com o auxílio do *software winplot*. E as 240 questões elaboradas para este banco foram resolvidas pela segunda vez, antes da aplicação da pesquisa, pela aluna Iara Terezinha M. Schwanck, do último semestre do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Luterana do Brasil- Campus Canoas.

### 3.1.2 A Sequência Didática com Geometria Analítica e os Registros de Representação Semiótica

Uma sequência didática é um conjunto de atividades pedagógicas organizadas, de

maneira sistemática, com a finalidade de ajudar o aluno a dominar melhor um conteúdo (DOLZ e SCHNEUWLY, 2004).

Para planejar uma sequência didática Flemming e Mello (2003), afirmam que é necessário que o professor tenha claramente estruturado o tema, o objetivo, o conteúdo e sua contextualização no curso em que está trabalhando, visualizando as inter-relações do tema, enquanto novo conhecimento para os aprendizes, com o desenvolvimento de competências e habilidades requeridas. No contexto da Matemática, afirmam que para uma sequência didática propiciar que professor e aluno, busquem novos espaços e conhecimentos, várias estratégias didáticas podem ser usadas como trabalhar com projetos de estudos, com resolução de problemas ou com jogos didáticos.

Pais (2005, p.102), salienta que em uma pesquisa

a aplicação da sequência didática é também uma etapa de suma importância para garantir a proximidade dos resultados práticos com a análise teórica. Uma sequência didática é formada por um certo número de aulas planejadas e analisadas previamente com a finalidade de observar situações de aprendizagem, envolvendo os conceitos previstos na pesquisa didática.

As atividades da sequência didática (APÊNDICE A), para cada nodo do PCIG com Reta e Circunferência, no SIENA, foram desenvolvidas com base na conversão entre os Registros de Representação Semiótica: língua natural, algébrico e gráfico, conforme a conversão proposta em cada nodo, integrando as Tecnologias de Informação e Comunicação, tendo como objetivo, contribuir para que os alunos assimilassem conceitos de Geometria Analítica (Reta e Circunferência) que possivelmente apresentassem dificuldades. Assim, no momento que o aluno realizar o um teste adaptivo no SIENA, caso este não atinja a nota 0,6 estipulada como rendimento satisfatório, o sistema o direciona para que ele acesse a sequência didática correspondente ao nodo em que realizou o teste, podendo realizar a revisão do conteúdo e atividades didáticas que propõem a conversão segundo o nodo, e após, realizar um novo teste.

Após investigação da história da Geometria Analítica, da abordagem didática do conteúdo e atividades sobre Reta e Circunferência, em livros como Boyer (1974) e os já citados para o desenvolvimento do banco de questões, foram desenvolvidas atividades com o auxílio dos *softwares*: *power point*, *JClic*, *winplot*, *flash*, e foram também, disponibilizados *sites* que abordam o conteúdo estudado, para possível consulta pelos alunos.

O *design* da página inicial da sequência didática desenvolvida para cada nodo dos




conceitos de Reta e Circunferência, possuem documentos digitais, em que há *links* de acesso às atividades didáticas que contêm: um histórico e aplicações da Geometria Analítica; apresentações em *power point*, salvas em *html*, com explicações ilustradas para a revisão do conteúdo de Reta e Circunferência; exercícios interativos como jogos de associação simples e complexa, frases com lacunas para preencher, *quizes*<sup>4</sup>, jogo batalha naval, exercício de escrever as coordenadas de pontos em um mapa, problemas com animações gráficas; e *hiperlinks* dos *sites* para os alunos acessarem. Algumas dessas atividades abordam também a conversão entre os registros língua natural, algébrico e gráfico de *pontos*. A figura 24 apresenta o *design* do cenário da sequência didática com os *links* de acesso às atividades e *sites* do nodo *Conversão da Representação Gráfica para a Representação Algébrica da Reta*.

UNIVERSIDADE LUTERANA DO BRASIL  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

Pesquisa para dissertação em Registros de Representação Semiótica e Geometria Analítica:  
Uma Experiência com o Ambiente Virtual SIENA.

Joseide Justin Dallemole



**ATIVIDADES RECOMENDADAS PARA REVISÃO**



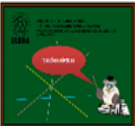


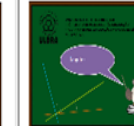



|  | REGIÃO TRIANGULAR   | POSIÇÕES RELATIVAS  | PONTOS E INTERSECÇÕES DE RETAS  | COEFICIENTES DA RETA   | ÂNGULOS   | SITES RECOMENDADOS   |
|--|---|---|---|--|---|--|
|   |                          |  |    |  |  | <a href="#">Site 1</a><br><a href="#">Site 2</a><br><a href="#">Site 3</a><br><a href="#">Site 4</a><br><a href="#">Site 5</a><br><a href="#">Site 6</a><br><a href="#">Site 7</a> |
| ATIVIDADE DO JClic   | BATALHA NAVAL   |   | MAPA  |  |   |  |
|   |                          |   |  |  |   |  |
| Com esta atividade será possível rever conceitos relacionados a Geometria Analítica. | Nesta atividade você precisa encontrar e digitar a equação reduzida da reta que intersecta dos dois barcos. |   | Determine a posição (coordenadas) dos pontos no mapa.                                 |  |   |  |

Figura 24: Cenário da sequência didática do nodo Conversão da Rep. Gráfica para a Rep. Algébrica da Reta

O *link* história da Geometria Analítica, desenvolvido com o *software flash*, está no cenário da sequência didática de todos os nodos dos conceitos de Reta e Circunferência e apresenta um texto com um breve histórico e exemplos de aplicações na atualidade da Geometria Analítica. A figura 25 apresenta uma página deste texto.

<sup>4</sup>Quizes são jogos de perguntas com opções de respostas.



Figura 25: Página do texto História da Geometria Analítica

Para a revisão do conteúdo de Reta foram desenvolvidos *links*, com o auxílio do *software power point*, em que apresentam explicações ilustradas utilizando os registros língua natural, algébrico e gráfico, salvas em *html*, sobre pontos e intersecções de retas, coeficientes da reta, posições relativas entre retas, ângulos e área da região triangular. Estas explicações estão nos cenários das sequências didáticas de todos os nodos dos conceitos de Reta. As figuras 26 e 27 apresentam alguns *slides* sobre as explicações de coeficientes da Reta.

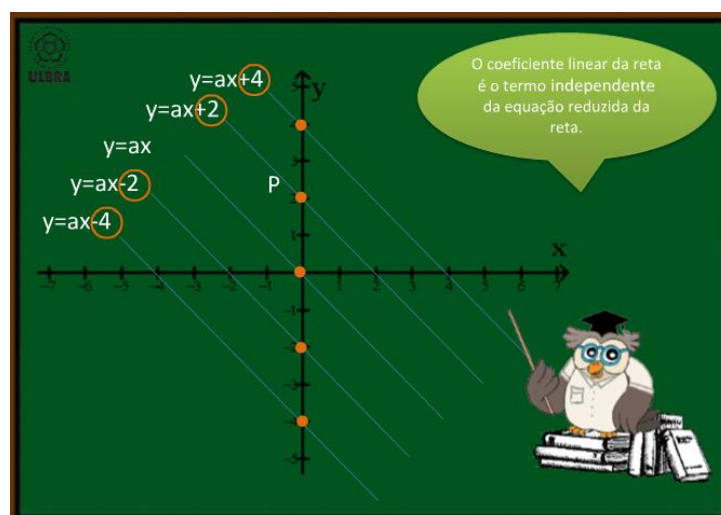


Figura 26: Slide do link coeficientes da reta

**Slide 1:** ULBRA logo. A coordinate system with x and y axes. A vertical line is drawn at x=0. A red line is drawn at x=1. A green arc indicates the angle between the y-axis and the red line. Text: "Reta dos valores da tangente do ângulo", "ângulo entre 90 e 180 graus", "+ (valores positivos)", "- (valores negativos)". A red speech bubble says: "e de maneira geral temos". An owl character is on the right.

**Slide 2:** ULBRA logo. Three lines with slopes  $a_1$ ,  $a_2$ , and  $a_3$  are shown. Equations:  $a_1x+b=y$ ,  $a_2x+b=y$ ,  $a_3x+b=y$ . A blue arrow points up. A blue speech bubble says: "A relação entre coeficiente angular da reta e a tangente...". Equations:  $tg(a_1) = a_1$ ,  $tg(a_2) = a_2$ ,  $tg(a_3) = a_3$ . An owl character is on the right.

**Slide 3:** ULBRA logo. A diagram of a ramp in the shape of a right-angled triangle with angle  $\alpha$ . Text: "CIÊNCIA E TECNOLOGIA", "Declividade de uma rampa", "Na Engenharia Civil, quando se diz que uma rampa tem declive de 30%, significa que a tangente do ângulo  $\alpha$  que a rampa forma com um plano horizontal é 0,3, ou seja:  $tg \alpha = 0,3$ ". A purple speech bubble says: "Nesta ilustração foi desenhado uma rampa em forma de triângulo retângulo com um ângulo 'a' de inclinação...". Another purple speech bubble says: "...então a tangente de 'a' é 3/10". An owl character is on the right.

Fonte: PAIVA, Marcos. Matemática. 2. ed. v. único. São Paulo: editora Moderna, 2003 (p.316)

Figura 27: Slides do link coeficientes da reta

Para complementar a revisão do conteúdo de Reta foram disponibilizados *hiperlinks*, na sequência didática de todos os nodos dos conceitos de Reta, com *sites* que contém explicações e alguns exercícios resolvidos do conteúdo para o aluno pesquisar, sendo que ao passar o *mouse* em cada *hiperlink* o aluno escolhia em qual gostaria de entrar conforme o assunto abordado, por exemplo, poderia escolher um *site* com um resumo sobre reta, outro sobre ângulos, outro sobre posições relativas da reta, ou ainda sobre equações paramétricas da reta. O quadro, conforme figura 28, apresentam os *sites* disponibilizados e seus respectivos endereços.

| <i>Sites</i>            | Endereços   |
|-------------------------|---|
| Home Page de Matemática | <a href="http://hpdemat.vilabol.uol.com.br/Reta.htm">http://hpdemat.vilabol.uol.com.br/Reta.htm</a>   |
| Scribd                  | <a href="http://www.scribd.com/doc/12842746/Matematica-Aula-34-Posicao-Relativa-Entre-Retas">http://www.scribd.com/doc/12842746/Matematica-Aula-34-Posicao-Relativa-Entre-Retas</a> |
| Matemática Essencial    | <a href="http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/geometria/ganalitica/ganalitica.htm">http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/geometria/ganalitica/ganalitica.htm</a>         |
| Wikipedia               | <a href="http://pt.wikipedia.org/wiki/Trigonometria">http://pt.wikipedia.org/wiki/Trigonometria</a>   |
| Matemática Essencial    | <a href="http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/trigonometria/trigo04.htm">http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/trigonometria/trigo04.htm</a>                             |
| Mundo e Educação        | <a href="http://www.mundoeducacao.com.br/matematica/equacoes-parametricas.htm">http://www.mundoeducacao.com.br/matematica/equacoes-parametricas.htm</a>                             |
| Unesp                   | <a href="http://www.fc.unesp.br/~mauri/Down/Parametricas.pdf">http://www.fc.unesp.br/~mauri/Down/Parametricas.pdf</a>   |

Figura 28: Quadro dos sites disponibilizados sobre o conteúdo de reta

A figura 29 apresenta uma parte do conteúdo do *site* Matemática Essencial, em que apresenta o conteúdo de Geometria Analítica dividido por subtítulos que possibilitam o aluno poder acessar através destes explicações sobre: eixos coordenados, distância entre dois pontos, ponto médio de um segmento, retas no plano cartesiano, equação reduzida da Reta, retas paralelas e perpendiculares, equação geral da Reta, distância de ponto e Reta, área de um triângulo, entre outras.

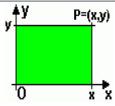
| Geometria Plana: Geometria Analítica Plana  |   |                   |                    |              |              |              |       |  |  |  |         |         |         |  |  |          |   |   |         |  |  |         |   |   |          |  |  |          |   |   |           |
|---|---|-------------------|--------------------|--------------|--------------|--------------|-------|--|--|--|---------|---------|---------|--|--|----------|---|---|---------|--|--|---------|---|---|----------|--|--|----------|---|---|-----------|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Eixos coordenados</li> <li>▪ Distância entre pontos</li> <li>▪ Ponto médio de um segmento</li> <li>▪ Retas no plano cartesiano</li> <li>▪ Equação reduzida da reta</li> <li>▪ Retas paralelas e perpendiculares</li> </ul>   | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Equação geral da reta</li> <li>▪ Distância de ponto a reta</li> <li>▪ Área de um triângulo</li> <li>▪ Circunferências no plano</li> <li>▪ Relações importantes no plano</li> <li>▪ Seções cônicas</li> </ul> |                   |                    |              |              |              |       |  |  |  |         |         |         |  |  |          |   |   |         |  |  |         |   |   |          |  |  |          |   |   |           |
| <b>Eixos Coordenados</b>  |   |                   |                    |              |              |              |       |  |  |  |         |         |         |  |  |          |   |   |         |  |  |         |   |   |          |  |  |          |   |   |           |
| <p>Consideremos um plano e duas retas perpendiculares, sendo uma delas horizontal e a outra vertical. A horizontal será denominada Eixo das Abscissas (eixo OX) e a Vertical será denominada Eixo das Ordenadas (eixo OY). Os pares ordenados de pontos do plano são indicados na forma <math>P=(x,y)</math> onde <math>x</math> será a abscissa do ponto <math>P</math> e <math>y</math> a ordenada do ponto <math>P</math>.</p>   |   |                   |                    |              |              |              |       |  |  |  |         |         |         |  |  |          |   |   |         |  |  |         |   |   |          |  |  |          |   |   |           |
|    |   |                   |                    |              |              |              |       |  |  |  |         |         |         |  |  |          |   |   |         |  |  |         |   |   |          |  |  |          |   |   |           |
| <p>Na verdade, <math>x</math> representa a distância entre as duas retas verticais indicadas no gráfico e <math>y</math> é a distância entre as duas retas horizontais indicadas no gráfico. O sistema de Coordenadas Ortogonais é conhecido por Sistema de Coordenadas Cartesianas e tal sistema possui quatro regiões denominadas quadrantes.</p>   |   |                   |                    |              |              |              |       |  |  |  |         |         |         |  |  |          |   |   |         |  |  |         |   |   |          |  |  |          |   |   |           |
| <table border="1"> <thead> <tr> <th>Segundo quadrante</th> <th>Primeiro quadrante</th> <th>Quadrante</th> <th> sinal de <math>x</math></th> <th> sinal de <math>y</math></th> <th>Ponto</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td>não tem</td> <td>não tem</td> <td><math>(0,0)</math></td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td>Primeiro</td> <td>+</td> <td>+</td> <td><math>(2,4)</math></td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td>Segundo</td> <td>-</td> <td>+</td> <td><math>(-4,2)</math></td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td>Terceiro</td> <td>-</td> <td>-</td> <td><math>(-3,-7)</math></td> </tr> </tbody> </table> |   | Segundo quadrante | Primeiro quadrante | Quadrante    | sinal de $x$ | sinal de $y$ | Ponto |  |  |  | não tem | não tem | $(0,0)$ |  |  | Primeiro | + | + | $(2,4)$ |  |  | Segundo | - | + | $(-4,2)$ |  |  | Terceiro | - | - | $(-3,-7)$ |
| Segundo quadrante   | Primeiro quadrante  | Quadrante         | sinal de $x$       | sinal de $y$ | Ponto        |              |       |  |  |  |         |         |         |  |  |          |   |   |         |  |  |         |   |   |          |  |  |          |   |   |           |
|   |   |                   | não tem            | não tem      | $(0,0)$      |              |       |  |  |  |         |         |         |  |  |          |   |   |         |  |  |         |   |   |          |  |  |          |   |   |           |
|   |   | Primeiro          | +                  | +            | $(2,4)$      |              |       |  |  |  |         |         |         |  |  |          |   |   |         |  |  |         |   |   |          |  |  |          |   |   |           |
|   |   | Segundo           | -                  | +            | $(-4,2)$     |              |       |  |  |  |         |         |         |  |  |          |   |   |         |  |  |         |   |   |          |  |  |          |   |   |           |
|   |   | Terceiro          | -                  | -            | $(-3,-7)$    |              |       |  |  |  |         |         |         |  |  |          |   |   |         |  |  |         |   |   |          |  |  |          |   |   |           |

Figura 29: Imagem do conteúdo do site Matemática Essencial

Na sequência didática, para cada nodo dos conceitos de Reta, também foram desenvolvidos, com o *software JClíc*, projetos de atividades, contendo duas atividades em cada projeto para cada nodo, como jogos e atividades interativas de associação simples e complexa e de preencher lacunas, de acordo com a conversão proposta entre os Registros de Representação Semiótica, em cada nodo.

O *JClíc* é um *software* de autoria, criado por Francesc Busquest em espanhol e catalão, desenvolvido na plataforma *Java*. É um *software* livre utilizado para a criação, reprodução e avaliação de atividades educativas de multimídia como as citadas no parágrafo anterior, além de palavras cruzadas, jogo da memória, quebra-cabeças, etc, podendo ser usado em várias disciplinas do currículo escolar. As atividades são criadas, modificadas, experimentadas e organizadas em projetos específicos, para cada conjunto de atividades, pelo *JClíc author*, um dos aplicativos do *JClíc*. O *JClíc player* é o programa principal, no qual se visualiza e se executa as atividades. Outro aplicativo do *JClíc* é o *JClíc reports* que permite gerenciar os dados de resultados obtidos pelos alunos ao realizarem as atividades dos projetos.

Na página <http://clíc.xtec.cat/en/jclíc/> encontram-se o *link* para baixar e instalar os programas que formam o *JClíc*, informações sobre suas características e exemplos da forma

como atua em diferentes sistemas. No Portal Educacional do Estado do Paraná<sup>5</sup> é possível acessar o manual em português para uso do *JClic*.

A figura 30 apresenta uma atividade desenvolvida com o *JClic* para o nodo *Conversão da Representação Língua Natural para a Representação Gráfica e da Representação Gráfica para a Língua Natural da Reta*, em que o aluno deve completar as lacunas de cada frase com uma das três opções mostradas pela janela. Se o aluno escolher a opção errada, as palavras que completam a frase dentro da janela ficam em vermelho, podendo abrir novamente as opções e escolher outra, escolhendo a opção correta as palavras ficam em azul, há também um som diferente para quando o aluno acerta ou erra, sendo que possui um tempo de 300 segundos para realizar a atividade. O *JClic* dispõe ao aluno, não só nesta atividade como nas outras, visualizar o número de acertos e tentativas que está obtendo ao ir realizando a atividade. Caso o aluno não realize a atividade no tempo estipulado pode tentar novamente clicando na imagem da bandeira verde, e completando a atividade pode clicar na seta que indica para a direita para realizar a próxima atividade com o *JClic*.

Figura 30: Atividade de preencher as lacunas no *JClic*.

A figura 31 apresenta o jogo de associação simples, desenvolvido para o nodo *Conversão da Representação Algébrica para a Representação Gráfica da Reta*, em que o

<sup>5</sup> <http://www.diaadia.pr.gov.br/multimeios/modules/noticias/article.php?storyid=86>

aluno deve relacionar a equação ao gráfico correspondente. Relacionado corretamente, o quadro que contém a equação se fecha ficando totalmente cinza, caso erre deve tentar outra associação. O aluno tem um tempo de 300 segundos para realizar este jogo e o ganha quando relacionar todas as linhas, deixando os quadros da linha de cima todos fechados recebendo a mensagem “parabéns”.

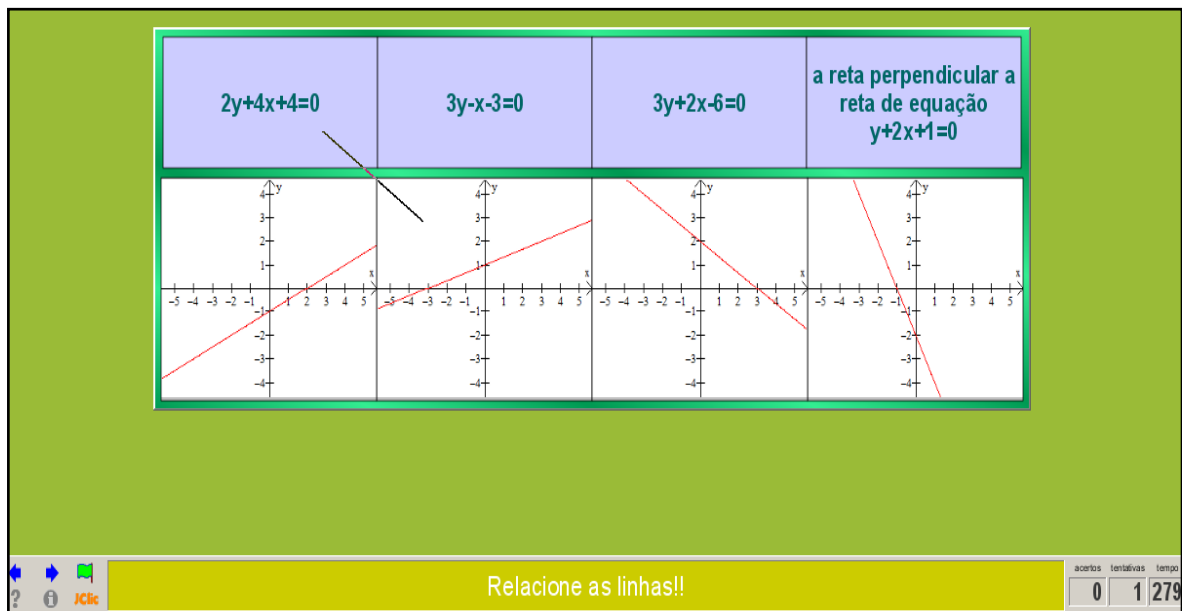


Figura 31: Atividade de associação simples no *JClíc*

Com o auxílio do *software flash* foram desenvolvidas, para cada nodo dos conceitos de Reta, atividades e jogos como: *quizes*, batalha naval e a atividade de escrever as coordenadas de pontos em um mapa. A figura 32 apresenta um dos *quizes*, desenvolvido para o nodo *Conversão da Representação Língua Natural para a Representação Gráfica e da Representação Gráfica para a Língua Natural da Reta*, em que o aluno analisa o gráfico dado e responde clicando em uma das três opções mostradas pelos botões ao passar o mouse. Caso o aluno clique em um botão de resposta errada aparece na tela a mensagem tente novamente, acertando a resposta, aparece na tela um novo gráfico para analisar, e após o aluno responder sobre o terceiro gráfico apresentado o *quiz* é encerrado tendo o aluno a opção de reiniciá-lo.

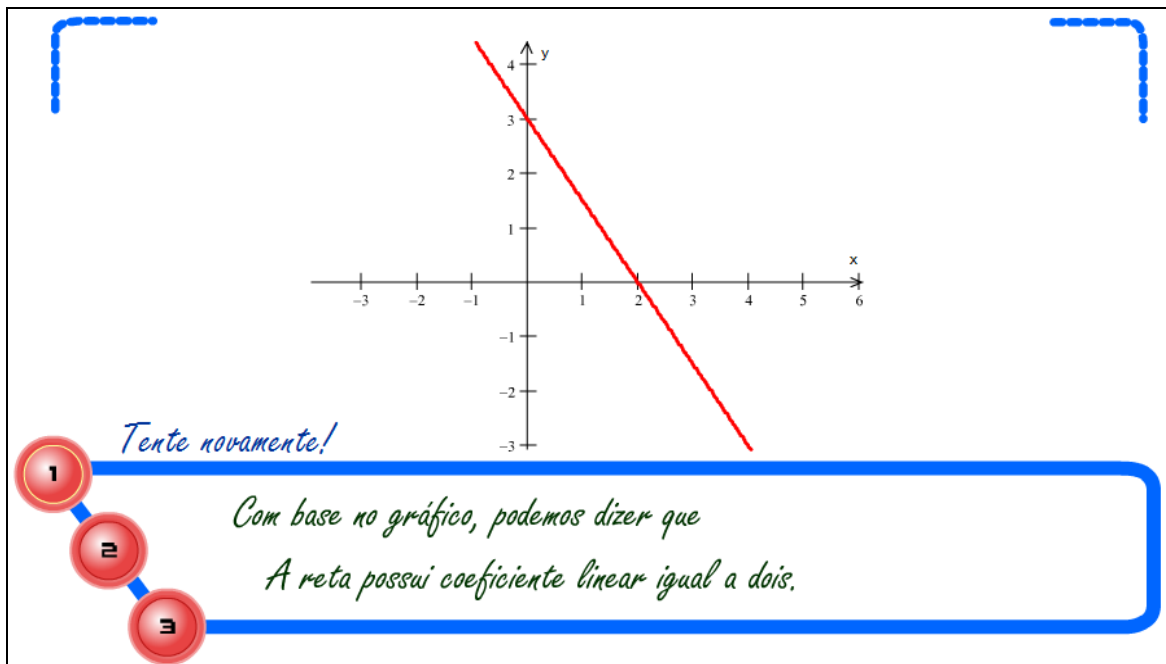


Figura 32: Quiz desenvolvido com o software *flash* para o SIENA

A figura 33 apresenta o jogo batalha naval, desenvolvido para o nodo *Conversão da Representação Gráfica para a Representação Algébrica da Reta*, em que o aluno precisa escrever a equação da reta que permite lançar o míssil, em linha reta pelo submarino, atingir e explodir o navio, caso não escreva a equação correta, o aluno recebe a informação “míssil perdido” devendo tentar outra vez, ao acertar, é apresentado ao aluno uma nova imagem com posições diferentes para o submarino e o navio, para que encontre outra equação da reta que corresponde a nova trajetória que o míssil deve percorrer para atingir o alvo. Para finalizar o jogo o aluno precisa encontrar as três equações, cada uma correspondente a trajetória correta do míssil lançado pelo submarino para explodir o navio, tendo a opção de jogar novamente.



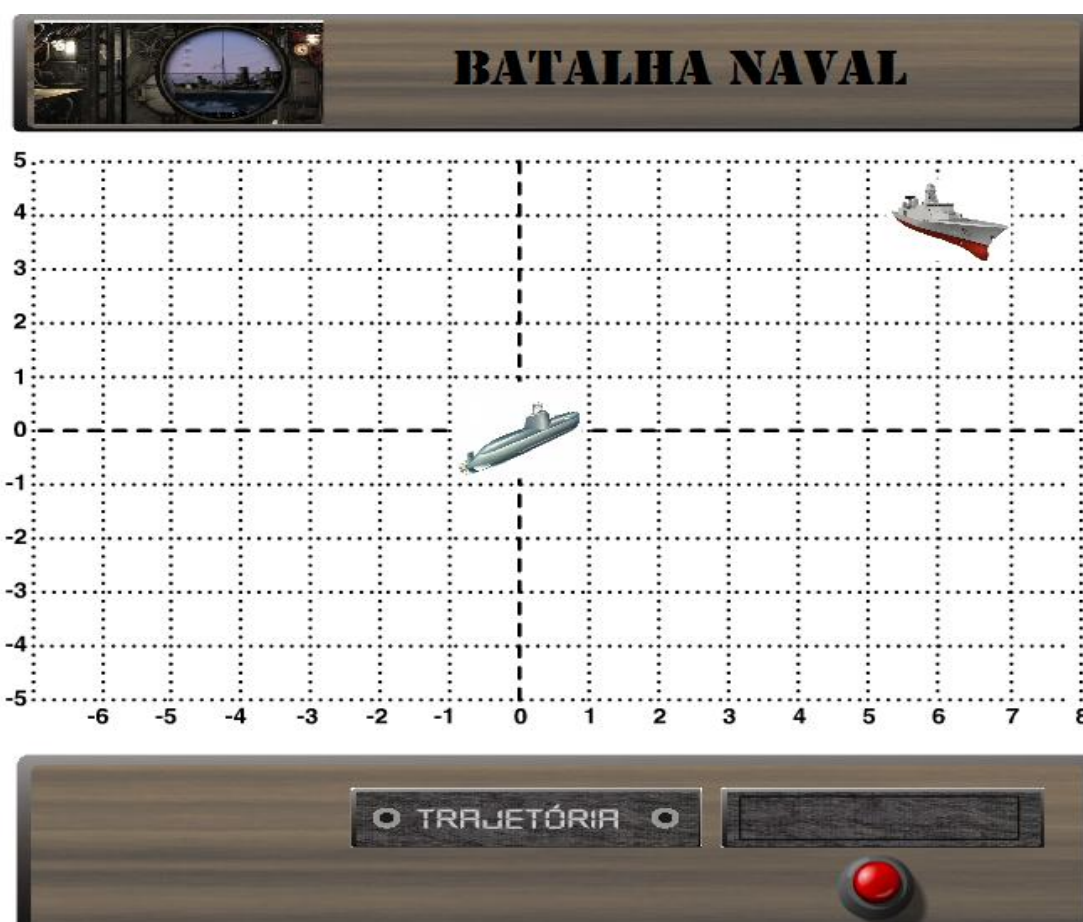


Figura 33: Jogo batalha naval desenvolvida com o software *flash* para o SIENA

A figura 34 mostra a atividade, em que o aluno deve escrever as coordenadas numéricas de pontos do mapa que representam a longitude e latitude da localização geográfica deste ponto. Ao errar, o aluno pode tentar outra vez, e ao escrever corretamente, deve clicar na opção “próxima” para escrever as coordenadas de outro ponto. A atividade possui 6 pontos diferentes e ao final apresenta ao aluno o seu número e percentual de acertos, tendo como objetivo, que o aluno realize a conversão do registro gráfico para a representação numérica das coordenadas de pontos, e foi desenvolvida para o nodo *Conversão da Representação Gráfica para a Representação Algébrica da Reta*, já que também foram elaboradas questões para os testes adaptativos que propõem a conversão entre estes registros.



Figura 34: Atividade didática com coordenadas de pontos desenvolvida com o software *flash* para o SIENA

No *design* do cenário da página inicial da sequência didática, em cada nodo dos conceitos de Circunferência, também estão documentos digitais, em que há *links* de acesso às atividades didáticas que contêm: o histórico e aplicações da Geometria Analítica, conforme figura 25; apresentação em *power point*, salvas em *html*, com um resumo ilustrado do conteúdo de Circunferência; atividades interativas como jogos de associação simples e complexa, frases com lacunas para preencher, *quizes*, atividades com simulações e animações gráficas; e *hiperlinks* dos *sites* que complementam a revisão do conteúdo de Circunferência para os alunos acessarem. A figura 35 apresenta o *design* do cenário da sequência didática com os *links* de acesso às atividades e *sites* do nodo *Conversão da Representação Língua Natural para Algébrica e da Representação Algébrica para a Língua Natural da Circunferência*.

UNIVERSIDADE LUTERANA DO BRASIL  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

Pesquisa para dissertação em Registros de Representação Semiótica e Geometria Analítica:  
Uma Experiência com o Ambiente Virtual SIENA.

Joseide Justin Dallemele



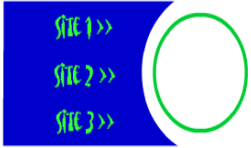



| ATIVIDADES RECOMENDADAS PARA REVISÃO   |   |  |   |
|--|---|--|---|
|     | CIRCUNFERÊNCIA  |  | SITES RECOMENDADOS  |
|  |  |  |  |
| ATIVIDADE DO JCLIC   | QUIZ  | QUIZ   | Engrenagem  |
|     |  |  |  |
| Com esta atividade será possível rever conceitos relacionados a Geometria Analítica. | Responda clicando nos botões  | Responda clicando nos botões   | Responda as perguntas   |

Figura 35: Cenário da sequência didática do nodo Conversão da Rep. Língua Natural para Algébrica e da Rep. Algébrica para a Língua Natural da Circunferência

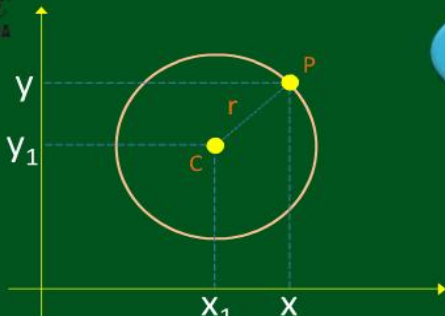
As figuras 36 e 37 apresentam os *slides* sobre o resumo do conteúdo de Circunferência para a revisão, desenvolvidos com o auxílio do *software power point*, em que apresentam explicações ilustradas utilizando os registros língua natural, algébrico e gráfico, salvas em *html*. Estas explicações estão nos cenários das sequências didáticas de todos os nodos dos conceitos de Circunferência.



Figura 36: Slide do resumo sobre circunferência

ULBRA

Equação da circunferência



Calculando a distância entre "C" e "P" temos a equação reduzida

Resolvendo os quadrados fica....

Equação Reduzida

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=r^2$$

Equação Geral

$$ax^2+by^2+cx+dy+e=0$$

Lembrando que  $x_1$  e  $y_1$  são as coordenadas do centro da circunferência

Algumas condições de existência

Equação Geral

$$ax^2+by^2+cx+dy+e=0$$

"a" e "b" precisam ser iguais

Na equação geral não existe o termo misto xy








Figura 37: Slides do resumo sobre circunferência

Para complementar o resumo sobre Circunferência foram disponibilizados *hiperlinks*, na sequência didática de todos os nodos dos conceitos de Circunferência, com *sites* que contém explicações e alguns exemplos de exercícios do conteúdo, para o aluno pesquisar. Os endereços dos *sites* disponibilizados estão apresentados no quadro conforme figura 38:

| Sites         | Endereços   |
|---------------|---|
| Só matemática | <a href="http://www.somatematica.com.br/emedio/circunferencia/circunf.php">http://www.somatematica.com.br/emedio/circunferencia/circunf.php</a> |
| InfoEscola    | <a href="http://www.infoescola.com/geometria-plana/circunferencia/">http://www.infoescola.com/geometria-plana/circunferencia/</a>               |
| Wikipedia     | <a href="http://pt.wikipedia.org/wiki/Circunferência">http://pt.wikipedia.org/wiki/Circunferência</a>   |

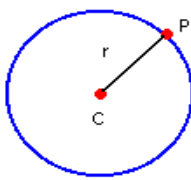
Figura 38: Quadro dos sites disponibilizados sobre o conteúdo de circunferência

A figura 39 apresenta uma parte do conteúdo do *site* “Só Matemática” sobre equações da circunferência.

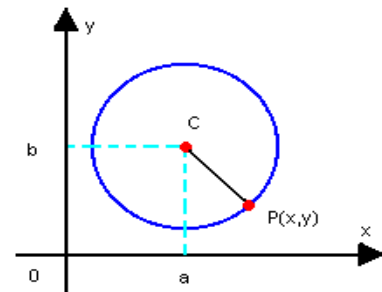
**Geometria Analítica: Circunferência**

**Equações da circunferência**  
**Equação reduzida**

Circunferência é o conjunto de todos os pontos de um plano equidistantes de um ponto fixo, desse mesmo plano, denominado centro da circunferência:



Assim, sendo C(a, b) o centro e P(x, y) um ponto qualquer da circunferência, a distância de C a P( $d_{CP}$ ) é o raio dessa circunferência. Então:



$$d_{CP} = \sqrt{(X_P - X_C)^2 + (Y_P - Y_C)^2} \Rightarrow \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2}$$

Figura 39: Imagem do conteúdo do site Só Matemática

Assim como nos nodos dos conceitos de Reta, na sequência didática para cada nodo dos conceitos de Circunferência, também foram desenvolvidos, com o *software JClíc*, projetos de atividades contendo duas atividades em cada projeto para cada nodo, como jogos e atividades interativas de associação simples e complexa e preencher lacunas, de acordo com a conversão proposta entre os Registros de Representação Semiótica, em cada nodo.

A figura 40 apresenta a atividade de preencher lacunas, criada para o nodo *Conversão da Representação Língua Natural para Algébrica e da Representação Algébrica para a Língua Natural da Circunferência*, em que o aluno tem um tempo de 300 segundos para escrever nas lacunas as informações que completam as frases, e ao final clicar em verificação para ver se preencheu corretamente, caso tenha escrito algo que não corresponda a informação, o *JClíc* indica na cor vermelha as letras ou palavras que devem ser modificadas. Encerrando a atividade o aluno pode realizar a próxima atividade, que está neste projeto do *JClíc*, clicando na seta que indica para a direita.

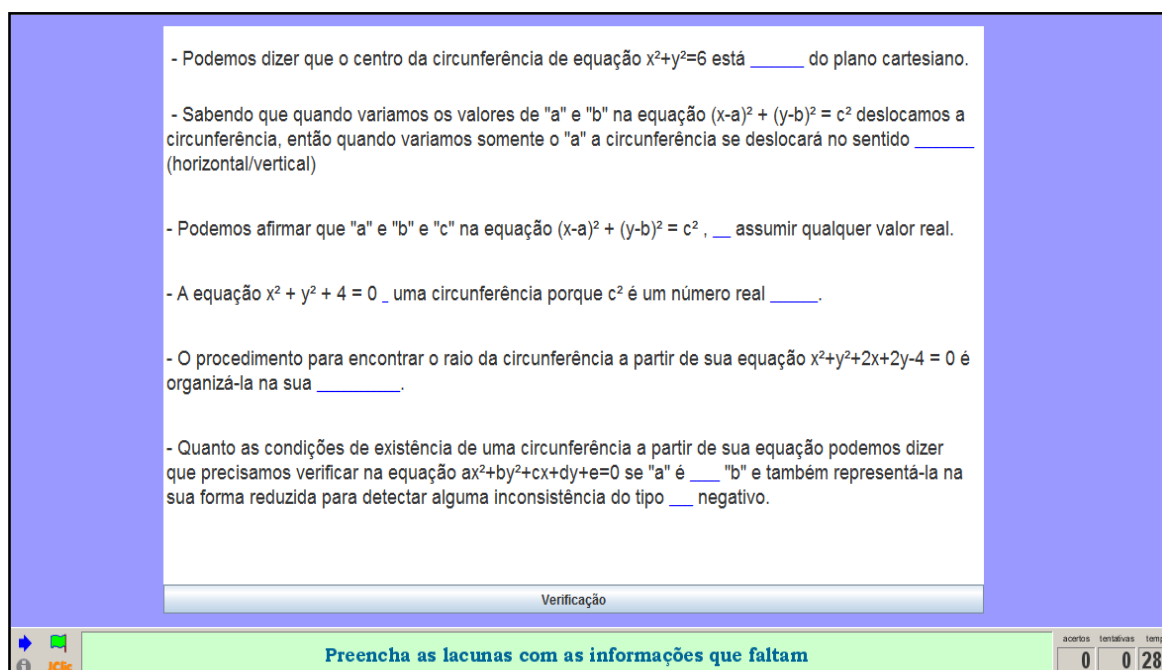


Figura 40: Atividade de preencher lacunas no *JClíc*

A figura 41 apresenta um jogo de associação complexa no *JClíc*, criado para o nodo *Conversão da Representação Língua Natural para a Representação Gráfica e da Representação Gráfica para a Língua Natural da Circunferência*, em que o aluno, num tempo de 300 segundos, deve relacionar a informação no registro língua natural ao gráfico

correspondente, sendo que um gráfico pode estar relacionado a mais de uma informação, e à medida que o aluno relaciona corretamente, os quadros com as informações são fechados, encerrando o jogo.

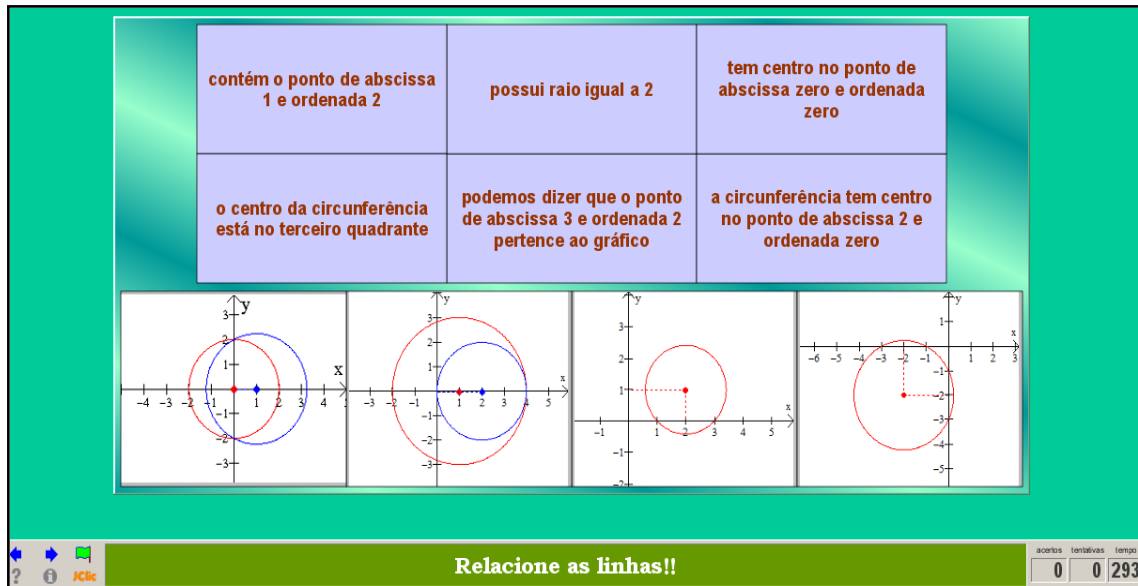


Figura 41: Jogo de associação complexa no JClic

Com o auxílio do *software flash* foram desenvolvidas, para cada nodo dos conceitos de Circunferência, atividades e jogos como: *quizes* e problemas com simulações e animações gráficas. A figura 42 apresenta um dos *quizes*, desenvolvido para o nodo *Conversão da Representação Algébrica para a Representação Gráfica da Circunferência*, em que o aluno deve responder qual gráfico corresponde à equação clicando em uma das três opções, cada uma contendo um gráfico diferente, mostrados pelos botões ao passar o mouse. Caso o aluno clique em um botão de resposta errada aparece na tela a mensagem “tente novamente”, acertando a resposta, automaticamente vai para outra pergunta do *quiz* que ao final da terceira pergunta é encerrado podendo o aluno clicar no botão iniciar para realizá-lo novamente.

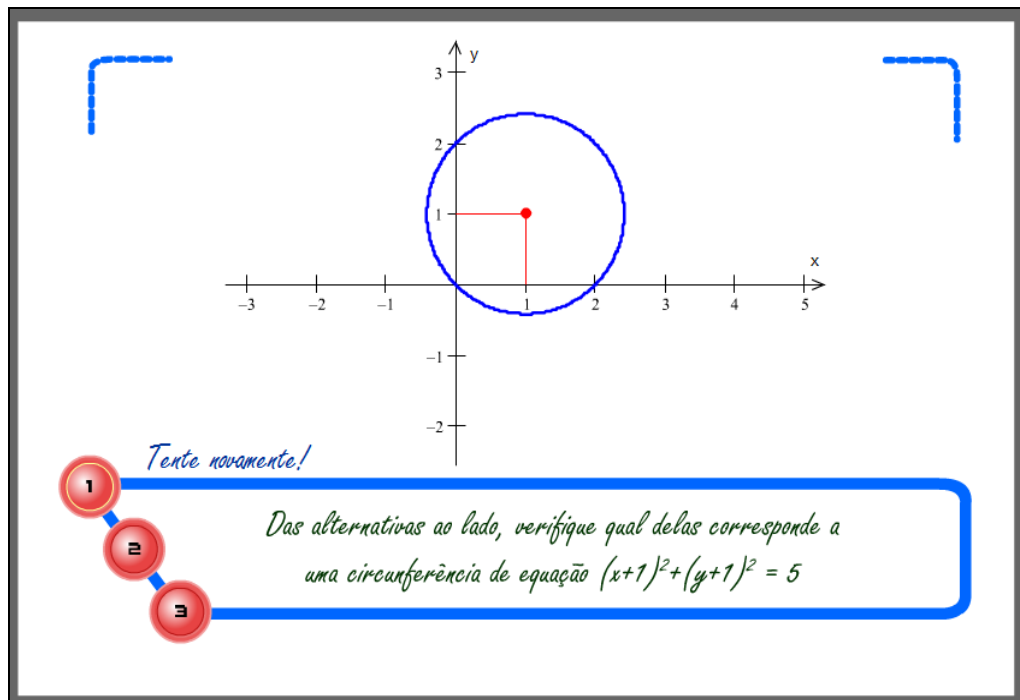
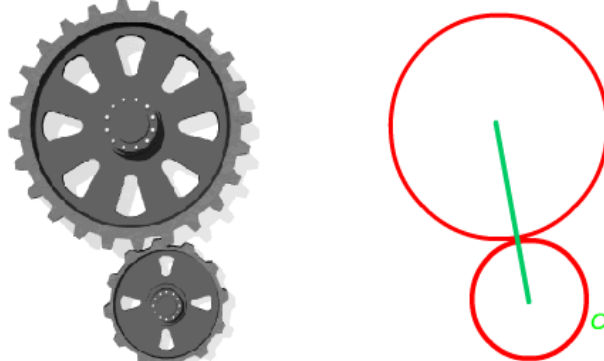


Figura 42: Quiz desenvolvido com o software *flash*

A figura 43 apresenta a questão 2 de um problema que contém uma simulação de engrenagens, desenvolvido com o *software flash*, para o nodo *Conversão da Representação Língua Natural para Algébrica e da Representação Algébrica para a Língua Natural da Circunferência*, em que o aluno deve digitar a equação que responde o problema na linha pontilhada de acordo com o exemplo em vermelho. Após o aluno ter respondido corretamente a questão 1, referente as engrenagens, automaticamente lhe é apresentado a questão 2, caso o aluno não responda corretamente as questões, aparece na tela a mensagem “tente novamente”, e ao concluir, “parabéns por concluir” podendo reiniciar o problema, caso deseje. Na ilustração deste problema foi utilizado o registro figural de circunferência.



Questão 2



Clique sobre a linha pontilhada, digite a resposta e clique em responder

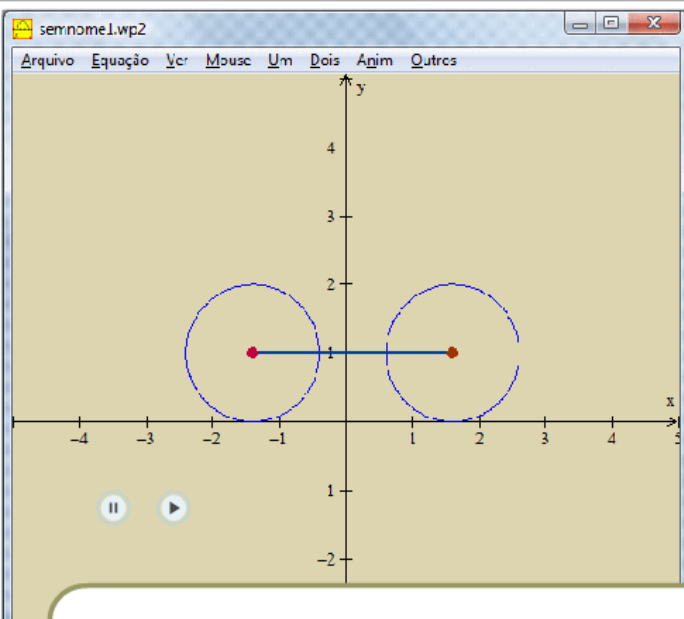
Uma máquina CNC, que fabrica as coroas da engrenagem, precisa saber o lugar geométrico de todos os pontos da circunferência de comprimento  $10\pi$ , centrada na origem, que marcam o limite da profundidade(tamanho) dos dentes da coroa para fabricá-la. Então o lugar geométrico dos pontos da coroa maior estão de acordo com a equação

Ex.:  $axx+byy+cx+dy+e=0$  sendo  $[a,b,c,d,e]$  números Reais

Responder

Figura 43: Problema desenvolvido com o software *flash*

Na figura 44, apresenta-se uma atividade com uma animação gráfica que representa a translação de uma circunferência paralelamente ao eixo das abscissas, simulando uma bicicleta andando em um plano, desenvolvido com os *softwares winplot e flash*, para o nodo *Conversão da Representação Gráfica para a Representação Algébrica da Circunferência*, em que o aluno deve escrever a equação que representa a animação gráfica, de acordo com exemplo em vermelho, que utiliza a registro algébrico conforme escreve-se equações no *software winplot*. Caso o aluno erre a equação, recebe a mensagem “tente novamente”, e ao acertar, “parabéns por concluir” tendo a opção de reiniciá-la. Para melhor observação da animação gráfica, pelo aluno, criou-se um botão de pausa, assim, o aluno pode, por exemplo, visualizar com maior facilidade no gráfico que, embora o ponto do centro das circunferências muda a medida em que vai ocorrendo a translação, as ordenadas destes pontos têm sempre o mesmo valor, modificando apenas o valor da abscissa.



Esta animação foi feita com o auxílio do software winplot. Trata-se de uma animação gráfica para ilustrar a translação de uma circunferência paralelamente ao eixo das abcissas através da variação controlada de um parâmetro representado por uma letra minúscula do alfabeto.

Com base na ilustração, determine a equação que representa a animação gráfica de qualquer das circunferências com a variação determinada pelo parâmetro "p".

Ex.:  $(x-a)^2+(y-b)^2=c$  sendo  $[a,b,c]$  números Reais

Figura 44: Atividade com animação gráfica desenvolvida com os softwares winplot e *flash*

## 4 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Nesta seção apresenta-se, a partir da metodologia e dos instrumentos empregados na investigação, os dados coletados e a análise e discussão dos mesmos de forma descritiva sob a ótica da teoria dos Registros de Representação Semiótica, a qual foi escolhida como fundamentação teórica desta pesquisa.

### 4.1 PERFIL DOS ALUNOS

O grupo que participou da experiência era constituído de 6 alunos do sexo masculino e 4 do sexo feminino. Cinco destes alunos residem em Porto Alegre e na região metropolitana de Porto Alegre, sendo um apenas, destes cinco, residente em Canoas. Dos demais, dois moram em São Leopoldo, um em Triunfo, um na Barra do Ribeiro e outro em Guaíba.

Quanto à faixa etária destes alunos, percebe-se, a partir da figura 45, que há predominância na faixa de 19 a 23 anos, ou seja, metade do grupo está nesta faixa de idade.

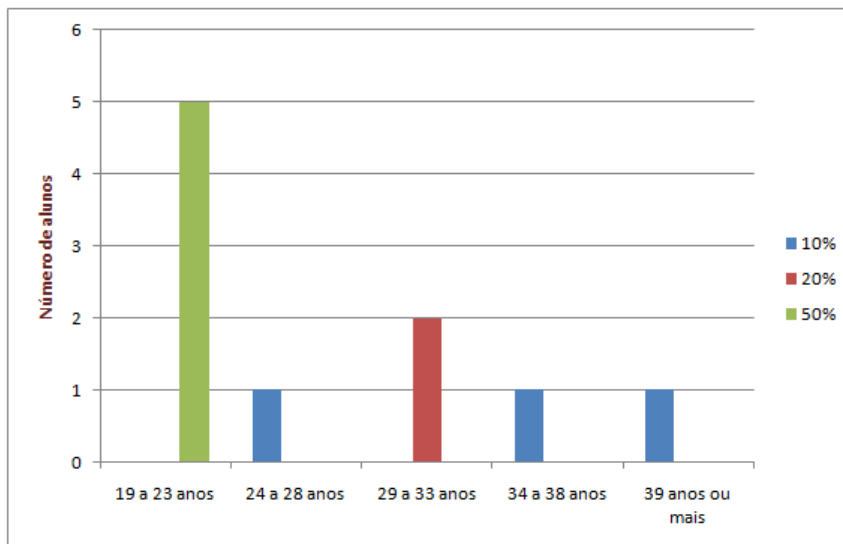


Figura 45: Gráfico da faixa etária dos alunos participantes da pesquisa

Com relação ao número de disciplinas já cursadas no curso de Licenciatura em Matemática, observou-se que a maioria possui entre 6 e 10 disciplinas, sendo que cinco, dos dez alunos investigados, já estudaram o conteúdo de Geometria Analítica, também, neste curso. A figura 46 apresenta, o número de disciplinas cursadas pelo grupo no curso de Licenciatura em Matemática.

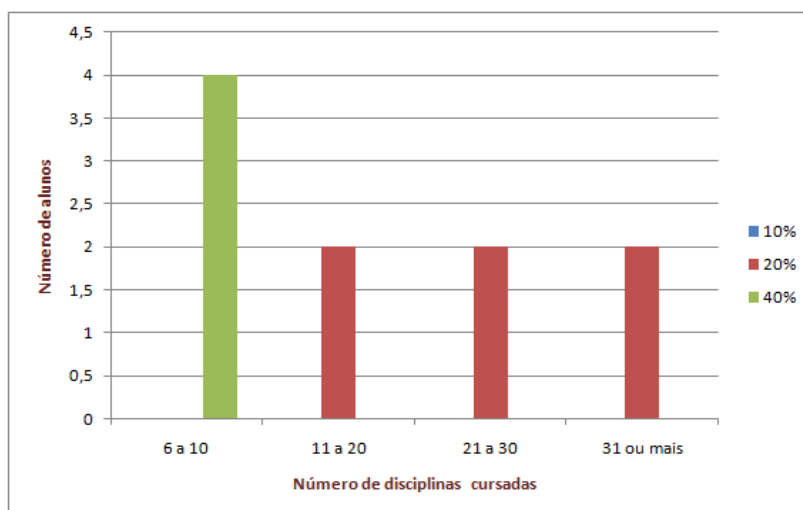


Figura 46: Gráfico do número de disciplinas cursadas pelos alunos participantes da pesquisa no curso de Licenciatura em Matemática

Com relação ao Ensino Médio, quanto ao fato de terem estudado em escola pública ou particular, constatou-se que 8 dos dez alunos estudaram em escola pública, sendo que um destes oito cursou o EJA, e apenas dois alunos estudaram em escola particular.

Sobre a atuação profissional destes alunos, constatou-se que 2 alunos não trabalham, enquanto que 8 trabalham. Destes oito, apenas um trabalha 12 horas semanais como professor de Matemática no EJA, sendo este bolsista do Curso de Licenciatura em Matemática cumprindo horas como monitor na ULBRA, e um como oficineiro de Matemática em escolas municipais. Os demais trabalham em locais diversos, como em indústrias, Companhia Estadual de Energia Elétrica, Secretaria Estadual de Educação, em escola municipal como monitor e no projeto municipal Primeira Infância Melhor.

Por fim, a carga horária de trabalho destes oito alunos que exercem uma atividade profissional, varia de 12 a 40 horas ou mais semanais, sendo que quatro alunos trabalham 40 horas semanais, um trabalha mais de 40 horas semanais, um trabalha 30 horas semanais, um 20 horas, e um 12 horas semanais. Logo, verifica-se que a maioria dos alunos trabalha e estuda, dividindo seu tempo entre uma atividade profissional, o curso de Licenciatura em Matemática e sua vida pessoal.

#### 4.2 ANÁLISE DOS BANCOS DE DADOS DO SIENA E DOS REGISTROS DOS ALUNOS NO DESENVOLVIMENTO DOS TESTES ADAPTATIVOS

O desempenho dos alunos foi analisado através dos dois bancos de dados, gerado

pelo SIENA, para cada teste realizado pelos alunos em cada nodo do PCIG, como mostrado anteriormente nas figuras 5 e 6. As notas estão compreendidas no intervalo  $[0,1$  e  $1)$ , sendo que foi estabelecido o índice 0,6 para o desempenho considerado satisfatório para cada nodo. A tabela 1 apresenta os resultados que os alunos obtiveram nos testes adaptativos para cada nodo.

Tabela 1  
Desempenho dos alunos em cada nodo do PCIG

| Alunos | Testes  | Nodos |         |         |         |         |         |         |         |
|--------|---------|-------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
|        |         | 1     | 2       | 3       | 4       | 5       | 6       | 7       | 8       |
| 1      | Teste 1 | 0,964 | 0,496   | 0,966   | 0,797   | 0,273   | 0,941   | 0,995   | 0,889   |
|        | Teste 2 |       | 0,855   |         |         | 0,458   |         |         |         |
|        | Teste 3 |       |         |         |         | 0,976   |         |         |         |
| 2      | Teste 1 | 0,2   | 0,143   | 0,2     | 0,1     | 0,273   | 0,2     | 0,2     | 0,1     |
|        | Teste 2 | 0,226 | 0,663   | 0,333   | 0,651   | 0,396   | 0,605   | 0,751   |         |
|        | Teste 3 | 0,472 |         | 0,692   |         |         |         |         |         |
| 3      | Teste 1 | 0,338 | não fez | não fez | não fez | não fez | não fez | não fez | não fez |
|        | Teste 2 | 0,445 |         |         |         |         |         |         |         |
|        | Teste 3 | 0,954 |         |         |         |         |         |         |         |
| 4      | Teste 1 | 0,143 | 0,496   | 0,982   | 0,226   | 0,368   | 0,338   | 0,333   | 0,143   |
|        | Teste 2 | 0,445 | 0,923   |         | 0,819   | 0,76    | 0,747   | 0,923   | 0,678   |
|        | Teste 3 | 0,76  |         |         |         |         |         |         |         |
| 5      | Teste 1 | 0,1   | 0,304   | 0,728   | 0,999   | 0,226   | 0,338   | 0,273   | 0,2     |
|        | Teste 2 | 0,944 | 0,496   |         |         | 0,396   | 0,338   | 0,855   | 0,368   |
|        | Teste 3 |       | 0,751   |         |         | 0,887   | 0,98    |         | 0,801   |
| 6      | Teste 1 | 0,2   | 0,143   | 0,821   | 0,1     | 0,338   | 0,226   | 0,1     | 0,2     |
|        | Teste 2 | 0,304 | 0,143   |         | 0,143   | 0,98    | 0,273   |         | 0,467   |
|        | Teste 3 | 0,338 |         |         |         |         | 0,779   |         |         |
| 7      | Teste 1 | 0,2   | 0,143   | não fez | não fez | não fez | não fez | não fez | não fez |
|        | Teste 2 | 0,678 | 0,988   |         |         |         |         |         |         |
|        | Teste 3 |       |         |         |         |         |         |         |         |
| 8      | Teste 1 | 0,143 | 0,93    | 0,987   | 0,273   | 0,304   | 0,797   | 0,304   | 0,163   |
|        | Teste 2 | 0,98  |         |         | 0,747   | 0,979   |         | 0,535   | 0,333   |
|        | Teste 3 |       |         |         |         |         |         | 0,663   | 0,663   |
| 9      | Teste 1 | 0,143 | 0,663   | 0,605   | 0,96    | 0,2     | 0,999   | 0,724   | 0,988   |
|        | Teste 2 | 0,847 |         |         |         | 0,982   |         |         |         |
|        | Teste 3 |       |         |         |         |         |         |         |         |
| 10     | Teste 1 | 0,2   | 0,899   | 0,605   | 0,922   | 0,273   | 0,434   | 0,226   | 0,999   |
|        | Teste 2 | 0,226 |         |         |         | 0,939   | 0,988   | 0,333   |         |
|        | Teste 3 | 0,954 |         |         |         |         |         | 0,998   |         |

| Nodos |  |
|-------|--|
| 1-    | Conversão da Língua Natural <--> Representação Algébrica da Reta                 |
| 2-    | Conversão da Língua Natural <--> Representação Gráfica da Reta                   |
| 3-    | Conversão da Representação Algébrica --> Representação Gráfica da Reta           |
| 4-    | Conversão da Representação Gráfica --> Representação Algébrica da Reta           |
| 5-    | Conversão da Língua Natural <--> Representação Algébrica da Circunferência       |
| 6-    | Conversão da Língua Natural <--> Representação Gráfica da Circunferência         |
| 7-    | Conversão da Representação Algébrica --> Representação Gráfica da Circunferência |
| 8-    | Conversão da Representação Gráfica --> Representação Algébrica da Circunferência |

A seguir ilustra-se, na figura 47, o gráfico com os resultados dos alunos no teste 1, para cada nodo do PCIG, conforme a notas fornecidas pelo banco de dados do SIENA e apresentadas na tabela 1.

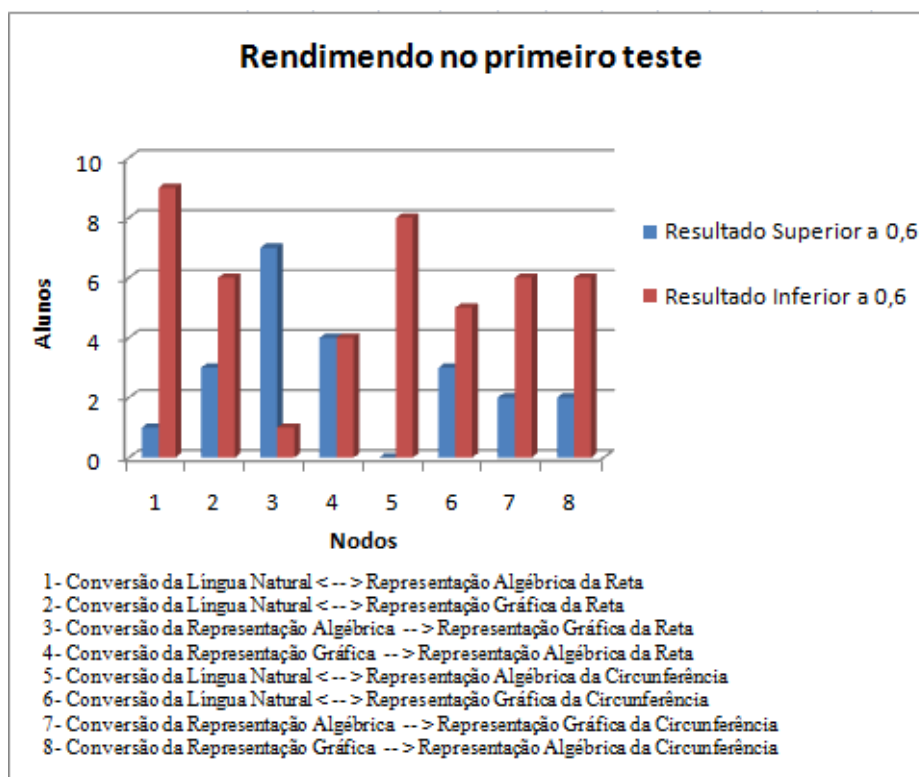


Figura 47: Gráfico do rendimento dos alunos no primeiro teste em cada nodo do PCIG

Observa-se que, neste primeiro teste, nos nodos 1 e 5, respectivamente denominados como, *Conversão da Representação Língua Natural para a Representação Algébrica e da Representação Algébrica para a Língua Natural da Reta* e *Conversão da Representação Língua Natural para a Representação Algébrica e da Representação Algébrica para a Língua Natural da Circunferência*, um maior número de alunos apresentou dificuldades, pois no nodo 1, nove dos dez alunos que realizaram o teste obtiveram resultados abaixo de 0,6, e no nodo 5, os oito alunos que realizaram o teste tiveram desempenho inferior a 0,6. Assim, evidencia-se, neste grupo de alunos pesquisados, maior dificuldade na conversão entre os registros que envolvem a língua natural e o algébrico, tanto para o conteúdo de Reta quanto para o de Circunferência, confirmando, assim, a colocação de Duval (2003), em que uma situação de conversão das representações torna-se mais complexa quando um dos registros é um registro plurifuncional, como neste caso, a língua natural. Como exemplo, o autor menciona que “basta lembrar, aqui, as questões - há decênios recorrentes - de compreensão dos mais simples enunciados de problemas de aplicação de aritmética ou álgebra, em que seria suficiente

‘traduzir’ os dados do enunciado” (DUVAL, 2003, p.18). O autor, ressalta ainda, que “a passagem de um enunciado em língua natural a uma representação em um outro registro toca um conjunto complexo de operações para designar os objetos” (DUVAL, 2003, p.18).

Em contraste, no nodo *Conversão da Representação Algébrica para a Representação Gráfica da Reta*, a maioria dos alunos atingiram um resultado superior a 0,6, pois dos oito alunos que realizaram o teste, apenas um obteve resultado inferior a este. Tal desempenho talvez possa ser caracterizado pelo fato de que na maioria das vezes os livros didáticos e o ensino da Matemática, particularmente da Geometria Analítica, dá mais ênfase nos tratamentos destes registros e neste sentido da conversão, porém verifica-se que o mesmo não aconteceu para o conteúdo de Circunferência na conversão entre estes mesmos registros.

Além disso, observa-se que em todos os nodos ao menos um aluno apresentou desempenho inferior a 0,6, fazendo com que o SIENA, a cada nodo em que um aluno não obteve tal resultado, o direcionasse a realizar estudos de revisão e atividades didáticas propostas na sequência didática, a fim de possibilitar uma recuperação individualizada do conteúdo proposto no nodo não aprovado, para então realizar um segundo teste no mesmo. A figura 48 ilustra o gráfico do rendimento dos alunos que realizaram o segundo teste nos nodos em que não foram aprovados, conforme as notas apresentadas na tabelas 1, as quais foram fornecidas pelo sistema SIENA.

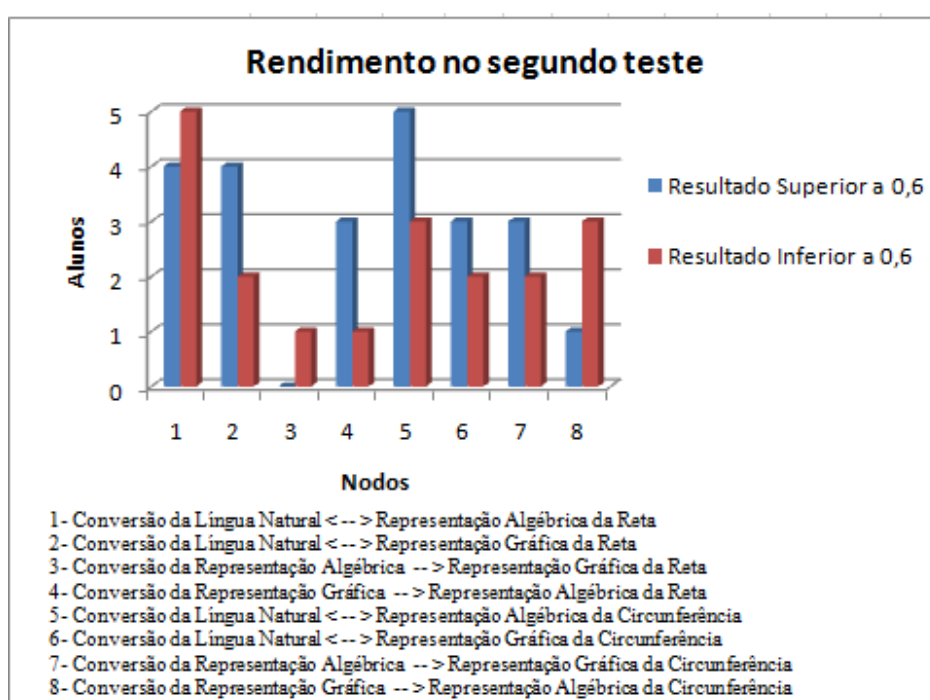


Figura 48: Gráfico do rendimento dos alunos no segundo teste em cada nodo do PCIG

Para os alunos que realizaram o segundo teste, nos nodos em que não haviam alcançado o índice 0,6, após os estudos de recuperação, os dados fornecidos pelo banco de dados do SIENA, conforme a tabela 1, apontam uma melhora significativa no desempenho destes, embora, alguns alunos não tenham, ainda, atingido o resultado considerado satisfatório neste segundo teste, necessitando voltar a realizar os estudos de recuperação, para então realizar um terceiro teste, caso se dispusessem.

A partir do gráfico do rendimento dos alunos no segundo teste, conforme figura 48, observa-se que o nodo 1, *Conversão da Representação Língua Natural para a Representação Algébrica e da Representação Algébrica para a Língua Natural da Reta*, continuou apresentando um maior número de alunos com dificuldades, pois dos nove alunos que precisaram realizar este teste, cinco obtiveram desempenho inferior a 0,6. Com relação ao nodo 5, *Conversão da Representação Língua Natural para a Representação Algébrica e da Representação Algébrica para a Língua Natural da Circunferência*, (o qual, também apresentou maior número de alunos com dificuldades no primeiro teste), dos oito alunos que realizaram o segundo teste, cinco atingiram rendimento superior a 0,6, e três ainda continuaram apresentando dificuldades. Verifica-se ainda, uma dificuldade maior no nodo 8, *Conversão da Representação Algébrica para a Representação Gráfica da Reta*, em que três dos quatro alunos que realizaram o teste tiveram resultados abaixo do satisfatório, e com relação ao nodo 3, *Conversão da Representação Algébrica para a Representação Gráfica da Reta*, em que apenas um aluno havia apresentado desempenho inferior a 0,6, constata-se que este continuou apresentando dificuldades, pois não atingiu o resultado considerado satisfatório, embora tenha apresentado um melhor desempenho em relação ao primeiro teste.

Nos demais nodos, neste segundo teste, a maioria dos alunos que o fizeram para cada nodo, apresentaram aumento no rendimento inicial atingindo resultados acima de 0,6, porém em todos os nodos, pelo menos um aluno ainda apresentou dificuldades, necessitando realizar novamente estudos de recuperação para realizar um terceiro teste, caso se dispusesse a fazê-lo. Conjectura-se que um fator para esta necessidade, pode residir no fato de que alguns testes apresentaram algumas questões diferentes e com grau de dificuldade diferente das lançadas pelo sistema SIENA no primeiro teste, suscitando por parte dos alunos, conceitos e tratamentos diferentes, nos quais, estes, também apresentaram dificuldades.

Com relação aos alunos que se dispuseram a realizar um terceiro teste nos nodos em que não alcançaram o resultado considerado satisfatório, os dados apontam que no nodo *Conversão da Representação Língua Natural para a Representação Algébrica e da*



*Representação Algébrica para a Língua Natural da Reta*, dois dos cinco alunos que realizaram o teste obtiveram resultados abaixo de 0,6, enquanto que nos demais nodos em que os alunos que realizaram o terceiro teste, todos obtiveram desempenho superior a este. A figura 49 apresenta o gráfico do rendimento dos alunos que realizaram o terceiro teste nos nodos em que não obtiveram resultado satisfatório no segundo teste, de acordo com as notas fornecidas pelo SIENA e mostradas na tabela 1.

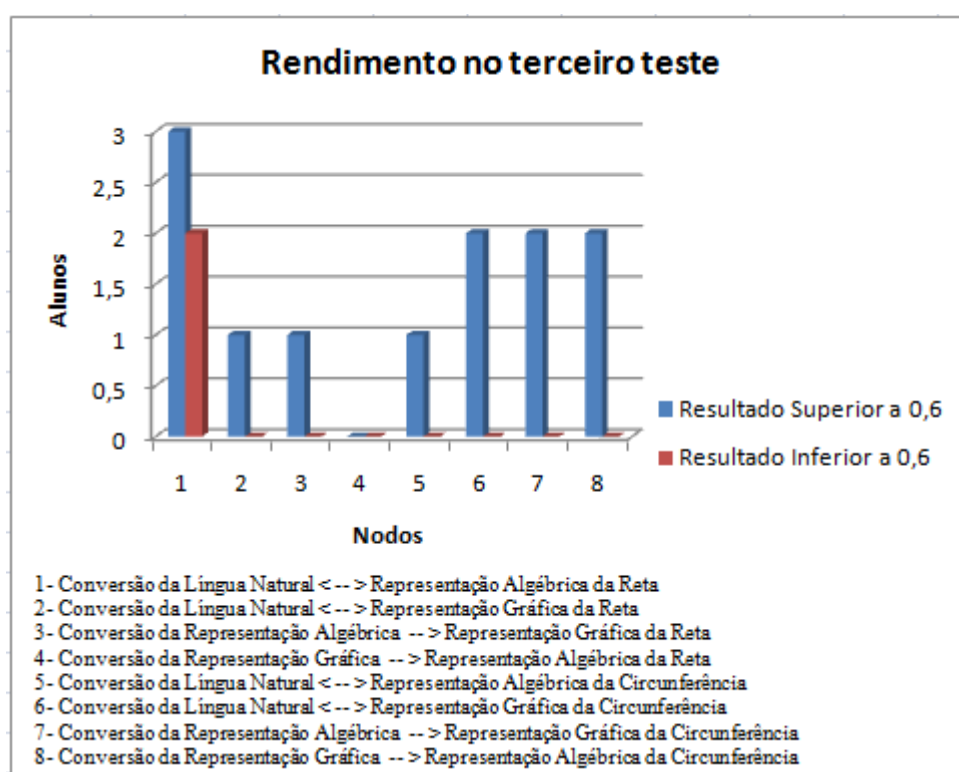


Figura 49: Gráfico do rendimento dos alunos no terceiro teste em cada nodo do PCIG

Cabe salientar, que os alunos que obtiveram os melhores resultados nos testes realizados e necessitaram menos estudos de recuperação, conforme a tabela 1, foram os que possuíam o maior número de disciplinas cursadas, no curso de Licenciatura em Matemática, tendo estudado, também neste curso, o conteúdo de Geometria Analítica. E comparando os resultados apresentados na tabela 1, em relação a Reta e Circunferência os alunos apresentaram mais dificuldades nos nodos que envolviam o conteúdo de Circunferência.

#### 4.2.1 Análise do nodo Conversão da Representação Língua Natural para a Representação Algébrica e da Representação Algébrica para a Língua Natural da Reta

As dificuldades apresentadas nos testes deste nodo, sobretudo no primeiro teste, de modo geral, estavam ligadas a compreensão do conteúdo, dificuldades de interpretação dos enunciados em língua natural e abstração, sendo que estas, segundo Duval (2004), estão intimamente relacionadas a mobilização e articulação de alguns registros de representação. No primeiro teste deste nodo, por exemplo, 7 dos 10 alunos participantes fizeram uso do Registro Gráfico como registro intermediário para perceber melhor onde estão os quadrantes e pontos e, assim, relacioná-los, como mostra, o caso do aluno 8, em seus registros de resoluções das questões na figura 50.

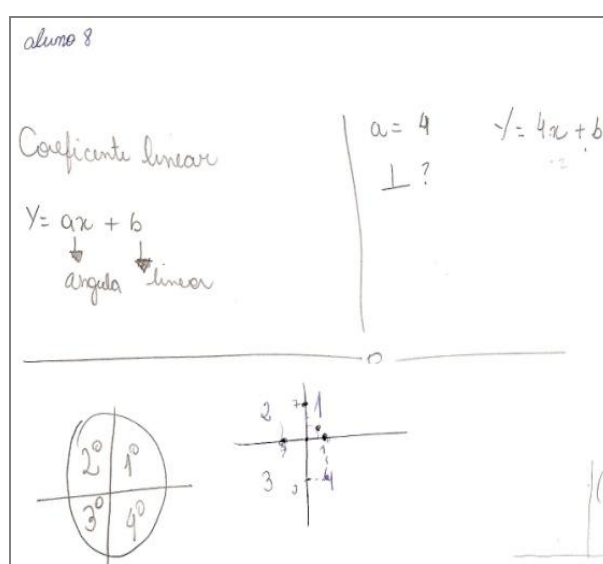


Figura 50: Registro 1 do aluno 8

A necessidade do uso de um registro intermediário, para melhor compreensão do problema, refere-se ao que Duval (apud Damm, 2002), chama da necessidade de complementaridade de registros frente às limitações representativas específicas a cada registro, e como exemplo, menciona que uma linguagem não oferece as mesmas possibilidades de representações que uma figura ou diagrama.

Ainda sobre os registros escritos pelos alunos, estes apresentaram contas esparsas, com muitos pontos de interrogação e questionamentos sobre conceitos como: ordem dos quadrantes, identificação dos coeficientes angular e linear na equação, relação entre coeficiente angular e o ângulo correspondente, e ainda, a relação deste com o conceito de paralelismo e perpendicularismo. Mostraram, também, dificuldades em escrever, numericamente, a ordem das coordenadas de um ponto (qual era a abscissa e qual a ordenada). Um exemplo disso, no sentido da representação língua natural para a

representação algébrica envolveu a seguinte questão: “*Duas retas  $r$  e  $s$  têm coeficientes angulares iguais a  $A$  e  $B$  respectivamente. Para que elas sejam perpendiculares, a relação verdadeira é*”.

Esta questão foi recorrente na maioria dos testes e inicialmente resolvida de forma errada. Diz-se inicialmente porque, assim como esta, algumas questões se repetiram nos testes seguintes, nos nodos em que o aluno reprovava, favorecendo, juntamente com seus registros escritos, a observação do seu rendimento. Ainda, com relação à questão apresentada, a pesquisa apontou que, oito alunos dos dez que responderam esta questão, não compreenderam a pergunta, pois não lembravam do conceito de coeficiente angular e não tinham a compreensão da noção de perpendicularismo e sua implicação no registro algébrico das Retas. Contudo, nos testes seguintes realizados pelos oito alunos reprovados, e que apresentaram esta mesma pergunta, 6 alunos acertaram a questão e tornaram a acertar no terceiro teste (para o caso dos que reprovaram no segundo teste).

O próximo exemplo ilustra três testes consecutivos realizados pelo aluno 4, entre os quais, foi oportunizado, através do sistema SIENA, a revisão do conteúdo concernente ao nodo em questão. É importante salientar que, após oportunizar um momento de revisão dos conteúdos abordados e atividades didáticas sobre os mesmos, a fim de contribuir para sanar dúvidas e dificuldades percebidas pelos alunos em testes anteriores, conforme se propõe a sequência didática para qual o sistema conduz o aluno, o sistema apresentava novas questões, não necessariamente as mesmas, mas que continham elementos já abordados em questões de testes anteriores, e também questões iguais ou novas, conforme mostra o exemplo a seguir, fornecido pelo banco de dados do SIENA no primeiro, segundo e terceiro teste, realizados pelo aluno 4, nas figuras 51, 52 e 53, respectivamente.

| Nota: 0.143 |                    |                               |  |              |
|-------------|--------------------|-------------------------------|--|--------------|
| Respuesta   | Respuesta correcta | Tiempo(antes de que se acabe) | Pregunta   | Puntos antes |
| 3           | false              | 191                           | Atribuindo valores positivos à variável “ $k$ ” da equação $3y + x + k = 0$ , podemos afirmar que  | 0.100        |
| 0           | <u>false</u>       | 202                           | A reta com coeficiente linear positivo é   | 0.100        |
| 1           | false              | 185                           | O par de retas paralelas é   | 0.100        |
| 0           | <u>false</u>       | 185                           | Dois retas $r$ e $s$ têm coeficientes angulares iguais a $A$ e $B$ respectivamente. Para que elas sejam perpendiculares a relação verdadeira é | 0.143        |
| 3           | <u>false</u>       | 97                            | O ponto de ordenada $-1$ e abscissa $2$ pertence a reta  | 0.143        |
| 2           | false              | 156                           | A reta que tem coeficiente angular positivo é  | 0.143        |

Figura 51: Teste 1 realizado pelo aluno 4 no nodo Conversão da Língua Natural para Algébrica e da Representação Algébrica para a Língua Natural da Reta

Nota: 0.445

| Respuesta | Respuesta correcta | Tiempo(antes de que se acabe) | Pregunta   | Puntos antes |
|-----------|--------------------|-------------------------------|--|--------------|
| 3         | true               | 537                           | Podemos dizer que a reta perpendicular à bissetriz que passa no ponto de encontro das retas $-2x + y - 2 = 0$ e $-x + 2y + 2 = 0$                                  | 0.100        |
| 0         | false              | 367                           | Os pontos A de abscissa 2 e ordenada 1; B de abscissa 0 e ordenada 3 e C de abscissa -1 e ordenada 1 determinam um triângulo, então a altura relativa ao lado BC é | 0.234        |
| 0         | false              | 214                           | Dois retas r e s têm coeficientes angulares iguais a A e B respectivamente. Para que elas sejam perpendiculares a relação verdadeira é                             | 0.234        |
| 0         | false              | 208                           | A reta com coeficiente linear positivo é   | 0.234        |
| 1         | true               | 227                           | O par de retas paralelas é   | 0.234        |
| 2         | true               | 331                           | O coeficiente angular da reta que passa pelos pontos A de abscissa "a" e ordenada 1 e B de abscissa 2 e ordenada "b" é   | 0.314        |

Figura 52: Teste 2 realizado pelo aluno 4 no nodo Conversao da Língua Natural para Algébrica e da Representação Algébrica para a Língua Natural da Reta

Nota: 0.760

| Respuesta | Respuesta correcta | Tiempo(antes de que se acabe) | Pregunta  | Puntos antes |
|-----------|--------------------|-------------------------------|---|--------------|
| 0         | false              | 291                           | Sabendo que o valor de $m + n = 21/2$ , então podemos dizer que as retas de equações $2x - y + m - 2n = 0$ e $3/2x - y + n - 3 = 0$ são ..... no ponto P(1,2)   | 0.100        |
| 3         | true               | 193                           | A reta com coeficiente linear positivo é  | 0.100        |
| 2         | true               | 217                           | Dois retas r e s têm coeficientes angulares iguais a A e B respectivamente. Para que elas sejam perpendiculares a relação verdadeira é  | 0.143        |
| 1         | true               | 447                           | Os pontos A de abscissa 2 e ordenada 1; B de abscissa 0 e ordenada 3 e C de abscissa -1 e ordenada 1 determinam um triângulo, então a altura relativa ao lado BC é  | 0.226        |
| 1         | false              | 412                           | O ângulo que a reta de coeficiente angular $-(\sqrt{3})/3$ forma com o eixo das abscissas é:  | 0.445        |
| 2         | true               | 350                           | O coeficiente angular da reta que passa pelos pontos A de abscissa "a" e ordenada 1 e B de abscissa 2 e ordenada "b" é  | 0.445        |
| 1         | false              | 470                           | Usando duas retas e o eixo das abscissas para formar um triângulo equilátero, onde uma das retas faz 60 graus de inclinação com o eixo das abscissas e passa pelo ponto de abscissa zero e ordenada 2, então a outra reta que passa pelo ponto de abscissa 0 e ordenada 8 é | 0.584        |
| 1         | false              | 171                           | A reta que faz um ângulo de $60^\circ$ com o eixo das abscissas é   | 0.584        |
| 1         | true               | 234                           | O par de retas paralelas é  | 0.584        |
| 2         | false              | 320                           | A equação da reta que intersecta um eixo coordenado em ordenada igual a -1 e é perpendicular à bissetriz do primeiro quadrante é  | 0.678        |
| 2         | true               | 95                            | O ponto de ordenada -1 e abscissa 2 pertence a reta   | 0.678        |

Figura 53: Teste 3 realizado pelo aluno 4 no nodo Conversão da Língua Natural para Algébrica e da Representação Algébrica para a Língua Natural da Reta

Com base nestes testes e nos registros escritos pelo aluno, foi possível perceber uma

melhora considerável entre o primeiro e último teste realizado, conforme ilustrado pelas cores das questões. Ainda, esta evolução refletiu em questões que continham elementos das questões anteriormente erradas, as quais foram resolvidas com êxito após a revisão proposta na sequência didática, a exemplo da questão pintada em amarelo do segundo teste que não estava presente no primeiro, mas que continha esses elementos comuns: “*O coeficiente angular da reta que passa pelos pontos A de abscissa “a” e ordenada 1 e B de abscissa 2 e ordenada “b” é*”, resolvida corretamente e resolvida também corretamente no terceiro teste. Esta questão envolve o conceito de coeficientes presentes nas equações do primeiro teste, que caracterizam a Reta e que figuram entre os conteúdos abordados na revisão.

No que tange às dificuldades de conversão que permearam os testes em questão e considerando os tratamentos realizados na resolução das questões, foi possível observar que na resolução das questões incorretas do primeiro teste o aluno apresentou, sobretudo, falta de compreensão e abstração do conteúdo. No segundo teste, o aluno, ao tentar revolver, apresentou dificuldade nos tratamentos envolvidos na relação de Pitágoras para encontrar a altura do triângulo, e também erros de tratamento ao escrever a equação da reta na sua forma reduzida, visto que as opções de resposta estavam na forma geral. Ainda, no último teste, o aluno apresentou dificuldades ao relacionar coeficiente angular e o ângulo que a reta forma com o eixo das abscissas conforme é apontado neste teste em roxo.

Nos testes dos alunos 1, 3, 4, 5, 8, foram observadas dificuldades, mesmo depois da revisão, em verificar se o coeficiente linear é positivo na equação geral dada. Muitos erros de sinal, erros de tratamento na formação da equação reduzida. Ainda, por exemplo, em como encontrar a equação da reta a qual um determinado ponto pertence e que possui um determinado ângulo de inclinação em relação ao eixo das abscissas. Esta também foi objeto de dificuldades, ao passo que, para resolvê-la, os alunos deveriam encontrar a partir do ângulo, o coeficiente angular, esboçar a equação reduzida com o coeficiente angular encontrado e substituir o ponto para encontrar o coeficiente linear. Neste caso, e que refletiu em outras questões que envolviam ângulos e coeficientes angulares conforme já dito, a grande maioria dos alunos, 7 alunos, apresentaram dificuldades pois desconheciam os ângulos notáveis e quando conheciam, não sabiam o que fazer com o ponto pertencente a reta.

Assim, as dificuldades apresentadas neste nodo permearam tratamentos relativos aos ângulos e coeficientes angulares, encontrar pontos de intersecção entre retas apresentadas na sua forma algébrica, neste caso, alguns criaram os gráficos separados de cada reta para depois juntá-los e verificar visualmente o ponto comum, passar na forma geral para a forma reduzida

a equação das retas, as quais eram deduzidas por outros elementos informados nas questões como, pontos pertencentes, ângulo da reta ou coeficientes.

Outra dificuldade freqüente, foi resolver questões que envolviam mais elementos, por exemplo, encontrar a equação da reta que passa em um ponto e é perpendicular a outra reta que contém pontos definidos ou de equação definida.

Portanto, grande parte dos alunos revelaram dificuldades neste primeiro nodo que propõe a *Conversão da Representação Linguagem Natural para Algébrica e da Representação Algébrica para a Linguagem Natural da Reta*, demonstrando dificuldades nos tratamentos exigidos e um conhecimento limitado sobre conteúdo do objeto matemático Reta. Pode-se afirmar que, as dificuldades apresentadas pelos alunos neste nodo são compreensíveis, ao passo que se tratam de dois registros de natureza distintas, sendo a língua natural um registro multifuncional e o registro algébrico um registro monofuncional, o que conforme Duval (2003), torna a conversão entre eles mais complexa.

Verifica-se que os alunos apresentaram uma melhora significativa no seu desempenho, principalmente no último teste realizado, sendo que entre estes, eles foram direcionados pelo SIENA para a realização da revisão de conteúdos e atividades didáticas. A tabela 2 e o gráfico referente a mesma, apresentado pela figura 54, ilustram os resultados dos alunos neste nodo.

Tabela 2

Desempenho dos alunos no nodo Conversão da Língua Natural < -- > Representação Algébrica da Reta

| Conversão da Língua Natural < -- > Representação Algébrica da Reta |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|--|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Banco de Dados   |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
| Alunos   | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     | 10    |
| Teste 1  | 0,964 | 0,2   | 0,338 | 0,143 | 0,1   | 0,2   | 0,2   | 0,143 | 0,143 | 0,2   |
| Teste 2  |       | 0,226 | 0,445 | 0,445 | 0,944 | 0,304 | 0,678 | 0,98  | 0,847 | 0,226 |
| Teste 3  |       | 0,472 | 0,954 | 0,76  |       | 0,338 |       |       |       | 0,954 |

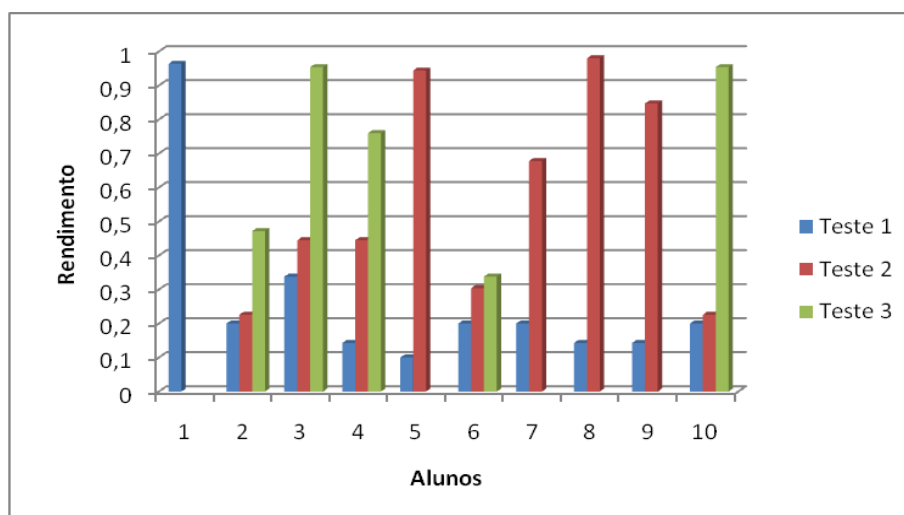


Figura 54: Gráfico do rendimento dos alunos no nodo Conversão da Língua Natural < -- > Representação Algébrica da Reta

A partir da tabela 2, e seu gráfico, conforme figura 54, observa-se que somente o aluno 1 foi aprovado no primeiro teste, obtendo um resultado acima do índice 0,6, nota-se que este aluno é um aluno concluinte do curso de licenciatura em Matemática, já tendo visto no curso o conteúdo de Geometria Analítica. Quanto aos alunos 5, 8, 9 e 10, os quais são alunos que possuem um maior número de disciplinas cursadas, e dentre elas estudaram Geometria Analítica, salientado-se que o aluno 5 é o único que trabalha como professor de Matemática, embora tenha iniciado este trabalho recentemente. Observa-se que somente o aluno 10 necessitou realizar um terceiro teste e estudos de recuperação entre eles, obtendo neste um resultado bem acima do estipulado como satisfatório, e os demais alunos obtiveram resultados bem acima do inicial e acima do índice 0,6, já no segundo teste realizado, após os estudos de recuperação. E quanto aos demais alunos, os quais cursaram um menor número de disciplinas e ainda não estudaram Geometria Analítica na licenciatura, verifica-se que os alunos 2 e 6 não alcançaram este índice mesmo depois de realizar um terceiro teste e estudos de recuperação entre eles, enquanto que os alunos 3 e 4 melhoraram significativamente seus resultados no terceiro teste.

#### 4.2.2 Análise do nodo Conversão da Representação Língua Natural para a Representação Gráfica e da Representação Gráfica para a Língua Natural da Reta

De modo geral, os alunos apresentaram dificuldades de visualização e interpretação como, encontrar os coeficientes angulares e lineares visualizando o gráfico da reta, sendo que esta, estava acompanhada de pontos para referência, e também passava pelos eixos

coordenados em pontos bem definidos. Neste caso, foi verificado que a maioria dos alunos apresentaram falta de atenção em definir os pontos pertencentes às retas (muitas vezes trocavam a ordem do par ordenado) e também não conseguiam estabelecer triângulos retângulos, as projeções nos eixos, para calcular o coeficiente angular. Ainda, a mesma dificuldade surgiu para verificar se os pontos eram colineares, como apresenta a figura 55, referente as escritas do aluno7:

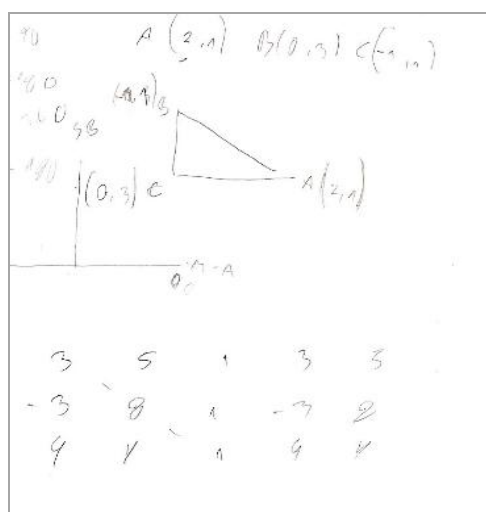


Figura 55: Registro do aluno 7

No caso dos pontos colineares, destaca-se que foi oferecido na revisão um algoritmo para a resolução dessa questão, a matriz, a fim de oportunizar um recurso a mais e verificar o método utilizado pelos alunos, e grande parte utilizou as matrizes. Isto foi feito porque o conceito de mesmo coeficiente angular já estava presente em outras questões. Portanto, somente foi oferecido diferentes tratamentos para o mesmo registro, sem a pretensão de induzir a um ou outro e sim de que o aluno possa articular entre eles conforme a situação enfrentada.

Estas dificuldades foram reduzidas, conforme apontou o banco de dados do sistema SIENA e os registros dos alunos, considerando a resolução acertada de questões mais elaboradas nos testes seguintes, após acessarem a sequência didática com a revisão do conteúdo e atividades didáticas.

Dos oito alunos que apresentaram estas dificuldades, cinco apresentaram melhora significativa e os outros dois alunos, 5 e 6, apresentaram ainda dificuldades na identificação dos quadrantes e com a identificação dos coeficientes, mas com certa facilidade na identificação dos mesmos nos gráficos para o caso do coeficiente angular igual a zero, e na



inexistência do coeficiente linear. Isto refletiu na resolução de questões que envolviam retas perpendiculares e também ângulos formados pelas retas. Foram obtidos os resultados conforme apresentam a tabela 3 e seu respectivo gráfico na figura 56.

Tabela 3

Desempenho dos alunos no nodo Conversão da Língua Natural < -- > Representação Gráfica da Reta

| Conversão da Língua Natural < -- > Representação Gráfica da Reta |       |       |         |       |       |       |       |      |       |       |
|--|-------|-------|---------|-------|-------|-------|-------|------|-------|-------|
| Banco de Dados   |       |       |         |       |       |       |       |      |       |       |
| Alunos   | 1     | 2     | 3       | 4     | 5     | 6     | 7     | 8    | 9     | 10    |
| Teste 1  | 0,496 | 0,143 | não fez | 0,496 | 0,304 | 0,143 | 0,143 | 0,93 | 0,663 | 0,899 |
| Teste 2  | 0,855 | 0,663 |         | 0,923 | 0,496 | 0,143 | 0,988 |      |       |       |
| Teste 3  |       |       |         |       | 0,751 |       |       |      |       |       |

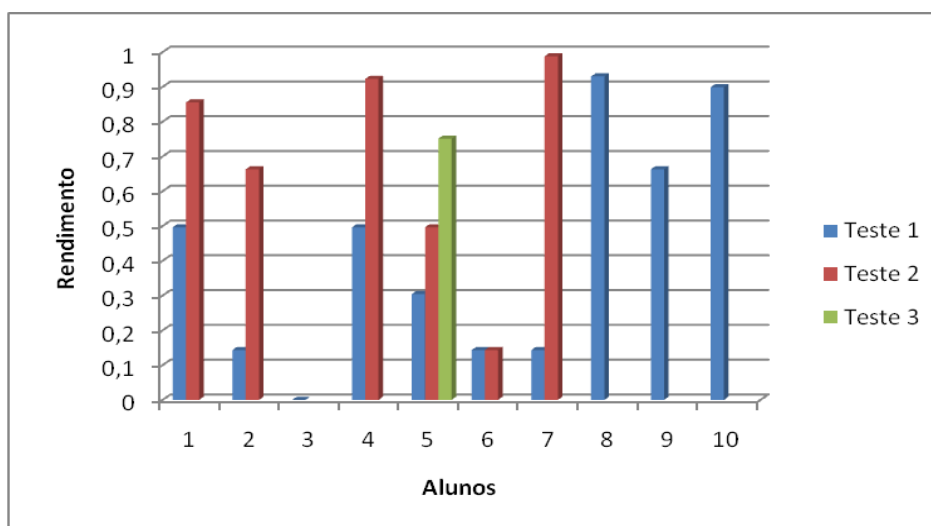


Figura 56: Gráfico do desempenho do alunos no nodo Conversão da Conversão da Língua Natural < -- > Representação Gráfica da Reta

De acordo com a tabela 3 e seu gráfico, figura 56, observa-se que somente os alunos 8, 9 e 10 foram aprovados no primeiro teste, salientando-se, mais uma vez que estes são alunos com maior número de disciplinas cursadas já tendo estudado Geometria Analítica também na graduação, porém o mesmo não se verifica com os alunos 1 e 5, os quais também se enquadram neste perfil, e o aluno cinco destaca-se por exercer, recentemente, a profissão de professor de Matemática, sendo que o aluno 1 obteve a aprovação no segundo teste realizado, após os estudos de recuperação e o aluno 5 necessitou realizar um terceiro teste para obter um desempenho satisfatório, realizando estudos de recuperação entre eles.

Quanto aos demais alunos, verifica-se que os alunos 2, 4 e 7 obtiveram resultados acima da média no segundo teste, após terem realizado os estudos de recuperação. Apenas o aluno 6, que não obteve aprovação ainda no segundo teste, não realizou um terceiro teste para que se verificasse seu desempenho, e observa-se que nos dois testes realizados por ele, este não apresentou avanço em seu desempenho.

Para ilustrar a evolução nos testes e exemplificar as dificuldades encontradas, segue abaixo dois testes consecutivos do aluno 7, conforme as figuras 57 e 58, separados pela revisão a qual o sistema SIENA direcionou o aluno para rever os conteúdos pertinentes ao nodo em questão, conforme anteriormente comentado.

| Nota: 0.143 |                    |                               |  |              |
|-------------|--------------------|-------------------------------|--|--------------|
| Respuesta   | Respuesta correcta | Tiempo(antes de que se acabe) | Pregunta   | Puntos antes |
| 1           | false              | 411                           | Sendo duas retas perpendiculares no ponto de abscissa 1 e ordenada 1, onde uma passa pela origem e é bissetriz do primeiro quadrante e a outra tem coeficiente linear igual a reta | 0.100        |
| 2           | false              | 216                           | O gráfico que apresenta uma reta que não possui coeficiente linear é   | 0.100        |
| 0           | false              | 262                           | Uma reta que possui coeficiente angular igual a 4 é perpendicular a qual das retas?  | 0.100        |
| 2           | true               | 152                           | Encontre o gráfico que apresenta uma reta que passa no segundo quadrante   | 0.100        |
| 3           | false              | 313                           | Em qual dos gráficos os pontos são colineares?   | 0.143        |
| 3           | false              | 338                           | A reta que faz $30^\circ$ com o eixo das abscissas é   | 0.143        |

Figura 57: Teste 1 realizado pelo aluno 7 no nodo Conversão da Língua Natural < -- > Representação Gráfica da Reta.

| Nota: 0.988 |                    |                               |  |              |
|-------------|--------------------|-------------------------------|--|--------------|
| Respuesta   | Respuesta correcta | Tiempo(antes de que se acabe) | Pregunta   | Puntos antes |
| 3           | false              | 256                           | (b) Segundo o gráfico:   | 0.100        |
| 2           | true               | 163                           | Encontre o gráfico que apresenta uma reta que passa no segundo quadrante   | 0.100        |
| 0           | false              | 203                           | Uma reta que possui coeficiente angular igual a 4 é perpendicular a qual das retas?  | 0.143        |
| 2           | true               | 344                           | A reta que faz $30^\circ$ com o eixo das abscissas é   | 0.143        |
| 2           | true               | 343                           | Em qual dos gráficos os pontos são colineares?   | 0.200        |
| 0           | true               | 282                           | O gráfico que apresenta uma reta que não possui coeficiente linear é   | 0.304        |
| 3           | false              | 555                           | Qual dos gráficos possui a maior região limitada por duas retas e um eixo coordenado?  | 0.496        |
| 2           | true               | 407                           | Qual dos gráficos a seguir apresenta duas retas perpendiculares?   | 0.496        |
| 3           | false              | 867                           | Identifique o gráfico que possui o maior ângulo interno formado entre as retas   | 0.633        |
| 1           | true               | 321                           | Sendo duas retas concorrentes no ponto de abscissa -1 e ordenada 2 onde uma das retas é paralela ao eixo das abscissas então a outra que faz 45 graus com essa reta terá coeficiente angular igual a reta  | 0.633        |
| 2           | true               | 475                           | A reta bissetriz do ângulo formado pelo encontro de duas retas no ponto de abscissa 0,5 e ordenada 0,5 onde a primeira tem coeficiente angular igual a $1/3$ e a outra com coeficiente angular igual a 3 é | 0.751        |
| 1           | false              | 492                           | Sendo duas retas perpendiculares no ponto de abscissa 1 e ordenada 1, onde uma passa pela origem e é bissetriz do primeiro quadrante e a outra tem coeficiente linear igual a reta                         | 0.900        |
| 1           | true               | 260                           | Temos neste gráfico a reta "r" e o segmento de reta AB logo:   | 0.900        |
| 2           | false              | 419                           | O caminho do ponto que passa pelos pontos "A" de abscissa k e ordenada t e "B" de abscissa t e ordenada k corresponde a reta   | 0.941        |
| 0           | true               | 299                           | Dado o gráfico, então podemos dizer que:   | 0.941        |
| 1           | true               | 359                           | Segundo o gráfico a reta "s" é perpendicular ao eixo das abscissas e os ângulos "a" e "b" :  | 0.965        |

Figura 58: Teste 2 realizado pelo aluno 7 no nodo Conversão da Língua Natural < -- > Representação Gráfica da Reta

Pode-se perceber com estes testes, que o aluno conseguiu responder corretamente, no segundo teste, as questões que errou no primeiro conforme as questões identificadas pelas cores iguais nos dois testes. De fato, o aluno apresentou uma melhora significativa, mas ainda apresentou dificuldades nos tratamentos envolvendo ângulos e coeficientes angulares, bem como, articular conceitos com as informações fornecidas pelos gráficos.

Quanto ao rendimento dos alunos, de acordo com o sentido conversão, foi verificado que questões que tinham o registro gráfico como registro de chegada, de modo geral, apresentaram mais dificuldades, mas cabe salientar que as dificuldades estavam mais



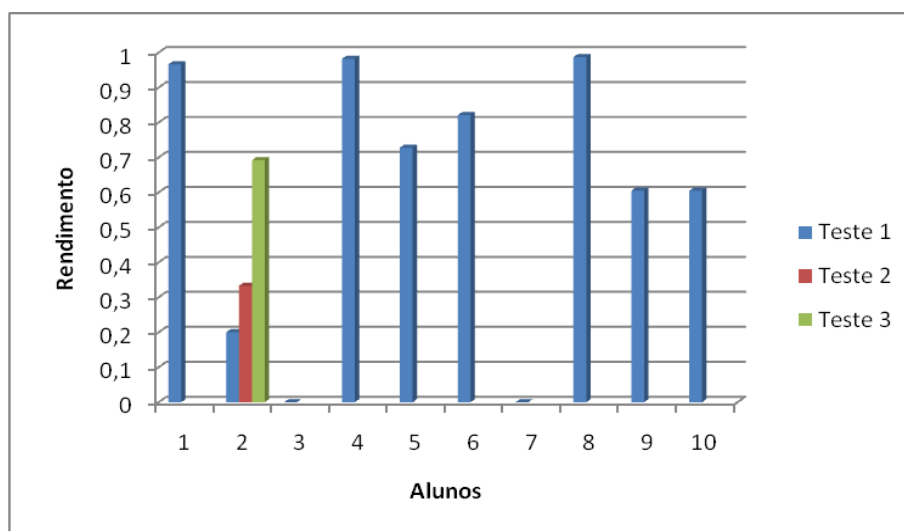


Figura 59: Gráfico do Rendimento dos alunos dos alunos no nodo Conversão Representação Algébrica --> Representação Gráfica da Reta

No que tange as dificuldades percebidas nos testes, foi possível apontar erros recorrentes como, por exemplo, marcar os pontos no plano, trocando abscissa pela ordenada. Também, erros recorrentes ao tentar encontrar a reta a qual pertence os pontos  $(2k+3, 4k-1)$ , informando seu coeficiente angular, linear e outras características conforme a pergunta. Esta dificuldade demonstrou pouco conhecimento das formas paramétricas o que foi sanado no caso do aluno 2, após realizar a recuperação. Entre os demais alunos, 7 alunos, todos procuraram relacionar a variável “k” com as variáveis “x” e “y”, mas separadamente e chegando a desenvolver gráficos distintos, conforme o registro escrito do aluno 8, conforme figura 60.

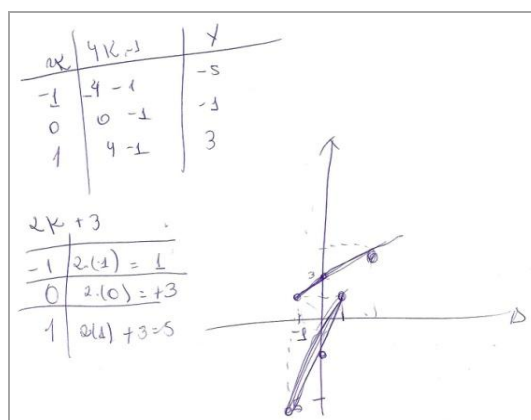


Figura 60: Registro 2 do aluno 8

Observa-se, também, que muitos alunos recorreram ao registro tabela, ou seja, sentiram a necessidade de passar da escrita algébrica da equação para a numérica, realizando

os tratamentos no interior deste registro, para então efetuar a conversão para o registro gráfico. Assim, fica claro mais uma vez, a utilização de um registro intermediário como uma maneira de trabalharem com um registro mais observável.

Ainda, no caso dos alunos 2, 4 e 6, foi percebida uma dificuldade em criar o gráfico da reta com base na sua representação algébrica. Os alunos tentaram marcar os pontos substituindo valores para “x” para obter os valores de “y” mas erravam nos tratamentos, erros de sinal, no caso do aluno 4, não estava claro qual seria o procedimento correto, procurava somente uma fórmula. Podemos observar o rendimento do aluno 2 segundo o banco de dados do sistema SIENA, como segue nas figuras 61, 62 e 63.

| Nota: 0.200 |                    |                               |  |              |
|-------------|--------------------|-------------------------------|--|--------------|
| Respuesta   | Respuesta correcta | Tiempo(antes de que se acabe) | Pregunta   | Puntos antes |
| 2           | false              | 7                             | O gráfico que representa a equação $2x+y-3=0$ é:   | 0.100        |
| 0           | false              | 79                            | A representação correta dos pontos A(1,3), B(-2,-1), C(3,1), D(0,-3), E(-1,0) é:                     | 0.100        |
| 0           | true               | 0                             | A reta de equação $x-2y+4=0$ tem coeficiente linear igual a:   | 0.100        |
| 1           | false              | 91                            | O gráfico que representa a equação $2x + y + 1 = 0$ é  | 0.143        |
| 2           | true               | 124                           | Em qual dos gráficos os pontos A(0,-2), B(-2,0), C(1,-1) e D(-3,1) estão colocados de maneira certa? | 0.143        |
| 3           | false              | 219                           | Dados os pontos A(1,3) e B(2,5), então a reta que passa por esses pontos é:                          | 0.200        |

Figura 61: Teste 1 realizado pelo aluno 2 no nodo Conversão da Representação Algébrica -- > Representação Gráfica da Reta

| Nota: 0.333 |                    |                               |   |              |
|-------------|--------------------|-------------------------------|---|--------------|
| Respuesta   | Respuesta correcta | Tiempo(antes de que se acabe) | Pregunta  | Puntos antes |
| 0           | true               | 361                           | Se uma reta faz 135 graus de inclinação e passa no ponto (1,-3) então essa reta intersecta o eixo das abscissas conforme o gráfico: | 0.100        |
| 2           | false              | 396                           | O caminho percorrido pelo ponto $(2k-1, -k+3)$ pode ser descrito pela reta:   | 0.250        |
| 1           | false              | 184                           | O gráfico que representa a equação $2x + y + 1 = 0$ é   | 0.250        |
| 2           | false              | 17                            | A representação correta dos pontos A(1,3), B(-2,-1), C(3,1), D(0,-3), E(-1,0) é:  | 0.250        |
| 2           | false              | 158                           | A reta de equação $x-2y+4=0$ tem coeficiente linear igual a:  | 0.250        |
| 2           | true               | 104                           | Em qual dos gráficos os pontos A(0,-2), B(-2,0), C(1,-1) e D(-3,1) estão colocados de maneira certa?                                | 0.250        |

Figura 62: Teste 2 realizado pelo aluno 2 no nodo Conversão da Representação Algébrica -- > Representação Gráfica da Reta

| Nota: 0.692 |                   |                               |   |              |
|-------------|-------------------|-------------------------------|---|--------------|
| Resposta    | Resposta correcta | Tiempo(antes de que se acabe) | Pregunta  | Puntos antes |
| 0           | true              | 382                           | Se uma reta faz 135 graus de inclinação e passa no ponto (1,-3) então essa reta intersecta o eixo das abscissas conforme o gráfico: | 0.100        |
| 0           | true              | 375                           | O caminho percorrido pelo ponto $(2k-1, -k+3)$ pode ser descrito pela reta:   | 0.250        |
| 3           | false             | 211                           | Dadas as retas de equações $x/2-1=y$ e $2x-y+2=0$ , então uma reta bissetriz destas retas é:  | 0.500        |
| 0           | false             | 127                           | O gráfico que representa a equação $2x + y + 1 = 0$ é   | 0.500        |
| 3           | true              | 91                            | A representação correta dos pontos A(1,3), B(-2,-1), C(3,1), D(0,-3), E(-1,0) é:  | 0.500        |
| 3           | false             | 191                           | Dados os pontos A(1,3) e B(2,5), então a reta que passa por esses pontos é:   | 0.600        |
| 0           | true              | 10                            | A reta de equação $x-2y+4=0$ tem coeficiente linear igual a:  | 0.600        |

Figura 63: Teste 3 realizado pelo aluno 2 no nodo Conversão da Representação Algébrica --> Representação Gráfica da Reta

Estes testes sugerem dificuldades que foram percebidas também durante a pesquisa, dificuldades que permearam a construção do gráfico da reta em questões que envolveram somente dois pontos, um ponto e um coeficiente, linear ou angular, e grande parte desses erros estavam relacionados com a falta de atenção na realização dos tratamentos, e também superficialidade nos cálculos escritos, falta de atenção também, em passar a equação da forma geral para a forma reduzida, cometendo erros de sinais.

Neste nodo, os dois registros possuem mesma natureza, ou seja, segundo Duval (2003), eles são registros monofuncionais, em que os tratamentos são principalmente algorítmicos, o que torna menos complexa a conversão. Além disso, observa-se que, na maioria das vezes, os livros didáticos priorizam os tratamentos nestes registros e a conversão neste sentido, o que pode ter contribuído para o bom desempenho dos alunos neste nodo.

#### 4.2.4 Análise do nodo Conversão da Representação Gráfica para a Representação Algébrica da Reta

Comparado com o nodo anterior, os testes deste revelaram mais dificuldades, sobretudo, de interpretação das informações constantes nos gráficos, haja vista, que algumas perguntas apresentadas nestes testes envolviam informações presentes nas perguntas do nodo anterior com algumas variações e perguntas novas, estas quase sempre ligadas a conceitos como bissetriz, perpendicularidade, quadrantes, coeficientes, paralelismo, ponto de encontro de retas, área da região limitada por retas, equação geral e reduzida, ou seja, questões bem





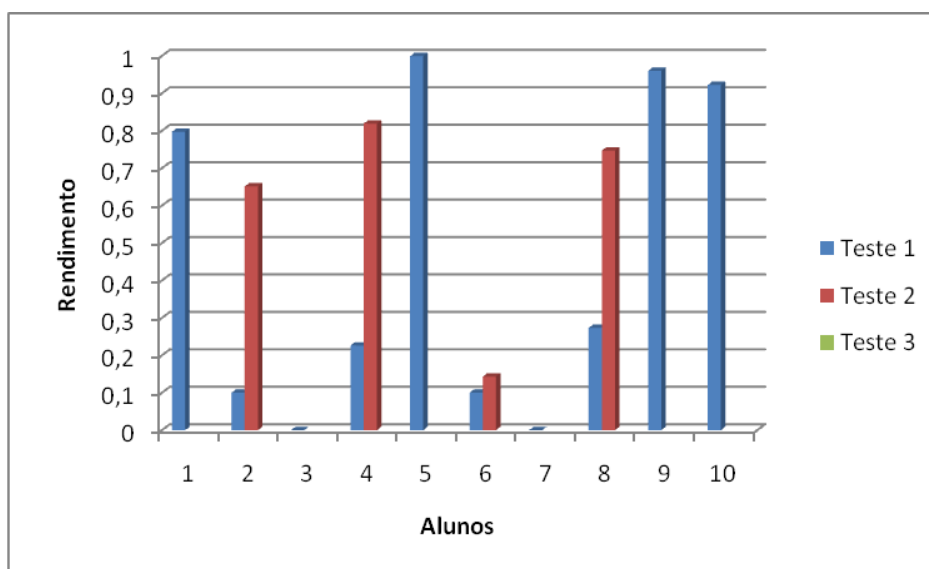


Figura 65: Gráfico do rendimento dos alunos no nodo Conversão da Representação Gráfica --> Representação Algébrica da Reta

Conforme a tabela 5 e seu respectivo gráfico, na figura 65, os alunos 1, 5 e 9 tiveram desempenho satisfatório no primeiro teste, novamente cabe dizer, que estes são alunos que já estudaram Geometria Analítica no curso de licenciatura, porém no caso do aluno 8, o qual é concluinte do curso de licenciatura houve a necessidade de realizar um segundo teste, após estudos de recuperação, pois não obteve resultado satisfatório no primeiro, sendo que, ao realizá-lo obteve um rendimento bem acima do inicial e acima do índice 0,6 necessário para a aprovação. Quanto aos demais alunos, o 2 e o 4, apresentaram desempenho satisfatório ao realizar o segundo teste, e apenas o aluno 6 não obteve avanço significativo ao realizar o segundo teste, não se dispondo a relizar um terceiro.

Com relação aos alunos 2, 4, 6 e 8, que fizeram dois testes, estes apresentaram dificuldades em extrair informações dos gráficos, ao passo, que quando extraíam corretamente resolviam também corretamente a questão, apresentando menos dificuldades em realizar os tratamentos necessários. Por exemplo, em algumas questões, o objetivo era encontrar a equação que representava algebricamente o gráfico de uma determinada reta, e para isso, os alunos deveriam determinar os coeficientes a partir do gráfico, esta foi a principal dificuldade verificada.

Podemos visualizar o resultado, segundo o banco de dados do sistema SIENA dos testes realizados pelo aluno 8, conforme as figuras 66 e 67.

**Nota: 0.273**

| Respuesta | Respuesta correcta | Tiempo(antes de que se acabe) | Pregunta  | Puntos antes |
|-----------|--------------------|-------------------------------|---|--------------|
| 2         | true               | 171                           | A equação geral que representa o seguinte gráfico da reta é:  | 0.100        |
| 1         | false              | 246                           | Sabendo que a reta $s$ é perpendicular à reta $r$ e a reta $t$ é paralela à reta $s$ , então a equação das retas “ $s$ ” e “ $t$ ” são respectivamente: | 0.143        |
| 0         | false              | 220                           | O coeficiente angular da reta do seguinte gráfico é:  | 0.143        |
| 2         | true               | 136                           | A equação da reta representada pelo seguinte gráfico é:   | 0.143        |
| 0         | false              | 261                           | O ponto de intersecção das retas do gráfico é:  | 0.200        |
| 3         | true               | 190                           | A equação reduzida da reta representada no gráfico é:   | 0.200        |

Figura 66: Teste 1 realizado pelo aluno 8 no nodo Conversão da Representação Gráfica --> Representação Algébrica da Reta.

**Nota: 0.747**

| Respuesta | Respuesta correcta | Tiempo(antes de que se acabe) | Pregunta  | Puntos antes |
|-----------|--------------------|-------------------------------|---|--------------|
| 2         | false              | 248                           | O coeficiente linear da reta paralela a reta do gráfico e que passa no ponto P é:   | 0.100        |
| 0         | false              | 213                           | O coeficiente angular da reta do seguinte gráfico é:  | 0.100        |
| 2         | true               | 169                           | A equação da reta representada pelo seguinte gráfico é:   | 0.100        |
| 0         | true               | 306                           | Sabendo que a reta $s$ é perpendicular à reta $r$ e a reta $t$ é paralela à reta $s$ , então a equação das retas “ $s$ ” e “ $t$ ” são respectivamente: | 0.143        |
| 0         | true               | 277                           | A área do triângulo ABC limitado pelas retas do gráfico é:  | 0.226        |
| 3         | false              | 321                           | A equação geral da reta $s$ perpendicular à reta $r$ do gráfico é:  | 0.467        |
| 1         | false              | 234                           | O ponto de intersecção das retas do gráfico é:  | 0.467        |
| 3         | false              | 163                           | A equação geral que representa o seguinte gráfico da reta é:  | 0.467        |
| 3         | true               | 141                           | A equação reduzida da reta representada no gráfico é:   | 0.467        |
| 0         | false              | 275                           | A equação geral da reta perpendicular à reta do gráfico no ponto indicado é:  | 0.568        |
| 1         | true               | 94                            | A equação da reta representada pelo gráfico é:  | 0.568        |
| 3         | false              | 168                           | O coeficiente linear da reta perpendicular à reta do gráfico no ponto P é:  | 0.663        |
| 1         | true               | 108                           | Segundo o gráfico o coeficiente angular da reta é:  | 0.663        |
| 2         | false              | 263                           | A equação que representa corretamente o gráfico da reta é:  | 0.747        |
| 0         | false              | 226                           | Conforme o gráfico, o ângulo que a reta faz com o eixo das abscissas é:   | 0.747        |

Figura 67: Teste 2 realizado pelo aluno 8 no nodo Conversão da Representação Gráfica --> Representação Algébrica da Reta

Conforme o estudo realizado com relação a este teste e os demais testes, cujas

dificuldades, embora particulares, também fazem parte deste, foi possível verificar que as dificuldades de conversão estavam ligadas à dificuldade de extrair e interpretar informações contidas nos gráficos apresentados, até mesmo nos mais simples.

Este nodo apresenta, assim como no anterior, dois registros da mesma natureza, porém, inverteu-se o sentido da conversão, e observa-se maior dificuldade dos alunos neste nodo comparado ao anterior. Acredita-se que, uma explicação para esse fato, é que ainda, muito pouco se utiliza pelos professores uma metodologia que proponha situações de ensino que possibilite o aluno desenvolver a visualização e interpretação das informações contidas nos gráficos, para então efetuar a conversão para o registro da equação. Duval (2003), menciona que a conversão entre gráfico e equações requer levar em conta as variáveis visuais dos gráficos (inclinação, intersecção, etc.) e valores escalares das equações (coeficientes), assim, segundo o autor, essa visualização e interpretação irão contribuir para a apreensão global e qualitativa das representações gráficas.

#### **4.2.5 Análise do nodo Conversão da Representação Língua Natural para a Representação Algébrica e da Representação Algébrica para a Língua Natural da Circunferência**

De modo geral, as dificuldades apresentadas neste nodo, sobretudo no primeiro teste, estavam relacionadas com o desconhecimento de termos como “...lugar geométrico dos pontos equidistantes...” e “...o conjunto de pontos equidistantes...”, pois alguns alunos expressaram tal dúvida, dificuldades de interpretação e na escrita algébrica em questões que apresentavam parâmetros, cuja a variação provoca uma translação no gráfico da circunferência. Ainda, foi possível perceber que houve muitos erros nos tratamentos relativos a passar a equação da forma geral para a reduzida, erros em calcular os quadrados dos binômios, erros de multiplicação. Também, outros erros bem frequentes como, o de não elevar o raio ao quadrado na formação da equação reduzida, trocar a abscissa pela ordenada na equação reduzida e ainda, no cálculo para encontrar o raio da circunferência com base em dois pontos (centro e outro ponto da circunferência), como aconteceu com o aluno 8, que tomou o ponto do centro da circunferência errado, apresentado pela figura 68.

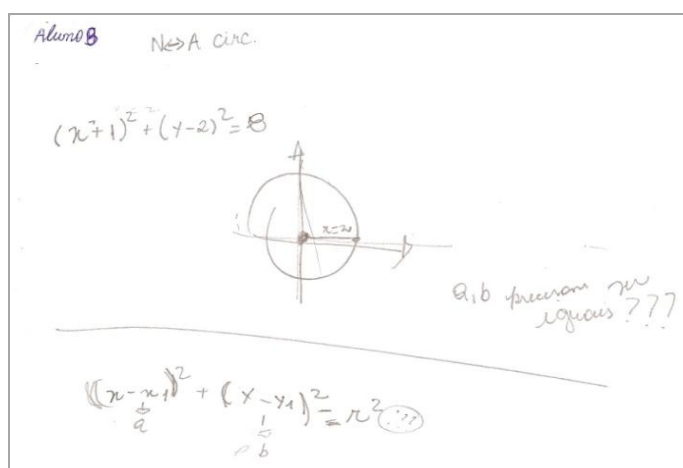


Figura 68: Registro 3 do aluno 8

Este recorte ilustra bem o uso do registro gráfico, como registro intermediário, na tentativa de visualizar a posição da circunferência de acordo com o centro dado, neste caso, com a equação dada, conforme aparece, o objetivo era somente encontrar o raio. A dificuldade, neste caso, foi igualar o raio ao quadrado a oito e encontrá-lo. Este aluno resolveu corretamente, mas gastando um bom tempo para isso, 196 segundos.

Abaixo, nas figuras 69 e 70, podemos observar o rendimento apresentado pelo aluno 10, conforme o banco de dados do SIENA.

| Nota: 0.273 |                    |                               |   |              |
|-------------|--------------------|-------------------------------|---|--------------|
| Respuesta   | Respuesta correcta | Tiempo(antes de que se acabe) | Pregunta  | Puntos antes |
| 0           | false              | 353                           | Uma circunferência de equação $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ tem centro:   | 0.100        |
| 3           | true               | 190                           | A equação que representa uma circunferência de raio cinco e com centro na origem é:   | 0.100        |
| 2           | false              | 340                           | O conjunto de pontos equidistantes do ponto de abscissa três e ordenada quatro, duas unidades de medida, no sistema cartesiano é: | 0.143        |
| 3           | true               | 128                           | Uma circunferência de raio dois tem seu centro na origem do plano cartesiano e intersecta o eixo das ordenadas no ponto:          | 0.143        |
| 3           | false              | 336                           | O conjunto de pontos equidistantes do ponto de abscissa menos três e ordenada um, três unidades de medida é:                      | 0.200        |
| 2           | true               | 229                           | A equação reduzida da circunferência de raio quatro centrada no ponto de abscissa menos três e ordenada dois é:                   | 0.200        |

Figura 69: Teste 1 realizado pelo aluno 10 no nodo Conversão da Língua Natural < -- > Representação Algébrica da Circunferência

| Nota: 0.939 |                    |                               |  |              |
|-------------|--------------------|-------------------------------|--|--------------|
| Respuesta   | Respuesta correcta | Tiempo(antes de que se acabe) | Pregunta   | Puntos antes |
| 3           | true               | 176                           | Uma circunferência de raio dois tem seu centro na origem do plano cartesiano e intersecta o eixo das ordenadas no ponto:                               | 0.100        |
| 2           | false              | 341                           | O conjunto de pontos equidistantes do ponto de abscissa três e ordenada quatro, duas unidades de medida, no sistema cartesiano é:                      | 0.143        |
| 3           | true               | 195                           | A equação que representa uma circunferência de raio cinco e com centro na origem é:  | 0.143        |
| 0           | true               | 259                           | O conjunto de pontos equidistantes do ponto de abscissa menos três e ordenada um, três unidades de medida é:   | 0.200        |
| 1           | false              | 416                           | O comprimento de uma corda do formato de uma circunferência de centro de abscissa 1 e ordenada -1 e que passa pelo ponto de abscissa 4 e ordenada 3 é: | 0.304        |
| 0           | false              | 305                           | A equação da circunferência com centro de abscissa -2 e ordenada 1 e passa pelo ponto de abscissa 1 e ordenada -3 é:                                   | 0.304        |
| 2           | true               | 266                           | A equação reduzida da circunferência de raio quatro centrada no ponto de abscissa menos três e ordenada dois é:  | 0.304        |
| 0           | true               | 351                           | Os pontos de abscissa 4 e ordenada -2 e abscissa 2 e ordenada 0 são extremidades do diâmetro de uma circunferência de equação:                         | 0.396        |
| 3           | true               | 383                           | A equação reduzida da circunferência que se desloca "t" unidades horizontalmente é:  | 0.535        |
| 1           | true               | 453                           | A equação reduzida da circunferência que se desloca "t" unidades verticalmente é:  | 0.775        |
| 1           | false              | 524                           | A equação que representa uma circunferência é:   | 0.912        |
| 1           | false              | 230                           | Os pontos de abscissa 1 e ordenada -2 e abscissa -2 e ordenada 0 são o centro e um ponto pertencente a uma circunferência, então o raio desta vale:    | 0.912        |
| 2           | true               | 201                           | A equação geral da circunferência de raio 3 centrada na origem do plano cartesiano é:  | 0.912        |
| 2           | false              | 345                           | O raio da circunferência de equação $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 2 = 0$ é:   | 0.939        |
| 0           | false              | 152                           | O raio da circunferência centrada na origem e que passa no ponto de abscissa dois e ordenada zero é:   | 0.939        |

Figura 70: Teste 2 realizado pelo aluno 10 no nodo Conversão da Língua Natural < -- > Representação Algébrica da Circunferência

Com este teste, podemos observar a presença das dificuldades apontadas nos aspectos gerais das dificuldades no nodo e também, mais especificamente, dificuldades de interpretação do enunciado e tratamento no que tange mudar da forma geral para reduzida e reduzida para geral a equação da circunferência.

A seguir, apresenta-se na tabela 6 e seu respectivo gráfico na figura 71 um esboço do rendimento dos alunos, onde neste nodo aponta, de modo geral, uma dificuldade mediana pelos mesmos.

Tabela 6

Desempenho dos alunos no nodo Conversão da Língua Natural < -- > Representação Algébrica da Circunferência

| Conversão da Língua Natural < -- > Representação Algébrica da Circunferência |       |       |         |       |       |       |         |       |       |       |
|--|-------|-------|---------|-------|-------|-------|---------|-------|-------|-------|
| Banco de Dados   |       |       |         |       |       |       |         |       |       |       |
| Alunos   | 1     | 2     | 3       | 4     | 5     | 6     | 7       | 8     | 9     | 10    |
| Teste 1  | 0,273 | 0,273 | não fez | 0,368 | 0,226 | 0,338 | não fez | 0,304 | 0,2   | 0,273 |
| Teste 2  | 0,458 | 0,396 |         | 0,76  | 0,396 | 0,98  |         | 0,979 | 0,982 | 0,939 |
| Teste 3  | 0,976 |       |         |       | 0,887 |       |         |       |       |       |

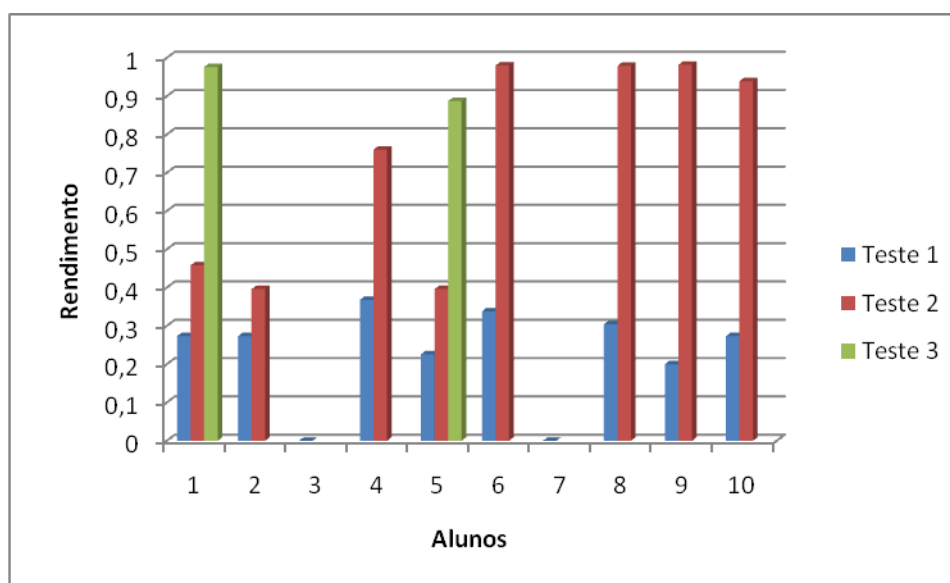


Figura 71: Gráfico do rendimento dos alunos no nodo Conversão da Língua Natural < -- > Representação Algébrica da Circunferência

Conforme a tabela 6 e o gráfico da figura 71, os oito alunos que realizaram o primeiro teste, apresentaram dificuldades neste nodo e um desempenho muito inferior ao considerado satisfatório. Após estudos de recuperação, propostos na sequência didática deste nodo, os oito alunos realizaram o teste 2, e destes, cinco obtiveram resultados satisfatórios, sendo que, os alunos 6, 8, 9 e 10, atingiram notas próximas da nota máxima estabelecida pelo SIENA, que é de 0,1. Salienta-se que destes alunos, apenas o aluno 6 ainda não estudou Geometria Analítica no curso de licenciatura, e os demais, são alunos concluintes do curso. Quanto ao aluno 1, o qual também é concluinte do curso, e o aluno 5 que já estudou Geometria Analítica, também, na licenciatura, estes necessitaram realizar um terceiro teste, após terem por duas vezes realizado estudos de recuperação, para obterem aprovação.

Mais uma vez, os alunos depararam-se com questões que envolvem dois registros de natureza distintas, como mencionado anteriormente no nodo correspondente ao conteúdo de

Reta, e que envolvia estes registros, língua natural e representação algébrica, significando que as atividades de conversão são mais difíceis e complexas.

Quanto ao sentido da conversão na qual os alunos tiveram mais dificuldades, é possível afirmar que, julgando proporcionalmente ao número de questões apresentadas pelo sistema durante os testes, as dificuldades maiores ficaram por conta do sentido da *Conversão da Representação Linguagem Natural para Algébrica da circunferência*. Assim, pode-se dizer que o processo de ensino e aprendizagem requer que se valorize mais este tipo de abordagem.

#### 4.2.6 Análise do nodo Conversão da Representação Língua Natural para a Representação Gráfica e da Representação Gráfica para a Língua Natural da Circunferência

Conforme foi apurado na pesquisa a cerca deste nodo, foi possível verificar que dos oito alunos que realizaram o primeiro teste, três apresentaram bom rendimento, como mostra a tabela 7 com o desempenho dos alunos, construída a partir dos dados do sistema SIENA, e seu respectivo gráfico, como mostra a figura 72.

Tabela 7

Desempenho dos alunos no nodo Conversão da Língua Natural < -- > Representação Gráfica da Circunferência

| Conversão da Língua Natural < -- > Representação Gráfica da Circunferência |       |       |         |       |       |       |         |       |       |       |
|--|-------|-------|---------|-------|-------|-------|---------|-------|-------|-------|
| Banco de Dados   |       |       |         |       |       |       |         |       |       |       |
| Alunos   | 1     | 2     | 3       | 4     | 5     | 6     | 7       | 8     | 9     | 10    |
| Teste 1  | 0,941 | 0,2   | não fez | 0,338 | 0,338 | 0,226 | não fez | 0,797 | 0,999 | 0,434 |
| Teste 2  |       | 0,605 |         | 0,747 | 0,338 | 0,273 |         |       |       | 0,988 |
| Teste 3  |       |       |         |       | 0,98  | 0,779 |         |       |       |       |

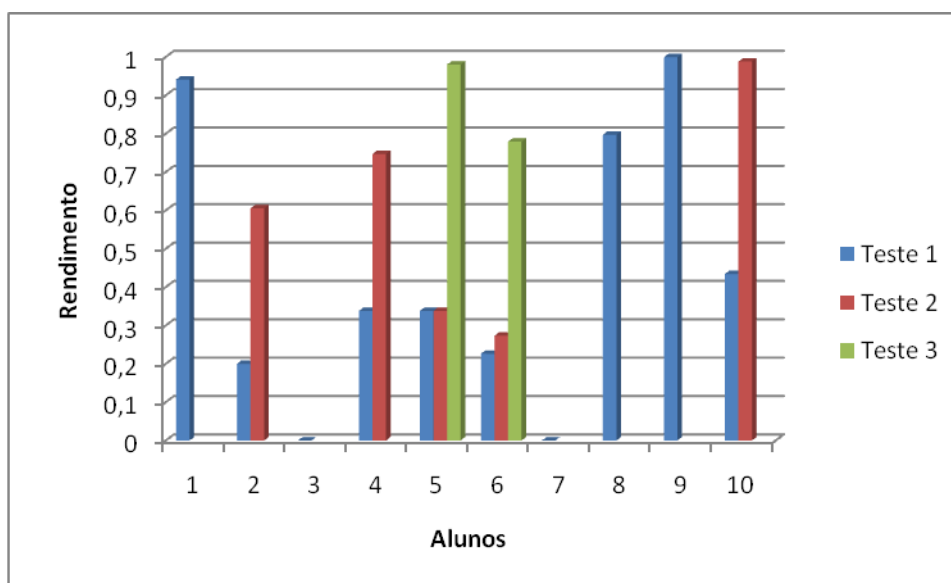


Figura 72: Gráfico do rendimento dos alunos no nodo Conversão da Língua Natural < -- > Representação Gráfica da Circunferência

Estes três alunos que apresentaram bom rendimento no primeiro teste, denominados como 1, 8 e 9, são concluintes do curso de licenciatura. Já os alunos 10 e 5, sendo o primeiro concluinte do curso e o segundo com 20 disciplinas cursadas, entre elas estudou o conteúdo de Geometria Analítica, necessitaram de estudos de recuperação para, a seguir, realizar o teste 2, no qual o aluno 10 obteve resultado satisfatório e bem acima do inicial, enquanto o aluno 5 retornou a sequência didática deste nodo para estudos de recuperação, e posteriormente realizou o teste 3, neste obtendo um rendimento satisfatório. Com relação aos alunos 2, 4 e 6, os quais apresentaram resultados muito inferiores ao índice 0,6 no teste 1, obtiveram, após estudos de recuperação proposto na sequência didática, resultados satisfatórios, porém no caso do aluno 6, este só foi atingido no teste 3.

Neste nodo, a maioria das questões exigiram uma reflexão mais acurada, o que, conforme revelou a pesquisa, não suscitaram maiores dúvidas em comparação com nodos que apresentaram problemas mais diretos, conforme anteriormente exposto. Persistiram as dificuldades em relação ao sentido da conversão *Representação Gráfica para a Linguagem Natural da Circunferência*, revelando um avanço, mas ainda pequeno comparado com o nodo anterior, no que tange aos tratamentos exigidos para chegar ao registro da resposta. As maiores dificuldades presentes, sobretudo, nos testes dos alunos 2, 5 e 6, estavam relacionadas com o uso das coordenadas do centro da circunferência apresentados na representação gráfica da mesma, e também o cálculo da medida do raio em relação aos elementos fornecidos no registro língua natural ou apresentados no registro gráfico, neste



caso, houve erros nos tratamentos utilizados para este cálculo, erros de sinal, troca das coordenadas do ponto central da circunferência e nos tratamentos relativos ao uso da relação de Pitágoras. A figura 73 apresenta o registro do aluno 6 tentando encontrar o raio da equação pela relação de Pitágoras, e considerou os segmentos errados.

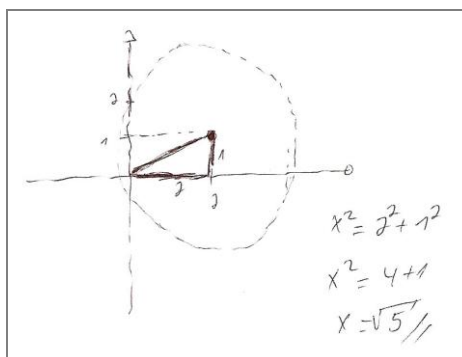


Figura 73: Registro do aluno 6

As dificuldades mencionadas, estão resumidas nos três testes do aluno 5, conforme fornecido pelo banco de dados do sistema SIENA como segue nas figuras 74, 75 e 76.

| Nota: 0.338 |                   |                               |  |              |
|-------------|-------------------|-------------------------------|--|--------------|
| Resposta    | Resposta correcta | Tiempo(antes de que se acabe) | Pregunta   | Puntos antes |
| 3           | true              | 217                           | A opção que melhor representa a circunferência “w” inscrita na circunferência “q” é:   | 0.100        |
| 2           | false             | 461                           | Um submarino usa seu sonar para navegação e com isto identifica possíveis obstáculos na sua trajetória. Sabendo que o sonar do submarino posicionado no ponto de abscissa 3 e ordenada 1 (distâncias do ponto central do sistema de orientação - Longitude zero graus e Latitude zero graus) percebeu uma rocha a dois quilômetros na sua frente. Então o gráfico que melhor representa situação é:  | 0.163        |
| 0           | true              | 274                           | A circunferência de raio duas unidades de medida é:  | 0.163        |
| 3           | false             | 338                           | Se duas circunferências tem seus centros a uma distância de 5 unidades de medida (u.m.) e possuem raios de 3 e 4 u.m. respectivamente. Então se a primeira circunferência está situada num ponto de abscissa 4 e ordenada 1, a outra que está no primeiro quadrante será:  | 0.254        |
| 3           | false             | 365                           | No dia 22/04/2008 às 23:07:43h em São Paulo (SP) - O tremor de terra de 5,2 graus na escala Richter registrado a 270 km da cidade de São Paulo foi sentido também em outros Estados, como no Rio de Janeiro, em Minas Gerais, no Paraná e em Santa Catarina. Se o epicentro estiver de acordo com um sistema cartesiano e localizado no ponto de abscissa dois e ordenada um, sabendo que as coordenadas estão em (quilômetros x 100), então o gráfico que melhor representa a situação acima é: | 0.254        |
| 3           | true              | 105                           | A circunferência que está centrada na origem do plano cartesiano é:  | 0.254        |

Figura 74: Teste 1 realizado pelo aluno 5 no nodo Conversão da Língua Natural < -- > Representação Gráfica da Circunferência

**Nota:** 0.338

| <b>Respuesta</b> | <b>Respuesta correcta</b> | <b>Tiempo(antes de que se acabe)</b> | <b>Pregunta</b>  | <b>Puntos antes</b> |
|------------------|---------------------------|--------------------------------------|--|---------------------|
| 2                | false                     | 323                                  | De acordo com o gráfico podemos afirmar que:   | 0.100               |
| 0                | true                      | 280                                  | A circunferência de raio duas unidades de medida é:  | 0.100               |
| 2                | false                     | 529                                  | Um submarino usa seu sonar para navegação e com isto identifica possíveis obstáculos na sua trajetória. Sabendo que o sonar do submarino posicionado no ponto de abscissa 3 e ordenada 1 (distâncias do ponto central do sistema de orientação - Longitude zero graus e Latitude zero graus) percebeu uma rocha a dois quilômetros na sua frente. Então o gráfico que melhor representa situação é:  | 0.163               |
| 3                | true                      | 236                                  | A opção que melhor representa a circunferência “w” inscrita na circunferência “q” é:   | 0.163               |
| 3                | false                     | 388                                  | Se duas circunferências tem seus centros a uma distância de 5 unidades de medida (u.m.) e possuem raios de 3 e 4 u.m. respectivamente. Então se a primeira circunferência está situada num ponto de abscissa 4 e ordenada 1, a outra que está no primeiro quadrante será:  | 0.254               |
| 3                | false                     | 384                                  | No dia 22/04/2008 às 23:07:43h em São Paulo (SP) - O tremor de terra de 5,2 graus na escala Richter registrado a 270 km da cidade de São Paulo foi sentido também em outros Estados, como no Rio de Janeiro, em Minas Gerais, no Paraná e em Santa Catarina. Se o epicentro estiver de acordo com um sistema cartesiano e localizado no ponto de abscissa dois e ordenada um, sabendo que as coordenadas estão em (quilômetros x 100), então o gráfico que melhor representa a situação acima é: | 0.254               |
| 3                | true                      | 114                                  | A circunferência que está centrada na origem do plano cartesiano é:  | 0.254               |

Figura 75: Teste 2 realizado pelo aluno 5 no nodo Conversão da Língua Natural < -- > Representação Gráfica da Circunferência

| Nota: 0.980 |                    |                               |  |              |
|-------------|--------------------|-------------------------------|--|--------------|
| Respuesta   | Respuesta correcta | Tiempo(antes de que se acabe) | Pregunta   | Puntos antes |
| 1           | false              | 345                           | De acordo com o gráfico podemos afirmar que:   | 0.100        |
| 0           | true               | 276                           | A circunferência de raio duas unidades de medida é:  | 0.100        |
| 0           | false              | 523                           | Um submarino usa seu sonar para navegação e com isto identifica possíveis obstáculos na sua trajetória. Sabendo que o sonar do submarino posicionado no ponto de abscissa 3 e ordenada 1 (distâncias do ponto central do sistema de orientação - Longitude zero graus e Latitude zero graus) percebeu uma rocha a dois quilômetros na sua frente. Então o gráfico que melhor representa situação é:  | 0.163        |
| 3           | true               | 237                           | A opção que melhor representa a circunferência “w” inscrita na circunferência “q” é:   | 0.163        |
| 2           | false              | 375                           | Se duas circunferências tem seus centros a uma distância de 5 unidades de medida (u.m.) e possuem raios de 3 e 4 u.m. respectivamente. Então se a primeira circunferência está situada num ponto de abscissa 4 e ordenada 1, a outra que está no primeiro quadrante será:  | 0.254        |
| 2           | true               | 388                           | No dia 22/04/2008 às 23:07:43h em São Paulo (SP) - O tremor de terra de 5,2 graus na escala Richter registrado a 270 km da cidade de São Paulo foi sentido também em outros Estados, como no Rio de Janeiro, em Minas Gerais, no Paraná e em Santa Catarina. Se o epicentro estiver de acordo com um sistema cartesiano e localizado no ponto de abscissa dois e ordenada um, sabendo que as coordenadas estão em (quilômetros x 100), então o gráfico que melhor representa a situação acima é: | 0.254        |
| 0           | true               | 489                           | Um menino que está localizado no ponto de abscissa 3 e ordenada -1 (coordenadas em quilômetros a contar de um ponto escolhido), se comunica com seu amigo no limite do alcance do rádio amador que está no ponto de abscissa 6 e ordenada 2, então o gráfico que melhor representa esta situação é:  | 0.373        |
| 1           | true               | 360                           | Um submarino usa seu sonar para navegação e com isto identifica possíveis obstáculos na sua trajetória. Sabendo que o sonar do submarino posicionado no ponto de abscissa 3 e ordenada 1 (distâncias do ponto central do sistema de orientação - Longitude 0o e Latitude 0o) percebeu uma rocha a dois quilômetros 45 graus a sua direita. Então o gráfico que melhor representa a situação é:   | 0.641        |
| 3           | false              | 389                           | Deseja-se construir um canteiro circular de flores em uma bifurcação em “Y” numa estrada. Segundo os cálculos, tal bifurcação tem forma triangular de lados iguais medindo 3 metros, então o gráfico que melhor representa esta situação é:  | 0.843        |
| 2           | true               | 272                           | Um vazamento de óleo em alto-mar, no ponto de abscissa 2 e ordenada 1 (distância em quilômetros da origem que representa longitude zero graus e latitude zero graus), atingiu um raio de 5 km. O gráfico que melhor representa esta situação é:  | 0.843        |
| 0           | false              | 527                           | Numa indústria é fabricada uma peça circular cujo interior é cortada de maneira que seja retirada um retângulo de lado medindo 5cm. Então o gráfico que representa esta peça é:  | 0.904        |
| 0           | true               | 159                           | Segundo o gráfico podemos afirmar que:   | 0.904        |
| 3           | true               | 502                           | (b) De acordo com o gráfico pode-se dizer que:   | 0.943        |

Figura 76: Teste 3 realizado pelo aluno 5 no nodo Conversão da Língua Natural < -- > Representação Gráfica da Circunferência

A partir destes testes, e ainda, lançando mão dos registros escritos do aluno, e também o acompanhamento realizado durante estes, e apontamentos feitos, foi possível perceber que, embora os alunos apresentando um rendimento satisfatório nos testes, não significa facilidade encontrada no momento da resolução, e isto foi observado durante os testes e confirmado pelo sistema SIENA na contagem do tempo de resolução das questões, ou seja, as questões foram abordadas corretamente, mas demandaram mais reflexão e por fim, mais tempo.

#### **4.2.7 Análise do nodo Conversão da Representação Algébrica para a Representação Gráfica da Circunferência**

Neste nodo, tomando inicialmente os aspectos gerais das dificuldades percebidas na resolução das questões, sobretudo dificuldades de tratamento que refletiram nos desempenhos apresentados, como de representar as equações da circunferência a partir da sua forma geral para sua forma reduzida, ou seja, dificuldade de formar os binômios quadrados traduzindo-se em erros de tratamento, como por exemplo, as mais comuns, erros de soma de termos, erros ao acrescentar termos para completar os quadrados e não tirá-los depois. Outra dificuldade recorrente nos testes, foi de relacionar, no caso da equação reduzida, elementos variáveis da equação como, as coordenadas do centro da circunferência com a translação da mesma.

Ainda, outra dificuldade bastante apontada durante as atividades, era de representar graficamente uma equação reduzida simples. Para os alunos 2, 8 e 10, esta questão foi objeto de dúvidas frequentes, principalmente no que se refere aos sinais das coordenadas do ponto central da circunferência, e também, muitos não tinham a noção de como verificar nos gráficos apresentados, qual apresentava o raio correspondente ao raio observado na equação, muitas vezes, era observado corretamente o raio na equação, mas na hora de apontar a resposta eles não conseguiam identificar qual seria, o que acarretou em uma mudança de abordagem do problema. A seguir, as figuras 77 e 78 apresentam, respectivamente, os registros do aluno 2, em que constam as dificuldades em passar da equação geral para sua forma reduzida, e em representar graficamente a equação reduzida da circunferência, não identificando corretamente o ponto do centro desta.

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 - 2x - 2 &= 0 \\
 x^2 - 2x + y^2 - 2 &= 0 \\
 x^2 - 2x - 2 &= -y^2 = 0 \\
 (x-2)^2 &= x^2 - 4x + 4 \\
 (x-1)^2 &= x^2 - 2x + 1 \\
 (x-1)^2 + 1 + y^2 &= 0 \\
 (x-1)^2 + y^2 &= -1?
 \end{aligned}$$

Figura 77: Registro 1 do aluno 2

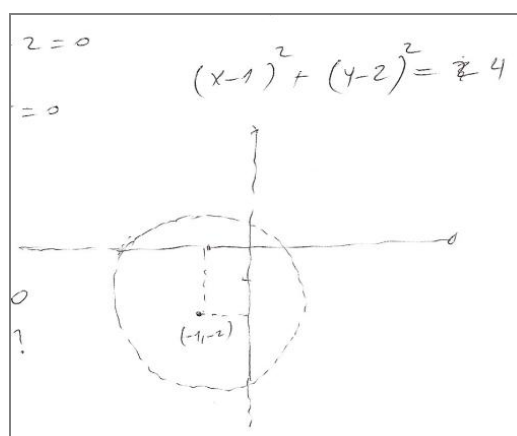


Figura 78: Registro 2 do aluno 2

A seguir, consta a tabela 8 com os resultados dos alunos nos testes referentes ao nodo em questão, os quais foram retirados do banco de dados do sistema SIENA, e o gráfico correspondente a esses resultados, conforme figura 79.

Tabela 8

Desempenho dos alunos no nodo Conversão da Representação Algébrica --> Representação Gráfica da Circunferência

| Conversão da Representação Algébrica --> Representação Gráfica da Circunferência |       |       |         |       |       |     |         |       |       |       |
|--|-------|-------|---------|-------|-------|-----|---------|-------|-------|-------|
| Banco de Dados   |       |       |         |       |       |     |         |       |       |       |
| Alunos   | 1     | 2     | 3       | 4     | 5     | 6   | 7       | 8     | 9     | 10    |
| Teste 1  | 0,995 | 0,2   | não fez | 0,333 | 0,273 | 0,1 | não fez | 0,304 | 0,724 | 0,226 |
| Teste 2  |       | 0,751 |         | 0,923 | 0,855 |     |         | 0,535 |       | 0,333 |
| Teste 3  |       |       |         |       |       |     |         | 0,663 |       | 0,998 |

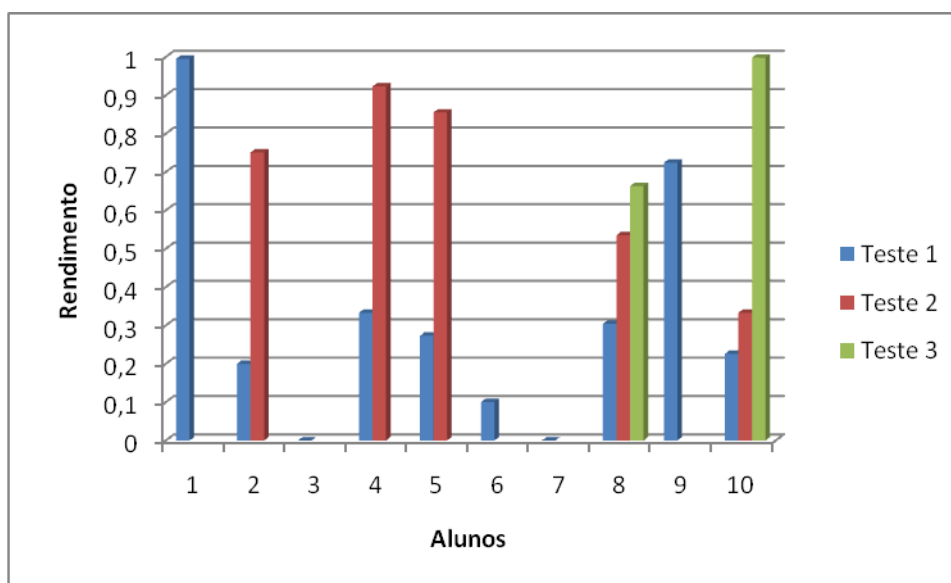


Figura 79: Gráfico do rendimento dos alunos no nodo Conversão da Representação Algébrica --> Representação Gráfica da Circunferência

A partir dos resultados apresentados na tabela 8, e no seu respectivo gráfico, na figura 79, observa-se que cinco, dos oito alunos que realizaram o primeiro teste obtiveram resultados insatisfatórios, com notas muito abaixo do índice 0,6. Os alunos 1 e 9, os quais atingiram rendimentos satisfatórios, já estudaram Geometria Analítica no curso de licenciatura, porém, os alunos 5, 8 e 10, também com este perfil, necessitaram realizar estudos de recuperação e realizar novos testes para alcançarem aprovação, destacando-se os alunos 8 e 10, os quais somente obtiveram aprovação no teste 3. Em relação aos alunos 2, 4 e 6, observa-se que o aluno 6 não realizou estudos de recuperação e não se dispôs a realizar um novo teste, enquanto que os alunos 2 e 4 obtiveram melhor desempenho e aprovação no segundo teste.

Ainda, para ilustrar as considerações feitas, acerca das dificuldades mencionadas, segue como exemplo os testes realizados pelo aluno 10, que totalizaram três testes conforme a tabela 8, retirados do banco de dados gerado após a realização dos mesmos, mostrados pelas figuras 80, 81 e 82.

Nota: 0.226

| Resposta | Resposta correcta | Tiempo(antes de que se acabe) | Pregunta   | Puntos antes |
|----------|-------------------|-------------------------------|--|--------------|
| 3        | true              | 313                           | Sabendo que o ponto central é (1,2) então o gráfico que possui também $r=2$ é:       | 0.100        |
| 2        | false             | 385                           | O gráfico de uma circunferência de raio 3 que toca a reta de equação $y = 2x + 1$ é: | 0.163        |
| 3        | false             | 287                           | O gráfico que representa a equação $x^2 + y^2 - 2x - 2 = 0$ é:                       | 0.163        |
| 3        | false             | 164                           | O ponto (0,3) pertence à circunferência:   | 0.163        |
| 2        | true              | 153                           | O ponto (2,1) é interno ao gráfico:  | 0.163        |
| 1        | false             | 174                           | O gráfico que representa a equação $x^2 + y^2 + 2x - y - 4 = 0$ é:                   | 0.226        |

Figura 80: Teste 1 realizado pelo aluno10 no nodo Conversão da Representação Algébrica -- > Representação Gráfica da Circunferência

Nota: 0.333

| Resposta | Resposta correcta | Tiempo(antes de que se acabe) | Pregunta  | Puntos antes |
|----------|-------------------|-------------------------------|---|--------------|
| 0        | true              | 513                           | A circunferência situada no ponto (1,2) tangencia uma reta de equação $3x + 2y - 20 = 0$ é: | 0.100        |
| 1        | false             | 173                           | O gráfico de uma circunferência de raio 3 que toca a reta de equação $y = 2x + 1$ é:        | 0.250        |
| 1        | false             | 101                           | O gráfico que representa a equação $x^2 + y^2 - 2x - 2 = 0$ é:                              | 0.250        |
| 3        | false             | 52                            | O ponto (0,3) pertence à circunferência:  | 0.250        |
| 2        | true              | 115                           | O ponto (2,1) é interno ao gráfico:   | 0.250        |
| 2        | false             | 19                            | O gráfico que representa a equação $x^2 + y^2 + 2x - y - 4 = 0$ é:                          | 0.333        |

Figura 81: Teste 2 realizado pelo aluno10 no nodo Conversão da Representação Algébrica -- > Representação Gráfica da Circunferência

| Nota: 0.998 |                    |                               |   |              |
|-------------|--------------------|-------------------------------|---|--------------|
| Respuesta   | Respuesta correcta | Tiempo(antes de que se acabe) | Pregunta  | Puntos antes |
| 1           | true               | 143                           | O gráfico que indica a direção em que se desloca a circunferência de equação $x^2 + y^2 + 2xa + 4y - 4 + a^2 = 0$ é:  | 0.100        |
| 3           | true               | 251                           | O gráfico de uma circunferência de raio 3 que toca a reta de equação $y = 2x + 1$ é:  | 0.250        |
| 0           | true               | 430                           | O gráfico que representa o movimento da circunferência na medida em que “a” varia na equação $x^2 + y^2 + 2x - 2ya - 3 + a^2 = 0$ é:  | 0.500        |
| 3           | true               | 286                           | O ponto de encontro do eixo das ordenadas com a circunferência de equação $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$ corresponde a:  | 0.750        |
| 3           | true               | 159                           | O gráfico que representa a equação $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 21 = 0$   | 0.900        |
| 2           | true               | 427                           | O gráfico que representa uma circunferência de $r = (\sqrt{13})$ é:   | 0.964        |
| 0           | false              | 359                           | Para mapear uma região desmatada, uma clareira na mata, percebeu-se que sua curva aproximava-se de uma circunferência de equação $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ , então o raio desta região desmatada está conforme o gráfico: | 0.988        |
| 0           | true               | 156                           | O gráfico que representa a equação $x^2 + y^2 - 2x - 2 = 0$ é:  | 0.988        |
| 0           | true               | 259                           | A circunferência situada no ponto (1,2) tangencia uma reta de equação $3x + 2y - 20 = 0$ é:   | 0.993        |

Figura 82: Teste 3 realizado pelo aluno10 no nodo Conversão da Representação Algébrica --> Representação Gráfica da Circunferência

Pecebe-se, através das questões que se repetiram nos testes acima, e identificadas com a mesma cor, diferente da preta, é possível verificar o avanço do aluno 10 no conteúdo deste nodo.

No geral, os alunos apresentaram uma dificuldade maior que a esperada para este nodo, pois, acredita-se que seja proposto, mais frequentemente, em sala de aula, o trabalho com atividades que abordem este sentido da conversão. Além disso, no nodo referente ao conteúdo de Reta que abordou a mesma conversão, apresentou menos dificuldades e melhor rendimento dos alunos. Considera-se, então, que os alunos apresentam maior dificuldade no conteúdo de Circunferência, no que tange a conversão abordada pelas questões neste nodo, suscitando que este conteúdo seja melhor trabalhado tanto no Ensino Médio quanto no Superior.

#### 4.2.8 Análise do nodo Conversão da Representação Gráfica para a Representação Algébrica da Circunferência

Neste nodo, as dificuldades concernem em extrair e utilizar os elementos que caracterizaram os gráficos para responder as perguntas, entre eles, pontos centrais das



circunferências, pontos pertencentes às mesmas, pontos internos e externos as mesmas, eixos coordenados, retas tangentes ao gráfico. Nestes casos, com relação aos tratamentos, erros ao calcular a medida do raio da circunferência, como em questões que apresentavam gráficos conforme figura 83.

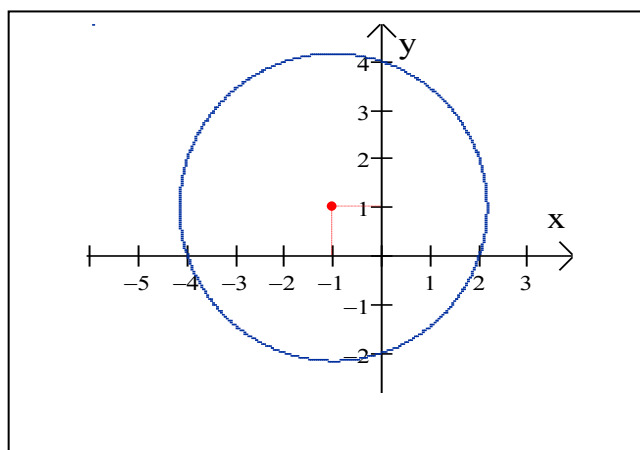


Figura 83: Exemplo de gráfico apresentado para calcular o raio

Neste caso era somente para ligar, por exemplo, formando um triângulo retângulo, os pontos  $(0,4)$ ,  $(-1,1)$  e  $(0,1)$ .

Poucos acertaram todas as questões que envolviam esta dificuldade, principalmente por considerarem pontos não apropriados para o cálculo do raio.

Ainda, com relação aos pontos centrais, sobretudo nos primeiros testes, muitos erros de sinal na formação da equação reduzida.

A tabela 9 apresenta o desempenho geral dos alunos nos testes deste nodo, de acordo com o banco de dados do sistema SIENA, e a figura 84 seu respectivo gráfico.

Tabela 9

Desempenho dos alunos no nodo Conversão da Representação Gráfica -- > Representação Algébrica da Circunferência

| Conversão da Representação Gráfica -- > Representação Algébrica da Circunferência |       |     |         |       |       |       |         |       |       |       |
|---|-------|-----|---------|-------|-------|-------|---------|-------|-------|-------|
| Banco de Dados  |       |     |         |       |       |       |         |       |       |       |
| Alunos  | 1     | 2   | 3       | 4     | 5     | 6     | 7       | 8     | 9     | 10    |
| Teste 1   | 0,889 | 0,1 | não fez | 0,143 | 0,2   | 0,2   | não fez | 0,163 | 0,988 | 0,999 |
| Teste 2   |       |     |         | 0,678 | 0,368 | 0,467 |         | 0,333 |       |       |
| Teste 3   |       |     |         |       | 0,801 |       |         | 0,663 |       |       |

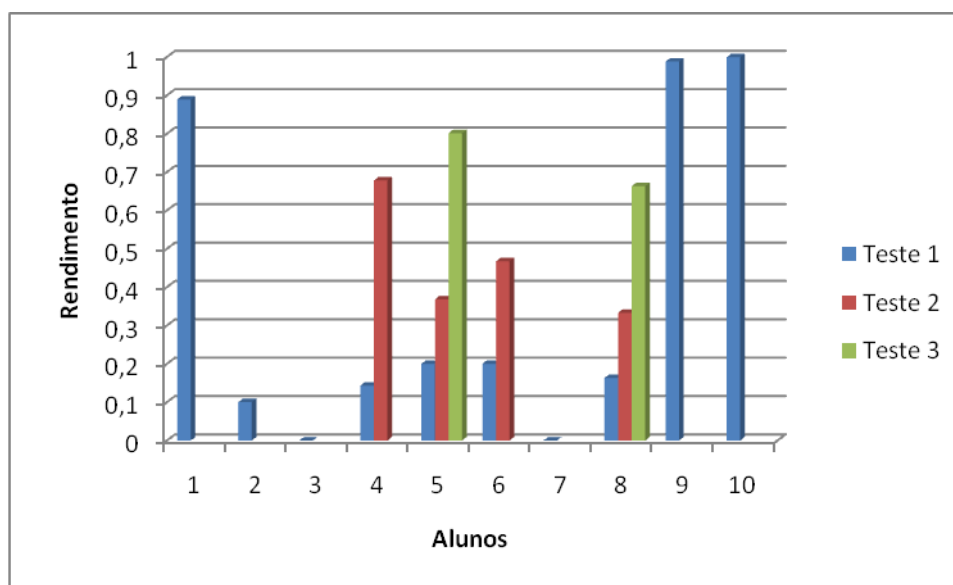


Figura 84: Gráfico do rendimento dos alunos no nodo Conversão da Representação Gráfica -- > Representação Algébrica da Circunferência

De acordo com a tabela 9, observa-se que dos alunos oito alunos que realizaram o primeiro teste, apenas três obtiveram resultados satisfatórios e bem acima do índice 0,6, sendo estes alunos formandos do curso de licenciatura. Já o aluno 8, também formando deste curso, necessitou realizar três testes e estudos de recuperação entre eles, e no teste 3 obteve um resultado próximo ao índice 0,6. Quanto aos demais alunos, 2, 4 e 6, verifica-se que no teste 1, seus resultados foram muito abaixo deste índice, e destaca-se entre estes alunos, o de número 5, o qual estudou Geometria Analítica neste curso, e somente no teste 3 obteve aprovação (intercalando estes com estudo de recuperação, aos quais o SIENA o conduzia), enquanto o aluno 4 atingiu resultado satisfatório no teste 2, o aluno 6, mesmo realizou o segundo teste após a recuperação, mas não obteve aprovação, não se dispondo a realizar um terceiro teste para que fosse possível analisar se haveria avanço por este. O aluno 2 errou todas as questões do teste 1 e não realizou novos testes.

É importante ressaltar que algumas questões foram concluídas como erradas pelo sistema SIENA porque esgotou-se o tempo para resolução das mesmas, pois sistema determina um tempo de resolução para cada questão, tempo este definido pela professora pesquisadora. Este, foi dado permitindo com grande folga a resolução de cada questão, o que não impede que, em alguns casos, o aluno necessitasse de mais tempo dependendo de muitos fatores como, o rendimento, compreensão do conteúdo, mas, foi necessário atribuir um tempo limite, conforme entendia-se a necessidade para cada questão, e também, para

dinamizar o processo e não contribuir para que se tornasse uma tarefa enfadonha para os alunos.

Ilustra-se nas figuras 85, 86 e 87, os três testes do aluno 8 extraídos do banco de dados do sistema SIENA.

| <b>Nota: 0.163</b> |                           |                                      |  |                     |
|--------------------|---------------------------|--------------------------------------|--|---------------------|
| <b>Respuesta</b>   | <b>Respuesta correcta</b> | <b>Tiempo(antes de que se acabe)</b> | <b>Pregunta</b>  | <b>Puntos antes</b> |
| 3                  | false                     | 301                                  | O raio da circunferência de acordo com o gráfico é:  | 0.100               |
| 2                  | true                      | 194                                  | Com base no gráfico o comprimento da circunferência é:   | 0.100               |
| 1                  | false                     | 194                                  | Com base no gráfico o comprimento da circunferência é:   | 0.163               |
| 3                  | false                     | 159                                  | A equação que representa o gráfico é:  | 0.163               |
| 3                  | false                     | 156                                  | Dados dois pontos conforme o gráfico, a equação reduzida de centro na origem e que passa no ponto "P" é: | 0.163               |

Figura 85: Teste 1 realizado pelo aluno 8 no nodo Conversão da Representação Gráfica --> Representação Algébrica da Circunferência

| <b>Nota: 0.333</b> |                           |                                      |  |                     |
|--------------------|---------------------------|--------------------------------------|--|---------------------|
| <b>Respuesta</b>   | <b>Respuesta correcta</b> | <b>Tiempo(antes de que se acabe)</b> | <b>Pregunta</b>  | <b>Puntos antes</b> |
| 3                  | true                      | 681                                  | Com base no gráfico a equação que representa o movimento da circunferência onde seu centro esteja sempre sobre a reta é: | 0.100               |
| 1                  | false                     | 343                                  | A equação da circunferência segundo o gráfico é:   | 0.250               |
| 1                  | false                     | 226                                  | Com base no gráfico o comprimento da circunferência é:   | 0.250               |
| 0                  | true                      | 169                                  | A equação que representa o gráfico é:  | 0.250               |
| 1                  | false                     | 226                                  | Dado dois pontos conforme o gráfico, a equação reduzida da circunferência de centro "O" e que passa pelo ponto "P" é:    | 0.333               |
| 3                  | false                     | 169                                  | Dados dois pontos conforme o gráfico, a equação reduzida de centro na origem e que passa no ponto "P" é:                 | 0.333               |

Figura 86: Teste 2 realizado pelo aluno 8 no nodo Conversão da Representação Gráfica --> Representação Algébrica da Circunferência

| Nota: 0.663 |                    |                               |   |              |
|-------------|--------------------|-------------------------------|---|--------------|
| Respuesta   | Respuesta correcta | Tiempo(antes de que se acabe) | Pregunta  | Puntos antes |
| 2           | false              | 687                           | O raio da circunferência do gráfico é:  | 0.100        |
| 1           | false              | 229                           | Com base no gráfico o comprimento da circunferência é:  | 0.100        |
| 0           | true               | 168                           | A equação que representa o gráfico é:   | 0.100        |
| 2           | true               | 229                           | Dado dois pontos conforme o gráfico, a equação reduzida da circunferência de centro "O" e que passa pelo ponto "P" é: | 0.143        |
| 2           | true               | 295                           | A equação da circunferência segundo o gráfico é:  | 0.226        |
| 1           | false              | 399                           | A equação da circunferência representada geometricamente é:   | 0.467        |
| 3           | false              | 262                           | A equação reduzida do gráfico da circunferência é:  | 0.467        |
| 3           | false              | 171                           | Dados dois pontos conforme o gráfico, a equação reduzida de centro na origem e que passa no ponto "P" é:              | 0.467        |
| 3           | true               | 115                           | A equação reduzida do gráfico é:  | 0.467        |
| 2           | false              | 256                           | A equação geral da circunferência representada geometricamente é:   | 0.568        |
| 1           | false              | 210                           | De acordo com o gráfico, podemos dizer que o raio da circunferência é:  | 0.568        |
| 0           | false              | 162                           | A equação reduzida que representa algebricamente a circunferência de gráfico é:                                       | 0.568        |
| 1           | true               | 165                           | De acordo com o gráfico, a equação que representa a circunferência é:   | 0.568        |
| 1           | false              | 291                           | Com base no gráfico podemos dizer que a coordenada que está faltando é o número:                                      | 0.663        |

Figura 87: Teste 3 realizado pelo aluno 8 no nodo Conversão da Representação Gráfica -- > Representação Algébrica da Circunferência

Por fim, comparando os objetos, Reta e Circunferência, no que tange às perguntas ou mesmo respostas apresentadas em forma discursiva (língua natural), foram percebidos mais erros em relação às perguntas que envolviam Circunferência. Este fato, de acordo com a pesquisa, revelou que perguntas caracterizadas por situações-problema menos diretas, sobretudo nos níveis médio e difícil do teste, visto que o teste apresentava perguntas "mais difíceis" na medida em que o aluno acertava as perguntas propostas, exigiram processos mentais mais acurados e não imediatos. Este fato desvela que esses alunos ainda apresentam dificuldades, apesar de já terem estudado Geometria Analítica no Ensino Médio. Considera-se, também, que os livros didáticos não apresentam questões como as desenvolvidas para os testes, pois os livros pesquisados não continham uma abordagem compatível com a abordagem da conversão dos Registros de Representação Semiótica no nicho da Geometria Analítica, salvo, encontradas algumas questões que abordavam a conversão entre os registros algébrico e gráfico, mais frequente no sentido do registro algébrico para o gráfico.

Com efeito, cabe ressaltar que, conforme indicam os gráficos do desempenho dos alunos, segundo as notas retiradas do banco de dados do sistema SIENA, os menores desempenhos estão relacionados com a língua natural, isto é, envolvem perguntas ou respostas discursivas. As dificuldades relativas ao sentido da conversão nos nodos com o registro língua natural, e que continham os dois sentidos, estiveram mais presentes no sentido cuja representação de partida era a língua natural, ressaltando que nestes testes adaptativos, o sistema SIENA lançou um maior número de questões que partiam deste registro.

#### 4.3 AS OBSERVAÇÕES E FILMAGENS REALIZADAS E FALAS DOS ALUNOS

Durante a experiência, com base nas observações e filmagens, os alunos mostraram-se interessados e atentos às atividades. Ao final de cada teste verificavam suas notas e as questões que erraram, e abriam a sequência didática, caso não tivessem sido aprovados no teste. Verificou-se no primeiro encontro, e mais especificamente no teste do primeiro nodo, que alguns alunos, quando não eram aprovados, e ao perceberem que outro colega aprovou no teste, ficavam ansiosos para logo fazer um novo teste e não observavam com calma as atividades da sequência didática, ou não as realizavam completamente. Ao perceberem que tinham dificuldades também no segundo teste, os alunos começaram a olhar mais calmamente a revisão de conteúdo e as atividades da sequência didática, demonstrando bastante interesse pelas atividades interativas, como os jogos do *JClic*, e as atividades desenvolvidas com o *software flash*, como a batalha naval, a atividade com a localização de pontos no mapa, entre outras.

Quando questionados sobre o que acharam das questões e da sequência didática, os alunos responderam que as questões estavam boas, e que os fizeram refletir de outra maneira sobre a Geometria Analítica. Alguns comentaram também, que sentiram necessidade de revisar este campo da Matemática, que na opinião do aluno 1 é “pouco explorado e muito utilizável no cotidiano relacionado a posicionamento.” O aluno 6 também comentou que, o fato de ter um tempo estipulado para realizar a questão, mesmo este tempo sendo suficiente, ele ficava ansioso pois sentia que tinha que correr contra este tempo.

Com relação a sequência didática os alunos comentaram que gostaram da maneira como foi apresentada a revisão dos conteúdos e também as atividades didáticas interativas. O aluno 6, sobre a revisão dos conteúdos escreveu que: “possui uma ótima elaboração

ilustrativa, totalmente diferente da maneira que aprendemos na escola”, porém este mesmo aluno comentou que sentiu falta de exemplos numéricos e exercícios resolvidos na revisão do conteúdo. Os alunos comentaram que as atividades interativas também foram importantes para rever conceitos e demonstraram interesse em desenvolvê-las com seus futuros alunos, logo será disponibilizado a cada aluno participante da pesquisa um CD-Rom contendo as questões e as sequências didáticas.

Assim, percebe-se que a sequência didática desenvolvida para cada nodo, apresentou papel importante para que os alunos obtivessem melhores desempenhos nos testes adaptativos, dos nodos em que não foram aprovados no primeiro teste, após terem realizado estudos de recuperação e atividades didáticas propostas por esta.

Constata-se que o sistema inteligente SIENA mostrou-se, nesta experiência, um recurso tecnológico eficaz, contribuindo para identificação das dificuldades individuais que os alunos apresentaram frente à conversão entre os Registros de Representação Semiótica, língua natural, algébrico e gráfico, aqui abordados conforme os nodos do PCIG, no conteúdo de Geometria Analítica, mais precisamente Reta e Circunferência, e na recuperação dos conceitos em que estes alunos apresentaram dificuldades.

## CONCLUSÃO

A pesquisa desenvolvida objetivou investigar quais as possíveis dificuldades que os alunos de Licenciatura em Matemática apresentam em relação à conversão entre os Registros de Representação Semiótica no conteúdo de Geometria Analítica, mais especificamente nos conteúdos de Reta e Circunferência, e as possíveis contribuições do sistema inteligente SIENA para a identificação das dificuldades individuais e na recuperação dos conceitos nos quais estes alunos apresentaram dificuldades.

Para atingir essa meta, diferentes etapas foram executadas: levantamento bibliográfico sobre os Registros de Representação Semiótica e os aspectos teóricos e didáticos dos conceitos e atividades com os conteúdos de Reta e Circunferência; construção do PCIG com oito nodos sobre os conteúdos de Reta e Circunferência relacionando-os com os Registros de Representação Semiótica; estudo do funcionamento do SIENA; construção do banco de questões para cada nodo para realização dos testes adaptativos; realização de um período de estudos na ULL para familiarização e simulação com o SIENA; elaboração das atividades da sequência didática para cada nodo do PCIG; aplicação da experiência com dez alunos do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Luterana do Brasil/Canoas.

Nesta investigação, a partir da análise dos dados coletados com os instrumentos de pesquisa, foi possível identificar as dificuldades que os alunos pesquisados apresentaram em relação à conversão entre os registros língua natural, algébrico e gráfico no conteúdo de Geometria Analítica, mais especificamente Reta e Circunferência. Os alunos apresentaram uma compreensão limitada acerca dos conteúdos Reta e Circunferência e dificuldades de visualização, interpretação e abstração.

Os registros dos alunos no desenvolvimento das questões em cada nodo revelaram as seguintes dificuldades na realização das conversões propostas pelas mesmas: identificar e visualizar nos registros algébricos e gráficos das retas os coeficientes angular e linear, bem

como em realizar cálculos para encontrá-los, ou seja nos tratamentos envolvidos nestes cálculos ; relacionar o coeficiente angular com o ângulo correspondente e com os conceitos de paralelismo e perpendicularismo; em escrever na forma numérica ou representar graficamente as coordenadas de um ponto, as quais apresentavam-se escritas no registro língua natural, tanto no conteúdo de Reta quanto no de Circunferência; nos tratamentos envolvidos na relação de Pitágoras, além de não conseguirem estabelecer triângulos retângulos e projeções nos eixos para calcular o coeficiente angular da reta; realizar tratamentos para encontrar pontos de intersecção entre as retas apresentadas no registro algébrico; ainda em tratamentos que implicaram em passar uma equação da forma geral para a forma reduzida, tanto em equações de Retas quanto de Circunferências; relacionar a ordem dos quadrantes; resolver questões que abordaram mais elementos, como por exemplo, encontrar a equação da reta que passava em um ponto e é perpendicular a outra reta que continha pontos ou equação definida; em realizar tratamentos com pontos na forma algébrica; na interpretação, visualização e na escrita algébrica em questões que apresentaram elementos abstratos, como os parâmetros, cuja a variação representava a translação da circunferência no registro gráfico. Ainda em relação a Circunferência, dificuldades em: realizar tratamentos relacionados ao cálculo dos quadrados dos binômios, ao cálculo do raio, ao cálculo para encontrar o centro, ou então em visualizá-lo na sua representação algébrica; representar graficamente a equação de uma circunferência, mesmo esta apresentando-se na forma reduzida, ou seja, em realizar a conversão do registro algébrico para o gráfico.

É importante salientar que, em algumas questões os acadêmicos recorreram a utilização de um registro intermediário para melhor visualização da situação apresentada, e após, efetuar a conversão para o registro solicitado, como por exemplo o uso do registro gráfico para visualizar e identificar os quadrantes, o uso de tabelas para passar do registro algébrico para o registro gráfico, ou seja passar da equação ao gráfico, entre outros. O uso dos registros intermediários para melhor compreender a questão era necessário, em muitos casos, para complementar os registros em que estas se apresentavam e assim solucioná-las.

Em relação aos nodos, constatou-se, através do desempenho dos alunos fornecido pelo banco de dados do SIENA, uma maior dificuldade nos nodos *Conversão da Representação Língua Natural para a Representação Algébrica e da Representação Algébrica para a Língua Natural* tanto para Reta quanto para Circunferência.

O nodo em que estes apresentaram menor dificuldade foi na *Conversão da Representação Algébrica para a Representação Gráfica da Reta*, e percebeu-se que os livros



didáticos pesquisados priorizam os tratamentos nestes registros e a conversão neste sentido. Porém, não constatou-se a mesma facilidade na abordagem desta conversão para o conteúdo de Circunferência, demonstrando que os alunos possuem menor compreensão e apreensão deste conteúdo comparado a compreensão e apreensão do conteúdo de Reta, no que tange este sentido da conversão.

No segundo teste, realizado pelos alunos não aprovados no primeiro, constatou-se que, mesmo realizando estudos de recuperação e alguns alunos obtendo aprovação, a maior dificuldade ainda predominava no nodo *da Representação Língua Natural para a Representação Algébrica da Reta*, sendo que ela persistiu nos resultados apresentados no terceiro teste para os alunos que o realizaram e não foram aprovados no segundo, mesmo tendo sido realizado, no intervalo entre estes, estudos de recuperação referente ao conteúdo abordado no nodo. Evidencia-se, assim, a necessidade, neste nodo, de melhorar o caminho metodológico percorrido pela sequência didática elaborada, a fim de melhor contribuir para sanar as dificuldades conforme apresentadas pelos alunos pesquisados.

Além disso, cabe salientar que, no geral, constatou-se que os melhores resultados nos testes adaptativos, em que os alunos necessitaram menos estudos de recuperação, foram obtidos pelos alunos, comparado aos demais, concluintes do curso de licenciatura, observando que estes já estudaram Geometria Analítica também neste curso.

Percebe-se ainda, através dos resultados dos alunos nos testes adaptativos 2 e 3, dos nodos do PCIG, que as dificuldades apresentadas no primeiro teste foram reduzidas à medida em que os alunos não aprovados realizavam os estudos de recuperação e as atividades didáticas propostas na sequência didática respectiva a cada nodo do PCIG, no intervalo destes testes, porém não foram sanadas completamente.

O sistema inteligente SIENA mostrou-se eficiente, contribuindo para a identificação das dificuldades individuais dos dez alunos pesquisados, em relação à conversão entre os Registros de Representação Semiótica, língua natural, algébrico e gráfico, no conteúdo de Geometria Analítica, especificamente Reta e Circunferência, e na recuperação dos conceitos nos quais estes alunos apresentaram dificuldades.

Com relação a estas etapas, a dificuldade encontrada pela professora pesquisadora foi na construção do banco de questões, principalmente para os nodos que tinham como um dos registros a língua natural, pois foi necessário desenvolver questões, de forma que o aluno realizasse a conversão deste para o registro algébrico ou para o registro gráfico e vice-versa. Tal dificuldade ocorreu, pelo fato dos livros didáticos pesquisados quase não apresentarem

sugestões de atividades que propiciassem a conversão entre estes registros. A maioria dos livros didáticos, valorizam mais os tratamentos internos aos registros numérico, algébrico e gráfico, e sugerem a conversão mais no sentido do registro algébrico para o gráfico, assim, foi necessário adaptar as questões e criar outras, buscando que estas, no geral, propusessem a conversão de acordo com a abordada em cada nodo do PCIG.

Outra dificuldade ocorreu na elaboração da sequência didática para cada nodo do PCIG, pois diferente dos livros didáticos, buscou-se desenvolver uma revisão dos conteúdos de Reta e Circunferência de forma mais ilustrada e generalizada, e atividades didáticas que seriam complementares às questões, ou seja, que abordassem situações de ensino que propusessem à conversão entre os registros, conforme cada nodo do PCIG, sendo necessário adaptar as situações pesquisadas e desenvolver outras, o que demandou tempo, reflexão, estudo e pesquisas suplementares. As atividades elaboradas utilizaram *softwares* como, *flash*, *JClic*, *Power Point*, *Winplot*, o que necessitou estudos complementares de informática educativa.

Entende-se que o objetivo geral desta pesquisa foi alcançado, e para futuras investigações sugere-se a separação dos nodos do PCIG correspondentes à *Conversão da Representação Língua Natural para a Representação Algébrica e da Representação Algébrica para a Língua Natural* e *Conversão da Representação Língua Natural para a Representação Gráfica e da Representação Gráfica para a Língua Natural* tanto para Reta quanto para Circunferência, a fim de que se analise separadamente as dificuldades que tangem cada sentido destas conversões, pois embora este não fosse o principal objetivo desta pesquisa, não foi possível constatar exatamente em qual sentido os alunos apresentam maiores dificuldades, pois o número de questões lançadas pelo SIENA nos testes adaptativos destes nodos salientaram mais um determinado sentido da conversão proposta.

Sugere-se, também, uma ampliação da sequência didática para cada nodo do PCIG, abordando a revisão do conteúdo, à luz da teoria dos Registros de Representação Semiótica, com exercícios e atividades resolvidas para melhor exemplificá-lo, e a construção de mais atividades didáticas interativas que contemplem a conversão proposta em cada nodo, para assim, oferecer aos alunos uma maior possibilidade de sanar suas dificuldades individuais.

Acredita-se na importância de um processo de ensino e aprendizagem da Matemática que utilize uma metodologia que considere a teoria dos Registros de Representação Semiótica, valorizando a compreensão e apreensão dos objetos matemáticos, por meio de seus diversos Registros de Representação Semiótica e a coordenação entre estes.

Para Duval (2004), a aquisição dos conhecimentos matemáticos ocorre à medida que são articulados diferentes registros do mesmo objeto matemático, e ao passo que o aluno difere estes registros do seu objeto.

Espera-se que esta investigação contribua positivamente para instigar uma reflexão do processo de ensino e aprendizagem, não apenas da Geometria Analítica, mas da Matemática. Sugere-se que os atuais e futuros professores de Matemática integrem na sua metodologia de sala de aula, a teoria de Duval, organizando atividades e situações de ensino alicerçada na mesma, buscando que seu aluno construa, compreenda e apreenda conceitos matemáticos através da mobilização e coordenação dos seus diferentes registros.

## REFERÊNCIAS

- ANDRADE, Luísa Silva. **Registros de Representação Semiótica e a Formação de Professores**. Canoas: ULBRA, 2008. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática), Universidade Luterana do Brasil, Canoas, 2008.
- ANDRADE, Luísa Silva; Kaiber, Carmem Tereza. O Ensino de Funções e os Registros de Representação Semiótica. In: V CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DA MATEMÁTICA. Canoas. **Anais**. Rio grande do Sul: 2010.
- ARAÚJO, Jussara de Loiola; BORBA, Marcelo de Carvalho. Construindo pesquisas coletivamente em Educação Matemática. In: ARAÚJO, Jussara de Loiola; BORBA, Marcelo de Carvalho (Orgs.). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004. p. 25-45.
- BAIER, Tânia; SCHWERTL, Simone Leal. Trabalhando a Geometria Analítica com a Postura Fenomenológica. In: III SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Águas de Lindóia. **Anais**. São Paulo: 2006.
- BELEI, Renata Aparecida et al. **O uso de Entrevista, Observação e Videogravação em Pesquisa Qualitativa**. Cadernos de Educação FaE/PPGE/UFPel, janeiro/junho 2008. Disponível em: <<http://www.ufpel.edu.br/fae/caduc/downloads/n30/11.pdf>> Acesso em 20 julho 2010.
- BEZERRA, Manoel Jairo. **Matemática: para o ensino médio**. 5. ed. v. único. São Paulo: Scipione, 2001.
- BEZERRA, Nilra Jane Figueira. O GPS como Instrumento Didático Auxiliar no Processo de Significação Conceitual do Ensino da Geometria Analítica. In: IV SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Brasília. **Anais**.

Distrito Federal: 2009.

BODGAN, Roberto C.; BIKLEN, Sari Knopp. **Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto: Porto Editora, 1999.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC/Seb, 2006.

D'AMORE, Bruno. **Epistemologia e Didática da Matemática**. 1. ed. São Paulo: Escrituras Editora, 2005.

D'AMORE, Bruno. **Elementos de Didática da Matemática**. Tradução de Maria Cristina Bonomi. 1. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**. 1.ed. v.3. São Paulo: Ática, 2004.

DAMM, Regina Flemming. Registros de Representação. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara et al. **Educação Matemática: uma introdução**. 2.ed. São Paulo: EDUC, 2002. p. 135-153.

DESCOVI, Lucieli Martins Gonçalves. **Recuperação Individualizada de Conteúdos de Matemática Utilizando o Sistema Informático SCOMAX**. Canoas: ULBRA, 2008. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática), Universidade Luterana do Brasil, Canoas, 2008.

DOLZ, Joaquim; NOVERRAZ, Michele; SCHNEUWLY, Bernard. Sequências didáticas para o oral e a escrita: apresentação de um procedimento. In: SCHNEUWLY, Bernard; DOLZ, Joaquim. **Gêneros orais e escritos na escola**. Tradução de Roxane Rojo e Gláís Sales Cordeiro. Campinas, SP: Mercado das Letras, 2004, p. 95-128.

DUVAL, Raymond. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). **Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica**. Campinas, SP: Papyrus, 2003. p.11-33.

DUVAL, Raymond. **Semiosis y Pensamiento Humano: Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales**. Tradução em casteliano de Myriam Veja Reestrepo. Universidade Del Valle: Peter Lang, 2004.

FILHO, Benigno Barreto; SILVA, Claudio Xavier da. **Matemática: aula por aula**. 1.ed. v.3. São Paulo: FTD, 2003.

FLORES, Cláudia Regina. **Registros de Representação Semiótica em Matemática: história, epistemologia, aprendizagem**. Bolema, 2006. Disponível em :

<<http://ojs.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/viewarticle/1853>> Acesso em : 10 maio 2008.

GROENWALD, Claudia Lisete Oliveira; RUIZ, Lorenzo Moreno. Formação de Professores de Matemática: uma proposta de ensino com novas tecnologias. **Acta Scientiae**, Canoas, v.8, n.2, jul./dez.2006.

GROENWALD, Claudia Lisete Oliveira et al. Sequência Didática com Análise Combinatória no Padrão SCORM. **Bolema**, Rio Claro, ano22, n.34, p.27-56, 2009.

GUELLI, Oscar. **Matemática Série Brasil**. 1.ed. v. único. São Paulo: Ática, 2003.

KAMPPFF, Adriana Justin Cerveira; MACHADO, José Carlos; CAVEDINI, Patrícia. Novas Tecnologias e Educação Matemática. In: X WORKSHOP DE INFORMÁTICA NA ESCOLA E XXIII CONGRESSO DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE COMPUTAÇÃO, 2004, Bahia. Disponível em:

<[http://www.cinted.ufrgs.br/renote/nov2004/artigos/a12\\_tecnologias\\_matematica.pdf](http://www.cinted.ufrgs.br/renote/nov2004/artigos/a12_tecnologias_matematica.pdf)> Acesso em: 10 jun. 2008.

LIMA, Elon Lages et al. **A Matemática do Ensino Médio**. v.3. Rio de Janeiro: SBM, 2004.

LUDKE, Menga; ANDRÉ, Marli E. D.A. **Pesquisa em Educação**: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). **Aprendizagem em Matemática**: Registros de Representação Semiótica. Campinas, SP: Papyrus, 2003.

MORENO, Lorenzo et al. **Hacia um Sistema Inteligente basado em Mapas Conceptuales Evolucionados para la Automación de un Aprendizaje Significativ. Aplicación a La Enseñanza Universitaria de la Jerarquía de Memoria**. In: XIII Jornadas de Enseñanza Universitaria de La Informática. Teruell, Espanha, julho de 2007.

MORETTI, Mércles Thadeu. A Translação como Recurso no Esboço de Curvas por meio da Interpolação Global de Propriedades Figurais. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). **Aprendizagem em Matemática**: Registros de Representação Semiótica. Campinas, SP: Papyrus, 2003. p.149-160.

MORETTI, Mércles Thadeu. O papel dos registros de representação na aprendizagem matemática. **Revista de Educação da Universidade do Vale do Itajaí**, Itajaí, ano2, n.6, p.342-362, set/dez 2002.

MORETTI, Mércles Thadeu; FLORES, Cláudia Regina. Heurística, reconfiguração e aprendizagem matemática: uma possibilidade a partir do uso de figuras geométricas. **Revemat- Revista Eletrônica de Educação Matemática**. p. 5-13. UFSC, 2005.

MURLICK, Viviane R. e GROENWALD, Claudia Lisete O. Recuperação individualizada de conteúdos matemáticos utilizando sistemas inteligentes. In: VI CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Puerto Montt. **Anais**. Chile: 2009.

NEHRING, Cátia Maria; POZZOBON, Marta Cristina Cezar. A Intervenção Docente no Ensino de Álgebra: atividades de livro didático e registros de representação. In: X ENCONTRO GAÚCHO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Ijuí. **Anais**. Rio Grande do Sul: SBEM, 2009.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática**: uma análise da influência francesa. 2.ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

PAIVA, Manoel. **Matemática**. 2.ed. v. único. São Paulo: Moderna, 2003.

PIGNATARI, Décio. **Semiótica e Literatura**. 3.ed. São Paulo: Cultrix, 1987.

PEIRCE, Charles Sanders. **Estudos Semiótica**. 3.ed. São Paulo: Perspectiva, 2000.

RODRIGUES, Adriano Duarte. **Introdução à Semiótica**. 1.ed. Lisboa: Editorial Presença, 1991.

SANTAELLA, Lúcia. **O que é Semiótica**. São Paulo: Brasiliense, 1999.

SILVA, Carlos Roberto da. **Explorando Equações Cartesianas e Paramétricas em um Ambiente Informático**. São Paulo: PUC, 2006. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2006.

SOARES, Maria Arlita da Silveira; NEHRING, Cátia Maria. O Processo de Ensinar e Aprender Matemática num Mundo Globalizado e os Registros de Representação Semiótica. In: IX ENCONTRO GAÚCHO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Caxias do Sul. **Anais**. Rio Grande do Sul: SBEM, 2006.

VIEL, Maria Jesus Martinez; DIAS, Marlene Alves. **SEMIÓTICA: A noção do termo semiótica e o registro de representação semiótica na percepção de professores da Rede Pública de Ensino**. Cruzeiro do Sul: Unicsul, 2006. (Programa de Mestrado Profissionalizante em Ensino de Ciências e Matemática) Disponível em: <<http://www.fae.ufmg.br:8080/ebapem/completos/02-04.pdf>> Acesso em: 15 mai.2008.

YIN, Robert K. **Estudo de Caso**: planejamento e métodos. 3ed. Porto Alegre: Bookman, 2005.

**APÊNDICES**



APÊNDICE A- CD com o Banco de questões, sequência didática eletrônica e vídeo com alguns momentos da realização da pesquisa.

APÊNDICE B- Questionário para coletar o perfil dos alunos pesquisados

Prezado aluno (a):

Este questionário tem por objetivo coletar dados para a pesquisa cujo o tema é :  
Registros de Representação Semiótica e Geometria Analítica: Uma Experiência com o  
Ambiente Virtual SIENA. Esta pesquisa está sob a orientação da professora Dra. Cláudia  
Lisete Oliveira Groenwald.

Suas respostas serão tratadas de forma confidencial. Agradeço sua colaboração em  
preenchê-lo.

1) Sexo :  Masculino     Feminino

2) Qual sua idade? \_\_\_\_\_

3) Qual a cidade onde mora?\_\_\_\_\_

4) Você trabalha?  Sim     Não. Se sim responda as questões 5 e 6.

5) Ondetrabalha?\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

6) Quantas horas semanais você trabalha?\_\_\_\_\_

7) Cursou Ensino Médio em:  Escola Pública     Particular

8) Quantas disciplinas você cursou no curso de Licenciatura em Matemática?

\_\_\_\_\_

### APÊNDICE C- Roteiro para realização da obsevações durante o experimento

- 1) Data:
- 2) Local:
- 3) Duração do evento:
- 4) Alunos participantes:
- 5) Interesse e comprometimento na realização das tarefas:
- 6) Manisfetações dos alunos:
- 7) Demais observações:

**ANEXOS**

## ANEXO A- Manual de Aproximação ao Uso do SIENA

Produzido por Jesús Alonso Rodríguez  
jalonsr@gmail.com Máster  
Duria 2008-2010

### Introducción

El presente manual surgió de la necesidad de tener un referente al que acudir durante la realización del Módulo 9 del Máster Duria en el ejercicio 2008-2010.

Trata de ser una herramienta de ayuda en los primeros pasos de uso de SIENA. No nace para establecer un único camino sino para plantear una posibilidad más y ayudar a los usuarios en su inicio.

Profundizar en SIENA requiere algo más que este sencillo manual.

*Dedicado a todos aquellos que hacen de SIENA un uso en pro de la diversidad del alumnado*

*(Jesús Alonso)*

### Registrarse en Siena

Hay varios tipos de usuario: **Profesor, Alumno y Administrador**. Para acceder al registro, localiza en la parte superior de la pantalla “Acceso usuarios”.



Una vez seleccionado, aparecerá la siguiente pantalla:

En la primera lista de opciones, elige tu tipo de usuario.

Para tu **usuario** escribe un nombre que no incluya espacios en blanco, es decir, un identificador.

Escribe la contraseña en los dos cuadros de texto que aparecen a continuación. Y finalmente puedes escribir tu nombre completo, incluyendo los espacios, en el último cuadro de texto.

Selecciona “Registrar”.

Puedes solicitar tu registro en cualquiera de los tipos de usuario, pero no podrás trabajar en SIENA hasta que alguno de los administradores autorice el registro.

### Menú para el usuario de tipo “profesor”

En la parte superior de la pantalla, nos aparecerá un menú más amplio que el de registro:



### Descripciones de los ítems del menú

#### Perfil de usuario

***Modificando el perfil del usuario***

Usuario

Correo electrónico

Nombre

Para cambiar la contraseña pulse [AQUI](#)

[Ver](#)

En caso que necesites cambiar tu perfil de usuario, hazlo a través de esta sección. Los cuadros de textos son bastante claros.

#### Lista de asignaturas

En esta sección del menú, podrás ver las diferentes asignaturas creadas por los profesores para sus alumnos. Ya entraremos más adelante en detalles sobre su construcción. De momento, veamos una captura de pantalla.

**Lista de asignaturas**

| Nombre              | Ver                 |                               |
|---------------------|---------------------|-------------------------------|
| Biología            | <a href="#">Ver</a> | <a href="#">Desmatricular</a> |
| Raíces              |                     | <a href="#">Matricular</a>    |
| Divisibilidad       | <a href="#">Ver</a> | <a href="#">Desmatricular</a> |
| biologia_bacterias2 |                     | <a href="#">Matricular</a>    |
| algebra             |                     | <a href="#">Matricular</a>    |
| SIENA TESTE         |                     | <a href="#">Matricular</a>    |
| sistemas operativos |                     | <a href="#">Matricular</a>    |
| SIENA               |                     | <a href="#">Matricular</a>    |
| pruebaimport        |                     | <a href="#">Matricular</a>    |

El conjunto de asignatura aparecerá listado con la posibilidad de filtrarlo escribiendo en el cuadro de texto **Nombre** la cadena de caracteres que deseamos buscar. Para activar el filtro, selecciona el icono

En caso de limpiar la búsqueda a través del filtro, pincha en

Una exploración interesante sería seleccionar alguna asignatura y pinchar en **Matricular**. Una vez matriculado, aparece el enlace **Ver**. Síguelo y explora el contenido de la asignatura. Te ayudará a la construcción que realizaremos más adelante.

## Lista de grupos

**Lista de Grupos**

| Nombre                      |   |
|-----------------------------|---|
| grupo1                      | <a href="#">Ver</a> <a href="#">Editar</a> <a href="#">Borrar</a> |
| grupo8                      | <a href="#">Ver</a> <a href="#">Editar</a> <a href="#">Borrar</a> |
| grup                        | <a href="#">Ver</a> <a href="#">Editar</a> <a href="#">Borrar</a> |
| alu_grup                    | <a href="#">Ver</a> <a href="#">Editar</a> <a href="#">Borrar</a> |
| grupo9                      | <a href="#">Ver</a> <a href="#">Editar</a> <a href="#">Borrar</a> |
| <a href="#">Nuevo grupo</a> |   |

Esta sección te permitirá crear grupos de alumno. Es una poderosa herramienta para atender a la diversidad del alumnado.

Las diferentes formas de agrupamiento te permiten la posibilidad de asignar trabajos específicos a determinados alumnos previamente agrupados.

A través de esta sección podrás crear grupos (*click* en **Nuevo grupo**), **Ver** el grupo para comprobar los alumnos que lo componen, **Editar** para añadir nuevos alumnos al grupo, o bien, **Borrar** si lo que necesitas es eliminar un grupo previamente creado.

## Lista de competencias

**Lista de competencias**  
**Editar competencia**

Nombre  
Discriminacion

Descripción  
Se trata de que los alumnos sepan discriminar entre los distintos tipos de números que se pueden encontrar. Como se obtienen.

**Lista de Grupos**

| Nombre   | Borrar grupo           | Nota                 | Ver                 |
|----------|------------------------|----------------------|---------------------|
| alu_grup | <a href="#">Borrar</a> | <a href="#">Nota</a> | <a href="#">Ver</a> |
| 1-1 / 1  |                        |                      |                     |

[Añadir grupo](#)

**Lista de nodos**

| Nombre                                |                        |
|---------------------------------------|------------------------|
| ¿Cómo pueden ser los números enteros? | <a href="#">Borrar</a> |
| 1-1 / 1                               |                        |

[Añadir trabajo](#)

En esta sección podrás añadir competencias que quieras desarrollar en los alumnos.

Para asignarla a un alumno, éste deberá estar previamente incluido en algún grupo.

La opción **Ver** y **Borrar** están claras. La opción **Editar** te permitirá **Añadir grupo** para que los

alumnos que lo integran desarrollen dicha competencia.

También puedes asignar nuevos trabajos a los grupos seleccionados, mediante **Añadir trabajo**.

Sería conveniente incluir una descripción detallada en el cuadro de texto **Descripción** de qué se pretende desarrollar en el alumno, es decir, aquél aspecto de la competencia o subcompetencia que el alumno trate de alcanzar.

## Crear una asignatura

El profesor no puede crear una asignatura. Para su creación tiene que ponerse en contacto con algún administrador de SIENA y hacerle llegar el nombre de la asignatura. Una vez que el administrador ha dado de alta la asignatura, el profesor puede comenzar a trabajar con ella.

## Descripción de la asignatura

Una vez que hemos entrado en la **Lista de asignatura**, seleccionamos aquella que hemos solicitado crear al administrador. Supongamos que se trata de la asignatura **Divisibilidad**, la seleccionamos y nos aparecerá el siguiente menú:



En este momento nuestra asignatura estará vacía: no tendrá alumnos asociados, ni nodos sobre los que trabajar, ni preguntas para los alumnos, ni habrá un mapa de la asignatura o una imagen del mapa conceptual. No te preocupes, veremos cada uno de los elementos.

## Lista de alumnos matriculados

Antes de comenzar a trabajar con los alumnos, es conveniente recordar que el administrador es quien da de alta a los alumnos en el sistema. Por lo tanto, si eres profesor, tendrás que solicitar al administrador que dé de alta a tus alumnos, o bien, que los alumnos lo hagan directamente con el administrador. Esto dependerá del protocolo de matriculación que se establezca al efecto.

Una vez que el alumno está dado de alta en el sistema, el alumno se puede matricular



en la asignatura. Ya que en su pantalla de inicio tendrá el listado de asignaturas y la posibilidad de matricularse.

**Lista de alumnos matriculados en Divisibilidad**

| Nombre             | Usuario         |                                   |
|--------------------|-----------------|-----------------------------------|
| Pepe Torres        | pepetorres      | <a href="#">Lista de trabajos</a> |
| Pedro Cano Jiménez | alumnodejalorod | <a href="#">Lista de trabajos</a> |
|                    |                 | 1-2 / 2                           |

[Atrás](#)

Esta sección te permitirá ver los alumnos matriculados en la asignatura y las lista de trabajos que cada uno de ellos tiene asignada.

En la **Lista de trabajos** se podrá **Ver, Borrar, Editar** así como **Ver tests**. Asimismo también tiene la opción de asignar **Nuevo trabajo** al alumno. Veamos una captura de esta pantalla:

**Lista de trabajos de Pedro Cano Jiménez para Divisibilidad**

| Nodo                                | Conocimiento previo |   |
|-------------------------------------|---------------------|---|
| Múltiplos                           | 0.5                 | <a href="#">Ver</a> <a href="#">Editar</a> <a href="#">Borrar</a> <a href="#">Ver tests</a> |
| Divisores comunes de varios números | 0.5                 | <a href="#">Ver</a> <a href="#">Editar</a> <a href="#">Borrar</a> <a href="#">Ver tests</a> |
| Números primos                      | 0.5                 | <a href="#">Ver</a> <a href="#">Editar</a> <a href="#">Borrar</a> <a href="#">Ver tests</a> |
| Descomposición factorial            | 0.5                 | <a href="#">Ver</a> <a href="#">Editar</a> <a href="#">Borrar</a> <a href="#">Ver tests</a> |
| Divisores                           | 0.5                 | <a href="#">Ver</a> <a href="#">Editar</a> <a href="#">Borrar</a> <a href="#">Ver tests</a> |
| Criterios de divisibilidad          | 0.5                 | <a href="#">Ver</a> <a href="#">Editar</a> <a href="#">Borrar</a> <a href="#">Ver tests</a> |
| Números compuestos                  | 0.5                 | <a href="#">Ver</a> <a href="#">Editar</a> <a href="#">Borrar</a> <a href="#">Ver tests</a> |
| Relación de divisibilidad           | 0.5                 | <a href="#">Ver</a> <a href="#">Editar</a> <a href="#">Borrar</a> <a href="#">Ver tests</a> |
| Múltiplos comunes de varios números | 0.5                 | <a href="#">Ver</a> <a href="#">Editar</a> <a href="#">Borrar</a> <a href="#">Ver tests</a> |
| Máximo Común Divisor                | 0.5                 | <a href="#">Ver</a> <a href="#">Editar</a> <a href="#">Borrar</a> <a href="#">Ver tests</a> |
| Mínimo Común Múltiplo               | 0.5                 | <a href="#">Ver</a> <a href="#">Editar</a> <a href="#">Borrar</a> <a href="#">Ver tests</a> |

[Nuevo trabajo](#)

[Atrás](#)

La opción **Ver test** te permitirá ver el texto que el alumno ha realizado, si ha sido **acabado (true, en caso contrario, false)** así como la nota alcanzada en el mismo.

**Lista de tests**

| Fecha de creación | Acabado | Nota  |  |
|-------------------|---------|-------|--|
| 23.03.2010        | true    | 0.874 | <a href="#">Ver</a> <a href="#">Borrar</a> |

[Atrás](#)

Si quieres además ver el contenido del test, sigue en esta nueva sección el enlace **Ver**, donde aparecerá toda la información del test realizado: *respuesta elegida a cada pregunta, si fue correcta (valor **true**), tiempo antes de finalizar, pregunta realizada y los puntos obtenidos previamente*. Para que te familiarices con dicha información puedes observar la imagen siguiente:

| Respuesta | Respuesta correcta | Tiempo(antes de que se acabe) | Pregunta  | Puntos antes |
|-----------|--------------------|-------------------------------|---|--------------|
| 3         | true               | 166                           | Mira atentamente el grupo de personas que se muestra en la imagen. ¿Podríamos decir que el número de personas que forman el grupo es múltiplo de 2? | 0.500        |
| 3         | true               | 223                           | Observa la siguiente tabla ¿cuántos múltiplos de 3 hay en ella?   | 0.545        |
| 3         | true               | 408                           | ¿Qué es un número compuesto?  | 0.742        |

[Atrás](#)

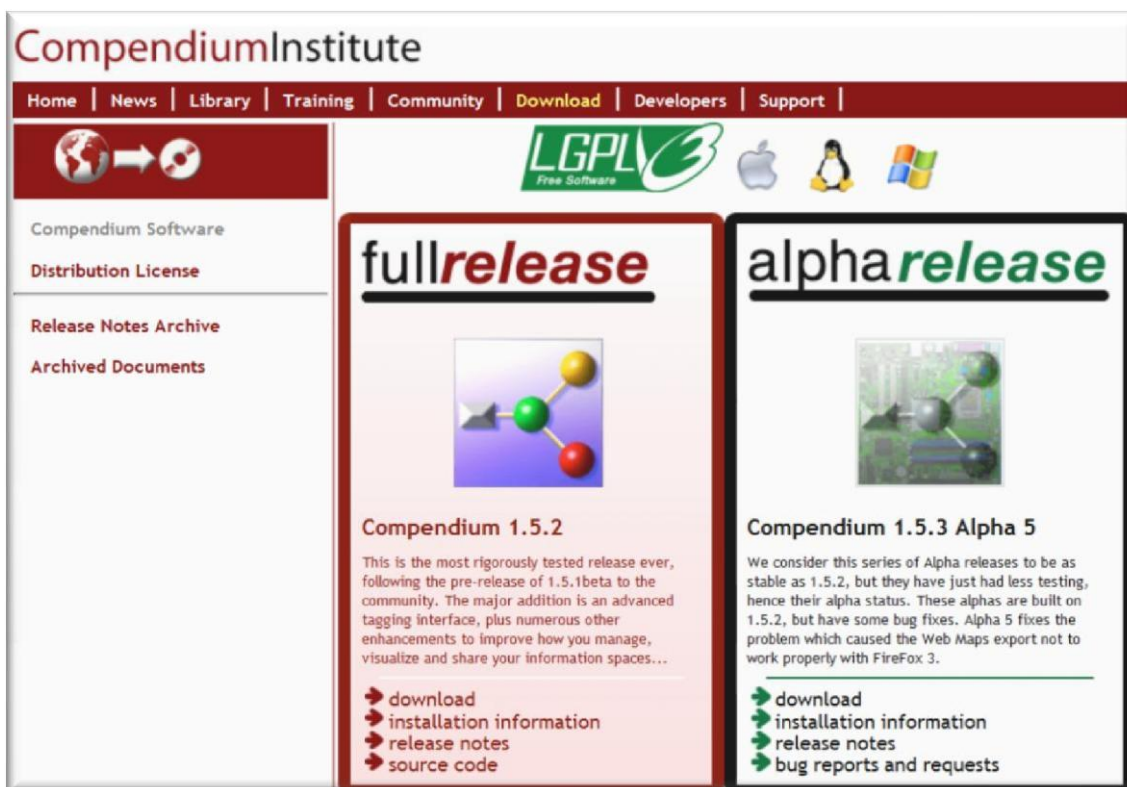
### Mapa de la asignatura

El mapa de la asignatura consta de un conjunto de nodos formados por un conjunto de conocimientos, habilidades, estrategias o destrezas que queremos desarrollar en el alumno.


Preparar una asignatura (tema) para SIENA significa establecer un mapa conceptual jerárquico. Es decir, un mapa cuyos nodos superiores son los más complejos, y su logro o desempeño por parte del alumno, depende del logro en los nodos más simples e inferiores en el rango del mapa conceptual.

Una vez diseñado el mapa hay que preparar contenidos de información y preguntas para cada nodo al objeto de lograr un desempeño efectivo del alumno en cada uno de ellos. SIENA se encargará de realizar los test desde los nodos inferiores o más simples a los superiores o más complejos.

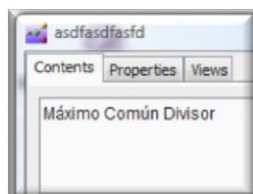
Para desarrollar el mapa hay que utilizar Compendium. Para descargarlo basta con poner la siguiente *url* en el navegador <http://compendium.open.ac.uk/institute/download/download.htm> y seleccionar *download* en la versión 1.5.2 o aquella más reciente en *full-release*.



## Creando nodos con Compendium

Par crear nodos, basta con seleccionar el icono **Note Node**  haciendo click con el botón izquierdo del ratón, y sin soltarlo, deslizarlo hasta el mapa de trabajo abierto a la derecha.

Para darle nombre al nodo, haremos click-derecho sobre el icono y seleccionaremos del menu contextual **Contents**. Como ejemplo:



Siguiendo dicho método podemos crear cuantos nodos queramos.

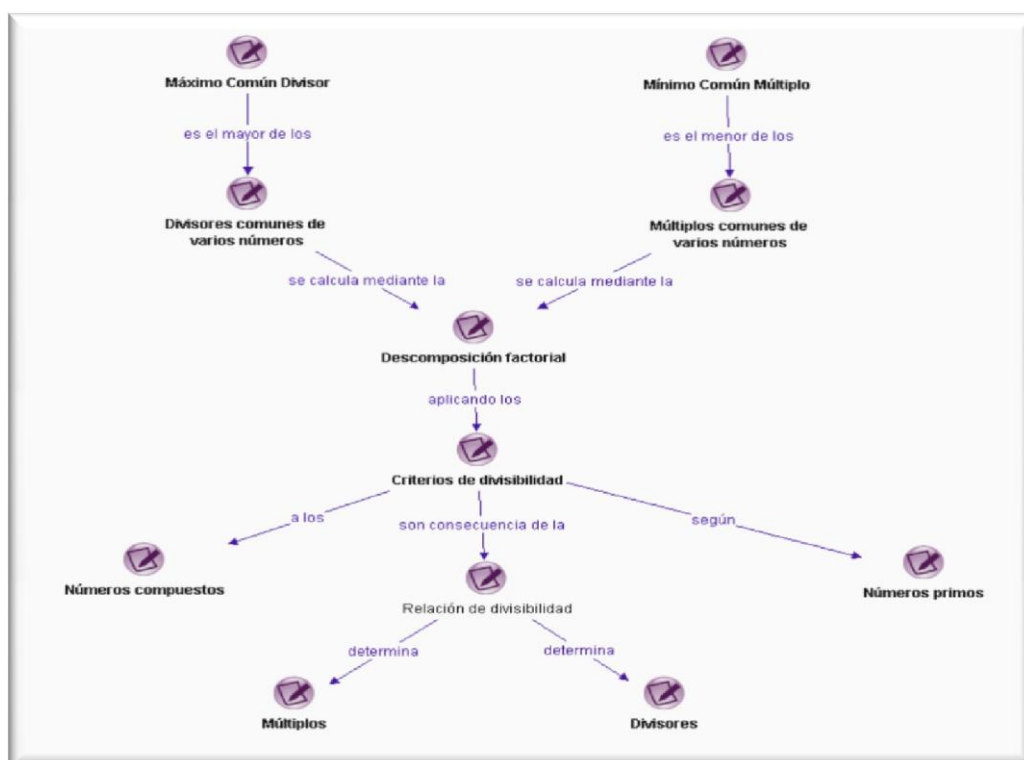
Otra opción más rápida es hacer *click*-izquierdo justo bajo el icono **Note Node**, activándose un cuadro de texto dónde escribir.

## Uniando nodos

Si queremos unir dos nodos para añadir cómo dependen uno del otro, simplemente haremos click-derecho sobre el primero y sin soltarlo, lo deslizaremos hasta el segundo nodo. Quedará de la siguiente forma:



Si además, queremos añadir algún tipo de comentario entre los nodos, es decir, en la línea de unión, haz click-izquierdo aproximadamente sobre la línea a media distancia de ambos nodos. Se activará un cuadro de texto que permite escribir la relación entre ambos nodos. Aunque dicho sea de paso, SIENA no tiene en cuenta los textos que hay en las líneas de unión del mapa pero para el diseñador del mapa conceptual son de gran utilidad. Una vez tenemos claro el mapa, nos quedará de la siguiente forma:



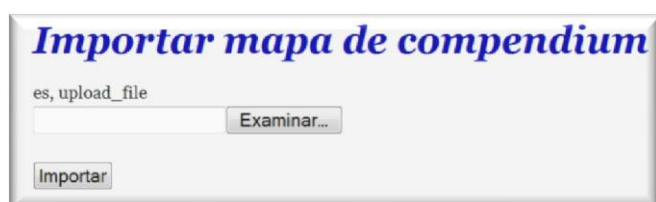
### Exportando el mapa conceptual a XML desde Compendium

Una vez tengamos diseñado el mapa conceptual, lo exportamos como XML a través de las pestañas **File** → **Export** → **XML File** y lo guardamos ya que tenemos que utilizar el XML desde SIENA.

### Importando el mapa conceptual desde SIENA

El mapa conceptual realizado desde *Compendium* ha de ser importado desde SIENA. Para ello hemos de ir al menú principal de SIENA y acceder a través de **Lista de la asinatura**. En la parte inferior de la página nos aparecerá **Importar mapa de compendium**.

Accedemos y nos saldrá:

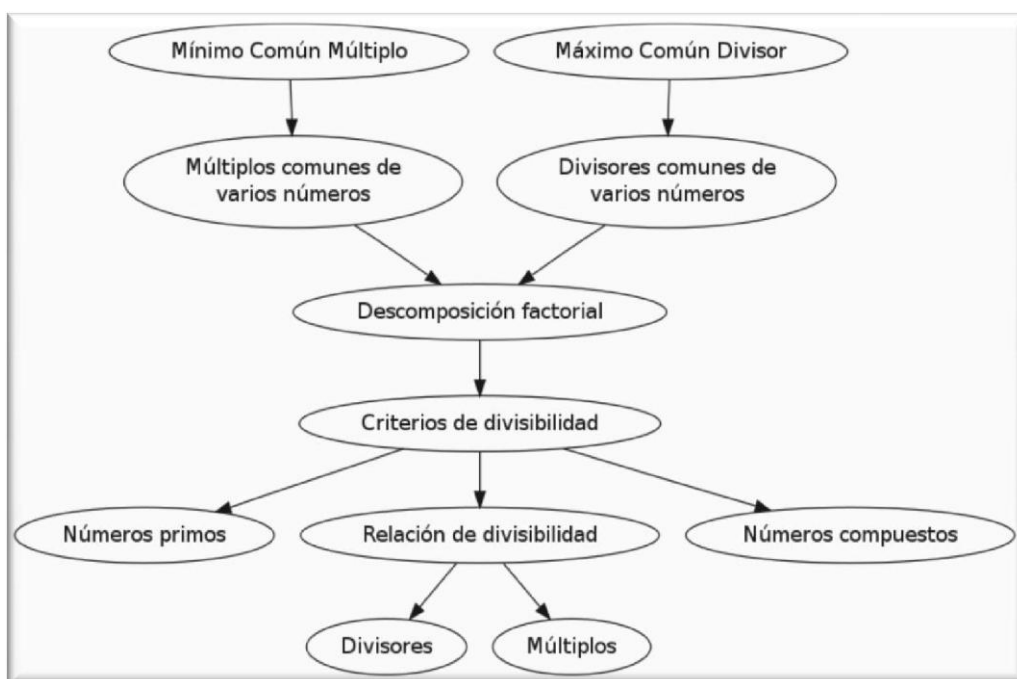


Hacemos *click* en **Examinar** y seleccionamos el archivo con extensión **.XML** que hemos creado desde *Compendium*. Una vez realizada esta acción, hacemos *click* en **Importar**.

### Generando la imagen del mapa conceptual

Una vez importado hay que generar la imagen del mapa conceptual. Para ello vamos nuevamente al menú principal y seleccionamos **Generar Imagen**. SIENA generará la imagen del mapa importado y no preguntará nada ya que sólo hay un mapa de esa asignatura cargado en SIENA.

El resultado será el siguiente:



Una vez generado, para visualizar, a través del menú principal, seleccionar **Mapa de la asignatura (imagen)**.

Una vez realizado este paso, estás en disposición de añadir contenido y preguntas a cada uno de los nodos para que SIENA pueda realizar el test al alumno.

### Lista de nodos de la asignatura

Una vez importado el mapa XML desde SIENA ya disponemos del listado de nodos que SIENA ha creado.

A través del menú principal, el enlace **Lista de nodos de la asignatura** nos llevará a:

**Lista de nodos de la asignatura**

| Nombre                              | Ver                 | Editar                 |                        |
|-------------------------------------|---------------------|------------------------|------------------------|
| Mínimo Común Múltiplo               | <a href="#">Ver</a> | <a href="#">Editar</a> | <a href="#">Borrar</a> |
| Máximo Común Divisor                | <a href="#">Ver</a> | <a href="#">Editar</a> | <a href="#">Borrar</a> |
| Divisores comunes de varios números | <a href="#">Ver</a> | <a href="#">Editar</a> | <a href="#">Borrar</a> |
| Criterios de divisibilidad          | <a href="#">Ver</a> | <a href="#">Editar</a> | <a href="#">Borrar</a> |
| Descomposición factorial            | <a href="#">Ver</a> | <a href="#">Editar</a> | <a href="#">Borrar</a> |
| Números primos                      | <a href="#">Ver</a> | <a href="#">Editar</a> | <a href="#">Borrar</a> |
| Múltiplos                           | <a href="#">Ver</a> | <a href="#">Editar</a> | <a href="#">Borrar</a> |
| Múltiplos comunes de varios números | <a href="#">Ver</a> | <a href="#">Editar</a> | <a href="#">Borrar</a> |
| Relación de divisibilidad           | <a href="#">Ver</a> | <a href="#">Editar</a> | <a href="#">Borrar</a> |
| Números compuestos                  | <a href="#">Ver</a> | <a href="#">Editar</a> | <a href="#">Borrar</a> |
| Divisores                           | <a href="#">Ver</a> | <a href="#">Editar</a> | <a href="#">Borrar</a> |
|                                     |                     |                        | 1-11 / 11              |

[Añadir un nodo a la asignatura](#)  
[Atrás](#)

Cada nodo puede ser **visto, editado y borrado**. A través de **Editar**, podemos acceder a:

- ✚ Descripción del contenido del nodo
- ✚ Las preguntas confeccionadas relacionadas con dicho nodo
- ✚ Asociar nueva pregunta al nodo:
 

Nos permitirá elegir de las preguntas no asociadas al nodo, aquéllas que queramos realizar sobre el nodo mediante el test así como establecer un coeficiente de dependencia entre la relación de la pregunta con el nodo. Dicho coeficiente debe estar entre 0 y 1, siendo más alto cuanto más dependencia tenga la pregunta con el nodo.
- ✚ Ver el listado de los nodos sucesores (los que están un nivel por debajo)
- ✚ Añadir nuevo nodo sucesor (**es, edge\_new\_dest**)
 

SIENA ofrece la posibilidad de realizar cambios en el mapa conceptual. Imagina que quieres establecer una nueva relación entre nodos cuya existencia has descubierto una vez importado el fichero XML. No habría que modificar el archivo de *Compendium* y repetir todo el proceso de exportación-importación. Simplemente hacer click en (**es, edge\_new\_dest**) te permitirá seleccionar de los posibles nodos, aquél o aquéllos que consideres oportuno.
- ✚ Ver el listado de los nodos predecesores (los que están un nivel por arriba)
- ✚ Añadir nuevo nodo predecesor (**es, edges\_new\_src**). Al igual que en el apartado de sucesores.
- ✚ Lista de contenidos relacionados (información que se suministra al alumno sobre los contenidos tratados en el nodo para poder responder al test). Dichos contenidos pueden ser vistos, editados y borrados.
 

Para que la lista de contenidos tenga algún ítem es necesario haber utilizado previamente lo explicado posteriormente.

Añadir nuevo contenido al nodo.

Al acceder a través de dicho enlace, nos saldrá una pantalla con la descripción del nuevo contenido. Éste puede ser principal o bien de recuperación. En este último caso, activar la

casilla de verificación  Recuperación

Una vez completados el cuadro de texto, seleccionar **Crear**, apareciendo de nuevo, el cuadro de diálogo de la descripción anterior y un nuevo enlace llamado **(es, upload\_file)**.

Dicho enlace nos permitirá seleccionar un fichero de contenido que habremos preparado previamente para dicho nodo. Asimismo también tenemos la opción a través de la casilla de verificación **Fichero principal** de asociar dicho fichero de contenido al principal o al de recuperación que se presentará al alumno cuando no supere los correspondientes nodos asociados.

### Lista de preguntas de la asignatura

Para comprobar que un alumno logra un buen desempeño sobre un nodo, hemos de diseñar un conjunto amplio y variado de preguntas para movilizar los conocimientos asociados así como las habilidades y estrategias subyacentes.

Así que has de tomar cada nodo del mapa de la asignatura y realizar un conjunto de preguntas secuenciadas en orden de dificultad que impliquen las movilización de diferentes procesos cognitivos (reproducción, conexión y reflexión). Para que te sirva de ayuda, puedes utilizar el siguiente cuadro de apoyo:

|              | Procesos ↓              | Descripción ↓   | Acciones ↓  |
|--------------|-------------------------|---|---|
| Reproducción | Acceso e identificación | Representa las acciones de recordar y reconocer los términos, los hechos, los conceptos elementales de un ámbito de conocimiento y de reproducir fórmulas establecidas  | Nombrar, definir, encontrar, mostrar, imitar, deletrear, listar, contar, recordar, reconocer, localizar, reproducir, relatar.               |
|              | Comprensión             | Supone acciones como captar el sentido y la intencionalidad de textos, de lenguajes específicos y códigos relacionales e interpretarlos para resolver problemas.  | Explicar, ilustrar, extraer, resumir, completar, traducir a otros términos, aplicar rutinas, seleccionar, escoger.                          |
| Conexión     | Aplicación              | Comporta aptitud para seleccionar, transferir y aplicar información para resolver problemas con cierto grado de abstracción y la de intervenir con acierto en situaciones nuevas  | Clasificar, resolver problemas sencillos, construir, aplicar, escoger, realizar, resolver, desarrollar, entrevistar, organizar, enlazar.    |
|              | Análisis y valoración   | Significa la posibilidad de examinar y fragmentar la información en partes, encontrar causas y motivos, realizar inferencias y encontrar evidencias que apoyen generalizaciones. Se empareja con compromiso.                                | Comparar, contrastar, demostrar, experimentar, planear, resolver problemas complejos, Analizar, simplificar, relacionar, inferir, concluir. |
| Reflexión    | Síntesis y creación     | Se corresponde con las acciones de compilar información y relacionarla de manera diferente, establecer nuevos patrones, descubrir soluciones alternativas. Puede asociarse a la resolución de conflictos.                                   | Combinar, diseñar, imaginar, inventar, planificar, predecir, proponer, adaptar, estimar.  |
|              | Juicio y valoración     | Representa capacidades para formular juicios con criterio propio, cuestionar tópicos y exponer y sustentar opiniones fundamentándolas. En otro orden se asociaría a acciones de planificación compleja, de reglamentación y de negociación. | Criticar, concluir, determinar, juzgar, recomendar, establecer criterios y/o límites.   |

Obviamente algunos procesos de reflexión son muy complicados de implantar pero he ahí la astucia del docente para realizar un diseño que lo permita.

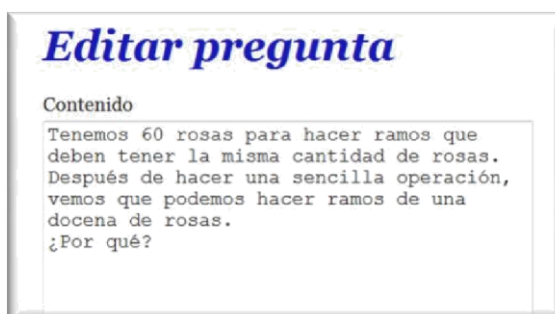
### Accediendo al listado de preguntas

Es lógico pensar que las preguntas se realizan dentro de una asignatura en concreto. De ahí que primero tengamos que acceder a la asignatura que hemos creado a través del enlace **Lista de asignaturas** del menú principal. Posteriormente seguiremos el enlace **Matricular** correspondiente a la asignatura creada, y se activará la opción **Ver**. Elegiremos esta opción y accederemos a un nuevo menú dónde aparece en tercer lugar **Lista de preguntas de la asignatura**.

### Añadiendo preguntas

Una vez estamos en la sección **Lista de preguntas de la asignatura**, seleccionaremos en la parte inferior de la página el enlace **Nueva pregunta**.

En el **contenido** pondremos la redacción de la pregunta. Por ejemplo:



También incluiremos el **tiempo de respuesta** que daremos al alumno, medido en segundos. Luego en **Respuesta correcta** incluiremos el número de la respuesta correcta menos uno.

Para el ejemplo anterior, las respuestas que le aparecerán al alumno serán:

Porque 6 es divisor de 60.

Porque 4 es divisor de 60

Porque 5 es divisor de 60

La respuesta correcta es la última, y como SIENA comienza a numerar en CERO, corresponde a la número 2. Por tanto en el cuadro de diálogo **Respuesta correcta** escribiremos **2**.

La **dificultad** será un número comprendido entre 0 y 1. Un mayor número significa un mayor grado de dificultad.

Asimismo la **adivinanza** es otro coeficiente entre 0 y 1 que representa la probabilidad de acertar en caso de no saber la respuesta correcta. En este caso, recomiendo incluir el resultado de dividir la unidad entre el número de respuestas posibles. En el caso anterior  $1/3$ , es decir, 0.33 (*Regla de Laplace*).



También SIENA ofrece la posibilidad de presentar un archivo con la pregunta. Es



muy conveniente si queremos incluir una imagen o cualquier otro recurso que estimemos oportuno. Esta posibilidad es de alto grado de significación y funcionalidad dado que permite la presentación de textos discontinuos, la interpretación de gráficas y modelos, la búsqueda de relaciones funcionales y entre variables, las relaciones espaciales, etc. Dicha característica no sólo se encuentra en el desarrollo de la competencia matemática sino que a su vez en la competencia de conocimiento del medio e interacción con el mundo físico.

### Ver, Editar y borrar preguntas

En nuestro listado de preguntas nos aparecerá un cuadro del siguiente tipo:

| <i>Lista de preguntas de la asignatura</i>  |                     |  |
|---|---------------------|--|
| <u>Nombre</u>   | Ver                 | Editar   |
| <input type="text"/>  |                     | <br> |
| ¿Cuándo un número es divisible por 30?  | <a href="#">Ver</a> | <a href="#">Editar</a> <a href="#">Borrar</a>  |
| ¿Podremos repartir 6125 pasajeros en 7 trenes si cada tren tiene 7 vagones y cada vagón debe llevar el mismo número de pasajeros? | <a href="#">Ver</a> | <a href="#">Editar</a> <a href="#">Borrar</a>  |

La opción **Ver** nos permite acceder al contenido de la pregunta, tiempo de repuesta, el número de respuesta correcta, el coeficiente de dificultad y el de adivinanza. También nos mostrará la imagen que hemos subido para dicha pregunta en caso de haberlo hecho, el creador de la pregunta, las respuestas posibles y los nodos relacionados con dicha pregunta y su coeficiente de dependencia.

Hay que resaltar que esta opción no nos permite modificar los parámetros y características citadas.

La opción **Editar** es mucho más rica. Nos permite hacer lo mismo que al crear la pregunta. Cabe resaltar que podemos modificar cualquier parámetro de la pregunta que se nos haya pasado por alto en el momento de su primera introducción en el test.

En caso de observar que alguna pregunta se relaciona con más nodos de los que inicialmente habíamos planteado, podemos añadir dicha pregunta a más nodos a través del enlace que aparecerá al final de la página **Asociar nuevo nodo a la pregunta**.

| Nodos relacionados                               |                            |             |                     |                        |                        |
|--|----------------------------|-------------|---------------------|------------------------|------------------------|
| Asignatura                                       | Nombre                     | Dependencia | Ver                 | Editar                 |                        |
| Divisibilidad                                    | Relación de divisibilidad  | 0.6         | <a href="#">Ver</a> | <a href="#">Editar</a> | <a href="#">Borrar</a> |
| Divisibilidad                                    | Divisores                  | 0.8         | <a href="#">Ver</a> | <a href="#">Editar</a> | <a href="#">Borrar</a> |
| Divisibilidad                                    | Criterios de divisibilidad | 0.3         | <a href="#">Ver</a> | <a href="#">Editar</a> | <a href="#">Borrar</a> |
|  |                            |             |                     |                        | 1-3 / 3                |
| <a href="#">Asociar nuevo nodo a la pregunta</a> |                            |             |                     |                        |                        |
| <a href="#">Ver</a>   <a href="#">Atrás</a>      |                            |             |                     |                        |                        |

Como observamos en dicho cuadro, también podemos acceder a los nodos que están relacionados con dicha pregunta para ver, editar o borrar. Lo que nos permite un acceso directo a dichos nodos sin tener que utilizar otro menú diferente.

Conviene estudiar la dependencia de los nodos con la pregunta ya que ello posibilitará a Siena realizar el test de un modo conexo. En caso contrario, quedarán preguntas sin realizar. No obstante, esta cuestión debe ser profundizada por el usuario y probar distintas posibilidades para descubrir las virtudes de Siena.

## Líneas propuestas para diseñar con SIENA

### Incluir los criterios de evaluación

**Definición:** SIENA es una herramienta para la detección de los conocimientos previos de los alumnos y de ayuda para el autoaprendizaje y la autoevaluación. (*fuentes: <http://siena.ull.es/>*)

Una herramienta es útil para el autoaprendizaje cuando permite que el alumno se auto-regule, tome conciencia de sus propios procesos mentales y entre otros aspectos, aprenda de sus errores. El auto-aprendizaje comporta dos de las competencias básicas dimanantes de los Reales Decretos de Enseñanzas Mínimas establecidos por el Estado: por un lado, **la competencia de aprender a aprender** y por otro, **la autonomía e iniciativa personal**.

Por tal motivo, ayudar al auto-aprendizaje comporta dar a conocer a los alumnos las expectativas que se tienen de ellos en cada momento. Así es conveniente describir qué consigue el alumno en cada pregunta, no sólo, cuestionar para responder, sino que se dé a conocer la información suficiente para que los alumnos sepan al grado de desempeño o de logro que alcanzarán.

Explicar los criterios de evaluación de antemano y enriquecer SIENA conlleva a la auto-regulación de los alumnos. De ahí que preparar unos contenidos ricos, sencillos y a la vez claros, que incluyan los criterios de evaluación sería un elemento enriquecedor para el auto-aprendizaje y la auto-evaluación.

### De la soledad a la compañía

Como toda herramienta es susceptible de ser usada individualmente o en compañía,

se sugiere la alternancia de test individuales y test realizados entre pares o grupales. Un alumno por sí solo llegará hasta dónde el computador le pueda llevar en su Zona de Desarrollo Próximo (ZDP).

Entre pares (alumno-alumno) y computador la ZDP será ampliada y por tanto, el grado de logro en el desarrollo de la competencia será aún mayor.

Al añadir esta intercomunicación entre pares, estamos añadiendo la necesidad de verbalización de los procesos mentales lo que coadyuva la asimilación de los conocimientos, la génesis de conflictos cognitivos y la reconstrucción del conocimiento.

### **De la utilización de recursos diversos**

Plantear la pregunta apoyada en imágenes reales y cercanas al contexto del alumno dará mayor autenticidad al problema o tarea planteada. Utilizar un periódico digital, una factura, una entrada para un espectáculo, un ticket de la compra, un catálogo de ofertas del supermercado, etc. son opciones que debemos tener en cuenta.

### **Del tema del test**

Normalmente cuando planteamos el diseño de preguntas para un test lo hacemos para que resulte rico, variado en estímulos, movilizador de diferentes procesos cognitivos y en diferentes contextos.

Pero también podríamos la posibilidad como alternativa de plantearnos la construcción de preguntas para un test a partir de **un solo tema**, es decir, de un gran estímulo inicial. De hecho, este sistema ya se utiliza en las evaluaciones PISA para permitir:

- ✚ Mayor profundización de la que se obtendría si cada una de las preguntas introdujera un contexto completamente nuevo.
- ✚ Disponer de más tiempo para asimilar un material que luego puede ser utilizado para evaluar diversos aspectos de su rendimiento.

### **De la contextualización de las preguntas**

La contextualización debe moverse en torno a lugares reales, del propio alumno. Las propuestas del MCER (Marco Común Europeo de Referencia) son las siguientes:

| ÁMBITOS            | LUGARES  | INSTITUCIONES  | PERSONAS   | OBJETOS   | ACONTECIMIENTO  | ACCIÓN  | TEXTOS   |
|--------------------|--|--|--|---|---|---|--|
| <b>PERSONAL</b>    | Hogar: propio, de la familia, de los amigos, de los desconocidos<br>Casa: habitación, jardín, espacio propio en un hotel, en un hotel; el campo, la playa, etc.  | La familia, Tejido social  | Padres, abuelos, hijos, hermanos, tíos, primos, familia política, etc  | Mobiliario, decoración, ropa, aparatos del hogar, higiene personal, objetos de arte, libros, mascotas, animales de compañía/salvajes, árboles, plantas, jardines, estanques, bienes domésticos, bolsos, equipamiento deportivo, de ocio | Acontecimientos familiares, encuentros, incidentes, accidentes, fenómenos naturales, fiestas, visitas, paseos, montar en bicicleta y en moto, en coche, vacaciones, excursiones, acontecimientos deportivos | Rutinas de la vida; ejemplos: vestirse, desnudarse, cocinar, comer, lavarse, bricolaje, jardinería, lectura, radio y televisión, ocio, aficiones, juegos y deportes   | Teletexto, garantías, recetas<br>Material educativo, manuales escolares, novelas, revistas, periódicos, propaganda, folletos publicitarios, cartas personales, textos hablados, retransmitidos y grabados  |
| <b>PÚBLICO</b>     | Espacios públicos: calle, plaza, parque, etc. transporte público, tiendas, mercados, hospitales, consultas, ambulatorios, estadios y campos deportivos, teatros, lugares de ocio, entretenimiento, restaurante, bares, hotel, lugares de oración | Autoridades públicas, instituciones políticas, la justicia, la salud pública, asociaciones de diversas, ONG's, partidos políticos, instituciones religiosas, confesionales | Ciudadanos, funcionarios, dependientes, policía, ejército, seguridad, conductores, revisores, pasajeros, jugadores, seguidores, espectadores, actores, público, camareros, recepcionistas, sacerdotes, congregación                                  | Dinero, monedero, cartera, formularios o documentos oficiales, mercancías, armas, equipaje, maletas, bolsas de viaje, bailes, programas, comidas, bebidas, tentempiés, pasaportes, permisos   | Incidentes, accidentes, enfermedades, reuniones públicas, pleitos, juicios en tribunales, días de solidaridad, multas, arrestos, partidos, concursos, espectáculos, bodas, funerales                        | Compras y utilización de servicios públicos, utilización de servicios médicos, viajes en coche, en tren, en barco, por aire, diversión pública y actividades de ocio, oficios religiosos  | Declaraciones y avisos públicos, etiquetados y embalajes, folletos, pintadas, billetes, horarios, letreros, regulaciones, programas, contratos, menús, textos sagrados, sermones, himnos, ordenanzas, normativas públicas, etc.                              |
| <b>PROFESIONAL</b> | Oficinas, fábricas, talleres, transporte público, tiendas, mercados, hospitales, consultas, ambulatorios, estadios y campos deportivos, teatros, lugares de ocio, entretenimiento, restaurante, bares, hotel, lugares de oración                 | Empresas, servicios públicos, multinacionales, corporaciones, empresas, nacionalizadas, sindicatos   | Empresarios, empleados, directivos, colegas, subordinados, compañeros de trabajo, clientes, recepcionistas, secretarías, personal de mantenimiento   | Ofimática, maquinaria industrial, herramientas industriales y de artesanos  | Reuniones, entrevistas, recepciones, congresos, ferias comerciales, consultas, ventas de temporada, accidentes de trabajo, conflictos laborales   | Administración empresarial, organización industrial, operaciones e producción, procedimientos administrativos, operaciones de venta, operaciones comerciales, venta, marketing, aplicaciones informática, mantenimiento de oficinas | Cartas de negocios, informes, notas de seguridad, manuales de instrucción, regulaciones, material de publicidad, etiquetado y embalaje, descripción de puestos de trabajo, firma del correo, tarjetas de visita, etc.  |
| <b>EDUCATIVO</b>   | Escuelas: vestíbulo, aulas, patio de recreo, campos deportivos, pasillos, facultades, universidades, salas de conferencias, seminarios, asociaciones de estudiantes, colegios profesionales, laboratorios, comedor universitario                 | Colegios, facultades, universidades, colegios profesionales, asociaciones profesionales, formación continua  | Profesores titulares, personal docente, educadores, personal auxiliar, padres, compañeros de clase, catedráticos, lectores, estudiantes, bibliotecarios y personal de laboratorio, personal del comedor, de limpieza, porteros, secretarios, bedeles | Material escolar, uniformes, equipo y ropa de deportes, alimentos, material audiovisual, pizarra y tiza, ordenadores, mochilas y carteras   | Inicio de curso, matriculación, recreos, descansos, visitas e intercambios, reuniones con los padres, días deportivos, partidos, problemas de disciplina  | Asambleas, lecciones, juegos, recreos, asociaciones y sociedades, conferencias, redacciones, trabajo de laboratorio, trabajo de biblioteca, seminarios y tutorías, deberes, trabajo, persona, debates y discusiones                 | Textos auténticos (como los anteriores), libros de texto, lectores, libros de consulta, texto en la pizarra, texto impreso, texto de pantalla de ordenador, videotexto, cuadernos de ejercicios, artículos de periódicos, extractos, resúmenes, diccionarios |

## De la elección múltiple de respuestas

Por ahora SIENA está diseñado para admitir una sólo respuesta. Lo cual nos cierra las posibilidades de realizar preguntas abiertas y flexibles que promuevan conflictos cognitivos y procesos de juicio y regulación.

Si SIENA en el futuro añade múltiples respuestas a las preguntas asociadas a las nodos, sería un gran avance para el desarrollo de los procesos cognitivos de los alumnos.

## ANEXO B- Certificado do período de estudos na Universidade de La Laguna- ULL

ULL | Universidad  
de La Laguna

Vicerrectorado de Investigación,  
Desarrollo Tecnológico e Innovación

Como Vicerrector de Investigación, Desarrollo Tecnológico e Innovación de la Universidad de La Laguna, CERTIFICO que, la alumna de máster de la Universidad Luterana de Brasil, JOSEIDE JUSTÍN DALLAMOLE, estuvo realizando una estancia de trabajo en nuestra Universidad, desde el día 21 de marzo de 2009, hasta el día 5 de abril de 2009, preparando su proyecto fin de máster.

La Laguna a 6 de octubre de 2010



Fdo: Lorenzo Moreno Ruiz  
VICERRECTOR