UNIVERSIDADE LUTERANA DO BRASIL
PRÓ-REITORIA ACADÊMICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

A TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA EM UM AMBIENTE VIRTUAL DE APRENDIZAGEM: UMA PROPOSTA METODOLÓGICA EXPLORANDO OS CONCEITOS DE PONTO, RETA E CIRCUNFERÊNCIA NO ENSINO MÉDIO

JOSEIDE JUSTIN DALLEMOLE

Orientadora: Profa. Dra. Claudia Lisete Oliveira Groenwald

Canoas, 2015.

UNIVERSIDADE LUTERANA DO BRASIL
PRÓ-REITORIA ACADÊMICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

A TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA EM UM AMBIENTE VIRTUAL DE APRENDIZAGEM: UMA PROPOSTA METODOLÓGICA EXPLORANDO OS CONCEITOS DE PONTO, RETA E CIRCUNFERÊNCIA NO ENSINO MÉDIO

JOSEIDE JUSTIN DALLEMOLE

Orientadora: Profa. Dra. Claudia Lisete Oliveira Groenwald

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil para obtenção do título de Doutor em Ensino de Ciências e Matemática.

Canoas, 2015.

JOSEIDE JUSTIN DALLEMOLE

A TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA EM UM AMBIENTE VIRTUAL DE APRENDIZAGEM: UMA PROPOSTA METODOLÓGICA EXPLORANDO OS CONCEITOS DE PONTO, RETA E CIRCUNFERÊNCIA NO ENSINO MÉDIO

Orientadora: Profa. Dra. Claudia Lisete Oliveira Groenwald

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil para obtenção do título de Doutor em Ensino de Ciências e Matemática.

Área de concentração: Ensino e Aprendizagem em Ensino de Ciências e Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Arno Bayer – ULBRA

Profa. Dra. Carmen Teresa Kaiber - ULBRA

Profa. Dra. Cátia Maria Nehring - UNIJUÍ

Profa. Dra. Marlise Geller - ULBRA

Prof. Dr. Méricles Thadeu Moretti - UFSC

Canoas, 2015

AGRADECIMENTOS

À Deus pela vida, saúde e por minhas conquistas.

À minha mãe Eneli Justin Dallemole, pelo amor e apoio que sempre me dedicou.

Ao meu namorado Cristian Poeta que sempre esteve ao meu lado me apoiando durante todo este tempo e pela contribuição a este trabalho.

À minha querida orientadora, professora Claudia Lisete Oliveira Groenwald, pelo carinho, paciência, confiança e pela amizade dedicada desde que nos conhecemos nesta Universidade.

Aos professores Arno Bayer, Carmen Teresa Kaiber, Cátia Maria Nehring, Méricles Thadeu Moretti e Marlise Geller por aceitarem o convite em fazer parte da banca e contribuir com este trabalho.

À ULBRA e aos professores do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática pelo conhecimento transmitido.

À professora, à escola e aos alunos que se dispuseram a participar desta pesquisa.

À CAPES pela bolsa de doutorado pelo programa prosup.

RESUMO

A teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval, que trata da aprendizagem Matemática, tem sido muito utilizada como base em pesquisas que envolvem a compreensão e a apreensão do conhecimento matemático, revelando-se uma alternativa na organização de situações de ensino e aprendizagem. Esta pesquisa uniu a referida teoria com o processo de ensino e aprendizagem da Geometria Analítica para o Ensino Médio, a qual é um tema muito presente em diversas áreas da Ciência, possui uma diversidade de registros semióticos a serem explorados. A investigação buscou responder como implementar (desenvolver, aplicar e avaliar) uma proposta metodológica para o Ensino Médio com os conteúdos de Geometria Analítica articulada com os Registros de Representação Semiótica. Para tal o objetivo foi o de investigar o tema Geometria Analítica no atual sistema de Ensino Médio e as possibilidades didático-pedagógicas de uma proposta metodológica articulada com a teoria dos Registros de Representação Semiótica, para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem deste tema, no currículo de Matemática, utilizando Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC). Adotou-se um enfoque qualitativo e para implementação da proposta metodológica foram executadas etapas em que se identificaram quais conteúdos de Geometria Analítica são ensinados, quais os objetivos a serem alcançados, as metodologias utilizadas e se estas referem-se ao uso dos Registros de Representação Semiótica com tarefas de diferentes natureza de tratamentos e conversões entre os diferentes registros semióticos, quando são ensinados, e o que, como e quando estes conteúdos estão sendo avaliados, contrastando com as Políticas Públicas referentes a Geometria Analítica; investigou-se os livros didáticos de Matemática, do Plano Nacional do Livro Didático de 2012, para o Ensino Médio, no que tange a Geometria Analítica e os Registros de Representação Semiótica; investigou-se como desenvolver o processo de ensino e aprendizagem em um ambiente virtual de aprendizagem (AVA), com os conteúdos de Geometria Analítica articulada com a teoria dos Registros de Representação Semiótica; identificou-se o desenvolvimento de habilidades matemáticas e dificuldades apresentadas por um grupo de alunos de uma turma do Ensino Médio, com a implementação de um experimento com o AVA desenvolvido sobre os conteúdos de Geometria Analítica embasado nesta teoria e nas tendência metodológicas para o ensino da Matemática. Os instrumentos de coletas de dados foram: as propostas curriculares para o Ensino Médio das escolas públicas do Rio Grande do Sul, conforme os resultados do Exame Nacional do Ensino Médio, do ano de 2010 no que se refere aos conteúdos de Geometria Analítica; o questionário aplicado aos professores de Matemática do Ensino Médio das escolas selecionadas; os livros didáticos nacionais para o Ensino Médio, aprovados pelo Plano Nacional do Ensino Médio 2012; o banco de dados do Sistema de Estudos com as respostas dos problemas geradores de cada conceito do grafo estruturado com os conteúdos de Geometria Analítica; do banco de dados do SIENA com os resultados dos testes adaptativos; os registros escritos dos estudantes durante o experimento realizado; dos protocolos de observação dos encontros presenciais do experimento realizado. A investigação abrangeu duas turmas do terceiro ano do Ensino Médio, num total de 64 alunos, de uma escola pública estadual do município de Canoas-RS. Foi possível constatar com a implementação da proposta metodológica que os alunos apresentaram, inicialmente, resistência em se adaptar a metodologia proposta, mas em geral, demonstraram 21 habilidades matemáticas, e embora ainda possuindo dificuldades com os conteúdos de Ponto, Reta e Circunferência no tema Geometria Analítica, o que sugere ampliação das atividades desenvolvidas na mesma, apresentaram melhoras significativas à medida que retornavam aos estudos com os recursos didáticos disponibilizados na sequência didática e realizavam novos testes adaptativos no SIENA. Desta forma, constatou-se que para implementar uma sequência didática com o tema Geometria Analítica articulada aos Registros de Representação Semiótica é primordial abordagens didático-pedagógicas que mobilizem e articulem diferentes registros semióticos, associando diferentes tendências metodológicas para o ensino da Matemática, principalmente o uso de Tecnologias da Informação e Comunicação, devendo-se insistir na utilização deste tipo de metodologia que exige, dos estudantes, pesquisa, concentração e requer um custo cognitivo maior na resolução das atividades propostas.

Palavras-chave: Registros de Representação Semiótica. Geometria Analítica. Ensino e Aprendizagem. Tendências Metodológicas para o Ensino da Matemática.

ABSTRACT

Raymond Duval's theory of Semiotic Representation Registers, which addresses mathematical learning, has been widely used as starting point in studies about the comprehension and acquisition of mathematical knowledge, and stands as an alternative approach in the organization of teaching and learning situations. The present study combined the Duval's theory and the teaching and learning processes in Analytical Geometry in high school. Analytical Geometry is ubiquitously present in several Sciences, since it has a large variety of semiotic registers that require exploring. So, we describe the implementation (the development, application, and evaluation) of a methodological proposal to teach high school Analytical Geometry contents in the context of Semiotic Representation Registers. With that in mind, Analytical Geometry was investigated in the current High School system. The didactic and pedagogical possibilities were explored based on a methodological proposal from the perspective of the theory of Semiotic Representation Registers considering the development of the teaching and learning process in Analytical Geometry as considered in the Mathematics curriculum and using Communication and Information Technologies (CIT). We adopted a qualitative approach, and the methodological proposal was implemented at stages, when we identified which Analytical Geometry contents are taught, the objectives to be met, the methodologies used, and instances when these may be linked with the use of Semiotic Representation Registers based on different tasks such as treatment and conversion of various semiotic registers, the moment these are taught, and the whats, hows, and whens these contents are evaluated, in light of the public policies about Analytical Geometry; we looked into the Mathematics textbooks listed in the 2012 edition of Brazil's National Textbook Program for high schools about Analytical Geometry and Semiotic Representation Registers; we investigated the ways to develop a teaching and learning process in a virtual learning environment (VLE) for Analytical Geometry contents when linked with Semiotic Representation Registers; we identified the development of mathematical skills and difficulties exhibited by a group of high school students during an experiment with the VLE about Analytical Geometry contents based on Duval's theory and on the methodological trends in the teaching of Mathematics. Data were collected based of high school curriculum proposals to teach Analytical Geometry in state schools in Rio Grande do Sul, Brazil developed considering the National High School Test scores in 2010. In addition, the questionnaire answered by high school Mathematics teachers in the participating schools, looked into the textbooks adopted in Brazilian high schools as licensed by the National High School Program 2012, the databank of the Study System storing the answers to the generating problems of each concept in the graph with Analytical Geometry contents, the results of adaptive tests stored in the SIENA databank, the students' written records made during the experiment, and assessed the protocols followed when watching the classroom meetings during the experiment. This study was conducted with two groups taking the third year in a state high school in Canoas, state of Rio Grande do Sul, Brazil. In total, 64 students participated. We observed that the implementation of the methodological proposal initially prompted students to resist to adapt, though they in general mastered 21 mathematical skills. Despite the difficulties to learn the contents associated with the Dot, the Straight Line, and the Circle in Analytical Geometry that suggest the need to enlarge the scope of activities about this theme, the students' performance improved significantly as they studied using the didactic resources available in the didactic sequence and took new adaptive tests in SIENA. Therefore, we noticed that, in order to implement a didactic sequence in Analytical Geometry in the context of Semiotic Representation Registers, it is essential to adopt didactic and pedagogical approaches that prompt and articulate different semiotic registers, associating various methodological trends in the teaching of Mathematics, mainly CIT, and emphasizing the use of this kind of methodology, which requires students to research and concentrate in addition to a higher cognitive investment when solving the activities proposed.

Keywords: Semiotic Representation Registers. Analytical Geometry. Teaching and Learning. Methodological trends in Teaching of Mathematics.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

1.1 TRAJETÓRIA ACADÊMICA

No ano 2000, iniciei minhas atividades acadêmicas na Faculdade Cenecista de Osório, no curso de graduação em Matemática. Como no Ensino Médio havia cursado Magistério decidi continuar nesta carreira e optei por ser professora de Matemática devido a afinidade com esta disciplina. Neste período participei de eventos da área como Encontro Gaúcho de Educação Matemática (EGEM) e eventos oportunizados pela instituição de ensino em que estudava.

Em 2003, no último ano da graduação comecei a exercer a profissão, fui chamada em concurso pelo estado do Rio Grande do Sul para trabalhar com as séries iniciais e convocada, também, para trabalhar na coordenação pedagógica da escola para assessorar os professores. Desde então, foram doze anos trabalhando nesta escola, em funções como professora, vice-diretora e auxiliar administrativo.

No convívio com os professores da graduação e por me sentir realizada com a profissão que escolhi, decidi continuar meus estudos. Em 2004 iniciei minha especialização em Educação Matemática na Universidade do Extremo Sul Catarinense (UNESC), em Criciúma, Santa Catarina, onde troquei experiências com colegas e professores de outro estado. Inclusive tive, neste curso, a oportunidade de ser aluna do professor Méricles T. Moretti em uma das disciplinas oferecidas, e que agora participa da banca deste trabalho.

Neste curso realizei minha monografia sobre modelagem matemática, investigando os professores do litoral norte gaúcho sobre o conhecimento e a prática de atividades utilizando esta metodologia. Minha orientadora, a professora Marilaine de Fraga Sat'Ana me convidou a participar de congressos nesta área, como a Conferência Nacional sobre Modelagem para a Educação Matemática e, assim conheci professores renomados como Jonei Cerqueira Barbosa, entre outros.

Em 2005, concluí minha especialização e incentivada pela professora Marilaine, no ano seguinte ingressei como aluna especial no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECIM) da Universidade Luterana do Brasil (ULBRA), em Canoas-RS, no curso de mestrado. Durante o período como aluna especial comecei a desenvolver oficinas para publicação de artigos e apresentar em congressos utilizando o *software winplot* e Geogebra sobre a temática Geometria Analítica. Também, neste período, conheci novos assuntos importantes para a Educação Matemática, entre eles a teoria dos Registros de

Representação Semiótica, em uma disciplina ministrada pela professora Carmen Teresa Kaiber. Neste momento, me senti inspirada por esta teoria e decidi que gostaria de pesquisar nesta área.

Então, ao ingressar como aluna regular do curso de mestrado sob a orientação da professora Claudia Lisete Oliveira Groenwald, fui apresentada às suas pesquisas realizadas em convênio entre a ULBRA e a Universidade de La Laguna (ULL), em Tenerife na Espanha, com o sistema inteligente SIENA. Assim, aliando esta sugestão da professora Claudia para utilizar o SIENA na pesquisa de dissertação e meu encantamento pela teoria do Registros de Representação Semiótica, com as oficinas ministradas na temática de Geometria Analítica, surgiu a definição do tema para minha dissertação de mestrado: *Registros de Representação Semiótica e Geometria Analítica: Uma Experiência com o Ambiente Virtual SIENA*.

Esta pesquisa foi realizada com alunos da graduação em Matemática da ULBRA buscando identificar as dificuldades dos mesmos em atividades de transformação de registros semióticos, utilizando para isto o sistema SIENA por meio de testes adaptativos e desenvolvendo atividades informatizadas de recuperação do conteúdo de Geometria Analítica implementadas neste sistema. Durante este processo de pesquisa tive a oportunidade de ir para a ULL, na Espanha, aprimorar meus conhecimentos sobre o sistema SIENA. Também, foram publicados artigos e realizadas participações em congressos, como Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM), Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação matemática (EBRAPEM), Congresso Internacional de Educação Matemática (CIEM), Encontro Gaúcho de Educação Matemática (EGEM), entre outros, o que contribuiu para troca com outros pesquisadores da área.

Em 2010 concluí o mestrado e, em seguida, em 2011, ingressei no doutorado, continuando no programa da ULBRA como bolsista da CAPES. Continuei sendo orientada pela professora Claudia Lisete Oliveira Groenwald. A ideia de continuar a pesquisar sobre Geometria Analítica e a teoria dos Registros de Representação Semiótica no doutorado surgiu com as opiniões dos professores da banca de mestrado, entre eles a professora Cátia M. Nhering que nos incentivou a dar continuidade àquilo que foi desenvolvido na pesquisa de mestrado.

Assim, baseada nas dificuldades apresentadas pelos alunos investigados na pesquisa de mestrado surgiu a ideia de construir uma proposta metodológica com o intuito de que alunos do Ensino Médio estudassem Geometria Analítica articulando diferentes registros semióticos e tivessem, para isso, diferentes recursos didáticos para utilizarem articulados com essa teoria embasados, também, nas tendências metodológicas para o ensino da Matemática.

Esta pesquisa me levou a vários estudos na área de Registros de Representação

Semiótica, Tendências Metodológicas para o ensino da Matemática, entre outros explicitados nesta tese. Durante a realização desta pesquisa para a tese do doutorado foi apresentado parte deste trabalho em congressos da área de Matemática, publicados artigos em Revistas como Alexandria, Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática, Boletim GEPEM e na Revista Latino Americana de Investigação em Matemática Educativa (Relime).

E para culminar esta trajetória, neste ano de 2015, iniciei minha docência no Ensino Superior na Faculdade Cenecista de Osório (FACOS), onde estou muito feliz, pois foi nesta instituição que dei início a minha trajetória acadêmica. Sou professora nos cursos de Licenciatura em Matemática, Licenciatura em Informática, Administração ministrando as disciplinas de Matemática Básica, Álgebra Linear, Estatística, Métodos Quantitativos, Matemática Financeira e História da Matemática. E tive, também, a oportunidade de trabalhar com Educação à distância ministrando as disciplinas de Matemática e Fundamentos e Metodologia do Ensino da Matemática para o curso de Pedagogia. Assim, percebo que tudo que estudei e vivi academicamente foi muito importante, e agora mesmo representando uma nova etapa e um desafio na minha vida profissional posso adquirir novas experiências e colocar em prática os conhecimentos adquiridos durante esta trajetória.

1.2 SITUANDO A PESQUISA

Buscando compreender as dificuldades que muitos alunos apresentam na aprendizagem Matemática, Raymond Duval, autor de várias pesquisas que tratam principalmente do funcionamento cognitivo na aprendizagem Matemática, desenvolveu um modelo de funcionamento cognitivo do pensamento, em termos de mudança de Registros de Representação Semiótica, em sua obra *Sémiosis et pensée humaine.*

Duval (2004), em sua teoria dos Registros de Representação Semiótica estabelece que toda a atividade Matemática e toda comunicação nesta área se dá com base nas representações semióticas, e aponta sua teoria como uma possibilidade para o educador desenvolver situações de ensino e aprendizagem nesta disciplina, enfatizando a importância de se trabalhar com a diversidade de registros de representação que possui um objeto matemático e a articulação entre eles para que o aluno compreenda e realize os diferentes processos cognitivos requeridos pela Matemática.

Entretanto, de acordo com Damm (2002), pesquisas em Educação Matemática revelam que os alunos apresentam dificuldades em transitar entre os diferentes registros de representação de um objeto matemático, ou seja, os alunos realizam tratamentos em diversos registros de representação de um mesmo objeto matemático, mas não conseguem passar de uma representação para outra, realizando as conversões para a apreensão deste objeto.

De acordo com Dallemole (2010), que realizou uma investigação com alunos de Licenciatura em matemática com a temática Geometria Analítica, constatou que estes, mesmo já tendo estudado esta temática no Ensino Médio, ainda apresentam dificuldades em realizar atividades de transformação entre registros semióticos como a língua natural, registro simbólico e registro gráfico. Além disso, dados da Prova Brasil de 2011 apresentados pelo SAEB[1] e pesquisas do Banco de dados da CAPES[2] nesta área, apontam que muitos alunos possuem dificuldades nos conteúdos estudados na Geometria Analítica.

A Geometria Analítica além de conter uma diversidade de registros semióticos que devem ser explorados em seu processo de ensino e aprendizagem e possibilitar a articulação entre a geometria e álgebra, está presente em muitas áreas das Ciências, desempenhando papel importante na Engenharia, na Informática na Astronomia e até mesmo na Medicina. Além disso, está muito presente no cotidiano através do GPS e do *Google Maps*.

Segundo Comin et.al (2012) a Geometria Analítica é reconhecida como parte imprescindível da matemática, com utilização em diversas áreas do conhecimento, faz parte da formação básica de praticamente todos os programas de educação do país e de cursos de formação superior. Os autores afirmam que no Ensino Médio é ensinada uma Geometria Analítica clássica e nos cursos superiores é ministrada uma Geometria Analítica vetorial, ou seja, a Geometria Analítica à medida que se faz necessária uma Matemática mais significativa, vai sendo associada a outras áreas da Matemática, neste caso, com a álgebra linear. Estes autores também fazem uma crítica ao fato de não se encontrar mais obras de Geometria Analítica clássica, com exceção dos livros didáticos destinados ao Ensino Médio, e acreditam que talvez isso ocorra porque os cursos superiores em que a disciplina é ministrada sejam dados conteúdos de geometria Analítica vetorial, inclusive nos cursos de Licenciatura em Matemática, julgando um contrassenso, pois esses cursos são para formação de professores e o principal nicho de atuação é o ensino básico no qual a geometria Analítica trabalhada é a clássica.

Assim, a partir destes pressupostos e ciente da importância da Geometria Analítica para diferentes áreas das Ciências e das dificuldades que muitos alunos apresentam ao estudar esta

[1] Sistema Nacional de Avaliação Básica
[2] Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

temática, considera-se relevante desenvolver uma investigação com a mesma articulada a teoria dos Registros de Representação Semiótica. Buscou-se investigar como implementar (desenvolver, aplicar e avaliar) uma proposta metodológica para o Ensino Médio com os conteúdos de Geometria Analítica articulada com os Registros de Representação Semiótica.

Para melhor organização e compreensão do leitor, este trabalho está dividido em capítulos, sendo o primeiro exposto nesta introdução.

No segundo capítulo apresenta-se a trajetória metodológica desta investigação descrevendo os itens metodológicos da pesquisa relacionados ao tema escolhido, ao problema de pesquisa, aos objetivos da investigação, a metodologia utilizada para a obtenção dos resultados, o Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA) desenvolvido e a experiência realizada com os alunos do terceiro ano do Ensino Médio de uma escola pública de Canoas.

No terceiro capítulo apresentam-se os pressupostos teóricos, os quais centram-se no estudo do currículo de Matemática do Ensino Médio, em especial no que trata da Geometria Analítica, para analisar o que é ensinado em Geometria Analítica no atual sistema de Ensino Médio, quando é ensinado, como é ensinado, e o que, como e quando é avaliado, além de dar subsídios para o desenvolvimento da proposta metodológica para o ensino e aprendizagem da Geometria Analítica e para a análise das produções dos alunos. Centrou-se, também, na teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, a qual foi a base para o desenvolvimento desta proposta metodológica e para a análise de dados.

E, ainda, considerou-se como fundamentação teórica algumas das principais tendências metodológicas para o ensino da Matemática no Brasil, como Tecnologias da Informação e Comunicação, Resolução de Problemas, Jogos e curiosidades, Modelagem Matemática e História da Matemática, pois o estudo destas tendências articulado à teoria dos Registros de Representação Semiótica foram necessárias para o desenvolvimento da sequência didática eletrônica.

No quarto capítulo apresentam-se as análises das propostas curriculares das escolas estaduais selecionadas a partir de uma determinada nota da prova do Exame Nacional do Ensino Médio de 2010, no que atenta o estudo da Geometria Analítica, bem como a análise do questionário aplicado aos professores de Matemática destas escolas que trabalham o conteúdo de Geometria Analítica. Apresenta-se, também, a descrição e análise dos livros didáticos do terceiro ano do Ensino Médio, aprovados pelo Plano Nacional do Livro Didático, do PNLD (2011), acerca da abordagem do conteúdo de Geometria Analítica e a mobilização dos Registros de Representação Semiótica.

No quinto capítulo apresenta-se como foi desenvolvido, com base na análise das propostas curriculares das escolas estaduais, do questionário aplicado aos professores destas escolas e, também, com base na análise dos livros didáticos acerca dos conteúdos de Geometria Analítica, o grafo com tais conteúdos com enfoque em Ponto, Reta e Circunferência. Apresenta-se, também, a sequência didática eletrônica desenvolvida para cada conceito do grafo e o banco de questões para a realização dos testes adaptativos no sistema SIENA, com base na teoria dos Registros de Representação Semiótica e nas tendências metodológicas para o ensino da Matemática, consideradas adequadas ao conteúdo de Geometria Analítica.

No sexto capítulo apresentam-se o perfil dos alunos investigados, os resultados de cada conceito do grafo com foco nas habilidades matemáticas desenvolvidas ou não pelos alunos, segundo o conteúdo de cada conceito do grafo, tanto na parte da sequência didática quanto nos testes adaptativos, sob a ótica da teoria dos Registros de Representação Semiótica.

Por fim, apresenta-se a conclusão sobre a investigação realizada com base nos objetivos traçados e resultados obtidos.

2 TRAJETÓRIA DA PESQUISA

Neste capítulo apresentam-se os itens metodológicos da pesquisa relacionados ao tema escolhido, ao problema de pesquisa, aos objetivos da investigação, a metodologia utilizada para a obtenção dos resultados, o Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA) desenvolvido e a experiência realizada com os alunos do terceiro ano do Ensino Médio de uma escola pública de Canoas.

2.1 TEMA

Os Registros de Representação Semiótica articulados ao processo de ensino e aprendizagem da Geometria Analítica no currículo de Matemática do Ensino Médio.

2.2 PROBLEMA DE PESQUISA

Segundo Eves (2007) as ideias concebidas por Descartes e Fermat acerca da Geometria Analítica moderna constituem um método de enfrentar problemas geométricos. Para o autor, a essência dessas ideias, quando aplicada ao plano, consiste em estabelecer uma correspondência entre pontos do plano cartesiano e pares ordenados de Números Reais, viabilizando assim, uma correspondência entre curvas do plano cartesiano e equações em duas variáveis. Além disso, estabelece-se uma correspondência entre as propriedades algébricas e analíticas da equação e as propriedades geométricas da curva associada. Dessa forma, passou-se da tarefa de provar um teorema em Geometria para a de provar um teorema correspondente em Álgebra e Análise. A ideia de coordenada, segundo Eves (2007), já foi utilizada no mundo antigo pelos egípcios e os romanos na agrimensura e pelos gregos na confecção de mapas.

O ensino da Geometria Analítica, objeto de estudo no Ensino Médio e Superior, está presente em muitas áreas da Ciência, como na Medicina em exames por imagem computadorizadas, na Engenharia desde a fabricação de peças de aço até a construção de cenários virtuais, na Astronomia, no GPS, nos radares dos aeroportos e dos aviões, na Física em movimentos de corpos em função do tempo.

Segundo Iezzi et al. (2010) a Geometria Analítica desempenha papel importante no desenvolvimento da computação gráfica. Os autores comentam que as telas dos computadores são modelos de estrutura do plano cartesiano com um número finito de pontos, ao aumentar o número de pontos, melhora-se a qualidade da imagem do monitor e da impressão dessa imagem.

Especificamente para a Geometria Analítica as Orientações Curriculares Nacionais (BRASIL 2006) afirma que esta possibilita a articulação entre a Geometria e Álgebra, devendo o professor trabalhar o entendimento de figuras geométricas por meio de equações, e o entendimento de equações por meio de figuras geométricas, abandonando a simples apresentação de equações sem explicações fundadas no raciocínio lógico, evitando memorizações excessivas de fórmulas. Evidencia-se nesta afirmação, com base na teoria dos Registros de Representação Semiótica, uma necessidade de utilização de diferentes Registros de Representação Semiótica, o registro gráfico e o registro simbólico (representação algébrica), e um trabalho que promova a articulação, ou seja, a conversão entre esses registros.

Pesquisas do Banco de dados da CAPES nesta área, além dos dados da Prova Brasil (2011) apresentados pelo SAEB em 2012 é possível verificar que muitos alunos possuem dificuldades nos conteúdos estudados na Geometria Analítica. De acordo com Dallemole (2010), que realizou uma pesquisa com alunos de Licenciatura em Matemática, constatou que estes ainda apresentam dificuldades em realizar tratamentos e conversões entre os registros língua natural, representação algébrica e representação gráfica envolvendo os conteúdos de Geometria Analítica, mesmo já tendo estudado tais conceitos no Ensino Médio. Silva (2006) constatou que muitos alunos do Ensino Médio mostram dificuldades em articular com as diversas representações gráficas e algébricas de curvas planas, além da dificuldade para compreender a diferença entre o objeto matemático e sua representação.

Para Bezerra (2009), sua experiência como professora no Ensino Médio constatou que "quase sempre o ensino e aprendizagem da Geometria Analítica é um ensino centrado na transmissão de fórmulas, descontextualizado da realidade e da própria Matemática, em total descompasso com os avanços tecnológicos" (BEZERRA, 2009, p. 2). A autora afirma ainda que o desenvolvimento dos conceitos neste conteúdo se dá de forma mecanicista, priorizando a memorização de fórmulas e algoritmos, deixando de lado o raciocínio lógico e espacial.

Baier e Schwertl (2006, p.10), mencionam que,

> ao ensinar Geometria Analítica, o professor normalmente faz uso da representação gráfica apenas para a dedução de uma fórmula. Demonstrada a fórmula, o desenho é praticamente abandonado. Os livros didáticos, em sua maioria, trazem um grande número de problemas de Geometria Analítica envolvendo apenas aplicações de fórmulas já demonstradas e dificilmente o aluno recorre à representação gráfica para recordá-las.

Entende-se que o conteúdo de Geometria Analítica por si só contêm uma diversidade de registros semióticos que devem ser explorados em seu processo de ensino e aprendizagem e considera-se a teoria dos Registros de Representação Semiótica como uma possibilidade para o educador desenvolver situações de ensino e aprendizagem que enfatize a diversidade de registros de representação que possui a Geometria Analítica e a articulação entre eles, para que o aluno compreenda e realize os diferentes processos cognitivos requeridos por este conteúdo matemático.

Assim, a partir destes pressupostos e ciente da importância da Geometria Analítica para diferentes áreas das Ciência, surge o problema dessa investigação: como implementar (desenvolver, aplicar e avaliar) uma proposta metodológica para o Ensino Médio com os conteúdos de Geometria Analítica articulada com os Registros de Representação Semiótica?

2.3 OBJETIVOS

A seguir apresentam-se o objetivo geral e os objetivos específicos traçados para o desenvolvimento desta investigação.

2.3.1 Objetivo Geral

Investigar o tema Geometria Analítica no currículo de Ensino Médio e as possibilidades didático-pedagógicas de uma proposta metodológica articulada com a teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval, para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem deste tema, no currículo de Matemática do Ensino Médio utilizando Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC).

2.3.2 Objetivos Específicos

Para alcançar o objetivo geral foram traçados os objetivos específicos relacionados a seguir:

a) Identificar quais conteúdos de Geometria Analítica são ensinados, quais os objetivos a serem alcançados com o estudo destes conteúdos, as metodologias utilizadas e se estas referem-se ao uso dos Registros de Representação Semiótica com tarefas de diferentes natureza de tratamentos e conversões entre os diferentes registros semióticos, quando são ensinados, e o que, como e quando estes conteúdos estão sendo avaliados, contrastando com as Políticas Públicas (Parâmetros Curriculares Nacionais e a Proposta Curricular de Matemática do Rio Grande do Sul) no que tange à Matemática e os conceitos de Geometria Analítica;

b) Investigar os livros didáticos de Matemática, do Plano Nacional do Livro Didático de 2012, para o Ensino Médio, no que tange a Geometria Analítica e os Registros de Representação Semiótica;

c) Investigar como desenvolver o processo de ensino e aprendizagem em um ambiente virtual de aprendizagem, com os conteúdos de Geometria Analítica articulada com a teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval .

d) Identificar o desenvolvimento de habilidades matemáticas e dificuldades apresentadas por um grupo de alunos de uma turma do Ensino Médio, com a aplicação de um experimento com o AVA desenvolvido sobre os conteúdos de Geometria Analítica embasado na teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval.

2.4 METODOLOGIA DA INVESTIGAÇÃO

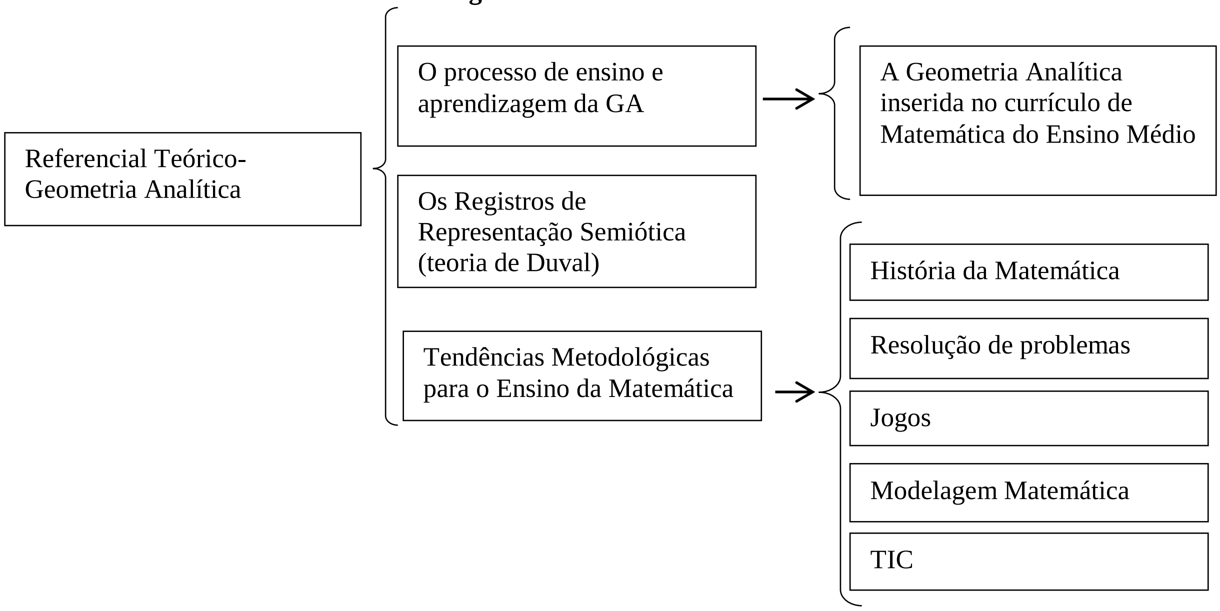
Nesta investigação foi adotado o enfoque qualitativo, conforme a abordagem de Bogdan e Biklen (1999). Para estes autores a abordagem qualitativa em uma pesquisa permite identificar características essenciais como, o ambiente natural como: fonte direta de dados e, o pesquisador, como instrumento fundamental; o caráter descritivo; maior interesse pelo processo do que simplesmente pelos resultados; análise dos dados de forma indutiva e predominantemente descritiva, em que não há preocupação em quantificar os dados; o significado com importância vital neste tipo de abordagem.

Esta investigação teve o seu foco no processo de ensino e aprendizagem da Geometria Analítica no Ensino Médio, ou seja, o que é estudado, como é estudado e quando é estudado, e na implementação (desenvolver, aplicar e avaliar) de um experimento com uma proposta metodológica articulada com a teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval e nas tendências metodológicas para a área da Educação Matemática, adequadas à Geometria Analítica, que busque contribuir para o processo de ensino e aprendizagem deste conteúdo.

A presente pesquisa foi desenvolvida segundo as etapas descritas a seguir:

a) levantamento bibliográfico sobre os Registros de Representação Semiótica, as tendências metodológicas para o ensino da Matemática e o processo de ensino e aprendizagem da temática Geometria Analítica de acordo com as políticas públicas, como apresenta-se no esquema da figura 1;

Figura 1- Referencial Teórico



Fonte: A pesquisa.

b) Seleção das escolas públicas do Rio Grande do Sul a serem investigadas as propostas curriculares para o Ensino Médio no que tange ao conteúdo de Geometria Analítica, com resultados iguais ou maiores que 555,00 para a disciplina de Matemática, no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) do ano de 2010 (nota de corte estabelecido como critério de seleção das escolas);

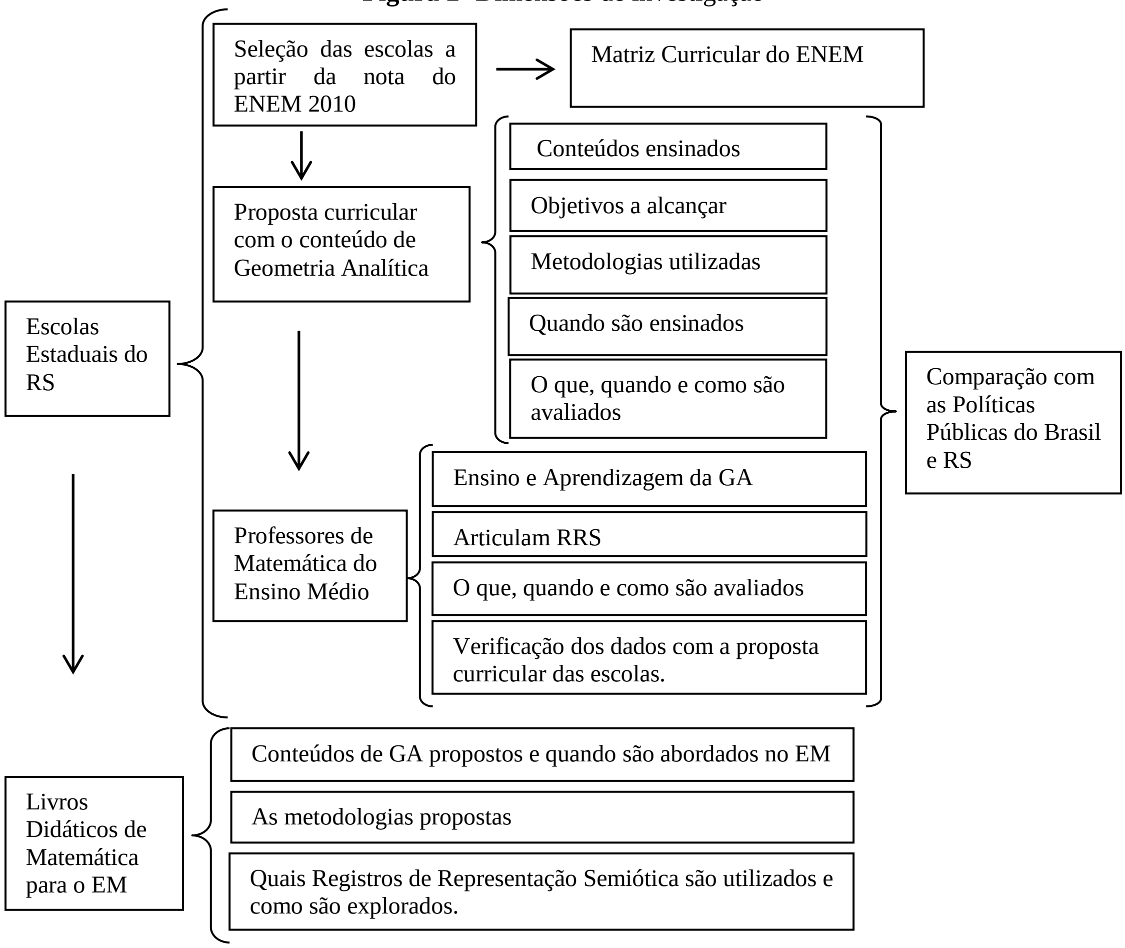
c) Aplicação de um questionário com professores de Matemática do Ensino Médio de escolas públicas do Rio Grande do Sul, com médias iguais ou superiores a 555,00 em Matemática, conforme os resultados do ENEM do ano de 2010, para identificar como estes desenvolvem o processo de ensino e aprendizagem da Geometria Analítica, se procuram utilizar diferentes Registros de Representação Semiótica (RRS) e explorar tarefas de tratamentos e conversões entre esses registros, como e quando estes conteúdos são avaliados e se a propostas curriculares das escolas são seguidas;

d) Análise documental das propostas curriculares das escolas pesquisadas identificando quais conteúdos de Geometria Analítica são ensinados, quais os objetivos a serem alcançados com o estudo destes conteúdos, como são ensinados (as metodologias utilizadas), quando são ensinados (em que momento do Ensino Médio), e o que, como e quando estes conteúdos estão sendo avaliados, contrastando-as com as Políticas Públicas (Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio e Proposta Curricular de Matemática do Rio Grande do Sul) no que se refere ao Ensino da Matemática e particularmente da Geometria Analítica;

e) Investigação nos livros didáticos nacionais para o Ensino Médio aprovados pelo Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) em 2012, para identificar os conteúdos de Geometria Analítica propostos, em que momento do Ensino Médio sugerem que sejam abordados e quais metodologias propõem para o ensino destes conteúdos, quais registros de representação semiótica são utilizados e como são explorados;

As etapas b, c, d, e, estão representadas nos esquema da figura 2.

Figura 2- Dimensões de investigação



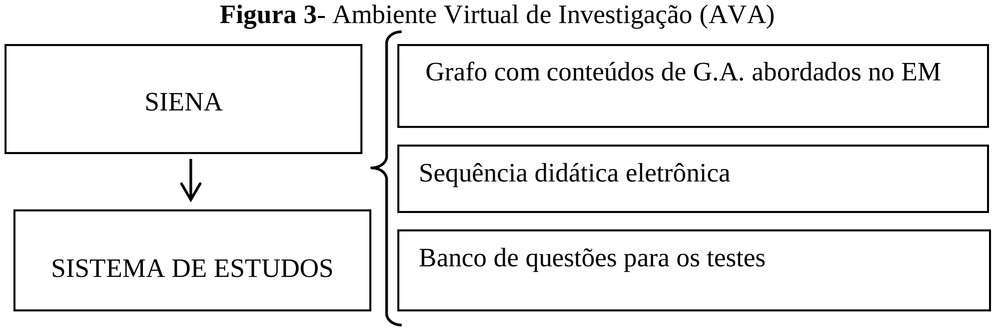
Fonte: A pesquisa.

g) Implementação do Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA) com as seguintes ações: 1) construção e implementação do grafo no Sistema Integrado de Ensino e Aprendizagem (SIENA) e no Sistema de Estudos (ambiente informático desenvolvido para esta pesquisa), com os conteúdos de Geometria Analítica abordados no Ensino Médio, com base nos dados coletados nas etapas anteriores, abordando os conteúdos de Geometria Analítica trabalhados nas escolas pesquisadas, propostos pelos livros didáticos nacionais para o Ensino Médio e pelas políticas públicas (Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, Proposta

Curricular de Matemática do Rio Grande do Sul); 2) desenvolvimento de uma sequência didática eletrônica implementada no Sistema de Estudos a partir do grafo construído, e embasada na teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval e nas tendências metodológicas para a área de Educação Matemática; 3) construção do banco de questões para os testes adaptativos em cada conceito do grafo, no SIENA, de acordo com a sequência didática desenvolvida, os quais serão realizados pelos alunos após a aplicação da sequência didática como um recurso de verificação da aprendizagem dos alunos e eficácia da sequência desenvolvida;

A figura 3 apresenta o esquema da etapa g com suas ações.

Figura 3- Ambiente Virtual de Investigação (AVA)



Fonte: A pesquisa.

h) Desenvolvimento de um experimento com duas turmas de alunos do Ensino Médio, com a aplicação do ambiente de investigação;

i) Análise dos dados coletados durante a aplicação do experimento com as observações e protocolos realizados, registros escritos dos alunos investigados e análise dos bancos de dados do Sistema de Estudos e do SIENA respectivas aos estudos dos conteúdos de Geometria Analítica e testes adaptativos dos mesmos, realizados pelos alunos, para identificação de habilidades matemáticas desenvolvidas e dificuldades acerca da Geometria Analítica por estes alunos. O roteiro para protocolo das observações encontra-se no Apêncice E.

2.4.1. Instrumentos de Investigação

A coleta dos dados para subsidiar o desenvolvimento da proposta metodológica com a Geometria Analítica articulada com a teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval e nas principais tendências metodológicas para a área de Educação Matemática, foi realizada através de:

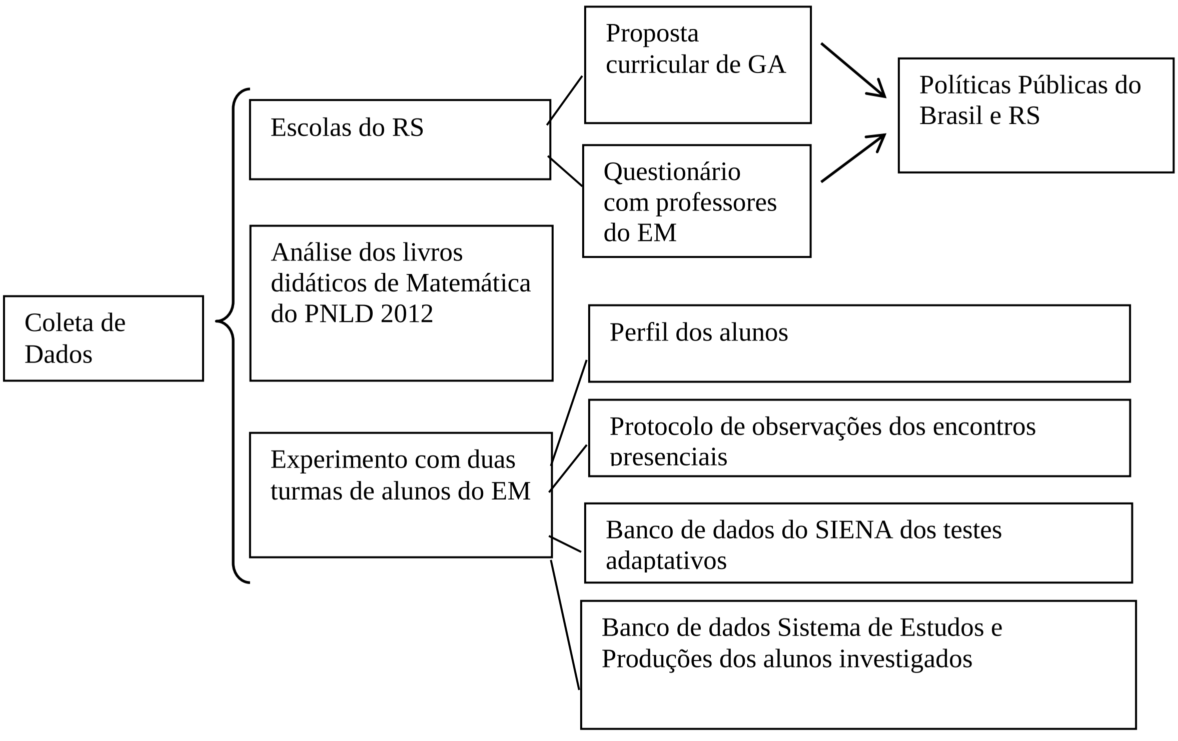
- as propostas curriculares para o Ensino Médio das escolas públicas do Rio Grande do Sul com as melhores médias em Matemática, conforme os resultados do Exame Nacional do Ensino

Médio, do ano de 2010 (critério para seleção das escolas), no que se refere aos conteúdos de Geometria Analítica;

- o questionário (apêndice A) aplicados aos professores de Matemática do Ensino Médio das escolas selecionadas;
- os livros didáticos nacionais para o Ensino Médio, aprovados pelo Plano Nacional do Ensino Médio 2012 e pesquisa nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio no que tange os conteúdos de Geometria Analítica;
- o banco de dados do sistema de estudos com as respostas dos problemas geradores de cada conceito do grafo com os conteúdos de Geometria Analítica ;
- o banco de dados do SIENA com o resultado dos testes adaptativos;
- os registros escritos dos estudantes durante o experimento realizado.
- os protocolos de observação dos encontros presenciais do experimento realizado.

A figura 4 apresenta o esquema que ilustra a coleta de dados.

Figura 4- Coleta de dados



Fonte: A pesquisa.

Com estes instrumentos e com a triangulação dos dados, esta entendida por Araújo e Borba (2004), como a utilização de diferentes procedimentos para obtenção dos dados, a fim de aumentar a credibilidade de uma pesquisa qualitativa, busca-se encadear e contextualizar os resultados obtidos para responder as seguintes questões:

1) O que apresentam as Políticas Públicas do Brasil e do Rio Grande do Sul para o ensino da Geometria Analítica no Ensino Médio?

2) A Geometria Analítica é parte do currículo de Matemática desenvolvido nas escolas estaduais do Rio Grande do Sul?

3) Quais conteúdos de Geometria Analítica são ensinados no Ensino Médio e quais objetivos a serem alcançados com o estudo destes conteúdos?

4) Quais metodologias ou Tendências Metodológicas para o ensino da Matemática são utilizadas para o ensino da Geometria Analítica e em que momento do Ensino Médio é abordada?

5) O que, como e quando estes conteúdos estão sendo avaliados?

6) Os professores do Ensino Médio que lecionam Geometria Analítica articulam os Registros de Representação Semiótica? E quais as dificuldades observadas por estes professores que são apresentadas pelos seus alunos?

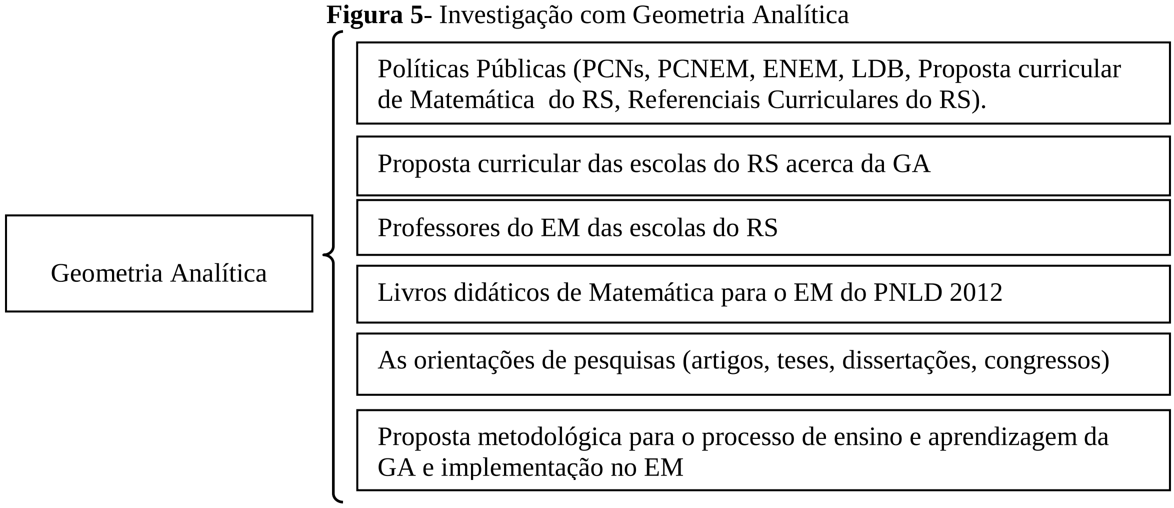
7) O que os livros didáticos do Ensino Médio, aprovados pelo Plano Nacional do Livro Didático do ano de 2012, abordam de Geometria Analítica, quais metodologias propõem para seu ensino, quais Registros de Representação Semiótica utilizam e como são explorados estes registros?

8) Quais habilidades matemáticas e dificuldades apresentam um grupo de alunos do Ensino Médio, que não estudaram Geometria Analítica, com a experiência em um AVA de uma proposta metodológica articulada com a teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval, no desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem deste tema?

9) Quais abordagens didático-pedagógicas devem ser priorizadas no ensino e aprendizagem da Geometria Analítica em um AVA?

A figura 5 ilustra o que será investigado para responder as questões supracitadas.

Figura 5- Investigação com Geometria Analítica



Fonte: A pesquisa.

Nesse sentido, este trabalho de investigação buscou desenvolver um Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA) com o conteúdo de Geometria Analítica articulado com os Registros de Representação Semiótica de Duval e com as tendências metodológicas para o ensino da Matemática que considerou-se adequadas ao ensino deste conteúdo. A seguir apresenta-se o AVA desenvolvido.

2.5 AMBIENTE VIRTUAL DE APRENDIZAGEM (AVA)

Segundo Groenwald e Homa (2014), um ambiente virtual é aquele formado pelas coisas digitais, que as pessoas utilizam para interagir com o mundo a sua volta, seja para receber ou fornecer informação, comunicar-se, expressar opiniões e divertir-se. Os autores afirmam, também, que um ambiente virtual de aprendizagem pode ser considerado como aquilo que é virtual, permitindo que as ações de ensino e aprendizagem possam ocorrer.

Nesse sentido, para o desenvolvimento do AVA com o conteúdo de Geometria Analítica construiu-se inicialmente um grafo (apresentado no capítulo 4) deste conteúdo com enfoque nos conceitos de Ponto, Reta e Circunferência. Este grafo, teve, também, embasamento na distribuição do conteúdo de Geometria Analítica segundo os livros didáticos aprovados pelo PNLD em 2011 e as políticas públicas (Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, Proposta Curricular de Matemática do Rio Grande do Sul).

O grafo construído foi implementado no Sistema SIENA e no Sistema de Estudos, e partir deste, foi desenvolvida uma sequência didática eletrônica (apresentada no capítulo 4) implementada no Sistema de Estudos, o qual o aluno é direcionado através de um *link* no sistema SIENA. E desenvolvido também o banco de questões para os alunos realizarem os testes adaptativos no SIENA em cada conceito trabalhado nesta sequência didática eletrônica.

Desta forma, o AVA utilizado nesta investigação é composto pelo Sistema SIENA e o Sistema de Estudos, sendo que este foi desenvolvido fora do SIENA para a construção de um banco de dados que o SIENA não possui, o qual permite acompanhamento dos estudos realizados estudantes. O banco de dados construído para o Sistema de Estudos apresenta as respostas e o desempenho dos alunos nos problemas geradores desenvolvidos na sequência didática eletrônica de cada conceito do grafo, implementada no Sistema de Estudos.

2.5.1 Sistema Integrado de Ensino e Aprendizagem – SIENA[3]

[3] Texto padrão utilizado para explicação do SIENA desenvolvido pelo GECEM DO PPGECIM/ULBRA.

Para Groenwald (2009) os educadores são desafiados a descobrir maneiras diferentes de ensinar o mesmo conteúdo, pois os estudantes têm ritmos e históricos variados. Para a autora, é necessário que o professor questione a abordagem do conteúdo, desperte a curiosidade do educando e demonstre sua utilização em diferentes situações da vida real. Assim, um dos desafios que os professores encontram, em sala de aula, é a identificação das dificuldades individuais dos alunos.

Nesse sentido, o uso de recursos informáticos pode influenciar beneficamente quando utilizados como suporte ao trabalho docente, contribuindo na agilização das tarefas dos mesmos, como fonte de informação do conhecimento real dos alunos, ou na utilização de sistemas inteligentes que auxiliem o professor na sua docência (GROENWALD e RUIZ, 2006).

Kampff et al. (2004), afirmam que em uma sociedade de bases tecnológicas, com mudanças contínuas, não é mais possível desprezar o potencial pedagógico que as Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) apresentam quando incorporadas à educação. Assim, o computador é um instrumento pertinente no processo de ensino e aprendizagem, cabendo à escola utilizá-lo de forma coerente com uma proposta pedagógica atual e comprometida com uma aprendizagem significativa.

Nesta perspectiva, o SIENA foi organizado pelos grupos de Tecnologias Educativas da Universidade de La Laguna,Tenerife, Espanha e o GECEM (Grupo de Estudos Curriculares de Educação Matemática) do PPGECIM (programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da ULBRA (Universidade Luterana do Brasil). O SIENA é um sistema inteligente que é:

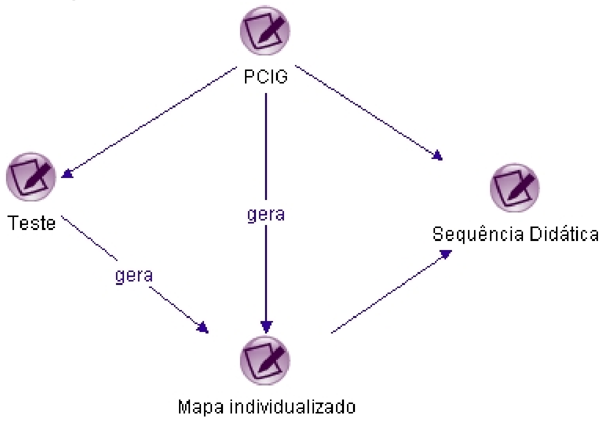
> capaz de comunicar informações sobre o conhecimento dos alunos em determinado tema, tem o objetivo de auxiliar no processo de recuperação de conteúdos matemáticos, utilizando a combinação de mapas conceituais e testes adaptativos (GROENWALD; RUIZ, 2006, p.26).

Ainda segundo Groenwald e Ruiz (2006), este sistema permite ao professor uma análise do nível de conhecimentos prévios de cada aluno, possibilitando um planejamento de ensino de acordo com a realidade dos alunos, podendo proporcionar uma aprendizagem significativa. O processo informático permite gerar um mapa individualizado das dificuldades dos alunos, o qual estará ligado a um hipertexto, que servirá para recuperar as dificuldades que cada aluno apresenta no conteúdo desenvolvido, auxiliando no processo de avaliação.

O SIENA foi desenvolvido através de uma variação dos tradicionais mapas conceituais (NOVAK e GOWIN, 1988), sendo denominado de Grafo Instrucional Conceitual Pedagógico - PCIG (*Pedagogical Concept Instructional Graph*), que permite a planificação do ensino e da aprendizagem de um tema específico. O grafo não ordena os conceitos segundo relações arbitrárias, os conceitos são colocados de acordo com a ordem lógica em que devem ser apresentados ao aluno. Portanto, o grafo deve ser desenvolvido segundo relações do tipo “o conceito A deve ser ensinado antes do conceito B”, começando pelos nodos (conceitos no grafo) dos conceitos prévios, seguindo para os conceitos fundamentais, até atingir os nodos objetivos.

Cada conceito do grafo está ligado a um teste adaptativo que gera o mapa individualizado das dificuldades do estudante e contém uma sequência didática, conforme a figura 6.

Figura 6- Esquema do sistema SIENA



Fonte: Sistema SIENA.

Um teste adaptativo informatizado é administrado pelo computador, que procura ajustar as questões do teste ao nível de habilidade de cada examinando. Segundo Costa (2009) um teste adaptativo informatizado procura encontrar um teste ótimo para cada estudante, para isso, a proficiência do indivíduo é estimada interativamente durante a administração do teste e, assim, só são selecionados os itens que mensurem eficientemente a proficiência do examinado. O teste adaptativo tem por finalidade administrar questões de um banco de questões previamente calibradas, que correspondam ao nível de capacidade do examinando. Como cada questão apresentada a um indivíduo é adequado à sua habilidade, nenhuma questão do teste é irrelevante (SANDS e WATERS, 1997). Ao contrário dos testes de papel e caneta, cada estudante recebe um teste com questões diferentes e tamanhos variados, produzindo uma medição mais precisa da proficiência e com uma redução, do tamanho do teste, em torno de 50% (WAINER, 2000).

No SIENA o teste adaptativo é realizado em cada nodo do PCIG, devendo ser cadastradas perguntas que irão compor o banco de questões dos mesmos, com o objetivo de avaliar o grau de conhecimento que o aluno possui de cada conceito. As perguntas são de múltipla escolha, classificadas em fáceis, médias e difíceis, sendo necessário definir, para cada pergunta: o grau de sua relação com o conceito; o grau de sua dificuldade; a resposta verdadeira; a possibilidade de responder a pergunta considerando exclusivamente sorte ou azar; a estimativa do conhecimento prévio que o aluno tem sobre esse conceito; o tempo de resposta (em segundos) para o aluno responder à pergunta. O teste adaptativo estima o grau de conhecimento do aluno para cada conceito, de acordo com as respostas do estudante. Para isso o teste adaptativo vai lançando perguntas aleatórias ao aluno, com um nível de dificuldade de acordo com as respostas do estudante, se o aluno vai respondendo corretamente, o sistema vai aumentando o grau de dificuldade das perguntas, e ao contrário, se a partir de um determinado momento o aluno não responde corretamente, o sistema diminui o nível de dificuldade da pergunta seguinte.

A ferramenta informática parte dos conceitos prévios, definidos no PCIG, e começa a avaliá-los, progredindo sempre que o aluno consegue uma nota superior ao estipulado, pelo professor, no teste. Quando um conceito não é superado, o sistema não prossegue avaliando por esse ramo de conceitos do grafo, pois se entende que esse conceito é necessário para a compreensão do seguinte, abrindo para o estudante a possibilidade de realizar a sua recuperação. É importante dizer que o sistema poderá prosseguir por outras ramificações do grafo.

Para estimar o conhecimento do aluno em cada conceito do grafo, o SIENA implementa uma rede bayesiana entre os conceitos implicados nesse nodo (conceito) do grafo e as perguntas, do tipo múltipla escolha, criadas para esses conceitos estão divididas em vários níveis de dificuldade. A estimativa é um processo interativo em que o sistema vai lançando perguntas e cada pergunta lançada ao estudantes se estima o conhecimento mediante as fórmulas de Bayes:

$$P(C+/\,p_1+) = \frac{P(C+)\times P(p_1+/\,C+)}{P(p_1+)}$$

Onde:

$$P(p_1+) = P(C+)\times P(p_1+/\,C+) + P(C-)\times P(p_1+/\,C-)$$

Para o caso que se acerte a pergunta, e

$$P(C+/\,p_1-) = \frac{P(C+)\times P(p_1-/\,C+)}{P(p_1-)}$$

Onde

$$P(p_1-) = P(C+)\times P(p_1-/\,C+) + P(C-)\times P(p_1-/\,C-)$$

Para o caso em que a pergunta seja respondida incorretamente. Onde P(C+) representa o conhecimento a priori estimado na pergunta anterior, P(p1+/C+), representa a probabilidade de que se acerte a pregunta condicionado a saber o conceito, P(p1+/C-), é a probabilidade de acertar a pergunta sem conhecer o conceito, P(p1-/C+) =1- P(p1+/C+) y P(p1-/C-) = 1- P(p1+/C). O processo interativo finaliza quando a estimativa não se altera significativamente. Enquanto a pergunta a ser lançada cada vez no processo interativo, o teste adaptativo se adapta ao conhecimento do estudante elegendo uma pergunta de igual ou maior dificuldade, se a pergunta anterior foi contestada corretamente, e dificuldade igual ou menor se a pregunta foi respondida erradamente (incorretamente).

O sistema mostrará, através do seu banco de dados, quais foram as perguntas realizadas, quais foram respondidas corretamente e qual a estimativa sobre o grau de conhecimento de cada conceito, conforme o exemplo apresentado na figura 7.

Figura 7- Exemplo do banco de dados de um teste adaptativo de um nodo

Acabado: true

Nota: 0.281

Respuesta	Respuesta correcta	Tiempo(antes de que se acabe)	Pregunta	Puntos antes
1	true	49	Qual é o número que está representado no ábaco?	0.200
1	true	49	Qual é o número que está representado no ábaco?	0.238
4	false	231	Se agruparmos sessenta e cinco unidades em grupos de dez, teremos ao todo?	0.281
2	false	128	Que número está representado no QVL?	0.281
2	false	128	Que número está representado no QVL?	0.281
4	false	130	Qual o número representado no ábaco?	0.281

Atrás

Fonte : Sistema SIENA.

O sistema possui duas opções de uso: a primeira serve para o aluno estudar os conteúdos dos nodos do PCIG e realizar o teste, para verificar quais são seus conhecimentos sobre determinados conteúdos; a segunda opção oportuniza, ao aluno, realizar o teste e estudar os conceitos nos quais apresentou dificuldades, sendo possível uma recuperação individualizada dos conteúdos nos quais não conseguiu superar a média estipulada como necessária para avançar. Todos os nodos do PCIG estão ligados a uma sequência didática que possibilita ao aluno estudar os conceitos ou realizar a recuperação dos nodos em que apresenta dificuldades.

As sequências didáticas são um conjunto de atividades organizadas, de maneira sistemática, planejadas para o processo de ensino e aprendizagem de um conteúdo, etapa por etapa. São organizadas de acordo com os objetivos que o professor quer alcançar para a aprendizagem de seus alunos, e envolvem atividades de aprendizagem e avaliação (DOLZ e SCHNEUWLY, 2004).

Segundo Zabala (1998) as sequências didáticas são um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos. Através da sequência didática é possível analisar as diferentes formas de intervenção e avaliar a pertinência de cada uma delas.

A plataforma SIENA está disponível no endereço http://siena.ulbra.br, sendo que o acesso aos trabalhos e banco de dados está restringido a usuários cadastrados no sistema. Esse cadastramento é realizado pelos administradores da plataforma, e fornece um login e uma senha pessoal ao usuário.

Salienta-se que nesta investigação o SIENA foi utilizado para auto avaliação e avaliação dos estudantes, com os testes adaptativos, sendo que os estudantes tinham acesso, através de um link a um Sistema de Estudos onde foi desenvolvida a sequência didática eletrônica com os conceitos de Ponto, Reta e Circunferência.

2.5.2 Sistema de Estudos

O Sistema de Estudos foi desenvolvido com base no referencial teórico desta pesquisa sobre os Registros de Representação Semiótica e as tendências metodológicas para o ensino da Matemática. Buscou-se criar um ambiente, baseado no que afirma Bairral (2009), interativo com acesso a diferentes recursos que integram diferentes formas de expressão escrita (língua natural, algébrica e gráfica) e visual, tentando criar oportunidades de aprendizagem em que o aluno possa construir seus próprios significados em relação aos conceitos do conteúdo trabalhado.

Para a sequência didática eletrônica com o conteúdo de Geometria Analítica implementada neste sistema, foram desenvolvidas atividades didáticas que estão fundamentadas na teoria dos Registros de Representação Semiótica articuladas com as tendências metodológicas para o ensino da Matemática, como Resolução de Problemas, Modelagem Matemática e Simulação, Jogos Digitais, História da Matemática e Tecnologias da

Informação e Comunicação. Esta sequência didática seguiu as seguintes ações didáticas:

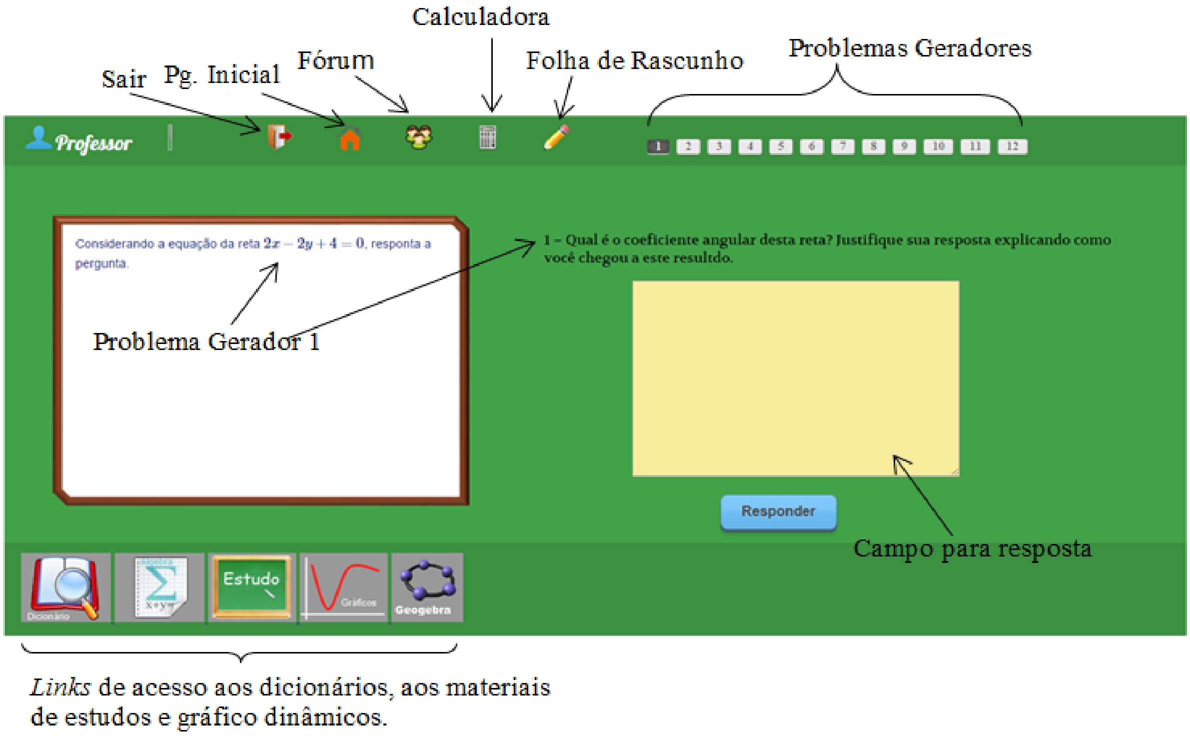
1) Introdução aos conceitos - o aluno é sempre introduzido aos conceitos, segundo o grafo construído, através de problemas geradores que envolvem tratamentos e conversões congruentes e não- congruentes, nos registros língua natural, numéricos, algébricos, gráficos e figural observando os dois sentidos das conversões;

2) Recursos didáticos ao aluno - para resolver cada problema gerador o aluno tem acesso a informações de acordo com a teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2003, 2004, 2009, 2011). Nesse sentido, foram construídos os seguintes recursos: um dicionário de conceitos do conteúdo em língua natural; um dicionário com as representações algébricas; um dicionário com as representações gráficas; o material de estudos que direcionava o aluno à explicações ilustradas do conteúdo de acordo com cada conceito do grafo, envolvendo os registros língua natural, numérico, algébrico, gráfico e figural, exemplos de problemas resolvidos e atividades extras como jogos, *quizzes*; representações gráficas com gráficos dinâmicos (*applets*) desenvolvidos no Geogebra para o estudo e visualização de propriedades dos lugares geométricos Ponto, Reta e Circunferência.

3) Interação entre os estudantes - o AVA construído foi desenvolvido para o trabalho em duplas ou grupos, assim, foram desenvolvidos como recursos auxiliares um fórum permitindo a interação entre os alunos, que poderiam deixar dúvidas, e conversar entre eles sobre as questões da pesquisa, e disponibilizada uma calculadora científica para os cálculos. E ainda, um *link* de uma folha *online* nos tablets utilizada no experimento para rascunhar os cálculos solicitados

A figura 8 apresenta a imagem de um problema gerador e os *links* de acesso aos recursos mencionados nas ações 2 e 3.

Figura 8- Tela com os recursos da sequência didática

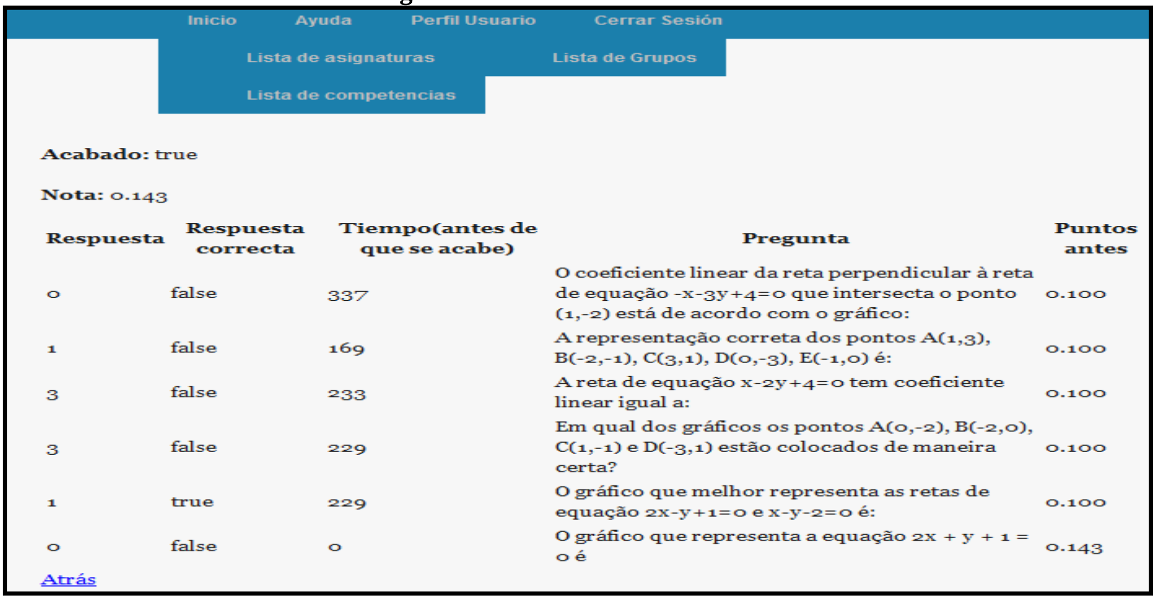


Fonte: Sistema de Estudos do AVA.

O AVA está descrito, em todas as suas funcionalidades no capítulo 5.

4) Avaliação do desempenho do estudante - para a auto avaliação do estudante e para acompanhamento do desempenho deste pelo professor foram utilizados testes adaptativos para cada conceito do grafo, no sistema SIENA. Este banco de dados apresenta as perguntas realizadas pelos alunos, o número correspondente a resposta dada pelo aluno e se foi respondida corretamente ou não, e se aluno conseguiu responder no tempo determinado para a questão. A figura 9 apresenta um exemplo de banco de dados do Sistema SIENA.

Figura 9- Banco de dados do SIENA



Inicio Ayuda Perfil Usuario Cerrar Sesión

Lista de asignaturas Lista de Grupos

Lista de competencias

Acabado: true

Nota: 0.143

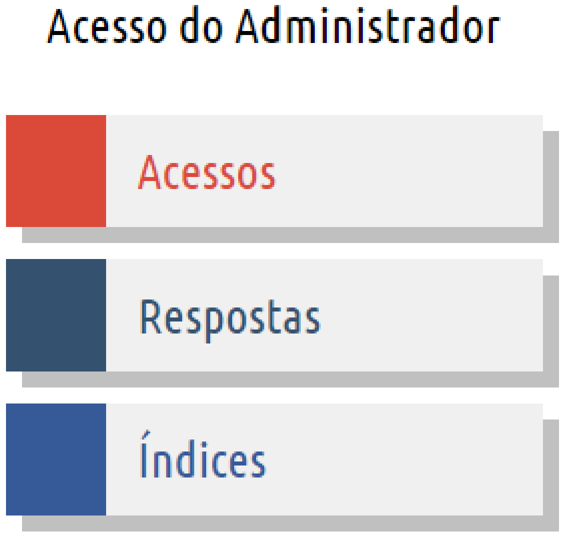
Respuesta	**Respuesta correcta**	**Tiempo(antes de que se acabe)**	**Pregunta**	**Puntos antes**
0	false	337	O coeficiente linear da reta perpendicular à reta de equação -x-3y+4=0 que intersecta o ponto (1,-2) está de acordo com o gráfico:	0.100
1	false	169	A representação correta dos pontos A(1,3), B(-2,-1), C(3,1), D(0,-3), E(-1,0) é:	0.100
3	false	233	A reta de equação x-2y+4=0 tem coeficiente linear igual a:	0.100
3	false	229	Em qual dos gráficos os pontos A(0,-2), B(-2,0), C(1,-1) e D(-3,1) estão colocados de maneira certa?	0.100
1	true	229	O gráfico que melhor representa as retas de equação 2x-y+1=0 e x-y-2=0 é:	0.100
0	false	0	O gráfico que representa a equação 2x + y + 1 = 0 é	0.143

Atrás

Fonte: Banco de dados do Sistema SIENA.

5) Banco de dados- para acompanhamento do desempenho dos alunos nos problemas geradores, pelo professor, permitindo que o mesmo retome conceitos, faça mediação de atividades consideradas difíceis na sua resolução foi desenvolvido um banco de dados para o Sistema de Estudos que permite identificar o problema gerador respondido pelos alunos, neste caso por cada dupla de alunos, bem como a resposta dada por eles, seja ela objetiva ou descritiva, informa se a resposta objetiva dada está correta ou não, além de apresentar um percentual do desempenho dos alunos com base nas resposta corretas, e o número de vezes que o aluno respondeu cada problema. Identifica também, a data e horário que aluno que o aluno entrou no sistema e respondeu os problemas. Foi solicitado que os mesmos desenvolvessem as resoluções em folhas de ofício com identificação tanto dos problemas geradores como das questões dos testes adaptativos para melhor acompanhamento e análise das habilidades matemáticas desenvolvidas e erros cometidos. As figuras 10 e 11 apresentam, respectivamente, os links de acesso do que permite identificar o banco de dados e o banco de respostas deste banco de dados do Sistema de Estudos.

Figura 10– Links do Banco de dados do Sistema de Estudos



Fonte: Sistema de Estudos do AVA.

Figura 11- Banco de dados do Sistema de Estudos.com as respostas dos alunos

Ordem	Data	Nome	Nodo	Pergunta	Resposta	Acerto
1	2014-06-09 09:48:11	e9302	1	1	C	Correto
2	2014-06-09 09:48:26	e9302	1	2	C	Correto
3	2014-06-09 09:48:36	e9302	1	3	B	Correto
4	2014-06-09 09:48:48	e9302	1	4	C	Correto
5	2014-06-09 09:49:04	e9302	1	5	B	Correto

Fonte: Sistema de Estudos do AVA.

Assim, considera-se, nesta pesquisa, que o AVA com o conteúdo de Geometria Analítica possui os seguintes recursos:

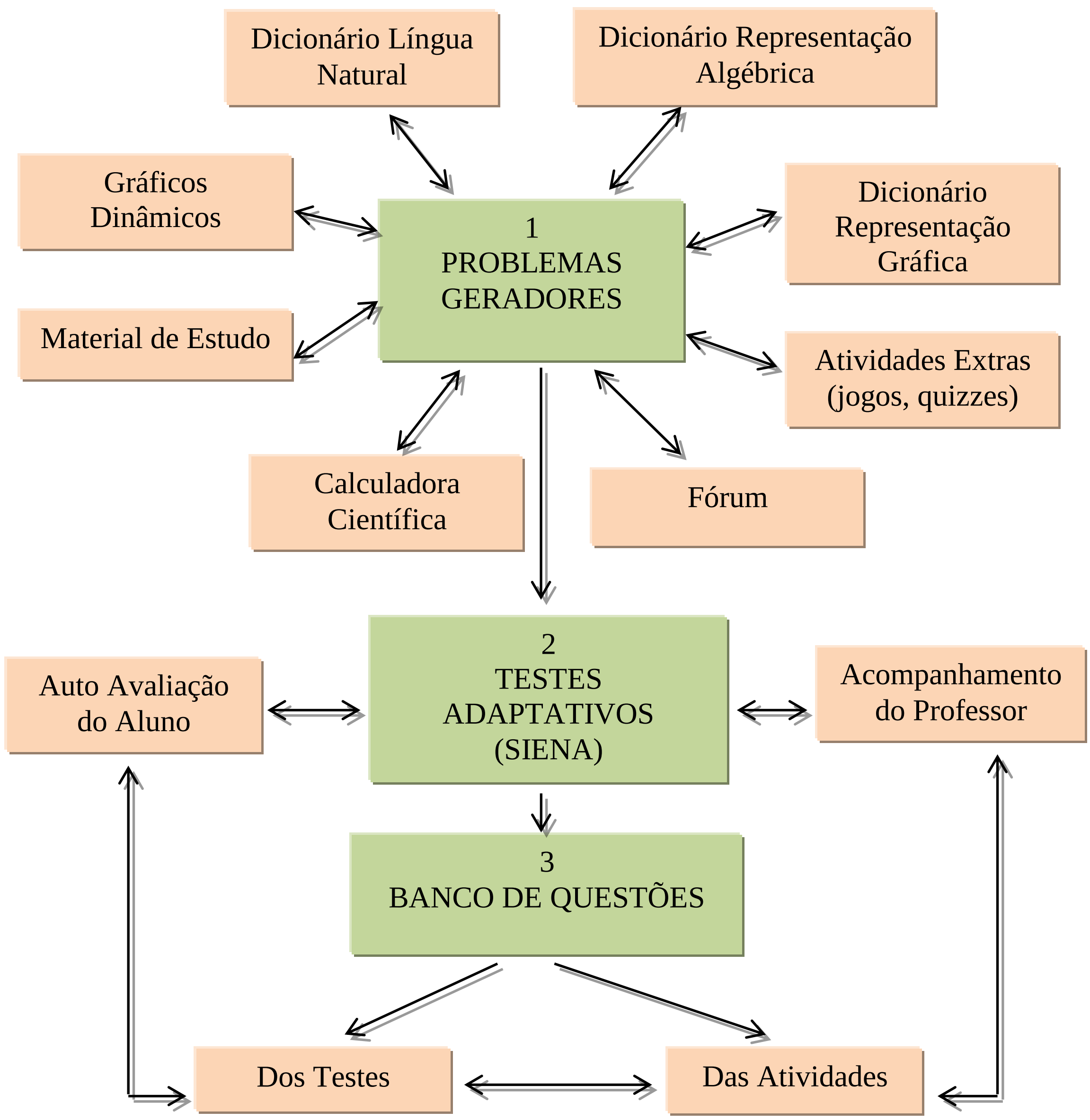
1) Recursos didáticos para o estudo do conteúdo com Ponto, Reta e Circunferência;

2) SIENA para os testes adaptativos;

3) Banco de dados para coleta de informações relativos ao acompanhamento dos estudos realizados.

A figura 12 apresenta um esquema culminando as ações didáticas no AVA desenvolvido que foram descritas.

Figura 12- Esquema com as ações didáticas no AVA desenvolvido



Fonte: A pesquisa.

Observa-se que o AVA permite o estudo independente, possibilitando o acesso em qualquer hora e lugar, sem que seja necessário que o professor realize a explicação dos conceitos estudados de Ponto, Reta e Circunferência.

O professor, em sala de aula, pode atuar como mediador do estudo dos estudantes resolvendo dúvidas, intervindo com questionamentos que levem à reflexão, auxiliando o estudante no seu aprender.

Salienta-se que a programação informática do Sistema de Estudos contou com a colaboração de um colega do programa de doutorado do PPGECIM da ULBRA. A seguir descreve-se o experimento realizado com um grupo de alunos do Ensino Médio no AVA desenvolvido.

2.6 O EXPERIMENTO NO ENSINO MÉDIO

Foi desenvolvido um experimento com o AVA construído, com duas turmas do terceiro ano do Ensino Médio (turma 301 e turma 302) de uma escola estadual do município de Canoas- RS. O total de alunos envolvidos foi de 64 alunos. A turma A foi dividida em 17 duplas e a turma B em 15 duplas, totalizando 32 duplas.

Foram utilizados para o desenvolvimento da experiência 18 *tablets* do PPGECIM/ULBRA e em algumas aulas o laboratório de informática da escola. A pesquisa foi realizada no período de junho a setembro de 2014 com estudos de 4 horas aula semanais para cada turma, totalizando 60 horas aula em cada turma. Salienta-se que o experimento foi realizado durante as aulas de Matemática, com a presença da professora titular da turma e da pesquisadora, e o AVA foi utilizado para o desenvolvimento dos conteúdos de Ponto, Reta e Circunferência.

Para a infraestrutura do experimento utilizou-se o laboratório de informática da escola e para utilização dos *tablets* foi necessário viabilizar uma conexão *wireless* para acesso à internet em uma sala de aula. Em algumas aulas, em que não foi possível a conexão com a internet nos *tablets* na sala de aula, utilizou-se o laboratório de informática da escola e os computadores do mesmo.

Para acesso ao SIENA e Sistema de Estudos cada dupla de estudantes foram previamente cadastrados nestes sistemas gerando um *login* e senha. Os *logins* das duplas foram utilizados para identificação das duplas na análise dos dados, assim identificados: d1301, d2301,..., d17301 para as duplas da turma 301 identificada como turma A e e1302, e2302,..., e15302 para as duplas da turma 302, identificada como turma B.

Os alunos acessaram o SIENA pelo site *http://siena.ulbra.br*, pelo navegador *Chrome*, com seu login e senha definidos para a cada dupla, e no SIENA foram direcionados ao Sistema de Estudos por meio de um *link* de acesso a este. Neste sistema, os alunos tinham como página principal as orientações de como desenvolver seus estudos na sequência didática eletrônica, implementada no mesmo, para cada conceito do grafo desenvolvido com os conteúdos da Geometria Analítica (Ponto, Reta e Circunferência). O grafo desenvolvido possui 7 conceitos envolvendo tais conteúdos.

As duplas iniciaram os estudos na sequência didática referente ao conceito do grafo denominado *Sistema Cartesiano Ortogonal*, no qual abordou-se a representação de pontos, quadrantes, distância entre dois pontos, Ponto médio de um segmento, pontos intermediários e condição de alinhamento de 3 pontos. Em cada conceito do grafo as duplas deviam responder os problemas geradores para o ensino e aprendizagem do conteúdo abordado no mesmo, e para isso foram disponibilizados os recursos didáticos conforme já apresentados na figura 8. Cada conceito do grafo possui em média 10 problemas geradores embasados na teoria dos Registros de Representação Semiótica, sendo que o sistema avançava automaticamente para o problema seguinte à medida que a dupla respondia corretamente cada problema. Caso encontrassem dificuldades acessavam os recursos disponíveis no Sistema de Estudos saná-las, e em muitos momentos a professora e a pesquisadora eram chamadas para solucionar dúvidas na resolução dos problemas geradores.

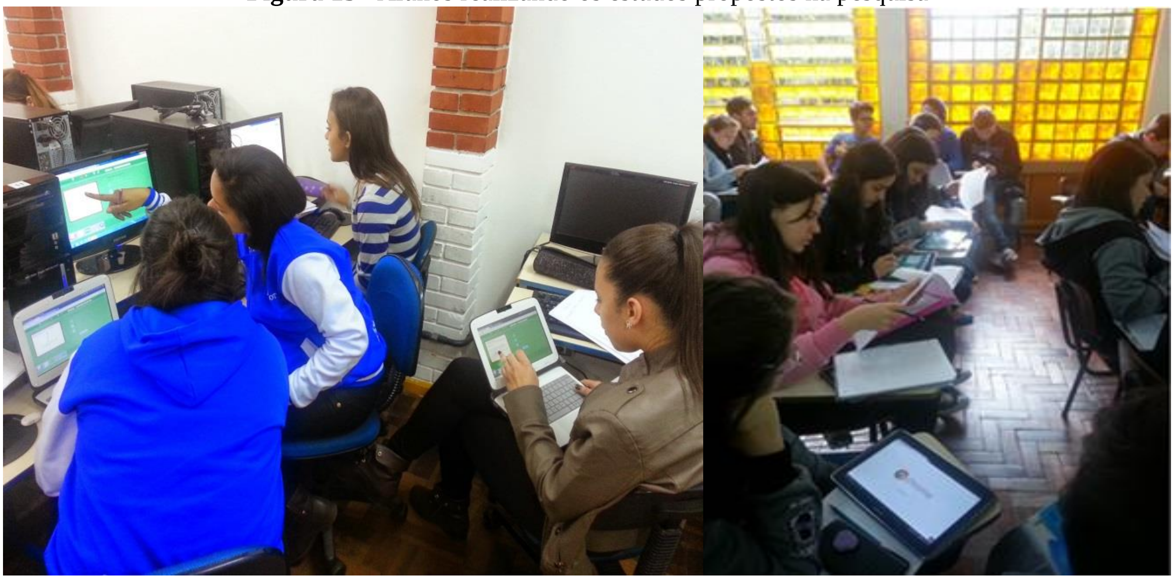
Ao término do estudo de cada conceito o aluno retornava ao Sistema SIENA para realizar os testes adaptativos do mesmo, e se a dupla tivesse um desempenho igual ou superior a média 0,6 no intervalo de 0 a 1, o SIENA abria o próximo conceito do grafo para realização do teste adaptativo, Assim, o aluno realizava os estudos deste conceito no Sistema de Estudos e novamente retornava ao SIENA para realizar o teste adaptativo.

Caso a dupla de alunos não obtivesse a média 0,6 no teste de cada conceito, o SIENA abria um link denominado recuperação de conteúdos, para os alunos retornarem ao Sistema de Estudos e estudarem novamente o conceito em que não atingiram a média para após refazerem o teste.

Para cada teste no SIENA são lançadas questões com um nível de dificuldade conforme a resposta dada pelo aluno na pergunta anterior, ou seja, se o aluno acerta a questão o sistema aumenta o nível de dificuldade da próxima questão , caso contrário ele lança outra questão com o mesmo nível de dificuldade ou com um nível menor de dificuldade. Estes níveis de dificuldade para as questões dos testes adaptativos estão explicados no capítulo quatro no item Banco de Questões. No Apêndice B encontram-se todas as questões desenvolvidas e cadastradas no SIENA para a realização deste experimento.

Cada dupla de alunos foi, então, realizando seus estudos segundo seus resultados obtidos nos testes adaptativos. A figura 13 apresenta alguns alunos realizando os estudos conforme proposto no experimento. A autorização para divulgação de imagens dos estudantes encontra-se no Apêncice C que foi assinado pelo responsável do aluno.

Figura 13– Alunos realizando os estudos propostos na pesquisa



Fonte: A pesquisa

Para construção do perfil dos estudantes participantes do experimento foi um aplicado um questionário que encontra-se no Apêndice D.

Durante as aulas com este experimento a professora pesquisadora acompanhou os alunos como mediadora do processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos Geometria Analítica (Ponto, Reta e Circunferência), sendo acompanhada pela professora titular da turma. Salienta-se que os resultados dos testes adaptativos e dos problemas geradores serviram para compor a avaliação do trimestre, em Matemática, da temática Geometria Analítica.

3 PRESSUPOSTOS TEÓRICOS

Para o desenvolvimento desta pesquisa a fundamentação teórica centrou-se no estudo do currículo de Matemática do Ensino Médio, em especial no que trata da Geometria Analítica, para analisar o que é ensinado em Geometria Analítica no atual sistema de Ensino Médio, quando é ensinado, como é ensinado, e o que, como e quando é avaliado, além de dar subsídios para o desenvolvimento da proposta metodológica para o ensino e aprendizagem da Geometria Analítica e para a análise das produções dos alunos. Centrou-se, também, na teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, a qual foi a base para o desenvolvimento desta proposta metodológica e para a análise de dados.

E, ainda, considerou-se como fundamentação teórica algumas das principais tendências metodológicas para o ensino da Matemática no Brasil, como Tecnologias da Informação e Comunicação, Resolução de Problemas, Jogos e curiosidades, Modelagem Matemática e História da Matemática, pois o estudo destas tendências articulado à teoria dos Registros de Representação Semiótica foram necessárias para o desenvolvimento da sequência didática eletrônica.

3.1 A GEOMETRIA ANALÍTICA INSERIDA NO CURRÍCULO DE MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO SEGUNDO AS POLÍTICAS PÚBLICAS

Segundo Coll (1997), para precisar o que é currículo deve-se interrogar sobre as funções que ele deve desempenhar. A primeira é a de explicitar o projeto – as intenções e o plano de ação – que preside as atividades educativas escolares. Para o autor, enquanto projeto o currículo é um guia para os encarregados de seu desenvolvimento, um instrumento para orientar a prática pedagógica do professor e deve levar em conta as condições reais nas quais o projeto vai ser realizado, situando-se entre as intenções, princípios e orientações gerais e a prática pedagógica.

O currículo, para Coll (1997), é composto de quatro elementos: o que ensinar (conteúdos e objetivos), quando ensinar (a maneira de ordenar e dar sequência aos conteúdos e objetivos), como ensinar (a maneira de estruturar as atividades de ensino e aprendizagem a fim de atingir os objetivos propostos em relação aos conteúdos selecionados) e sobre que, como e quando avaliar (a avaliação é um elemento indispensável que assegura se ação pedagógica responde adequadamente às mesmas e introduzas correções oportunas em caso contrário).

Assim, o autor preconiza que os quatro componentes do currículo estão relacionados entre si e se condicionam mutuamente, pois tratam de diferentes aspectos de um mesmo projeto: o primeiro explica as intenções e os três restantes referem-se mais ao plano de ação a ser seguido de acordo com elas, sendo que um dos problemas relacionados à sua elaboração reside em decidir como concretizar esses diferentes elementos.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), (BRASIL, 2000), partindo dos princípios definidos Lei de Diretrizes e Bases (LDB), (BRASIL, 1996), chegou a um novo perfil para o currículo apoiado em competências básicas para a inserção de nossos jovens na vida adulta, buscando dar significado ao conhecimento escolar, mediante a contextualização; evitar a compartimentalização, mediante a interdisciplinaridade; incentivar o raciocínio e a capacidade de aprender. Estes Parâmetros cumprem o duplo papel de difundir os princípios da reforma curricular e orientar o professor, na busca de novas abordagens e metodologias.

O desenvolvimento de habilidades e o estímulo ao surgimento de novas aptidões, segundo os PCNEM (BRASIL, 2000), tornam-se processos essenciais, na medida em que criam as condições necessárias para o enfrentamento das novas situações que se colocam. Afirmam que, privilegiar a aplicação da teoria na prática e enriquecer a vivência da ciência na tecnologia e destas no social passa a ter uma significação especial no desenvolvimento da sociedade contemporânea.

A LDB, (BRASIL, 1996), ao destacar as diretrizes curriculares específicas para o Ensino Médio indicam que uma base curricular nacional organizada por áreas de conhecimento não implica a desconsideração ou o esvaziamento dos conteúdos, mas a seleção e integração dos que são válidos para o desenvolvimento pessoal e para o incremento da participação social. Essa concepção curricular, segundo a lei, não elimina o ensino de conteúdos específicos, mas considera que os mesmos devem fazer parte de um processo global com várias dimensões articuladas. Assim, a reforma curricular do Ensino Médio estabelece a divisão do conhecimento escolar em três áreas, uma vez que entende os conhecimentos cada vez mais imbricados aos conhecedores, seja no campo técnico-científico, seja no âmbito do cotidiano da vida social.

O estudo da Matemática e suas Tecnologias, de acordo com os PCNEM (BRASIL, 2000), levam em conta que a Matemática é uma linguagem que busca dar conta de aspectos do real e que é instrumento formal de expressão e comunicação para diversas ciências. Salientando que, é importante considerar que as ciências, assim como as tecnologias, são construções humanas situadas historicamente e que os objetos de estudo por elas construídos e os discursos por elas elaborados não se confundem com o mundo físico e natural. Compreende que, apesar de o mundo ser o mesmo, os objetos de estudo são diferentes, enquanto constructos do conhecimento gerado pelas ciências através de leis próprias, as quais devem ser apropriadas e situadas em uma gramática interna a cada ciência.

Esta afirmação vai ao encontro ao que afirma Duval (2004), sobre os objetos matemáticos serem abstratos e não perceptíveis sem o uso de um sistema de representação que os permite designar e estabelecer uma comunicação entre os sujeitos e as atividades cognitivas do pensamento matemático, levando em conta as exigências científicas próprias dos conteúdos matemáticos e o funcionamento cognitivo do pensamento humano.

Em relação à tecnologia na educação contemporânea do jovem, os PCNEM (BRASIL, 2000) afirma que esta deverá ser contemplada também como processo, ou seja, não se trata apenas de apreciar ou dar significado ao uso da tecnologia, mas de conectar os inúmeros conhecimentos com suas aplicações tecnológicas, recurso que só pode ser bem explorado em cada nucleação de conteúdos.

Dessa maneira, segundo os PCNEM (BRASIL, 2000) a presença da tecnologia no Ensino Médio remete diretamente às atividades relacionadas à aplicação dos conhecimentos e habilidades constituídos ao longo da Educação Básica, dando expressão concreta à preparação básica para o trabalho prevista na LDB.

No Rio Grande do Sul desde 2011 foi instituído o Ensino Médio Politécnico, o qual tem em sua concepção a base na dimensão politécnica, constituindo-se no aprofundamento da articulação das áreas de conhecimento e suas tecnologias, com os eixos Cultura, Ciência, Tecnologia e Trabalho, na perspectiva de que a apropriação e a construção de conhecimento embasam e promovem a interseção social da cidadania (RIO GRANDE DO SUL, 2011).

Do ponto de vista da organização curricular, a Proposta Pedagógica para o Ensino Médio (RIO GRANDE DO SUL, 2011), afirma que a politecnia supõe novas formas de seleção e organização dos conceitos a partir da prática social, contemplando o diálogo entre as áreas de conhecimento, supõe a primazia da qualidade da relação com o conhecimento com o protagonismo do aluno sobre a quantidade de conteúdos apropriados de forma mecânica, supõe a primazia do significado social do conhecimento sobre os critérios formais inerentes à lógica disciplinar.

Este Ensino Politécnico está dividido em dois blocos, a formação geral e a parte diversificada e distribuído em quatro áreas, sendo uma delas a Matemática e suas Tecnologias. Assim, a formação geral requer, segundo os Proposta Pedagógica para o Ensino Médio (RIO

GRANDE DO SUL, 2011), um trabalho interdisciplinar com as áreas do conhecimento com o objetivo de articular o conhecimento universal sistematizado e contextualizado com as novas tecnologias, com vista à apropriação e integração com o mundo do trabalho. Já na parte diversificada, o autor, menciona que deve abranger a parte humana, tecnológica, e politécnica, articulando as áreas do conhecimento, a partir de experiências e vivências, com o mundo do trabalho. Sendo que a articulação entre esses blocos ocorre por meio de projetos construídos nos seminários integrados que será interlocutor entre as áreas do conhecimento.

A Matemática no Ensino Médio, para os PCNEM, (BRASIL, 2000), tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas. Em seu papel formativo, segundo o autor, a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais.

As finalidades da Matemática, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, (BRASIL, 2000), objetivam o aluno a: compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral; aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas; analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade; desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo; utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos; expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática; estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo; reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações; promover a realização pessoal mediante o sentimento de segurança em relação às suas capacidades matemáticas, o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação.

Nota-se, também, que os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, PCN+, (BRASIL, 2002), as Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 2006) e na Matriz do Exame Nacional do Ensino Médio, ENEM, (BRASIL, 2009), que os conteúdos em grandes grupos, sendo um deles os conhecimentos relacionados à geometria, e espera-se que o aluno seja capaz de desenvolver competências relacionadas a representação e comunicação, investigação e compreensão, bem como a contextualização das ciências no âmbito sociocultural.

Desta forma, os PCN+, (BRASIL, 2002) ao tratarem dos temas estruturados do currículo de Matemática do Ensino Médio com base nas finalidades do Ensino da Matemática abordadas nos PCNEM, (BRASIL, 2000), abordam a Geometria Analítica como uma unidade que "tem como função tratar algebricamente as propriedades e os elementos geométricos. O aluno do ensino médio terá a oportunidade de conhecer essa forma de pensar que transforma problemas geométricos na resolução de equações, sistemas ou inequações (BRASIL, 2002, p.121).

De acordo com os PCN+ (BRASIL, 2002), o aluno deve perceber que um mesmo problema pode então ser abordado com diferentes instrumentos matemáticos de acordo com suas características. Por exemplo, a construção de uma Reta que passe por um onto dado e seja paralela a uma Reta dada pode ser obtida de diferentes maneiras. Se o onto e a Reta estão desenhados em papel, a solução pode ser feita por meio de uma construção geométrica, usando-se instrumentos. No entanto, afirma que se o Ponto e a Reta são dados por suas coordenadas e equações, o mesmo problema possui uma solução algébrica, mas que pode ser representada graficamente.

Os PCN+ (BRASIL, 2002), destacam que mais importante do que a memorização de diferentes equações para um mesmo ente geométrico, é necessário investir para garantir a compreensão do que a Geometria Analítica propõe. Para isso, aponta que o trabalho com este tema pode ser centrado em estabelecer a correspondência entre as funções de 1º e 2º graus e seus gráficos e a resolução de problemas que exigem o estudo da posição relativa de pontos, retas, circunferências e parábolas.

Além disso, conforme os PCN+ (BRASIL, 2002), será oportunizado ao aluno conhecer uma forma de pensar em Matemática, entender o mundo do século XVII, que deu origem ao cartesianismo, pode ser uma excelente oportunidade para que o aluno perceba o desenvolvimento histórico do conhecimento e como certos momentos dessa história transformaram a ciência e a forma de viver da humanidade.

Referente ao ensino e aprendizagem da Geometria Analítica, as Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio caracterizam este conteúdo como:

> a) o estudo das propriedades geométricas de uma figura com base em uma equação (nesse caso, são as figuras geométricas que estão sob o olhar da álgebra);
> b) o estudo dos pares ordenados de números (x, y) que são soluções de uma equação, por meio das propriedades de uma figura geométrica (nesse caso, é a álgebra que está sob o olhar da geometria). Esses dois aspectos merecem ser trabalhados na escola.
> O trabalho com a Geometria Analítica permite a articulação entre geometria e álgebra. Para que essa articulação seja significativa para o aluno, o professor deve trabalhar as duas vias: o entendimento de figuras geométricas, via equações, e o entendimento de equações, via figuras geométricas. [...] Entendido o significado de uma equação, deve iniciar o estudo das equações da Reta e do círculo. Essas equações devem ser deduzidas e não simplesmente apresentada aos alunos, para que então, se tornem significativas, em especial quanto ao sentido geométrico de seus parâmetros (BRASIL, 2006, p. 77).

Assim, entende-se que é importante que o professor explore a Geometria Analítica por meio da exposição de equações e figuras geométricas fazendo a articulação entre estes dois registros semióticos, evitando a memorização e potencializando o significado das equações ao no sentido geométrico.

Uma vez definido o sistema de coordenadas cartesiano, é importante trabalhar com os alunos o significado de uma equação. Por exemplo: fazê-los entender que a equação $x = 3$ corresponde a uma Reta paralela ao eixo y ou que qualquer Ponto que tenha segunda coordenada negativa não pode estar na curva $y = x^2$. O entendimento do significado de uma equação e de seu conjunto de soluções não é imediato, e isso é natural, pois esse significado não é explícito quando simplesmente se escreve uma equação (BRASIL, 2006, p. 67).

Segundo as orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 2006), é importante que aluno compreenda o significado das equações da Reta e Circunferência, principalmente no que se refere ao sentido geométrico de seus parâmetros, estabelecendo relações entre os coeficientes de pares de retas paralelas ou perpendiculares, ou seja, distinguir os sistemas de equações. Ainda sob o ponto de vista algébrico, o documento orienta que o professor explore a interpretação das posições relativas de retas e círculos com um enfoque algébrico.

As Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, (BRASIL, 2006), destacam também a importância de ser trabalhado o conceito de vetor na Geometria Analítica, pois entende que é um conceito matemático importante abordado nas aulas de Física no Ensino Médio. O documento orienta abordar este conceito sob os enfoques geométrico e algébricos para que o aluno interprete o significado de uma coleção de segmentos orientados com o mesmo comprimento, direção e sentido e suas características segundo suas coordenadas.

É preconizado neste documento, explorar os sistemas de equações *2* x *2* com duas variáveis analisando o significado correspondente ao seu sentido geométrico, integrando o estudo da posição relativa de duas retas no plano, enfatizando a análise dos casos de intersecção de retas coincidentes, paralelas associando seus significados algébricos com geométricos. Afirma, também ser necessária a resolução de sistema *2* x *3* e *3* x *3* pelo processo de escalonamento, discutindo as diferentes condições das soluções do sistema.

As Orientações Curriculares Nacionais, (BRASIL, 2006), manifestam a importância da utilização de softwares matemáticos para exploração e construção de diferentes conceitos matemáticos. No caso da geometria, cita a existência de softwares que permitem a construção de retas paralelas e perpendiculares, pontos, mediatrizes, bissetrizes, possibilitando estabelecer e identificar as características próprias destes objetos matemáticos, por meio das diversas representações que estes programas possibilitam explorar.

É mencionado ainda, neste documento, a possibilidade de estabelecer relações com o conteúdo de funções, equações e desigualdades da Geometria Analítica com o auxílio destes softwares, pois permitem explorar as representações algébricas e gráficas de um objeto simultaneamente. Assim, é possível que o professor explore com os alunos a correspondência das unidades significantes entre estas representações do objeto contribuindo para que entendam e apreendam os conceitos matemáticos envolvidos.

As Matrizes de Referência do Sistema de Avaliação da Educação Básica, SAEB, (BRASIL, 2008) que norteiam os testes de Matemática do Saeb no Ensino Fundamental e Médio apontam descritores que indicam habilidades que devem ter sido desenvolvidas nessas fases do ensino e que serão avaliadas por meio de situações problemas. No tema espaço e forma encontra-se relacionado o conteúdo de Geometria Analítica, e pode-se destaca os seguintes descritores como habilidades a serem verificadas se o aluno as desenvolveu ou não ao estudar este conteúdo: identificar a localização de pontos no plano cartesiano (descritor 6), interpretar geometricamente os coeficientes de uma equação da Reta (descritor 7), identificar a equação de uma Reta a partir de dois pontos dados ou de um Ponto e sua inclinação (descritor 8), relacionar a determinação do Ponto de intersecção de duas ou mais retas com a resolução de uma sistema de equações com duas incógnitas (descritor 9), reconhecer, dentre as equações do segundo grau com duas incógnitas, as que representam circunferências (descritor 10) (BRASIL, 2008).

A referida matriz do SAEB, (BRASIL, 2008) aponta algumas sugestões que podem ser trabalhadas a fim de melhor desenvolver tais habilidades. Referente ao descritor 6 sugere enfatizar a ordem e o significado dos valores negativos e positivos das coordenadas cartesianas de um Ponto montando um grande plano cartesiano para os alunos localizarem ou marcarem pontos. O professor deve fazer a analogia entre coordenadas cartesianas e coordenadas no campo da geografia (latitude e longitude), e se possível usar um GPS para determinar posições de pontos na própria escola. No descritor 7 sugere trabalhar uma série de aplicações práticas, como por exemplo, utilizando-se da física para discutir o significado da inclinação da Reta em um gráfico de movimento uniforme variado, e na economia, utilizar a relação de demanda de preço. Com relação ao descritor 8 é sugerido trabalhar fortemente a representação geométrica do coeficiente angular da Reta, e de maneira complementar, trabalhar problemas que envolvam a resolução de sistemas de duas equações.

A Matriz Curricular do SAEB (BRASIL, 2008), no que que diz respeito ao descritor 9, atenta que é necessário fixar o conceito de que a solução de um sistema de equações de primeiro grau pode ser expressa por um par ordenado, sendo que esse par representa um Ponto no sistema cartesiano. Destaca que a intersecção de duas retas corresponde a um par ordenado que indica a solução do sistema de equações e a partir de noções simples da Geometria Analítica é possível o aluno determinar o Ponto de intersecção de duas retas. E, ainda, com relação ao descritor 10, a matriz do SAEB (BRASIL, 2008) aponta que uma alternativa para desenvolver a habilidade ligada a este descritor é apresentar aos alunos o desenvolvimento da equação da Circunferência a partir do teorema de Pitágoras, pois assim, a equação ficará mais compreensível ao aluno.

Os Referenciais Curriculares do Rio Grande do Sul (RIO GRANDE DO SUL, 2009) abordam a Geometria Analítica no terceiro ano do Ensino Médio a qual ser apresentada por meio de seus aspectos histórico que estabelecem a importância da descoberta da relação da geometria com a álgebra, e da localização de pontos em mapas. Destacam que é importante que o aluno entenda a relação entre os conceitos algébricos e geométricos para a compreensão em Matemática e também para a aplicação em outras áreas do conhecimento (RIO GRANDE DO SUL, 2009).

Para o desenvolvimento do conteúdo de Geometria Analítica os Referenciais Curriculares do Rio Grande do Sul (RIO GRANDE DO SUL, 2009), sugerem iniciar por uma situação prática de localização de pontos. A seguir, abordam um texto histórico que cita o livro *Discurso do Método* de Descartes, do século XVII, dando atenção em particular para o capítulo intitulado *La Géometrie* no qual Descartes apresentou um método racional de unificação da geometria e da álgebra que recebeu o nome de Geometria Analítica e que traduz pontos, retas e construções geométricas em igualdades algébricas. O texto também destaca a importância de Pierre de Fermat para o desenvolvimento da Geometria Analítica. É proposto que o professor discuta o conteúdo deste texto com os alunos, bem como o significado do termo Geometria Analítica.

Este documento preconiza que as atividades iniciais deste conteúdo sejam exploradas através do conhecimento prévio dos alunos, algebrizando seus conhecimentos geométricos. Devem ser considerados os pontos em pares ordenados, representar figuras geométricas, calcular seus lados, seus perímetros e áreas, suas diagonais e altura a partir do cálculo da distância entre dois pontos, e Ponto médio de um segmento.

Com relação ao estudo da Reta os Referenciais Curriculares do Rio Grande do Sul, (RIO GRANDE DO SUL, 2009), afirmam que os alunos, para determinar sua equação, devem entender que a relação entre as coordenadas *x* e *y*, refere-se ao fato de que todos os segmentos nela contidos têm a mesma inclinação que pode ser associada à representação de grandezas diretamente proporcionais. Neste documento é considerado importante, que o professor contemple a representação algébrica da Reta na sua forma geral e reduzida explorando tanto retas paralelas aos eixos coordenados e as retas inclinadas em relação aos eixos, identificando a inclinação como sendo $\boldsymbol{m = -\frac{a}{b}}$, enfatizando o cálculo do coeficiente angular, a partir de dois pontos e uma Reta.

O documento aponta, também, que deve ser feito um estudo sobre as posições relativas entre duas retas ou mais, enfatizando o ângulo que há entre duas retas concorrentes e a distância entre duas retas paralelas. Destaca-se que este documento não propõe a exploração das posições relativas entre duas retas por meio da resolução de sistemas como sugerem as Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 2006).

No caso da Circunferência, os Referenciais Curriculares do Rio Grande do Sul, (RIO GRANDE DO SUL, 2009), sugerem que seja apresentada a sua equação, a partir de sua definição, com centro na origem do sistema de coordenadas. E de acordo com o tempo disponível, o professor irá decidir sobre a apresentação da equação da Circunferência de centro $C(a,b)$ e raio r: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ ou $x^2 + y^2 -2ax - 2ay + a^2 + b^2 - r^2 = 0$, atentando para o fato de que a distância de um Ponto qualquer $P(x,y)$ que se movimenta sobre a Circunferência $C(a,b)$ e será sempre igual à medida do raio. Isso possibilita que a equação da Circunferência seja deduzida a partir da fórmula da distância entre dois pontos *P* e *C*: $\sqrt{(x-a)+(y-b)} = r^2$.

Por fim, o documento recomenda que seja instigado o aluno a resolver situações-problema que envolvam a equação da Reta e da Circunferência.

3.2 OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA E O ENSINO E APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

A evolução dos conhecimentos, conforme Duval (2004), segue a criação e o desenvolvimento de sistemas semióticos novos e específicos que coexistem com a língua natural. Ressalta que o pensamento científico não pode ser separado do desenvolvimento de simbolismos específicos para representar objetos e suas relações, uma vez que o conhecimento só pode ser mobilizado por meio de uma representação.

> Não é possível estudar os fenômenos relativos ao conhecimento sem recorrer a noção de representação. Após Descartes e Kant, a representação tem sido o centro de toda a reflexão que se preocupe com as questões que tem a ver com a possibilidade e a constituição de um certo conhecimento (DUVAL, 2004, p.25).

No âmbito do ensino e aprendizagem da Matemática, Duval (2004) preceitua que para se adquirir conhecimentos matemáticos é preciso entender a Semiótica, entender a linguagem matemática, pois uma das suas principais características é a diversidade de registros de representação semiótica. O autor entende que a aprendizagem da Matemática constitui uma área de estudo privilegiado para as análises de atividades cognitivas fundamentais para o desenvolvimento cognitivo do aluno, como a conceitualização, o raciocínio, a resolução de problemas e compreensão de textos, sendo que estas atividades cognitivas requerem a utilização de sistemas de representação diferentes da linguagem natural ou imagens: sistemas variados de escrituras para os números, notações simbólicas para os objetos, escrituras algébrica e lógica que contenham o estatuto de línguas paralelas à linguagem natural para exprimir as relações e as operações, figuras geométricas, representações em perspectiva, gráficos cartesianos, redes, diagramas, esquemas, etc.

Na teoria de Raymond Duval sobre Registros de Representações Semióticas, ele define representações semióticas como “produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação, os quais têm suas dificuldades próprias de significado e de funcionamento.” (DUVAL, 1993, p.39). Esta teoria tem se mostrado, de acordo com Machado (2003), um importante instrumento de pesquisas concernentes à aquisição de conhecimentos matemáticos e à organização de situações de aprendizagem desses conhecimentos.

Duval (1995), explica que as representações semióticas têm um papel fundamental específico,

> elas são relativas a um sistema particular de signos, linguagem natural, língua formal, escrita algébrica ou gráficos cartesianos, figuras, de um objeto matemático [...]. De onde a diversidade de representações para um mesmo objeto representado ou ainda a dualidade das representações semióticas: forma (o representante) e conteúdo (o representado) (DUVAL 1995, p. 3).

As representações semióticas são externas e conscientes, tendo a função de objetivação, expressão e tratamento intencional, o qual, para Duval (2004), é um tratamento que dirige-se exclusivamente ao que o sujeito vê ou observa de um objeto de maneira quase instantânea, e só podem ser efetuados um depois do outro, aumentando o seu tempo de reação conforme aumenta o número de informações a se levar em conta. Ele segue afirmando que, estes tratamentos são fundamentais para as atividades cognitivas, mas sua capacidade é limitada e não extensiva em todos os sujeitos, independente do nível de conhecimento destes.

Assim, para o autor, as representações semióticas possibilitam ver um objeto através da percepção de estímulos (pontos, traços, caracteres, sons, etc.), evidenciando que existem uma grande variedade de representações semióticas como, figuras, esquemas, gráficos, expressões simbólicas, expressões linguísticas, entre outras, e podem ser classificadas em representações analógicas, as quais são as imagens como, fotografias, caricaturas, esboços, gráficos cartesianos, esquemas, figuras geométricas, etc.; e em representações não-analógicas como, as línguas, enunciados, listas, fórmulas, tabelas, etc. Ele comenta ainda, que o interesse em se fazer estas distinções está em chamar a atenção para a diversidade e a heterogeneidade destes registros de representação.

Para que haja a aquisição conceitual de um objeto e a compreensão em Matemática Duval (2004), enfatiza a importância de distinguir o objeto da sua representação. “Os objetos matemáticos são os números, as funções, as retas, etc, e as representações são as escritas decimais ou fracionárias, os símbolos, os gráficos, os traçados das figuras...”(DUVAL, 2004, p.14), sendo que um mesmo objeto pode ter representações diferentes.

Soares e Nehring (2006, p. 7), afirmam que:

> a medida que a Matemática passa a diversificar os registros de representação, sua aprendizagem específica contribui, fortemente, para o desenvolvimento das capacidades cognitivas globais dos sujeitos, possibilitando esses compreenderem e interpretarem a realidade na qual estão inseridos, serem cidadãos num tempo de mudanças intensas.

Moretti (2002, p. 344), menciona que a Matemática “guarda uma forte dependência da formas de representações e da manipulação de seus objetos.” Em acordo, Damm (2002), diz que na Matemática, toda a comunicação estabelecida é com base em representações, os objetos estudados são conceitos, propriedades, estruturas, relações que podem expressar diferentes situações, e por isso para ensinar tais objetos é preciso considerar as diferentes formas de representação de um mesmo objeto matemático.

De acordo com Duval (2004, p. 43), “a formação de uma representação semiótica é o recurso a um signo para atualizar a visão de um objeto ou substituir a visão desse objeto”, e D’Amore (2005), complementa, afirmando que o conhecimento é a intervenção e a utilização dos signos, assim, para ele, na aprendizagem da Matemática os alunos são introduzidos em mundo novo, conceitual e simbólico, sobretudo representativo.

Para Duval (2003, p. 13) “é suficiente observar a história do desenvolvimento da Matemática para ver que o desenvolvimento das representações semióticas foi uma condição essencial para a evolução do pensamento matemático.”

Porém, compreender e apreender conceitos matemáticos não tem sido tarefa fácil para a maioria dos alunos, pois estes, segundo Duval (2003), têm apresentado dificuldades muitas vezes insuperáveis na busca pelo saber matemático. Diante de um mundo globalizado e, ainda de acordo com o autor, com a recente exigência de uma maior formação Matemática inicial para todos os alunos, questões sobre como compreender essas dificuldades dos alunos, qual a sua natureza e onde elas se encontram, passaram a ter uma maior importância no objetivo de prepará-los para enfrentar um mundo cada vez mais informatizado e tecnológico e cada vez mais complexo como o que estamos vivendo.

Na busca por respostas a estas questões Duval (2003), diz que não se pode restringir ao campo matemático ou à sua história, é preciso uma abordagem cognitiva, já que o ensino da matemática, em formação inicial, objetiva não formar futuros matemáticos, nem ensinar aos alunos instrumentos que mais tarde lhes possam ser úteis, mas sim contribuir para o desenvolvimento geral de suas capacidades de raciocínio, de análise e de visualização.

Para Machado (2003, p. 8) “a maneira Matemática de raciocinar e de visualizar está intrinsecamente ligada à utilização das representações semióticas [...]”, e esta abordagem cognitiva, de acordo com Duval (2003, p. 12), “está em procurar inicialmente descrever o funcionamento cognitivo que possibilite a um aluno compreender, efetuar e controlar ele próprio a diversidade dos processos matemáticos que lhe são propostos em situação de ensino”.

A atividade Matemática para Duval (2003, p. 24) “ressalta fenômenos complexos, pois é necessário ao mesmo tempo levar em conta as exigências cientificas próprias dos conteúdos matemáticos e o funcionamento cognitivo do pensamento humano”. Assim, ele afirma que a atividade Matemática deve ser estudada no que ela tem de específico, ou seja, no que ela tem de diferente do trabalho de outras áreas da ciência, como no trabalho de um botânico ou de um geólogo no terreno, ou de um físico no seu laboratório. Esta diferença, segundo o autor, está na atividade cognitiva que requer a Matemática em relação a que requerem outras áreas da ciência, a qual não se baseia em conceitos, mas na importância e variedade das representações semióticas utilizadas em Matemática.

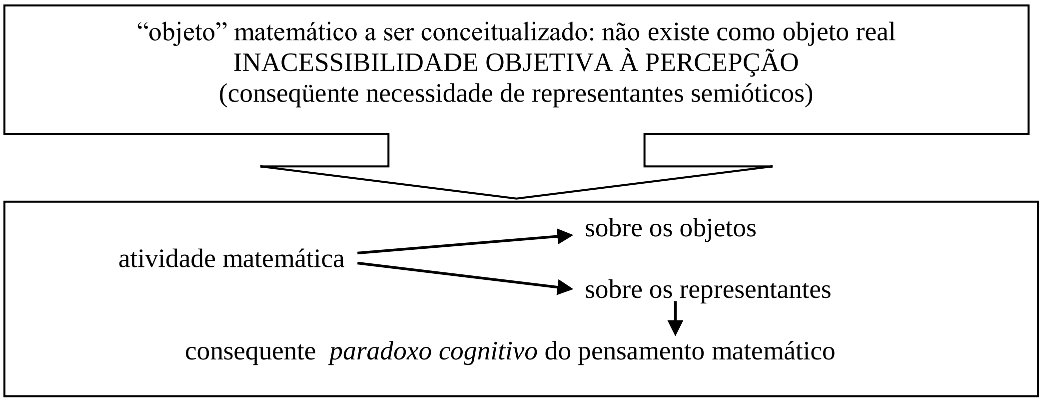
Os objetos matemáticos, segundo Duval (2003), a começar pelos números, "não são objetos diretamente perceptíveis ou observáveis com a ajuda de instrumentos. O acesso aos números, está ligado à utilização de um sistema de representação que os permite designar." Em palavras semelhantes, Damm (2002), salienta que a matemática trabalha com objetos abstratos, ou seja, não são objetos diretamente perceptíveis ou observáveis, necessitando para sua apreensão o uso de representações através de símbolos, signos, códigos, tabelas, gráficos, algoritmos, desenhos, pois permitem a comunicação entre os sujeitos e as atividades cognitivas do pensamento matemático.

No entanto, ela salienta que, para a compreensão da Matemática é fundamental que o aluno faça a distinção entre o objeto matemático e sua representação. Para Duval (2009) toda confusão entre o objeto e sua representação provoca, com o decorrer do tempo, uma perda de compreensão. Neste sentido, em relação à Geometria Analítica, conteúdo ao qual se refere esta pesquisa, e o uso dos Registros de Representação Semiótica, Silva (2006, p.24) comenta que:

> Na aprendizagem da matemática verificamos a dificuldade de nossos alunos para compreender a diferença entre objeto matemático e sua representação. É muito importante para a aquisição do conhecimento matemático que esta distinção seja estabelecida, e neste sentido, a teoria das representações semióticas auxilia de maneira decisiva, em particular, no que se refere às diversas representações de pontos, retas e curvas no plano.

D'Amore (2005) destaca o paradoxo de Duval (1993), que consiste na impossibilidade do acesso direto aos objetos matemáticos, a não ser por meio de representação semiótica, o que torna inevitável a confusão entre estes objetos e suas representações semióticas, e apresenta sua interpretação deste paradoxo através do seguinte esquema como mostra, a seguir, a figura 14.

Figura 14- Esquema do paradoxo cognitivo do pensamento matemático



Fonte: D'AMORE (2005, p. 51).

D'Amore (2005) chama a atenção para o que acontece com a aprendizagem nesta fase, na qual o professor antes do aluno deve saber distinguir o objeto da sua representação para entender que neste momento, o aluno estará apenas aprendendo a utilizar signos e não aprendendo os conceitos ou os objetos que eles significam.

> Nesta fase "paradoxal" da aprendizagem é preciso prestar muita atenção; de um lado, o estudante não sabe que está aprendendo signos que estão no lugar de conceitos e que deveria estar aprendendo conceitos; de outro lado, se o professor nunca refletiu sobre o assunto, acreditará que o estudante está aprendendo conceitos, enquanto ele está, na realidade "aprendendo" apenas a utilizar signos (D'AMORE, 2005, p. 52).

Sobre a aquisição conceitual de um objeto matemático Duval (1993), afirma que esta se baseia em duas características fortes. A primeira está no uso de diversos Registros de Representação Semiótica ser típico do pensamento humano, e a segunda, está no fato da criação e o desenvolvimento de novos sistemas semióticos serem marcos históricos de progresso do conhecimento.

Para D'Amore (2005), estas características revelam a estreita interdependência entre *noesis* (aquisição conceitual de um objeto) e *semiosis* (representação realizada por meio de signos) e como se passa de uma para outra, assim, para o autor "não apenas não existe *noesis* sem *semiosis,* mas a *semiosis* é assumida como sendo uma característica necessária para garantir o primeiro passo na direção da *noesis*" (D'AMORE, 2005, p.60).

Segundo Duval (2009) a análise dos problemas e obstáculos enfrentados pelos alunos em relação à aprendizagem Matemática conduz a reconhecer uma lei fundamental do funcionamento cognitivo do pensamento: "não há *noésis* sem *semiósis,* quer dizer, não há *noésis* sem o recurso a uma pluralidade ao menos potencial de sistemas semióticos, recurso que implica sua coordenação para o próprio sujeito" (DUVAL, 2009, p. 18). Ainda, segundo o autor, a análise do desenvolvimento dos conhecimentos e a dos obstáculos encontrados nas representações fundamentais relativas ao raciocínio, à compreensão dos textos, à aquisição de tratamentos lógicos e matemáticos confrontam três fenômenos estreitamente ligados: o da diversificação dos registros de representação semiótica; o da diferenciação entre representante e representado ou ainda entre a forma e o conteúdo de uma representação semiótica; e o da coordenação entre os diferentes registros de representação semiótica disponíveis.

> O fenômeno importante para compreender o papel da *semiosis* no funcionamento do pensamento e no desenvolvimento dos conhecimentos, não é o emprego de um ou outro tipo de signo e sim a variedade dos tipos de signos que podem ser utilizados. A *semiosis* é inseparável de uma diversidade de tipos de signos disponíveis (DUVAL, 2004, p. 29).

Especificamente na Matemática, Duval (2004), afirma que ela permite uma grande variedade de representações: sistemas de numeração, figuras geométricas, escritas algébricas e formais, representações gráficas e língua natural. Assim, conforme Duval (2003, p.14) “a originalidade da atividade Matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo momento de registro de representação”. Em palavras semelhantes Damm (2002), menciona que é somente através da coordenação de vários registros de representação, pelo indivíduo que apreende, que será possível a apreensão conceitual dos objetos matemáticos.

Entretanto, D’Amore (2005) pontua que, quando Duval refere-se a Registro de Representação Semiótica ele faz referência a um sistema de signos que permite cumprir as funções de comunicação, tratamento e objetivação, como por exemplo, a numeração binária, ou a decimal, porém não faz referência às notações convencionais que não constituem um sistema, como por exemplo, as letras ou os símbolos utilizados para indicar as operações algébricas.

Mas como reconhecer um mesmo objeto matemático em representações diferentes?

De acordo com Duval (2011) a dificuldade cognitiva vem do fato de que duas representações diferentes não apresentam ou não explicitam a mesma coisa do objeto que elas representam. Para o autor é preciso dispor de uma segunda representação cujo conteúdo será diferente da primeira. Essa distinção, para Duval (2009, p. 38):

> é associada à compreensão do que uma representação representa e, então, à possibilidade de associar a ela outras representações e de integrá-la nos procedimentos de tratamento. Porém, tal diferenciação jamais é logo adquirida, qualquer que seja o registro de representação e qualquer que seja o estágio de desenvolvimento.

Segundo Duval (2003), existem quatro tipos muito diferentes de Registros de Representações Semióticas, como apresentadas na figura 15.

Figura 15- Quadro da classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático

	Representação Discursiva	Representação não-discursiva
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: Os tratamentos não são algoritmizáveis.	Língua Natural Associações verbais (conceituais). Forma de raciocinar: - argumentação a partir de observações, de crenças...; - dedução válida a partir de definições ou uso de teoremas.	Figuras geométricas planas ou em perspectiva. (configurações em dimensão 0,1,2 ou 3). - apreensão operatória e não somente perceptiva; - construção com instrumentos.
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: Os tratamentos são principalmente algoritmos.	Sistemas de escritas: - numéricas (binárias, decimal, fracionária...); - algébricas; - simbólicas (línguas formais). Cálculo	Gráficos cartesianos. - mudanças de sistema de coordenadas; - Interpolação, extrapolação.

Fonte: Duval (2003, p.14).

Assim, de acordo com Duval (2003), percebe-se que os registros monofuncionais são os que possuem algoritmos próprios em sua estrutura, e os multifuncionais são aqueles em que os tratamentos não são algoritmizáveis. Os registros multifuncionais têm como representação discursiva a língua natural, ou seja, se manifestam por meio de associações verbais entre conceitos, pelas as formas de raciocínio argumentativo os quais se baseiam em observações, crenças, etc., e dedutivo que se baseiam em definições, propriedades, teoremas, etc. Eles se apresentam, também, na forma não-discursivas como as figuras geométricas planas e espaciais. Como registros monofuncionais na representação discursiva têm-se os sistemas de escritas numéricas, algébricas e simbólicas, e o cálculo, na representação não-discursiva encontram-se os gráficos cartesianos com as mudanças de sistemas de coordenadas, interpolação, extrapolação.

Cabe aqui ressaltar que, segundo D'Amore (2005), nem todos os autores reconhecem a língua natural como um registro semiótico por se tratar de um registro mais complexo do que outros mais usados em Matemática como, o aritmético, algébrico, figural, etc. Para o autor o registro língua natural permite funcionamentos discursivos muito heterogêneos. Como exemplo disso, Duval (2004) diz que há uma diversidade heterogênea de empregos possíveis para a língua natural, o emprego comum ou social, emprego especializado em diferentes domínios do conhecimento, emprego literário. Assim, conforme D'Amore (2005), o registro língua natural permite um funcionamento espontâneo que é relativo ao das conversações, narrativo, das discussões e um funcionamento especializado que se encontra no raciocínio dedutivo em Matemática, por exemplo.

Duval (2004) estabelece três atividades cognitivas inerentes a *semiosis*, ou seja, para que um sistema semiótico seja um registro de representação é preciso: a formação de representações em um registro semiótico particular, e as duas transformações de representações semióticas, uma denominada tratamento, e a outra denominada conversão, as quais, correspondem a atividades cognitivas diferentes.

D'Amore (2005, p. 62), reforça a ideia de Duval, afirmando que "a construção de conceitos matemáticos depende muito da capacidade de utilizar vários Registros de Representação Semiótica dos referidos conceitos: *representando-os* em um dado registro, *tratando* tais representações no interior de um mesmo registro, e fazendo a *conversão* de um registro para outro". Assim, para o autor, estes três elementos estão profundamente ligados a aquisição conceitual de um objeto matemático, isto é, a *noésis*.

Estas três atividades cognitivas estão reagrupadas no que se chamam tarefas de produção e tarefas de compreensão. Para Duval (2004), a produção de uma resposta, seja um texto ou esquema, mobilizam simultaneamente a formação de representações semióticas e seu tratamento, enquanto a compreensão de algo, como um texto ou imagem, mobilizam as atividades de conversão e de formação ou ainda as três atividades cognitivas. Ele menciona também, que há regras de funcionamento próprias a cada uma destas atividades, as quais dependem dos sistemas semióticos e são independentes das restrições que a comunicação pode impor a produção ou a compreensão das representações semióticas.

A formação de uma representação de um registro está atrelada ao que Duval (2004), chama de regas de conformidade, definidas por ele como sendo "aquelas que definem um sistema de representação e, em consequência, os tipos de unidades constituídas de todas as representações possíveis em um registro" (DUVAL, 2004, p. 43). Assim, ele segue afirmando que estas regras permitem o reconhecimento das representações como representações em um registro determinado e que a formação das representações semióticas implica, então, "na seleção de um certo número de caracteres de um conteúdo percebido, imaginado ou já representado em função das possibilidades de representação próprias ao registro determinado" (DUVAL, 2004, p. 44).

Para melhor entender a ideia apresentada por Duval, pode-se comparar a formação de uma representação, segundo Damm (2002), à realização de uma tarefa de descrição, ou seja, os Registros de Representação Semiótica precisam ser identificáveis, seja por meio de um texto em língua natural, de uma figura geométrica, de um gráfico, etc., respeitando regras inerentes a cada sistema de registros.

> Esta representação identificável pode ser estabelecida através de um enunciado compreensível em uma determinada língua natural, na composição de um texto, no desenho de uma figura geométrica, na escrita de uma fórmula, de um gráfico...[...] Esta formação deve respeitar regras: gramaticais para a composição de um texto, restrições de construções para as figuras, para a construção, por exemplo do algoritmo da multiplicação, o sistema posicional e o sistema de numeração decimal [..] (DAMM, 2002, p.144).

Desta forma, sintetiza-se, conforme Damm (2002) em consonância com Duval, que para ocorrer uma representação identificável, é necessário selecionar características e dados do conteúdo (objeto) a ser representado, e esta seleção depende de regras que vão assegurar o reconhecimento das representações e a possibilidade de sua utilização para tratamento, isto é, das regras de conformidade, as quais, segundo a autora, já estão estabelecidas na sociedade, tendo um sujeito, apenas que usá-las para reconhecer as representações. Ela complementa que, isto pode ser exemplificado "com o sistema de numeração hindu-arábico, em outras palavras, a escrita de numeração decimal, que possui duas regras de conformidade básicas que são o sistema posicional e a base dez. Estas regras são fundamentais para a construção das operações fundamentais" (DAMM, 2002, p.145).

Com relação ao tratamento, Duval (2004) estabelece que é a transformação de uma representação inicial em outra representação terminal, respectiva a uma questão, a um problema, ou seja, é a transformação de uma representação dentro de um mesmo registro. Por exemplo, "efetuar um cálculo ficando estritamente no mesmo sistema de escrita ou de representação dos números; resolver uma equação ou um sistema da equações; completar uma figura segundo critérios de conexidade e de simetria"(DUVAL, 2003, p. 16).

A uma transformação interna do registro em língua natural, isto é, reformular um enunciado dado, em outro, Duval (2004) denomina de *paráfrasis*, enquanto que uma transformação interna a um registro como, das figuras, ele chama de *anamórfosis*, embora neste caso, não haja conservação da situação representada. Damm (2002), complementa que, a reconfiguração é um tipo particular de tratamento para as figuras, pois é umas das várias operações que dá a este registro seu papel heurístico. A reconfiguração é, portanto, o tratamento que permite reorganizar uma ou várias sub-figuras diferentes de uma figura inicial.

> A operação de reconfiguração consiste, basicamente, na complementaridade de formas, ou seja, das partes obtidas por um fracionamento que podem ser reagrupadas em sub-figuras incluídas na figura inicial. Portanto, o fracionamento de uma figura, ou o exame destas a partir de suas partes elementares, permite a aplicação da operação de reconfiguração (MORETTI e FLORES, 2005, p.8).

De acordo com Damm (2002), existem regras de tratamento próprias a cada registro variando sua natureza e número de um registro a outro, como por exemplo, quando se trabalha com as quatro operações com os números naturais no registro algorítmo, o tratamento utilizado requer a compreensão de regras do sistema posicional e da base dez, sem esta compreensão, a utilização deste tratamento não é significativo para a aprendizagem.

A autora preceitua ainda, que os tratamentos estão ligados a forma, ou seja, ao sistema semiótico utilizado e não ao conteúdo do objeto matemático, por exemplo, na adição de dois números racionais (0,25 + 0,25= 0,5), se utilizada a representação decimal destes, a operação vai envolver um tratamento decimal, e se utilizada a representação fracionária dos números (1/4 + 1/4= 1/2), a adição vai envolver um tratamento ligado a forma fracionária, porém, estas duas representações diferentes (decimal e fracionária), mesmo envolvendo tratamentos diferentes, referem-se ao mesmo objeto matemático.

O que acontece na aprendizagem da Matemática, é que os registros de representação utilizados possuem graus de dificuldade diferentes, e este é um dos problemas que segundo Damm (2002) o professor precisa enfrentar no momento de ensinar, sem esquecer que trabalha com o mesmo objeto matemático, “porém o registro de representação utilizado exige tratamento muito diferente, que precisa ser entendido, construído e estabelecidas relações para o seu uso” (DAMM, 2002, p. 146).

Já a conversão para Duval (2004), é a transformação externa relativa ao registro da representação de partida, isto é, consiste em mudar de registro conservando os mesmo objetos matemáticos, como por exemplo, passar da escrita algébrica de uma equação à sua representação gráfica ou passar de uma representação linguística em uma representação figural.

Damm (2002), considera que a conversão

> [...] é um passo fundamental no trabalho com representações semióticas, pois a transformação de um registro em outro, conservando a totalidade ou uma parte do objeto matemático que está sendo representado, não pode ser confundida com o tratamento. O tratamento estabelece internamente ao registro, já a conversão se dá entre os registros, ou seja, é exterior ao registro de partida (DAMM, 2002, p.147).

Assim, no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, deve-se levar em conta não só a formação de representações e os tratamentos, como também, a conversão entre os diferentes registros de representação de um mesmo objeto matemático, e isto, de acordo com Duval (2009), estabelece um problema no ensino desta disciplina, pois o ensino privilegia as duas primeiras atividades cognitiva, e ainda, segundo Duval (2004), principalmente para o registro em língua natural, para os registros numéricos e para os registro de escrita simbólica.

Duval (2009) afirma que o espaço reservado à conversão das representações de um registro em um outro é mínimo, se não nulo. E isso, segundo o autor, se deve: a inexistência de regras de conversão ou seu alcance extremamente reduzido, a mudança de registro efetuada com fins de simplicidade e economia de tratamento, e à crença no imediatismo e na simplicidade de uma mudança de registro. Duval (2004) enfatiza que, o que garante a apreensão do objeto matemático e a conceitualização, é a coordenação, pelo aluno, entre os vários registros de representação.

Para ilustrar esta ideia, Nehring (1996), menciona que,

> não adianta o sujeito resolver uma operação usando material concreto ou através de desenho se não conseguir enxergar/coordenar estes procedimentos no tratamento aritmético (algoritmo da operação), no problema envolvendo esta operação ou mesmo em outro registro de representação qualquer (NEHRING apud DAMM, 2002, p. 147).

Neste sentido, entende-se que para o sucesso do ensino da Matemática não basta o aluno se apropriar de vários registros de representação, além disso, ele precisa coordená-los estabelecendo a diferença entre o registro e seu objeto, para então apreender este objeto matemático envolvido.

Duval (2003, p. 16), coloca que do ponto de vista matemático,

> a conversão intervém apenas para escolher o registro no qual os tratamentos a serem efetuados são mais econômicos, mais potentes, ou para obter um segundo registro que serve de suporte ou de guia aos tratamentos que se efetuam em um outro registro. Em outros termos, a conversão não tem nenhum papel intrínseco nos processos matemáticos de justificação ou de prova, pois eles se fazem baseados num tratamento efetuado em um registro determinado, necessariamente discursivo. É por isso que a conversão não chama a atenção como se tratasse somente de uma atividade lateral, evidente e prévia à “verdadeira” atividade matemática.

Porém, do ponto de vista cognitivo, o autor considera que a atividade de conversão é a atividade de transformação representacional fundamental, pois é esta que conduz os sujeitos à compreensão. Assim, percebe-se que para o ensino e aprendizagem da Matemática, Duval atribui maior relevância para a atividade de conversão do que de tratamento, pois, a compreensão nesta área requer eminentemente a coordenação entre os diversos Registros de Representação Semiótica. A figura 16 apresenta, de acordo com Duval (2003) as diferentes características das atividades cognitivas de tratamento e conversão.

Figura 16 - A distinção decisiva entre os dois tipos de transformação de representações semióticas

Transformação de uma representação
semiótica em outra representação semiótica

Permanecendo no mesmo sistema: *Tratamento*	Mudando de sistema, mas conservando a referência aos mesmo objetos: *Conversão*
Quase sempre, é somente este tipo de transformação que se chama a atenção porque ele corresponde a procedimentos de justificação. De um ponto de vista “pedagógico, tenta-se algumas vezes procurar o melhor registro de representação a ser utilizado para que os alunos possam compreender.	Este tipo de transformação enfrenta os fenômenos de não- congruência. Isso se traduz pelo fato de os alunos não reconhecerem o mesmo objeto através de duas representações diferentes. A capacidade de converter implica a coordenação de registros mobilizados. Os fatores de não-congruência mudam conforme os tipos de registro entre os quais a conversão é, ou deve ser, efetuada.

Fonte: DUVAL (2003, p. 15).

D’Amore (2005), apresenta três motivos distintos ao fato de Duval atribuir à conversão um papel central em relação às outras funções, particularmente em relação ao tratamento, que segundo o autor, é considerado decisivo do ponto de vista matemático para outros autores. São eles:

> (1) A conversão esbarra em fenômenos de não- congruência que, de maneira alguma são conceituais (enquanto relacionados ao próprio sentido da conversão). Esses fenômenos de não- congruência constituem o obstáculo mais estável que pode ser observado na aprendizagem da Matemática, em todos os níveis e em todos os domínios.
> (2) A conversão permite definir variáveis cognitivas independentes, o que torna construir observações e experimentações relativamente precisas e delicadas.[...]
> (3) A conversão, em casos de não- congruência, pressupõe uma coordenação dos dois registros de representação mobilizados, coordenação essa que não é dada de inicio e que não é construída de modo espontâneo, baseando-se apenas no fato que sejam realizadas atividades matemáticas didaticamente interessantes. Aquilo que se denomina “conceitualização” começa somente quando se coloca em ação, mesmo que apenas num esboço, a coordenação de dois distintos registros de representação (D’AMORE, p. 61).

Todavia, Duval (2004) esclarece que a conversão entre as representações semióticas constitui uma atividade cognitiva menos espontânea e mais difícil de adquirir para a maioria dos alunos. Para o autor, não apenas a mudança de registros levanta obstáculos que são independentes da complexidade do campo conceitual no qual se trabalha, mas, além disso, a ausência de coordenação entre diferentes registros cria frequentemente uma deficiência para a aprendizagem conceitual. E salienta, que inversamente, uma aprendizagem centrada na mudança e na coordenação de diferentes registros de representação produz efeitos positivos às tarefas de produção e compreensão.

Para isso, a conversão, segundo Duval (2004) requer que se perceba a distinção entre o que Frege chamava de sentido e referência dos símbolos ou dos signos, ou entre o conteúdo de uma representação e o que esta representa, pois sem esta percepção a atividade de conversão se torna incompreensível ou impossível.

Duval (2003) explica que esta distinção, que raramente é observada, é essencial para o progresso dos conhecimentos. A dificuldade em fazê-la se deve ao fato que existem apenas representações semióticas como meio de acesso aos objetos matemáticos, assim o conteúdo de uma representação depende mais do registro de representação do que do objeto representado. O autor salienta que, passar de um registro de representação a outro não implica em apenas mudar o modo de tratamento, mas também em explicar as propriedades ou os aspectos diferentes de um mesmo objeto, logo, duas representações de um mesmo objeto em dois registros diferentes não tem de maneira alguma o mesmo conteúdo.

Para compreender esta importante distinção entre sentido e referência, em matemática, Flores (2006), apresenta o seguinte exemplo fornecido por Duval (1988):

> [...] 4/2, (1+1), são formas escritas que designam um mesmo número, expressões que fazem referência a um mesmo objeto, e que não possuem a mesma significação uma vez que não são reveladoras do mesmo domínio de descrição ou do mesmo ponto de vista: a primeira exprime o número em função de propriedade de divisibilidade e razão, a segunda em função da recorrência à unidade [...]. Simples mudanças na escrita permitem exibir propriedades diferentes do mesmo objeto, mas mantendo a mesma referência (DUVAL apud FLORES, 2006, p. 17).

Ainda, de acordo com Duval (2003), a compreensão em Matemática depende da disposição de ao menos dois tipos de registros diferentes, pois esta é a única forma para não confundir o conteúdo de uma representação com o objeto representado, fato que segundo o autor, caracteriza um dos problemas da aprendizagem Matemática relativos aos fracassos ou os bloqueios dos alunos, nos diferentes níveis de ensino, pois os alunos apresentam dificuldades em converter uma representação em outra do mesmo objeto ou quando a mobilização simultânea de dois registros é requerida.

Mas a questão que Duval (2011) estabelece é como reconhecer o mesmo objeto em duas representações cujos conteúdos não tem nada em comum, o que acontece quando duas representações são semioticamente heterogêneas, quando seus conteúdos respectivos mobilizam unidades de sentido de naturezas diferentes (palavras, algarismos, símbolos, formas em uma e duas dimensões) ou quando a organização dessas unidades de sentido são de naturezas diferentes. Para o autor “colocar em correspondência as unidades de sentido próprias de cada representação é a condição cognitiva para poder reconhecer um mesmo objeto em suas diferentes representações" (Duval, 2011, p.49).

Outra característica da conversão enfatizada por Duval (2003) é que esta, quaisquer que sejam os registros considerados, é irredutível a um tratamento. Ele afirma que normalmente se considera uma tarefa simples converter a representação de um objeto de um registro a outro. " É comum descrever a conversão como uma associação preestabelecida entre nomes e figuras (como por exemplo, em geometria), ou reduzi-la a uma codificação" (DUVAL, 2003, p.17). Segundo essa ideia, o autor observa que a conversão seria uma das formas mais simples de tratamento, assim,

> passar de uma equação à sua representação gráfica constituiria uma codificação em que seria suficiente aplicar a regra segundo a qual um Ponto está associado a um par de números sobre um plano quadriculado por dois eixos agrupados. Ou, ainda, passar de um expressão em português – como "o conjunto dos pontos cuja ordenada é superior à abscissa" – a escrita simbólica – no caso, " x> y"- seria igualmente uma codificação, como toda a escrita literal de relações entre números (DUVAL, 2003, p. 17).

No entanto, o autor menciona que esta visão é enganosa no que diz respeito a aprendizagem, e do ponto de vista teórico, pois esta regra possibilita apenas uma leitura pontual das representações gráficas e não permite uma apreensão global e qualitativa, a qual, é necessária para extrapolar, interpolar, ou para utilizar gráficos para fins de controle, ou de exploração, ligados aos tratamentos algébricos.

Em resumo, Duval (2003) pontua que,

> a conversão entre gráficos e equações supõe que se consiga levar em conta, de um lado, as variáveis visuais próprias dos gráficos (inclinação, intersecção com os eixos, etc.) e, de outro, os valores escalares das equações (coeficientes positivos ou negativos, maior, menor ou igual 1, etc.) (DUVAL, 2003, p. 17).

Em consonância, Duval (2011) menciona os três tratamentos das representações gráficas:

1) a abordagem Ponto a Ponto - é um modo associativo que limita-se a alguns valores particulares e aos pontos marcados no plano referencial. Esta abordagem favorece quando se quer traçar um gráfico correspondente a uma equação ou se quer ler as coordenadas de algum Ponto interessante (Ponto de intersecção com os eixos ou alguma Reta, Ponto máximo, etc.)

2) uma abordagem de extensão do traçado efetuado – corresponde às atividades de interpolação e extrapolação as quais estão apoiados os aspectos denominados produtores ou redutores das representações gráficas. De modo geral, esta abordagem de extensão se mantém puramente

mental, ou seja, ela não acarreta traços complementares e explicativos como uma mudança local na graduação dos eixos para ampliar uma parte do traçado. É uma abordagem que não se atém a um conjunto finito de pontos marcados como no caso da abordagem Ponto a Ponto, ela se apoia em conjunto infinito de pontos potenciais, quer dizer, nos intervalos entre pontos marcados. No entanto nesta e na primeira abordagem levam-se em conta os dados dos traçados e não as variáveis visuais pertinentes da representação gráfica.

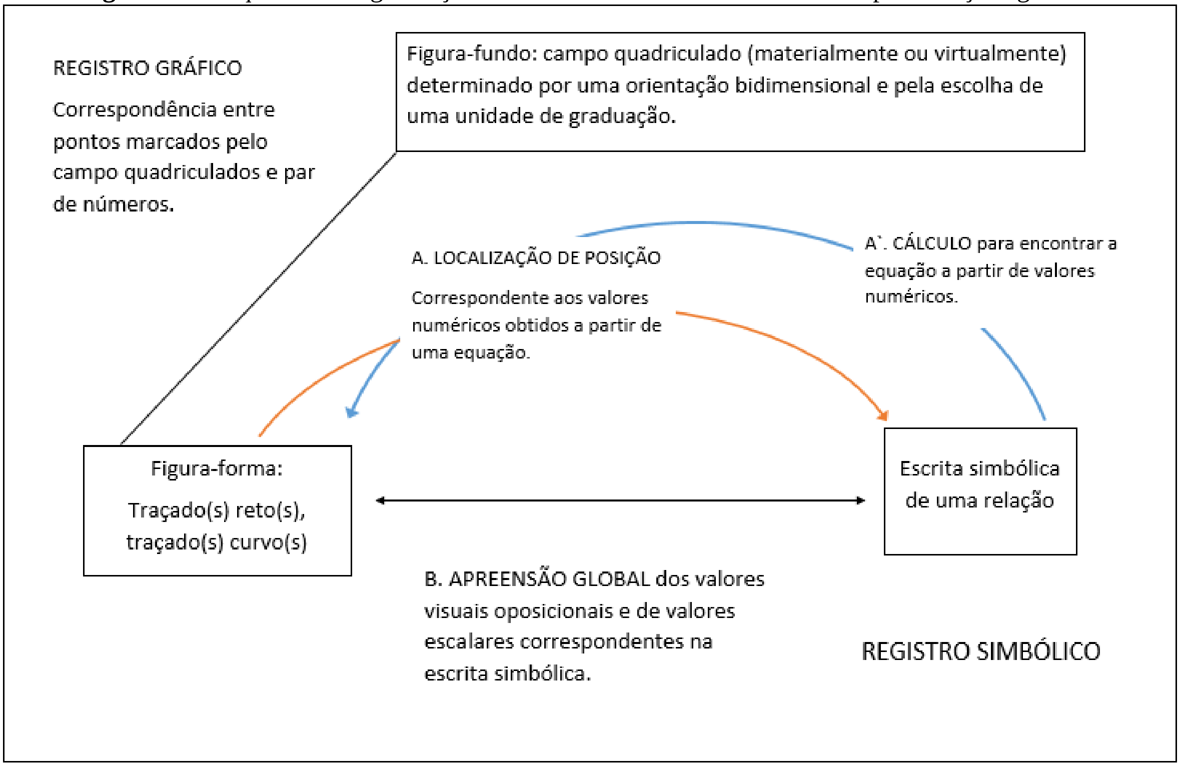
3) abordagem de interpretação global de propriedades figurais – o conjunto traçado/eixos forma uma imagem que representa um objeto descrito por uma expressão algébrica e toda modificação desta imagem, que leva a uma modificação na expressão algébrica correspondente, determina uma variável visual pertinente para a interpretação gráfica. É importante identificar todas as modificações conjuntas da imagem e da expressão algébrica, o que significa proceder uma análise de congruência entre dois registros de apresentação de um objeto ou informação.

Segundo Duval (2011) quando se trata de partir da representação gráfica para encontrar a equação correspondente ou para utilizar o conceito de inclinação ou direção, é a abordagem de interpretação global que se faz necessária, pois o recurso Ponto a Ponto é totalmente inoperante uma vez que tira a atenção das variáveis visuais. Esta prática Ponto a Ponto, para o autor, não favorece a abordagem de interpretação global que é em geral deixada de lado no ensino uma vez que depende de análise semiótica visual e algébrica, o que explica porque a maioria dos alunos fica aquém de uma utilização correta das representações gráficas.

Ainda de acordo com Duval (2011) há um custo cognitivo desigual na passagem entre a expressão na forma simbólica e a representação gráfica, pois para isso basta a abordagem Ponto a Ponto. Mas, para passar da representação gráfica para a expressão algébrica é preciso identificar cada um dos valores das variáveis visuais e integrá-las, ou seja, exige a interpretação global e esta abordagem exige que a atenção esteja centrada sobre um conjunto de propriedades e não sobre valores particulares tomados um a um.

Para ilustrar a conversão entre as representações gráficas e para a representação simbólica (expressão algébrica) Duval (2003) apresenta um esquema, conforme figura 17, da organização semiótica e do funcionamento das representações gráficas.

Figura 17- Esquema de organização semiótica e do funcionamento das representações gráficas



Fonte: (DUVAL, 2003,p.18).

Esta organização, segundo Duval (2003), permite três tipos de tratamento, ou seja, operações internas aos gráficos, e dois tipos de conversão com o registro simbólico. As ligações A e A' permitem apenas uma leitura pontual dos gráficos e somente a coordenação B permite uma apreensão global qualitativa, sendo que esta coordenação, segundo o autor, para a maioria dos alunos não é jamais efetuada, mesmo ao fim do Ensino Médio.

Um exemplo de uma conversão do registro gráfico para o simbólico, de acordo com o esquema acima, pode-se citar uma atividade em que dados dois pontos A e B marcados em um campo quadriculado do plano cartesiano, escreve-se as coordenadas dos pontos nos seus respectivos pares de números ("Registro Gráfico") e traça-se uma Reta, este então é o registro de partida. A partir dos valores numéricos das coordenadas dos dois pontos realiza-se cálculos (" A'. Cálculo") para encontrar a equação da Reta ($y = x + 3$, por exemplo), assim o registro de chegada é uma representação da Reta no registro simbólico, ou seja, obteve-se uma conversão do registro gráfico para o registro simbólico.

Agora, para a conversão do registro simbólico para o gráfico toma-se como registro de partida a equação $y = x + 3$ ("Registro Simbólico"), realizando um tratamento no interior deste registro, isto é, atribuindo valores para a variável "x" e efetuando a soma encontra-se valores para a variável "y", e por meio da ("A. Localização de Posições"), ou seja, da correspondência aos valores numéricos obtidos a partir da equação no plano cartesiano traça-se a Reta e obtêm-se o registro de chegada (“Registro Gráfico”), realizando assim, uma conversão do registro simbólico para o gráfico.

Desta forma, segundo o esquema de Duval (2003), conforme figura 13, chega-se a uma (“B. Apreensão Global”) dos valores oposicionais (gráfico da Reta) e de valores escalares (parâmetros “a” e “b” da equação reduzida $y = ax + b$) correspondentes a equação $y = x + 3$.

Esta apreensão global mencionada por Duval corresponde, conforme Silva (2006), a uma coordenação de ambas as conversões entre os registros gráfico e simbólico.

De acordo com Duval (apud Moretti, 2003), as representações gráficas possuem três tipos distintos de procedimentos: 1) o procedimento por pontos, 2) o procedimento de extensão de um traçado efetuado, 3) o procedimento de interpretação global das propriedades figurais. Em relação aos dois primeiros procedimentos Moretti (2003, p.151) afirma:

> O procedimento 1 é o que mais aparece nos livros didáticos: pontos obtidos por substituição na expressão da função são localizados em um sistema de eixos graduados para que em seguida a curva possa ser traçada por meio da junção desses pontos. Nesse modo, não há ligação entre o gráfico e a expressão algébrica da função correspondente. Diversos problemas podem surgir dessa forma de proceder, pelo fato de que se há congruência semântica entre um par ordenado e sua representação cartesiana, o mesmo não se pode dizer de um conjunto de pontos no plano cartesiano e uma regra matemática a ele equivalente.

Contrário ao procedimento 1, no procedimento 3 o conjunto traçado/eixo, como comenta Moretti (2003, p. 151) “forma uma imagem que representa um objeto descrito por uma expressão algébrica. Esse modo permite que se identifiquem as modificações possíveis conjuntamente na imagem e na expressão algébrica”.

Assim, Duval (apud Moretti 2003, p. 151) diz que “neste tipo de tratamento não estamos em presença da associação um Ponto - um par de números, mas na associação variável visual da representação – unidade significativa da escrita algébrica”.

Diante destas afirmações, percebe-se que Duval acredita que, para uma apreensão global das propriedades inerentes as representações gráfica e algébrica de uma curva, não basta que se trabalhe a conversão em único sentido - e isto também é fato em conversões realizadas com quaisquer dois de registros de representação de um objeto matemático - mas é necessário inverter o sentido da conversão, pois ao fazê-lo permite-se ao aluno a possibilidade de analisar propriedades em que na conversão em apenas um sentido não são valorizadas ou perceptíveis.

Neste contexto, Duval (2003) estabelece dois tipos de fenômenos característicos das conversões de representações: as variações de congruência e não congruência, e a heterogeneidade dos dois sentidos de conversão. Segundo o autor, para analisar uma atividade de conversão, basta comparar a representação no registro de partida com a conversão no registro de chegada, porém duas situações podem ocorrer, ou a representação terminal transparece na representação de saída e a conversão se aproxima de uma situação de simples codificação e diz-se que há congruência, ou então, ela não transparece absolutamente e se dirá que ocorre a não-congruência, mas existem ainda muitos fatores que determinam o caráter congruente ou não de uma conversão, o que remete a determinar situações intermediárias, como no exemplo da conversão entre o registro gráfico e algébrico apresentado da figura 11.

Segundo Duval (2009) quando a conversão é congruente, geralmente a passagem de uma representação à outra se faz espontaneamente, quer dizer, quando três condições são preenchidas:

> correspondência semântica entre as unidades significantes que as constituem, mesma ordem possível de apreensão dessas unidades nas duas representações, e conversão de uma unidade significante da representação de partida em uma só unidade significante na representação de chegada (DUVAL, 2009, p.18).

No entanto, o autor adverte que quando essas condições não se verificam, as representações não são mais congruentes entre elas, e a passagem de uma representação à outra não tem mais nada de imediato. E, salienta, que duas representações podem ser congruentes em um sentido de conversão e não congruentes para a conversão inversa. Moretti (2003), exemplifica isto para o caso da conversão entre representações algébricas e gráficas, pois enquanto a passagem da representação algébrica de uma curva para sua representação gráfica é mais espontânea e congruente para o aluno, na conversão inversa isto não se verifica.

No caso de uma conversão congruente, Duval (2004, p. 50) apresenta como exemplo:

> Tomemos por exemplo a seguinte expressão e sua conversão em escrita algébrica “o conjunto de pontos cuja ordenada é superior à abscissa” $y > x$. Se prevê que para efetuar a conversão é suficiente uma correspondência término a término entre as unidades significantes respectivas. Neste caso, a conversão inversa permite voltar para encontrar a expressão inicial do registro de partida.

Já o caso de não-congruência, quando o registro de chegada não transparece no registro de partida, Duval (2004), afirma que não só aumento o tempo de tratamento, como também a conversão pode resultar impossível de efetuar, ou inclusive de compreender, sem que haja um conhecimento prévio específico da formação e tratamento da representação, próprias a cada registro envolvido. Para este caso Duval (2004, p. 50) apresenta o seguinte exemplo:

> Seja agora a expressão: “o conjunto de pontos que tem uma abscissa positiva...”x >0. Na escrita algébrica não há uma unidade significante que corresponda a “positivo”, então, para suprir esta carência, é necessário recorrer a paráfrasis “> 0”, que é a combinação de duas unidades significantes. A distância que se deve sobrepassar para efetuar a conversão é mais ampla na seguinte expressão: “o conjunto de pontos cuja abscissa e ordenada tem o mesmo sinal” x.y > 0. Aqui não há correspondência término a término entre as unidades significantes respectivas das duas expressões: é necessário uma reorganização da expressão dada no registro de partida para obter a expressão correspondente no registro de chegada.

Diante deste contexto, Duval (2001) aborda duas questões cognitivamente cruciais para fazer os alunos entrarem no funcionamento do pensamento matemático: Como fazer com que se aprenda a discriminar as unidades de sentido pertinentes na diversidade de representações semióticas que mobilizamos na Matemática? Como fazer com que se tome consciência do papel central da operação de colocar em correspondência?

Em resposta a estas questões Duval (2011) afirma que ao contrário ao que se postula no ensino da Matemática, a discriminação das unidades de sentido pertinentes nas diferentes representações não é consequência da aquisição de conceitos, mas sim condição preliminar dessa aquisição. Da mesma forma, o autor segue afirmando que a escolha de uma “boa” representação ou a multiplicação de representações, são apenas ajudas enganosas, pois elas não podem ser associadas aos objetos matemáticos que representam, porque esses não são acessíveis direta ou empiricamente. “A única via de acesso possível aos objetos empiricamente não acessíveis passa por colocar em correspondência as representações semióticas diferentes”(DUVAL, 2011, p.49).

Duval (2001) preconiza que colocar em correspondência é a única operação cognitiva que permite retirar as propriedades ou ter acesso a novos objetos do conhecimento, com base nessas unidades de sentido que constituem o conteúdo das representações semióticas. Para o autor, as operações matemática e cognitiva de colocar em correspondência dizem respeito aos elementos dos conteúdos respectivos de duas representações semióticas.

Assim, a congruência ou a não-congruência, de acordo com Duval (2009), correspondem a dois fatores muito fortes de sucesso ou fracasso para as questões que implicam uma mudança de sistema semiótico de representação, ou seja, toda tarefa na qual a conversão das representações é congruente dá lugar a uma taxa elevada de sucesso, enquanto na qual a conversão não é congruente dá lugar a uma taxa mais ou menos fraca de sucesso, conforme o grau de não-congruência.

O outro fenômeno característico da conversão de representações é, o qual já comentou-se, o sentido da conversão. Para Duval (2003), nem sempre a conversão se efetua quando se invertem o registro de partida e chegada, ou seja, um aluno pode realizar a conversão entre dois registros em um sentido, porém se tomado o registro de chegada, o aluno pode não voltar ao registro de partida, não efetuando assim, a conversão no sentido inverso. O autor destaca que no ensino, normalmente, um sentido da conversão é trabalhado, acreditando-se que o treinamento efetuado num sentido automaticamente estaria treinando a conversão no outro sentido, e os exemplos de conversão propostos aos alunos são instintivamente escolhidos nos casos de congruência, os quais não são os mais frequentes.

Assim, percebe-se a importância do uso e coordenação de diversos registros de representação para a compreensão em Matemática. No entanto, Damm (2002), questiona qual a necessidade da diversidade de registros de representação para o funcionamento do pensamento humano, e como resposta elucida três posições de Duval sobre o assunto:

1) A economia de tratamento: de acordo com Damm (2002), a existência de vários registros permite a troca de registros, e essa troca objetiva efetuar formas mais econômicas de tratamento e mais eficiente. Como exemplo, a autora ilustra que para efetuar a multiplicação *32 x 12* pode-se adicionar *32 +32...* dozes vezes, ou multiplicar $32 \times 12 = 4 + 60 + 20 + 300 = 384$, ou ainda, utilizar o algoritmo da multiplicação. Assim, entende-se que são registros distintos com formas de tratamento diferentes, em que um é mais econômico que outro, porém com graus de dificuldades diferentes. Damm (2002, p.149), complementa que “a economia em tratamento está muito vinculada à aproximação com a língua natural e principalmente a formas mais simples e econômicas aos procedimentos adotados”.

2) A complementaridade de registros: sobre este ponto Damm (2002), considera que a natureza do registro semiótico escolhido para representar um contexto (conceito, objeto, situação) impõe elementos significativos ou informações do conteúdo representado. Por exemplo,“ uma linguagem não oferece as mesmas possibilidades de representações que uma figura ou diagrama, ou ainda, a exigência de uma representação intermediária para a compreensão dos problemas, na passagem de um enunciado ao tratamento matemático” (DAMM, 2002, p.149). É esta complementaridade entre os registros escolhidos para representar um objeto que, segundo a autora, exige do professor o trabalho com várias representações de um mesmo objeto, como por exemplo, os gráficos, as tabelas, equações são registros parciais de um mesmo objeto (Reta), e faz-se necessário perceber a especificidade de cada um e reforçá-las para favorecer a compreensão do objeto.

3) A coordenação de registros de representação: é a condição fundamental, de acordo com Duval (2004) para a compreensão dos objetos matemáticos, isto é, a articulação simultânea

entre dois ou mais registros de representações diferentes é o que permite a conceitualização e a apreensão global de conhecimentos em Matemática. No entanto, o autor observa que essa coordenação não é espontânea e precisa que o professor a estimule para que a compreensão não fique limitada a um único registro de representação.

Desta forma, entende-se que a aquisição de um objeto matemático necessita primordialmente desta variedade de registros e da capacidade cognitiva de coordená-los. Duval (2004) acentua, também, que organizar situações de aprendizagem centradas na coordenação de registros, requer uma identificação prévia das variações cognitivamente pertinentes de uma representação em um registro, de maneira que possa ser realizada pelos alunos uma exploração segundo o método que consiste em fazer variar somente um fator de cada vez, deixando os outros sem troca, em uma representação. Ele recomenda que tais situações sejam propostas desde os primeiros anos do Ensino Médio.

Este método, ao qual se refere Duval (2004), consiste em utilizar a conversão como instrumento de análise de processos de aprendizagem concernentes à mobilização de vários Registros de Representação Semiótica para colocar em evidência as variáveis cognitivas próprias do funcionamento de cada registro e explorar as variações de congruência e não-congruência entre dois registros nas múltiplas representações dos objetos matemáticos. Em efeito, a utilização deste método, conforme Duval (2003) deve ser feita sob duas condições:

> dar-se a representação mais elementar possível, R_1, de um objeto em um registro de saída A e sua representação convertida R'_1 em um registro de chegada B; proceder todas as variações de $R_{1\ldots}$ R_n que conservem nas diferentes representações um valor de representação de alguma coisa no registro de saída A, e observar as variações concomitantes de R'_1 no registro de chegada B. [...] As representações $R_{1\ldots}$ R_n do registro A se separam, então, em duas classes: aquelas para as quais existe somente uma representação concomitante R'_i no registro de chegada B e aquelas que têm cada uma representação concomitante diferente no registro de chegada (DUVAL, 2003, p. 25)

Assim, Duval (2003) estabelece que as variações R_1 para as quais não existe variação concomitante no registro de chegada são cognitivamente neutras, pois elas conservam o mesmo objeto de referência, e ressalta que as variações de representação cognitivamente importantes no registro de partida são as que incitam uma modificação da representação concomitante no registro de chegada, pois isso implica um novo objeto denotado.

O autor utiliza este método em trabalhos sobre a complexidade cognitiva da articulação entre gráficos e equações. Sobre uma exploração das variações sistemáticas próprias de um registro Duval (2004), toma como exemplo, um caso simples, o das representações gráficas de uma Reta:

> As unidades significantes no registro estão determinadas por oito valores visuais que correspondem a associação de três variáveis visuais pertinentes para o registro dos gráficos cartesianos: o sentido de inclinação da Reta, a posição de sua intersecção com o eixo das ordenadas, e sua posição em relação a uma repartição simétrica dos dois quadrantes opostos. Estes oito valores qualitativos não são separados visualmente: assim, os valores relativos a intersecção com o eixo da ordenadas e os relativos ao ângulo desta Reta com o eixo das abscissas, se fundamentam para cada Ponto desta Reta em um só valor visual, não pertinente na representação, de altura que está acima do eixo das abscissas. Para discriminar todos estes valores visuais é necessário fazer variar uma das três variações visuais pertinentes mantendo constantes os valores das outras duas. A cada um dos valores qualitativos destas três variáveis corresponde a uma variação na escrita algébrica da equação da Reta representada: seja no sentido de presença ou ausência de certos símbolos, seja no sentido de uma substituição de dois símbolos antagônicos (- ou +, seja no sentido de uma troca de significado da expressão simbólica que expressa a pendência (pendência maior ou menor que 1). Por último, para cada variação no registro gráfico, obtemos uma variação concomitante de forma no registro e na escrita algébrica (DUVAL, 2004, p. 79).

Para ilustrar a ideia das modificações possíveis conjuntamente na imagem e na expressão algébrica, Duval (apud Moretti, 2003), apresenta o seguinte quadro, conforme a figura 18 para o caso das funções do tipo $y = ax+b$.

Figura 18- Quadro das modificações das variáveis visuais e as unidades correspondentes de uma função linear

Variáveis Visuais	Valores	Unidades simbólicas correspondentes
Sentido de inclinação	Ascendente descendente	coeficiente > 0 ausência de símbolo - coeficiente < 0 presença de símbolo -
Ângulo com os eixos	partição simétrica ângulo menor (45^0) ângulo maior (45^0)	coef. var. = 1 não tem coef. escrito coef. var. < 1 coef. var. > 1
Posição sobre o eixo	corta acima corta abaixo corta na origem	acrescenta-se uma constante sinal + subtrai-se uma constante sinal – não tem correção aditiva

Fonte: Duval (apud Moretti, 2003, p.152).

Neste quadro, segundo Moretti (2003), é possível perceber a relação entre as modificações nas expressões algébricas e nas modificações na figura e vice-versa: o coeficiente independente b é responsável pela posição da Reta no eixo das ordenadas (4ª linha do quadro); o coeficiente angular a é responsável pelo ângulo que a Reta forma com os eixos (2ª e 3ª linhas do quadro).

No entanto, este autor afirma que para o caso de outras funções, mesmo polinomiais, essa correspondência entre os coeficientes não é tão evidente assim, pois sem o uso da noção de limite e derivada, não há uma resposta para esboçá-la segundo o procedimento de uma interpretação global das propriedades figurais. E, acredita que o uso da noção de translação pode contribuir para que o esboço de curva se mantenha bastante próximo deste procedimento que permite estabelecer correspondência entre gráfico e expressão algébrica, pois essa transformação possibilita que se percebam mudanças tanto na posição da curva quanto na expressão algébrica correspondente.

Enfim, Duval (2003) afirma que este método permite, então discriminar, entre todas as variações estruturais possíveis das representações em um certo registro, aquelas que são cognitivamente importantes. Em termos de discriminação, o autor diz que é necessário que um aluno seja capaz de reconhecer no que diferenciam duas representações em que as componentes significantes, exceto uma, são as mesmas, ou que superficialmente parecem deferir somente por uma única componente, a qual na realidade combina duas diferenças, ou seja, “um aluno que consiga reconhecer em um gráfico somente uma de duas retas correspondentes às equações *y = x e y = -x*, ou às equações *y= 2x e y= x + 2* não está ainda no ponto de discriminar o que elas representam” (DUVAL, 2003, p. 27). Neste sentido de discriminação, para o autor, um sucesso matemático não corresponde a um sucesso cognitivo.

Com relação a Geometria Analítica, percebe-se, de acordo com Silva (2006), que historicamente, a conversão entre os Registros de Representação Semiótica, principalmente de registro gráfico para o algébrico e vice-versa, tem papel importante no estudo de curvas. O autor comenta estas conversões a partir do trabalho de Lacroix (1765- 1843):

> O princípio da Geometria Analítica surge muito claramente em Lacroix (1799) quando ele diz: “a equação de uma curva é obtida expressando analiticamente uma de suas propriedades”e “uma equação dá lugar a uma curva, cujas propriedades tornam-se conhecidas pela equação” (SILVA, 2006, p. 90).

Ainda, no que tange o esboço de curvas em matemática, Moretti (2003) comenta que este é um tema relevante e toma bastante espaço nas atividades de livros didáticos, no entanto, apesar da importância dada, o autor constata que,

> o esboço ainda é tratado quase que exclusivamente por meio da junção de pontos localizados no plano cartesiano, pontos estes obtidos por intermédio de substituições na expressão matemática correspondente. Para uma nova equação, mesmo pertencendo à mesma família de curvas, todo esse mesmo processo de Ponto por Ponto deve ser repetido sem que, na maioria das vezes, qualquer relação seja estabelecida com alguma outra curva. Esse modo de proceder esboçar individualmente cada curva, impossibilita que se perceba que modificações na equação são responsáveis por modificações no gráfico e vice-versa (MORETTI, 2003, p. 149-150).

O autor defende, concordando com Duval, que o esboço de curvas deve promover a associação entre a variável visual de representação e a unidade significativa da escrita algébrica. Percebe-se com estas afirmações, que não basta promover atividades em os alunos façam simplesmente uma conversão entre o registro simbólico de uma equação para o seu registro gráfico através da localização de pontos no plano, é necessário, além de fazer a conversão no sentido inverso, fazer modificações nas variáveis visuais das equações e gráficos permitindo ao aluno perceber as implicações destas modificações na correspondente conversão entre seus respectivos registros, para assim, ocorrer a apreensão global do objeto matemático.

Nota-se, que as Orientações Curriculares, (BRASIL, 2006) propõem de forma implícita, para a Geometria Analítica, um trabalho com atividades que promovam a conversão entre os registros algébrico e gráfico, interpretando geometricamente o uso de parâmetros em equações. Porém, não é evidenciado claramente, a necessidade de uma atividade conversão voltada para variação das unidades significantes em um registro.

Assim, no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, nas atividades propostas aos alunos e em análises de produções destes, acredita-se, conforme Duval (2003, p.24) que,

> [...] é necessário distinguir cuidadosamente o que sobressalta no tratamento em um registro e o que sobressalta em uma conversão, esta consistindo em uma simples mudança de registros ou em uma mobilização em paralelo de dois registros diferentes. Essa distinção raramente é feita na análise das produções dos alunos, mesmo em problemas de geometria.

Entretanto, o autor complementa que é preciso levar em conta a natureza de cada registro, pois além de existir uma maior dificuldade relação à tratamentos que envolvem registros plurifuncionais, o mesmo pode ocorrer em atividades de conversão, a qual pode ser mais complexa se houver necessidade ou não de passagens entre registro monofuncional e registro plurifuncional (passar da representação gráfica para a representação em língua natural, por exemplo). Para Duval (2009) é preciso que o aluno seja capaz de coordenar representações semioticamente heterogêneas, para que ele possa discriminar o representante (representação) e o representando (objeto matemático), ou a representação e o conteúdo conceitual que essa representação exprime, instancia ou ilustra.

Assim, para Duval (2003) a articulação entre dois registros de um objeto matemático deve abordar tarefas que tratem dos dois sentidos da conversão, sendo que para cada sentido deve haver caso de congruência e casos mais ou menos complexos de não- congruência, podendo ser importante ainda que estes registros sejam, de um lado um par de registros monofuncionais, e de outro um par de registros em que um é multifuncional e outro monofuncional.

Nessa pesquisa, para o tema Geometria Analítica, de acordo com a teoria dos Registros de Representação Semiótica, utilizou-se os registros semióticos língua natural, registro simbólico, registro gráfico e registro figural. A figura 19 apresenta o esquema com estes registros e respectivas representações consideradas nesta investigação.

Figura 19- Esquema com os Registros Semióticos utilizados na Geometria Analítica

REGISTROS SEMIÓTICOS	REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS
Língua Natural	Conceitos, definições, argumentações, deduções. Ex.: conceito de reta, conceito de circunferência, definição de coeficiente angular, etc.
Simbólico	Numéricas, algébricas, tabular, matricial. Ex.: y = 2x +1, A(1,0), etc.
Gráfico	Representação gráfica: plano cartesiano com representações de pontos, traçados de reta e circunferência correspondentes na escrita simbólica. Ex.: gráfico de uma reta, representação gráfica de pontos colineares, pontos equidistanes.
Figural	Representação geométrica: figuras geométricas planas e figuras não representadas no plano cartesiano. Ex.: triângulos, medianas de um triângulo, retas concorrentes, etc.

Fonte: A pesquisa.

Diante do contexto da teoria dos Registros de Representação Semiótica e da sua importância no ensino e aprendizagem da Matemática, entende-se o importante papel mediador do professor na aquisição conceitual dos objetos matemáticos, pois, de acordo com Andrade (2008, p.41), "os docentes devem primar pela construção de um conhecimento significativo, levando os estudantes a articularem seu pensamento, proporcionando o desenvolvimento das capacidades e habilidades cognitivas dos mesmos". Nehring e Pozzobon (2009), destacam que é necessário um agir do professor na busca por propor situações que potencializem as atividades de conversão entre os diferentes registros de um objeto, para o entendimento matemático, e Andrade e Kaiber (2010), complementam essa ideia afirmando que, o papel do professor, no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, é ser um intermediário, procurando estabelecer situações de aprendizagem, em que é preciso, primeiro, representar, em seguida tratar e, por fim, converter.

Assim, compreende-se que o desenvolvimento cognitivo matemático do educando está diretamente vinculado à ações metodológicas que priorizam uso da diversidade de Registros de Representação Semiótica e as atividades de conversão entre elas. Buscando diversificar situações que englobem estas atividades, o professor propiciará ao aluno não apenas que este apreenda progressivamente conceitos matemáticos, mas contribuirá para que este evolua em suas capacidades de raciocínio, análise, visualização, interpretação, e consequentemente, para a formação de um cidadão crítico, criativo, mais participativo e capaz de ser agente de mudanças positivas na sociedade em que vive.

3.4 AS TENDÊNCIAS METODOLÓGICAS PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA

Nesta seção apresentam-se algumas das principais tendências metodológicas para o ensino da Matemática no Brasil, como Tecnologias da Informação e Comunicação, Resolução de Problemas, Jogos e curiosidades, Modelagem Matemática e História da Matemática.

3.4.1 Tecnologias da Informação e Comunicação

As Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) presentes na sociedade moderna em que vivemos, possibilitam outras formas de comunicação, interação e acesso à informação tornando-se indispensável no dia-a-dia das pessoas. Penteado (1999) afirma que as TIC transformam a forma de viver do homem e dos estilos de conhecimento passando prevalecer a informação, a velocidade, o movimento, a imagem, o tempo e o espaço com uma nova conceitualização.

Neste novo universo em que estamos inseridos a partir da inserção destas tecnologias evidencia-se que a área da educação não pode ficar alheia a tais mudanças. Kampff et al (2004), postulam que em uma sociedade de bases tecnológicas, não é mais possível desprezar o potencial pedagógico que as TIC apresentam quando incorporadas à educação. Relacionada a área da Matemática Mendes (2009) ressalta que atualmente a informática é considerada uma das componentes tecnológicas mais importantes na efetivação da aprendizagem em virtude das possibilidades de construção de modelos virtuais para a Matemática imaginária.

De acordo com a literatura em informática educativa, Bairral (2009), coloca que poderíamos conceituar as TIC como uma tecnologia que tem quatro características essenciais:

conectividade, integração de mídias, dinâmica e construção hipertextual, e interatividade. Sendo assim, o autor enfatiza que as TIC:

> pressupõem um computador conectado à internet com suas ferramentas associadas; integram as diferentes formas de expressão: escrita, oral e audiovisual; possibilitam o compartilhamento de informações e a comunicação de muitos indivíduos com muitos em diferentes tempos e espaços; não pré-determinam sentidos e polarizações; propiciam informação distribuída, também construção hipertextual do conhecimento; exigem planejamento, mas propiciam desdobramentos imprevisíveis, embora possa existir controle, há motivação e negociação constantes; pressupõem trabalho coletivo, embora cada usuário necessite de tempo para reflexão individualizada; favorecem o trabalho colaborativo; apesar de interfaces, possuem diferentes interações e discursos (BAIRRAL, 2009, p. 16-17).

No entanto, Borba (1999) destaca a preocupação relativa às mudanças curriculares, às novas dinâmicas de sala de aula, a mudança no papel do professor e ao papel do computador na sala de aula implicadas a incorporação de TIC na educação. Bairral (2009), menciona um importante educador catalão, Claudi Alsina,que no ano de 2000 sinalizava que as mudanças sociais, a globalização, o impacto tecnológico, a luta pela qualidade educativa e o compromisso social apresentavam novas direções para a educação em geral e para a educação Matemática e que as novas orientações curriculares deveriam levar em consideração essas cinco dimensões.

Masetto (2008) afirma que o aperfeiçoamento das TCI abriu novos horizontes de comunicação entre os professores e pesquisadores de diferentes áreas do conhecimento e novos métodos de pesquisa, embora segundo Miskulin e Silva (2010), haja um atraso da nossa sociedade em relação a outros países na aquisição desses benefícios tecnológicos. Para as autoras os cursos de licenciatura em Matemática, abordados criticamente, com o uso das TCI podem tornar a escola mais produtiva para os alunos possibilitando o desenvolvimento integral dos mesmos e sua plena inserção na sociedade.

No ensino da Matemática Rodríguez (2009), aponta que a introdução das TIC faz que os conhecimentos, habilidades, modos da atividade mental a atitudes que se desejam formar com o processo de ensino e aprendizagem, se desenvolvam de forma que os alunos se habituem a pensar, levantar hipóteses e conjecturas, validá-las e avaliá-las. Além disso, para o autor, possibilita a abordagem de conteúdos não específicos, como valores éticos e morais, honestidade, o sentido do trabalho, responsabilidade e criatividade, porém, é necessária uma mudança de paradigmas no modelo de ensino tradicional mediante as novas concepções pedagógicas introduzidas pelas TIC.

Para Borba (1999) a disponibilidade de novas mídias na sala de aula pode alterar o pensamento matemático, pois este é condicionado pelas mídias disponíveis em um determinado momento. Cita como exemplo que,“com a capacidade de geração de gráficos destas mídias há um deslocamento da ênfase algébrica dada ao estudo das funções para uma atenção maior à coordenação entre representações algébricas, gráficas e tabulares”(BORBA, 1999, p. 293). Scheffer, Bressan e Corrêa (2010) mencionam que a investigação matemática com as tecnologias de interface, explora diferentes modos e experimenta inúmeras variações, principalmente na construção geométrica e no estudo de funções a partir da representação gráfica, possibilitando questionar a intuição, na busca de argumentos para a validação de conjecturas.

Segundo Bellemain et al. (2010, p. 245) “a representação de objetos matemáticos em um ambiente computacional concebido para favorecer a aprendizagem de conhecimentos permite o desenvolvimento de novos registros de representação semiótica, explorando os aportes específicos de um suporte digital e computacional.” Nesse sentido, os autores complementam que um software deve dar acesso a diversos meios de representar objetos matemáticos e manipular essas representações nas interfaces do computador.

Cabe aqui ressaltar que, segundo a teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Duval (2003), a coordenação entre diferentes registros de representação, pelo aluno, é condição necessária para a aquisição do conhecimento matemático. Assim, o uso de TIC no processo de ensino e aprendizagem da Matemática deve propiciar o uso de diferentes tipos de representações e a articulação entre elas.

Ponte (1995) já afirmava que o computador no ensino da Matemática contribui para revitalizar a importância das competências de cálculo e de simples manipulação simbólica, que podem ser realizadas de forma mais rápida e eficiente; reforçar o papel da linguagem gráfica e de novas formas de representação, permitindo novas estratégias de abordagem de variados problemas; uma atenção redobrada as capacidades intelectuais de ordem mais elevada, situadas além do cálculo e da simples compreensão de conceitos e relações matemáticas e o crescimento do interesse pelo desenvolvimento de projetos e atividades de modelagem matemática e investigação.

Valente (2002) acredita que mais que isto as TIC criam circunstâncias para que as pessoas possam se expressar como um todo, não só no aspecto cognitivo, mas no emocional e social, o que significa que na aprendizagem não é mais levado em conta somente aspectos cognitivos, mas também o estético e o emocional estão cada vez mais evidentes nos projetos desenvolvidos por intermédio do computador.

Pais (2008) destaca também, a expansão de situações interativas, ou seja, as mídias digitais podem expandir o grau de interação. O autor admite que na utilização de um software educacional existe maior interatividade na medida em que o usuário exerce, com maior frequência, troca de informações qualitativas, o que não acontece ao brincar com um videogame por exemplo. Neste sentido, o autor infere que "o maior grau de interatividade, do ponto de vista educacional, equivale a uma intensa troca de informações qualitativas para a elaboração de conhecimentos relacionados aos saberes escolares" (PAIS, 2008, p.152).

As Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 2006), acentuam a conexão existente entre a tecnologia e os conhecimentos de Matemática, em que por um lado a inserção da tecnologia no dia-a-dia da sociedade exige indivíduos capacitados para usá-la, por outro essa mesma tecnologia apresenta-se com um recurso que pode subsidiar a aprendizagem da Matemática, preconizando a importância de contemplar uma formação escolar nesses dois sentidos.

Sobre a tecnologia voltada para a aprendizagem da Matemática, estas Orientações Curriculares Nacionais (BRASIL, 2006), sugere a utilização de softwares nos quais aos alunos podem explorar e construir diferentes conceitos matemáticos, ou seja, os alunos fazem experimentos, testam hipóteses, esboçam conjecturas, criam estratégias para resolver problemas. São características destes *softwares*:

> a) conter um certo domínio de saber matemático – a sua base de conhecimento; b) oferecer diferentes representações para um mesmo objeto matemático – numérica, algébrica, geométrica; c) possibilitar a expansão de sua base de conhecimento por meio de macroconstrucoes; d) permitir a manipulação dos objetos que estão na tela (BRASIL, 2006, p. 88).

No ensino da Geometria Analítica articulado a tecnologia, as Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 2006), enfatizam que há uma variedade de softwares que se pode trabalhar tanto com coordenadas cartesianas como polares, possuem recursos que facilitam a exploração algébrica e gráfica, de forma simultânea, o que ajuda o aluno a entender o significado geométrico do conjunto- solução de uma equação.

Assim, é fundamental que o professor escolha softwares que contemplem tais características, pois é fundamental para a qualidade do aprendizado oferecer recursos que propiciem aos alunos a exploração de conceitos e ideias matemáticas, o uso e articulação de diversos registros de representação semiótica, bem como o desenvolvimento de suas capacidades de raciocínio, análise, visualização e criatividade, permeadas por discussões e pela interação entre os mesmos.

Segundo Sutherland (2009), hoje em dia existe excelentes ambientes informatizados para se aprender Matemática, como de geometria dinâmica, de construção de gráficos, de Estatística e de pacotes de manipulação de dados. No entanto, para a autora, apesar desta variedade de ambientes computacionais e das pesquisas desenvolvidas sobre o ensino e aprendizagem da Matemática com TIC, há evidências de que os professores de Matemática estão pouco propensos a capitalizarem o potencial das TIC para a aprendizagem e apresenta algumas razões para isso descritas a seguir.

Uma delas é que muitos dos ambientes tecnológicos, como a geometria dinâmica, a álgebra computacional e as planilhas eletrônicas apesar de ricos são complexos e os professores precisam eles mesmos aprenderem como usar essas ferramentas para trabalhar Matemática (SUTHERLAND, 2009). Além disso, a autora afirma que muitas dessas ferramentas são tão poderosas e com tanto potencial que é difícil para os professores saberem por onde começar, e mesmo havendo livros, artigos e *websites* que oferecem ideias para se começar, só as ideias não bastam, é preciso apoio para os professores arriscarem a usar TIC, especialmente quando se trabalha em um sistema de avaliação de alta exigência.

Há também outras dificuldades, como afirmam Mattos, Moraes e Guimarães (2010), relacionadas às complexas realidades de sala de aula e a relação dos alunos com a Matemática e a tecnologia. Para os autores um aspecto relevante é a estrutura tradicional de aulas em laboratórios de informática tornando este ambiente estranho ao da sala de aula o que pode retirar o foco que é os objetos de aprendizagem específicos ou levar aos alunos dispersão inviabilizando os objetivos didáticos, fazendo com que o professor não exerça domínio de sua aula. Esses fatores o deixam inseguro e desestimulado a fazer mudanças.

Outro aspecto considerado obstáculo ao uso das TIC em Matemática para Mattos, Moraes e Guimarães (2010), é a difícil representação para procedimentos relacionados ao raciocínio matemático envolvido em resolução de problemas.

Neste sentido, os autores sublinham que a introdução das TIC nas aulas de Matemática tem por desafio a construção de uma estrutura que permita ao professor lecionar em melhores condições e que sua formação deve desenvolver o conhecimento didático sobre o uso da tecnologia e das representações matemáticas que podem ser aplicadas.

Em consonância, Bairral (2009) comenta que as TIC têm sido pouco implementadas em aulas de Matemática e suas possiblidades formativas muito pouco conhecidas pelos educadores. Dullius, Haetinger e Quartieri (2010) acentuam que salvo exceções, os computadores nas escolas não vêm se constituindo em um auxiliar da prática pedagógica, da exploração crítica, da prática de pesquisa porque a maioria dos professores não sabe utilizar esses recursos, urgindo que as escolas e instituições governamentais chamem para si a responsabilidade de capacitação destes professores. Os autores salientam que tal capacitação “não se trata de uma mera instrumentalização para operarem maquinas e programas (*hardwares e softwares*), mas, principalmente, para que tenham acesso ao conhecimento e à análise de outras opções metodológicas para o processo de ensino” (Dullius, Haetinger e Quartieri, 2010, p. 146).

Para Abreu e Bairral (2010) uma política de inclusão digital que considere um imbricamento entre dimensões epistemológicas, didáticas, técnicas e as inerentes à profissionalidade docente é uma possibilidade de investimento no conhecimento profissional dos educadores matemáticos, acompanhando, a longo prazo, suas implementações. Desse modo, os autores acreditam que os docentes podem ser construtores de práticas educativas autônomas, reflexivas e ousadas.

É evidente que o professor é o principal agente de mudança na escola tendo função preponderante na incorporação e uso efetivo das TIC como uma das opções metodológicas para o processo de ensino e aprendizagem. Contudo, não pode ser creditada ou imputada somente a ele a responsabilidade pelo sucesso ou fracasso dessa prática (MARINHO, 2002). O autor cita uma lista de habilidades e conceitos fundamentais que são exigidos aos professores para o trabalho com estes recursos organizada pela Sociedade Internacional para Tecnologia em Educação (International Society for Technology in Education):

> demonstrar habilidade para operar um sistema de computação de forma a usar com sucesso o *software*; avaliar e usar os computadores e tecnologias relacionadas no apoio ao processo instrucional; aplicar os princípios instrucionais atuais, pesquisa e práticas de avaliação apropriadas ao uso dos computadores e tecnologias relacionadas; explorar, avaliar e usar materiais baseados em tecnologia, incluindo aplicativos, *software* educacional e documentação associada; demonstrar conhecimento de uso de computadores para resolução de problemas, coleta de dados, gerenciamento da informação, comunicações, apresentações e tomada de decisão; elaborar e desenvolver atividades para a aprendizagem pelo estudante que integrem a computação e tecnologia para diversos grupos de estudantes; avaliar, selecionar e integrar instrução baseada em tecnologia no currículo em determinada área do conhecimento e/ou diferentes graus; demonstrar conhecimento de uso de multimídia, hipermídia e telecomunicações; demonstrar habilidade no uso de ferramentas de produtividade para uso pessoal e profissional, incluindo processador de textos, base de dados, planilhas e utilitários gráficos e de impressão; demonstrar conhecimento sobre questões de equidade, éticas, sociais, legais e humanas do uso da tecnologia na sua relação com a sociedade e modelos de comportamento adequados; identificar fontes para se manter atualizado no uso de computador e tecnologias relacionadas a educação; usar tecnologia baseada em computador para acessar informação, melhorando a produtividade pessoal e profissional; aplicar o computador e tecnologias relacionadas para facilitar os papéis emergentes do aprendiz e do educador (MARINHO, 2002, p. 47- 48).

Neste contexto, é importante que os cursos de formação de professores e formação continuada ofereçam elementos para que os estudantes desenvolvam além do domínio na utilização das TIC conhecimentos críticos para trabalhar com estas tecnologias em sua prática pedagógica, pois vários desafios lhes serão colocados nesta nova escola que emerge para a adoção de novas estratégias que incorporam tais recursos a fim de oferecer uma aprendizagem ativa, interativa e de qualidade ao educando.

Marinho (2002) coloca como um primeiro desafio a atitude reflexiva que o professor deverá exercer permanentemente sobre sua prática e sobre as novas demandas que se colocam à educação numa sociedade que vive a era da informação. O segundo desafio mencionado pelo autor é a substituição do papel de ator principal para o de coadjuvante no palco da escola, ou seja, ele não será mais um transmissor e sim um mediador do conhecimento, mas deve estar consciente que este novo papel não diminuirá sua importância. Continuando, o autor destaca ainda outros desafios: ocupar muito do seu tempo criando estratégias para a aprendizagem que sejam desafiadoras aos alunos e vinculadas às suas realidades; conhecer seus alunos, saber de suas necessidades e vontades e discutir com eles o projeto da sua própria formação; abandonar a posição solitária de uma prática tradicional para atuar cooperativamente junto aos demais professores no processo de educação de cidadãos; a necessidade, imperiosa, da formação continuada.

Além disso, outras habilidades devem compor o processo educativo pelo fato que hoje as informações obtidas pela internet ficam ultrapassadas muito rapidamente. Professores e alunos devem: "saber buscar informações; uma vez encontrada, saber avaliá-la criticamente; selecioná-la e estruturá-la em função dos seus interesses; processá-la de modo a incorporá-la na rede de conhecimentos que possui" (BAIRRAL, 2009, p.48).

O uso de TIC, de acordo com Penteado (2009) exige movimento constante, por parte do professor, para áreas desconhecidas onde a perda de controle ocorre constantemente, pois além dos problemas técnicos que surgem frequentemente atrapalhando o andamento das atividades, há perguntas imprevisíveis que grande parte dos professores tem dificuldade de lidar na interação com os alunos.

Assim, fica claro que professores e toda comunidade escolar serão constantemente desafiados, pois além destes surgirão outros desafios específicos a cada realidade escolar, mas é preciso experimentar novas ideias na busca de caminhos adequados para garantir a qualidade do processo de ensino e aprendizagem e, além disso, para o próprio crescimento profissional docente. Certamente existirão riscos, mas estes são inevitáveis na implementação de mudanças, do contrário se permanecerem acomodados os professores continuarão repetindo as mesmas aulas com os mesmos métodos, o que configura, como explicita Marinho (2002), uma irresponsabilidade já que a educação pertence aos alunos e não aos professores.

Numa perspectiva em que brevemente a informática estará impregnada no conhecimento dos profissionais de diferentes áreas do saber, Bairral (2009), afirma que as TIC serão um eixo norteador e um elemento presente em diferentes disciplinas, pois, cada vez mais, os alunos estão chegando à escola familiarizados com as mesmas e o professor deverá atuar como motivador, orientador e aprendiz constante. Em seu livro, o autor aborda possibilidades de inserção das TIC nas aulas de Matemática, entre elas os recursos disponíveis na internet, os *applets*, *software*s livres, uso de animações em 3D, o potencial de ambientes virtuais.

Com o incremento dos recursos informáticos se desenvolveu a geometria dinâmica. Curiosamente, como afirma Bairral (2009), embora a geometria seja uma área de escassas implementações no dia-a-dia da Matemática escolar ela é pioneira na disponibilização de uma variedade de recursos informáticos e de novidades na rede.

O desenvolvimento do pensamento geométrico, de acordo com o autor, tem singularidades de visualização e de representação envolvendo processos cognitivos que contribuem, diferentemente, no desenvolvimento da construção conceitual. “O trabalho com geometria possibilita o desenvolvimento de nossa capacidade de imaginar, criar, experimentar, analisar, representar e argumentar, dentre outros”(Bairral, 2009, p. 28). Assim, é necessário que o professor utilize diferentes recursos em sua prática pedagógica para criar situações de aprendizagem desafiadoras. E ainda, para que a geometria tenha um papel transformador no currículo e no aprendizado, Bairral (2009), destaca que a prática docente deve mudar seu foco não só em questões do conteúdo, em que o professor deve focar mais nas propriedades das figuras geométricas, nas relações geométricas, entre outros, como também, mudar o foco na dinâmica de sala de aula e no uso educativo das TIC, conforme ilustram as figuras 20 e 21 respectivamente.

Figura 20- Dinâmica de sala de aula

	MAIS FOCO	MENOS FOCO
DINÂMICA DE SALA DE AULA	Trabalho em grupos colaborativos Uso de materiais manipulativos Realizar questionamentos e levantar possibilidades de respostas Processos para justificar modos de pensar Uso de diferentes representações (escrita, gráfica, pictórica, tabular) e formas discursivas Integração curricular Uso de atividades de simulação Uso de calculadoras, softwares e outras mídias Construção de modelos geométricos variados Proposição de atividades que analisem qualitativamente o espaço cotidiano geométrico	Prática rotineira Memorização de regras Uma resposta e um método Uso de listas de exercícios Prática escrita (copiar) Ensino centrado no professor

Fonte: Bairral (2009, p.27).

Figura 21- Uso educativo das TIC

	MAIS FOCO	MENOS FOCO
USO EDUCATIVO DAS TIC	Uso de planilhas eletrônicas Uso de *softwares* específicos Uso de ambientes de aprendizagem Uso de *applets* Uso de *softwares* livres Construção de análise de gráficos Levantar conjecturas Simulação Descoberta e recriação Busca, leitura e contraste de informações Análise crítica de informações em *websites* Interação em pequenos grupos ou em comunidades mais amplas	Cópia e reprodução Exercício e prática Trabalho individualizado

Fonte: Bairral (2009, p.27).

Observa-se que as dinâmicas de sala de aula no ensino da geometria devem priorizar o trabalho em grupo e utilizar tanto materiais concretos para manipulação do aluno como recursos informáticos para atividades de simulação e diversificação dos diferentes tipos de representação do objeto matemático. Para o ensino da Geometria Analítica, por exemplo, há *softwares* de geometria dinâmica que, entre outras ferramentas, possuem a de rastrear o movimento de um Ponto e construir lugares geométricos possibilitando a exploração de suas propriedades. Desta forma, segundo Bairral (2009), as construções geométricas passam a ter uma dinâmica interativa e de constante descoberta.

Conforme o autor os recursos computacionais possibilitam ao aluno construir, mover, arrastar, aumentar, diminuir, etc., além de interagir e modificar as características de figuras geométricas ou gráficos de funções, equações, etc. No entanto, sublinha que além do uso de materiais didáticos diversos que desenvolvem, diferentemente, os aspectos conceituais, é preciso ainda uma reflexão e discussão dos processos geométricos envolvidos, pois apenas seu uso não garante o aprendizado.

Sobre a utilização dos recursos da internet, Bairral (2009) afirma que ainda é incipiente sua implementação com finalidade educativa e que esta implementação pode ser como ferramenta didática nas aulas de Matemática e como fonte de informação e construção do conhecimento. Mas, chama atenção que ao propor o uso de algum *site* da internet é necessário que o professor o acesse previamente e verifique a qualidade de suas informações e se o mesmo atende aos seus interesses didáticos. E, enfatiza que para analisar a aprendizagem mediada pelas ferramentas da internet, é preciso olhar a atividade e o contexto físico ou social onde esta atividade se desenvolve.

Moran (2012) salienta que a internet é um novo meio de comunicação que pode ajudar a rever, ampliar e modificar muitas das formas atuais de ensinar e aprender. Em consonância Behrens (2012) diz que a internet possibilita derrubar muros e fronteiras do conhecimento que se torna disponibilizado para a comunidade acadêmica e seu uso com critério pode ser um instrumento significativo para o processo educativo.

Relacionado ao uso de *applets*, os quais são pequenos programas escritos em linguagem Java e executáveis dentro de paginas da *web*, Bairral (2009) cita algumas razões para inseri-los na prática docente:

> sua diferente apresentação e dinâmica motiva os usuários por apresentar uma forma diferente de visualização e interação dos recursos usuais (livros e cds); seu uso é desafiador, o usuário pode aprender de uma forma diferente, até mesmo interagindo com a figura; estimula o trabalho individual e coletivo; facilidade de acesso pela disponibilidade gratuita na rede; as fontes de informação estão mais diversificadas e a escola tem o dever de estimular novas formas de experimentação e criação dos alunos, bem como seu uso crítico e não apenas cópia e reprodução de algo construído (BAIRRAL, 2009, p. 49).

Na internet, segundo o autor, é disponibilizada uma variedade de *applets* de conteúdo e características interativas variadas, embora poucos em português, podendo o docente utilizá-los tanto na elaboração de atividades para os alunos, o que contribui para ampliação do espaço físico da sala de aula e constituição de comunidades de aprendizagem, quanto no próprio estudo e aprendizagem. Porém destaca que ao propor atividades com *applets*, o professor deve antes fazer uma seleção prévia e cautelosa, pois há fontes que não são confiáveis, bem como alguns questionamentos e observações: o que se pode aprender de Matemática com esse *applet*, o que foi diferente de outros *applets* acessados, observar as instruções e manipulá-lo, que estratégia que pode ser utilizada para entender e resolver o problema proposto.

As animações são outro recurso inovador e dinâmico na tentativa de motivar os alunos e minimizar suas dificuldades. De acordo com Bairral (2009), ao trabalhar com geometria notou que os estudantes apresentam dificuldades em visualizar e entender algumas representações e ilustrações geométricas propondo o uso de animações como motivadoras do aprendizado.

O termo animação é utilizado por Bairral (2009, p.66) “como um tipo de recurso didático (construído em programas informáticos específicos) que apresenta possibilidades distintas de entendimento para as atividades, ou seja, movimentos e diferentes possibilidades de vistas de uma estrutura.”

Embora pouco utilizada em situações de ensino, as animações, segundo o autor, estão cada vez mais interessantes com o avanço da computação gráfica e descreve que uma animação deve ter como princípios: “a motivação, o envolvimento do sujeito (observador), o estímulo constante para a observação e criação e o desenvolvimento da capacidade imaginativa, criadora e comunicativa do indivíduo” (BAIRRAL, 2009, p.60). Ressalta que é um tipo de trabalho que demanda tempo, mas tem se mostrado eficaz no aprendizado, pois o aluno o desenvolve com interesse e motivação.

Ao elaborar animações, principalmente em 3D, de acordo como o autor, é preciso atenção quanto à percepção visual a visualização os quais são processos diferenciados tanto para o criador, como para o observador. Para Veloso (apud Bairral, 2009) a percepção visual é vista como uma atividade de nossos sentidos, quando olhamos um objeto, por exemplo, e a visualizaçãose refere a construção e manipulação de imagens mentais.

Bairral (2009) afirma que uma dificuldade na visualização pode causar uma parcial ou total incompreensão das animações, tanto do ponto de vista do observador quanto do animador. Por isso, o autor preconiza que na elaboração de uma animação é preciso considerar o tempo e também a complexidade do objeto em processo de animação, pois quem cria uma animação o faz com sua leitura do objeto e com os recursos tecnológicos disponíveis e quem observa e interpreta também o faz com seus recursos cognitivos, os quais devem ser desenvolvidos nas aulas de Matemática. Assim, o professor deve ser cauteloso na utilização de animações para que estas necessariamente venham a contribuir para o desenvolvimento cognitivo do aluno.

Outro tipo de TIC são os ambientes virtuais de aprendizagem (AVA) que tem despertado o interesse dos professores, pois podem dar suporte, segundo Bairral (2009), ao ensino presencial, à distância ou semipresencial. Duart e Sangrá (apud Bairral 2009) expressam que estes ambientes devem possibilitar flexibilidade, interatividade, inserção e vinculação na comunidade virtual constituída, e permitir aos envolvidos o acesso a materiais e demais fontes de recursos disponíveis na rede.

Um ambiente virtual de aprendizagem:

> integra diferentes formas de expressão (escrita, oral e audiovisual); possibilita o compartilhamento de informações e a comunicação de muitos indivíduos com muitos em diferentes tempos e espaços; não pré-determinam sentidos e polarizações; propicia informação distribuída, também construção hipertextual do conhecimento; exige planejamento, mas propiciam desdobramentos imprevisíveis; embora possa existir controle, há motivação e negociação constantes; pressupõe trabalho coletivo, embora cada usuário necessite de tempo para reflexão individualizada e, apesar de interface, possui multifaces (BAIRRAL, 2009, p.88).

Assim, um AVA deve criar oportunidades de aprendizagem possibilitando que os alunos produzam seus próprios significados e não ser apenas uma disponibilização de materiais. Para Bairral (2009) quando aprendemos em ambientes virtuais há uma configuração interativa e cognitiva diferente do que ocorre em dinâmicas tradicionais.

No entanto, o autor destaca não ser tarefa simples analisar o aprendizado em AVA, pois uma das primeiras dificuldades é a grande quantidade de informação que circula neste tipo de contexto e as demandas de cada participante. Além disso, enfatiza que o professor necessita ter a habilidade de interpretar globalmente as intervenções e respondê-las individual e coletivamente para atuar neste tipo de cenário, o que demanda tempo e dedicação.

É claro que estas possibilidades de utilização das TIC apenas poderão colaborar com a aprendizagem, conforme Masetto (2012), se o aprendiz for o centro do processo, que se realiza num clima de confiança e parceria entre alunos e professor, com uma proposta cooperativa e vivenciando a avaliação como um elemento motivador e incentivador desse processo.

Diante destas perspectivas, entende-se que as TIC podem contribuir no processo de ensino e aprendizagem, porém não basta aderi-las é necessário fazer bom uso destes recursos e analisar os conhecimentos desenvolvidos pelos alunos a partir da interação com os mesmos. Ao professor cabe a escolha adequada dos artefatos computacionais disponíveis para sua ação pedagógica, mas tão importante quanto isso é a mediação feita por ele na utilização destes artefatos para criar situações de ensino que propiciem ao aluno a construção de seus conhecimentos e de seu desenvolvimento enquanto cidadão. O uso de TIC requer que o professor aprenda a equilibrar planejamento e criatividade, organização e adaptação a cada situação, a aceitar imprevistos, a gerenciar o que é possível prever e incorporar o inesperado (MORAN, 2012).

Além disso, é preciso salientar que a utilização das TIC não é a solução para os problemas de aprendizagem, elas constituem uma estratégia de ensino que se utilizadas criteriosamente contribuem para minimizá-los, mas outros tipos de mídias também devem ser utilizadas na tentativa de garantir o aprendizado do aluno, pois como afirma Levy (1993) uma mídia não extermina a outra, ou seja, elas se complementam.

3.4.2 Resolução de Problemas

A evolução da Matemática é marcada historicamente pelo surgimento de grandes problemas em diversas culturas. Registros de problemas matemáticos são encontrados na história egípcia, chinesa, grega, etc. Atualmente a sociedade exige pessoas capacitadas para resolver problemas, sejam eles matemáticos ou não, acionando uma série de habilidades e conhecimentos.

Resolver um problema, para Polya (1997) é encontrar meios desconhecidos para um fim nitidamente imaginado, é encontrar um caminho onde nenhum outro é conhecido de antemão a partir de uma dificuldade, um caminho que contorne um obstáculo para alcançar um fim desejado, mas não alcançável de imediato, por meios adequados. Enfatiza que resolver problemas é da própria natureza humana, é a realização específica da inteligência.

> Podemos caracterizar o homem como o ‘animal que resolve problemas’; seus dias são preenchidos com aspirações não imediatamente alcançáveis. A maior parte de nosso pensamento consciente é sobre problemas; quando não nos entregamos à simples contemplação, ou devaneios, nossos pensamentos estão voltados para algum fim (POLYA, 1997, p. 2).

Sendo a Matemática uma área voltada para o raciocínio lógico e relação direta com a vida cotidiana das pessoas, sua metodologia de ensino deve, segundo Dante (2009), valorizar os pensamentos e questionamentos dos alunos por meio da expressão de suas ideias, o que remete a necessidade de explorar a oralidade em Matemática, estimulando-os a expressarem suas estratégias diante de uma questão. E a formulação e a Resolução de Problemas, na opinião do autor, trazem essa possibilidade.

Uma definição de problema geralmente utilizada por educadores matemáticos é: “uma situação que um indivíduo ou grupo quer ou precisa resolver e para a qual não dispõe de um caminho rápido e direto que o leve à solução” (LESTER, apud DANTE, 2009, p.12). Analogamente Dante (2002) afirma que um problema é qualquer situação que exige o pensar consciente do sujeito para solucioná-lo e um problema matemático é qualquer situação que exija pensar matematicamente e conhecimentos matemáticos para solucioná-la.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais, (BRASIL,1998), definem problema matemático como uma situação que demanda uma sequência de ações ou operações para obter um resultado, sendo possível construir a solução que não está disponível de início. E salienta que, em muitos casos, problemas apresentados aos alunos não são de fato problemas porque não apresentam um real desafio nem a necessidade de verificação para validar o processo de solução.

No contexto escolar, segundo Onuchic (1999), ensinar a resolver problemas matemáticos significava, até recentemente, apresentar situações-problemas incluindo um exemplo com uma solução técnica específica, e somente nas últimas décadas os educadores matemáticos passaram a dar mais atenção à capacidade de se resolver problemas.

Para a autora a Resolução de Problemas como meio de aprender Matemática reflete uma tendência de reação a caracterizações passadas da Educação Matemática como um conjunto de fatos, domínio de procedimentos algorítmicos ou um conhecimento a ser obtido por rotina ou exercício mental. Enfatiza que hoje a tendência é considerar os alunos como participantes ativos, os problemas como instrumentos precisos e bem definidos e a atividade na Resolução de Problemas como uma coordenação complexa simultânea de vários níveis de atividade, na busca de que estes alunos construam e se apropriem de um conhecimento do qual se servirão para compreender e transformar a realidade.

A pesquisa em Educação Matemática baseada no ensino de Resolução de Problemas começou a ser realizada de forma sistemática influenciada por Polya, na década de sessenta nos Estados Unidos, e segundo Andrade (1998) tornou-se prática comum, nesta época, utilizar sessões de resolução de problemas em grupo e com os alunos se manifestando em voz alta, com a preocupação voltada para o processo envolvido nesta metodologia, centrando o ensino no uso de diferentes estratégias.

De acordo com Onuchic (1999) a Resolução de Problemas ganhou espaço no mundo inteiro no fim da década de setenta com um movimento a favor do ensino voltado a esta prática. Segundo a autora, em 1980, nos Estados Unidos, uma publicação do NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) foi editada chamando a todos os interessados, num esforço cooperativo, a buscarem uma melhor educação matemática para todos, trazendo recomendações que colocavam o foco da Matemática escolar na habilidade de resolver problemas. Este documento dizia entre outras recomendações, segundo a autora, que os indivíduos precisavam estar preparados para tratar com problemas especiais que iriam se deparar em suas próprias carreiras, ou seja, "a Resolução de problemas envolve aplicar a Matemática ao mundo real, atender a teoria e a prática de ciências atuais e emergentes e resolver questões que ampliam as fronteiras das próprias ciências matemáticas" (ONUCHIC, 1999, p. 204).

Para Polya (2006) o ensino através da metodologia da Resolução de Problemas tem como objetivo elevar a criatividade e o interesse dos alunos em sala de aula, bem como, habituar os estudantes a tratar situações problemas abertas, e não apenas torná-los capazes de resolver exercícios mecanicamente. Salienta que, ensinar os alunos a “pensar” e “como pensar” são aspectos fundamentais deste processo.

O professor, conforme Polya (1997), deve estabelecer a classe certa de problemas para os seus alunos: não muito difíceis, nem fáceis demais, naturais, interessantes, que desafiem a curiosidade, adequados ao conhecimento; se permitir algum tempo para apresentar o problema apropriadamente; auxiliar seus alunos apenas o suficiente e discretamente para que eles possam desfrutar da satisfação da descoberta. Estas experiências podem contribuir, de acordo com o autor, para o desenvolvimento mental dos alunos.

A Resolução de Problemas, enquanto metodologia para o ensino da Matemática, na concepção de Andrade (1998), possibilita ao estudante desenvolvimento cognitivo, motiva-o ao estudo, mostrando o lado real da disciplina. Onuchic (1999) estabelece que um problema é tudo aquilo que não se sabe fazer mas que se quer resolver, passando este a ser um ponto de partida para os professores fazerem conexões entre diferentes ramos da Matemática, abordando novos conceitos e conteúdos por meio da abordagem de Resolução de Problemas como metodologia, na qual o aluno tanto aprende Matemática resolvendo problemas como aprende Matemática para resolvê-los.

Enfatiza, também, que nessa metodologia o ensino é fruto de um processo mais amplo, em que o mais importante é ajudar os alunos a compreender os conceitos, os processos e as técnicas operatórias necessárias dentro do trabalho feito em cada unidade temática, pois à medida que a compreensão dos alunos se torna mais profunda e mais rica, aumenta sua habilidade em usar a Matemática para resolver problemas. “Quando os professores ensinam Matemática através da Resolução de Problemas, eles estão dando aos seus alunos um meio poderoso e muito importante de desenvolver sua própria compreensão” (ONUCHIC, 1999, p. 208). A autora acredita que os professores, autores de livros, promotores de currículos e avaliadores da aprendizagem deveriam focar na compreensão como objetivo de ensino, desta forma, eles mudariam a visão estreita de que a Matemática é apenas uma ferramenta para resolver problemas para uma mais ampla, de que é um caminho de pensar e um organizador de experiências.

Utilizar a metodologia da Resolução de Problemas significa que:

> o ponto de partida das atividades matemáticas não é a definição mas o problema; que o problema não é um exercício no qual o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou uma determinada técnica operatória; que aproximações sucessivas ao conceito criado são construídas para resolver um certo tipo de problemas e que, num outro momento, o aluno utiliza o que já aprendeu para resolver outros problemas; que o aluno não constrói um conceito em resposta a um problema, mas constrói um campo de conceitos que tomam sentido num campo de problemas; que a Resolução de Problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas como orientação para a aprendizagem (ONUCHIC, 1999, p.215).

Nesse sentido, o processo de ensino e aprendizagem da Matemática orientado, também, pela Resolução de Problemas não se restringe a abordar conceitos, definições, fórmulas e técnicas prontas isoladamente do problema valorizando a memorização destes, mas estende-se a relação existente entre eles, propiciando além construção do conhecimento matemático pelo aluno, o desenvolvimento da sua capacidade de raciocínio para criar estratégias para resolver problemas e enfrentar situações que irá se deparar ao longo de sua vida, contribuindo na sua formação de cidadão e agente de transformações positivas na sociedade.

Os problemas utilizados nas aulas de Matemática podem ser de diferentes tipos, que segundo Butts (1997) divide o conjunto de problemas matemáticos em cinco subconjuntos: exercícios de reconhecimento, exercícios algorítmicos, problemas de aplicação, problemas de pesquisa aberta e situações-problema.

Os exercícios de reconhecimento, segundo o autor, pedem para reconhecer ou recordar um fato específico, uma definição ou enunciado de um teorema. Em consonância, Dante (2009) afirma que o objetivo deste tipo de exercício é fazer com que o aluno lembre conceitos, propriedades, etc. Os exercícios algorítmicos são os que podem ser resolvidos com um procedimento passo a passo, frequentemente um algoritmo numérico (BUTTS, 1997). O desafio, segundo o autor, é torná-lo interessante e traz duas sugestões nesse sentido: dar uma sequência de exercícios algorítmicos com um propósito e propor o problema em sentido contrário, o que frequentemente possibilita mais que uma solução. O objetivo deste tipo de problema, segundo Dante (2009) é treinar a habilidade de executar um algoritmo e reforçar conhecimentos anteriores.

Embora os exercícios de reconhecimento e algorítmicos sejam classificados por Butts (1997) e Dante (2009) como tipos de problema, não são realmente problemas segundo Echeverría (1998), já que não existe nenhum obstáculo entre a proposição e a meta, e considerando ainda, que somente existe um problema quando não há um algoritmo conhecido que leve diretamente à solução. Adotando esta postura, não seria possível, na opinião da autora, usar verdadeiros problemas matemáticos durante as primeiras etapas da escolaridade. Entretanto, ela coloca que também é possível considerar a existência de um problema quando o exercício representar uma tarefa nova para um determinado aluno.

É importante aqui destacar a diferença entre um problema e um exercício. De acordo com Dante (2009), o exercício serve para exercitar, para praticar determinado algoritmo ou procedimento a partir da extração das informações fornecidas, enquanto uma situação-problema não tem previamente nenhum algoritmo que garanta a sua solução, é uma situação em que se procura algo desconhecido exigindo iniciativa e criatividade aliada ao conhecimento de algumas estratégias.

> Um problema se diferencia de um exercício na medida em que, neste último caso, dispomos e utilizamos de mecanismos que nos levam, de forma imediata, à solução. Por isso, é possível que uma mesma situação represente um problema para uma pessoa enquanto que para outra esse problema não existe, quer porque não se interesse pela situação, quer porque possua mecanismos para resolvê-la com um investimento mínimo de recursos cognitivos e pode reduzi-la a um simples exercício. [...] interpretar a informação contida num gráfico ou isolar uma incógnita numa equação matemática pode representar um problema, um exercício, ou nenhuma das duas coisas, para alunos com diferentes conhecimentos e atitudes (ECHEVERRÍA E POZO, 1998, p. 16).

De forma resumida, os autores especificam que a realização de exercícios se baseia no uso de habilidades ou técnicas rotineiras automatizadas como consequência de uma prática contínua, e um problema é uma situação nova ou diferente do que já foi aprendido, que requer a utilização estratégica de técnicas já conhecidas. Assim, enfatizam que a solução de problemas e a realização de exercícios possuem limites nem sempre fáceis de estabelecer, pois depende da experiência e dos conhecimentos prévios de quem executa a tarefa e também dos objetivos que estabelece enquanto a realiza, mas nas atividades de sala de aula é importante que esta distinção esteja bem definida, deixando claro para o aluno que as tarefas exigem algo mais de sua parte do que simples exercício repetitivo.

Sobre os problemas de aplicação, Butts (1997) explica que são problemas tradicionais, envolvem algoritmos aplicativos, exigindo para sua resolução a formulação simbólica do problema e a manipulação dos símbolos mediante algoritmos diversos. Na classificação de Dante (2009), percebe-se que este tipo de problema é denominado por ele como problema-padrão, que pode ser simples (resolvido com uma única operação) ou composto (resolvido com duas ou mais operações), em que a tarefa é transformar a linguagem usual em linguagem matemática e o objetivo é fixar fatos básicos por meio dos algoritmos. Enquanto problemas de aplicação, na concepção do autor, são aqueles que retratam situações reais do dia a dia e que exigem o uso da matemática para serem resolvidos, além de pesquisa e levantamento de dados.

Com relação aos problemas de pesquisa aberta, Butts (1997) os define como aqueles em que no enunciado não há uma estratégia para resolvê-los, e normalmente expressa-se por “Prove que...”, “Mostre que...”, “Para quais... é...”. Para o autor a resolução deste tipo de problema requer um alto nível de raciocínio e sua função mais importante é incentivar a conjectura, porém o tipo de enunciado não provoca este incentivo, mas é possível reformulá-lo de modo a consegui-lo. Nestes problemas, Medeiros (2001) afirma que os alunos têm a oportunidade de conquistar suas próprias ideias a respeito de um novo conteúdo, fazendo com que o estudante viva a necessidade de buscar a solução para o problema.

Na perspectiva de problemas abertos, Diniz e Smole (2001) os classificam ainda como: problemas sem solução, os quais rompem a concepção de que os dados apresentados devem ser usados na resolução e que todo problema tem solução, permitindo ao aluno à dúvida e o raciocínio crítico; problemas com mais de uma solução, os quais fazem com o aluno perceba que resolvê-los é um processo de investigação e são importantes para romper a crença de que todo problema tem uma única solução e uma maneira correta de resolvê-lo; problemas com excesso de dados, em que nem todas as informações disponíveis no texto são usadas na resolução, fazendo com que o aluno aprenda a selecionar os dados relevantes para a mesma; problemas de lógica, os quais propõem uma resolução cuja base não é numérica, exigindo raciocínio dedutivo e propiciam o desenvolvimento de operações de pensamento como previsão e checagem, levantamento de hipóteses, busca de suposições, análise e classificação.

As situações-problema intituladas por Butts (1997) é um subconjunto dos tipos de problemas matemáticos em que não estão incluídos problemas propriamente ditos, mas situações nas quais uma das etapas decisivas é identificar o(s) problema(s) inerente(s) às mesmas, cuja solução irá melhorá-las.

Dante (2009) ainda cita como tipos de problemas: os problemas-processo ou heurísticos e problemas de quebra-cabeça. Os problemas-processo ou heurísticos são, segundo o autor, os que cuja solução envolve operações que não estão contidas explicitamente no enunciado, não podendo ser diretamente traduzidos para a linguagem matemática, nem resolvidos pela aplicação automática de algoritmos, pois exige do aluno tempo para pensar e arquitetar uma estratégia que poderá solucioná-los.

Os problemas de quebra-cabeça, na definição de Dante (2009), são problemas que envolvem e desafiam os alunos constituindo a matemática recreativa, e a solução depende de sorte ou facilidade em perceber algum truque ou regularidade. Estes problemas e os jogos matemáticos, na opinião de Butts (1997), são outra rica fonte de problemas abertos.

As orientações Curriculares Nacionais (BRASIL, (2006) ressalta a importância para o exercício da cidadania, a competência de analisar um problema e tomar as decisões necessárias à resolução e preconiza que com o desenvolvimento de novos paradigmas educacionais e diante das limitações dos problemas fechados, no qual o aluno identifica de antemão o conteúdo a ser utilizado, é necessária a utilização de problemas abertos e situações-problema na prática de ensino. Salienta que o problema aberto visa levar o aluno a certa postura em relação ao conhecimento matemático e sua prática de sala de aula transforma a relação entre o professor e os alunos e entre os alunos e conhecimento, a situação-problema leva o aluno à construção de um novo conhecimento matemático, pois o conceito necessário à sua resolução é que se quer que o aluno construa.

Diante deste contexto, cabe a indagação de qual o melhor caminho para resolver um problema. Os PCNs (BRASIL,1998) colocam que resolver um problema pressupõe o aluno elaborar um ou vários tipos de procedimentos de resolução (realizar simulações, fazer tentativas, formular hipóteses, etc.), comparar seus resultados com os dos outros alunos e validar seus procedimentos. Polya (2006) distingue quatro fases para a resolução de um problema: compreender o problema, elaborar um plano, executar um plano e fazer o retrospecto ou verificação. Estas fases também são concebidas por outros autores como Echeverría e Pozo (1998), Dante (2009). A figura 22 apresenta o esquema de Polya (2006), um resumo do que consiste cada uma dessas fases.

Figura 22- Como resolver um problema

Compreensão do Problema	
Primeiro É preciso *compreender* o problema.	Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante? É possível satisfazer a condicionante? A condicionante é suficiente para determinar a incógnita? Ou insuficiente Ou redundante? Ou contraditória? Trace uma figura. Adote uma notação adequada. Separe as diversas partes da condicionante. É possível anotá-las?
Estabelecimento de um Plano	
Segundo Encontre a conexa entre os dados e a incógnita. É possívelque seja obrigado a considerar problemas auxiliares se não puder encontrar uma conexão imediata. É preciso chegar afinal a um *plano* para a resolução.	Já o viu antes? Ou já viu o mesmo problema apresentado sob uma forma ligeiramente diferente? Conhece um problema correlato? Conhece um problema que lhe poderia ser útil? Considere a incógnita! E procure pensar num problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante. Eis um problema correlato e já antes resolvido. É possível utiliza-lo? É possível utilizar seu resultado? É possível utilizar seu método? Deve-se introduzir algum elemento auxiliar para tomar para tornar possível a sua utilização? É possível reformular o problema? Ou reformulá-lo de outra maneira? Volte às definições. Se não puder resolver o problema proposto, procure antes resolver algum problema correlato. É possível imaginar um problema correlato mais acessível? Um problema análogo mantenha apenas uma parte da condicionante, deixe a outra de lado; até que ponto fica assim determinada a incógnita? É possível variar a incógnita, ou só dados, apropriados para determinar a incógnita? É possível variar a incógnita, ou os dados, ou todos eles, se necessário, de tal maneira que fiquem mais próximos entre si? Utilizou todos os dados? Utilizou toda a condicionante? Levou em conta todas as noções essenciais implicadas no problema?
Execução do Plano	
Terceiro *Execute* o plano.	Ao executar o seu plano de resolução, verifique cada passo. É possível verificar claramente que o passo está correto? É possível demonstrar que ele esta correto?
Retrospecto	
Quarto *Examine* a solução obtida.	É possível verificar o resultado? É possível verificar o argumento? É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? É possível perceber isto num relance? É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema?

Fonte: Polya (2006, p. xix- xx).

Polya (2006) explica que ao procurar a solução de um problema o primeiro passo é compreendê-lo, ou seja, o aluno precisa perceber claramente o que é necessário, mas também deve desejar resolvê-lo, por isso o problema precisa ser bem escolhido. O segundo passo é elaborar um plano para resolver o problema, isto é o aluno deve considerar o problema sob diversos pontos de vista, fazer uma conexão com conhecimentos previamente adquiridos, tentar reconhecer alguma coisa de familiar, um problema semelhante, examinar demoradamente as ideias que surgem para a resolução, a que caminhos elas levam. Na execução do plano é preciso realizar detalhadamente todas as operações algébricas e geométricas viáveis, verificar a correção de cada passo, pelo raciocínio formal ou pela intuição, ou de ambas as maneiras. Se o problema for muito complexo pode constituir cada grande passo de diversos pequenos. E, por fim o retrospecto consiste em reconsiderar e reexaminar o resultado final e o caminho que levou até este, assim os alunos poderão consolidar o seu conhecimento e aperfeiçoarem sua capacidade de resolver problemas. Nestas etapas o professor deve incentivar os alunos ajudando-os a formular perguntas e a propor estratégias.

De acordo com Dante (2009, p. 29),

> estas etapas não são rígidas, fixas e infalíveis. O processo de resolução de problemas é algo mais complexo e rico, que não se limita a seguir instruções passo a passo que levarão a solução, como se fosse um algoritmo. Entretanto, de modo geral elas ajudam o solucionador a se orientar durante o processo.

Ensinar a resolver problemas, segundo o autor, é uma tarefa mais difícil do que ensinar conceitos, habilidades e algoritmos matemáticos porque envolve um mecanismo direto de ensino e sim uma variedade de processos de pensamento que precisam ser cuidadosamente desenvolvidos pelo aluno com o apoio do professor. Echeverría (1998) concorda que ensinar a resolver problemas não é uma tarefa fácil, mas destaca que a Resolução de Problemas constitui não somente um método de aprendizagem como também um objetivo da aprendizagem. Para a autora é um método na medida em que grande parte do conteúdo da Matemática escolar trata da aprendizagem de habilidades, técnicas, algoritmos ou procedimentos heurísticos que podem ser usados em diferentes contextos e para aprendê-las é necessário usá-las no contexto de diversos problemas. É um objetivo da aprendizagem na medida em que não é possível aprender a resolver problemas independente da aprendizagem de conceitos e conhecimentos matemáticos e que, ao mesmo tempo exige o acionamento e a coordenação de processos complexos.

A utilização da Resolução de Problemas é uma possibilidade metodológica importante para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática que pode ser associada a outras, como as TIC por exemplo. Onuchic e Allevato (2009) mencionam que ao utilizar o computador na resolução de problemas que visam à introdução de um novo conceito, o processo subsequente de formalização dos conteúdos matemáticos se torna mais fácil e natural devido a abordagem empírica e experimental que o computador possibilita.

Trigo (2011) também ressalta que *softwares* dinâmicos são ferramentas úteis na construção de representações de entidades geométricas e permitem visualizar de maneira precisa o comportamento de partes de certa configuração ou representação do problema oportunizando ao aluno mover elementos destas configurações e observar mudanças ou invariantes no processo de análise deste problema. A observação de invariantes em uma representação resulta no desenvolvimento de conjecturas e no processo de argumentação e comunicação dessas conjecturas por parte do aluno. O autor salienta que durante a construção e análise das representações dinâmicas do problema geradas pelo uso do *software* o estudante deve pensar perguntas que conduzam à conjecturas e relações.

Assim, no contexto do processo de ensino e aprendizagem da Geometria Analítica entende-se que é possível e pertinente propor diferentes tipos de problemas que podem ser trabalhados com os alunos a partir da metodologia de Resolução de Problemas vinculada a utilização de tecnologias que contribuem no processo de resolução ao possibilitar a exploração e coordenação dos diferentes tipos de representação, promovendo um encadeamento de ideias e conceitos matemáticos.

3.4.3 O lúdico através da utilização de jogos digitais

Entre as tendências em Educação Matemática, o jogo tem uma capacidade natural de relacionar o lúdico às experiências envolvidas durante o aprendizado, além de exigir uma postura ativa dos educandos durante essas experiências. Desta forma, utilizar o jogo relacionado ao ensino e aprendizagem é utilizar uma prática natural que acompanha a criança desde seus primeiros anos de vida, mas envolvendo elementos que promovam além do aprendizado, o desenvolvimento de outras capacidades, pois:

> ao brincar, a criança aprende a agir numa esfera cognitiva estimulada pelas tendências internas, ao invés de agir numa esfera visual externa, motivada pelos objetos externos. Ela aprende a agir independentemente daquilo que ela vê, os objetos perdem sua força motivadora inerente (MACHADO et al,1990).

Hoje, conforme explica Mattar (2010), o jogo não é uma atividade meramente recreativa e infantil, ao passo que com o advento das tecnologias, os jogos digitais fazem parte do cotidiano de boa parte das pessoas de todas as idades, se apresentam ainda numa variedade de gêneros com princípios e características que se pretende alcançar na formulação de jogos para educação. Por isso que nos últimos anos as pesquisas com jogos digitais e educação, segundo o autor, vêm crescendo no horizonte científico.

Autores com pesquisas atuais acerca dos jogos digitais em educação como Prensky (2012), Moita (2007), Zanola (2010) e Arruda (2011), afirmam ser possível relacionar não somente os jogos educacionais à educação, mas principalmente relacionar os jogos não educacionais que são jogados pelos jovens, como é o caso do RISE OF NATIONS e THE SIMS, devido à complexidade e a capacidade de manter o jovem interessado nestes jogos. Segundo

Mattar (2010), há ainda uma separação que pode ser entendida como qualitativa entre jogos educacionais e os jogos para diversão, os jogos educacionais produzidos são considerados chatos quando comparados aos jogos para diversão.

Esta relação do jogo digital com a educação se deve ao fato de existir princípios de aprendizagens presentes nestes jogos e que são tratados frequentemente na literatura conforme explica Mattar (2010), onde um dos princípios é a capacidade do jogo digital adaptar-se às habilidades e capacidades dos alunos de uma forma que o professor não consegue. Ainda o jogo oferece um *feedback* constante e imediato, ou seja, uma retomada de sua evolução, o poder de envolvimento e concentração com base nos desafios propostos, formulação e reestruturação de conceitos, etc.

Entretanto, Prensky (2012) destaca que os jogos digitais não são perfeitos para todos os públicos, assuntos e contextos. É preciso avaliar bem se um tema é ou não apropriado a um jogo para não prejudicar assim sua proposta e jogabilidade.

Segundo Prensky (2012), a aprendizagem baseada em jogos digitais funciona principalmente por três razões, onde a primeira é o fato de que o aprendizado está colocado em um contexto de jogo, outro é a interatividade da aprendizagem promovida pelo jogo e, por último, a relação entre as duas primeiras. Assim a utilização de jogos digitais em educação reúne principalmente fatores motivacionais importantes, mas que dependem de outros aspectos como o público, assunto, tecnologia disponível e o planejamento que precisam ser considerados como ainda explica o autor.

O ensino da Matemática tem entre outros objetivos, o de desenvolver o raciocínio lógico, estimular a reflexão acerca de elementos concretos e abstratos, de resolver problemas que refletem ou não situações reais e desta forma o uso de jogos pode contribuir como sugere os Parâmetros Curriculares Nacionais:

> os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. Propiciam a simulação de situações-problema que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações” (BRASIL, 1998, p.47).

Um desafio para os professores é integrar os jogos às suas aulas de modo que contribuam realmente para o aprendizado. Para isto é necessário, segundo Mattar (2010) e Moita (2007) que o professor faça uma reflexão acerca de suas concepções sobre a aprendizagem nos dias de hoje a partir do perfil dos jovens, entendê-los de modo a estimular suas potencialidades com base em seus estilos de aprendizagem que certamente inclui tecnologias e jogos digitais, visto que como nativos digitais, crescem cercados dos mais variados artefatos tecnológicos, o que contribui para uma facilidade natural de utilização destes artefatos.

Segundo Moita (2007), é preciso que se entenda que os jovens jogadores não são receptores vazios, passivos, mas sim interagem, criam e recriam seus significados, definem espaços de rede colaborativa, de partilha e inovação que facilitam os modos de aprendizagem colaborativa e estruturação de grupos, promovem iniciativas para a resolução de problemas, reflexões sobre o tema proposto, além das trocas de saberes e tomadas de decisões para o avanço no jogo. Assim, para Flemming e Mello (2003, p.37), "é importante que os jogos estejam inseridos em um plano de aula bem estruturado, com uma sequência didática que promova a interação entre os objetos de estudos e as estratégias do jogo".

Em consonância Groenwald e Timm (2000) mencionam que os jogos devem ser planejados e elaborados pelo professor de maneira que possam explorar as potencialidades previstas, levando o estudante a adquirir conceitos importantes e utilizá-los na aprendizagem como facilitadores, colaborando para trabalhar os bloqueios que os alunos apresentam em relação a alguns conteúdos matemáticos.

Neste sentido, o professor não tem mais um papel central durante o processo de ensino e aprendizagem e sim o jogo digital que apresenta o conteúdo, que faz pensar, que estimula a solucionar as dificuldades e assim vencer as etapas. O professor se apresenta agora como mediador, facilitador e organizador da atividade. É ele quem define como se dará a relação do jogo com o conteúdo, escolhe ou desenvolve o jogo segundo um estilo envolvente que ensine o que é preciso e que envolva o aluno na busca por saber mais. Para esta escolha o professor precisa verificar a presença de elementos como desafio, fantasia e curiosidade, que segundo Prensky (2012) são necessários em qualquer jogo digital interessante.

A Geometria Analítica, trata-se de uma área que fundamenta teoricamente a movimentação de objetos segundo um sistema de orientação considerando inclusive forças físicas como, por exemplo, a trajetória de cometas e outros corpos celestes, movimentos balísticos e fenômenos climáticos. Outra área bastante fecunda para o campo da Geometria Analítica é a de computação gráfica e exames por imagem de modo que, as imagens computadorizadas geradas são formadas por um conjunto de pontos alocados seguindo a orientação por coordenadas cartesianas bidimensionais (x,y) e tridimensionais (x,y,z).

Desta forma, um jogo bastante simples e antigo, chamado Batalha Naval pode ser considerado um bom exemplo de jogo digital utilizado no contexto do ensino da Geometria Analítica, por se tratar de um jogo que simula uma batalha com embarcações que se movimentam segundo um sistema de orientação por coordenadas em duas dimensões (x,y), como foi desenvolvido na pesquisa de Dallemole (2010), possibilitando ao aluno a articulação entre o registro gráfico e o algébrico correspondente a trajetória do míssil lançado por uma das embarcações com o objetivo de atingir a outra.

Portanto, é visto nos jogos digitais um recurso metodológico lúdico que pode ser inserido no ensino e aprendizagem da Geometria Analítica a fim de despertar o interesse e motivação dos alunos, facilitar a interação e colaboração entre os mesmos e contribuir para a compreensão e aplicação de conceitos estudados, além da possibilitar de articulação de diferentes registros semióticos que podem estar envolvidos nos jogos.

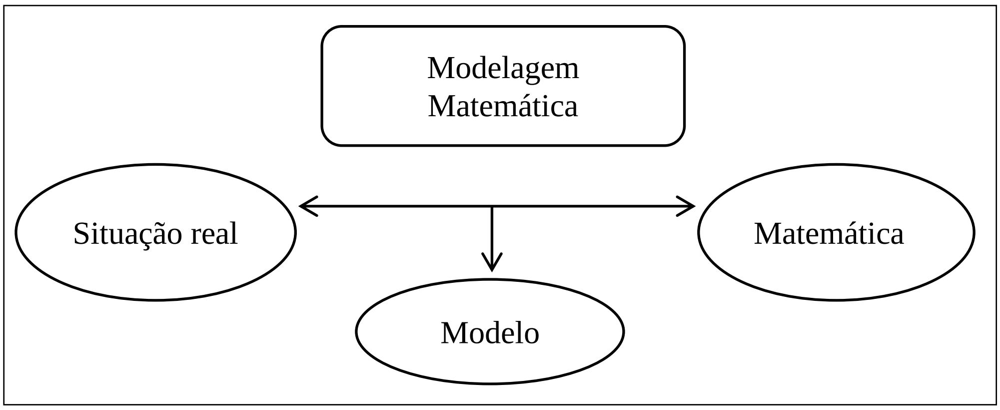
3.4.4 Modelagem Matemática e Simulação

A Modelagem e a Simulação, para Bornatto (2002) constituem uma metodologia de ensino em que os estudantes participam na escolha do tema a ser estudado e pela qual a matemática adquire uma natureza interdisciplinar.

Para Bassanezi (2009, p.16) “a Modelagem Matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real”. Desta forma uma atividade de modelagem pode ser descrita, segundo Almeida, Silva e Vertuan (2012), em termos de uma situação inicial (situação-problema), ou seja, uma situação na qual o indivíduo não possui esquemas *a priori* para a solução, de uma situação final desejada, a qual representa uma solução para a situação inicial (modelo matemático) e de um conjunto de procedimentos e conceitos necessários para passar a situação inicial para a situação final. Sendo assim, os autores complementam as relações entre realidade e Matemática servem de subsídio para que os conhecimentos matemáticos e não matemáticos sejam acionados ou produzidos e integrados.

Em consonância, Biembengut e Hein (2003, p.13) entendem que “Matemática e realidade são dois conjuntos disjuntos e a modelagem é um meio de fazê-los interagir”. Consideram a Modelagem Matemática uma arte ao formular, resolver e elaborar expressões que sirvam não apenas para uma solução particular, mas também como suporte para outras aplicações e teorias. A figura 23 apresenta o esquema do processo da modelagem na concepção dos autores.

Figura 23- Esquema do processo da Modelagem Matemática



Fonte: Biembengut e Hein (2003, p.13).

O modelo matemático obtido no processo de modelagem "é um sistema conceitual, descritivo ou explicativo, expresso por meio de uma linguagem ou estrutura matemática que tem por finalidade descrever ou explicar o comportamento de outro sistema, podendo mesmo permitir a realização de previsões sobre este outro sistema" (ALMEIDA, SILVA e VERTUAN, 2012, p.13). Resumindo os autores definem modelo matemática como uma representação simplificada da realidade sob a ótica daqueles que a investigam visando fomentar a solução de algum problema. Bassanezi (2009) chama de modelo matemático um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado, possuindo uma linguagem concisa que expressa as ideias de maneira clara e proporciona resultados que propiciam o uso de métodos computacionais para calcular soluções numéricas.Assim, pode-se afirmar, de acordo com Almeida, Silva e Vertuan (2012), que o modelo matemático é o que "dá forma" à solução do problema e a Modelagem Matemática é a atividade de busca por essa solução.

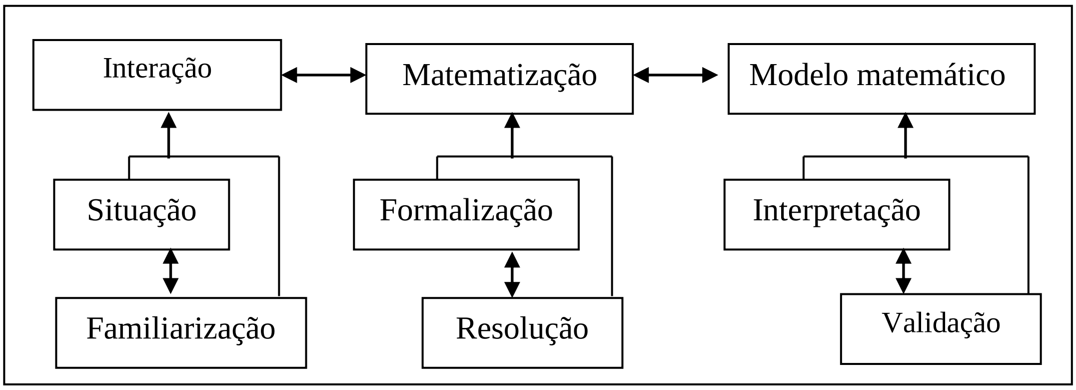
Sendo a Modelagem, segundo Pereira (2003), um ato de construir modelos, considera que a verificação da aplicabilidade de uma determinada lei ou princípio num dado sistema configura uma simulação. Para o autor um sistema de modelagem pode ser utilizado tanto para criar modelos, quanto simulações. "A diferença entre modelo e simulação é que no primeiro temos a estrutura que arremeda a realidade e sobre a qual se assentam as teorias que buscamos comprovar; no segundo vemos o resultado obtido a partir do emprego do modelo" (PEREIRA, 2003, p.4).

Sobre Modelagem e Simulação Valente (1999, p.58) afirma que:

> um determinado fenômeno pode ser simulado no computador, bastando para isso que um modelo desse fenômeno seja implementado na máquina. Ao usuário da simulação, cabe a alteração de certos parâmetros e a observação do comportamento do fenômeno, de acordo com os valores atribuídos. Na modelagem, o modelo do fenômeno é criado pelo aprendiz, que utiliza recursos de um sistema computacional para implementá-lo. Uma vez implementado, o aprendiz pode utilizá-lo como se fosse uma simulação.

A interação proposta por Biembengut e Hein (2003), conforme figura 4, que permite representar uma situação real por meio de um modelo matemático envolve uma série de procedimentos em que se definem estratégias de ação em relação à busca da solução do problema. Os autores agrupam esses procedimentos em três etapas: interação, etapa na qual se reconhece a situação-problema e se familiariza com o assunto a ser modelado; matematização, em que se formula o problema e o resolve em termos do modelo; modelo matemático, etapa final na qual se interpreta a solução e se valida o modelo. A figura 24 apresenta a dinâmica destas etapas.

Figura 24- Dinâmica da Modelagem Matemática



Fonte: Biembengut e Hein (2003, p. 15).

A etapa de interação implica, segundo Almeida, Silva e Vertuan (2012), no primeiro contato com a situação-problema, coletar dados quantitativos e qualitativos que conduzam a formulação do problema e definição de metas para sua resolução. Na matematização os autores explicam que a situação-problema, que geralmente apresenta-se em linguagem natural, é transformada em uma linguagem matemática que evidencia o problema matemático a ser resolvido, o que consiste na construção do modelo. Para concluir o modelo matemático, ainda segundo os autores, é realizada a interpretação dos resultados obtidos, ou seja, uma análise da resposta para o problema o que constitui um processo avaliativo realizado pelos envolvidos na atividade e implica uma validação da representação matemática associada ao problema.

A identificação dessas etapas no desenvolvimento de uma atividade de Modelagem evidenciam aspectos característicos da Modelagem Matemática: “o início é uma situação-problema; os procedimentos de resolução não são predefinidos e as soluções não são previamente conhecidas; ocorre a investigação de um problema; conceitos matemáticos são introduzidos ou aplicados; ocorre a análise da solução" (ALMEIDA, SILVA e VERTUAN, 2012, p.17). Essas etapas, conforme os autores, podem não decorrer da forma linear, elas são dinâmicas com constantes movimentos de "ida e vinda". Argumentam que a Modelagem neste contexto constitui uma alternativa pedagógica nas aulas de Matemática, e em atividades conduzidas segundo essa alternativa são identificadas características fundamentais: envolvem um conjunto de ações cognitivas do aluno; envolve a representação e manipulação de objetos matemáticos; é direcionada para objetivos e metas estabelecidas e/ou reconhecidas pelo aluno.

Quanto às ações cognitivas os autores destacam seis ações relacionadas com etapas do desenvolvimento de uma atividade de modelagem. A transição da situação-problema para o que os autores denominam de representação mental da situação implica diversas habilidades como entendimento desta situação, apreensão de significado, interpretação de informações, agrupamento de ideias, o que constitui a ação cognitiva chamada compreensão da situação. Outra ação cognitiva é a estruturação da situação a qual é relevante na identificação do problema, ou seja, a formulação de um problema para uma situação a partir da sua representação mental requer a estruturação e/ou simplificações deliberadas das informações acerca desta situação. A etapa da matematização corresponde a uma ação cognitiva também denominada de matematização que culmina na construção do modelo matemático, uma vez que a transição que busca uma linguagem matemática evidencia um problema a ser resolvido; a elaboração do modelo matemático é mediada por relações entre as características da situação e os conceitos, técnicas e procedimentos matemáticos adequados para representar matematicamente essas características, a organização de partes, a identificação de componentes.

Na ação cognitiva denominada de síntese, refere-se, de acordo com os autores, ao domínio de técnicas e procedimentos matemáticos e uma coordenação de diferentes representações dos objetos matemáticos requeridos na resolução do problema e construção do modelo a fim de apresentar resultados matemáticos para o problema. A interpretação e validação é outra ação cognitiva respectiva a análise da resposta (representação matemática) do problema em relação aos procedimentos matemáticos e adequação da representação para a situação. Por fim, mencionam as ações cognitivas de comunicação e argumentação que implicam na comunicação de uma resposta pelo aluno em que expõem o julgamento do valor de teoria e métodos, apresentam e justificam suas escolhas baseadas em argumentos fundamentados e reconhecem que a situação requer subjetividade.

Diante deste contexto, pode-se dizer que a Modelagem como proposta metodológica no ensino de Matemática dá abertura ao aluno pensar, criar e estabelecer relações com seu meio, impulsiona o estudo de conceitos matemáticos, tendo a liberdade para procurar suas próprias alternativas de solução, podendo associá-la a atividades simulações com a ajuda da tecnologia a partir do modelo encontrado a fim observar o comportamento do fenômeno existente na situação estudada, contribuindo para que o aluno desenvolva atitudes positivas na aprendizagem desta disciplina e na sua formação crítica.

Bassanezi (2009) defende que a modelagem pode ser utilizada como método científico de pesquisa em que seu emprego já trouxe avanços em vários campos da ciência, e como uma estratégia de ensino e aprendizagem que tem se mostrado muito eficaz. Ressalta que no setor educacional "a aprendizagem realizada por meio da modelagem facilita a combinação dos aspectos lúdicos da Matemática com seu potencial de aplicações" (BASSANEZI, 2009, p.16).

De acordo com Barbosa (2003) as razões para a inclusão da Modelagem Matemática no currículo tem sido discutidas entre pesquisadores e em geral se apresentam cinco argumentos:

> - Motivação: os alunos sentir-se-iam mais estimulados para o estudo de Matemática, já que vislumbrariam a aplicabilidade do que estudam na escola;
> - Facilitação da aprendizagem: os alunos teriam mais facilidade em compreender as ideias matemáticas, já que poderiam conectá-las a outros assuntos;
> - Preparação para utilizar a matemática em diferentes áreas: os alunos teriam a oportunidade de desenvolver a capacidade de aplicar matemática em diversas situações, o que é desejável para moverem-se no dia-a-dia e no mundo do trabalho;
> - Desenvolvimento das habilidades gerais de exploração: desenvolveriam habilidades gerais de investigação;
> - Compreensão do papel sócio-cultural da matemática: os alunos analisariam como a matemática é usada nas práticas sociais (BARBOSA, 2003, p.66).

Trabalhar com Modelagem Matemática, como reconhece Bassanezi (2009), não é apenas uma questão de ampliar conhecimento matemático, mas sobretudo de se estruturar o modo de pensar e agir diante de situações do meio em que se está inserido.

> A Modelagem Matemática utilizada como estratégia de ensino e aprendizagem é um dos caminhos a ser seguido para tornar um curso de matemática, em qualquer nível, mais atraente e agradável. Uma modelagem eficiente permite fazer previsões, tomar decisões, explicar e entender, enfim, participar do mundo real com capacidade de influenciar em suas mudanças (BASSANEZI, 2009, p. 177).

Em consonância, Kaiser e Sriraman (2006) apresentam perspectivas para a Modelagem Matemática, as quais chamam de: realística, contextual, sociocrítica, epistemológica, cognitiva e educacional. Nestas perspectivas abordam aspectos relacionados ao objetivo da Modelagem Matemática no contexto educacional da Matemática. Na realística referem-se a situações-problema da indústria ou do ambiente de trabalho objetivando desenvolver habilidades de resolução de problemas aplicados. Na contextual as situações-problema desenvolvidas nas aulas de Matemática que, de acordo com os autores, são situações significativas para os alunos com a intenção de motivá-los a construir ideias matemáticas e visam à aplicação de conteúdos matemáticos na busca do modelo, a qual é uma atividade de resolução de problemas. Na perspectiva sociocrítica relacionam a capacitação dos estudantes para o exercício da cidadania com autonomia em questões que remetem ao uso da Matemática na sociedade, a qual deve ser propiciada pela Educação Matemática. Na epistemológica destacam que as situações-problema bem como a atividade de modelagem estão em com contexto estritamente matemático objetivando o desenvolvimento teórico da Matemática.

Ainda na perspectiva cognitiva, os autores colocam que o objetivo é compreender e analisar as ações cognitivas que estão envolvidas quando os alunos trabalham com atividades de Modelagem. Na educacional caracterizam que a atividade de modelagem no ensino da Matemática leva os alunos a uma investigação do modelo matemático, levando em consideração suas potencialidades para o problema e para a aprendizagem da Matemática. As dificuldades dos alunos neste processo de modelagem devem ser analisadas pelo professor. Esta perspectiva pode ser, segundo os autores, educacional didática se o objetivo da atividade é desencadear a aprendizagem, e educacional conceitual se o objetivo é a introdução ou sistematização de conceitos matemáticos.

A análise destas perspectivas sinaliza para Almeida, Silva e Vertuan (2012) que é possível uma mesma atividade de modelagem contemplar mais de uma alternativa simultaneamente. Contudo, os propósitos e interesses relacionados à implementação de atividades de modelagem nas aulas de Matemática se vinculam a definição da perspectiva para cada situação o que implica na forma como o professor conduz o desenvolvimento dessas atividades visando atender a interesses e necessidades em situações particulares de ensino e aprendizagem.

A partir desta reflexão, os autores mencionam alguns aspectos que o desenvolvimento da Modelagem Matemática favorece, principalmente na Educação Básica: ativação de aspectos motivacionais e relações com a vida fora da escola ou com as aplicações da Matemática- a questão motivacional e as relações entre Matemática e realidade mediadas pela Modelagem Matemática estão interligadas à medida que situações de ensino e aprendizagem que induzam estas relações contribuem para atribuir sentido e construir significado em Matemática, além disso, as atividades de modelagem favorecem a aproximação da matemática escolar com problemas extraescolares vivenciados pelos alunos; a viabilização ou a solicitação do uso do computador nas aulas de Matemática - o uso de *softwares* auxiliam alunos e professor na construção de gráficos, na observação da influência dos parâmetros e na realização de cálculos possibilitando experimentar, visualizar e coordenar de forma dinâmica as representações algébricas, gráficas e tabulares em atividades de modelagem. O uso de tecnologias informáticas na Modelagem Matemática justifica-se, segundo os autores, por:

> a) possibilita lidar com situações-problema mais complexas e fazer uso de dados reais, ainda que estes sejam em grande quantidade ou assumam valores muito grandes; b) permite que maior parte dos esforços se concentre nas ações cognitivas associadas ao desenvolvimento da atividade de modelagem, considerando que a realização de cálculos, aproximações e representações gráficas é mediada pelo uso do computador; c) possibilita lidar com as situações-problema por meio de simulações numéricas ou gráficas, variando a parâmetros nas representações gráficas e (ou) algébricas (ALMEIDA, SILVA e VERTUAN, 2012, p.32).

Desta forma, Borba e Penteado (2007, p.44) corroboram que "o trabalho com Modelagem e com o enfoque experimental sugere que há pedagogias que se harmonizam com as mídias informáticas de modo a aproveitar as vantagens de suas potencialidades".

Outros aspectos abordados pelos autores são: a realização de trabalhos cooperativos- a Modelagem em sala de aula pode ser vista como uma atividade cooperativa, em que os alunos trabalham juntos para resolver um mesmo problema, discutem as diferentes estratégias utilizadas contribuindo para a aprendizagem dos conceitos envolvidos, logo cooperação e a interação entre alunos e entre aluno e professor são importantes na construção conhecimento; o desenvolvimento do conhecimento crítico e reflexivo- as atividades de Modelagem Matemática podem possibilitar ao aluno, além da aprendizagem de conteúdos, reflexões, reações e/ou acerca da situação que está sendo investigada, discutindo a natureza e o papel dos modelos matemáticos na sociedade, o que fundamenta a perspectiva sociocrítica discutida anteriormente. Sobre este aspecto Barbosa (2003, p. 67) enfatiza que:

> se estamos interessados em educar matematicamente os nossos alunos para agir na sociedade e exercer a cidadania – e esse é o objetivo da Educação Básica – podemos tomar as atividades de Modelagem como uma forma de desafiar a ideologia da certeza e colocar lentes crítica sobre as aplicações da matemática.

Os demais aspectos referidos por Almeida, Silva e Vertuan (2012) são: o uso de diferentes registros de representação- os conhecimentos matemáticos advindos da prática de modelagem estão ancorados em uma variedade de representações semióticas que incorporam características do objeto matemático e as atividades de Modelagem Matemática tem um potencial importante a respeito da investigação sobre a compreensão dos objetos matemáticos que se fazem presentes nestas atividades a partir da coordenação entre os diferentes registros de representação associados aos objetos; a ocorrência de aprendizagem significativa- a motivação para a aprendizagem, as interações proporcionadas pelos grupos de alunos, os significados que são compartilhados e discutidos, bem como a interação entre o novo conhecimento e a estrutura cognitiva do aluno que ocorrem em atividades de Modelagem Matemática sinalizam a aprendizagem significativa com base na teoria de Ausubel.

Mesmo com essas diversas argumentações apresentadas por diferentes autores para a incorporação da Modelagem Matemática no ensino, a adoção desta não é algo tão simples, que ocorrerá instantaneamente a partir da percepção de suas vantagens, pois depende em muito das possibilidades do contexto escolar e do nível de flexibilidade do professor. Envolve o abandono de posturas e conhecimentos e adoção de outros. Nesse sentido, Bassanezi (2009) afirma que muitos colocam obstáculos quanto ao uso da Modelagem Matemática, principalmente quando aplicada em cursos regulares. Estes obstáculos podem ser de três tipos:

> a) Obstáculos instrucionais- a modelagem pode ser um processo muito demorado não dando tempo para cumprir o programa todo. Por outro lado alguns professores têm dúvida se as aplicações e conexões com outras áreas fazem parte do ensino da matemática, salientando que tais componentes tendem a distorcer a estética, a beleza e a universalidade da matemática. Acreditam, talvez por comodidade, que a matemática deva preservar sua precisão absoluta e incontável sem qualquer relacionamento com o contexto sócio-cultural e político.
> b) Obstáculos para os estudantes- o uso de modelagem foge da rotina do ensino tradicional e os estudantes, não acostumados ao processo, podem se perder e se tornar apáticos nas aulas.
> c) Obstáculos para os professores- muitos professores não se sentem habilitados a desenvolver modelagem em seu cursos, por falta de conhecimento do processo ou por medo de se encontrarem em situações embaraçosas quanto às aplicações de matemática em áreas que desconhecem. Acreditam que perderão muito tempo para preparar as aulas e também não terão tempo para cumprir o programa do curso (BASSANEZI, 2009, p.37).

Sobre a utilização da Modelagem Matemática em cursos regulares em que há um programa a ser cumprido e uma estrutura organizacional nos moldes tradicionais, como é o caso da maioria das instituições de ensino, Biembengut e Hein (2003, p.18) ponderam que

> o processo da modelagem precisa sofrer algumas alterações, levando em consideração principalmente o grau de escolaridade dos alunos, o tempo disponível que terão para o trabalho extraclasse, o programa a ser cumprido e o estágio em que o professor se encontra, seja em relação ao conhecimento da modelagem, seja no apoio por parte da comunidade escolar para implantar mudanças.

A partir destas afirmações, é possível dizer que a inclusão da Modelagem Matemática no currículo escolar exige que o educador tenha claramente definido o conceito desta, além de mudança na sua postura frente à Matemática e seu processo de ensino e aprendizagem, já que com a modelagem ele passa a ser um mediador neste processo que se dá a partir da interação do aluno com seu ambiente natural, entre os alunos, e dos alunos com o professor.

A implementação da Modelagem Matemática nas aulas de Matemática remete a três aspectos importantes na opinião de Almeida, Silva e Vertuan (2012):

a) o espaço e a condução das atividades de Modelagem Matemática no currículo escolar e/ou nas aulas de Matemática: a integração da Modelagem Matemática em atividades escolares, segundo experiências descritas na literatura brasileira, de acordo com os autores, tem se dado, em geral, em três situações particulares: no âmbito da própria aula de Matemática quando no decurso das aulas são invocados aspectos de aplicação e Modelagem Matemática como forma auxiliar a introdução de conceitos, ou inversamente, quando novos conceitos, métodos e resultados matemáticos podem ser ativados para a realização de atividades de aplicação e modelagem; em horários e espaços extraclasses, quando as atividades são desenvolvidas de forma extracurricular especialmente para este fim não alterando as aulas regulares; uma combinação destas duas circunstâncias, ou seja, parte das atividades é desenvolvida nas aulas de Matemática em horários regulares e outra em encontros extraclasse dos alunos com o professor. Destacam que atividades de modelagem podem emergir a necessidade de que os alunos construam um conhecimento que ainda não possuem para superar um obstáculo em meio a essa atividade. Também consideram que não há como definir sobre a duração de uma atividade de modelagem devido aos múltiplos encaminhamentos que podem se configurar na incorporação desta.

b) a atuação do professor nas aulas com modelagem matemática: o papel do professor em aulas mediadas deve ser de orientador, embora os autores ponderem que determinar o que professor e aluno devem fazer durante as atividades seja algo pretensioso, considerando a singularidade de cada situação. Além de redefinir o papel do professor, Barbosa (1999, p. 71) salienta que:

> [...] a Modelagem imprimi características próprias do trabalho escolar, de modo que exige do professor uma postura correspondente. Assim, por exemplo, a apresentação de estruturas matemáticas não mais se constituem em foco central do estudo, mas num recurso de organização de idéias exploradas e/ou investigadas. As noções de certeza e precisão são abaladas, e passa-se a lidar com respostas aproximadas, podendo-se, inclusive, obter várias "soluções". Os alunos podem encontrar diferentes caminhos para abordar uma situação-problema ou mesmo pode superar o professor no que tange ao refinamento de modelos.

Sobre a questão a quem compete a definição do tema ou problema ser investigado Almeida, Silva e Vertuan (2012), destacam que a resposta não é algo consensual entre autores que tratam deste assunto, pois há experiências bem sucedidas com temas escolhidos pelo professor, embora as orientações sobre essa questão, de modo geral, seja de que o aluno escolha em vista da expectativa de ser despertado seu interesse. Em relação a como conduzir aulas com Modelagem Matemática os autores afirmam que além das circunstâncias já descritas no item "a" é importante ter em mente que as atividades de modelagem são essencialmente cooperativas tendo nos trabalhos em grupo seu aporte, os quais devem ser orientados e estimulados pelo professor. Nesse sentido, os autores enfatizam que a formação do professor no âmbito da Modelagem Matemática é fundamental e que deve ser estruturada a partir da tríade: “aprender sobre”, “aprender por meio” e “ensinar usando”, somente assim o professor sairá da zona de conforto dando espaço para imprevisibilidade associada às atividades de Modelagem Matemática.

c) a familiarização dos alunos com atividades de Modelagem: sair de um paradigma baseado na exposição do professor e seguido de exercícios para uma alternativa pedagógica que denota a necessidade de articulação entre definição, investigação e resolução como é o caso da Modelagem Matemática representa um desafio também para os alunos e requer familiarização destes com a modelagem. Os autores sugerem que esta familiarização seja gradativa, em que num primeiro momento, o professor coloca os alunos em contato com uma situação-problema com os dados e informações necessárias e acompanha todo o processo de construção, análise de utilização do modelo. No segundo momento o professor sugere a situação-problema e divide os alunos em grupo para que complementem a coleta de informações, realizem definição de variáveis e formulação das hipóteses simplificadoras, a obtenção e validação do modelo e seu para a situação, deixando os alunos mais independentes na definição dos procedimentos. Já no terceiro momento, os alunos distribuídos em grupo, são responsáveis pela condução da atividade de modelagem, cabendo a eles desde a identificação da situação-problema até a comunicação da investigação para a comunidade escolar.

A partir do momento em que os alunos já têm certa ideia de modelagem, Biembengut e Hein (2003) orientam as seguintes etapas para desenvolver atividades de Modelagem Matemática na sala de aula:

a) escolha do tema: os alunos se agrupam de três a cinco alunos por grupo, e o professor os incentiva na escolha do tema de acordo com seu interesse ou afinidade. Sobre o tema Bassanezi (2009, p.46) ressalta que “a escolha final dependerá muito da orientação do professor que discursará sobre a exequibilidade de cada tema, facilidade na obtenção de dados, visitas, bibliografia, etc.”

b) Interação com o tema: caso o tema escolhido seja muito abrangente cada grupo deve fazer um levantamento de dados para se familiarizar com o tema, levantar questões sobre ele, elaborar um síntese e entregar com as questões ao professor, entrevistar um especialista no assunto.

c) planejamento do trabalho a ser desenvolvido pelos grupos: para iniciar o trabalho cada grupo escolhe uma questão e levanta dados reais sobre ela; descobre o princípio envolvido no problema, ou seja, examina os fatos e amostras; analisa a natureza e a extensão do problema, formulando hipóteses; apresenta as soluções viáveis e determina e escolhe a solução que pareça mais conveniente.

d) conteúdo matemático: uma parte do conteúdo programático da disciplina será utilizada pelos grupos nos modelos elaborados, mas caso seja necessário um tópico matemático que não faz parte do programa ou não seja conhecido pelo grupo o professor pode ensinar-lhes ou induzir-lhes a pesquisa mantendo-se sempre como orientador.

e) validação e extensão dos trabalhos desenvolvidos: no final do trabalho cada grupo deve avaliar a solução verificando o modelo adequado, divulgar seu trabalho e fazer um relatório apresentando o motivo da escolha do tema, um breve histórico sobre o tema e os modelos encontrados.

Neste contexto, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006), além de preconizar a Modelagem Matemática como uma proposta metodológica a ser utilizada no ensino infere que esta apresenta fortes conexões com a metodologia de Resolução de Problemas, em que o aluno diante de uma situação-problema ligada a realidade, com sua inerente complexidade, precisa mobilizar um conjunto de competências para sua solução. Bornatto (2002) sugere também a elaboração de atividades didático-pedagógicas que explorem as possibilidades de simulações (através da experimentação e da visualização) utilizando-se do computador para ajudar nesta tarefa. Assim, se entende que ambas metodologias se harmonizam com a utilização das Tecnologias de Informação e Comunicação ajudando os alunos a visualizar e interpretar as soluções das situações-problema.

Diante da perspectiva apresentada com a implementação da Modelagem Matemática associada à atividades de Simulação no contexto escolar e compreendendo a Modelagem Matemática, segundo a concepção de Barbosa (2011) - como um ambiente de aprendizagem em que os alunos são convidados a indagar e a investigar, através da Matemática, situações da realidade, o qual pode ser desenvolvido no contexto social da sala de aula composto de relações interpessoais mediadas por ações de esquematizar, desenvolver operações matemáticas, produzir e resolver equações, traçar gráficos, etc.- entende-se que introduzir atividades de Modelagem no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, e aqui particularmente da Geometria Analítica, pode contribuir para o educando compreender e apreender os conceitos matemáticos envolvidos neste conteúdo, articular e coordenar diferentes registros semióticos que este conteúdo requer, explorar e refletir criticamente sobre os procedimentos adotados e os resultados e modelos obtidos, bem como desenvolver habilidades de comunicação e argumentação.

3.4.5 A História da Matemática como Recurso Metodológico

As ideias matemáticas estão presentes, como afirma D'Ambrósio (1999), em todos os momentos da História e em todas as civilizações nas formas de fazer e saber. "A História da Matemática é um elemento fundamental para se perceber como teorias e práticas matemáticas foram criadas, desenvolvidas e utilizadas num contexto específico de sua época" (D'AMBRÓSIO, 1996, p.29-30). Para o autor uma percepção histórica da Matemática é fundamental na discussão sobre a Matemática e o seu ensino. Complementa que ter uma ideia sobre por que e quando se resolveu levar o ensino da Matemática à importância que tem hoje é essencial para fazer qualquer proposta de inovação em Educação Matemática, em particular no que se refere a conteúdos.

Groenwald (2005) afirma que a perspectiva histórica é um potente auxilio no processo de ensino e aprendizagem, permitindo propor uma forma peculiar de ideia Matemática. Em contraste com a ideia positivista de que a Matemática é ciência universal rica de verdade absoluta, a autora afirma que a História da Matemática tem grande vantagem ao permitir a contextualização do saber, mostrando que um conceito não somente é fruto de uma época histórica, mas está inserido em contexto social e político.

Baseado em suas experiências, Mendes (2009) afirma que a investigação histórica no ensino da Matemática, em sala de aula, pode contribuir significativamente para o desenvolvimento cognitivo matemático do aluno. Essa perspectiva investigatória, segundo o autor, pode ser conduzida de forma orientada pelo professor, fazendo com que os alunos compreendam o processo de construção da Matemática em cada contexto e momento histórico.

O uso pedagógico da História da Matemática é viabilizado, conforme o autor, por meio de um ensino centrado na investigação, conduzindo professor e aluno à compreensão do movimento cognitivo estabelecido pelo ser humano em seu contexto sociocultural e histórico, na busca de explicar e compreender fenômenos da natureza e da cultura no que diz respeito a Matemática. Assim, defende que as informações históricas podem ser utilizadas na Matemática escolar desde que o professor insira em suas aulas uma dinâmica experimental investigatória através do levantamento e testagem de hipóteses acerca de problemas históricos e atividades manipulativas extraídas da História da Matemática, o que contribui para os estudantes refletirem acerca da formalização das leis matemáticas a partir de certas propriedades e artifícios usados hoje, mas construídos em períodos anteriores.

Segundo D'Ambrósio (2009) o uso a História da Matemática tem sido praticado como mera transmissão de técnicas e de nomes, fatos e datas. Em consonância, os Parâmetros

Curriculares Nacionais (BRASIL,1998, p.23) menciona que “a História da Matemática também tem se transformado em um assunto específico, um item a mais a ser incorporado ao rol dos conteúdos, que muitas vezes não passa da apresentação de fatos ou biografias de matemáticos famosos”.

A apresentação de tópicos da História da Matemática em sala de aula tem sido defendida por diversos autores, de acordo com Miguel e Miorim (2011), por despertar o interesse do aluno pelo aluno matemático estudado. No entanto, consideram que é ingenuidade atribuir simplesmente à História da Matemática um poder de modificar a atitude do aluno, ou seja, esta motivação somente é possível por meio de discussões relacionadas a aspectos políticos, sociais e culturais relacionados à história desta ciência, inserindo este trabalho no campo da Etnomatemática. Assim, os autores entendem que o uso da História da Matemática não tem apenas a intenção de fornecer informações aos alunos, mas é a oportunidade de partilhar com eles as dúvidas e questionamentos do professor.

Em consonância, Baroni e Nobre (1999) ao desenvolverem estudos relativos às contribuições da História da Matemática para a Educação Matemática perceberam que,

> é necessário muita cautela, pois pode-se incorrer no erro de simplesmente assumir a História da Matemática como um elemento motivador ao desenvolvimento do conteúdo. Sua amplitude extrapola o campo da motivação e engloba elementos cujas naturezas estão voltadas para uma interligação entre o conteúdo e sua atividade educacional (BARONI e NOBRE, 1999, p.132).

D’Ambrósio (2009) propõe que ao utilizar esta tendência metodológica nas aulas de Matemática seja enfatizada a criatividade do aluno, que é responsável pela emergência de ideias novas, e à análise crítica da evolução do conhecimento matemático ao longo da história. Ressalta que sem essa análise crítica a criação de novas teorias e práticas, diante da complexidade do mundo moderno, pode ser pouco eficiente, além de conduzir a equívocos. Mendes (2009) também orienta que o professor deve oportunizar aos alunos uma compreensão mais ampla das propriedades, teoremas e aplicações da Matemática na solução de problemas que exijam algum conhecimento histórico.

Nesse sentido, os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) sugere que a Resolução de Problemas pode ser associada à História da Matemática, uma vez que esta foi construída e motivada por problemas da própria Matemática e de outras ciências, e considera que em situações de ensino ela pode contribuir para o desenvolvimento pelo aluno de atitudes e valores mais favoráveis diante do conhecimento matemático, resgatar a própria identidade cultural, a compreensão das relações entre tecnologia e herança cultural, a constituição de um olhar mais crítico sobre os objetos matemáticos, a sugestão de abordagens diferenciadas e a compreensão das dificuldades encontradas pelos alunos.

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio, (BRASIL, 2006), também colocam que no ensino da Matemática:

> a utilização da História da Matemática em sala de aula pode ser vista como um elemento importante no processo de atribuições de significados aos conceitos matemáticos. É importante, porém, que este recurso não fique limitado à descrição de fatos ocorridos no passado ou a apresentação de biografias de matemáticos. A recuperação do processo histórico de construção do conhecimento matemático pode se tornar um importante elemento de contextualização dos objetos de conhecimento que vão entrar na relação didática (BRASIL, 2006, p.86).

Miguel e Miorim (2011) destacam alguns objetivos pedagógicos que se podem atingir com o apoio da História da Matemática como recurso metodológico no ensino: levar os alunos a perceber, por exemplo:

> 1) a Matemática como criação humana ; 2) as razões pelas quais as pessoas fazem Matemática; 3) as necessidades práticas, sociais, econômicas e físicas que servem de estímulo ao desenvolvimento das ideias matemáticas; 4) as conexões existentes entre Matemática e Filosofia, Matemática e religião, Matemática e lógica, etc.; 5) a curiosidade estritamente intelectual que pode levar a generalização e extensão de ideias e teorias; 6) as percepções que os matemáticos têm do próprio objeto da Matemática, as quais mudam e se desenvolvem ao longo do tempo; 7) a natureza de uma estrutura, de uma axiomatização e de uma prova (MIEGUEL e MIORIM, 2011, p.53).

Entretanto, os autores ressaltam que tem se levantado problemas e objeções em relação à participação da história no processo de ensino e aprendizagem da Matemática por outros autores, sendo que os argumentos apresentados por eles dizem respeito à ausência de literatura adequada, a natureza imprópria da literatura disponível, a história como um fator complicador, a ausência do sentido do progresso histórico.

Miguel e Miorim (2011) rebatem esses argumentos mencionando que o primeiro deve ser entendido como um apelo à necessidade de constituição de núcleo de pesquisa em História da Matemática dos quais façam parte historiadores, matemáticos e educadores que possam contribuir para a elaboração de reconstituições esclarecedoras de épocas, temas, situações e biografias. No segundo defendem que este deve ser encarado menos como uma barreira intransponível às iniciativas pedagógicas que buscam uma vinculação entre a história e a Educação Matemática, e mais como um estímulo à continuidade das investigações nesse sentido. E no terceiro em que é colocado que a introdução do elemento histórico no ensino da Matemática em vez de facilitar a aprendizagem a complicaria porque o estudante despenderia de tempo e esforço na tentativa de reconstituir um contexto que não lhe é familiar, os autores contra argumentam que o que se perde em tempo e energia, ganha-se em significado, sentido e criatividade.

Mendes (2009) defende o uso adequado de atividades que favoreçam a interatividade entre o sujeito e o seu objeto de conhecimento em todos os níveis de ensino contextualizando três aspectos do conhecimento: o cotidiano, o escolar e o científico; os quais aliados à dimensão histórica pode conduzir a investigação em sala de aula, dando maior significação à matemática escolar, mas para isso pressupõe a participação ativa do aluno. Para o autor a construção destes conhecimentos ocorre nas relações interativas entre as partes integrantes do processo, que podem ser integradas à exploração de atividades construtivistas (desenvolvimento, associação e simbolização), sob a performance de atividades manipulativas, voltadas à aprendizagem da Matemática escolar.

O autor apresenta um modelo adotado para condução de atividades que utilizam a história no ensino da Matemática. Tais atividades, segundo ele reúnem uma sequência de ensino que preserva a continuidade na aprendizagem dos alunos, o que implica o professor organizar cada uma das etapas de ensino para alcançar os resultados previstos em seu planejamento didático, explicitar os objetivos, os procedimentos de execução, as discussões a serem realizadas e os resultados orais escritos previstos em cada atividade, a fim de orientar melhor os estudantes. O modelo mencionado pelo autor aborda as seguintes etapas:

a) o nome de cada atividade: o tema evidencia o objetivo, desperta aspectos do cotidiano, escolar ou científico do conteúdo abordado, deve provocar a imaginação criativa dos alunos, dando motivação e dinamismo ao processo de aprendizagem;

b) os objetivos da atividade: o professor deve deixar clara a finalidade da atividade visando a construção do conhecimento matemático. A linguagem deve ser clara e concisa para que os alunos não tenham dúvidas acerca dos aspectos extramatemáticos suscitados em cada atividade;

c) o conteúdo histórico: é um elemento motivador e gerador da Matemática escolar por esclarecer os porquês matemáticos. Devem ser explicitados fatos e problemas que historicamente provocaram a indagação e o empenho humano na sua organização sistemática e disseminação até hoje, provocando a curiosidade dos alunos e conduzindo a um diálogo interativo com outros aspectos da Matemática, a fim de que os alunos reconstruam as raízes cotidiana, escolar e científica contidas nas informações históricas;

d) o material a ser utilizado nas atividades: o professor deve descrever o material, se necessário improvisá-lo superando as dificuldades da escola, para que o aluno o explore da melhor forma possível. Este material deve ser ousado e criativo para criar, em sala de aula, um ambiente inovador que concretize a imaginação e a criatividade matemática dos alunos;

e) a operacionalização das atividades: as orientações metodológicas irão conduzir os alunos a uma compreensão do conteúdo a ser aprendido ao desenvolverem as atividades históricas. Por meio dessas orientações os alunos vivenciarão cada uma das fases da atividade (manipulação/ experimentação, verbalização/comunicação oral e simbolização/abstração);

f) os desafios propostos nas atividades: as atividades devem ser atrativas e desafiadoras para os alunos, e de acordo com o nível de ensino e com o conteúdo que se pretende abordar, esses desafios podem ser mais complexos, isto é, exigir mais atenção, reflexão e habilidade investigadora dos alunos, para alcançar os resultados previstos pelo professor. O mais importante de um desafio nesse tipo de atividade, destaca o autor, é que o aluno desenvolva um espírito explorador, indagador e ao mesmo tempo de análise e síntese, pois assim, alcançarão um crescimento intelectual mais significativo.

O que o professor deve ficar atento, enfatiza Mendes (2009), é que uma variedade de temas poderá surgir durante uma pesquisa histórica em sala de aula devendo perceber possibilidade de exploração da criatividade dos alunos, mesmo que, às vezes seja preciso reformular alguns dos temas apresentados por eles. Assim, o autor ressalta que trabalhar com atividades que utilizam investigação histórica, requer do professor conhecimento do nível de amadurecimento de seus alunos, do grau de aprofundamento a dar no assunto a ser abordado e do nível de autonomia dos estudantes com relação à busca pela própria aprendizagem. Além disso, coloca a necessidade de fazer um levantamento prévio do material a ser utilizado nas investigações, localização das fontes de pesquisa e seleção das atividades a serem desenvolvidas junto a cada turma.

Em nível universitário, Miguel e Miorim (2011) preconizam que a História da Matemática não deve ser uma disciplina à parte como se fosse um ramo separado Matemática, mas deve ser vista como parte essencial de todos os ramos. Um bom exercício para o docente é, segundo D’Ambrósio, preparar uma justificativa contextualizada com o mundo de hoje e do futuro para cada um dos tópicos do programa, porém não se deve confundir com justificativas internas à Matemática do tipo “progressões são importantes para entender logaritmos”.

Quando se trata de Ensinar Geometria Analítica, Grimberg (2008) diz ser importante mostrar que o seu nascimento acompanha o início do pensamento e da ciência moderna no momento em que Descartes faz da Álgebra a linguagem das curvas. Conforme o autor a leitura da quarta parte do Discurso do Método, de Descartes, permite refletir com os alunos sobre a necessidade da dúvida.

Desta forma, entende-se importante trabalhar a Geometria Analítica utilizando a História da Matemática como um recurso metodológico, pois este possibilita que os alunos construam sentido e significado aos conceitos e ideias Matemáticas inerentes ao conteúdo, bem como perceberem a importância da criação de diferentes registros de representação na evolução do conhecimento matemático. Entende-se, também, que é possível aliar a História da Matemática a metodologia de Resolução de Problemas, podendo-se fazer uso de TIC para a reconstrução e ressignificação de problemas históricos da Geometria Analítica.

4 ANÁLISES DAS PROPOSTAS CURRICULARES DAS ESCOLAS ESTADUAIS E DOS PROFESSORES DE MATEMÁTICA E DOS LIVROS DIDÁTICOS

Neste capítulo será apresentada a análise das propostas curriculares das escolas estaduais selecionadas a partir da nota 555,00 da prova do Exame Nacional do Ensino Médio de 2010, no que atenta o estudo da Geometria Analítica, bem como a análise do questionário aplicado aos professores de Matemática destas escolas que trabalham o conteúdo de Geometria Analítica. Apresenta-se, também, a descrição e análise dos livros didáticos do terceiro ano do Ensino Médio, aprovados pelo Plano Nacional do Livro Didático PNLD (2011), acerca da abordagem do conteúdo de Geometria Analítica e a mobilização dos Registros de Representação Semiótica.

4.1 ANÁLISE DAS PROPOSTAS CURRICULARES DAS ESCOLAS ESTADUAIS E DO QUESTIONÁRIO DIRECIONADO AOS PROFESSORES DE MATEMÁTICA

A investigação nas escolas públicas estaduais do Rio Grande do Sul ocorreu em 2012 e visou investigar as propostas curriculares para o Ensino Médio no que tange ao conteúdo de Geometria Analítica. Buscou identificar quais conteúdos são ensinados neste tema, os objetivos traçados com o estudo destes conteúdos, como são ensinados (as metodologias utilizadas), quando são ensinados (em que momento do Ensino Médio), e o que, como e quando estes conteúdos estão sendo avaliados.

O questionário direcionado aos professores das escolas investigadas buscou identificar como estes desenvolvem o processo de ensino e aprendizagem da Geometria Analítica, se procuram utilizar diferentes Registros de Representação Semiótica e explorar tarefas de tratamentos e conversões entre registros.

O critério utilizado para selecionar as escolas foi a nota do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), do ano de 2010. Utilizou-se como parâmetro a nota 555,00, ou seja, foram selecionadas as escolas públicas estaduais que tinham como resultados no ENEM, de 2010, média 555,00 ou maior que este valor. Assim, selecionou-se 52 escolas de diferentes cidades do Rio Grande do Sul, sendo que destas obteve-se respostas para a investigação de 43 escolas, pois 2 escolas não trabalham Geometria Analítica no Ensino Médio, algumas se recusaram a responder e outras, embora inúmeras tentativas, não retornaram o questionário enviado.

Foram investigados 45 professores de Matemática que estavam atuando no Ensino

Médio, em 2012, nas escolas selecionadas. Com relação ao perfil dos professores das escolas investigadas 62% possuem além da graduação especialização na área de Educação Matemática e 38% possuem apenas graduação em Licenciatura em Matemática. A média do tempo de docência dos professores investigados é de 13 anos. Quanto a carga horária, 55% dos professores trabalham 40 horas, 7% trabalham 30 horas, 11% trabalham 20 horas, 7% trabalham 25 horas e 4% tem carga horária respectivas a 23, 28, 29, 36 e 60 horas (totalizando 20% dos professores).

A Geometria Analítica é trabalhada no terceiro ano do Ensino Médio em todas as 43 escolas investigadas, onde 26 (60%) destas escolas trabalham no primeiro trimestre, 3 (7%) no segundo e terceiro trimestre e 14 (33%) somente no terceiro trimestre.

Em todas as escolas investigadas os conteúdos trabalhados são: Ponto, Reta e Circunferência. De acordo com as propostas curriculares e as respostas dos professores destas escolas são explorados nestes conteúdos: distância entre dois pontos, Ponto médio de um segmento, condição de alinhamento de 3 pontos, coeficiente angular da Reta, equação geral e reduzida da Reta, posições relativas entre 2 retas (paralelas, perpendiculares e concorrentes), intersecção entre retas, ângulo entre duas retas, Reta bissetriz, distância entre Ponto e Reta, equação geral e reduzida da Circunferência, posições relativas entre Ponto e Circunferência , posições relativas entre Reta e Circunferência.

Em apenas 7% das escolas trabalha-se o coeficiente linear da Reta, o qual é importante para que o aluno a partir da representação gráfica da Reta possa escrever o valor correspondente na representação algébrica da Reta, ou ainda, a partir da representação algébrica visualize o Ponto de intersecção com o eixo *Y'Y* na sua representação gráfica. Assim, segundo Duval (2003), o aluno estaria levando em conta uma variável visual própria dos gráficos e um valor escalar da equação da Reta em conversões entre representações gráficas e algébricas da Reta.

A área da região triangular também é trabalhada em apenas 11% escolas, o qual permite trabalhar pontos colineares, Reta perpendicular a base de um triângulo e fazer uma conexão com a geometria plana.

A equação paramétrica da Reta é tralhada em 7% escolas , de acordo com as respostas dos professores e planos curriculares, a qual permite explorar uma outra forma de representação algébrica da equação da Reta e estabelece conexões com conteúdos na área da Física. Enquanto a equação segmentária foi apontada ser trabalhada em 11% das 43 escolas.

As posições relativas entre 2 circunferências que permite explorar representações figurais e gráficas da Circunferência e distância entre dois pontos (raios das circunferências) identificou-se ser trabalhada em 56% (24) escolas.

Com relação aos objetivos (habilidades e competências) que se busca atingir com o ensino da Geometria Analítica, foram obtidas pelas respostas dos professores e planos curriculares, conforme apresenta-se na figura 25.

Figura 25- Objetivos do ensino da Geometria Analítica

Objetivos	N° de Escolas	Percentual
Identificar e utilizar conceitos sobre plano cartesiano, distância entre dois pontos, Ponto médio de um segmento e condições de alinhamento de três pontos para resolução de problemas.	32	74%
Reconhecer as características das retas e suas equações.	37	86%
Reconhecer e utilizar as condições de paralelismo, perpendicularismo, ângulos formados entre retas e distância entre Ponto e Reta.	34	79%
Determinar a equação geral e reduzida da Circunferência.	33	76%
Identificar as posições relativas entre Ponto e Circunferência e entre Reta e Circunferência.	33	76%
Reconhecer as posições relativas entre duas circunferências.	18	41%
Reconhecer a Geometria Analítica como a geometria associada à álgebra.	15	34%
Relacionar conhecimentos algébricos e geométricos.	6	13%
Resolver problemas identificando as variáveis envolvidas e associando a linguagem algébrica e geométrica.	6	13%
Habilidades de interpretação de gráficos e problemas.	11	25%
Resolver questões de vestibular e ENEM	2	4%
Ter chance de competir com escolas particulares	1	2%

Fonte: A Pesquisa.

Com os objetivos apresentados na figura 25, observa-se que a maioria das escolas apresentam os objetivos com habilidades pontuais a serem desenvolvidas e poucas tem claramente o objetivo de que o aluno reconheça a Geometria Analítica como uma associação entre a geometria e a álgebra, o que historicamente mostra a importância deste fato para a Matemática, pois possibilitou a resolução de problemas geométricos por meio da álgebra. O mesmo ocorre com o objetivo de que o aluno desenvolva a capacidade de resolver problemas relacionados à Geometria Analítica.

Outro objetivo importante é de que o aluno possa resolver problemas identificando as variáveis envolvidas e associando a linguagem algébrica e geométrica, o qual é mencionado por apenas 13% escolas. Neste objetivo observa-se a associação entre os registros algébrico e gráfico em possíveis atividades de conversão entre estes. Segundo Duval (2003) o trabalho com diferentes registros e a conversão entre estes possibilita contribuir para que aluno possa distinguir o objeto matemático da sua representação e compreender o conteúdo matemático. No entanto, aqui não é mencionado o registro língua natural, o qual é um registro importante a ser trabalhado em Geometria Analítica para que esta distinção e compreensão possam ocorrer.

Entende-se que os dois últimos objetivos mencionados, resolver questões de vestibular e ENEM e ter chance de competir com escolas particulares, são objetivos que não estão diretamente relacionados com o ensino e aprendizagem da Geometria Analítica, e sim ressalta um foco em avaliações de vestibulares, prova do ENEM e competividade de outros alunos de escolas particulares, e portanto, chances maiores de terem resultados melhores em avalições. Faz-se uma crítica a estes objetivos, pois o foco deve estar no ensino e aprendizagem da Geometria Analítica e com a definição de objetivos que levem de fato a isto, e bons resultados em avalições seria uma consequência de que tais objetivos foram alcançados.

Quanto as metodologias utilizadas para o ensino da Geometria Analítica, obteve-se, ao analisar as propostas curriculares e as respostas dos professores, os resultados apresentados na figura 26.

Figura 26- Metodologias utilizadas no ensino da Geometria Analítica

Metodologias	Número de Escolas	Percentual
História da matemática	29	67%
Resolução de problemas	40	93%
Recursos tecnológicos	11	23%
Modelagem Matemática	4	9%
Jogos	3	7%
Não utiliza nenhuma das mencionados	2	5%

Fonte: A Pesquisa.

Sobre os recursos tecnológicos mencionados pelos professores estão o uso de vídeos da internet e do *software* Geogebra. E com relação aos jogos os professores que afirmaram utilizar esta metodologia trabalharam com a batalha naval, gincana envolvendo distância entre dois pontos e Reta bissetriz.

Com base nos dados obtidos em relação as metodologias utilizadas, observa-se que a mais utilizada pelos professores é a resolução de problemas, embora não foi investigado se de fato estes professores seguem os passos desta metodologia, assim como das demais questionadas, pois partiu-se da ideia de que estes, com base em sua formação, entendem o que implica o trabalho com tais metodologias.

Outro dado importante é o uso de recursos tecnológicos, o qual é pouco utilizado. Sendo que o uso destes recursos, como o Geogebra, por exemplo, que é um *software* livre que possibilita que o aluno explore as representações gráficas e algébricas, visualize e identifique as variáveis visuais e escalares próprias destes registros no conteúdo de Geometria Analítica, possibilitando, assim, melhor compreensão e realização do processo de conversão entre estes registros no objeto matemático envolvido.

A modelagem matemática também foi mencionada por 4 professores de 4 escolas, a qual possibilita trabalhar problemas envolvendo a conversão entre os registros língua natural, algébrico e gráfico. Considera-se um percentual baixo, dada a relevância da mesma.

Com relação ao livro didático adotado para uso dos alunos, os professores de 22% escolas mencionaram, segundo os professoras das mesmas a adoção do livro Matemática: Ciência e aplicações dos autores Gelson Iezzi, et al., editado pela Saraiva, em São Paulo, em 2010, 37% escolas, segundo os professores afirmaram ter adotado o livro Novo Olhar Matemática do autor Joamir Roberto de Souza, editado pela FTD, em São Paulo, em 2010, 28% escolas adotaram o livro Matemática - Contexto e Aplicações do autor Luiz Roberto Dante, editado pela Ática, em São Paulo, em 2010, 4% adotaram Matemática: ensino médio das autoras Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz, editado pela Saraiva, em São Paulo, em 2010 e 9% escolas adotaram Matemática - Paiva do autor Manoel Paiva editado pela Moderna, em São Paulo, em 2009.

Quando questionados sobre o uso de livros didáticos na preparação das aulas, 91% dos 45 professores afirmaram utilizar o livro didático adotado para uso dos alunos, além dos demais livros aprovados pelo PNLD. Dos demais 4% afirmaram que não utilizam livro didático com os alunos fazendo uso de apostilas em aula, porém não mencionaram a fonte que utilizam para montar tais apostilas e 5% afirmaram que além dos livros didáticos disponibilizados pelo PNLD utilizam o livro Matemática Completa dos autores Giovani e Bonjorno de 2005 e apostilas do cursinho Pégaso e apostila do Positivo.

Em relação as atividades propostas aos alunos nos conteúdos de Geometria Analítica, foi realizada uma questão fechada para os professores com as opções de respostas. Esta questão buscou identificar os tipos de tratamentos que os professores propõem aos alunos, a figura 27 apresenta as opções de resposta e o número de respostas obtidas com os 45 professores pesquisados.

Figura 27- Tratamentos propostos aos alunos no conteúdo de Geometria Analítica

Atividades Propostas	N° de respostas dos 45 professores	Percentual
Propõe atividades que partem da Língua Natural e cuja resposta seja dada da mesma maneira.	6	13%
Propõe atividades que partem de informações numéricas e cuja resposta seja da mesma forma.	45	100%
Propõe atividades do tipo resolução de equações, escrever a equação geral na sua forma reduzida ou ao contrário.	45	100%
Propõe atividades a partir de gráficos que demandem para sua resolução tarefas no gráfico apresentado (ex. Traçar a mediatriz da Reta representada no gráfico.)	9	20%
Propõe atividades a partir de figuras (ex. Reta, Circunferência não no plano cartesiano) e cuja resposta relacione conexões conceituais e simetrias com outras figuras.	11	24%

Fonte: A Pesquisa.

Com base, nas respostas dos professores observa-se que todos os professores propõem atividades que envolvem tratamentos nas representações numéricas e algébricas. No entanto, ainda é pouco o número de professores que propõem atividades de tratamento com a língua natural, importante para que o aluno interprete os conceitos do conteúdo, e poucos tratamentos no registro gráfico e figural.

Para identificar as atividades de conversão propostas pelos professores aos alunos, também fez-se uma questão fechada. Apresentam-se, na figura 28, as opções de resposta e o número de respostas obtidas nesta questão com os 45 professores.

Figura 28- Conversões propostas aos alunos no conteúdo de Geometria Analítica

Atividades Propostas	N° de respostas dos 45 professores	Percentual
Partem da Língua Natural e cuja resposta seja uma expressão algébrica.	12	27%
Partem de expressões algébricas e cuja resposta seja de forma descritiva (Língua Natural).	8	18%
Partem da Língua Natural e cuja resposta seja apresentada em forma de gráfico.	26	58%
Partem de um gráfico e cuja resposta seja apresentada na forma Língua Natural.	13	29%
Partem de um gráfico e cuja resposta seja numérica.	36	80%
Partem de informações numéricas e cuja resposta seja um gráfico.	45	100%
Partem de expressões algébricas e cuja resposta seja um gráfico.	45	100%
Partem de um gráfico e cuja resposta seja uma expressão algébrica.	45	100%

Fonte: A Pesquisa.

Identifica-se, segundo as respostas dos professores, que as conversões propostas por todos eles são d o registro simbólico na representação numérica para o registro gráfico, do registro simbólico na representação algébrica para o registro gráfico gráfica e do gráfico para o simbólico na representação algébrica. Poucos professores, conforme a figura 28, afirmaram propor algum tipo de conversão que envolva a língua natural. Dos 45 professores 58% afirmam propor atividades que partem da língua natural para o registro gráfico, considerando-se este índice baixo pela importância do mesmo.

A resolução de problemas depende inicialmente da compreensão do enunciado do problema, ou seja, passar de uma descrição discursiva dos objetos para os registros em que tratamentos podem ser aplicados. Para Duval (2003) as pesquisas que se apresentam como as mais complexas tratam, naturalmente, da atividade de conversão na qual a representação de partida é um enunciado em língua natural ou um texto. Portanto, preconiza-se que o professor deve propor atividades que envolvam a conversão com tal registro.

Sobre as dificuldades que os alunos apresentam na aprendizagem do conteúdo de

Geometria Analítica, os professores relataram as seguintes respostas, organizadas na figura 29.

Figura 29- Dificuldades apresentadas pelos alunos no conteúdo de Geometria Analítica

Dificuldades observadas pelos professores	N° de respostas dos 45 professores	Percentual
Interpretação e compreensão de problemas.	45	100%
Compreensão de gráficos.	18	40%
Tratamentos nas representações algébricas envolvidos na resolução de sistemas de equações.	27	60%
Distância entre pontos.	11	24%
Cálculos algébricos.	39	87%
Definição de equações algébricas da Reta representadas no plano cartesiano.	41	91%
Construção de gráficos.	5	11%
Visualizar as posições relativas dos conteúdos de Reta e Circunferência.	29	64%
Dificuldades relativas a nomenclaturas e conceitos.	42	93%
Conhecimentos prévios: operações com frações, mínimo múltiplo comum, números decimais, produtos notáveis, regras de sinais, formação de pares ordenados, radiciação, potenciação.	45	100%

Fonte: A Pesquisa.

Observa-se que 100% dos professores afirmam que os alunos têm dificuldades de interpretar e compreender problemas, e 93% afirmam dificuldades com nomenclaturas e conceitos. Entende-se que estas dificuldades remetem a uma relação com o fato de pouco ser trabalhado o registro língua natural em atividades de tratamentos e conversões. Os professores também foram unânimes em afirmar que os alunos apresentam dificuldades em conhecimentos prévios de que necessita o conteúdo de Geometria Analítica trabalhados no Ensino Fundamental, como os apresentados na figura 29.

Outra dificuldade identificada está nos tratamentos nas representações algébricas mencionados por 86% dos professores. Entende-se que tal dificuldade possivelmente está relacionada com os conhecimentos prévios em que os alunos também apresentam dificuldades. As posições relativas tanto de Reta quanto de Circunferência é mencionada por 64 % dos professores, pois é necessário que o aluno entenda os conceitos envolvidos nestas posições, realize tratamentos algébricos, interprete representações gráficas e figurais para determiná-las.

Além destas, uma dificuldade relevante relatada por 91% dos professores está na conversão do registro gráfico para o registro simbólico na representação algébrica, que de acordo com Moretti (2003) é uma conversão não-congruente, ou seja, o registro de chegada não está visível no registro de partida como no sentido oposto a esta conversão. Desta forma, implica em maior dificuldade para o aluno realizar este tipo de atividade, ressaltando a importância de trabalhar a conversão no sentido gráfico para o algébrico para a compreensão do conteúdo matemático.

Com relação a avaliação, tanto os professores quanto as propostas curriculares das escolas, mencionaram que esta é um processo constante. Sendo que 80% dos 45 professores afirmaram levar em consideração a participação dos alunos nas aulas além de utilizarem provas e trabalhos como instrumentos de avaliação e 20% afirmaram avaliar somente com provas e trabalhos. Estas avalições são realizadas, segundo os professores, durante o trimestre em que o conteúdo de Geometria Analítica é estudado.

Os dados identificados contribuíram para organizar a proposta metodológica desenvolvida para o ensino da Geometria Analítica delineando os conteúdos trabalhados, objetivos, metodologias e avaliação. Possibilitando, também, uma fotografia do que acontece no planejamento curricular e subsidiando para a construção do Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA) desenvolvido e implementado nesta investigação.

4.2 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO MÉDIO ACERCA DOS CONTEÚDOS DE GEOMETRIA ANALÍTICA

A investigação em livros didáticos das coleções aprovadas pelo Plano Nacional do Livro Didático (PNLD), para o ano de 2012, para o Ensino Médio visou identificar os conteúdos de Geometria Analítica propostos, em particular para Reta e Circunferência, em que momento do Ensino Médio sugerem que sejam abordados, quais registros de representação semiótica são utilizados, como são explorados e quais metodologias propõem para o ensino destes conteúdos.

Foram escolhidos para análise os livros didáticos, volume três, volume no qual é abordado o conteúdo de Geometria Analítica, das sete coleções aprovadas pelo PNLD (2012): Matemática - Contexto e Aplicações do autor Luiz Roberto Dante, editado pela Ática, em São Paulo, em 2010 (L1); Matemática - Paiva do autor Manoel Paiva editado pela Moderna, em São Paulo, em 2009 (L2); Novo Olhar Matemática do autor Joamir Roberto de Souza, editado pela FTD, em São Paulo, em 2010 (L3); Matemática: ciência e aplicações dos autores Gelson Iezzi, et al., editado pela Saraiva, em São Paulo, em 2010 (L4); Matemática: ensino médio das autoras Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz, editado pela Saraiva, em São Paulo, em 2010 (L5); Conexões com a Matemática de Juliane Matsubara Barroso, editado pela Moderna, em São Paulo, ano de 2010 (L6); Matemática: ciência, linguagem e tecnologia de Jackson Ribeiro, editado pela Scipione, em 2010 (L7).

De acordo com o Guia nacional do Livro Didático (BRASIL,2011), em relação à seleção dos conteúdos na aprovação das obras, a Geometria Analítica, dada a sua importância como uma conexão entre a geometria e a álgebra, foi destacada em um campo específico, que compreende: retas, circunferências e cônicas no plano cartesiano; vetores; e transformações geométricas.

> Desde suas origens, a Geometria Analítica é um campo privilegiado para as conexões entre a álgebra e a geometria. É sabido que a escolha de um sistema de coordenadas permite que se estabeleça uma estreita relação entre, de um lado, figuras geométricas e, do outro, equações (ou inequações) envolvendo as coordenadas dos pontos. Na Geometria Analítica, tanto resolvemos problemas geométricos recorrendo a métodos algébricos, quanto atribuímos significado geométrico a fatos algébricos (BRASIL, 2011, p. 33).

Na terceira série do Ensino Médio, ou seja, no volume três das coleções aprovadas pelo PNLD (2012), segundo o Guia Nacional do Livro Didático (BRASIL, 2011) é dado maior atenção à Geometria Analítica, em detrimento de outros campos. Apresenta-se na figura 30, o quadro com a distribuição dos conteúdos de Ponto e Reta e Circunferência, nos livros didáticos analisados.

Figura 30- Distribuição dos conteúdos de Ponto e Reta e Circunferência nos livros didáticos analisados

<table>
<tr><th colspan="2">Distribuição do conteúdo de Ponto e Reta</th><th>L1</th><th>L2</th><th>L3</th><th>L4</th><th>L5</th><th>L6</th><th>L7</th></tr>
<tr><td colspan="2">Sistema Cartesiano ortogonal</td><td>x</td><td></td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td></tr>
<tr><td colspan="2">Distância entre dois pontos</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td></tr>
<tr><td colspan="2">Coordenadas de um Ponto médio de um segmento de Reta</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td></tr>
<tr><td colspan="2">Condição de alinhamento de três pontos</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td></tr>
<tr><td colspan="2">Inclinação de uma Reta</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td></tr>
<tr><td colspan="2">Coeficiente angular de uma Reta</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td></tr>
<tr><td colspan="2">Coeficiente linear de uma Reta</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>x</td></tr>
<tr><td colspan="2">Equação da Reta quando são conhecidos um Ponto $\mathbf{P}_0(x_0, y_0)$ e a declividade **m** da Reta</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td></td><td>x</td><td>x</td></tr>
<tr><td colspan="2">As bissetrizes dos quadrantes e as retas horizontais e verticais</td><td></td><td>x</td><td></td><td>x</td><td>x</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">Formas da equação da Reta:</td><td>Forma reduzida</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td></tr>
<tr><td>Equação geral</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td></tr>
<tr><td>Forma segmentária</td><td>x</td><td></td><td></td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">Posições relativas de duas retas no plano:</td><td>Retas paralelas</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td></tr>
<tr><td>Retas concorrentes</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td></tr>
<tr><td>Intersecção de duas retas</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td></tr>
<tr><td colspan="2">Equações paramétricas da Reta</td><td></td><td>x</td><td></td><td>x</td><td></td><td>x</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Perpendicularidade de duas retas</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td></tr>
<tr><td colspan="2">Distância de um Ponto a uma Reta</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ângulo formado por duas retas</td><td>x</td><td></td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td></tr>
<tr><td colspan="2">Área de uma região triangular</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td></tr>
<tr><td colspan="2">Inequação do 1^0 grau com duas variáveis</td><td></td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td></tr>
<tr><td colspan="2">Distribuição do conteúdo de Circunferência</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Definição</td><td>x</td><td></td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td></tr>
<tr><td colspan="2">Equação geral e reduzida</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td></tr>
<tr><td colspan="2">Posições relativas entre Ponto e Circunferência</td><td></td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td></tr>
<tr><td colspan="2">Posições relativas entre Reta e Circunferência</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td></tr>
<tr><td colspan="2">Problemas de tangência</td><td>x</td><td></td><td></td><td>x</td><td>x</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Posições relativas de duas circunferências</td><td>x</td><td></td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td><td>x</td></tr>
<tr><td colspan="2">Inequações do 2^0 grau com duas incógnitas</td><td></td><td></td><td></td><td>x</td><td></td><td>x</td><td>x</td></tr>
</table>

Fonte: A pesquisa.

Os livros analisados possuem um padrão de organização quanto à apresentação dos conteúdos e atividades sobre Ponto e Reta e Circunferência, sendo estes distribuídos em capítulos e subdivididos em unidades conforme o quadro da figura 1. Observa-se, também, na figura 30, que apenas um livro aborda o coeficiente linear de uma Reta e somente três dos sete livros analisados abordam as equações paramétricas da Reta. Nota-se ainda, a apresentação de inequação do primeiro grau com duas variáveis em seis livros e de inequação do segundo grau com duas incógnitas em três livros, sendo que em geral, estes livros buscam fazer uma aplicação à programação linear, por meio de problemas introdutórios a este assunto.

Segundo o Guia Nacional do Livro Didático (BRASIL, 2011), a abordagem dos conteúdos de Geometria Analítica adotada nos livros analisados é muito fragmentada, mencionando um exemplo no estudo da Reta, em que há vários tipos de equação, apresentados isoladamente e com igual destaque, ao invés de se priorizar uma delas, à qual seriam relacionadas as demais. O autor reafirma a falta do estudo das equações paramétricas da Reta, que são férteis em conexões com a Física, e só foram encontradas em três das obras.

No estudo da Circunferência, o Guia Nacional do Livro Didático (BRASIL, 2011) comenta que apenas uma coleção não utiliza o método de completar quadrados para obter a forma canônica de sua equação, que permite determinar as coordenadas do centro e o comprimento do raio, dessa maneira, atribui-se significado a este procedimento algébrico.

Todas as obras contêm páginas de abertura dos capítulos (ou unidades) que apresentam aplicações, questões, problemas, informações ou revisão de pré-requisitos, relacionadas com aquilo que será estudado. As seções iniciais, em geral incluem um pouco da História da Geometria Analítica.

Observa-se, segundo o Guia Nacional do Livro Didático (BRASIL, 2011) a sistematização, algumas vezes apressada, dos conteúdos, acompanhada de exercícios resolvidos que servem como modelos a serem seguidos, além da ênfase de exercícios para o aluno que recai no treinamento a partir destes modelos. De acordo com o autor (BRASIL 2011, p. 39-40) “essa é uma característica que dificulta as tentativas de o professor conduzir aulas nas quais os alunos pensem, discutam possíveis soluções e reconheçam a necessidade de ampliação dos conhecimentos”. No final de cada capítulo ou unidade, em geral as obras apresentam exercícios complementares e seções com questões de vestibulares de diferentes regiões do país e do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). No livro Matemática - Contexto e Aplicações (L1) apresenta uma seção intitulada “Tim-tim por Tim-tim” em que são seguidas, em detalhes, as diferentes fases de resolução de um problema. No manual do professor, em algumas obras são apresentados breves textos relacionados a etnomatemática, modelagem matemática, recursos tecnológicos, a utilização da história da Matemática, resolução de problemas com o intuito do professor utilizar esses temas em suas aulas, porém como são textos superficiais e não apresentam sugestões de trabalho relacionado a algum conteúdo, caso o professor não tenha um conhecimento prévio desses temas, é necessário que ele busque leituras complementares para utilização em sua prática docente, são também sugeridas leituras complementares para o professor, sugestões de sites para consulta, orientações para o desenvolvimento dos conteúdos, os objetivos específicos para a Geometria Analítica ou as habilidades e competências a serem desenvolvidas em cada assunto.

Na figura 31, apresenta-se o quadro sobre a exploração dos Registros de Representação Semiótica, proposta de interação entre os alunos e contextualizações com outros campos da Matemática e extramatemática, nos conteúdos de Reta e Circunferência dos livros didáticos analisados. Foram definidos parâmetros para identificar a frequência das atividades encontradas em cada obra, segundo esta análise: pouco frequente (PF) menos de 10 atividades ou exemplos, frequente (F) entre 10 e 15 atividades ou exemplos, muito frequente (MF) mais que 15 atividades ou exemplos e não apresentou (NA).

Figura 31- Aspectos analisados nos conteúdos de Ponto, Reta e Circunferência dos livros didáticos

		L1	L2	L3	L4	L5	L6	L7
Tipos de Registros e Representações Semióticas utilizados:	Registro Língua natural (conceitos, definições, etc.)	F	F	F	F	F	F	F
	Registro Simbólico na representação numérica	MF	MF	MF	MF	MF	MF	MF
	Registro Simbólico na representação algébrica	MF	MF	MF	MF	MF	MF	MF
	Registro Figural (formas geométricas)	PF	PF	PF	PF	PF	PF	PF
	Registro Gráfico	MF	F	PF	F	F	F	MF
Registros e Representaçõe em que envolvem atividades de tratamentos:	Registro Língua natural	PF	PF	NA	NA	NA	NA	PF
	Registro Simbólico na representação numérica	MF	MF	MF	MF	MF	MF	MF
	Registro Simbólico na representação algébrica	MF	MF	MF	MF	MF	MF	MF
	Registro Figural (formas geométricas)	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA
	Registro Gráfico	PF	NA	NA	NA	NA	NA	NA
Registros e Representações que envolvem atividades de conversões:	Registro Língua natural para o Registro Simbólico (representação algébrica)	PF	PF	NA	NA	PF	NA	NA
	Registro Simbólico na representação algébrica para a o Registro Língua Natural	PF	PF	PF	PF	NA	PF	PF
	Registro Língua natural para o Registro Gráfico	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA
	Registro Gráfico para o Registro Língua Natural	NA	NA	NA	NA	PF	PF	PF
	Registro Gráfico para o Registro Simbólico na representação numérica	PF	PF	PF	PF	PF	PF	PF
	Registro Simbólico na representação numérica para o Registro Gráfico	MF	F	F	F	F	F	NA
	Registro Simbólico na representação algébrica para o Registro Gráfico	MF	MF	MF	MF	MF	MF	MF
	Registro Gráfico para o Registro Simbólico na representação algébrica	F	F	PF	F	PF	PF	F
Abordagem teórica sobre Registros de Representação Semiótica no manual do professor		NA	PF	NA	NA	NA	NA	NA
Sugestões de atividades envolvendo tratamentos de registros semióticos no manual do professor		PF	PF	NA	PF	NA	NA	PF
Sugestões de atividades envolvendo conversões entre diferentes registros semióticos no manual do professor		PF	NA	NA	PF	NA	NA	PF
Proposta de interação entre os alunos com atividades em dupla ou em grupo		PF	PF	PF	PF	PF	PF	PF
Contextualização em outros campos da Matemática		PF	PF	PF	PF	PF	PF	PF
Contextualização extramatemática		PF	PF	PF	PF	PF	PF	PF
Sugestões de atividades utilizando recursos computacionais		NA	NA	NA	NA	PF	NA	NA

Fonte: A Pesquisa.

Quanto às possibilidades de exploração dos Registros de Representação Semiótica, nas obras analisadas, observa-se que todas se utilizam dos registros língua natural com situações descritas na língua portuguesa, representação numérica (registro simbólico) como, por exemplo, as coordenadas de um Ponto, registro figural composto de figuras geométricas, registro gráfico e a representação algébrica (registro simbólico) composto de equações, fórmulas, coordenadas de um Ponto na forma *P(a,b)* nas atividades propostas e situações de ensino. Entretanto, evidencia-se que estas atividades priorizam, em sua maioria, os tratamentos com poucas atividades de conversão entre estes registros. Observa-se que o livro Matemática – Paiva (L2) é único que traz uma abordagem teórica, com um pequeno texto sobre a teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, sobressaindo-se em relação às demais obras na abordagem de atividades envolvendo tratamentos na língua natural. Entretanto, não aborda atividades de conversão entre os registros língua natural e gráfico, e do registro simbólico (representação numérica) para o registro gráfico.

Observa-se também, conforme a figura 31, que nenhuma obra apresenta atividades de conversão do registro língua natural para o registro gráfico, como também não é apresentado tratamento no registro figural e apenas uma obra apresenta tratamento no registro gráfico. As atividades de conversão do registro língua natural para a representação algébrica (registro simbólico) e do registro gráfico para a língua natural é apresentada em apenas três obras. Quanto às sugestões de atividades complementares envolvendo tratamentos e conversões de diferentes registros semióticos no manual do professor, três das sete obras analisadas não apresentam nenhum tipo de atividade.

Outro dado importante é que os exercícios apresentados não buscam fazer modificações nas variáveis visuais das equações e gráficos permitindo ao aluno perceber as implicações destas modificações na correspondente conversão entre seus respectivos registros. Duval (2004) recomenda que desde os primeiros anos do Ensino Médio o professor busque organizar situações de aprendizagem centradas na coordenação de registros, o que requer a identificação prévia das variações cognitivamente pertinentes de uma representação em um registro, de maneira que possa ser realizada pelos alunos uma exploração segundo o método que consiste em fazer variar somente um fator de cada vez, deixando os outros sem troca, em uma representação.

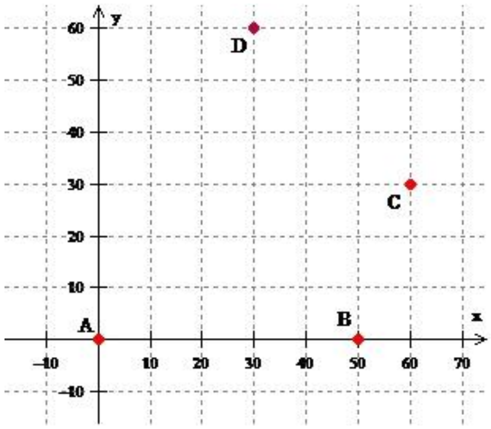
Na figura 32 apresenta-se uma atividade do livro Matemática- Contexto e Aplicações, do autor Luiz Roberto Dante (2010), que buscou propor a conversão e tratamentos entre diferentes registros semióticos.

Figura 32- Atividade de conversão e tratamentos de registros semióticos

(Ibmec-SP) Os pontos **A**, **B**, **C** e **D** do plano ao lado representam 4 cidades.
Uma emissora de televisão quer construir uma estação transmissora numa localização tal que:

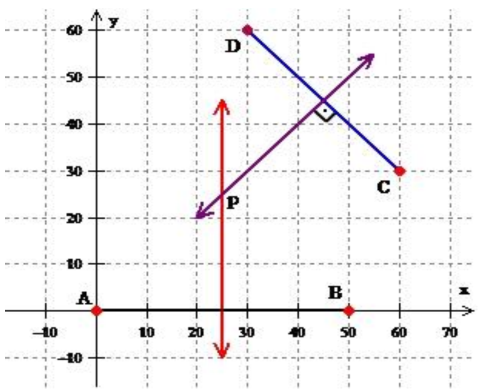
-a distância entre a estação e a cidade localizada em **A** seja igual à distância entre a estação e a cidade localizada em **B**.

- a distância entre a estação e a cidade localizada em **C** seja igual à distância entre a estação e a cidade localizada em **D**.
Considerando as coordenadas do plano ao lado, a localização da estação deverá ser o ponto:



a) (10, 10)
b) (10, 20)
c) (25, 10)
d) (20, 20)
e) (25, 25)

1. Lendo e compreendendo



a) O que é dado no problema?
A localização das quatro cidades: **A**(0,0), **B**(50, 0), **C**(60, 30) e **D**(30,60); as regras de localização da estação transmissora (equidistante de **A** e **B** e equidistante de **C** e **D**).
b) O que se pede?
Pede-se a localização da estação transmissora da televisão, de acordo com as regras enunciadas no texto.

2. Planejando a solução
De acordo com o que foi estudado, sabemos que, se queremos localizar um Ponto P equidistante de outros dois (A e B, por exemplo), esse Ponto P estará na mediatriz do segmento AB.

Fonte: Dante (2010, p.68 , vol.3).

As próximas etapas para resolução desenvolvidas pelo autor são: 3 – executando o que foi planejado, 4 – emitindo a resposta e 5 – ampliando o problema. Assim, esta atividade exemplifica a intenção do autor em elencar alguns aspectos norteadores que devem ser considerados durante a resolução de um problema através de cinco etapas cuidadosamente explicadas, como inicialmente apresentadas na figura 22.

No tocante aos Registros de Representação Semiótica observa-se que o autor envolve os registros língua natural e registro gráfico no enunciado. Para a solução o aluno necessita escrever os pontos do gráfico, o qual representa o mapa em que são traçados os caminhos entre as emissoras de televisão, em registro simbólico (representação numérica), realizar um tratamento no gráfico dado, a partir do conceito de pontos equidistantes, para então calcular a mediatriz do segmento *AB*. A partir das coordenadas dos pontos no gráfico o aluno realiza tratamentos numéricos para encontrar a mediatriz dos segmentos *AB* e *CD*, e assim efetua a conversão para o registro simbólico (representação algébrica), escrevendo a equação que representa a mediatriz do segmento *CD*. Realizando tratamentos no registro simbólico (representação algébrica) da equação encontrada o aluno obtém a intersecção das duas mediatrizes, e encontra as coordenadas do Ponto *P*, ou seja, a resposta do problema.

Com isto, observa-se que ao estabelecer as possíveis etapas para maior elucidação da pergunta e encaminhamento para resposta (solução do problema), o autor quis enfatizar a importância de se lançar mão das representações gráficas de modo que, neste caso, com o uso desta representação, mapa com sistema de referência e o posicionamento das estações, foi possível observar mais claramente que o objetivo matemático era encontrar o Ponto de encontro das mediatrizes, segundo o mapa, dos segmentos *AB* e *CD*, resultando assim na solução do problema.

A figura 33 apresenta um exercício resolvido do livro de Manoel Paiva que utiliza diferentes registros semióticos.

Figura 33- Atividade com diferentes registros semióticos

Obter a intersecção da reta s de equação $x + y - 3 = 0$ com a circunferência λ de equação $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$.

Resolução

O conjunto $s \cap \lambda$ é o conjunto solução do sistema:

$$\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ (x-3)^2 + (y-2)^2 = 4 \end{cases} \quad \text{que é equivalente a}$$

$$\begin{cases} y = 3 - x & \text{(I)} \\ (x-3)^2 + (y-2)^2 = 4 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$(x-3)^2 + (3 - x - 2)^2 = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-3)^2 + (1-x)^2 = 4$

$\therefore x^2 - 6x + 9 + 1 - 2x + x^2 = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^2 - 8x + 6 = 0$

$\therefore x^2 - 4x + 3 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

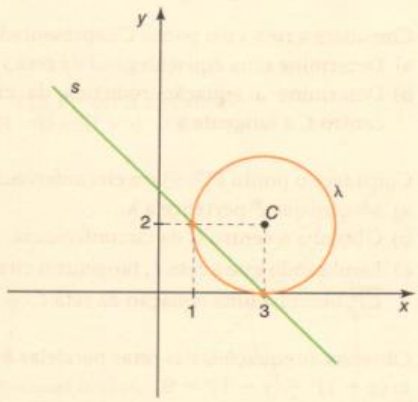
$\therefore x = 3$ ou $x = 1$

- Para $x = 3$ temos, da equação (I):
  $y = 3 - 3 = 0$
- Para $x = 1$ temos, da equação (I):
  $y = 3 - 1 = 2$

Concluímos, então, que:

$s \cap \lambda = \{(3, 0), (1, 2)\}$

Representando graficamente, temos:



Fonte: Paiva (2009, p. 86, vol.3).

No exercício apresentado na figura 33, o objetivo matemático é encontrar os pontos de intersecção entre a Reta e a Circunferência dadas pelas respectivas equações, e representá-las graficamente no plano cartesiano.

O autor apresenta o problema utilizando-se da língua natural e da representação algébrica das equações da Reta e da Circunferência. Inicia a resolução a partir de um sistema com as duas equações para encontrar o conjunto dos pontos de intersecção entre elas. Ao resolver o autor realiza um tratamento algébrico ao passar a equação geral da Reta para sua equação reduzida e utilizando o método de substituição realiza tratamentos algébricos e numéricos na equação da Circunferência e encontra os pontos *(3,0)* e *(1,2)* como conjunto solução do sistema e intersecção entre a Reta e a Circunferência λ. Então representa as graficamente com os respectivos pontoa de intersecção realizando uma conversão para registro gráfico. O problema oferece possibilidades de tratamentos e conversão de registros semióticos, conforme supracitado, de modo que essa articulação enriquece a discussão da importância destes registros dentro do exercício proposto.

Nota-se, conforme o quadro da figura 31, que todas as obras trazem algum tipo de proposta de interação entre os alunos, seja em dupla ou em grupo, porém são poucas seções com este tipo de proposta. Em relação à contextualização com outros campos da Matemática, segundo o Guia Nacional do Livro Didático (BRASIL, 2011) é importante as conexões da Geometria Analítica com gráficos de funções; representações geométricas dos sistemas lineares; matrizes de transformações geométricas. No entanto, entende-se que é importante tomar cuidado ao relacionar o conteúdo de funções salientando a diferença conceitual existente entre os dois conteúdos, pois a Geometria Analítica trata do lugar geométrico e sistema de posicionamento de pontos no plano.

Observa-se também a contextualização com a geometria plana, progressão aritmética, estatística e programação linear, no entanto, segundo o autor (BRASIL, 2011), dada a importância dessas contextualizações, elas deveriam ser mais frequentes. Em relação à contextualização extramatemática, observa-se conexões feitas com outras áreas da ciência como astronomia, geografia, física, arte, com o mundo do trabalho, práticas sócias, tecnologia e meio ambiente, agricultura, funcionamento do GPS, embora estas contextualizações sejam pouco freqüentes com uma seção no final do capítulo ou poucas atividades no decorrer dos mesmos.

Outro dado importante, segundo a figura 31 é sobre sugestões de atividades com recursos computacionais, as quais aparecem em apenas uma obra. De acordo com o Guia nacional do Livro Didático (BRASIL, 2011, p. 37),

> uma das vantagens do uso das tecnologias atuais de informação e comunicação é que elas possibilitam, em um tempo cada vez menor, estender em muito o número de dados que podem ser trabalhados nos experimentos. Acima de tudo, isso abre espaço para que possamos investir na busca do significado e na interpretação dos dados obtidos e das medidas estatísticas associadas a ele, que são fundamentais para um efetivo trabalho técnico ou científico.

Segundo a análise realizada infere-se a necessidade, nos livros didáticos, de uma abordagem dos conteúdos de Geometria Analítica (Ponto e Reta e Circunferência) articulada ao uso de diferentes registros semióticos potencializando as atividades de conversão entre estes, o que segundo Duval (2004) é isto que garante a apreensão do objeto matemático e a conceitualização. Conclui-se que é dada prioridade para atividades que envolvem tratamentos e ainda assim com maior ênfase no registro simbólico com representações numéricas e algébricas.

5 O AMBIENTE VIRTUAL DE APRENDIZAGEM COM GEOMETRIA ANALÍTICA E OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Nesta seção, apresenta-se como foi desenvolvido, com base na análise das propostas curriculares das escolas estaduais, do questionário aplicado aos professores destas escolas e, também, com base na análise dos livros didáticos acerca dos conteúdos de Geometria Analítica, o grafo com tais conteúdos com enfoque em Ponto, Reta e Circunferência. Apresenta-se, também, a sequência didática eletrônica desenvolvida para cada conceito do grafo e o banco de questões para a realização dos testes adaptativos no sistema SIENA, com base na teoria dos Registros de Representação Semiótica e nas tendências metodológicas para o ensino da Matemática, consideradas adequadas ao conteúdo de Geometria Analítica.

5.1 CONSTRUINDO O DESIGN DO AMBIENTE VIRTUAL DE APRENDIZAGEM COM GEOMETRIA ANALÍTICA: O GRAFO

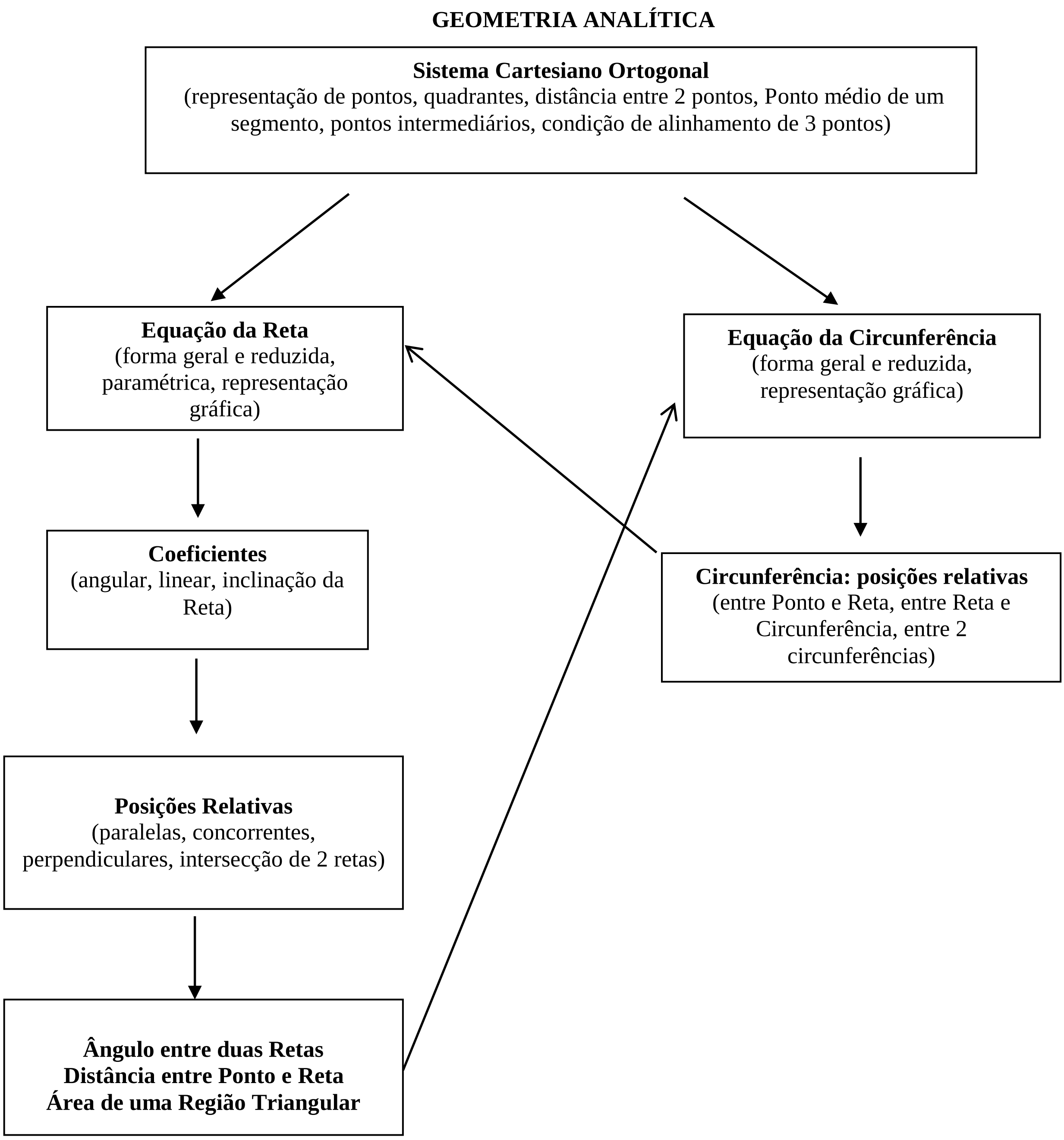
O grafo desenvolvido e implementado no sistema SIENA e no Sistema de Estudos possui sete conceitos, de acordo com o conteúdo a ser desenvolvido:

- *Sistema Cartesiano Ortogonal*, neste conceito abordou-se a representação de pontos no plano cartesiano, quadrantes, distância entre 2 pontos, Ponto médio de um segmento, pontos intermediários e condição de alinhamento de 3 pontos;
- *Equação da Reta*, neste conceito é abordado a forma geral, reduzida e paramétrica da equação da Reta e a representação gráfica da Reta com base nestas equações;
- *Coeficientes*, abordou-se de forma algébrica e a correspondência gráfica, os coeficientes angular e linear da Reta e a relação da inclinação da Reta com o coeficiente angular;
- *Posições Relativas entre Retas*, neste conceito foram estudadas as representações gráficas e algébricas de retas paralelas, concorrentes, perpendiculares e intersecção de 2 retas.
- *Ângulo entre duas Retas, Distância entre Ponto e Reta e Área de uma Região Triangular*, para este nodo foram abordados conceitos e os tratamentos envolvidos para o cálculo do ângulo formado entre duas retas, cálculo da distância entre um Ponto e uma Reta e da área de uma região triangular;
- *Equação da Circunferência*, abordou-se as representações algébricas na forma geral e reduzida da Circunferência e sua representação gráfica;
- *Circunferência: posições relativas*, neste último conceito foram abordadas as posições

relativas entre Ponto e Reta, entre Reta e Circunferência, entre 2 circunferências mobilizando, principalmente, de forma simultânea, a correspondência entre as representações gráficas e algébricas.

A figura 34 apresenta o grafo com os conceitos mencionados.

Figura 34 - Grafo dos conceitos sobre Ponto, Reta e Circunferência



Fonte: A pesquisa.

Desta forma, os alunos iniciaram os estudos pelo primeiro conceito intitulado como

Sistema Cartesiano Ortogonal. Após aprovados nos testes adaptativos do SIENA deste conceito poderiam optar estudar os conceitos referentes à Reta ou à Circunferência, segundo a ordem apresentada no grafo. Caso os alunos não obtivessem um rendimento satisfatório determinado de 0,6, entre o intervalo de 0 a 1 no teste adaptativo do conceito estudado deveriam retornar aos estudos do conceito, para então refazer o teste adaptativo respectivo a tal conceito, e assim, dar sequência ao estudo do conceito seguinte.

5.2 A SEQUÊNCIA DIDÁTICA COM A GEOMETRIA ANALÍTICA ARTICULADA AOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Entende-se uma sequência didática de acordo Doz e Schneuwly (2004), os quais afirmam que esta é um conjunto de atividades pedagógicas organizadas, de maneira sistemática, com a finalidade de ajudar o aluno a dominar melhor um conteúdo.

Para planejar uma sequência didática Flemming e Mello (2003) afirmam que é necessário que o professor tenha claramente estruturado o tema, o objetivo, o conteúdo e sua contextualização no curso em que está trabalhando, visualizando as inter-relações do tema, enquanto novo conhecimento para os aprendizes, com o desenvolvimento de competências e habilidades requeridas. No contexto da Matemática, afirmam que para uma sequência didática propiciar que professor e aluno, busquem novos espaços e conhecimentos, várias estratégias didáticas podem ser usadas, como trabalhar com projetos de estudos, com resolução de problemas ou com jogos didáticos.

Desta forma, as atividades e estudos que compuseram a sequência didática com os conceitos abordados no grafo, nesta pesquisa, foram desenvolvidos com base na teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval e nas principais tendências metodológicas para a área de Educação Matemática, consideradas adequadas ao conteúdo da sequência didática, como Tecnologias da Informação e Comunicação, Resolução de Problemas, Modelagem Matemática, Jogos Digitais e História da Matemática. Buscou-se propiciar que o aluno desenvolva as habilidades propostas nas políticas públicas para o ensino da Matemática no Ensino Médio e, em particular, da Geometria Analítica. Esta sequência de atividades de estudos visou contribuir para o processo de ensino e aprendizagem da Geometria Analítica no Ensino Médio, favorecendo a compreensão e apreensão deste conteúdo, buscando ampliar os conhecimentos matemáticos dos estudantes.

Para construção das atividades didáticas, inicialmente, foi desenvolvido um ambiente informático, o qual foi denominado de Sistema de Estudos e nele inserido tais atividades. O acesso a esta plataforma foi dado por meio de um *link* com o endereço da mesma no Sistema SIENA e ao entrar nela, cada dupla de alunos possuía seu *login* e senha para realização de seus estudos nos *tablets*. A figura 35 a tela desenvolvida para *login* de cada dupla de alunos no Sistema de Estudos.

Figura 35- Tela para login no Sistema de Estudos

Fonte: Sistema de Estudos do AVA.

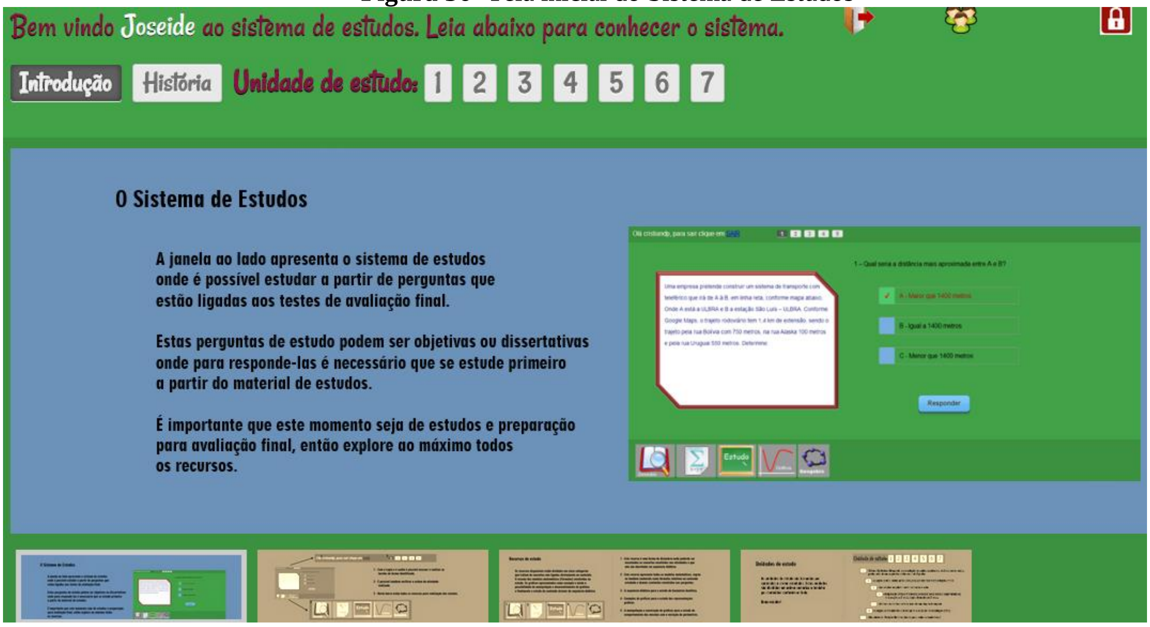
Ao se logar no Sistema de Estudos os alunos encontravam uma tela inicial, com uma introdução, contendo todas as informações de como deveriam proceder para realização dos estudos e resolução das atividades propostas, a distribuição dos conceitos referentes ao Ponto, Reta e Circunferência em sete unidades (conceitos organizados conforme o grafo apresentado na figura 33), bem como, a explicação dos recursos dispostos na mesma, que iriam auxiliá-los na compreensão destes conceitos, além de um texto sobre a história e aplicação da Geometria Analítica.

O Sistema de Estudos possui, também, como recurso didático um *fórum* em que os alunos poderiam se comunicar com outras duplas e deixar suas dúvidas para o professor, principalmente em momentos que estudavam fora do ambiente escolar. Foram disponibilizados, ainda, como recurso auxiliar, uma calculadora científica e um acesso para uma folha online de rascunho, no *tablet*, para os cálculos realizados pelos alunos.

No entanto, o desenvolvimento das questões foram realizados em folhas de ofício e entregues ao professor para contribuir na análise dos dados.

As figuras 36 e 37 apresentam, respectivamente, a imagem da tela inicial do sistema de estudos e de uma parte do texto disponibilizado com a história e aplicação da Geometria Analítica.

Figura 36- Tela inicial do Sistema de Estudos



Fonte Sistema de Estudos do AVA.

Figura 37- Parte do texto com a história e aplicação da Geometria Analítica

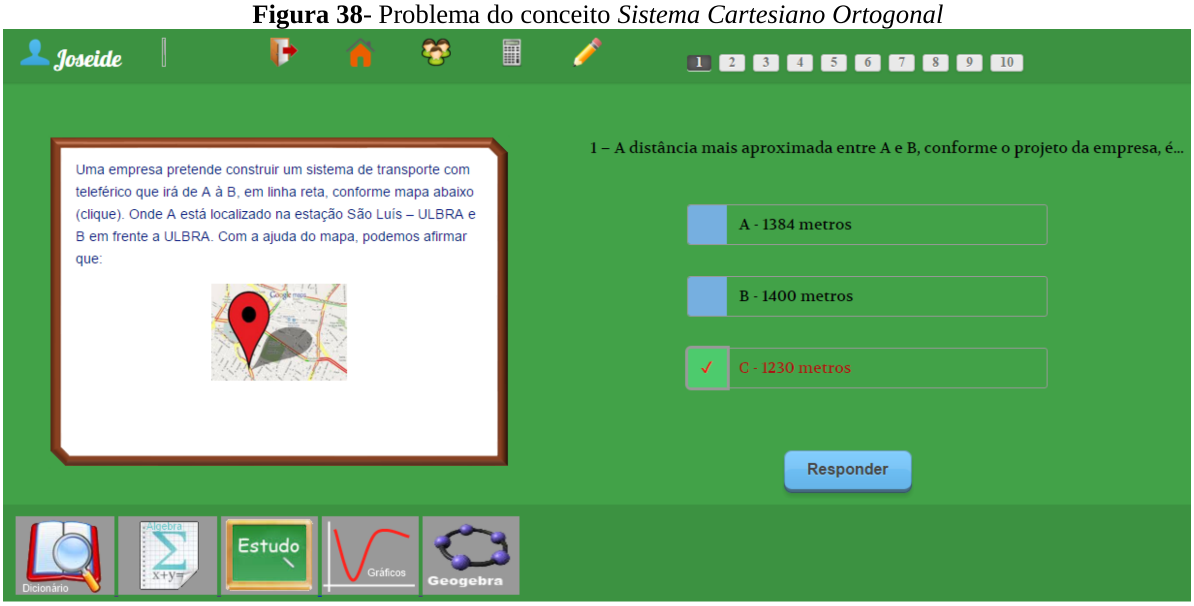
Fonte: Sistema de Estudos do AVA.

Ao entrar em cada conceito do grafo (unidade de estudos para o aluno) do Sistema de Estudos correspondente a distribuição realizada dos conteúdos, os alunos eram instigados a resolver diferentes questões, atividades e problemas, conforme o conteúdo de tal conceito e, também, dos estudados nos conceitos anteriores. Em cada conceito foram desenvolvidos de 10 a 12 problemas geradores, que visavam que os alunos realizassem tratamentos e conversões congruentes e não-congruentes, nas representações numéricas, algébricas, gráficas, língua natural e geométrica, com sentidos opostos das conversões, de acordo com o conteúdo proposto no conceito (unidade). Além disso, em algumas atividades buscou-se integrar as tendências metodológicas já referidas para o ensino da Geometria Analítica, conforme embasamento teórico no capítulo 2.4.

Conforme apresentado no grafo no conceito *Sistema Cartesiano Ortogonal* foi trabalhado os conteúdos: representação de pontos, quadrantes, distância entre 2 pontos, Ponto médio de um segmento, pontos intermediários, condição de alinhamento de 3 pontos. A seguir apresentam-se alguns problemas geradores para estes conceitos abordados, com enfoque na teoria dos Registros Representação Semiótica.

Na figura 38 apresenta-se um problema envolvendo uma conversão não-congruente nos registros semióticos língua natural e figural (representação geométrica) articulada à resolução de problemas. Os alunos deviam expressar a resposta no registro simbólico, na representação numérica, calculando a distância, em linha Reta, que um sistema de transporte com teleférico deve percorrer entre a estação de trem São Luís (Ponto A) até a entrada da Universidade Luterana do Brasil (ULBRA) (Ponto B), em Canoas. Para isso, disponibilizou-se um *link* para o *google maps*, para que os alunos visualizassem o mapa com a localização destes pontos, conforme figura 39, e desenvolvessem uma estratégia de resolução do problema.

Figura 38- Problema do conceito *Sistema Cartesiano Ortogonal*



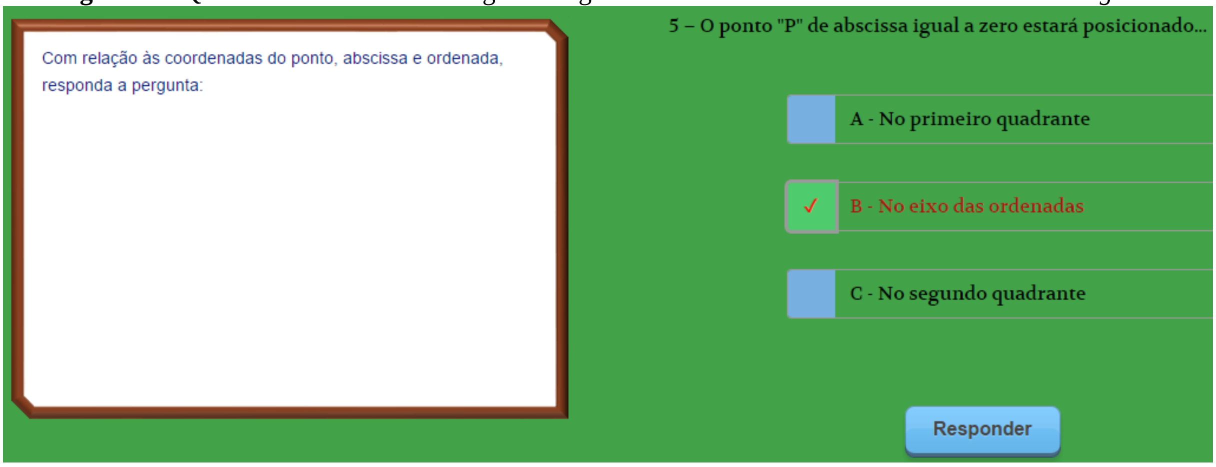
Fonte: Sistema de Estudos do AVA.

Figura 39- Localização dos pontos para resolução da questão do conceito *Sistema Cartesiano Ortogonal*

Fonte: Sistema de Estudos do AVA.

A figura 40 apresenta uma questão (problema gerador) de tratamento com o registro língua natural em que o aluno deve interpretar a localização no plano cartesiano dado a abscissa zero do Ponto e uma ordenada qualquer. Ou seja, o aluno deveria demonstrar a compreensão de que qualquer Ponto com abscissa zero está sempre acima do eixo das ordenadas.

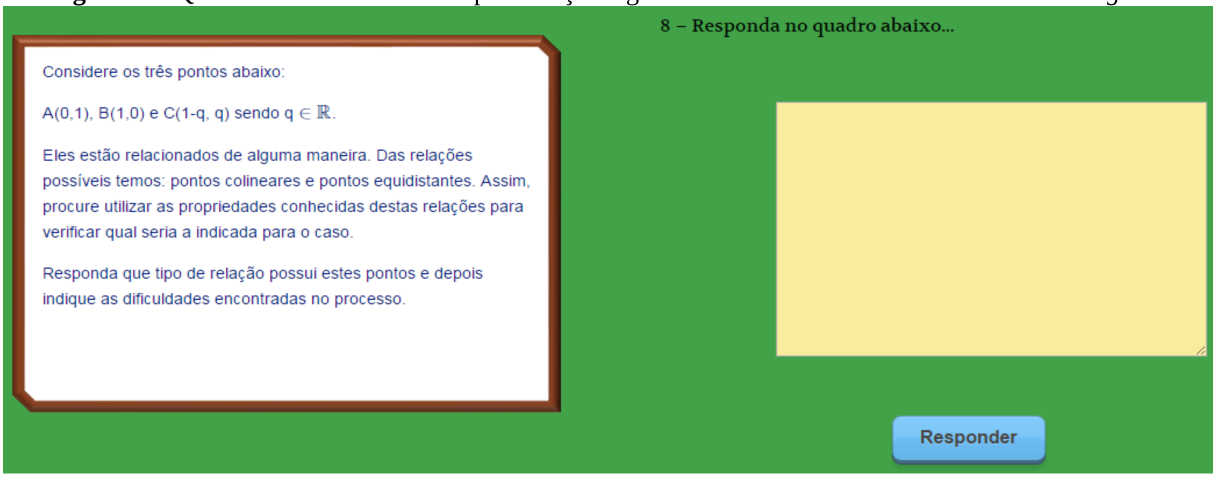
Figura 40- Questão de tratamento no registro língua natural do conceito *Sistema Cartesiano Ortogonal*



Fonte: Sistema de Estudos do AVA.

No problema gerador, apresentado na figura 41, é abordada a representação de pontos na representação numérica e algébrica, em que o aluno deve respondê-lo, estabelecendo uma relação entre eles de acordo com os conceitos de pontos colineares e pontos equidistantes. Desta forma, o aluno para resolver o problema deve compreender tais conceitos e realizar tratamentos na representação algébrica envolvendo os mesmos para definir esta relação estabelecida. Este problema demanda um custo cognitivo para o aluno no qual ele deve demonstrar conhecimento do conteúdo de frações representadas por números (representação numérica) e letras (representação algébrica), ou seja, para desenvolver cálculos no tratamento com tais representações. Ou ainda, utilizar tratamentos na resolução do determinante da matriz dos pontos dados, interpretando seu resultado de acordo com o conceito existe entre tais pontos.

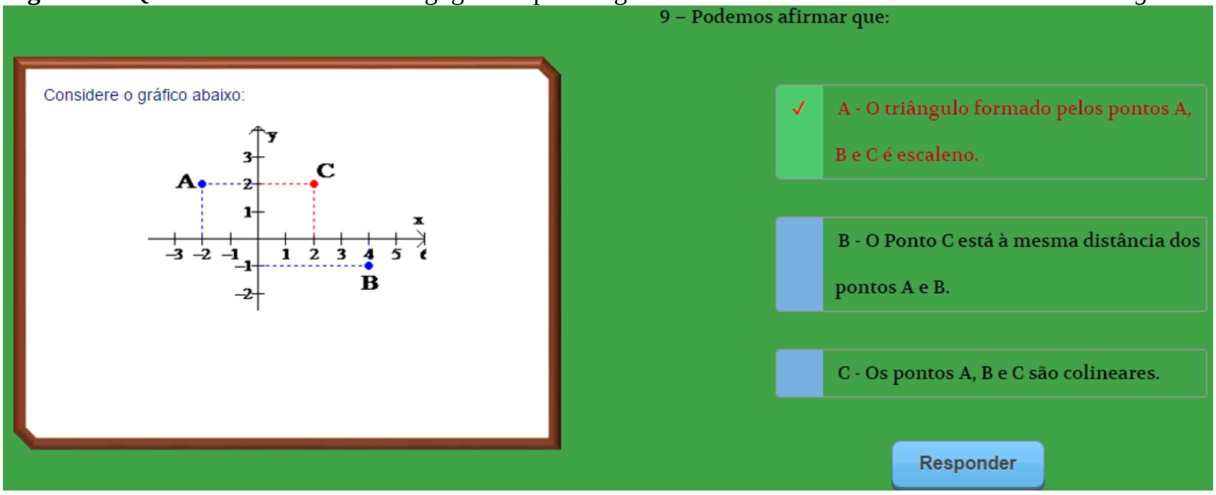
Figura 41- Questão de tratamento na representação algébrica do conceito *Sistema Cartesiano Ortogonal*



Fonte: Sistema de Estudos do AVA.

Na figura 42, apresenta-se outro problema gerador com uma conversão considerada congruente, partindo da representação gráfica de pontos, na qual o aluno deve realizar um tratamento nesta representação, traçando o triângulo e interpretando que deve desenvolver um tratamento algébrico relacionado a distância entre pontos. A partir dos resultados deve definir a resposta expressa na língua natural. Para isso, deve apresentar conhecimentos sobre os tipos de triângulos e conceito de pontos colineares, ou seja, deve realizar uma conversão da representação gráfica para a língua natural.

Figura 42- Questão de conversão do reg. gráfico para língua natural do conceito *Sistema Cartesiano Ortogonal*



Fonte: Sistema de Estudos do AVA.

.

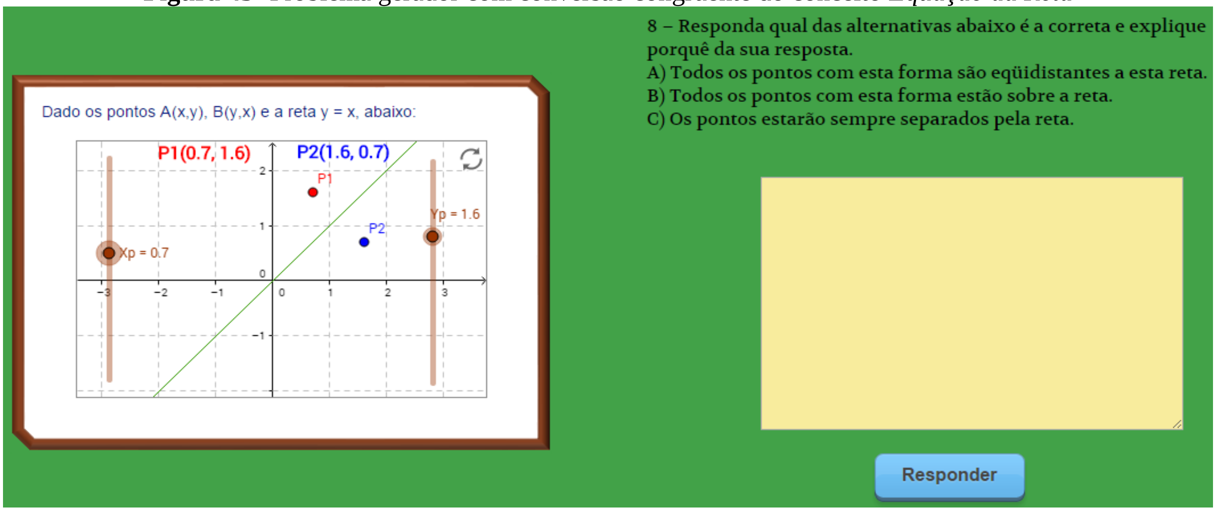
No conceito *Equação da Reta*, do grafo apresentado, trabalhou-se a representação algébrica da Reta na sua forma geral, reduzida e paramétrica e a representação gráfica. Alguns dos problemas geradores deste conceito envolviam também, os conteúdos trabalhados no conceito *Sistema Cartesiano Ortogonal*. A seguir apresentam-se alguns problemas geradores propostos para o conceito *Equação da Reta*, abordados com enfoque na teoria dos Registros Representação Semiótica.

Um problema gerador proposto foi apresentado na representação algébrica de pontos e Reta e na representação gráfica destes, a qual é um *applet* construído no *software* Geogebra, que o aluno pode manipular os movimentos dos pontos P_1 e P_2 para ajudá-lo a compreender a relação destes com a Reta $y = x$. Desta forma, para compreensão e resolução do problema gerador, inicialmente o aluno deve demonstrar visualização de que os pontos A(x,y) e B(y,x) tem representações numéricas e gráficas conforme os pontos P_1 e P_2, apresentados no gráfico do problema, segundo os movimentos destes quando o aluno os manipula, por meio do recurso do Geogebra chamado controle deslizante, possibilitado pelo *applet*.

A partir da visualização das representações numéricas e gráficas destes pontos e a representação gráfica da Reta possibilitadas no *applet*, o aluno realiza tratamentos numéricos como a fórmula da distância entre dois pontos para identificar que tendo os pontos A e B (P_1 e P_2) coordenadas com valores inversos, qualquer Ponto tomado da Reta $y = x$, será sempre equidistante dos pontos A e B, ou seja, todos os pontos com representação algébrica $A(x, y)$ e $B(y,x)$ são equidistantes a Reta $y = x$.

Na figura 43 apresenta-se o problema gerador explicitado, em que o aluno necessita realizar uma conversão das representações algébrica e gráfica dos pontos e da Reta, dados no enunciado deste problema, para a língua natural. É uma conversão considerada congruente, pois o aluno pode visualizar a resposta do problema (registro de chegada) com a manipulação do *applet* apresentado no registro de partida, desde que tenha compreendido os conceitos de distância entre pontos (pontos equidistantes) e saiba realizar o tratamento numérico requerido.

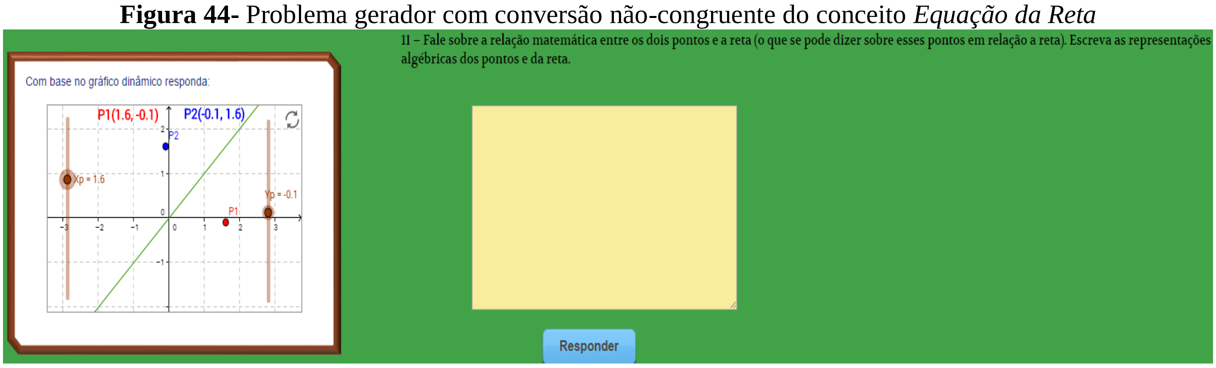
Figura 43- Problema gerador com conversão congruente do conceito *Equação da Reta*



Fonte: Sistema de Estudos do AVA.

Em outro problema gerador é disponibilizado o mesmo *applet* do problema anterior, referente a uma conversão não congruente no sentido inverso dos registros semióticos, ou seja, a partir da representação gráfica e da manipulação do *applet* as duplas devem identificar a representação algébrica dos pontos *P1* e *P2* e a representação algébrica da Reta, além de expressar em língua natural a relação matemática entre estes dois pontos e Reta. Os alunos devem reconhecer as propriedades relacionadas as modificações nos valores das coordenadas dos pontos, verificando que estes possuem coordenadas inversas e independentes de seus valores são equidistantes a Reta que tem representação algébrica $y = x$. A figura 44 ilustra este problema.

Figura 44- Problema gerador com conversão não-congruente do conceito *Equação da Reta*

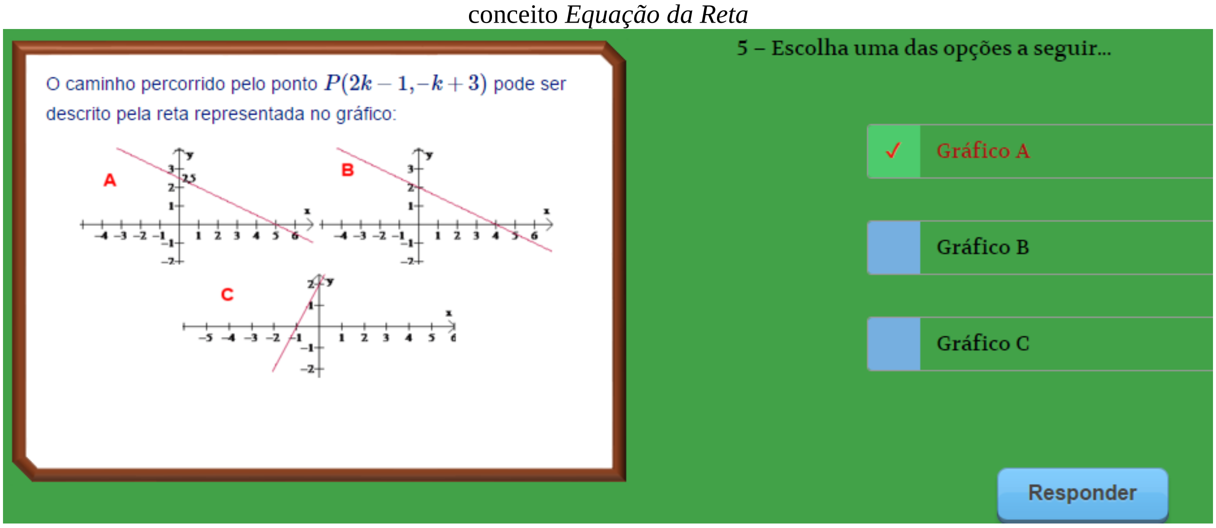


Fonte: Sistema de Estudos do AVA.

Outro problema gerador deste conceito apresenta um Ponto na forma algébrica e as duplas devem responder a representação gráfica da Reta que corresponde as características deste Ponto. Uma das formas de resolução depende da interpretação dos alunos que está relacionada identificar o coeficiente *b* da Reta formada por este Ponto e que intersecta o eixo *Y'Y*. Desta forma, os alunos devem estabelecer zero para a coordenada *x* deste ponto e encontrar o valor da variável *k* e a partir deste encontrar o valor da coordenada *y* que corresponde ao coeficiente *b* na representação algébrica da Reta, podendo assim, identifica-lo na representação gráfica determinando a representação gráfica correspondente a Reta formada segundo o Ponto dado na sua representação algébrica.

Outra forma seria os alunos atribuírem valores para a variável *k* e para as coordenadas *x* e *y* do Ponto, construindo a representação gráfica da Reta Ponto a Ponto. No entanto, neste procedimento, como afirma Moretti (2003), não há ligação entre o gráfico e a representação algébrica da equação, enquanto que a resolução a partir da interpretação mencionada, o autor comenta que a imagem gráfica formada representa um objeto descrito por uma expressão algébrica. Este problema apresenta atividade de conversão não-congruente do registro simbólico na representação algébrica para a registro gráfico, pois o Ponto é dado na forma paramétrica da Reta, o que dificulta a interpretação dos alunos. A figura 45 ilustra este problema.

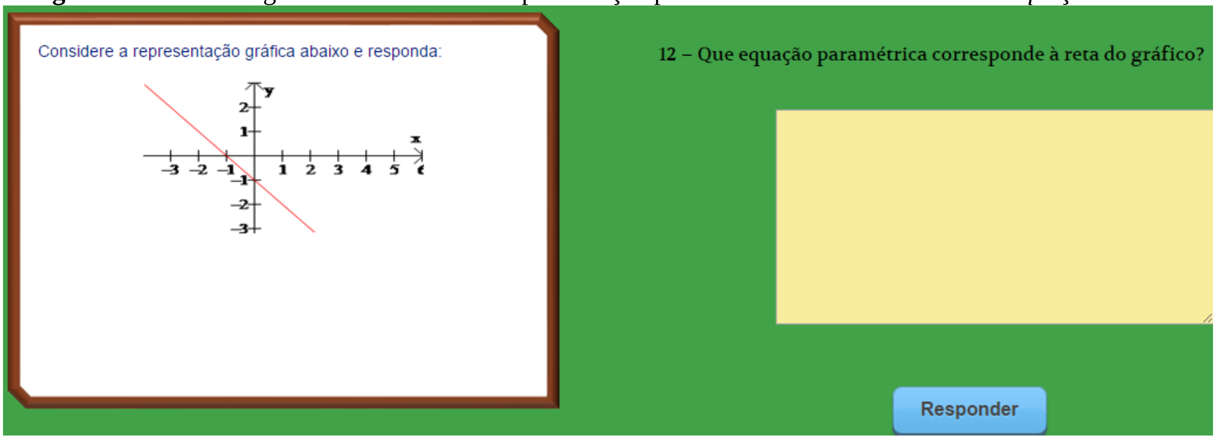
Figura 45-Problema gerador com conversão não-congruente do registro simbólico para o registro gráfico do conceito *Equação da Reta*



Fonte: Sistema de Estudos do AVA.

Na figura 46 apresenta-se mais um exemplo de problema gerador do conceito *Equação da Reta*, o qual refere-se a uma conversão não-congruente do registro gráfico para o registro simbólico na representação algébrica da Reta na forma paramétrica. Desta forma as duplas deveriam encontrar a equação reduzida da Reta representada no gráfico e realizar tratamentos algébricos e numéricos para escreve-la na forma paramétrica. Para encontrar a equação reduzida os alunos poderiam fazer a interpretação de variáveis visuais como a inclinação da Reta que define o sinal do coeficiente *a* da equação reduzida da Reta, usar as relações trigonométrica no triângulo retângulo para encontrar o valor da tangente do ângulo que determina o valor numérico deste coeficiente. E o coeficiente *b*, identifica-lo na representação gráfica onde este intersecta o eixo *Y'Y*. Outro procedimento para resolução seria por meio de sistemas lineares ou por tratamentos usando determinante da matriz formada por pontos desta Reta.

Figura 46- Problema gerador envolvendo a representação paramétrica da Reta do conceito *Equação da Reta*

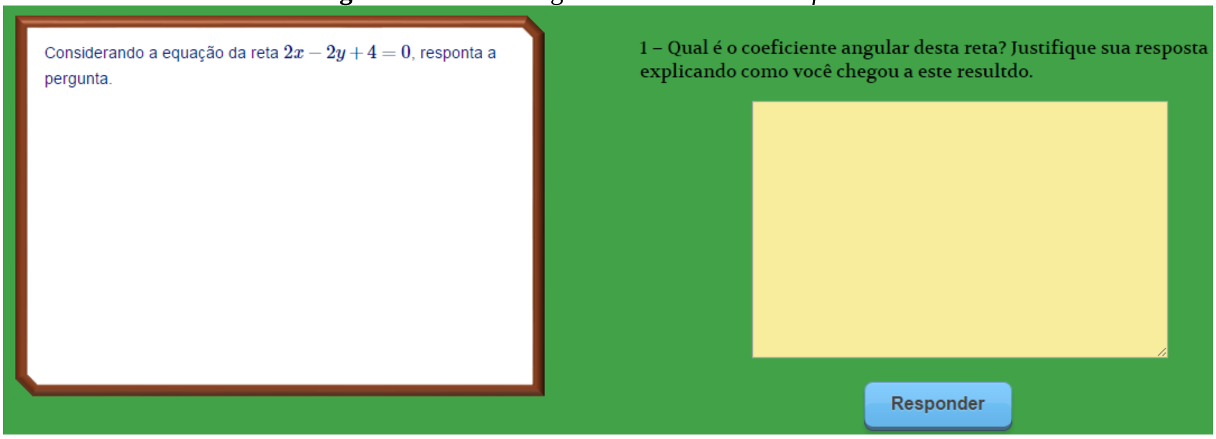


Fonte: Sistema de Estudos do AVA.

No conceito *Coeficientes*, respectivo à Reta trabalhou-se os coeficientes angular e linear e ângulo de inclinação da Reta, nas representações algébricas, gráficas e língua natural da Reta. Os problemas geradores deste conceito abordam também, os conteúdos trabalhados nos conceitos anteriores do grafo. A seguir apresentam-se alguns problemas geradores propostos para o conceito *Coeficientes*.

Na figura 47, apresenta-se uma questão que parte do registro simbólico na representação algébrica da Reta na sua forma geral, e o aluno deve identificar o coeficiente angular desta Reta, justificando como o identificou. Assim, o aluno deve realizar um tratamento na representação algébrica na equação geral da Reta passando para sua forma reduzida e assim visualizar o valor respectivo ao coeficiente angular da Reta dada.

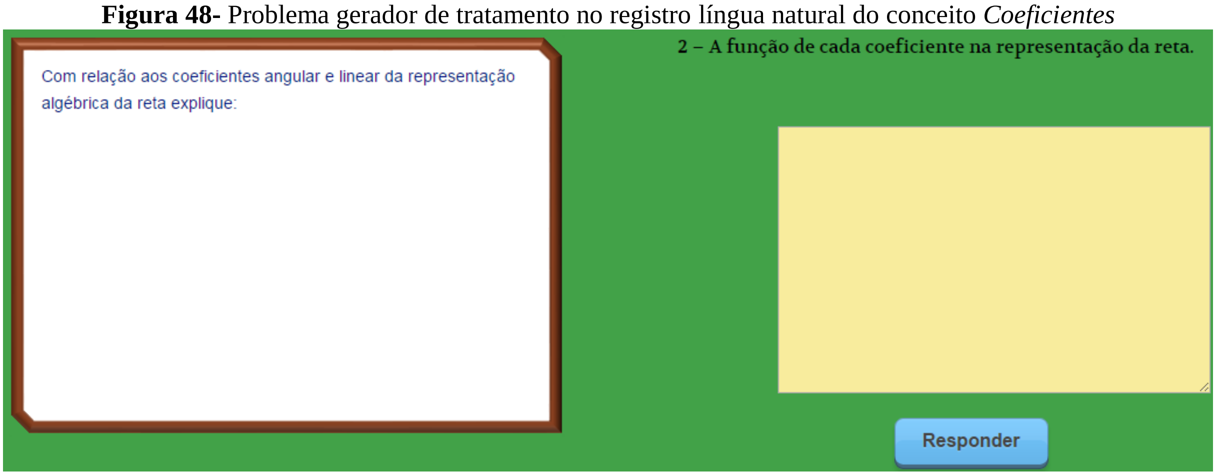
Figura 47- Problema gerador do conceito *Coeficientes*



Fonte: Sistema de Estudos do AVA.

A figura 48 apresenta outra questão em que o aluno deve responder as funções dos coeficientes angular e linear na representação da Reta. Desta forma, o aluno realizará um tratamento na língua natural demonstrando conhecimentos em relação ao conceito de cada coeficiente, em relação a inclinação (o ângulo) da Reta com o eixo *X'X* do sistema cartesiano em que seu valor na equação da Reta representa a tangente deste ângulo. E o coeficiente linear é valor no qual a Reta intersecta o eixo *Y'Y* e o valor que não está acompanhado de uma incógnita na equação da Reta.

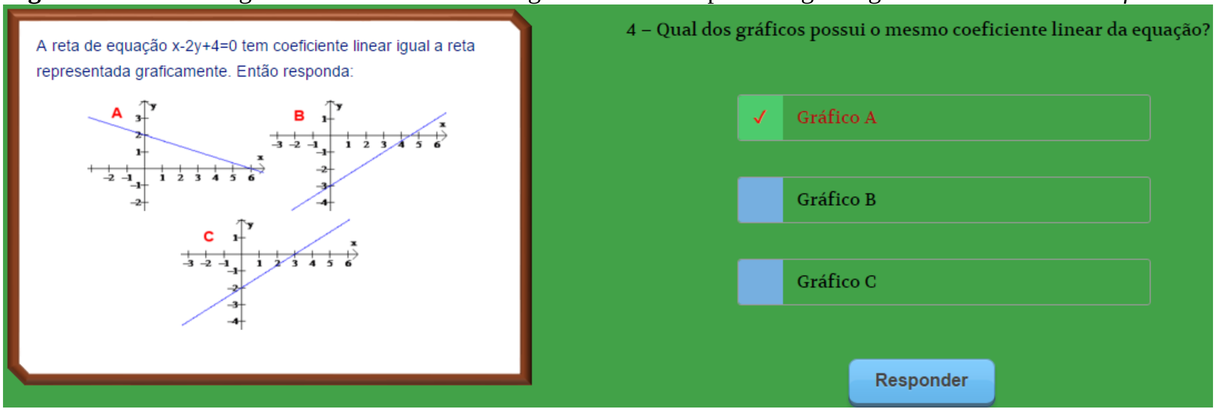
Figura 48- Problema gerador de tratamento no registro língua natural do conceito *Coeficientes*



Fonte: Sistema de Estudos do AVA.

Outro problema gerador do conceito *Coeficientes* apresenta-se na figura 49, no qual o aluno deve realizar, primeiramente, um tratamento algébrico passando da equação geral da Reta para sua forma reduzida e identificar o coeficiente linear correspondente a Reta dada e responder em qual gráfico este coeficiente está representado. Considera-se uma conversão congruente do regisro simbólico na representação algébrica para o registro gráfico, em que o aluno compreendendo o conceito de coeficiente linear e realizando o tratamento necessário o visualizará no registro de chegada dado na representação gráfica.

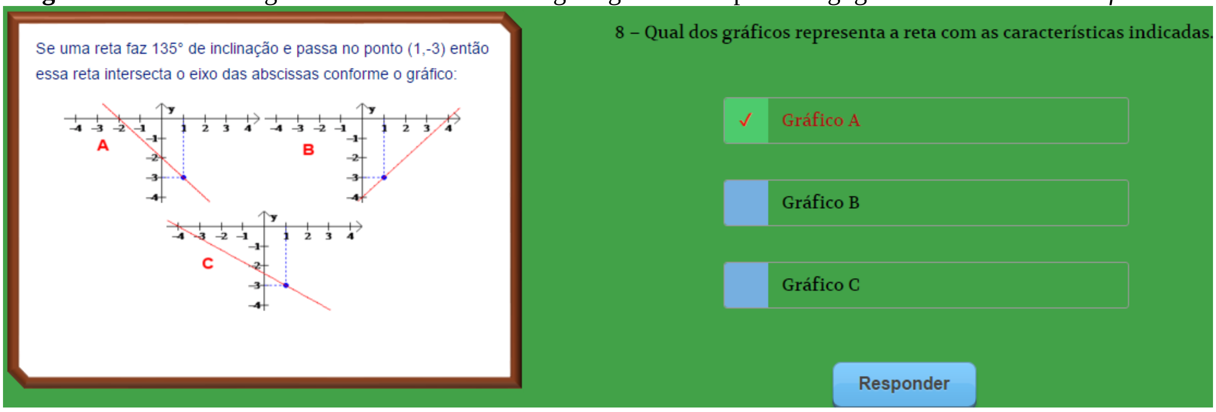
Figura 49- Problema gerador de conversão do registro simbólico para o registro gráfico do conceito *Coeficientes*



Fonte: Sistema de Estudos do AVA.

Na figura 50 apresenta-se outro problema gerador, que é uma conversão não congruente do registro língua natural para o registro gráfico, em que o aluno deve responder qual gráfico representa a Reta com as características dadas no enunciado que indica o ângulo de inclinação e Ponto contido na mesma. Para a resolução do problema o aluno deveria calcular a tangente do ângulo e a representação algébrica da Reta ($y= ax + b$) substituindo o valor correspondente e o Ponto dado para encontrar a representação gráfica da Reta.

Figura 50 – Problema gerador de conversão do reg. língua natural para o reg. gráfico do conceito *Coeficientes*

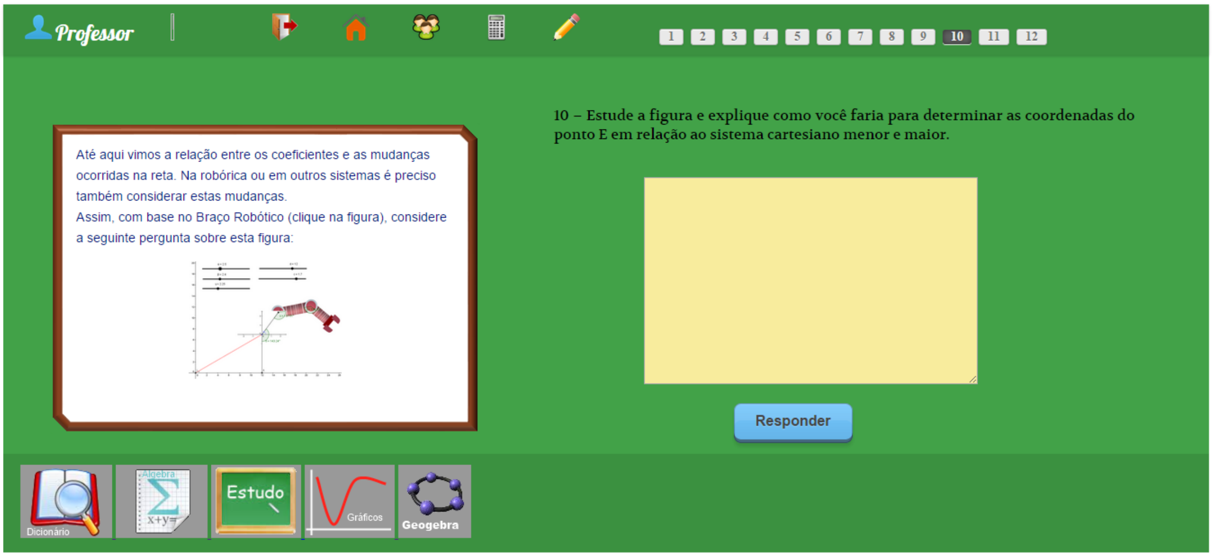


Fonte: Sistema de Estudos do AVA.

Outro exemplo de problema gerador utilizado para o conceito *Coeficientes* foi um braço robótico dinâmico, que simulava movimentos com mudanças nas coordenadas dos pontos e nos coeficientes angular e linear de acordo com um sistema de referência (plano cartesiano) um maior e outro menor. Com esta simulação os alunos deviam encontrar o modelo da equação da Reta ligada ao braço robótico em relação aos dois sistemas e as coordenadas do Ponto *E*, explicando sua estratégia de resolução. Esta questão está embasada no trabalho com modelagem matemática e simulação em atividade de sala de aula como propõem Barbosa (2003) e Almeida, Silva e Vertuan (2012), como forma dos alunos ativarem os conceitos matemáticos estudados na realização da atividade de aplicação.

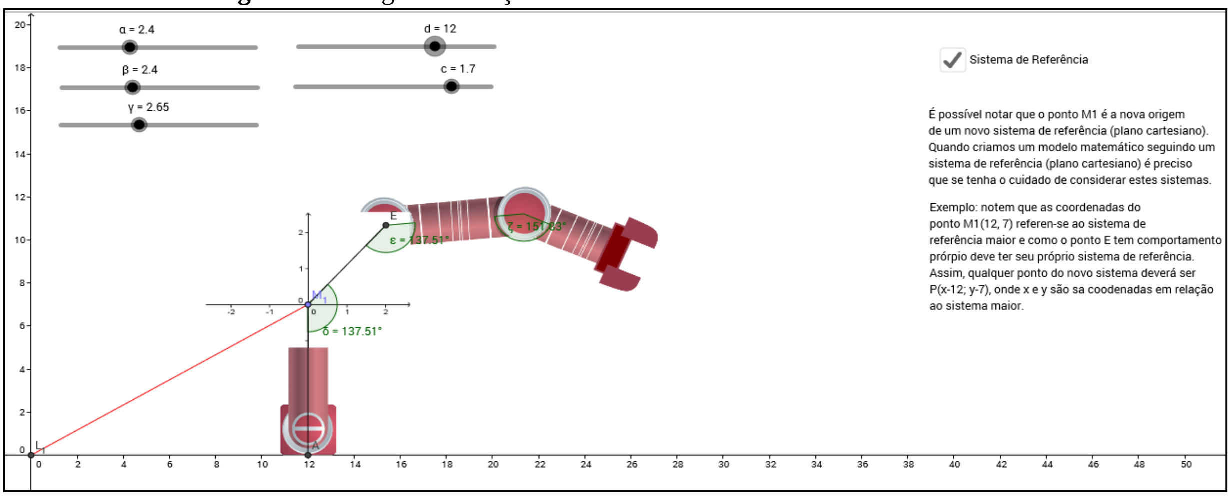
Este problema, conforme as figuras 51 e 52 é considerado uma conversão não-congruente apresentada na representação gráfica e, para resolução, os alunos deveriam encontrar o modelo matemático correspondente à equação na representação algébrica e utilizar a língua natural para explicar o procedimento adotado na resolução para encontrar as coordenadas do Ponto *E*.

Figura 51 - Problema gerador relacionado a robótica do conceito *Coeficientes*



Fonte: Sistema de Estudos do AVA.

Figura 52- Imagem do braço robótico com os dois sistemas de referência

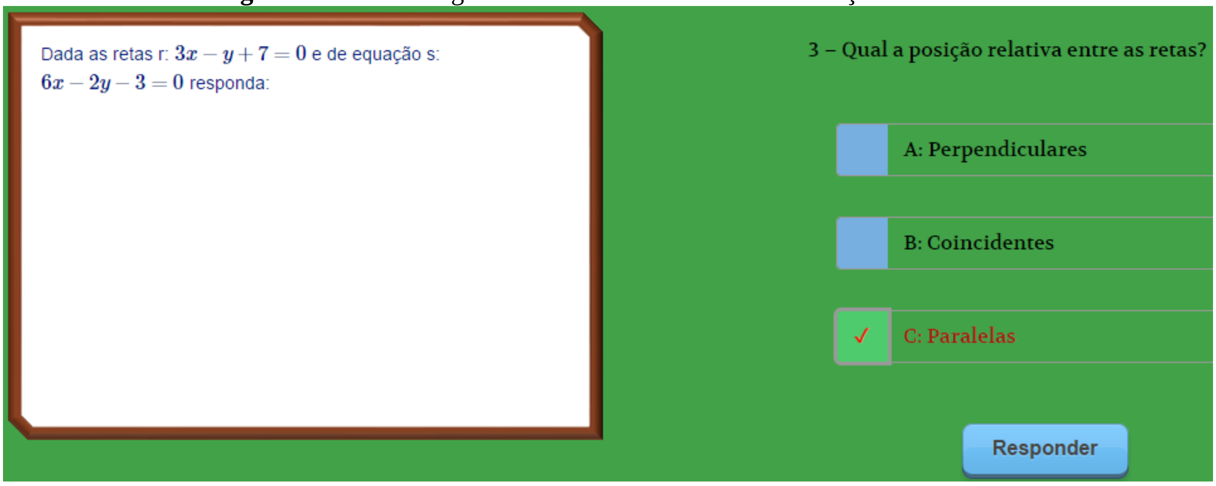


Fonte: Sistema de Estudos do AVA.

No conceito *Posições Relativas*, respectivo à Reta, trabalhou-se retas paralelas, concorrentes, perpendiculares e intersecção de duas retas com enfoque na teoria dos Registros de Representação Semiótica. Os problemas geradores deste conceito abordam também, os conteúdos trabalhados nos conceitos anteriores do grafo. A seguir apresentam-se alguns problemas geradores propostos para este o conceito.

A figura 53 apresenta um problema gerador em que as duplas devem conhecer o conceito das posições relativas entre retas e realizar tratamentos nas equações gerais das retas para determinar os valores dos coeficientes angulares das mesmas e responder qual a posição relativa entre as mesmas.

Figura 53- Problema gerador relacionado ao conceito *Posições Relativas*

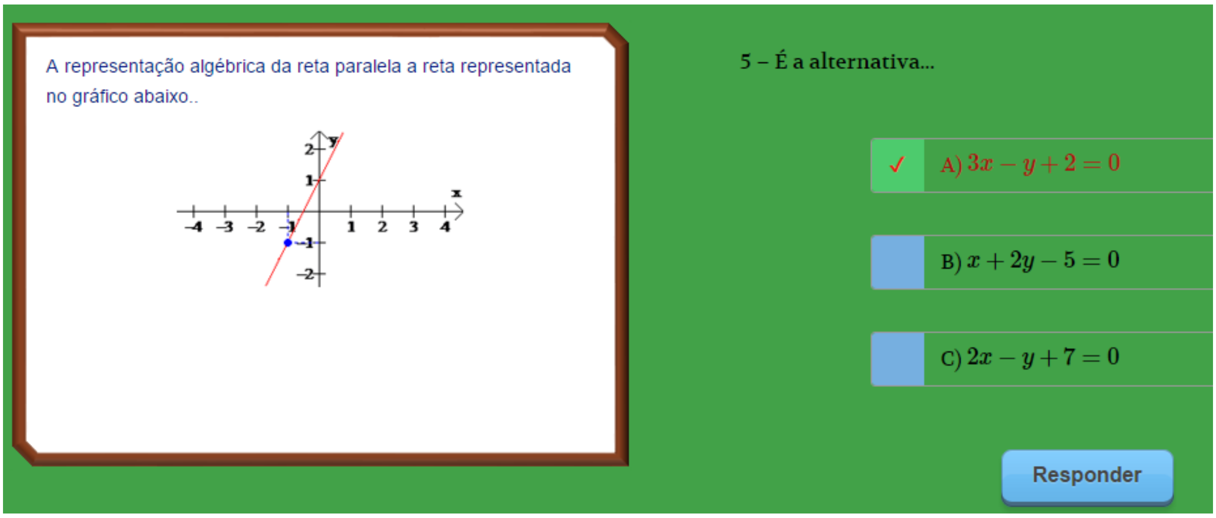


Fonte: Sistema de Estudos do AVA.

Outro problema gerador deste conceito que consiste em uma conversão não-congruente do registro gráfico para o registro simbólico na representação algébrica da Reta paralela a Reta representada graficamente. Para resolução deste problema as duplas deveriam observar as variáveis visuais no registro gráfico, como inclinação da Reta. Com esta interpretação as dusplas verificam que o valor numérico do coeficiente angular é positivo e aplicando as relações trigonométricas no triângulo retângulo (tg= cateto oposto/ cateto adjacente) encontra o valor do mesmo.

No entanto, para realizar este tratamento as duplas devem perceber que o ângulo formado entre a Reta e o eixo *X'X* é o mesmo formado por uma Reta paralela a este eixo coordenado intersectando o eixo *Y'Y* em -1 para poder visualizar o triângulo retângulo e obter valores para os catetos a fim de realizar o tratamento numérico necessário. Encontrado o coeficiente angular, as duplas devem demostrar que conhecem o conceito de paralelismo, realizando um tratamento nas opções de resposta, ou seja, passando da equação geral para a reduzida da Reta, e identificando qual possui coeficiente angular como o mesmo valor numérico. A figura 54 ilustra esse problema descrito.

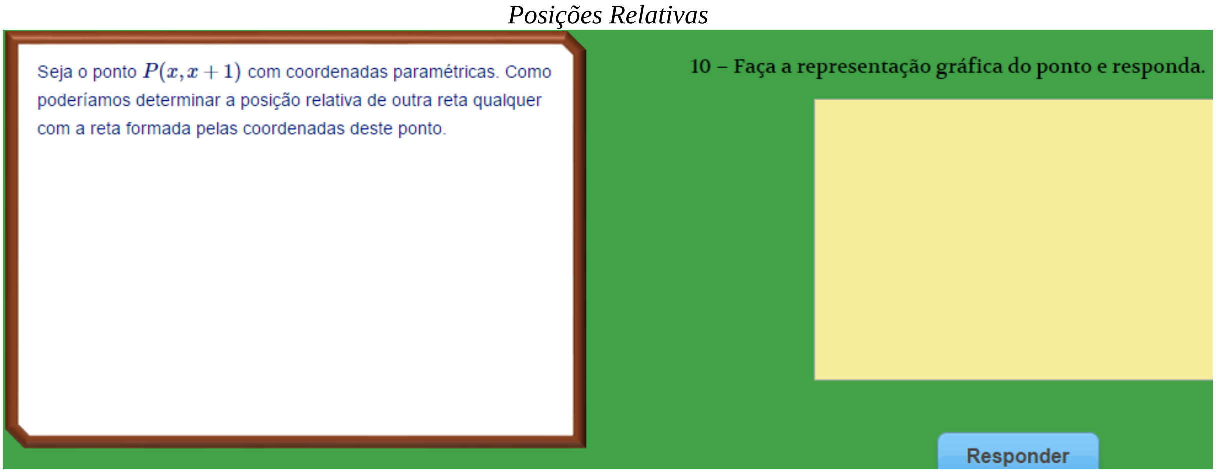
Figura 54- Problema gerador com conversão do registro gráfico para o registro simbólico do conceito *Posições Relativas*



Fonte: Sistema de Estudos do AVA.

Mais um exemplo, de problema gerador proposto para este conceito, consiste em conversão congruente do registro simbólico na representação algébrica para o registro língua natural. Neste problema é dado um Ponto na forma paramétrica (representação algébrica) e as duplas devem determinar a posição relativa de outra Reta qualquer com a Reta formada pelas coordenadas deste Ponto. Desta forma os alunos deveriam reconhecer e expressar equação reduzida da Reta forma por este Ponto na forma paramétrica e relacionar utilizando esta representação algébrica desta Reta com os conceitos de retas coincidentes, perpendiculares, perpendiculares e concorrentes com os possíveis valores dos coeficientes angular e linear de outra Reta qualquer e expressar suas interpretações no registro língua natural. A figura 55 ilustra este problema proposto.

Figura 55- Problema gerador com conversão do registro simbólico para o registro língua natural do conceito *Posições Relativas*



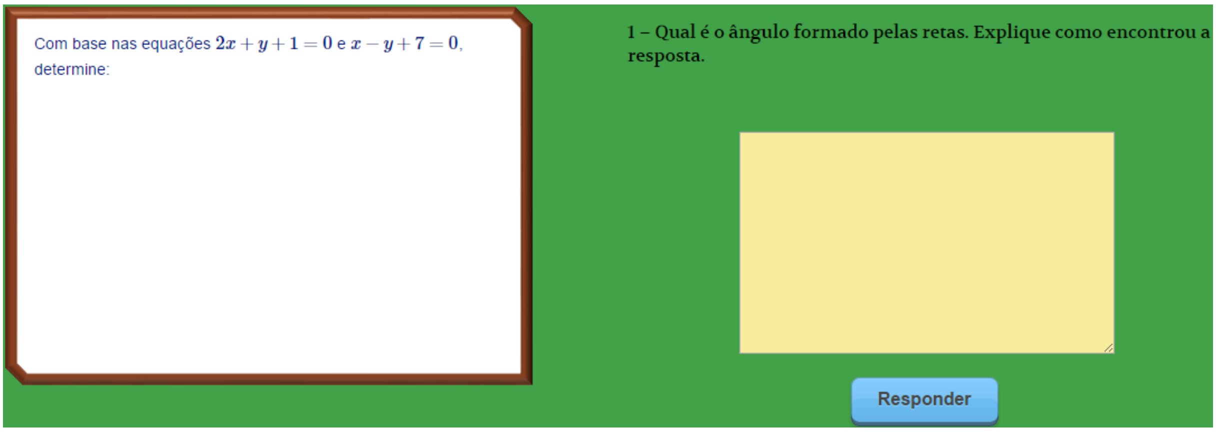
Fonte: Sistema de Estudos do AVA.

Além de outros problemas geradores utilizando tratamentos nas representações algébricas e numéricas, e conversões com registros semióticos em sentidos opostos, utilizou-se o problema proposto pelo livro didático do autor Dante (2010) em que aborda uma atividade sugerindo a sua resolução com etapas respectivas à metodologia de Resolução de Problemas, como apresentado na figura 32, no capítulo 4.

No conceito *Ângulo entre duas Retas, Distância entre Ponto e Reta e Área de uma Região Triangular*, respectivo à Reta, trabalharam-se estes conteúdos conforme o próprio título do conceito do grafo embasado na teoria dos Registros de Representação Semiótica envolvendo, também, os conteúdos trabalhados nos conceitos anteriores do grafo. A seguir apresentam-se alguns problemas geradores propostos para este o conceito.

Na figura 56 apresenta-se um problema gerador deste conceito, que aborda tratamentos nas representações algébricas e numéricas, em que o aluno deve, a partir das representações algébricas das retas na forma geral, escrevê-las na forma reduzida e identificar os coeficientes angulares para calcular o ângulo formado entre elas, aplicando a fórmula da tangente do ângulo que relaciona estes coeficientes angulares e, por fim, calcular o arco tangente do valor encontrado com o tratamento numérico realizado para definir o ângulo entre as retas dadas.

Figura 56 - Problema gerador de tratamentos nas representações algébrica e numérica envolvendo *Ângulo entre duas Retas*

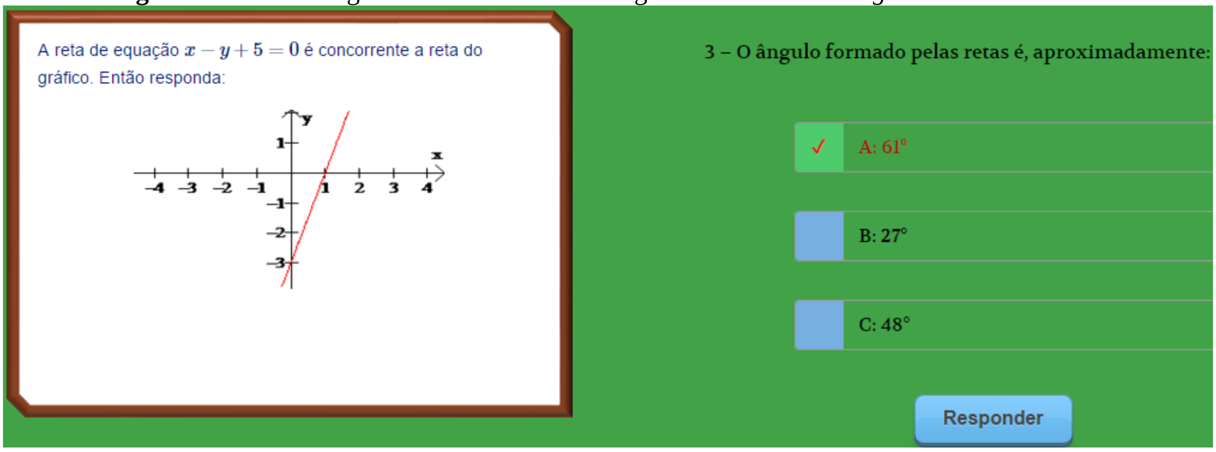


Fonte: Sistema de Estudos do AVA.

Em outro problema gerador, inicialmente o aluno necessita realizar uma conversão, considerada não congruente, do registro gráfico para o registro simbólico na representação numérica. Ou seja, a partir do gráfico da Reta o aluno deveria encontrar o coeficiente angular desta, e para isto, uma das possibilidades de visualizá-lo seria aplicando a relação trigonométrica no triângulo retângulo, identificando os catetos oposto e adjacente ao ângulo formado pela Reta e o eixo *X'X*, e encontrando a tangente deste ângulo que corresponde ao coeficiente angular. No entanto, o aluno deve ter compreendido estas relações para aplicá-las.

Outa forma seria, a partir dos dois pontos visíveis no gráfico da Reta, encontrar a equação da Reta e identificar o coeficiente angular, ou ainda, reconhecendo o coeficiente linear e outro Ponto da Reta, encontrando a equação desta, fazendo assim, uma conversão da representação gráfica para a algébrica da Reta. A partir do coeficiente angular encontrado e da identificação do coeficiente angular da outra Reta dada no enunciado, com a realização de um tratamento algébrico, aplicar a fórmula da tangente do ângulo entre duas retas e por fim, o arco tangente corresponderá ao ângulo entre as mesmas. Na figura 57 apresenta-se o problema gerador explicitado.

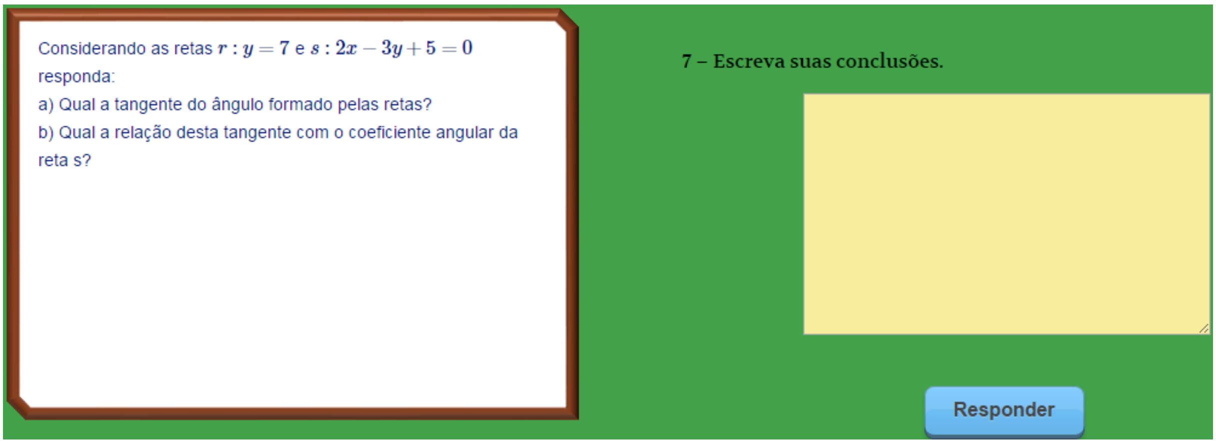
Figura 57- Problema gerador de conversão de registros envolvendo *Ângulo entre duas Retas*



Fonte: Sistema de Estudos do AVA.

Na figura 58, apresenta-se outro problema gerador, envolvendo no primeiro item, tratamento na representação algébrica ao passar da equação geral da Reta para a reduzida e tratamento na representação numérica no cálculo do ângulo formado pelas retas dadas. E no segundo item, uma conversão não-congruente do registro gráfico para o registro língua natural, na qual o aluno deveria compreender que sendo a Reta *y = 7* paralela ao eixo *X'X*, o coeficiente angular da Reta s é a tangente do ângulo entre as duas retas, já que o ângulo entre as duas retas e o ângulo formado pela Reta s e o eixo *X'X* é o mesmo. Para realizar tal conversão o aluno poderia necessitar do registro gráfico, como registro intermediário.

Figura 58 - Problema gerador de conversão do registro gráfico para o registro língua natural envolvendo *Ângulo entre duas Retas*



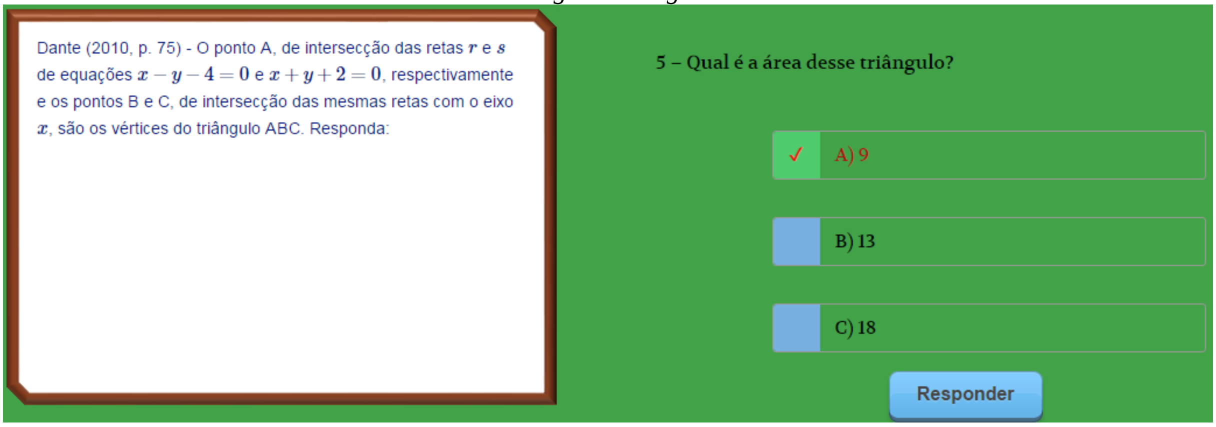
Fonte: Sistema de Estudos do AVA.

Outro problema gerador deste conceito, é uma conversão congruente do registro língua natural para o registro simbólico na representação numérica. Encontra-se expresso na língua natural utilizando, também, a representação algébrica (equação das retas), e a partir da interpretação das informações dadas, o aluno deveria mostrar entendimento do que são os vértices e área de um triângulo para representá-la numericamente.

Desta forma, o aluno deveria realizar um tratamento na representação algébrica estruturando um sistema com as duas equações resolvê-lo para o Ponto de intersecção destas retas, o qual representa o vértice *A* do triângulo do problema. E, ainda encontrar o Ponto de intersecção de cada Reta com o eixo *X'X*, realizando outro tratamento na representação algébrica em cada equação da Reta, ou seja, atribuindo zero para o valor de *y* em cada equação e encontrar o valor de *x*. Assim, os pontos com as coordenadas encontradas representam *B* e *C* do mesmo triângulo. Encontrados os vértices do triângulo o aluno deveria aplicar a fórmula da área de um triângulo conhecidos três vértices, a qual utiliza a representação matricial com os vértices.

Alguns alunos, possivelmente, poderiam necessitar de um registro intermediário (representação gráfica) para ajudar na visualização do triângulo formado pelas retas e o eixo *X'X* e área delimitadas pelos mesmos. Na figura 59 apresenta-se o problema explicitado.

Figura 59 - Problema gerador de conversão do registrolíngua natural para o registro simbólico envolvendo *Área da Região Triangular*



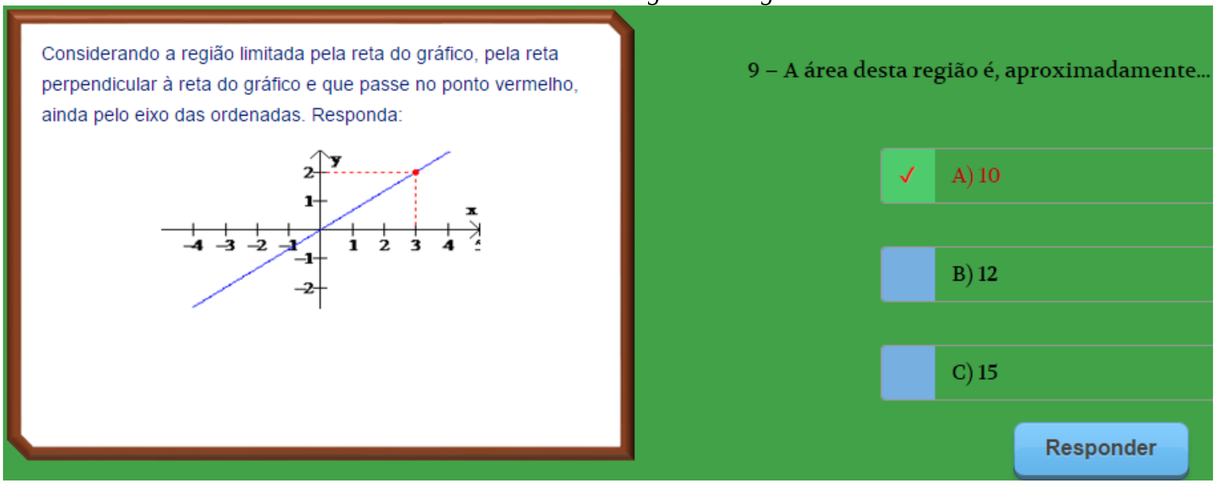
Fonte: Sistema de Estudos do AVA.

Um problema gerador, também sobre área da região triangular, considerado uma conversão não-congruente, parte dos registros língua natural e gráfico para o registro simbólico na representação numérica. Para resolução o aluno deveria entender o conceito de perpendicularidade para encontrar a equação da Reta perpendicular à Reta dada no gráfico, e para isto, incialmente deveria encontrar o coeficiente angular da Reta do gráfico que poderia ser realizado pela relação trigonométrica no triângulo retângulo. Mas, para isto o aluno deve já compreender a relação da tangente do ângulo com o coeficiente angular e visualizar no gráfico os catetos oposto e adjacente ao ângulo correspondente.

Sabendo este coeficiente, determina-se com um tratamento na representação numérica o coeficiente angular da Reta perpendicular à esta, o qual é o inverso multiplicativo e simétrico, e na representação algébrica da Reta substitui-se o coeficiente angular determinado e o Ponto em vermelho do gráfico, o qual o aluno deveria compreender que é o Ponto de intersecção das duas retas, e realiza-se um tratamento na representação algébrica para encontrar o coeficiente linear da Reta perpendicular. Este, o aluno deve compreender que determina a intersecção da Reta com o eixo da ordenadas.

Com isto, o aluno encontra os vértices do triângulo e calcula por meio de tratamentos numéricos a área delimitada pelos mesmos. Possivelmente o aluno poderia realizar um tratamento na representação gráfica traçando a Reta perpendicular para visualizar o triangulo definido região limitada entre as retas e o eixo das ordenadas. A figura 60 apresenta o problema proposto.

Figura 60 - Problema gerador de conversão dos registros língua natural e gráfico para o registro simbólico envolvendo *Área da Região Triangular*

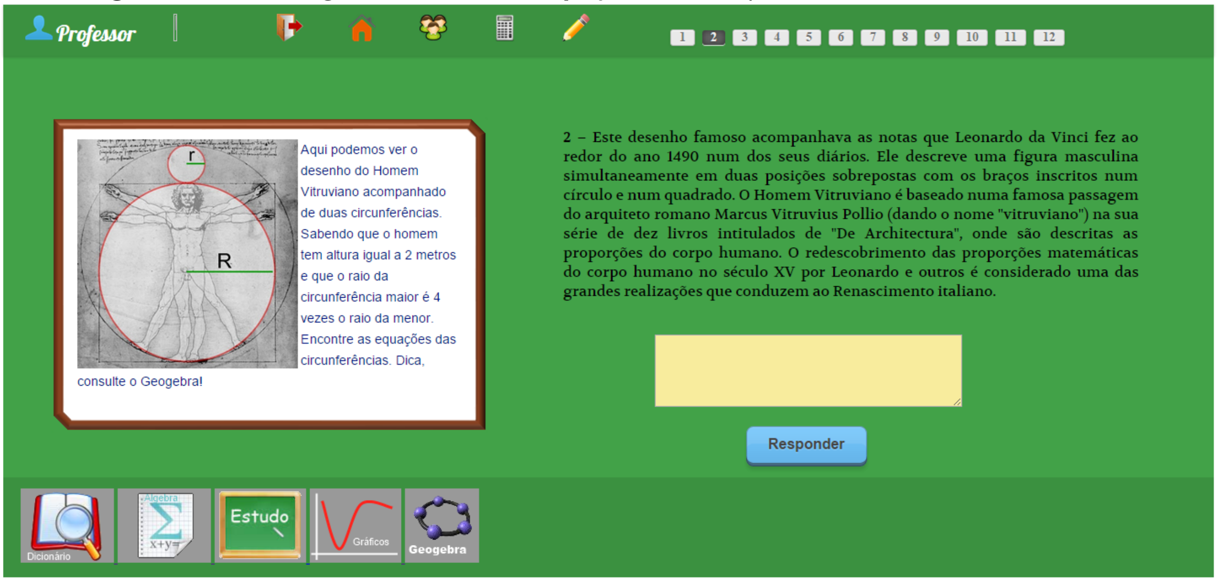


Fonte Sistema de Estudos do AVA.

No conceito do grafo *Equação da Circunferência*, abordou-se o registro simbólico nas representações algébricas na forma geral e reduzida da Circunferência e o registro gráfico. A seguir apresentam-se alguns problemas geradores deste conceito.

Na figura 61, apresenta-se um problema gerador em que se utiliza a imagem, muito conhecida, do Homem Vitruviano de Leonardo Da Vinci, criada por volta de 1940. Desta forma faz-se uma contextualização com a arte, e cada aluno deveria estudar a imagem para resolver o problema, o qual é considerado uma conversão congruente, expresso nos registros língua natural e figural e a resposta exige uma conversão para o registro simbólico, na representação algébrica. Para resolução o aluno deveria estabelecer um sistema de eixos coordenados, colocando o centro das circunferências na origem. Assim, o aluno deveria visualizar que a altura do homem é o diâmetro da Circunferência menor e encontrar o raio, e com isso, o raio da Circunferência maior. Sabendo os raios e o Ponto centrais de cada Circunferência deveria escrever as equações correspondentes.

Figura 61- Problema gerador do conceito *Equação da Circunferência* com o Homem Vitruviano

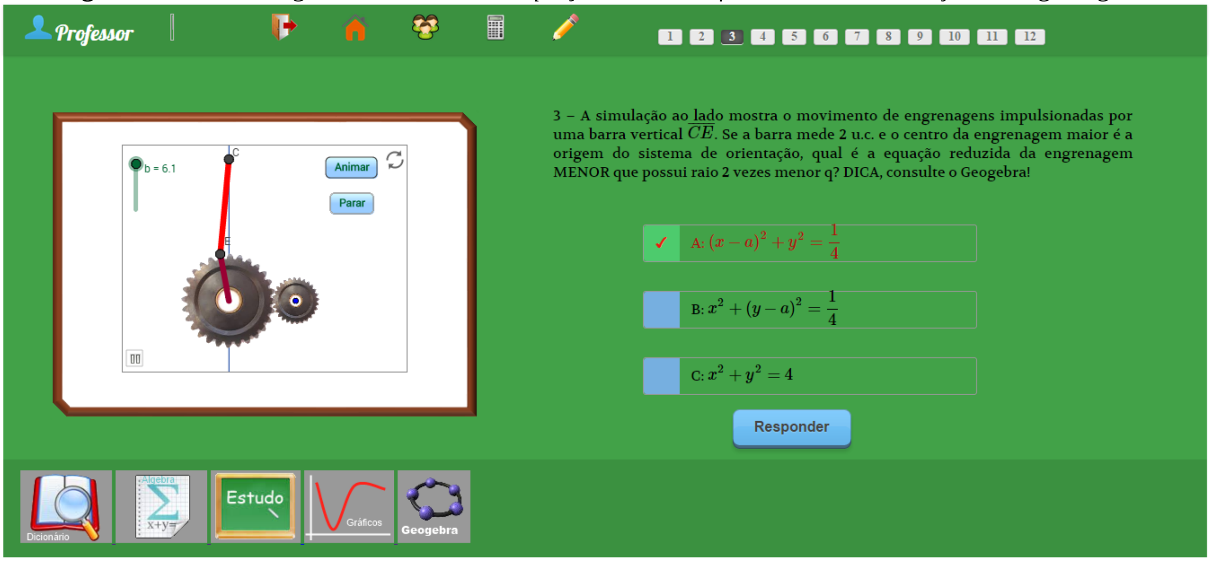


Fonte: Sistema de Estudos do AVA.

Em outro problema gerador, também do conceito *Equação da Circunferência*, apresenta-se, uma simulação com o movimento dinâmico de engrenagens impulsionadas por uma barra vertical. Este problema, considerado uma conversão congruente, é apresentado no registro figural na representação geométrica da Circunferência (movimento dinâmico) e no registro língua natural, os alunos deviam fazer a conversão para o regitro simbólico na representação algébrica respondendo qual a equação da Circunferência da engrenagem menor de acordo com a simulação apresentada.

Desta forma, para resolução o aluno deveria visualizar que a barra vertical $\overline{CE}$ representa o diâmetro da Circunferência, logo o raio é a metade da sua medida. E sabendo este raio, determina-se com um tratamento na representação numérica o raio da Circunferência menor. Sabendo ainda que o Ponto do dentro da Circunferência maior localiza-se na origem do sistema de referência (plano cartesiano), o aluno deve realizar um tratamento na representação numérica somando um número inteiro com um fracionário para encontrar o valor da coordenada “x” do Ponto do centro da Circunferência menor e, assim identificar a equação correspondente a esta. A figura 62 apresenta esse problema gerador.

Figura 62- Problema gerador do conceito *Equação da Circunferência* com simulação de engrenagens



Fonte: Sistema de Estudos do AVA.

A figura 63 apresenta outro problema gerador deste conceito, o qual é um *applet* com o movimento de uma Circunferência em que seu centro se desloca sobre uma Reta, ou seja, ocorre uma translação desta Circunferência. A partir deste movimento analisado pelos alunos, os mesmos deveriam escrever a equação correspondente ao movimento (a translação) da Circunferência, ou seja, fazer uma conversão do registro gráfico para o registro simbólico na representação algébrica.

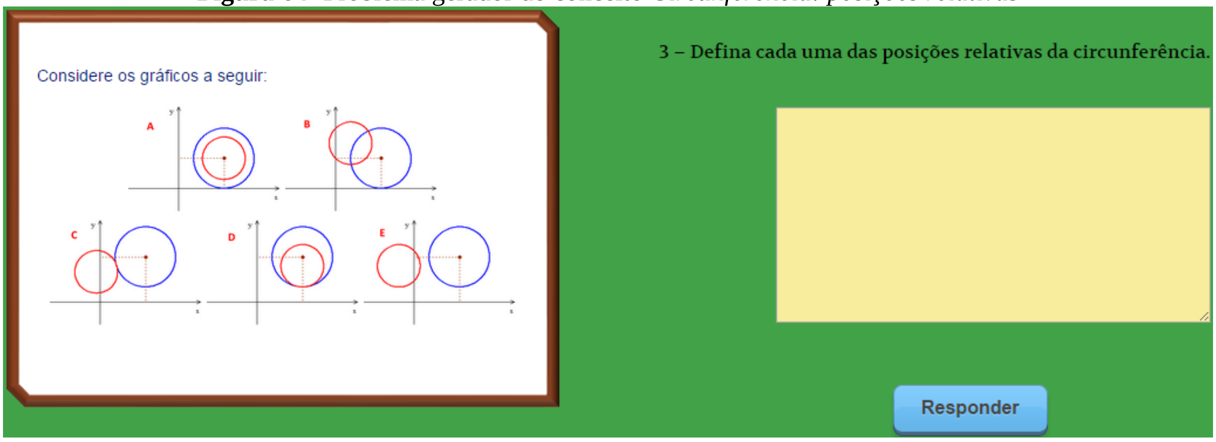
Figura 63- Problema gerador com translação da Circunferência do conceito *Equação da Circunferência.*

Fonte: Sistema de Estudos do AVA.

No conceito *Circunferência: posições relativas*, foram abordadas as posições relativas entre Ponto e Reta, entre Reta e Circunferência, entre 2 circunferências mobilizando, principalmente, de forma simultânea, a correspondência entre as representações gráficas e algébricas. A seguir apresentam-se alguns problemas geradores deste conceito.

Na figura 64 apresenta-se um problema gerador, considerado uma conversão congruente do registro figural na representação geométrica da Circunferência para o registro língua natural. O aluno deveria conhecer os conceitos das posições relativas entre circunferências e, a partir destes, definir cada umas das posições, segundo as representações geométricas apresentadas.

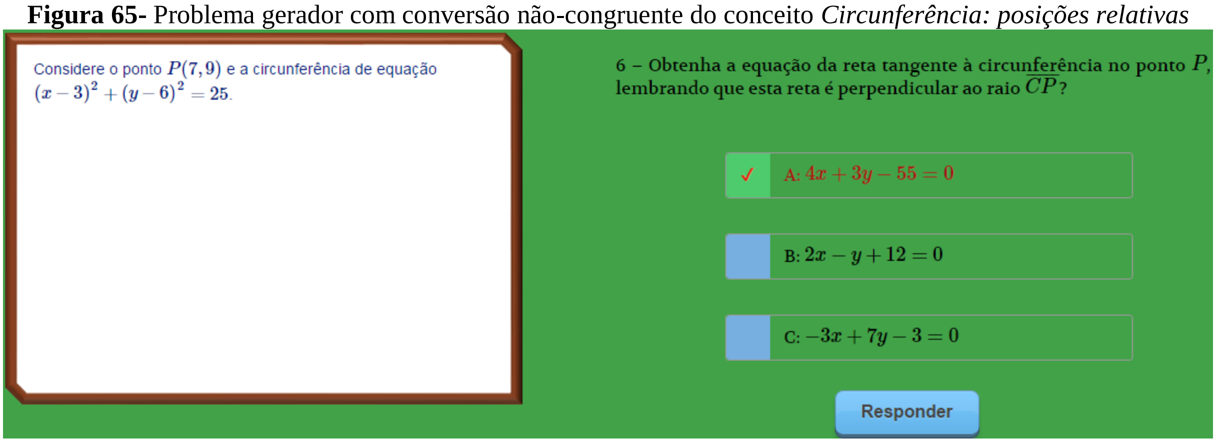
Figura 64 -Problema gerador do conceito *Circunferência: posições relativas*



Fonte: Sistema de Estudos do AVA.

Na figura 65 apresenta-se um problema gerador, considerada uma conversão não-congruente do registro língua natural para o registro simbólico na representação algébrica. Ao interpretar o problema o aluno deveria encontrar a equação da Reta que passa no centro da Circunferência e no Ponto *P*, realizando um tratamento na representação algébrica ao resolver o sistema de equações. Com isto, deve conhecer o conceito de perpendicularidade determinando o coeficiente angular da Reta perpendicular a esta encontrada. E, assim sabendo o coeficiente angular e o Ponto P em que passa a Reta tangente, deveria encontrar, aplicando outro tratamento na representação algébrica, o coeficiente linear desta Reta tangente para escrever sua equação correspondente.

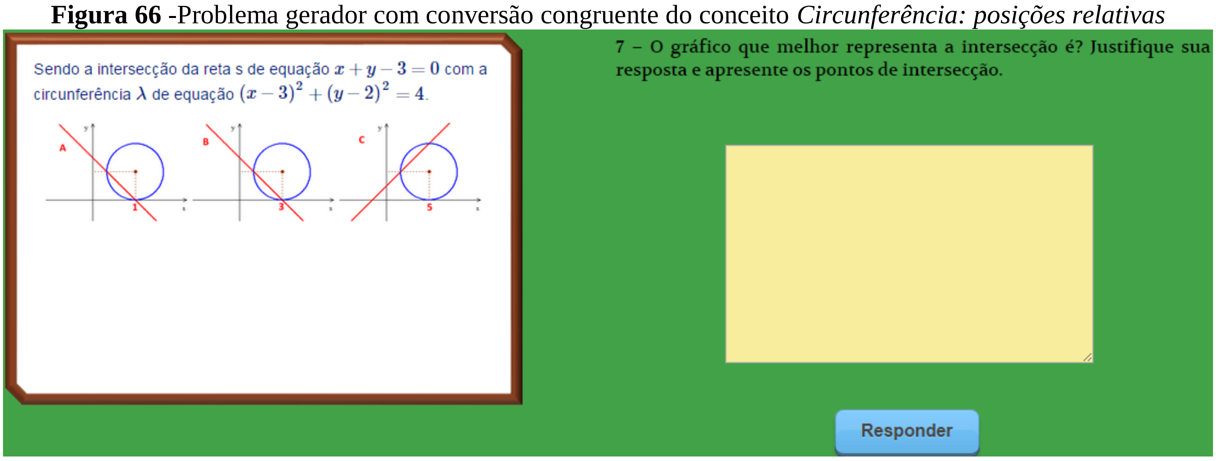
Figura 65- Problema gerador com conversão não-congruente do conceito *Circunferência: posições relativas*



Fonte: Sistema de Estudos do AVA.

Outro problema gerador proposto neste conceito, apresenta-se na figura 66, o qual é uma conversão congruente do registro simbólico na representação algébrica para o registro gráfico. O aluno deveria visualizar o Ponto do centro na equação da Circunferência e no gráfico correspondente à Circunferência com este centro. Assim, identificaria o gráfico correto e, também o Ponto *(3,0)* que é um Ponto de intersecção da Reta e a Circunferência dada. A partir da ordenada do Ponto do centro da Circunferência, deveria realizar um tratamento na representação algébrica na equação da Reta e encontra a abscissa do outro Ponto de intersecção entre a Reta e a Circunferência, sendo que a ordenada era a mesma do Ponto do centro.

Figura 66 -Problema gerador com conversão congruente do conceito *Circunferência: posições relativas*



Fonte: A Sistema de Estudos do AVA.

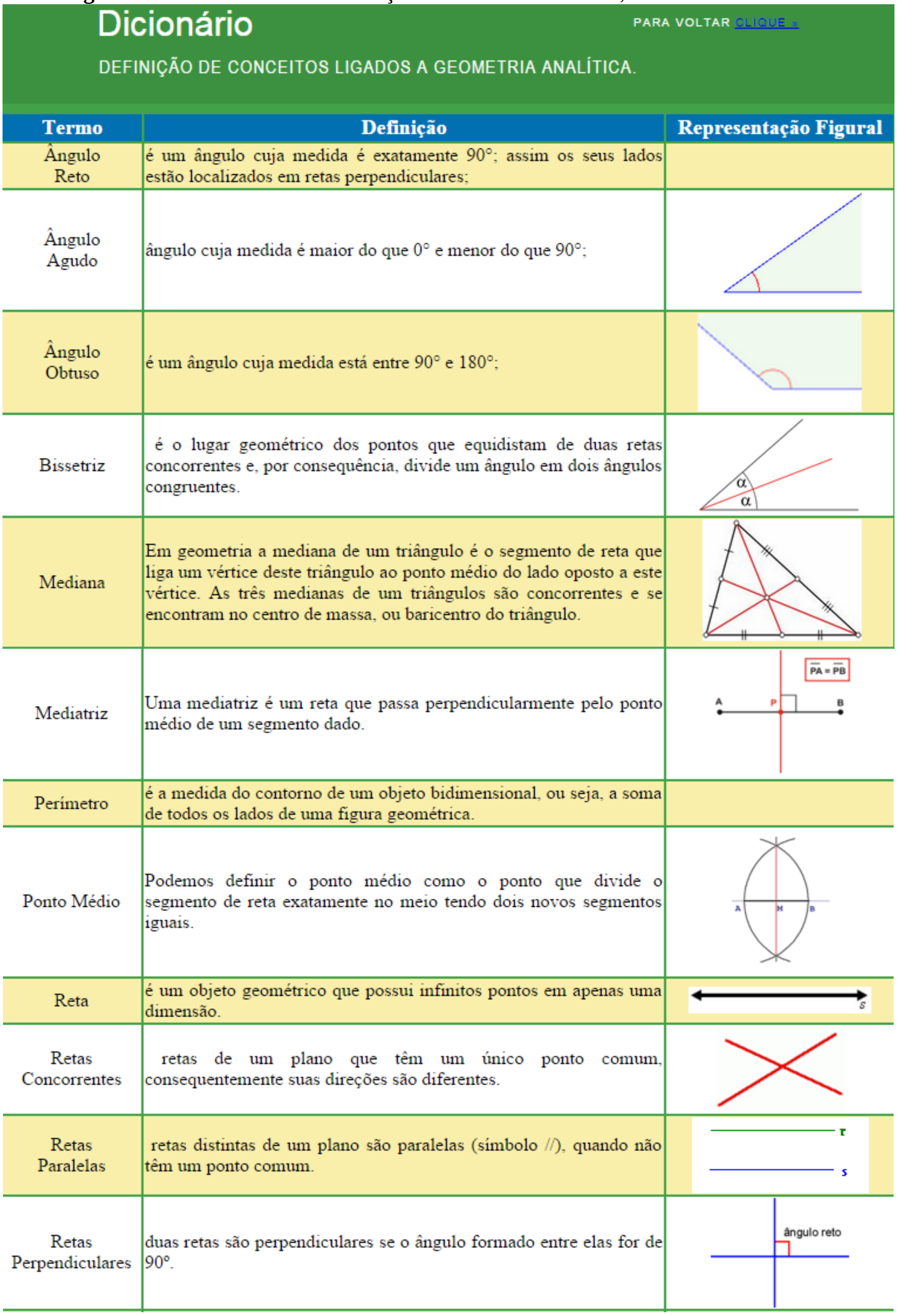
Para resolver estas questões e atividades iniciais de cada conceito, os alunos contaram com diferentes recursos didáticos, conforme apontados na figura 8, que foram desenvolvidos, também, com base na teoria dos Registros de Representação e nas tendências metodológicas para o ensino da Matemática, estudadas para esta pesquisa. Esses recursos estavam dispostos na tela do *tablet*, com acesso imediato, independente da questão que os alunos estivessem resolvendo.

Os recursos disponibilizados foram:

- um dicionário contendo as definições dos conceitos de Reta e Circunferência em língua natural e figural;
- um dicionário com as representações algébricas destes conceitos;
- uma listagem das representações gráficas utilizadas para os conceitos de Reta e Circunferência.

As figuras 67, 68 e 69 apresentam, respectivamente, as imagens de parte do dicionário com as definições e conceitos sobre Reta e Circunferência, do dicionário das representações algébricas e do dicionário gráfico destes conceitos, sendo que as figuras na íntegra encontram -se no apêndice B.

Figura 67- Dicionário com a definição de conceitos de Ponto, Reta e Circunferência.

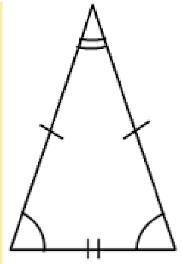
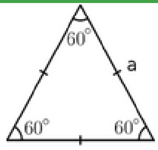
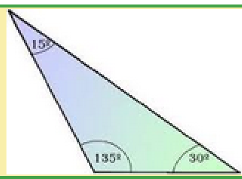
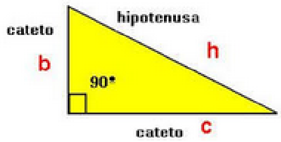
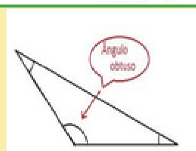
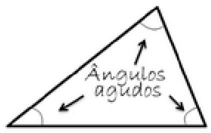
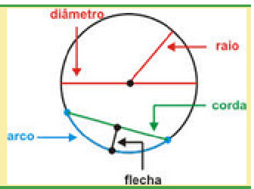
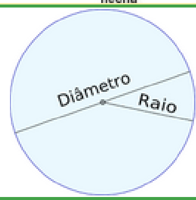
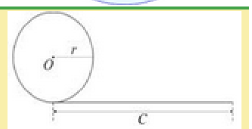


Dicionário

PARA VOLTAR CLIQUE »

DEFINIÇÃO DE CONCEITOS LIGADOS A GEOMETRIA ANALÍTICA.

Termo	Definição	Representação Figural
Ângulo Reto	é um ângulo cuja medida é exatamente 90°; assim os seus lados estão localizados em retas perpendiculares;	
Ângulo Agudo	ângulo cuja medida é maior do que 0° e menor do que 90°;	
Ângulo Obtuso	é um ângulo cuja medida está entre 90° e 180°;	
Bissetriz	é o lugar geométrico dos pontos que equidistam de duas retas concorrentes e, por consequência, divide um ângulo em dois ângulos congruentes.	α α
Mediana	Em geometria a mediana de um triângulo é o segmento de reta que liga um vértice deste triângulo ao ponto médio do lado oposto a este vértice. As três medianas de um triângulo são concorrentes e se encontram no centro de massa, ou baricentro do triângulo.	
Mediatriz	Uma mediatriz é um reta que passa perpendicularmente pelo ponto médio de um segmento dado.	PA = PB; A P B
Perímetro	é a medida do contorno de um objeto bidimensional, ou seja, a soma de todos os lados de uma figura geométrica.	
Ponto Médio	Podemos definir o ponto médio como o ponto que divide o segmento de reta exatamente no meio tendo dois novos segmentos iguais.	A M B
Reta	é um objeto geométrico que possui infinitos pontos em apenas uma dimensão.	s
Retas Concorrentes	retas de um plano que têm um único ponto comum, consequentemente suas direções são diferentes.	
Retas Paralelas	retas distintas de um plano são paralelas (símbolo //), quando não têm um ponto comum.	r; s
Retas Perpendiculares	duas retas são perpendiculares se o ângulo formado entre elas for de 90°.	ângulo reto

Triângulo Isósceles	possui pelo menos dois lados de mesma medida e dois ângulos congruentes.	
Triângulo Equiláterio	possui todos os lados congruentes, ou seja, iguais. Um triângulo equilátero é também equiângulo: todos os seus ângulos internos são congruentes (medem 60°).	
Triângulo Escaleno	as medidas dos três lados são diferentes. Os ângulos internos de um triângulo escaleno também possuem medidas diferentes. Denomina-se base o lado sobre qual se apoia o triângulo. No triângulo isósceles, considera-se base o lado de medida diferente.	
Triângulo Retângulo	possui um ângulo reto. Num triângulo retângulo, denomina-se hipotenusa o lado oposto ao ângulo reto. Os demais lados chamam-se catetos.	
Triângulo Obtusângulo	possui um ângulo obtuso e dois ângulos agudos.	
Triângulo Acutângulo	os três ângulos são agudos (formando 180°).	
Circunferência	é o lugar geométrico dos pontos que distam uma medida r (raio) de um ponto fixo O (centro).	
Raio da Circunferência	é a medida da distância entre o centro e o contorno da circunferência.	
Comprimento da Circunferência	é a medida do contorno da circunferência.	
Lugar Geométrico	é o conjunto de infinitos pontos em um plano que possuem uma mesma propriedade. Exemplo: a Circunferência é o lugar geométrico de todos os pontos equidistantes de um ponto C, centro da circunferência.	
Pontos Equidistantes	são pontos que estão a mesma distância de um outro elemento (ponto, reta, circunferência.....).	

Fonte: Sistema de Estudos do AVA.

Figura 68- Dicionário com as representações algébricas de conceitos de Ponto, Reta e Circunferência

Representações Algébricas

PARA VOLTAR CLIQUE »

REPRESENTAÇÕES ALGÉBRICAS LIGADAS AOS CONCEITOS DE GEOMETRIA ANALÍTICA

Termo	Definição	Representação Algébrica
Distância entre dois pontos	Considerando os pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$	$D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
Ponto médio de um segmentos	Sendo os pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ das extremidades do segmento.	$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$
Condição de alinhamento de três pontos	Os pontos estarão alinhados quando o determinante desses pontos for zero.	$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$
Área de uma região triangular	A área triangular é determinada pela metade do módulo do determinante da matriz D.	$A_{tri} = \frac{\lvert D \rvert}{2}\ onde D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$
Distância entre um ponto e uma reta	Sendo o ponto $P(x_0, y_0)$ e a equação geral da reta ax+by+c=0.	$d = \frac{\lvert ax_0 + by_0 + c \rvert}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
Coeficiente angular da reta	Considerando a equação reduzida y=ax+b	a
Coeficiente linear da reta	Considerando a equação reduzida y=ax+b	b
Equação geral da reta		ax+by+c=0
Equação reduzida da reta		y=ax+b
Equação paramétrica da reta		$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$ com $t \in \mathbb{R}$
Equação reduzida da circunferência	Tendo (x_c, y_c) como ponto central da circunferência.	$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$
Equação geral da circunferência	Fatorando a equação reduzida da circunferência.	$x^2 + y^2 - 2x \cdot x_c - 2y \cdot y_c + x_c^2 + y_c^2 - r^2 = 0$
Perímetro (P)	Sendo l o lado de uma figura geométrica contendo n lados ordenados de 1 até n.	$P = l_1 + l_2 + l_3 + \ldots l_n$
Ângulo formado por duas retas		$\tan\alpha = \left\lvert \frac{m_s - m_r}{1 + m_s \cdot m_r} \right\rvert$

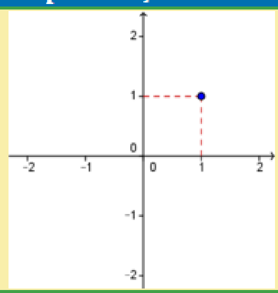
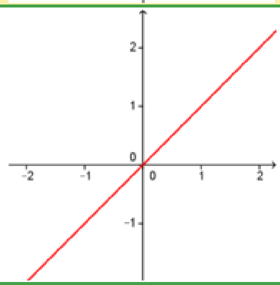
Fonte: Sistema de Estudos do AVA.

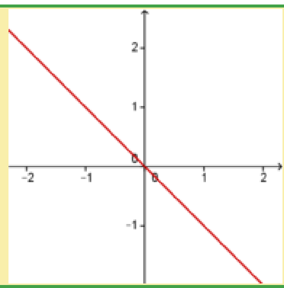
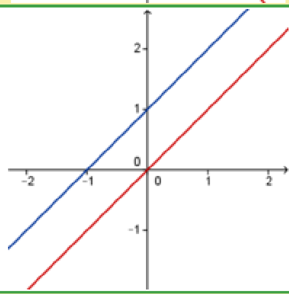
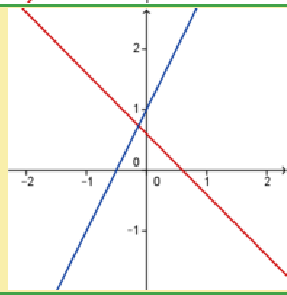
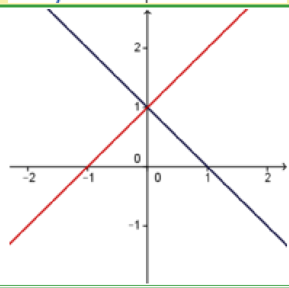
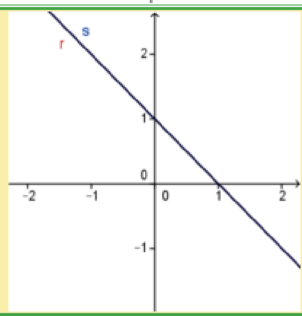
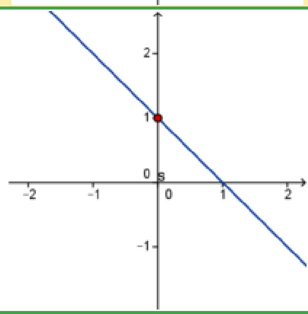
Figura 69- Dicionário com as representações gráficas de conceitos de Ponto, Reta e Circunferência

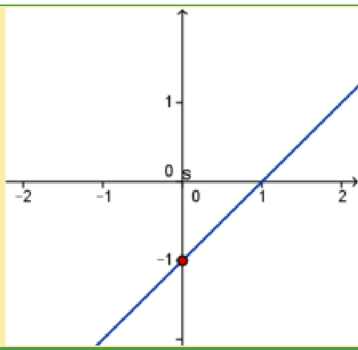
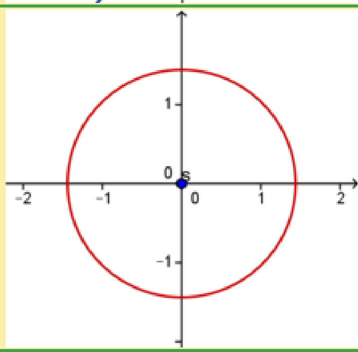
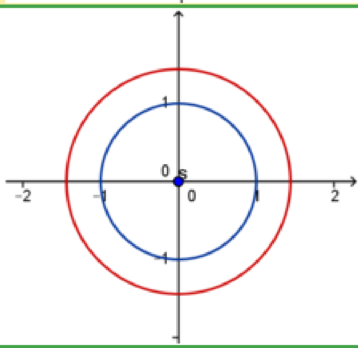
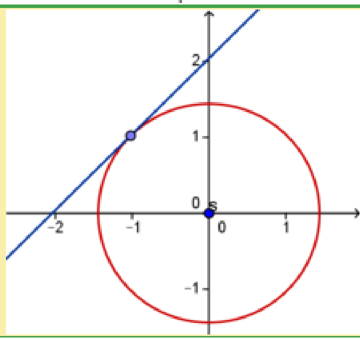
Representação Gráfica

PARA VOLTAR CLIQUE »

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DOS CONCEITOS DA GEOMETRIA ANALÍTICA.

Termo	Representação Gráfica
Representação gráfica do ponto	
Reta com coeficiente angular positivo	

Reta com coeficiente angular negativo	
Retas paralelas	
retas concorrentes	
Retas perpendiculares	
Reta coincidentes	
Reta com coeficiente linear positivo	

Reta com coeficiente linear negativo	
Circunferência	
Circunferências concêntricas	
Reta tangente à circunferência	

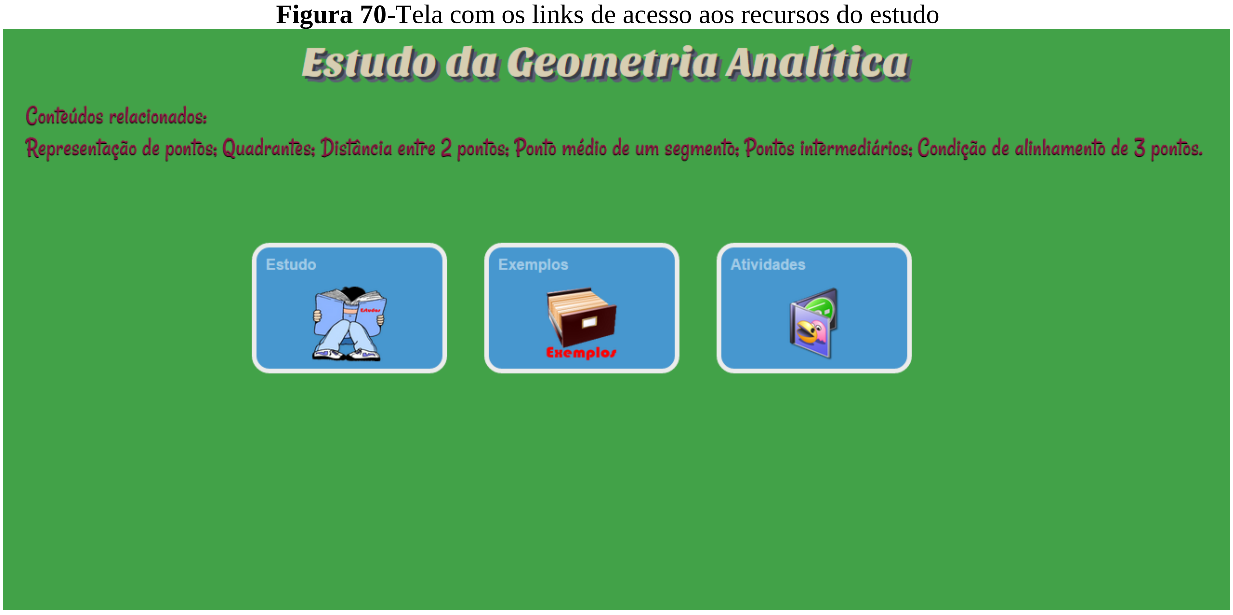
Fonte: Sistema de Estudos do AVA.

Outro recurso disponibilizado foi um material de estudos, o qual direcionava os alunos a uma nova janela onde eles tinham acesso aos *links* com o estudo do conteúdo de cada conceito, a qual foi desenvolvida com o *software power point*, salvas em *html* no software Is*pring*, apresentando explicações ilustradas e dinâmicas, envolvendo os registros língua natural, simbólico (representação algébrica) e gráfico. Havia, também, *links* com exemplos, ou seja, problemas resolvidos de acordo com o conteúdo de cada conceito e atividades extras.

Nestas atividades extras, em cada conceito, os alunos encontravam, por exemplo, jogos e *quizes* que serviam como recurso para praticarem os conceitos aprendidos e, também, foi desenvolvidos com o intuito de motivar o aluno no estudo. Entretanto, algumas destas atividades foram desenvolvidas em *flash* e com o *software JClic*, as quais não executam no *tablet*, mas os alunos acessavam em seus computadores em casa e também no laboratório de Informática da escola, onde foram trabalhadas algumas aulas.

A figura 70 apresenta a tela com os *links* de acesso aos recursos mencionados, referentes ao estudo.

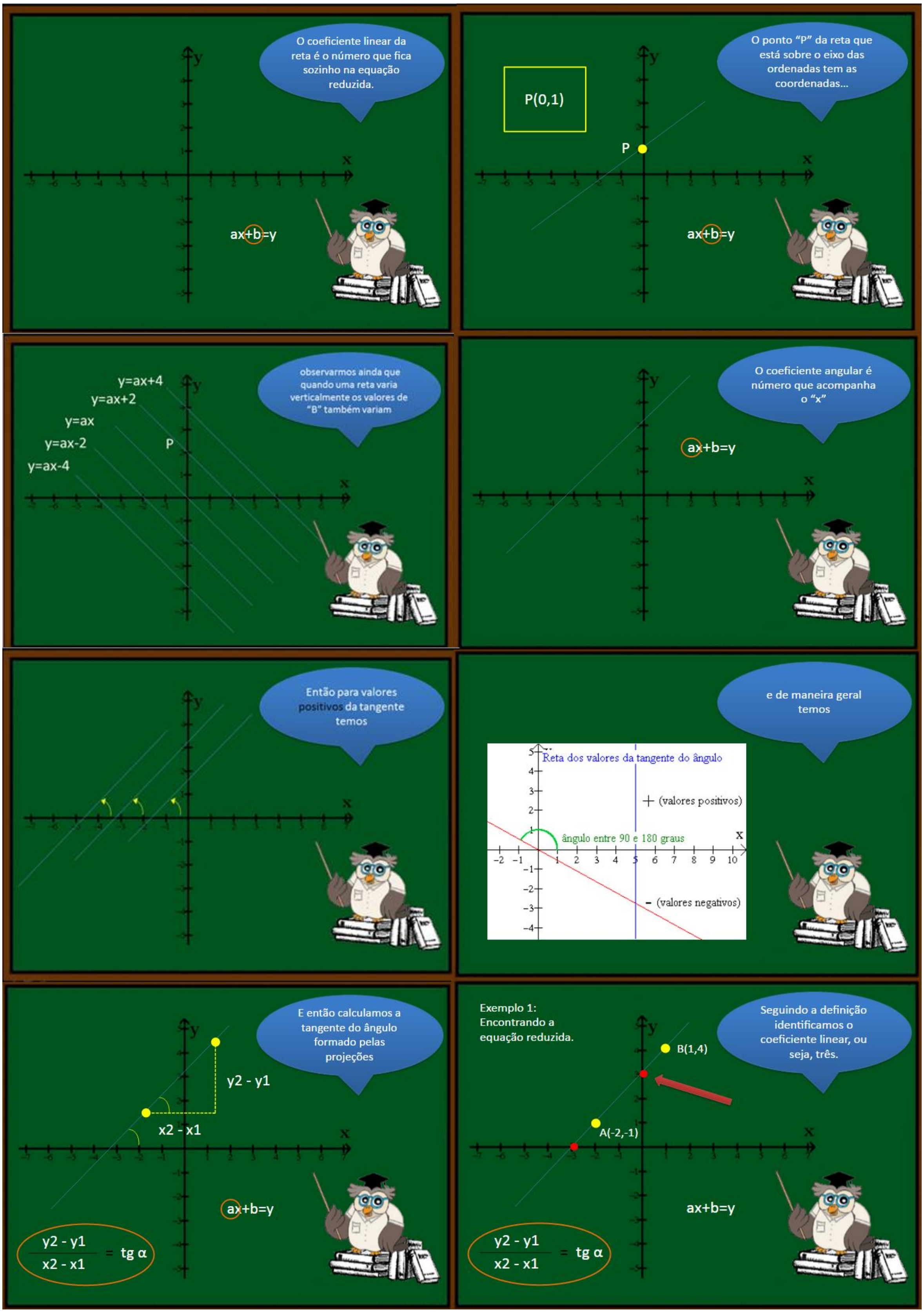
Figura 70-Tela com os links de acesso aos recursos do estudo



Fonte: Sistema de Estudos do AVA.

Na figura 71 apresentam-se *slides* contendo as explicações do conteúdo para o conceito *Coeficientes*, no conteúdo de Reta, desenvolvida com o *software power point*, salvas em *html* no software Is*pring*.

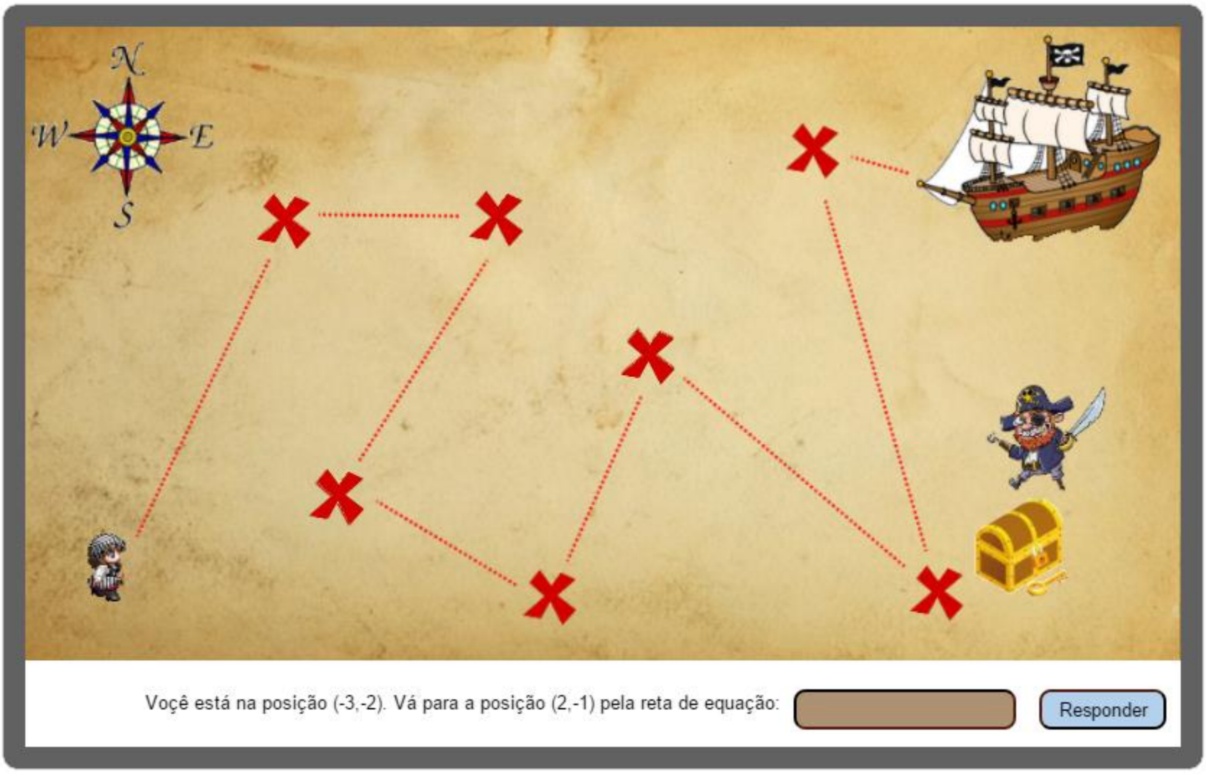
Figura 71- *Slides* da explicação do conteúdo do conceito *Coeficientes*.



Fonte: Sistema de Estudos do AVA.

Na figura 72 apresenta-se a atividade extra disponibilizada no *link* de estudos para os alunos: o jogo de caça ao tesouro, desenvolvido com programação *java* com aplicação em *html*, em que os alunos deviam resolver as pistas que envolvem a equação da Reta para chegar ao tesouro.

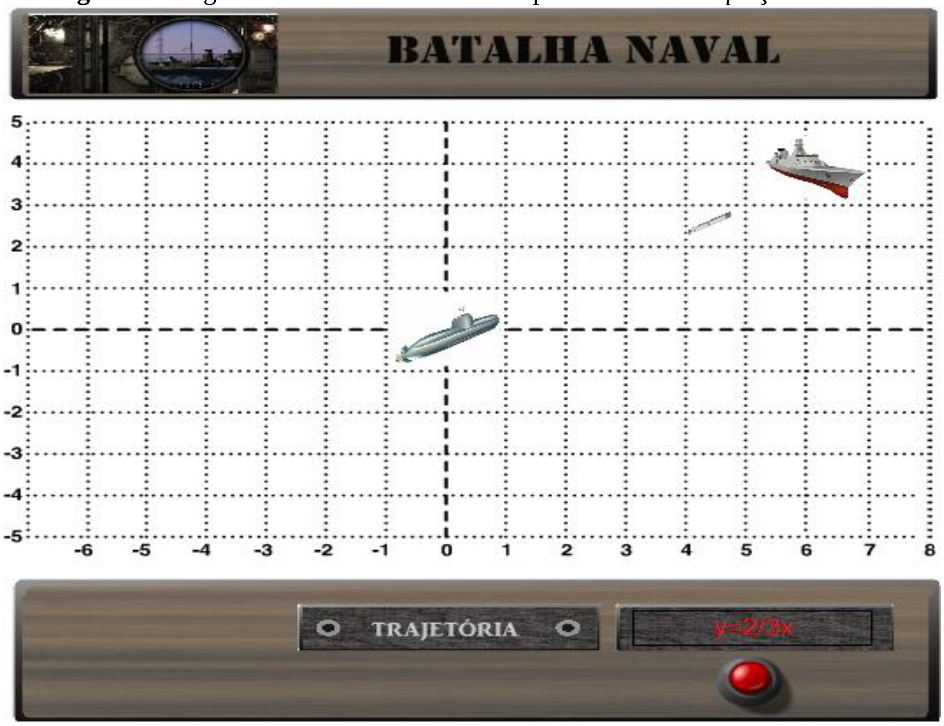
Figura 72– Jogo caça ao tesouro desenvolvido para o conceito *Equação da Reta*



Fonte: Sistema de Estudos do AVA.

Na figura 73 apresenta-se a atividade de um jogo chamado de batalha naval, desenvolvido em *flash*, em que aluno deveria realizar uma conversão da registro gráfico para o registro simbólico na representação algébrica, ou seja, escrever a equação da Reta, a partir das posições do gráfico, que permite lançar o míssil que irá atingir o navio, caso não escreva corretamente, o míssil cai na água e o aluno deve tentar outra vez, sendo que possui 3 posições diferentes para o navio e o submarino e a última posição o submarino não está na origem do plano cartesiano.

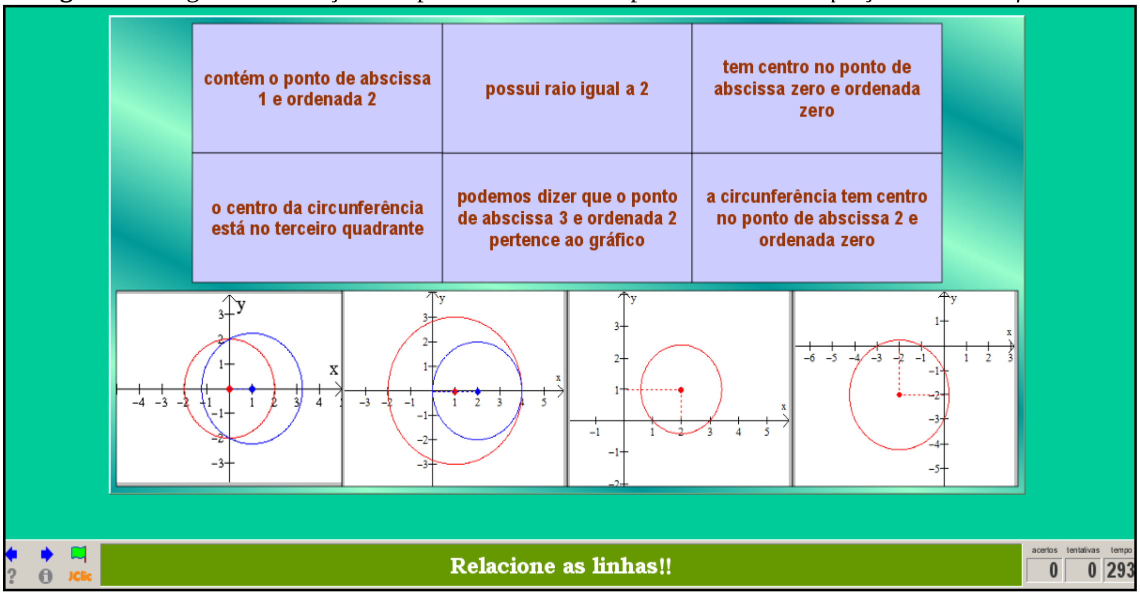
Figura 73- Jogo batalha naval desenvolvido para o conceito *Equação da Reta*.



Fonte: Sistema de Estudos do AVA.

Na figura 74 apresenta-se a atividade extra de um jogo de associação complexa desenvolvido no *JClic* , em que os alunos deveriam relacionar a informação no registro língua natural ao gráfico correspondente a(s) Circunferência(s), sendo que um gráfico pode estar relacionado a mais de uma informação.

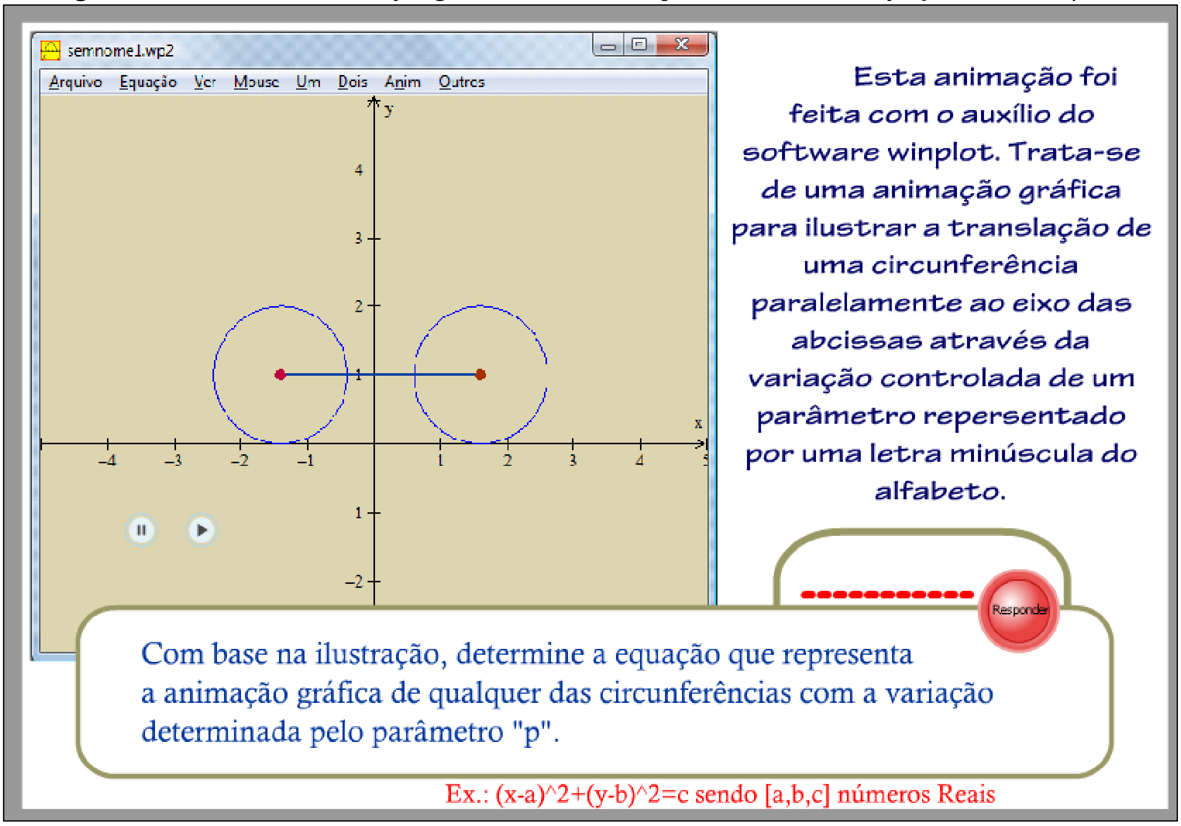
Figura 74- Jogo de associação complexa desenvolvido para o conceito *Equação da Circunferência*



Fonte: Sistema de Estudos do AVA.

A figura 75 apresenta outro exemplo de atividade extra com uma conversão do registro gráfico para o registro simbólico na representação algébrica. A atividade é uma animação gráfica que representa a translação de uma Circunferência paralelamente ao eixo das abscissas, simulando uma bicicleta andando em um plano, desenvolvido com os *softwares winplot e flash*, para o conceito *Equação da Cincunferência*, em que o aluno deveria escrever a equação que representa a animação gráfica, de acordo com exemplo em vermelho, que utiliza a representação algébrica conforme escreve-se equações no *software winplot*. Caso o aluno erre a equação, recebe a mensagem “tente novamente”, e ao acertar, “parabéns por concluir” tendo a opção de reiniciá-la. Para melhor observação da animação gráfica, pelo aluno, criou-se um botão de pausa, assim, o aluno pode, por exemplo, visualizar com maior facilidade no gráfico que, embora o Ponto do centro das circunferências mude à medida que vai ocorrendo a translação, as ordenadas destes pontos têm sempre o mesmo valor, modificando apenas o valor da abscissa.

Figura 75– Atividade de animação gráfica desenvolvida para o conceito de *Equação da Circunferência*

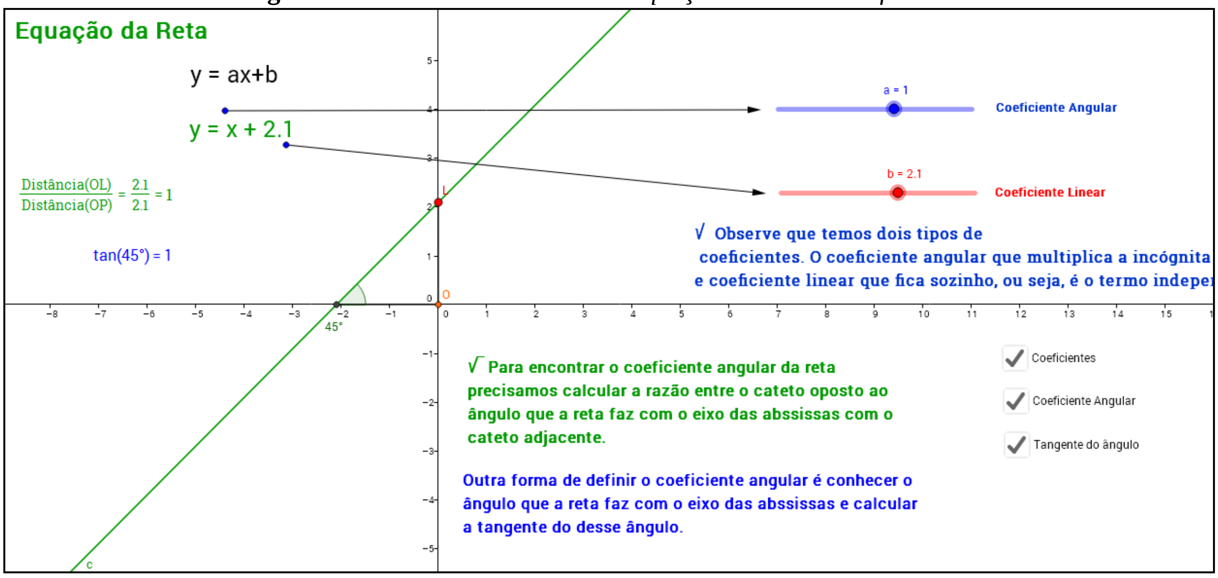


Fonte: Sistema de Estudos do AVA.

O *link* com o ícone do Geogebra possui outro importante recurso para os alunos. Foram disponibilizados nas representações gráficas com gráficos dinâmicos (*applets*) para o estudo e visualização de propriedades dos lugares geométricos de Reta e Circunferência. Estes *applets* estão embasados na teoria dos Registros de Representação Semiótica, ao que Duval (2004) preconiza sobre a modificação de variáveis visuais e a correspondência das unidades significantes de cada representação de um objeto matemático. Assim estes recursos permitem ao aluno visualizar as modificações realizadas no registro gráfico e o que estas implicam no registro simbólico (representação algébrica) do objeto matemático representado e vice-versa.

Foram desenvolvidos *applets* sobre a representação de pontos no plano cartesiano, distância entre dois pontos, ponto médio, pontos colineares e equidistantes, equação da Reta e coeficientes, equação paramétrica da Reta e equação da Circunferência. A figura 76 apresenta o *applet* sobre equação da Reta, o qual permite que aluno movimente a Reta do gráfico com rotação e translação, e visualize as modificações que ocorrem na representação algébrica desta Reta, relacionando tais modificações com os coeficientes angular e linear, bem como, é possível relacionar o ângulo de inclinação da Reta e o coeficiente angular, que é o valor da tangente deste ângulo.

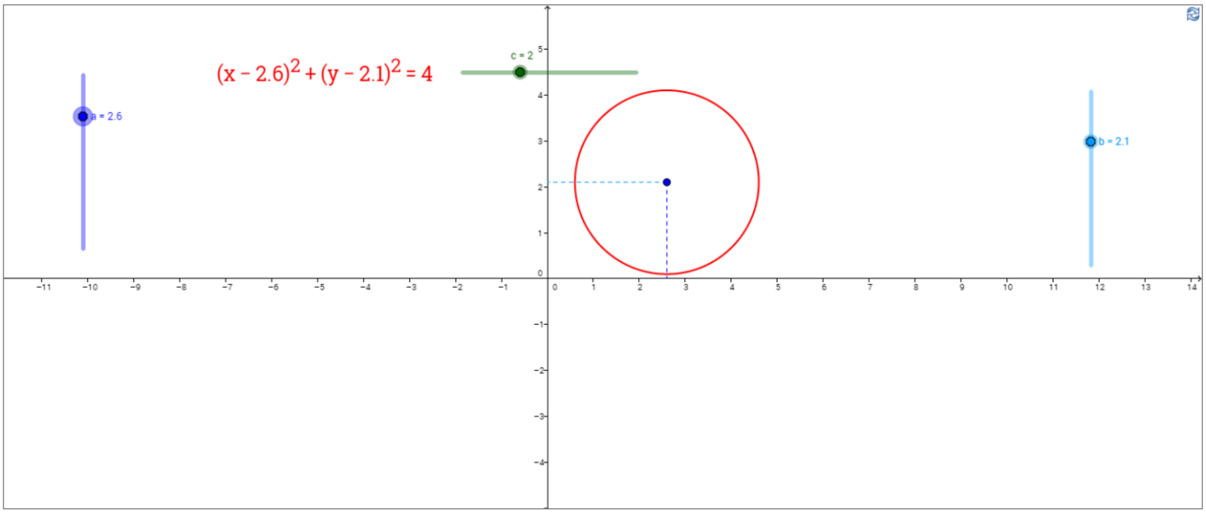
Figura 76- Gráfico dinâmico sobre E*quação da Reta* e *Coeficientes*



Fonte: Sistema de Estudos do AVA.

Outro exemplo de gráfico dinâmico é o *applet* apresentado na figura 77, sobre a equação da Circunferência, o qual permite ao aluno movimentar a Circunferência do gráfico por meio dos controles deslizantes, fazendo modificações no seu Ponto do centro e raio, bem como, visualizar e identificar o que implica estas modificações (translações) no registro simbólico (representação algébrica) desta Circunferência.

Figura 77- Gráfico dinâmico sobre *Equação da Circunferência.*



Fonte: Sistema de Estudos do AVA.

Nesse sentido, com as atividades didáticas desenvolvidas para cada conceito do grafo e os recursos didáticos para resolução dos problemas geradores, buscou-se contribuir para que o aluno internalizasse os conceitos de Geometria Analítica referentes a Reta e Circunferência articulando os diferentes Registros de Representação Semiótica.

5.3 O BANCO DE QUESTÕES PARA OS TESTES ADAPTATIVOS NO SISTEMA SIENA

O banco de questões para a realização dos testes adaptativos no SIENA foi composto de 30 questões para cada conceito do grafo sobre os conceitos de Geometria Analítica para Ponto, Reta e Circunferência, envolvendo a articulação entre os registros Simbólico (numérico e algébrico), língua natural, gráfico e figural, de acordo com Duval (2003).

As 30 questões de cada conceito foram divididas em 10 questões consideradas com nível de dificuldade fácil, as quais são questões de tratamentos considerados simples e conversões congruentes consideradas não elaboradas, 10 questões consideradas com nível de dificuldade médio, as quais são questões que envolvem mais de um tipo de tratamento e conversões congruentes com exigência de maior nível cognitivo, distribuídas em questões de tratamentos e conversões congruentes, e 10 questões de conversões não-congruentes consideradas com nível de dificuldade difícil. As questões de conversões foram desenvolvidas de maneira que os alunos realizassem a conversão nos dois sentidos dos registros utilizados, embora não na mesma questão.

Cada questão desenvolvida possuía quatro opções de respostas, de forma que os alunos não resolvessem a mesma por eliminação de respostas e, também, com base nos possíveis erros, como sinal, cálculos, interpretação, etc., que eventualmente os alunos pudessem cometer na resolução dessas questões.

Para os níveis de dificuldade foram estabelecidos os valores de 0,3 para as questões fáceis, 0,35 para as questões médias e 0,45 para as questões difíceis. A adivinhança (percentual de acerto ao azar) estabeleceu-se o valor de 0,25 e como conhecimento prévio dos alunos colocou-se 0,3 considerando que os estudantes estavam estudando estes conceitos pela primeira vez, mas possuíam os conhecimentos prévios necessários para este estudo.

A média definida para considerar o aluno aprovado nos testes adaptativos foi de 0,6, sendo que os alunos podiam obter como resultado valores entre 0 e 1,0. O aluno tinha um tempo para realização de cada questão que variava de acordo com a dificuldade da mesma, entre 5 e 17 minutos. Era dado um tempo maior do que o esperado que os alunos levassem para resolver a questão, para que estes não fossem seguidamente prejudicados por falta de tempo.

A partir desses valores e das respostas dadas pelos alunos o sistema SIENA lança questões até o momento em que não é mais possível estabelecer uma estimativa sobre o grau de conhecimento dos alunos em relação ao conceito do grafo. Quando o aluno não atingia a média de 0,6 no conceito, ele podia visualizar as questões erradas e era orientado a voltar ao estudo do mesmo conceito para tirar as dúvidas surgidas durante a realização das questões do teste.

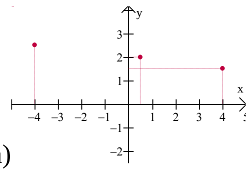
A seguir apresentam-se exemplos de questões, uma fácil, uma média e uma difícil proposta para cada conceito do grafo do tema Geometria Analítica para os testes adaptativos no Sistema SIENA[4]. Salienta-se que as questões investigadas em livros didáticos apresenta-se a fonte da mesma e as questões que não apresentam fonte foram desenvolvidas pela pesquisadora.

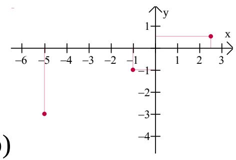
A figura 78 apresenta, respectivamente, três questões do conceito *Sistema Cartesiano Ortogonal*, nos níveis fácil, médio e difícil.

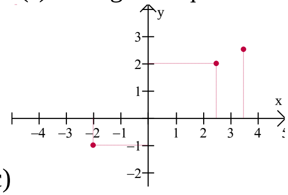
[4] As questões encontram-se no endereço: http//siena.ulbra.br

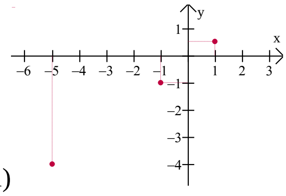
Figura 78- Questões do conceito *Sistema Cartesiano Ortogonal*

Encontre o gráfico que apresenta Ponto(s) representado(s) no segundo quadrante.

a) 

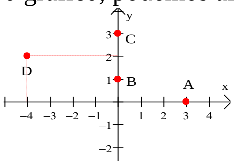
b) 

c) 

d) 

(Conversão do Registro Língua Natural para Registro Gráfico)
Questão de Nível Fácil

Segundo o gráfico, podemos afirmar que:



a)Os pontos A,B e D são colineares.
b) O Ponto A pertence ao primeiro quadrante.
c) O Ponto C está sobre o eixo das abscissas.
d) Os pontos A e C equidistam da origem do plano cartesiano.
(Conversão do Registro Gráfico para o Registro Língua Natural)
Questão de Nível Médio

Qual o valor de p em função de q sabendo que os pontos A de abscissa zero e ordenada um, B de abscissa um e ordenada zero e C de abscissa p e ordenada q são colineares?

a) q = – 1 + p.
b) p = 1 – q.
c) p = q – 1.
d) q = – p – 1

(Conversão da Língua Natural para o Registro Simbólico na representação algébrica)

Questão de Nível Difícil

Fonte: A pesquisa.

A figura 79 apresenta, respectivamente, três questões do conceito *Equação da Reta*, nos níveis fácil, médio e difícil.

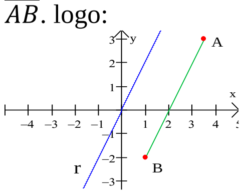
Figura 79- Questões do conceito *Equação da Reta*

Para uma Reta cujo gráfico é paralelo ao eixo das abscissas podemos dizer que:
a) os pontos desta Reta tem abscissas iguais
b) os pontos desta Reta tem ordenadas iguais
c) as abscissas são iguais as ordenadas
d) os pontos desta Reta possuem somente coordenadas positivas.

(Tratamento)

Questão de Nível Fácil

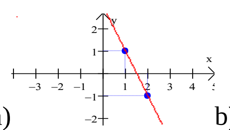
Temos neste gráfico a Reta “r” e o segmento de Reta $\overline{AB}$. logo:

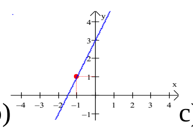


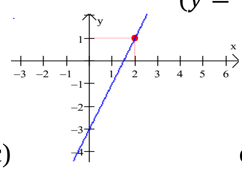
a) Podemos afirmar que ambos intercectam o eixo das ordenadas.
b) Podemos dizer que ao contrário do segmento, a Reta não tem início nem fim.
c) Podemos dizer que o segmento começa em A e termina em B.
d) Podemos dizer que ambos possuem Ponto médio.

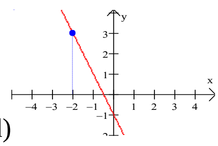
(Conversão da Registro Gráfico para o Registro Língua Natural) Questão de Nível Médio

O gráfico que representa a Reta de equação paramétrica $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -3 + 2t \end{cases}$ $com\ t \in R$ é:

a) 

b) 

c) 

d) 

(Conversão ddo Registro Simbólico na representação algébrica para o Registro Gráfico).
Questão de Nível Difícil

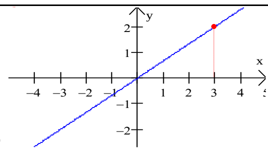
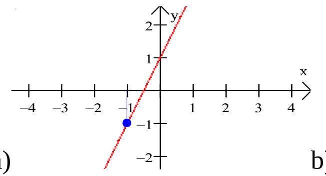
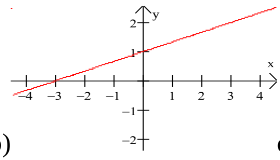
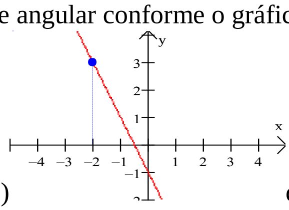
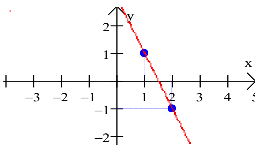
Fonte: A pesquisa.

A figura 80 apresenta, respectivamente, três questões do conceito *Coeficientes*, respectivo ao conteúdo de Reta, nos níveis fácil, médio e difícil.

Figura 80 - Questões do conceito **Coeficientes**

<table>
<tr>
<td>Uma Reta que possui coeficiente angular igual a 1 formará um ângulo com o eixo das abscissas igual a:
a) 45 º
b) 60 º
c) 90 º
d) 180 º

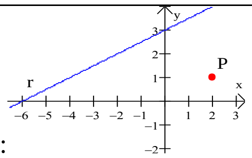
(Tratamento)

Questão de Nível Fácil</td>
<td>
Com base no gráfico pode-se afirmar que:
a) A tangente do ângulo que a Reta faz com o eixo das abscissas é igual a 2/3.
b) O coeficiente angular desta Reta é igual a 0.
c) O coeficiente linear desta Reta é igual a três.
d) A Reta passa pelo Ponto P(-1,-1)
(Conversão do Registro Gráfica para o Registro Língua Natural) Questão de Nível Médio</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">A Reta formada pelos pontos P(q, 1+2q) possui coeficiente angular conforme o gráfico:
a)  b)  c)  d) 
(Conversão do Registro Simbólico na representação algébrica para o Registro Gráfico)
Questão de Nível Difícil</td>
</tr>
</table>

Fonte: A pesquisa.

A figura 81 apresenta, respectivamente, três questões do conceito *Posições Relativas*, respectivo ao conteúdo de Reta, nos níveis fácil, médio e difícil.

Figura 81 - Questões do conceito *Posições Relativas*

<table>
<tr>
<td>A Reta perpendicular a Reta x = 4 é: Bissetriz ao segundo quadrante.
a) Paralela ao eixo das abscissas.
b) Perpendicular à bissetriz do segundo quadrante.
c) Paralela ao eixo das ordenadas.
(Tratamento)
Questão de Nível Fácil</td>
<td>Duas retas r e s têm coeficientes angulares iguais a A e B respectivamente. Para que elas sejam perpendiculares a relação verdadeira é:
a) A = B.
b) 2A = B.
c) – 1/A = B.
d) A = 1/2B .
(Conversão do Registro Língua Natural para o Registro Simbólico n representação algébrica)
Questão de Nível Médio</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

De acordo com o gráfico:
a) A Reta paralela a Reta “r” que contiver o Ponto “P” passará pela origem do plano cartesiano.
b) A Reta perpendicular a Reta “r” que passa no Ponto “P” tem coeficiente linear menor que quatro.
c) Uma Reta paralela ao eixo das abscissas que passa no Ponto “P” intersecta a Reta “r” no primeiro quadrante.
d) Uma Reta que passa no terceiro quadrante e contém o Ponto “P” não intersecta a Reta “r”.
(Conversão do Registro Gráfico para o Registro Língua Natural) Questão de Nível Difícil</td>
</tr>
</table>

Fonte: A pesquisa.

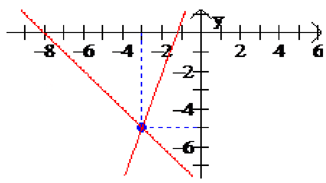
A figura 82 apresenta, respectivamente, três questões do conceito *Ângulo Formado por duas Retas, Distância entre Ponto e Reta e Área da Região triangular*, respectivo ao conteúdo de Reta, nos níveis fácil, médio e difícil.

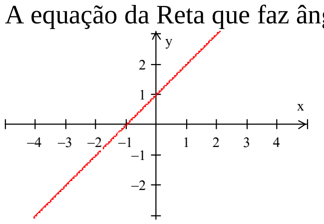
Figura 82 - Questões do conceito *Ângulo Formado por duas Retas, Distância entre Ponto e Reta e Área da Região Triangular*

<table>
<tr>
<td>Com base nas equações 2x+y+1=0 e x−y+7=0, o ângulo formado pelas retas é:

a) 21º b) 71º c) 45 º d) 90 º

(Tratamento)

Questão de Nível Fácil</td>
<td>O ângulo formado pelas retas é aproximadamente é:
a) 45º
b) 60º
c) 71º
d) 75º


(Conversão do Registro Gráfico para o Registro Simbólico na representação Numérica)
Questão de Nível Médio</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">A equação da Reta que faz ângulo de 45 graus com a Reta do gráfico e passa pelo Ponto P(-1,2) é:


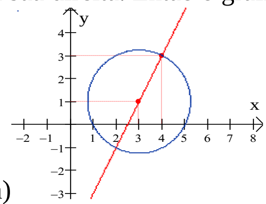
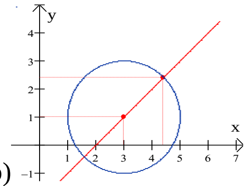
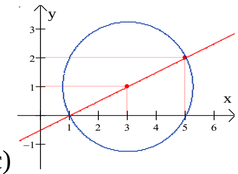
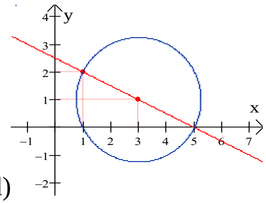
a) 2x=y b) x=-1 c) y=2 d) y=x+1
(Conversão do Registro Gráfico para o Registro Simbólico na repr. algébrica) Questão de Nível Difícil</td>
</tr>
</table>

Fonte: A pesquisa.

A figura 83 apresenta, respectivamente, três questões do conceito *Equação da Circunferência*, nos níveis fácil, médio e difícil.

Figura 83 - Questões do conceito *Equação da Circunferência*

<table>
<tr>
<td>Calcule o raio da Circunferência com centro no Ponto C(1, -2) que passa no Ponto P (-2,0). a) 3
b) $\sqrt{11}$
c) 7
d) $\sqrt{13}$
(Tratamento)

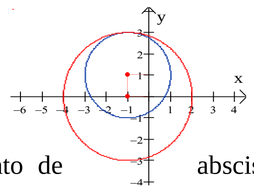
Questão de Nível Fácil</td>
<td>Os valores de “a” e “b” na equação
$(x+a)^2 + (y-b)^2 = 1$ da Circunferência correspondem:
a) A um Ponto da Circunferência.
b) Ao par ordenado do Ponto situado no centro da Circunferência.
c) Ao par ordenado do Ponto situado no centro da Circunferência com os sinais trocados.
d) A distância que a Circunferência se encontra do eixo das abscissas e das ordenadas respectivamente.
(Conversão do Registro Simbólico na representação Algébrica para o Registro Língua Natural)
Questão de Nível Médio</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Um submarino usa seu sonar para navegação e com isto identifica possíveis obstáculos na sua trajetória. Sabendo que o sonar do submarino posicionado no Ponto de abscissa 3 e ordenada 1(distâncias do Ponto central do sistema de orientação - Longitude 0º e Latitude 0º) percebeu uma rocha a dois quilômetros 45 graus a sua direita. Então o gráfico que melhor representa a situação é:
a)  b)  c)  d) 
(Conversão do Registro Língua Natural para o Registro Gráfico) Questão de Nível Difícil</td>
</tr>
</table>

Fonte: A pesquisa.

A figura 84 apresenta, respectivamente, três questões do conceito *Circunferência: posições relativas*, nos níveis fácil, médio e difícil.

Figura 84 - Questões do conceito *Circunferência: posições relativas*

<table>
<tr>
<td>Dadas uma Reta r de equação $2x - y + 1 = 0$ e uma Circunferência λ de equação $x^2 + y^2 - 2x = 0$, verifique a posição relativa de r e λ e, se houver, determine os pontos comuns (tangente ou secante). Fonte: (Dante, 2010, p.88)
a) A Reta é exterior à Circunferência e não há Ponto comum.
b) A Reta é secante à Circunferência e os pontos comuns são (-3/5, -1/5) e (2/5, 9/5).
c) A Reta é tangente à Circunferência e o Ponto comum é (-3/5, -1/5).
d) A Reta é tangente à Circunferência e o Ponto comum é (-3/5, 2/5).
(Tratamento) Questão de Nível Fácil</td>
<td>A Circunferência com centro C(1,1) é tangente à Reta t de equação $x + y - 10 = 0$. Determine a equação da Circunferência. Fonte: (Dante, 2010, p.91)
a) $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 4\sqrt{2}$
b) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4\sqrt{2}$
c) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 32$
d) $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 32$

(Conversão do Registro Língua Natural para o Registro Simbólico na representação algébrica).
Questão de Nível Médio</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">De acordo com o gráfico pode-se dizer que:

a) As duas circunferências se encontram no Ponto de abscissa -1 e ordenada 1.
b) Uma Circunferência tem o dobro do raio da outra.
c) A área da Circunferência menor é quase duas vezes e meia menor.
d) As circunferências são concêntricas.
(Conversão do Registro Gráfico para o Registro Língua Natural) Questão de Nível Difícil</td>
</tr>
</table>

Fonte: A pesquisa.

Assim, foram desenvolvidas 210 questões para os testes adaptativos no sistema SIENA. As questões na íntegra divididas por conceito do grafo e por nível de dificuldade, encontram-se no apêndice B.

Os testes adaptativos foram utilizados, nesta investigação, para acompanhamento e autoavaliação das duplas de estudantes, indicando o desempenho dos mesmos durante o estudo e para avaliação do conteúdo pela professora titular das turmas de alunos investigados (turma 301 e 302) de uma escola estadual do município de Canoas, onde foi realizado o experimento.

Salienta-se que a pesquisadora e a professora titular agiam, durante as aulas, como mediadoras do processo de ensino e aprendizagem, durante os testes as duplas podiam consultar a sequência didática (de estudos), mas a professora e a pesquisadora apenas acompanhavam e questionavam indicando onde poderiam pesquisar na sequência didática para conseguir sanar suas dúvidas.

Importante salientar, também, que as questões que compõem os testes adaptativos, realizados pelos estudantes, são lançadas aleatoriamente pelo Sistema SIENA, aumentando o nível de dificuldade se o aluno acerta a questão e diminuindo o nível de dificuldade se o estudante erra a questão.

6 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Nesta seção apresentam-se o perfil dos alunos investigados, os resultados de cada conceito do grafo com foco nas habilidades matemáticas desenvolvidas ou não pelos alunos, segundo o conteúdo de cada conceito do grafo, tanto na parte da sequência didática quanto nos testes adaptativos, sob a ótica da teoria dos Registros de Representação Semiótica.

6.1 PERFIL DOS ALUNOS

Participaram da experiência duas turmas de alunos do terceiro ano do Ensino Médio (turma 301 e 302) de uma escola estadual do município de Canoas-RS. Na turma 301 haviam 34 alunos e na turma 302 haviam 30 alunos, num total de 64 alunos entre 16 e 19 anos de idade, sendo que a média de idade dos alunos era de 17 anos.

Na turma 301, 80 % dos alunos afirmaram residir em um bairro próximo da escola e os outros 20% no bairro da escola. Na turma 302, 87% dos alunos afirmaram morar em um bairro próximo da escola e 13% no bairro da escola. Dos 64 alunos, apenas dois alunos da turma 301 afirmaram não residir com os pais, os demais residiam com os pais.

Com relação a exercer alguma atividade profissional, 74% dos alunos da turma 301 e 73% dos alunos da turma 302 afirmaram realizar algum tipo de trabalho fora do turno escolar, sendo que a média de horas trabalhadas por dia, para as duas turmas de alunos, foi de 6 horas diárias.

Quanto a já ter sido reprovado em Matemática em alguma série, 11% dos alunos da turma 302, afirmaram que sim, e 6% da turma 302, também afirmaram já terem reprovado nesta disciplina durante a vida escolar. Todos os alunos afirmaram considerar importante estudar Matemática, e entre as justificativas estão: ser algo básico para o dia-a-dia, importante para o desenvolvimento do raciocínio e ainda, por ser utilizada em muitas profissões.

No entanto, com relação à quantidade de horas semanais que os alunos dedicavam para estudar Matemática fora da escola é pequena. Na turma 301, 55% dos alunos afirmaram estudar apenas na escola e dos outros 45% a média de horas dedicada ao estudo da Matemática é de 3 horas semanais. Na turma 302, 38% dos alunos afirmaram estudar apenas na escola e os outros 62% afirmaram dedicar em média 4 horas semanais para estudar Matemática.

Sobre realizar a prova do ENEM, 11% dos alunos da turma 301 afirmaram que não iriam realizar no ano de 2014, enquanto que na turma 302 todos afirmaram que iriam realizar em 2014 a prova, e todos os alunos das duas turmas que pretendiam realizar a prova desejavam ingressar no Ensino Superior.

Dos 64 alunos investigados, apenas um da turma 301, afirmou não ter computador em casa com acesso à internet. Dos que possuíam 80% dos alunos da turma 301 afirmaram utilizar frequentemente o computar e a internet e os demais às vezes, e na turma 302, 90% afirmaram utilizar com frequência o computador e a internet e 10% às vezes. E com relação ao tipo de atividade com o uso do computador e internet todos afirmaram que utilizam para pesquisas e para realizarem trabalhos escolares e 80% dos alunos acrescentaram, ainda, o uso para redes sociais e jogos.

Considerando que os alunos das duas turmas dedicam poucas horas semanais para o estudo da Matemática infere-se que os alunos fazem pouco uso do computador e internet para o estudo desta disciplina. Verifica-se, também, que a maioria dos alunos trabalha em turno inverso, o que, provavelmente, implica nas horas dedicadas ao estudo, pois estes foram os que mencionaram se dedicar menos ao estudo da Matemática.

6.2 ANÁLISE DOS BANCOS DE DADOS DO SISTEMA DE ESTUDOS E DO SISTEMA SIENA E DOS REGISTROS DOS ALUNOS NO DESENVOLVIMENTO DAS ATIVIDADES PROPOSTAS E TESTES ADAPTATIVOS

O desempenho das duplas de alunos das duas turmas investigadas foi analisado através dos bancos de dados fornecidos pelo Sistema de Estudos, com os problemas geradores, e pelo Sistema SIENA, com os resultados dos testes adaptativos, para cada conceito do grafo dos conteúdos de Geometria Analítica, do experimento realizado e ainda, dos registros escritos das duplas no desenvolvimento dos problemas geradores e testes adaptativos.

O Sistema de Estudos apresenta um percentual, transformado em nota para o desempenho dos alunos no estudo de cada conceito do grafo, com base nas respostas corretas dos problemas geradores que possuem respostas objetivas, sendo que as dissertativas foram corrigidas pela pesquisadora e a nota acrescentada àquela dada pelo sistema. No SIENA as notas estão no intervalo entre [0,1], tendo sido estabelecido o índice 0,6 para o desempenho considerado satisfatório para cada conceito do grafo com os conteúdos de Geometria Analítica.

A análise do desempenho dos alunos investigados tem seu foco em habilidades matemáticas, apresentas ou não por estes alunos, relacionando-as com a teoria dos Registros de

Representação Semiótica. Foram consideradas habilidades matemáticas que estão de acordo com as políticas públicas investigadas. A figura 85 apresenta estas habilidades matemáticas.

Figura 85 -Habilidades matemáticas consideradas para a investigação

- H1- Identificar e interpretar os dados relevantes em uma dada situação-problema para buscar possíveis estratégias de resolução utilizando conhecimentos algébricos e geométricos, referentes aos conceitos de Ponto, Reta e Circunferência.
- H2- Ler, articular e interpretar padrões em diferentes registros e representações semióticas matemáticas como recursos para fazer inferências e construir argumentos.
- H3- Identificar regularidades em situações semelhantes para estabelecer regras, algoritmos e propriedades relacionadas à Geometria.
- H4- Reconhecer a existência de invariantes ou identidades que impõe condições a serem utilizadas para analisar e resolver situações-problema.
- H5- Elaborar possíveis modelos matemáticos que expressem a relação entre grandezas para analisar e resolver uma situação-problema.
- H6- Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.
- H7- Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando diferentes representações semióticas e conhecimentos geométricos.
- H8- Identificar a localização de pontos no plano cartesiano e representá-los numérica, algébrica e graficamente.
- H9- Aplicar e realizar tratamentos referentes ao conceito de distância entre dois pontos, distância entre Ponto e Reta no plano cartesiano e com base em suas coordenadas.
- H10- Determinar com tratamentos numéricos e representar graficamente as coordenadas de um Ponto médio de um segmento.
- H11- Aplicar o conceito e representar a condição de alinhamento de três pontos (pontos colineares).
- H12- Obter e relacionar as diferentes formas (geral, reduzida e paramétrica) da equação da Reta.
- H13- Interpretar, determinar com tratamentos numéricos e algébricos, e representar geometricamente os coeficientes angular e linear da equação de uma Reta.
- H14- Identificar e representar algebricamente a equação de uma Reta apresentada a partir de dois pontos dados ou de um Ponto e sua inclinação.
- H15- Relacionar a determinação do Ponto de interseção de duas ou mais retas e a posição relativa entre elas com a resolução de um sistema de equações com duas incógnitas.
- H16- Determinar, analiticamente, a área de um triângulo e ângulo formado por 2 retas.
- H17- Reconhecer, dentre as equações do 2.º grau com duas incógnitas, as que representam circunferências.
- H18- Estabelecer relação entre a representação gráfica da Circunferência e sua representação algébrica.
- H19- Identificar na representação algébrica as coordenadas do centro e o raio da Circunferência.
- H20- Reconhecer e obter as equações geral e reduzida da Circunferência.
- H21- Identificar e obter as posições relativas entre Ponto e Circunferência, Reta e Circunferência e entre duas circunferências.

Fontes: Brasil, 2008 e Ribeiro, 2010.

A tabela 1 apresenta os resultados do desempenho que as duplas de alunos da turma 301 obtiveram no estudo, no teste inicial e teste final em cada conceito do grafo mencionado.

Tabela 1

Desempenho das duplas da turma 301 nos conceitos do grafo de Geometria Analítica

D	**Conceito 1**			**Conceito 2**			**Conceito 3**			**Conceito 4**			**Conceito 5**			**Conceito 6**			**Conceito 7**		
	E	TI	TF	E	TI	TF	E	TI	TF	E	TI	TF	E	TI	TF	E	TI	TF	E	TI	TF
d1	0,6	1,0	-	0,65	0,735	-	0,6	0,459	0,918	0,5	0,143	0,992	0,6	0,3	0,952	0,45	0,495	0,990	0,4	0,496	0,993
d2	0,77	0,6	-	0,65	0,496	0,993	0,6	0,495	0,990	0,8	0,496	0,993	0,67	0,488	0,976	0,3	0,997	-	NF	0,359	0,991
d3	0,85	0,136	0,998	0,65	0,103	0,831	0,7	0,003	0,994	0,5	0,999	-	0,27	0,3	0,995	NF	0,498	0,997	NF	0,499	0,998
d4	0,77	0,983	-	0,9	1,0	-	0,6	0,027	NF	0,66	0,294	0,993	0,7	0,929	-	NF	0,133	0,998	NF	NF	-
d5	0,67	0,926	-	0,39	0,286	NF	0,25	NF	-	0,66	0,294	0,993	0,7	0,929	-	NF	0,133	0,998	NF	NF	-
d6	0,7	0,973	-	0,7	0,146	0,852	0,6	0,237	0,990	0,7	0,205	0,891	0,66	0,035	0,797	0,39	0,3	0,997	0,6	0,003	0,911
d7	0,9	1,0	-	0,6	0,998	-	0,6	0,998	-	0,75	0,997	-	0,5	0,934	-	0,55	0,997	-	NF	0,3	0,994
d8	0,81	0,987	-	0,3	0,4	NF	0,6	NF	-	0,33	0,3	0,984	0,4	0	0,973	0,3	0,496	0,992	0,35	0,021	0,992
d9	0,8	0,980	-	0,35	0,990	-	0,6	0,952	-	0,68	0,998	-	0,6	0,007	0,993	0,7	0,993	-	0,4	0,993	-
d10	0,8	0,473	0,992	0,6	NF	-	NF	NF	-	0,6	0,024	0,999	0,78	0,167	0,991	0,55	0,146	0,993	0,4	0,996	-
d11	0,8	0,967	-	0,8	0,595	0,887	0,6	0,3	NF	0,75	0,428	NF	0,65	NF	-	0,3	0,499	0,998	NF	NF	-
d12	0,7	0,292	0,829	0,8	0,033	0,8	0,4	0,3	NF	NF	0,170	0,999	0,7	0,978	-	NF	0,005	NF	NF	NF	-
d13	0,67	0,010	0,968	0,6	0,028	0,722	0,65	0,007	0,895	0,7	0,466	0,991	NF	0,146	0,992	NF	0,365	0,990	NF	0,057	0,987
d14	0,62	0,753	-	NF	NF	-	0,4	NF	-	NF	0,005	NF	NF	0,495	NF	NF	0,496	NF	NF	NF	-
d15	0,7	0,668	-	0,7	NF	-	0,3	NF	-	0,7	0,030	0,993	0,6	0,3	0,990	0,4	0,3	0,997	0,65	0,146	0,976
d16	0,86	0,146	1,0	0,67	0,024	0,167	0,6	0,994	-	0,82	0,3	0,997	0,86	0,3	0,974	0,3	0,496	0,992	0,76	0,3	0,992
d17	0,65	0,011	0,964	1,0	0,03	0,831	0,4	NF	-	0,64	0,049	NF	0,8	0,412	0,732	0,4	0,496	0,992	NF	0,3	0,991

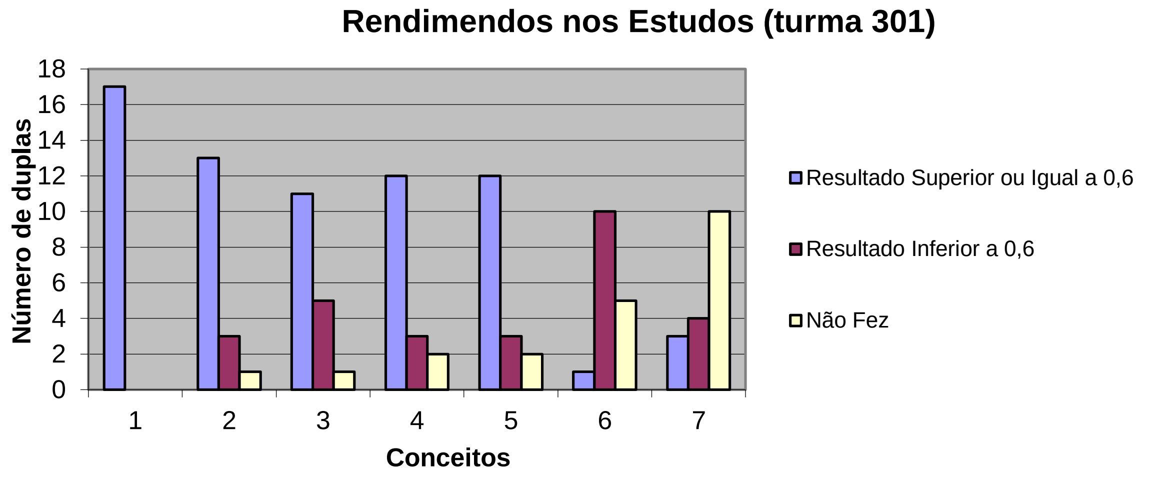
Legenda:
Conceito 1- Sistema Cartesiano Ortogonal
Conceito 2- Equação da Reta
Conceito 3- Coeficientes (Reta)
Conceito 4- Posições Relativas (Reta)
Conceito 5- Ângulo formado por 2 Retas, Distância entre Ponto e Reta e Área de uma Região Triangular
Conceito 6- Equação da Circunferência
Conceito 7 – Circunferência: Posições Relativas

D- Dupla
E- Estudo
TI- Teste Inicial
TF- Teste Final
NF- Não Fez

Fonte: Banco de dados do Sistema de Estudos do AVA e banco de dados do SIENA.

A seguir, ilustra-se, na figura 86, o gráfico com os resultados do desempenho das duplas de alunos da turma 301 no estudo para cada conceito do grafo, com o tema Geometria Analítica, conforme as notas fornecidas pelos bancos de dados do Sistema de Estudos apresentados na tabela 1.

Figura 86- Gráfico do desempenho das duplas de alunos da turma 301 no estudo em cada conceito do grafo



Legenda:
Conceito 1- Sistema Cartesiano ortogonal
Conceito 2- Equação da Reta
Conceito 3- Coeficientes (Reta)
Conceito 4- Posições Relativas (Reta)
Conceito 5- Ângulo formado por 2 Retas, Distância entre Ponto e Reta e Área de uma Região Triangular
Conceito 6- Equação da Circunferência
Conceito 7 – Circunferência: Posições Relativas

Fonte: Banco de dados do Sistema de Estudos do AVA.

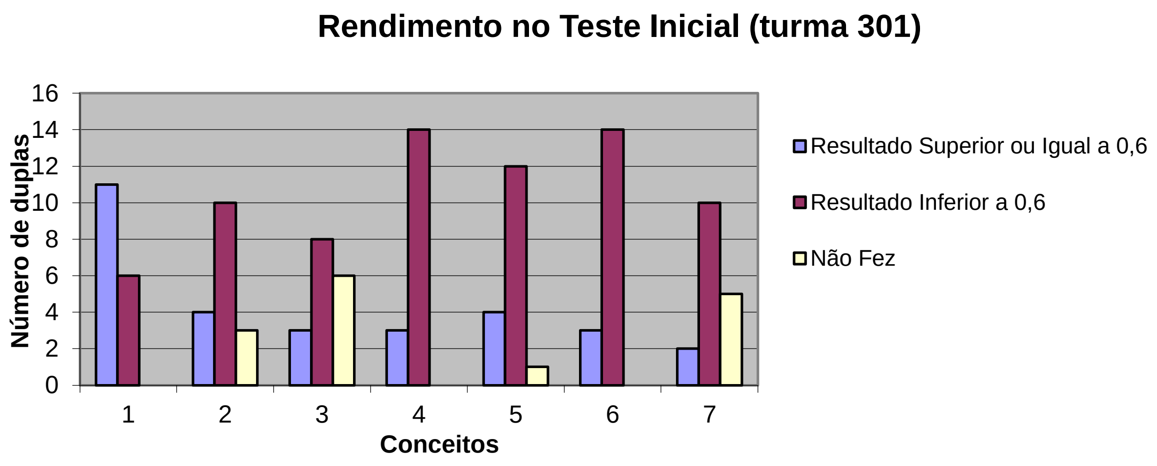
Observa-se que, nos estudos, os conceitos 6 e 7 denominados respectivamente como *Equação da Circunferência* e *Circunferência: Posições Relativas*, um maior número de duplas da turma 301, composta por dezessete duplas, apresentaram um rendimento inferior a 0,6, valor estabelecido como rendimento satisfatório.

No conceito 6, dez das dezessete duplas obtiveram resultados abaixo de 0,6 e no conceito 7 das sete duplas que responderam as questões do estudo, 4 obtiveram desempenho abaixo de 0,6, sendo que dez das dezessete duplas não responderam as questões de estudo deste conceito.

Nos demais conceitos, os quais são respectivos aos conteúdos da Reta, observa-se a maior parte das duplas da turma 301 obteve rendimento igual ou superior a 0,6 no estudo, sendo que no conceito 1 denominado *Sistema Cartesiano Ortogonal* todas as dezessete duplas realizaram as questões do estudo e todas obtiveram rendimento superior a 0,6.

A seguir, apresenta-se na figura 87, o gráfico com os resultados do desempenho das duplas de alunos da turma 301 no teste inicial para cada conceito do grafo, com o tema Geometria Analítica, conforme as notas fornecidas pelos bancos de dados do Sistema SIENA apresentados na tabela 1.

Figura 87 - Gráfico do desempenho das duplas de alunos da turma 301 no teste inicial em cada conceito do grafo



Legenda:
Conceito 1- Sistema Cartesiano ortogonal
Conceito 2- Equação da Reta
Conceito 3- Coeficientes (Reta)
Conceito 4- Posições Relativas (Reta)
Conceito 5- Ângulo formado por 2 Retas, Distância entre Ponto e Reta e Área de uma Região Triangular
Conceito 6- Equação da Circunferência
Conceito 7 – Circunferência: Posições Relativas

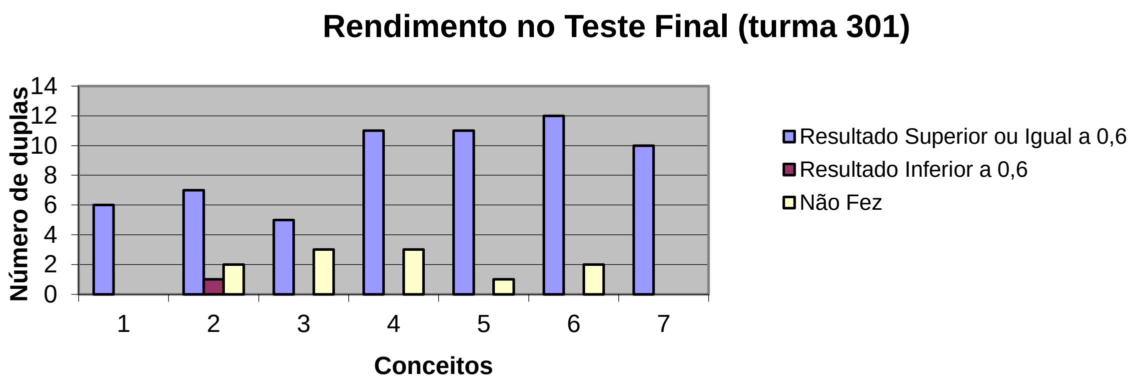
Fonte: Banco de dados do Sistema SIENA.

No teste inicial, realizado no sistema SIENA, de acordo com a figura 86, apenas no conceito 1 *Sistema Cartesiano Ortogonal*, a maior parte das duplas da turma 301 obteve rendimento igual ou superior a 0,6. Com relação aos demais conceitos, observa-se que as maiores dificuldades estão relacionadas aos conceitos 4 e 6 respectivamente denominados como *Posições Relativas* (Reta) e *Equação da Circunferência*.

Nos testes adaptativos, realizados pelas duplas no SIENA, o sistema lançava questões diferentes das questões de estudo com níveis de dificuldade fácil, médio e difícil procurando articular diferentes registros semióticos. Por este motivo, e também, porque nos estudos os alunos tinham a ajuda da professora titular da turma e da pesquisadora e nos testes não, acredita-se que os alunos necessitaram retornar aos estudos da sequência didática para então realizar um novo teste adaptativo.

A seguir, apresenta-se na figura 88, o gráfico com os resultados do desempenho das duplas de alunos da turma 301 no teste final para cada conceito do grafo, com o tema Geometria Analítica, conforme as notas fornecidas pelos bancos de dados do Sistema SIENA apresentados na tabela 1.

Figura 88 - Gráfico do desempenho das duplas de alunos da turma 301 no teste final em cada conceito do grafo



Legenda:
Conceito 1- Sistema Cartesiano ortogonal
Conceito 2- Equação da Reta
Conceito 3- Coeficientes (Reta)
Conceito 4- Posições Relativas (Reta)
Conceito 5- Ângulo formado por 2 Retas, Distância entre Ponto e Reta e Área de uma Região Triangular
Conceito 6- Equação da Circunferência
Conceito 7 – Circunferência: Posições Relativas

Fonte: Banco de dados do Sistema SIENA.

No teste final, de acordo com o gráfico da figura 88, observa-se que das duplas da turma 301 que realizaram mais de um teste para atingir desempenho igual ou superior a 0,6 apenas no conceito 2, denominado como *Equação da Reta*, uma dupla ficou abaixo de 0,6. Entre o teste inicial e o teste final houve duplas que necessitaram realizar mais de um teste para atingir o desempenho considerado satisfatório.

No conceito 1, *Sistema cartesiano Ortogonal*, não houve testes entre o inicial e o final, pois com dois testes todos as duplas atingiram desempenho igual ou superior a 0,6. No conceito 2, *Equação da Reta*, duas duplas realizaram 2 testes entre o inicial e o final. No conceito 3, *Coeficientes* (Reta), três duplas realizaram um teste entre o inicial e o final e duas duplas realizaram 2 testes. No conceito 4, *Posições Relativas* (Reta), uma dupla realizou um teste entre o inicial e o final, cinco duplas realizaram dois testes e duas duplas realizaram mais de 2 testes para atingir desempenho igual ou superior a 0,6. No conceito 5, *Ângulo formado por 2 Retas, Distância entre Ponto e Reta e Área de uma Região Triangular*, duas duplas realizaram 1 teste entre o final e o inicial, três duplas realizaram 2 testes e três duplas realizaram mais 2 testes para atingir o desempenho considerado satisfatório. No conceito 6, *Equação da Circunferência*, duas duplas realizaram 1 teste, duas duplas realizaram 2 testes e oito duplas realizaram mais de 2 testes entre o inicial e o final. No conceito 7, *Circunferência: Posições Relativas*, duas duplas realizaram 1 teste, duas duplas realizaram 2 testes e seis duplas necessitaram realizar mais de 2 testes para atingir o rendimento satisfatório.

Considera-se que os resultados observados são os esperados, pois estes estudantes estavam estudando a temática pela primeira vez, e, naturalmente os alunos possuem ritmos diferenciados para a aprendizagem. O importante é que as duplas conseguiram avançar nos estudos, realizando os problemas propostos, com maior ou menor dificuldade, envolvendo-se em atividades com diferentes registros semióticos, exigindo dos estudantes pesquisa, concentração e um nível cognitivo maior na realização das atividades, o que não é comum em um planejamento tradicional, onde o professor apresenta exemplos e explica como fazer, exigindo um nível cognitivo menor na realização dos exercícios propostos.

Salienta-se, que para realização dos testes os alunos podiam consultar o material de estudos, no entanto, as questões lançadas pelo SIENA possuíam um tempo para sua realização. Assim, os alunos ao final de cada teste tinham acesso ao resultado do mesmo, visualizando as questões que não acertaram e podiam retornar aos estudos acessando os conceitos que não assimilaram e estudá-los o quanto achassem necessário para a realização de novos testes no SIENA.

A tabela 2 apresenta os resultados do desempenho que as duplas de alunos da turma 302 obtiveram no estudo, no teste inicial e teste final em cada conceito do grafo mencionado.

Tabela 2

Desempenho das duplas da turma 302 nos conceitos do grafo de Geometria Analítica

D	Conceito 1			Conceito 2			Conceito 3			Conceito 4			Conceito 5			Conceito 6			Conceito 7		
	E	TI	TF	E	TI	TF	E	TI	TF	E	TI	TF	E	TI	TF	E	TI	TF	E	TI	TF
d1	0,68	0,380	0,968	0,6	0,1	0,428	0,4	0,024	NF	0,7	0,380	0,968	0,73	0,595	0,710	0,35	0,003	0,261	NF	0,3	0,545
d2	0,65	0,167	0,928	0,7	0,532	0,983	0,37	0,205	NF	0,65	0,784	-	0,72	0,3	0,922	0,31	0,777	-	0,45	0,192	NF
d3	0,61	0,167	0,924	0,6	0,146	0,747	0,3	0,035	NF	0,55	0,482	0,851	0,66	0,982	-	0,25	0,007	0,932	0,3	0,015	0,974
d4	0,65	0,813	-	0,8	0,554	0,974	0,4	0,033	0,745	0,6	0,168	0,950	0,8	0,035	0,992	0,4	0,183	0,911	0,5	0,064	0,889
d5	0,75	0,986	-	0,83	0,205	0,983	0,5	0,205	0,982	0,7	0,167	0,974	0,8	0,570	0,984	0,4	0,3	0,933	0,7	0,941	-
d6	0,98	0,431	0,973	0,99	0,167	1,0	0,5	0,146	0,379	0,8	0,982	-	0,8	0,3	0,894	0,5	0,764	-	NF	NF	-
d7	0,7	0,254	0,732	0,6	0,922	-	0,4	0,327	NF	0,76	0,205	0,744	0,8	0,3	0,914	0,4	0,017	0,993	0,3	0,107	NF
d8	0,78	0,280	1,0	0,7	0,6	-	0,65	0,028	0,890	0,7	0,028	0,994	0,64	0,523	0,908	0,4	0,048	0,896	0,31	0,010	0,927
d9	0,95	0,167	0,999	0,8	0,039	0,999	0,6	0,031	0,997	0,78	0,998	-	0,75	0,146	0,967	0,35	0,496	0,992	0,2	0,005	0,961
d10	0,7	0,205	0,962	0,75	0,990	-	0,7	0,4	NF	0,77	0,898	-	0,57	0,035	0,3	0,4	0,3	0,992	0,35	0,3	0,646
d11	0,85	0,985	-	0,72	NF	-	0,35	0,370	NF	0,76	0,193	0,666	0,8	0,438	0,646	0,45	0,028	0,613	NF	0,335	NF
d12	0,98	0,595	0,998	0,88	0,998	-	0,6	0,997	-	0,95	0,492	0,998	0,81	0,993	-	0,75	0,990	-	0,45	0,994	-
d13	0,9	0,118	0,6	0,95	0,3	0,982	NF	0,01	NF	0,8	0,028	0,950	0,83	0,3	0,876	0,36	0,3	0,766	0,35	0,409	0,917
d14	0,95	0,982	-	0,95	0,996	NF	0,4	NF	-	0,92	0,75	-	NF	0,438	NF	0,3	NF	-	NF	0,485	NF
d15	0,82	0,202	1,0	0,62	0,276	0,482	0,4	0,004	NF	0,86	0,217	0,993	0,85	0,017	0,991	0,35	0,003	0,010	0,47	0,3	0,3

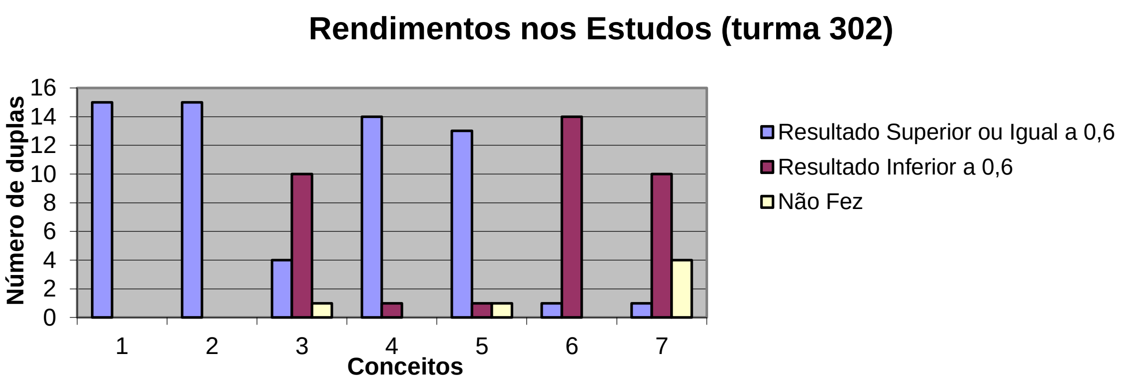
Legenda:
Conceito 1- Sistema Cartesiano Ortogonal
Conceito 2- Equação da Reta
Conceito 3- Coeficientes (Reta)
Conceito 4- Posições Relativas (Reta)
Conceito 5- Ângulo formado por 2 Retas, Distância entre Ponto e Reta e Área de uma Região Triangular
Conceito 6- Equação da Circunferência
Conceito 7 – Circunferência: Posições Relativas

D- Dupla
E- Estudo
TI- Teste Inicial
TF- Teste Final
NF- Não Fez

Fonte: Banco de dados do Sistema de Estudos do AVA e banco de dados do SIENA.

A seguir, ilustra-se, na figura 89, o gráfico com os resultados do desempenho das duplas de alunos da turma 302 no estudo, para cada conceito do grafo com o tema Geometria Analítica, conforme as notas fornecidas pelos bancos de dados do Sistema de Estudos apresentados na tabela 2.

Figura 89 - Gráfico do desempenho das duplas de alunos da turma 302 no estudo em cada conceito do grafo



Legenda:
Conceito 1- Sistema Cartesiano ortogonal
Conceito 2- Equação da Reta
Conceito 3- Coeficientes (Reta)
Conceito 4- Posições Relativas (Reta)
Conceito 5- Ângulo formado por 2 Retas, Distância entre Ponto e Reta e Área de uma Região Triangular
Conceito 6- Equação da Circunferência
Conceito 7 – Circunferência: Posições Relativas

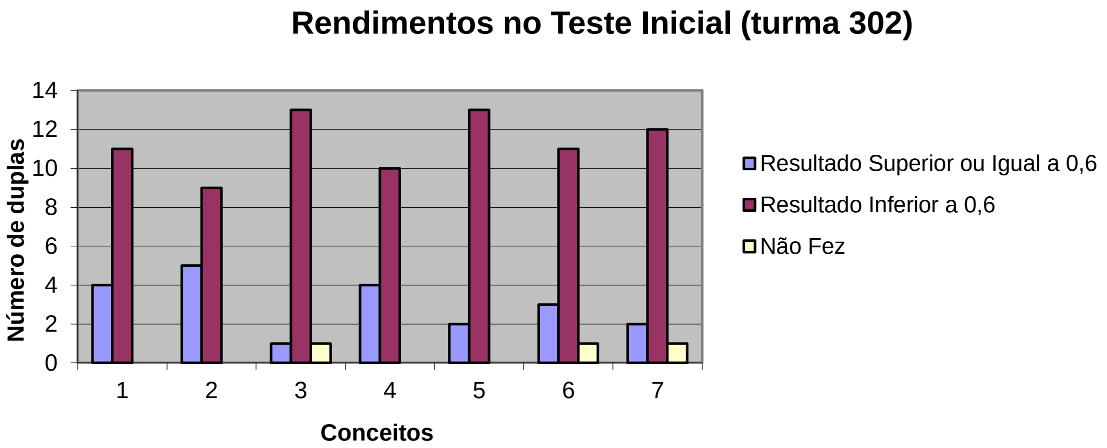
Fonte: Banco de dados do Sistema de Estudos do AVA.

Observa-se que no estudo, conforme o gráfico da figura 89, os conceitos 3, 6 e 7 denominados, respectivamente, como *Coeficientes* (Reta), *Equação da Circunferência* e *Circunferência: Posições Relativas*, um maior número de duplas da turma 302, composta por quinze duplas, apresentaram um rendimento inferior a 0,6. No conceito 3, dez das quatorze duplas que responderam as questões do estudo obtiveram desempenho inferior a 0,6 e uma dupla não respondeu as questões do estudo. No conceito 6, quatorze das quinze duplas obtiveram resultados abaixo de 0,6 e no conceito 7 das onze duplas que responderam as questões do estudo, dez obtiveram desempenho abaixo de 0,6, sendo que quatro duplas não responderam as questões de estudo deste conceito, porque optaram por realizar o estudo e ir diretamente para os testes adaptativos do SIENA.

Nos demais conceitos, os quais são respectivos aos conteúdos da Reta, observa-se que a maior parte das duplas, da turma 302, obteve rendimento igual ou superior a 0,6 no estudo, sendo que no conceito 1, denominado *Sistema Cartesiano Ortogonal*, e conceito 2 denominado *Equação da Reta*, todas as quinze duplas realizaram as questões do estudo e todas obtiveram rendimento superior a 0,6. E nos conceitos 4 e 5, respectivamente, denominados de *Posições Relativas* (Reta) e *Ângulo formado por 2 Retas, Distância entre Ponto e Reta e Área de uma Região Triangular*, apenas uma dupla obteve rendimento inferior a 0,6, observa-se que no conceito 5 uma dupla não respondeu as questões do estudo deste conceito.

Na figura 90, o gráfico com os resultados do desempenho das duplas de alunos da turma 302 no teste inicial, para cada conceito do grafo com o tema Geometria Analítica, conforme as notas fornecidas pelos bancos de dados do Sistema de Estudos apresentados na tabela 2.

Figura 90 - Gráfico do desempenho das duplas de alunos da turma 302 no teste inicial em cada conceito do grafo



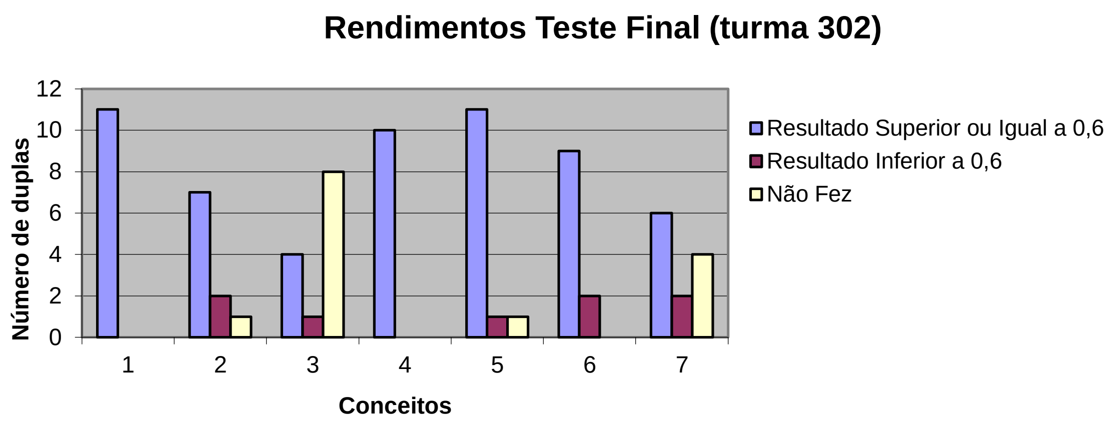
Legenda:
Conceito 1- Sistema Cartesiano ortogonal
Conceito 2- Equação da Reta
Conceito 3- Coeficientes (Reta)
Conceito 4- Posições Relativas (Reta)
Conceito 5- Ângulo formado por 2 Retas, Distância entre Ponto e Reta e Área de uma Região Triangular
Conceito 6- Equação da Circunferência
Conceito 7 – Circunferência: Posições Relativas

Fonte: Banco de dados do Sistema SIENA.

No teste inicial, realizado no sistema SIENA, de acordo com a figura 90, a maior parte das duplas, da turma 302, obteve rendimento inferior a 0,6. Observou-se que as dificuldades, nesse primeiro teste, estão relacionadas aos conceitos 3 e 5, respectivamente, denominados como *Coeficientes* (Reta) e *Ângulo formado por 2 Retas, Distância entre Ponto e Reta e Área de uma Região Triangular*. Nesses dois conceitos, treze das quinze duplas obtiveram rendimento inferior a 0,6, sendo que no conceito 3 uma dupla não respondeu as questões de estudo.

Na figura 91, o gráfico com os resultados do desempenho das duplas de alunos da turma 302 no teste final, para cada conceito do grafo com o tema Geometria Analítica, conforme as notas fornecidas pelos bancos de dados do Sistema de Estudos apresentados na tabela 2.

Figura 91 - Gráfico do desempenho das duplas de alunos da turma 302 no teste final em cada conceito do grafo



Legenda:
Conceito 1- Sistema Cartesiano ortogonal
Conceito 2- Equação da Reta
Conceito 3- Coeficientes (Reta)
Conceito 4- Posições Relativas (Reta)
Conceito 5- Ângulo formado por 2 Retas, Distância entre Ponto e Reta e Área de uma RegiãoTriangular
Conceito 6- Equação da Circunferência
Conceito 7 – Circunferência: Posições Relativas

Fonte: Banco de dados do Sistema SIENA.

No teste final, realizado no SIENA, de acordo com o gráfico da figura 91, observa-se que a maior das duplas da turma 302 que realizaram mais de um teste, atingiram desempenho igual ou superior a 0,6 nos conceitos estudados. No conceito 1, *Sistema Cartesiano Ortogonal*, todos as onze duplas que realizaram outros testes obtiveram rendimento igual ou superior a 0,6. No conceito 2, *Equação da Reta*, duas das nove duplas que realizaram novos testes, não atingiram o rendimento satisfatório. No conceito 3, *Coeficientes* (Reta), das cinco duplas que realizaram novos teste, apenas uma não atingiu o desempenho considerado satisfatório. No entanto, neste conceito ressalta-se que oito duplas que necessitavam realizar novos testes para atingir tal rendimento não os realizaram. No conceito 4, *Posições Relativas*, todas as dez duplas realizaram novos testes e atingiram rendimento igual ou superior a 0,6. No conceito 5, *Ângulo formado por 2 Retas, Distância entre Ponto e Reta e Área de uma Região Triangular*, observou-se que das doze duplas que realizaram novos testes, apenas uma não obteve rendimento satisfatório. No conceito 6, *Equação da Circunferência*, das onze duplas que realizaram novos testes, duas não atingiram o rendimento satisfatório. E, no conceito 7 *Circunferência: Posições Relativas*, das oito duplas que realizaram outros testes, duas não obtiveram rendimento satisfatório, ressaltando-se que neste conceito quatro duplas não realizaram novos testes, objetivando atingir um rendimento igual ou superior a 0,6.

Entre o teste inicial e o teste final observou-se que no conceito 1, duas duplas necessitaram realizar 1 teste para atingir o rendimento satisfatório, quatro duplas realizaram 2 testes e três duplas acima de 2 testes. No conceito 2, três duplas realizaram um teste entre o inicial e o final para buscar atingir rendimento satisfatório, duas duplas realizaram 2 testes e duas duplas necessitaram mais de 2 testes. No conceito 3 uma dupla realizou um teste entre o inicial e o final e 3 duplas realizaram 3 testes . No conceito 4 três duplas realizaram 1 teste entre o inicial e o final, duas duplas realizaram 2 testes e quatro duplas realizaram mais de 2 testes. No conceito 5 três duplas realizaram 1 teste entre o inicial e o final, quatro duplas realizaram 2 testes e uma dupla mais de 2 testes. No conceito 6 cinco duplas realizaram 1 teste entre o inicial e o final, duas duplas realizaram 2 testes e três duplas mais de 2 testes. E, no conceito 7 duas duplas realizaram um teste entre o inicial e o final, duas duplas 2 testes e duas duplas mais de 2 testes buscando atingir o rendimento satisfatório.

Como mencionado anteriormente estes resultados estão de acordo com os esperados e seguem a tendência da turma 301, pois esta turma de estudantes, também estava estudando a temática Geometria Analítica pela primeira vez, e o sistema de estudos foi a metodologia utilizada para introduzir os conceitos através de problemas geradores, onde, para responder as atividades os estudantes poderiam consultar os recursos didáticos disponibilizados na sequência didática.

A realização dos estudos e dos testes, na turma 302, ocorreu da mesma forma como na turma 301, ou seja, as duplas durante o estudo tiveram a atenção da professora titular e da pesquisadora no esclarecimento de dúvidas. E nos testes as duplas podiam consultar o material de estudos, respeitando o tempo de realização das questões dos testes. E, ainda, ao final de cada teste tinham acesso ao resultado dos mesmos, visualizando as questões que não acertaram e podiam retornar aos estudos acessando os conceitos que não assimilaram e estudá-los o quanto achassem necessário para a realização de novos testes no SIENA.

Observou-se, nas duas turmas investigadas, que duplas que não responderam as questões do estudo, conforme apresentado nos gráficos das figuras 85 e 88, optaram por explorar os recursos didáticos desse material de estudo e realizar, em seguida, os testes no SIENA. Estas duplas apresentaram um rendimento menor no teste inicial comparada a outras duplas que realizaram as questões do estudo e necessitaram estudar novamente os conceitos para realizar novos testes.

Ressalta-se, ainda, que as duplas tinham acesso ao estudo de qualquer um dos sete conceitos, ou seja, caso o aluno estivesse realizando o estudo ou teste do conceito 4, Posições

Relativas (Reta) e o aluno necessitasse rever o estudo do conceito 3, Coeficientes (Reta), o qual continha conhecimentos necessários para as duplas avançarem no conceito 4, elas podiam acessar os recursos direcionados ao conceito 3. Por isso, observou-se que houve duplas que mesmo não obtendo rendimento satisfatório, como por exemplo, no conceito 3, o obtiveram no conceito 4, pois realizavam este, com estudos independente de responder as questões ou realizar os testes do SIENA. E assim, também ocorreram nos demais conceitos investigados. O intuito era que as duplas tivessem autonomia para gerenciar o seu aprendizado, de acordo com os conceitos propostos, segundo o grafo dos conteúdos de Reta e Circunferência, contando com a mediação da professora pesquisadora e da professora titular.

Realizando um comparativo entre as duas turmas pesquisadas, observa-se que tanto as duplas da turma 301 quanto da turma 302 apresentaram dificuldades em relação ao desempenho nos estudos nos conceitos 6 e 7, denominados respectivamente como *Equação da Circunferência* e *Circunferência: Posições Relativas*, sendo que a turma 302 apresentou, também, dificuldades no conceito 3, *Coeficientes* (Reta). Nos demais conceitos as duas turmas obtiveram, na maior parte das duplas, como já contabilizado, desempenho satisfatório.

Com relação ao teste inicial, observa-se que a turma 301, das duplas que realizaram o teste, apresentaram maior dificuldade nos conceitos 4 e 6, respectivamente denominados de *Posições Relativas* (Reta) e *Equação da Circunferência*. Nota-se uma diferença em relação ao desempenho nos estudos, em que esta turma não havia apresentado um grau de dificuldade maior no conceito 4 e veio apresentar no teste inicial.

Na turma 302, em relação ao teste inicial, observou-se que as duplas que realizaram o teste apresentaram menor rendimento nos conceitos 3 e 5, denominados, respectivamente, de *Coeficientes* (Reta) e *Ângulo formado por 2 Retas, Distância entre Ponto e Reta e Área de uma Região Triangular*. Nota-se, também, nesta turma, que diferentemente do resultado no desempenho do estudo, as duplas apresentaram maior dificuldade no teste inicial em conceitos em que não haviam apresentado no estudo.

Acredita-se que isso se deve ao fato, como já mencionado anteriormente, que nos testes adaptativos realizados pelas duplas no SIENA, o sistema lançava diferentes questões com níveis de dificuldade fácil, médio e difícil procurando articular diferentes registros semióticos e também, porque nos testes adaptativos não contavam com as explicações complementares da professora titular da turma e da pesquisadora. Ou seja, se a dupla, no teste adaptativo, acertasse uma questão com grau de dificuldade difícil, a qual era uma questão considerada uma conversão não-congruente, a próxima questão matinha este nível de dificuldade, ou caso a dupla errasse a questão, o grau de dificuldade da próxima questão seria de um grau menor, mas a sua nota iria diminuindo com os erros, conforme cálculo realizado pelo SIENA.

No teste final observa-se avanço no desempenho das duas turmas em todos os conceitos estudados. A maior parte das duplas que realizaram novos testes, como apresentado nos gráficos das figuras 88 e 91, obtiveram rendimento igual ou superior a 0,6, resultado considerado satisfatório. Embora na turma 301 uma dupla não atingiu o rendimento satisfatório no conceito 2 e, na turma 302 uma dupla não atingiu esse rendimento nos conceitos 3 e 5 e duas duplas nos conceitos 2, 6 e 7. Desta forma infere-se que as duplas apresentaram determinadas habilidades matemáticas que sugerem o aprendizado dos conteúdos estudados, mas outros recursos didáticos seriam necessários, para que os alunos que não atingiram o rendimento satisfatório demonstrassem as habilidades requeridas para a compreensão dos mesmos. Estas habilidades estão apresentadas e discutidas a seguir.

As habilidades matemáticas foram sendo demonstradas à medida que os estudantes realizavam os estudos para resolução dos problemas geradores e testes adaptativos, pois se observou que dificuldades apresentadas inicialmente foram sendo trabalhadas neste processo. Por exemplo, nas duas primeiras aulas, alunos das duas turmas investigadas questionavam conceitos básicos, como o que representava a abscissa e a ordenada em um par ordenado, quadrantes do plano cartesiano. Essas nomenclaturas na língua natural referente a temática estudada, embora já tenham visto no conteúdo de funções no primeiro ano do Ensino Médio, não era usual dos alunos. Eles tratavam apenas como “x” do Ponto e “y” do Ponto, o que destaca a importância de usar corretamente a linguagem natural da Matemática. Entre outros conceitos que os alunos também apresentavam dúvidas, os mesmos recebiam indicações da professora pesquisadora sobre o caminho a seguir no material de estudos para estudá-los.

No conceito 1, *Sistema Cartesiano Ortogonal*, observou-se que, no geral, as duplas de alunos investigadas apresentaram as habilidades matemáticas denominadas H1, H7, H8, H9, H10 e H11, segundo a figura 85, que correspondem ao conteúdo abordado neste conceito. Embora, também, houve alunos que tiveram dificuldades, cometeram erros e não apresentaram todas estas habilidades.

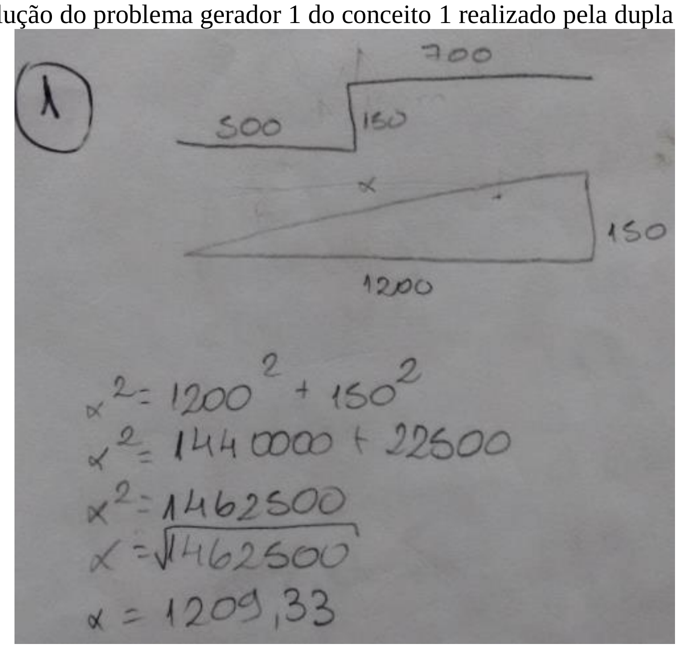
No problema gerador 1 do estudo deste conceito, por exemplo, são requeridas as habilidades H1, H7 e H9. Trata-se de um problema, já ilustrado nas figuras 38 e 39, sobre um teleférico que poderia ser implementado na cidade de Canoas, ou seja, fazia parte da realidade dos estudantes. Os mesmos deveriam, além de identificar e interpretar os dados, buscar uma estratégia de resolução utilizando conhecimentos algébricos e geométricos sobre a representação de pontos, distância entre dois pontos e, além disso, fazer uso de conceitos estudados em conteúdos anteriores. Neste caso, conceitos referentes as relações trigonométricas no triângulo retângulo e associá-las a como encontrar a menor distância entre os dois pontos representados pela estação de trem São Luís e a Universidade Luterana do Brasil, em Canoas.

Os alunos que resolveram corretamente este problema apresentaram as habilidades H1, H7 e H9, pois utilizaram os conhecimentos requeridos, interpretando os dados, descobrindo as distâncias entre os pontos iniciais e finais das ruas assinaladas no mapa, fazendo uso de um tratamento no registro figural, como registro intermediário, traçando a estratégia de resolução, expressando corretamente o registro simbólico (representação algébrica) a partir da figura e realizando os tratamentos nas representações algébricas e numéricas necessários.

O uso de um registro intermediário, para melhor compreensão de um problema, refere-se ao que Duval (2003) chama de complementaridade de registros frente às limitações representativas específicas a cada registro, e como exemplo, menciona que uma linguagem não oferece as mesmas possibilidades de representações que uma figura ou diagrama. Salienta-se que outro registro intermediário muito utilizado pelos alunos nas resoluções de outras questões dos estudos e testes adaptativos foi o registro gráfico.

Desta forma, estes alunos resolveram um problema que exige uma conversão não-congruente que parte da língua natural e do registro figural para o registro simbólico (representação numérica). A figura 92 ilustra esta resolução.

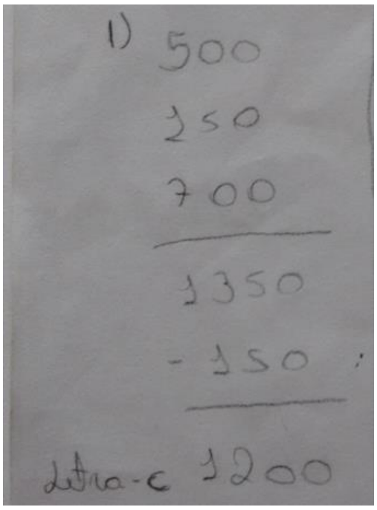
Figura 92- Resolução do problema gerador 1 do conceito 1 realizado pela dupla d12302



Fonte: Registros escritos das duplas de alunos investigados.

Já os alunos que não demonstraram estas habilidades cometeram erros de interpretação e compreensão do problema, não associaram a estratégia de resolução a partir da relação do Teorema de Pitágoras, realizando apenas a soma e subtração das distâncias das ruas assinaladas no mapa do problema. A figura 93 ilustra esta resolução.

Figura 93 - Erros na resolução do problema gerador 1 do conceito 1 realizado pela dupla d12301



Fonte: Registros escritos das duplas de alunos investigados.

Na resolução dos demais problemas geradores e dos testes adaptativos observou-se também, as demais habilidades matemáticas mencionadas neste conceito para as duplas que obtiveram rendimento satisfatório. Desta forma, os alunos que apresentaram estas habilidades utilizaram e mobilizaram as diferentes representações semióticas, ou seja, a língua natural, representação algébrica, numérica, geométrica e gráfica, realizaram os tratamentos requeridos por tais representações e resolveram problemas que abordavam congruência e não congruência nas atividades de conversão nos diferentes sentidos dos registros semióticos que abrangem estas representações.

Outro exemplo, é o problema 8 deste conceito, conforme ilustrado na figura 41, em que os alunos devem expressar a relação entre os pontos dados *A(0,1), B(1,0)* e *C(1-q, q)*, demonstrando a habilidade 11. Para isto devem compreender os conceitos de pontos equidistantes e pontos colineares e realizar os tratamentos implicados nestes conceitos. As duplas que resolveram corretamente optaram por utilizar a resolução pelo determinante da matriz formada com estes pontos e houve duplas que utilizaram, ainda, o registro gráfico como registro intermediário para visualizar os pontos em uma Reta. Houve duplas que representaram apenas graficamente alguns pontos no plano cartesiano, atribuindo valores para “*q*”. No entanto, salienta-se que atribuir valores para "*q*" e representá-los graficamente não garante que todos os pontos seriam sempre colineares a não ser que encontrassem a equação da Reta formada por estes pontos e que fosse a mesma equação formada pelos pontos *A* e *B*, mas, de qualquer forma, foi um registro utilizado como forma de visualizar e deduzir a resposta a partir do conceito de colinearidade, que ficou claro que entenderam.

Observou-se que nenhuma dupla utilizou a fórmula de colinearidade entre três pontos, bem possível pelo fato de ser necessário tratamentos algébricos utilizando frações, o que se observou em outras atividades que requeriam tais tratamentos, necessitando um custo cognitivo maior para os alunos investigados. A figura 94 ilustra esta resolução.

Figura 94 - Resolução do problema gerador 8 do conceito 1 realizado pela dupla d12302

Estão relacionadas por pontos colineares, pois seus pontos estão dispostos de forma que podemos formar uma linha. Para resolver essa questão foi substituído q por números reais, mas a outra forma de fazer é fazer uma matriz que o resultado dará igual zero e será uma reta. A parte mais difícil do processo é somente a interpretação da questão.

Fonte: Banco de dados do Sistema de Estudos do AVA.

Os alunos que responderam incorretamente, afirmando que são pontos equidistantes cometeram erros de interpretação, demonstrando desconhecer o conceito de equidistância entre pontos, pois o tratamento realizado por estas duplas foi apenas substituir as coordenadas dos pontos *A* e *B* no valor de "*q*" no Ponto *C* e verificando que havia correspondência de valores interpretaram serem equidistantes. A figura 95 ilustra esta resolução.

Figura 95 - Resolução incorreta do problema gerador 8 do conceito 1 realizado pela dupla d15302

São pontos equidistantes porquê quando colocamos os valores de A e B em a verificamos que o ponto C obtém valores de X e contrários. Ex: A(1,0) C(0,1); B(0,1) C(1,0);	y

Fonte: Banco de dados do Sistema de estudos do AVA.

Os registros escritos mostraram que os erros cometidos pelos alunos que não demonstraram as habilidades mencionadas na resolução dos problemas geradores dos estudos e questões do teste inicial, especificamente as duplas que apresentaram rendimento inferior a 0,6, estão relacionados a interpretação dos enunciados da questão na língua natural e abstração dos conceitos estudados, o que segundo Duval (2004) são dificuldades relacionadas a mobilização e articulação de registros de representação. Estas dificuldades foram mais recorrentes em questões difíceis, as quais eram consideradas questões com conversões não congruentes entre diferentes registros semióticos.

Apresentaram, também, dificuldades na ordem das coordenadas de um Ponto em relação a língua natural (qual era a abscissa e qual a ordenada), ou seja, escrever um Ponto na sua forma numérica a partir da sua representação na língua natural, dificuldades na localização dos quadrantes e os sinais que as coordenadas dos pontos situados em cada quadrante possuem, dificuldades nos tratamentos envolvendo as relações com o Teorema de Pitágoras, nos tratamentos envolvendo cálculos para encontrar a distância entre pontos, nos tratamentos para resolução do determinante de uma matriz para verificação de colinearidade entre pontos, e nos tratamentos requeridos nas representações numéricas e algébricas de frações.

Ainda, dificuldades com relação aos conceitos de triângulo isósceles, equilátero e escaleno, ou seja, questões em que deveriam calcular a distância entre os vértices de um triângulo e determinar seu tipo a partir desta relação, os alunos resolviam, muitas vezes, os tratamentos do cálculo da distância entre pontos, mas não sabiam o conceito dos tipos de triângulo para finalizar a questão corretamente. E, com relação as conversões solicitas nas questões, as dificuldades observadas encontravam-se naquelas em que envolviam o registro em língua natural, o que é compreensível, ao passo que se tratam de dois registros de natureza distintas, sendo a língua natural um registro multifuncional o que conforme Duval (2003) torna a conversão mais difícil, principalmente, quando o outro registro envolvido for um registro monofuncional, como no caso dos registros simbólicos (representação numérica e algébrica) e registro gráfico.

Na figura 96 apresenta-se o teste inicial de uma dupla de alunos que apresentou rendimento insatisfatório, ou seja, inferior a 0,6, neste conceito 1, ilustrando alguns dos erros e dificuldades mencionadas nas questões resolvidas incorretamente.

Figura 96 - Teste adaptativo inicial do conceito 1 realizado pela dupla d1302

#	Respuesta	Respuesta correcta	Tiempo(antes de que se acabe)	Pregunta	Dificultad / Adivinanza	Puntos antes	Puntos después
0	1	false	329	13- Sabendo que P (2m + 1, -3m – 4) pertence ao terceiro quadrante, quais os possíveis valores reais de m. (Fonte: Dante, 2010, p. 51)	0.35 / 0.25	0.30000	0.16667
1	0	true	170	1- Encontre o gráfico que apresenta ponto(s) representado(s) no segundo quadrante.	0.3 / 0.25	0.16667	0.35897
2	2	true	151	2- Em qual dos gráficos os pontos são colineares?	0.35 / 0.25	0.35897	0.59283
3	3	true	290	5- Segundo a imagem do gráfico, podemos dizer que:	0.45 / 0.25	0.59283	0.76209
4	2	false	561	22- Qual o valor de p em função de q sabendo que os pontos A de abscissa zero e ordenada um, B de abscissa um e ordenadazero e C de abscissa p e ordenada q são colineares?	0.45 / 0.25	0.76209	0.65776
5	0	false	433	3- Segundo o gráfico, podemos afirmar que:	0.35 / 0.25	0.65776	0.47282
6	3	true	153	6- Segundo o gráfico, podemos afirmar que:	0.3 / 0.25	0.47282	0.71521
7	2	false	434	4- Segundo o gráfico, podemos afirmar que:	0.35 / 0.25	0.71521	0.53958
8	2	false	190	7- A representação correta dos pontos A(1,3), B(-2,-1), C(3,1) e D(0, -3) e E(-1,0) está de acordo com o gráfico:	0.3 / 0.25	0.53958	0.31916
9	3	true	205	8- O gráfico apresenta a representação dos seguintes pontos:	0.3 / 0.25	0.31916	0.56758
10		false		11- A reta que passa pelos pontos de abscissas -1 e 2 e ordenadas 3 e 3 respectivamente, está de acordo com o gráfico:	0.35 / 0.25	0.56758	0.37986

Fonte: Banco de dados do Sistema SIENA.

No teste final, as duplas de alunos investigadas, que não tinham apresentado rendimento satisfatório, apresentaram uma melhora considerável em relação as dificuldades e erros cometidos inicialmente para este conceito 1, *Sistema Cartesiano Ortogonal*. Como exemplo, desta evolução, apresenta-se na figura 97 o teste final da dupla d1302.

Figura 97 - Teste adaptativo final do conceito 1 realizado pela dupla d1302

#	Respuesta	Respuesta correcta	Tiempo(antes de que se acabe)	Pregunta	Dificultad / Adivinanza	Puntos antes	Puntos después
0	1	false	122	8- O gráfico apresenta a representação dos seguintes pontos:	0.3 / 0.25	0.30000	0.14634
1	0	true	174	1- Encontre o gráfico que apresenta ponto(s) representado(s) no segundo quadrante.	0.3 / 0.25	0.14634	0.32432
2	2	true	349	2- Em qual dos gráficos os pontos são colineares?	0.35 / 0.25	0.32432	0.55516
3	3	true	592	5- Segundo a imagem do gráfico, podemos dizer que:	0.45 / 0.25	0.55516	0.73302
4	3	false	543	22- Qual o valor de p em função de q sabendo que os pontos A de abscissa zero e ordenada um, B de abscissa um e ordenadazero e C de abscissa p e ordenada q são colineares?	0.45 / 0.25	0.73302	0.62227
5	3	true	543	3- Segundo o gráfico, podemos afirmar que:	0.35 / 0.25	0.62227	0.81072
6	2	true	640	23- O que podemos afirmar sobre os pontos A(0,1), B(1,0) e C(1-q, q) sendo q ε IR.	0.45 / 0.25	0.81072	0.90406
7	1	false	602	24- Considerando um ponto P cuja distância ao ponto A de abscissa 5 e ordenada 3 é sempre duas vezes a distância de P ao ponto B de abscissa -4 e ordenada -2, qual expressão algébrica que deve ser satisfeita com as coordenadas do ponto P? (Fonte: adaptação de Dante, 2010, p.53).	0.45 / 0.25	0.90406	0.84971
8	3	false	197	4- Segundo o gráfico, podemos afirmar que:	0.35 / 0.25	0.84971	0.72515
9	3	true	155	6- Segundo o gráfico, podemos afirmar que:	0.3 / 0.25	0.72515	0.88078
10	1	true	175	11- A reta que passa pelos pontos de abscissas -1 e 2 e ordenadas 3 e 3 respectivamente, está de acordo com o gráfico:	0.35 / 0.25	0.88078	0.95051
11	1	false	653	25- A figura que representa um triângulo cuja a mediana relativa ao lado ¯BC mede 10 u.c. é:	0.45 / 0.25	0.95051	0.92016
12	0	true	389	12- Um ponto P(a,2) é equidistante dos pontos A(3,1) e B(2, 4). Qual o valor da abscissa do ponto P. (Fonte: Dante, 2010,p.52).	0.35 / 0.25	0.92016	0.96770

Fonte: Banco de dados do Sistema SIENA.

Verifica-se no teste final do conceito *Sistema Cartesiano Ortogonal* que todas as duplas investigadas obtiveram rendimento satisfatório, embora ainda apresentando alguns dos erros mencionados nos estudos e teste inicial. É possível visualizar isto nos gráficos dos rendimentos das 2 turmas investigadas, apresentados nas figuras 88 e 91, e nos registros escritos das duplas nas resoluções das questões dos testes adaptativos. Assim, é possível inferir que esta melhora significativa no desempenho das duplas é resultado das habilidades requeridas para este conceito, já mencionadas anteriormente, que foram sendo não só demonstradas, mas também adquiridas pelos alunos ao longo do processo de ensino e aprendizagem segundo a metodologia proposta.

No conceito 2, *Equação da Reta*, as duplas que obtiveram desempenho satisfatório nos estudos e testes adaptativos apresentaram as habilidades matemáticas H1, H2, H4, H6, H8, H9, H12 e H14, que correspondem ao conteúdo abordado neste conceito.

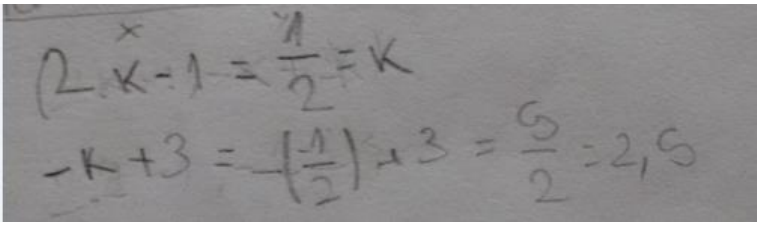
As habilidades H1, H4, H8 e H13 foram demonstradas pelos alunos que resolveram corretamente o problema gerador 5, por exemplo, ilustrado anteriormente na figura 45.

Este problema apresenta um Ponto na forma algébrica e as duplas deveriam responder a representação gráfica da Reta que corresponde as características deste Ponto. É atividade de conversão não-congruente da representação algébrica para a representação gráfica, pois o Ponto é dado na forma paramétrica da Reta, o que dificulta a interpretação dos alunos. Observou-se que das duplas que responderam corretamente poucas demonstraram interpretar o problema, a fim de adotar o procedimento que consiste em identificar o coeficiente *b* da Reta formada por este Ponto e que intersecta o eixo *Y'Y*, estabelecendo o valor zero para a coordenada *x* do Ponto dado. Houve duplas que resolveram corretamente adotando a estratégia de atribuir valores para a variável *k* e as coordenadas *x* e *y* do Ponto expresso algebricamente.

No entanto, como já preconizado no capítulo anterior, a resolução a partir da interpretação das variáveis visuais é mais produtiva para a aprendizagem do aluno, pois demonstra que os mesmos compreenderam os conceitos estudados e as implicações destes nos registros semióticos requeridos pelo problema, sendo capazes de transitar entres estes registros, além distinguir o objeto matemático da sua representação.

A figura 98 apresenta a resolução desenvolvida pela dupla d1301 que realizou as interpretações significativas para este problema.

Figura 98 - Resolução do problema gerador 5 do conceito 2 realizado pela dupla d1301



Fonte: Registros escritos das duplas de alunos investigados.

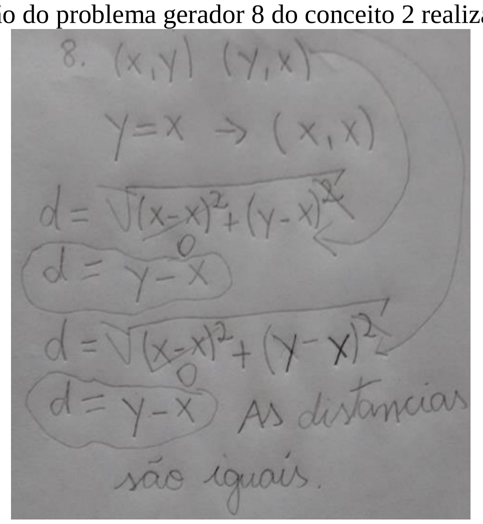
Outro exemplo, em que as duplas que obtiveram bom desempenho apresentam as habilidades H1, H2, H8 e H9, encontra-se na resolução do problema gerador 8 deste conceito, apresentado na figura 43. Neste problema foi apresentada a representação algébrica de pontos e Reta e a representação gráfica destes, a qual é um *applet* construído no *software* Geogebra, que o aluno pode manipular os movimentos dos pontos P_1 e P_2 para ajudá-lo a compreender a relação destes com a Reta $y=x$. Desta forma, para compreensão e resolução do problema gerador, inicialmente o aluno deveria demonstrar interpretação e visualização de que os pontos A(x,y) e B(y,x) tem representações numéricas e gráficas conforme os pontos P_1 e P_2, apresentados no gráfico do problema, segundo os movimentos destes quando o aluno os manipula, por meio do recurso do Geogebra chamado controle deslizante, possibilitado pelo *applet*. Além de interpretar estes dados relevantes do problema para buscar estratégias de resolução (H1), as duplas deveriam interpretar padrões, como sugere a habilidade H2, no sentido de uma Reta com representação algébrica *y= x* contém pontos com valores de coordenadas iguais, podendo assim expressar qualquer Ponto desta Reta na representação algébrica como *(x, x)* ou *(a, a)*, por exemplo. E, a partir desta determinação, aplicar o conceito de distância entre pontos para os pontos desta Reta e os pontos *A(x,y)* e *B(y,x)*, concluindo que a distância entre qualquer Ponto da Reta e os pontos *A* e *B* será sempre a mesma, ou seja, os pontos *A* e *B* são equidistantes a Reta *y=x*.

Desta forma as duplas, ao resolverem este problema corretamente, realizam uma conversão congruente do registro simbólico na representação algébrica e registro gráfico dos pontos e da Reta, dados no enunciado deste problema, para o registro língua natural.

Observou-se que poucas duplas conseguiram resolver este problema por meios destas interpretações. Em geral, as duplas resolveram tomando pontos com coordenadas numéricas visíveis através da manipulação do *applet* e aplicaram tratamentos na representação numérica para encontrar a distância entre estes pontos, verificando que este valor era o mesmo e concluindo que se tratavam de pontos equidistantes à Reta dada. No entanto, este procedimento garante esta afirmação apenas para os pontos tomados, o que garante concluir a propriedade de equidistância para quaisquer pontos é o tratamento na representação algébrica aplicado ao conceito de distância entre pontos.

A figura 99 apresenta a resolução de uma dupla que interpretou corretamente os dados do problema demonstrando as habilidades mencionadas.

Figura 99 - Resolução do problema gerador 8 do conceito 2 realizado pela dupla d3301



Fonte: Registros escritos das duplas de alunos investigados.

O problema gerador 11 do conceito 2, ilustrado na figura 44, apresenta uma conversão no sentido inverso em relação ao problema 8. As duplas que obtiveram bom desempenho apresentaram as habilidades matemáticas H1, H2, H4, H6, H8 e H9,

Neste problema é disponibilizado o mesmo *applet* do problema anterior, mas refere-se a uma conversão não congruente no sentido inverso dos registros semióticos, ou seja, a partir da representação gráfica e da manipulação do *applet* as duplas deveriam identificar a representação algébrica dos pontos *P1* e *P2* e a representação algébrica da Reta, além de expressarem em língua natural a relação matemática entre estes dois pontos e Reta. Os alunos deveriam reconhecer as propriedades relacionadas as modificações nos valores das coordenadas dos pontos, verificando que estes possuem coordenadas inversas e independentes de seus valores numéricos são equidistantes a Reta que tem representação algébrica $y = x$.

Observou-se que as duplas que resolveram corretamente o problema 8, também conseguiram resolver este demonstrando interpretar, a partir da manipulação com o *applet* que os pontos *A* e *B* são representados com coordenadas inversas independente de sua localização no gráfico e que são equidistantes a Reta de representação algébrica $y = x$. Assim, estas duplas foram capazes de realizar as conversões em sentidos opostos dos registros semióticos simbólico e gráfico abordados, como no caso destes problemas.

Observou-se ainda, na resolução deste problema que os erros cometidos pelas duplas, apenas encontraram a representação da Reta com o Ponto na forma paramétrica *P(a,a)*, o que está correto, no entanto não identificaram algebricamente as coordenadas respectivas aos pontos *A* e *B* e a não expressaram a relação existente entre estes e a Reta representada graficamente.

As dificuldades apresentadas pelos alunos que não obtiveram bom desempenho, principalmente no teste adaptativo inicial, neste conceito, estão relacionadas a dificuldades de interpretação e compreensão dos enunciados, capacidades de abstração dos conceitos estudados e visualização das modificações nas variáveis visuais correspondentes as representações algébricas e gráficas da Reta, dificuldades em realizar tratamentos em sistemas lineares para conversão do registro gráfico para o simbólico na representação algébrica, em tratamentos na representações numéricas e algébricas para determinar distância entre pontos, erros de sinais ao realizar tratamentos para passar da equação geral para a equação reduzida da Reta. No entanto, observa-se uma melhora significativa para as duplas que realizaram novamente os estudos e mais testes adaptativos, mesmo não demonstrando todas as habilidades requeridas por este conceito. As figuras 100 e 101 apresentam, respectivamente, os testes adaptativos inicial e final de uma das duplas investigadas.

Figura 100- Teste adaptativo inicial do conceito 2 realizado pela dupla d12301

#	Respuesta	Respuesta correcta	Tiempo(antes de que se acabe)	Pregunta	Dificultad / Adivinanza	Puntos antes	Puntos después
0	1	true	858	55- Com base no gráfico a seguir, podemos afirmar que:	0.45 / 0.25	0.30000	0.48529
1	1	false	864	51- Sobre a equação da reta – kx – 2y + 4 = 0, onde k é um número real não negativo podemos afirmar que quando k varia em valores crescentes:	0.45 / 0.25	0.48529	0.36131
2	1	true	266	41 – Temos neste gráfico a reta "r" e o segmento de reta ¯AB. logo:	0.35 / 0.25	0.36131	0.59528
3	0	true	853	52 – Dado os pontos A(x,y), B(y,x) e a reta y = x, então podemos dizer que:	0.45 / 0.25	0.59528	0.76392
4	3	false	742	53 – O caminho do ponto que passa pelos pontos "A" de abscissa k e ordenada t e "B" de abscissa t e ordenada k corresponde a reta:	0.45 / 0.25	0.76392	0.66004
5	2	true	568	42 – A reta que passa nos pontos "A" de abscissa 2 e ordenada 3 e "B" de abscissa 6 e ordenada 5 é:	0.35 / 0.25	0.66004	0.83466
6	0	true	886	54 – A equação que representa a reta que passa na origem do plano cartesiano é:	0.45 / 0.25	0.83466	0.91739
7	2	false	861	56 – o gráfico que passa pelo ponto P(20,42) é:	0.45 / 0.25	0.91739	0.86951
8	1	false	572	43 - O caminho percorrido pelo ponto (2k-1, –k+3) pode ser descrito pela reta:	0.35 / 0.25	0.86951	0.75666
9	0	false	167	31 – O ponto de ordenada -1 e abscissa 2 pertence a reta:	0.3 / 0.25	0.75666	0.55433
10	2	true	170	32- Encontre o gráfico que apresenta uma reta que passa no segundo quadrante:	0.3 / 0.25	0.55433	0.77692
11	1	false	510	44 – O gráfico que representa a equação 2x + y + 1 = 0 é:	0.35 / 0.25	0.77692	0.61909
12	1	false	142	33 – A equação na forma reduzida da equação geral 2x+y-10=0 é: (tratamento)	0.3 / 0.25	0.61909	0.39398
13	2	false	161	34 – A equação na forma geral da equação reduzida -3x+8=y é:	0.3 / 0.25	0.39398	0.20638
14	1	true	159	35 – O ponto que pertence à equação –x+6=y é:	0.3 / 0.25	0.20638	0.42134
15	0	true	497	45 – Dados os pontos A(1,3) e B(2,5), então a reta que passa por esses pontos é:	0.35 / 0.25	0.42134	0.65435
16	2	false	991	57- O gráfico que representa a reta de equação paramétrica é:	0.45 / 0.25	0.65435	0.53181
17	0	false	392	46 – O gráfico da reta de equação 2x-y+3=0 é:	0.35 / 0.25	0.53181	0.34643
18	3	false	155	36 – Uma reta é determinada por:	0.3 / 0.25	0.34643	0.17494
19	1	false	245	38 – A equação geral que corresponde a equação	0.3 / 0.25	0.17494	0.07818
20	0	false	255	37 - Para uma reta cujo gráfico é paralelo ao eixo das abscissas podemos dizer que:	0.3 / 0.25	0.07818	0.03281

Fonte: Banco de dados do Sistema SIENA.

Figura 101 - Teste adaptativo final do conceito 2 realizado pela dupla d12301

#	Respuesta	Respuesta correcta	Tiempo(antes de que se acabe)	Pregunta	Dificultad / Adivinanza	Puntos antes	Puntos después
0	0	true	862	54 – A equação que representa a reta que passa na origem do plano cartesiano é:	0.45 / 0.25	0.30000	0.48529
1	3	false	847	51- Sobre a equação da reta – kx – 2y + 4 = 0, onde k é um número real não negativo podemos afirmar que quando k varia em valores crescentes:	0.45 / 0.25	0.48529	0.36131
2	1	true	219	41 – Temos neste gráfico a reta "r" e o segmento de reta ¯AB. logo:	0.35 / 0.25	0.36131	0.59528
3	1	false	842	52 – Dado os pontos A(x,y), B(y,x) e a reta y = x, então podemos dizer que:	0.45 / 0.25	0.59528	0.46880
4	2	true	492	42 – A reta que passa nos pontos "A" de abscissa 2 e ordenada 3 e "B" de abscissa 6 e ordenada 5 é:	0.35 / 0.25	0.46880	0.69647
5	3	false	750	53 – O caminho do ponto que passa pelos pontos "A" de abscissa k e ordenada t e "B" de abscissa t e ordenada k corresponde a reta:	0.45 / 0.25	0.69647	0.57925
6	1	false	532	43 - O caminho percorrido pelo ponto (2k-1, –k+3) pode ser descrito pela reta:	0.35 / 0.25	0.57925	0.39116
7	1	false	99	31 – O ponto de ordenada -1 e abscissa 2 pertence a reta:	0.3 / 0.25	0.39116	0.20445
8	2	true	134	32- Encontre o gráfico que apresenta uma reta que passa no segundo quadrante:	0.3 / 0.25	0.20445	0.41846
9	0	false	466	44 – O gráfico que representa a equação 2x + y + 1 = 0 é:	0.35 / 0.25	0.41846	0.25138
10	0	false	144	33 – A equação na forma reduzida da equação geral 2x+y-10=0 é: (tratamento)	0.3 / 0.25	0.25138	0.11841
11	1	false	87	34 – A equação na forma geral da equação reduzida -3x+8=y é:	0.3 / 0.25	0.11841	0.05099
12	0	false	136	35 – O ponto que pertence à equação –x+6=y é:	0.3 / 0.25	0.05099	0.02104
13	3	false	173	36 – Uma reta é determinada por:	0.3 / 0.25	0.02104	0.00852

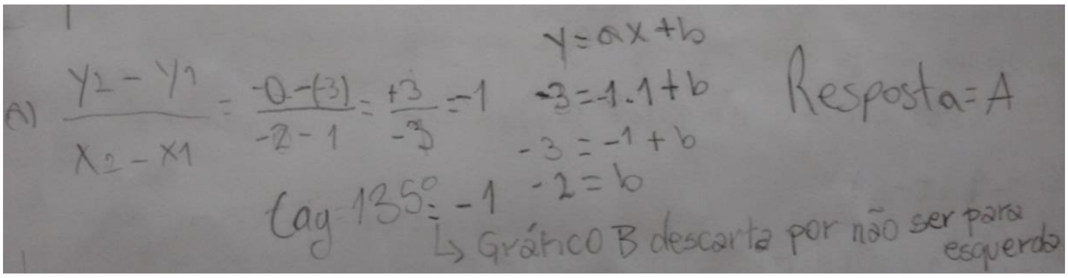
Fonte: Banco de dados do Sistema SIENA.

No conceito 3, *Coeficientes* (Reta), observou-se que, em geral, as duplas de alunos que obtiveram bom desempenho apresentaram as habilidades matemáticas H1, H2, H3, H4, H5, H6, H7, H8, H12, H13, H14, que correspondem ao conteúdo abordado neste conceito, como também aos conteúdos dos conceitos anteriores, os quais são necessários para a aprendizagem do conceito seguinte, conforme o grafo da temática Geometria Analítica. Salienta-se que houve duplas que tiveram dificuldades, cometeram erros, ou ainda não realizaram os estudos e os testes deste conceito não apresentando todas estas habilidades.

Um exemplo em que as duplas apresentaram as habilidades H2, H8 e H13 está na resolução do problema gerador 8 deste conceito, conforme apresentado na figura 50. Este problema refere-se a uma conversão não congruente da língua natural para a representação gráfica, necessitando usar o registro simbólico como intermediário (representação algébrica), e realizar tratamentos neste registro que são necessários para identificar o coeficiente linear da Reta representada graficamente. As duplas deveriam responder qual o gráfico representava a Reta com as características dadas no enunciado, que indicava o ângulo de inclinação e Ponto contido na mesma. Para a resolução do problema o aluno deveria calcular a tangente do ângulo demonstrando conhecer o conceito de coeficiente angular e que sua representação numérica na equação da Reta corresponde ao valor da tangente deste ângulo, expressando a representação algébrica da Reta ($y= ax + b$) realizando tratamentos neste registro, que consiste em substituir o valor correspondente do coeficiente angular encontrado e o Ponto dado para encontrar o coeficiente linear e assim a representação gráfica que corresponde a Reta com estas características.

No caso da habilidade 2 (H2) foram encontradas anotações nos registros escritos de 11 duplas que comprovam que os alunos reconheciam padrões no registro gráfico, ou seja, ao encontrar o valor do coeficiente angular e verificar que este era negativo, os alunos descartaram o gráfico B como opção de resposta, pois identificaram que a inclinação da Reta neste caso deveria ser para a esquerda. Outras duplas a partir do ângulo de 135 graus, também descartaram o gráfico B, mencionando que nesta opção de resposta a Reta formava um ângulo menor que 90 graus com o eixo *X'X*. Estas relações estão de acordo com o que Duval (2004) menciona sobre as unidades significantes no registro gráfico, correspondentes as modificações das variáveis visuais e valores escalares que implicam em respectivas modificações nas expressões algébricas e as modificações na figura e vice-versa. A figura 102 apresenta a resolução correta deste problema, demostrando as habilidades mencionadas, realizada pela dupla d12302.

Figura 102 - Resolução do problema gerador 8 do conceito 3 realizado pela dupla d12302



Fonte: Registros escritos das duplas de alunos investigados.

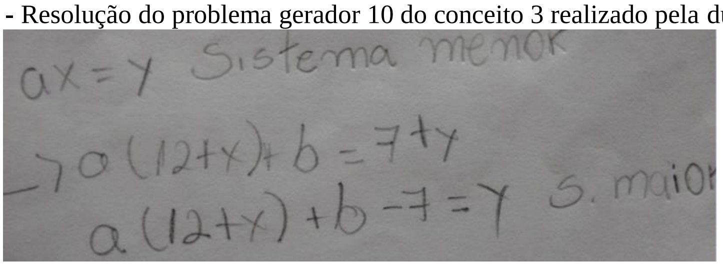
Outro exemplo em que as duplas que apresentaram bom desempenho e demonstraram as habilidades H1, H5, H8, H12 e H13 está no problema gerador 10 deste conceito, como já apresentado nas figuras 51 e 52. Este problema apresenta um braço robótico dinâmico, que simulava movimentos com mudanças nas coordenadas dos pontos e nos coeficientes angular e linear de acordo com um sistema de referência (plano cartesiano) um maior e outro menor. Com esta simulação os alunos deveriam encontrar o modelo da equação da Reta ligada ao braço robótico em relação aos dois sistemas e as coordenadas do Ponto *E*, explicando sua estratégia de resolução. É considerado uma conversão não congruente apresentada na representação gráfica e, para resolução, os alunos deveriam encontrar o modelo matemático correspondente à equação na representação algébrica e utilizar a língua natural para explicar o procedimento adotado na resolução para encontrar as coordenadas do Ponto *E*.

Para resolução os alunos deveriam identificar que ao movimentar o sistema cartesiano menor em cima do sistema cartesiano maior, qualquer Ponto deste novo sistema menor deve ser representado descontando os valores das coordenadas *x* e *y* do sistema maior. Além disso, deveriam notar que ao movimentar a Reta que passa pelo Ponto *E* este segue a inclinação da Reta, ou seja, o Ponto sempre irá pertencer a Reta, mesmo mudando sua inclinação (seu coeficiente angular) e mantendo seu coeficiente linear, pois em relação ao sistema menor sempre passa na origem do plano cartesiano. Assim, as coordenadas do Ponto *E* não são fixas, pois este Ponto tem comportamento próprio e depende da inclinação da Reta que o contém e, ainda em relação ao sistema maior depende da movimentação do sistema menor em relação a este.

Nas respostas consideradas corretas as duplas não escreveram sua estratégia de resolução, mas observou-se que a equação definida por estas duplas para o sistema menor foi $y = ax$, o que é possível dizer que estes alunos interpretaram que a Reta do sistema menor passa na origem do plano cartesiano, mas é possível mudar a sua inclinação, não definindo um valor numérico para o coeficiente angular, o que também interfere nas coordenadas do Ponto E. Para o sistema maior, 70% das 26 duplas tomaram como referência um Ponto qualquer, algumas escreveram o Ponto (12,7), definindo uma equação para o sistema maior a partir deste: $y+7 = a\ (x + 12)$. Isto significa que os alunos concluíram que as coordenadas do Ponto E seriam definidas a partir da inclinação da Reta do sistema menor e ainda somadas as coordenadas deste sistema com o Ponto tomado como referência do sistema maior.

No entanto, salienta-se que apenas 30% das duplas que resolveram corretamente abstraíram que ao movimentar o sistema menor em cima do maior o que está sendo modificado é apenas abscissa do Ponto do sistema maior e não a ordenada deste sistema, pois o movimento é apenas na horizontal e não na vertical, definindo o modelo da equação da Reta que contém o Ponto *E* segundo a movimentação desta Reta no sistema de referência maior em relação ao sistema menor: $y+7 = a\ (x + A)$. A figura 103 apresenta a resolução de uma dupla que identificou corretamente a equação do sistema menor, mas ao escrever o modelo que representa o movimento das coordenadas do Ponto *E* relacionado ao sistema maior não definiu o coeficiente linear como zero e escreveu a equação da Reta tomando apenas o Ponto (12,7) do sistema maior para fazer tal relação.

Figura 103 - Resolução do problema gerador 10 do conceito 3 realizado pela dupla d8302.



Fonte: Registros escritos das duplas de alunos investigados.

Nos testes adaptativos observou-se que as duplas que não obtiveram desempenho satisfatório, não apresentando todas as habilidades requeridas para este conceito. Apresentaram erros como: interpretação do enunciado, compreensão de definições conceitos referentes aos coeficientes de uma Reta, erros de tratamentos para determinar a equação reduzida da Reta, erros de sinais para determinar o coeficiente angular a partir de dois pontos, nos tratamentos para resolução de sistemas lineares para encontrar os coeficientes e confusão entre o valor do coeficiente angular e o ângulo que este representa. As maiores dificuldades foram localizadas em questões consideradas difíceis que requeriam conversões não congruentes nas representações língua natural para a representação algébrica e no sentido da representação gráfica para a representação algébrica. A figura 104 apresenta um teste adaptativo com rendimento insatisfatório que apresenta as dificuldades mencionadas.

Figura 104 - Teste adaptativo inicial do conceito 3 realizado pela dupla d6301

#	Respuesta	Respuesta correcta	Tiempo(antes de que se acabe)	Pregunta	Dificultad / Adivinanza	Puntos antes	Puntos después
0	1	true	113	64 - Uma reta com representação algébrica x – 2y + 1 = 0 possui coeficiente angular igual a:	0.3 / 0.25	0.30000	0.54545
1	2	false	415	71 – O gráfico cujo ângulo pode ser encontrado na equação x + y/2 – 3 = 0 é:	0.35 / 0.25	0.54545	0.35897
2	1	true	148	61 – As equações são formadas pelos coeficientes angular e linear. Assim, qual delas está relacionada com o eixo das ordenadas?	0.3 / 0.25	0.35897	0.61059
3	1	true	147	78 – Pode-se dizer sobre uma reta que possui os pontos cujas abscissas são iguais as ordenadas que:	0.35 / 0.25	0.61059	0.80303
4	0	true	847	81– O gráfico que apresenta um ângulo de 135 o com o eixo das abscissas é:	0.45 / 0.25	0.80303	0.89969
5	2	false	672	90 – Com base no gráfico , sendo duas retas passando por AB e BC, podemos afirmar que:	0.45 / 0.25	0.89969	0.84329
6	0	true	256	72 – O gráfico que possui em sua representação algébrica o coeficiente angular positivo e coeficiente linear negativo é:	0.35 / 0.25	0.84329	0.93330
7	2	false	861	86 - Dado os pontos A com abscissa s e ordenada t, B com abscissa t e ordenada s, então podemos dizer que a reta que passa por esses pontos possui equação com coeficiente angular e linear respectivamente:	0.45 / 0.25	0.93330	0.89356
8	0	true	538	79– com base no gráfico pode-se afirmar que:	0.35 / 0.25	0.89356	0.95619
9	1	true	825	84 – A representação algébrica do gráfico é dada por:	0.45 / 0.25	0.95619	0.97960
10	3	false	861	82- Com base no gráfico os coeficientes angulares são:	0.45 / 0.25	0.97960	0.96646
11	1	false	581	77 – Uma reta que passa no ponto P(-1,1) e forma 45 graus de inclinação com o eixo das abscissas possui equação igual a:	0.35 / 0.25	0.96646	0.93077
12	1	false	473	70 – considerando uma reta cuja representação algébrica possui um coeficiente linear igual a zero, podemos afirmar que:	0.3 / 0.25	0.93077	0.84321
13	0	false	274	68 – a reta do gráfico possui coeficiente linear igual o da equação:	0.3 / 0.25	0.84321	0.68267
14	0	false	467	67 – Podemos afirmar sobre a reta de coeficiente angular igual a 2 e coeficiente linear igual a 1 que:	0.3 / 0.25	0.68267	0.46251
15	2	false	216	63 - Uma reta que possui coeficiente angular igual a 1 formará um ângulo com o eixo das abscissas igual a:	0.3 / 0.25	0.46251	0.25606
16	1	false	233	69 – Sabendo que a reta passa pelos pontos A(0,1) e B(-1,-1), pode-se afirmar que:	0.3 / 0.25	0.25606	0.12102
17	1	true	214	66 – Com base na equação –2x + y – 3 = 0 podemos afirmar que:	0.3 / 0.25	0.12102	0.27824
18	2	true	466	76 - Dados os pontos A de abscissa 2 e ordenada -5 e B de abscissa -1 e ordenada 1, então a reta que passa por esses pontos tem coeficiente angular e linear respectivamente iguais a:	0.35 / 0.25	0.27824	0.50058
19	0	true	804	88 – Se for mudado o sinal do coeficiente angular da reta	0.45 / 0.25	0.50058	0.68800
20	1	false	830	89 – Os coeficientes angular e linear da reta representada no gráfico respectivamente são:	0.45 / 0.25	0.68800	0.56953
21	3	false	749	80 – com base no gráfico , se uma reta passar por dois pontos deste gráfico, em quais ela terá coeficiente angular igual a 1.	0.35 / 0.25	0.56953	0.38173
22	2	true	204	62 – Uma reta que possui coeficiente angular igual a -1 formará um ângulo com o eixo das abscissas igual a:	0.3 / 0.25	0.38173	0.63354
23	2	true	796	75 – Uma reta com o mesmo coeficiente angular da reta do gráfico (pergunta) é:	0.35 / 0.25	0.63354	0.81801
24	1	false	894	83 – A representação algébrica do gráfico pode ser vista em:	0.45 / 0.25	0.81801	0.72950
25	2	false	292	74 - Sobre um gráfico da reta cujos pontos tem sempre a mesma ordenada, podemos afirmar que a representação algébrica desta reta possui a seguinte característica:	0.35 / 0.25	0.72950	0.55724
26	1	false	297	65 – A equação que representa uma reta com a mesma inclinação da reta de equação 2x + 2y – 1 = 0 é:	0.3 / 0.25	0.55724	0.33485
27	2	false	698	73 – Qual das retas pode representar graficamente a equação kx – 2y + 4 = 0, para algum valor real de "k":	0.35 / 0.25	0.33485	0.19024
28	1	false	996	87 – A reta formada pelos pontos P(q, 1+2q) possui coeficiente angular conforme o gráfico:	0.45 / 0.25	0.19024	0.12354
29	3	true	895	85 – A partir da representação algébrica – kx+2y+3 = 0, quando "k" varia por valores crescentes positivos podemos afirmar que:	0.45 / 0.25	0.12354	0.23670

Fonte: Banco de dados do Sistema SIENA.

No teste final, as duplas de alunos que não tiveram apresentado rendimento satisfatório e voltaram a realizar os estudos deste conceito, apresentaram uma melhora significativa em relação as dificuldades e erros cometidos inicialmente para este conceito 3, *Coeficientes*, apresentando as habilidades requeridas neste conceito. Como exemplo, desta evolução, apresenta-se na figura 105 o teste final da dupla d6301, em que mostra questões que foram resolvidas incorretamente no teste inicial estando com resoluções corretas neste teste final.

Figura 105 - Teste adaptativo final do conceito 3 realizado pela dupla d6301

#	Respuesta	Respuesta correcta	Tiempo(antes de que se acabe)	Pregunta	Dificultad / Adivinanza	Puntos antes	Puntos después
0	3	true	895	85 – A partir da representação algébrica – kx+2y+3 = 0, quando "k" varia por valores crescentes positivos podemos afirmar que:	0.45 / 0.25	0.30000	0.48529
1	0	true	906	87 – A reta formada pelos pontos P(q, 1+2q) possui coeficiente angular conforme o gráfico:	0.45 / 0.25	0.48529	0.67472
2	0	true	848	88 – Se for mudado o sinal do coeficiente angular da reta	0.45 / 0.25	0.67472	0.82025
3	2	false	833	84 – A representação algébrica do gráfico é dada por:	0.45 / 0.25	0.82025	0.73248
4	2	true	751	75 – Uma reta com o mesmo coeficiente angular da reta do gráfico (pergunta) é:	0.35 / 0.25	0.73248	0.87683
5	0	false	871	90 – Com base no gráfico , sendo duas retas passando por AB e BC, podemos afirmar que:	0.45 / 0.25	0.87683	0.81030
6	2	true	732	80 – com base no gráfico , se uma reta passar por dois pontos deste gráfico, em quais ela terá coeficiente angular igual a 1.	0.35 / 0.25	0.81030	0.91739
7	2	true	851	89 – Os coeficientes angular e linear da reta representada no gráfico respectivamente são:	0.45 / 0.25	0.91739	0.96068
8	0	true	860	81– O gráfico que apresenta um ângulo de 135 o com o eixo das abscissas é:	0.45 / 0.25	0.96068	0.98174
9	0	false	870	83 – A representação algébrica do gráfico pode ser vista em:	0.45 / 0.25	0.98174	0.96993
10	2	true	553	76 - Dados os pontos A de abscissa 2 e ordenada -5 e B de abscissa -1 e ordenada 1, então a reta que passa por esses pontos tem coeficiente angular e linear respectivamente iguais a:	0.35 / 0.25	0.96993	0.98821
11	2	false	822	82- Com base no gráfico os coeficientes angulares são:	0.45 / 0.25	0.98821	0.98051
12	3	false	443	71 – O gráfico cujo ângulo pode ser encontrado na equação x + y/2 – 3 = 0 é:	0.35 / 0.25	0.98051	0.95915
13	1	true	279	66 – Com base na equação –2x + y – 3 = 0 podemos afirmar que:	0.3 / 0.25	0.95915	0.98502
14	3	true	553	77 – Uma reta que passa no ponto P(-1,1) e forma 45 graus de inclinação com o eixo das abscissas possui equação igual a:	0.35 / 0.25	0.98502	0.99418
15	3	false	846	86 - Dado os pontos A com abscissa s e ordenada t, B com abscissa t e ordenada s, então podemos dizer que a reta que passa por esses pontos possui equação com coeficiente angular e linear respectivamente:	0.45 / 0.25	0.99418	0.99034
16	0	true	661	73 – Qual das retas pode representar graficamente a equação kx – 2y + 4 = 0, para algum valor real de "k":	0.35 / 0.25	0.99034	0.99626
17		false		79– com base no gráfico pode-se afirmar que:	0.35 / 0.25	0.99626	0.99203

Fonte: Banco de dados do Sistema SIENA.

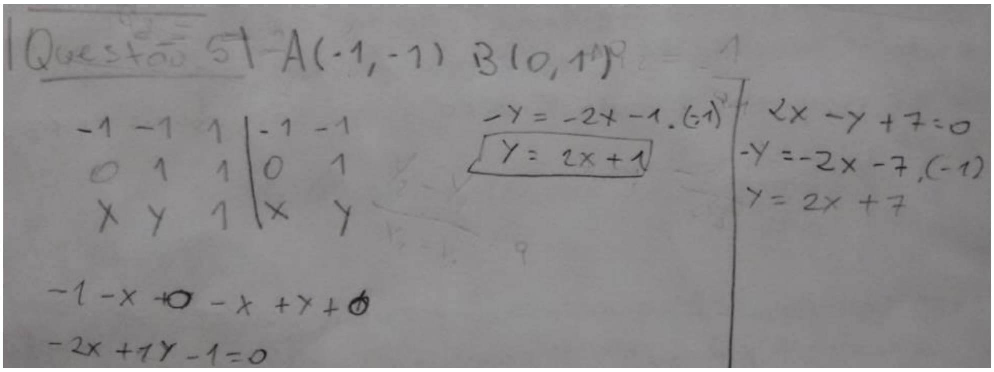
No conceito 4, *Posições Relativas*, observou-se que as duplas que obtiveram bom desempenho apresentaram as habilidades matemáticas H1, H2, H3, H4, H6, H7, H8, H10, H12, H13, H14 e H15, as quais são requeridas por este conceito de acordo com o conteúdo abordados no mesmo, como também dos conteúdos dos conceitos anteriores necessários para a realização das atividades deste conceito 4.

Um exemplo em que os alunos que apresentaram bom desempenho demonstraram as habilidades matemáticas H1, H2, H12, H13 e H14, encontra-se nas resoluções apresentadas no problema 5 deste conceito, ilustrado anteriormente na figura 54. Consiste em uma conversão não-congruente do registro gráfico para o registro simbólico na representação algébrica da Reta paralela à Reta representada graficamente. Para resolução deste problema as duplas deveriam observar as variáveis visuais no registro gráfico, como inclinação da Reta. Com esta interpretação as verificam que o valor numérico do coeficiente angular é positivo e aplicando as relações trigonométricas no triângulo retângulo (*tg = cateto oposto/ cateto adjacente*) encontra o valor do mesmo. Encontrado o coeficiente angular, as duplas deveriam demonstrar que conhecem o conceito de paralelismo, realizando um tratamento nas opções de resposta, ou seja, passando da equação geral para a reduzida da Reta, e identificando qual possui coeficiente angular como o mesmo valor numérico.

Outra forma de resolução seria encontrar a equação da Reta a partir de dois pontos dados, seja por sistemas lineares ou resolvendo o determinante da matriz, segundo os tratamentos nas representações numéricas e algébricas correspondentes. No entanto, as interpretações mencionadas no parágrafo anterior remetem a uma apreensão global dos conceitos estudados até o momento. Observou-se que apenas 5, das 34 duplas investigadas, realizaram sua resolução utilizando estas observações e interpretações. As demais duplas que resolveram corretamente este problema utilizaram sistemas lineares ou determinantes. Observou-se ainda, que houve duplas que realizaram os tratamentos necessários para expressar a equação representada no gráfico, mas não relacionaram o conceito de paralelismo para concluir a resolução.

A figura 106 apresenta a resolução de uma dupla que utilizou tratamentos com determinantes de matrizes para chegar a resposta correta.

Figura 106 - Resolução do problema gerador 5 do conceito 4 realizado pela dupla d9302

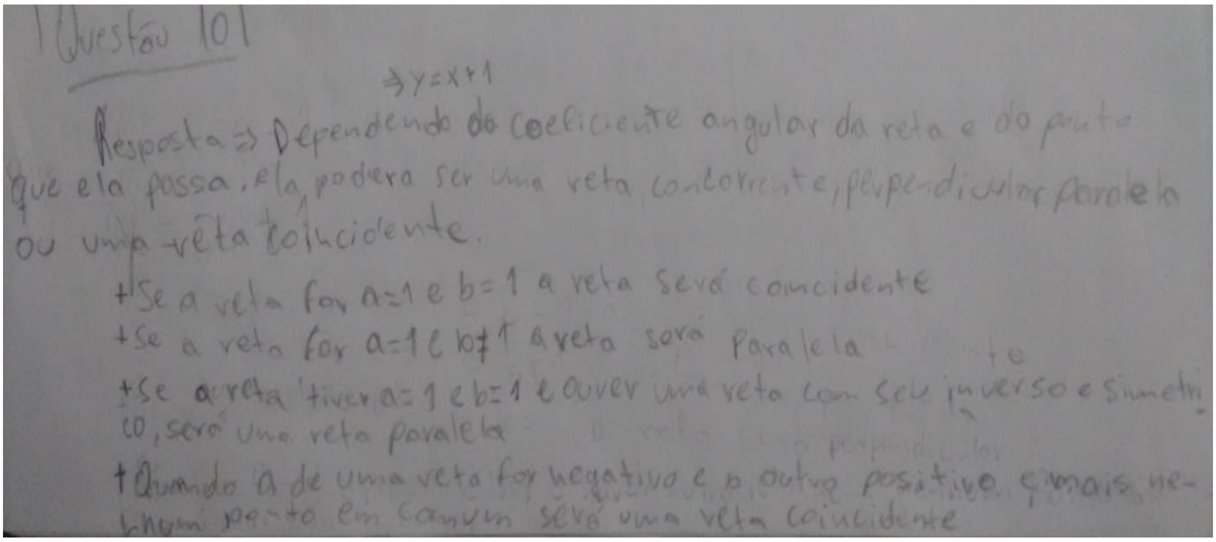


Fonte: Registros escritos das duplas de alunos investigados.

Outro exemplo, em que as duplas demonstraram as habilidades matemáticas H1, H2, H6, H8, H12 e H13, pode ser observado nas resoluções corretas do problema gerador 10 deste conceito, já apresentado na figura 55. Este problema consiste em conversão congruente do registro simbólico na representação algébrica para o registro língua natural, em que é dado um Ponto na forma paramétrica (representação algébrica) e as duplas deveriam determinar a posição relativa de outra Reta qualquer com a Reta formada pelas coordenadas deste Ponto. Desta forma os alunos deveriam reconhecer e expressar equação reduzida da Reta forma por este Ponto na forma paramétrica e relacionar utilizando esta representação algébrica desta Reta com os conceitos de retas coincidentes, perpendiculares, perpendiculares e concorrentes com os possíveis valores dos coeficientes angular e linear de outra Reta qualquer (interpretar padrões nestas representações semióticas) e expressar suas interpretações no registro língua natural.

Observou-se que esta questão foi resolvida corretamente por 28 duplas, demonstrando que estas fizeram as interpretações necessárias para a resolução desta questão. Entretanto, nos registros escritos foi possível observar duplas que atribuíram valores numéricos para o *x* Ponto *P(x, x+1)* para determinar a equação da Reta respectiva ao mesmo, não reconhecendo a sua representação paramétrica para determinar tal equação. A figura 107 ilustra a resolução correta descrita por uma dupla para este problema.

Figura 107 - Resolução do problema gerador 10 do conceito 4 realizado pela dupla d7301



1) Questão 10)

⇒ y=x+1

Resposta ⇒ Dependendo do coeficiente angular da reta e do ponto que ela possa, ela podera ser uma reta concorrente, perpendicular, paralela ou uma reta coincidente.

+Se a reta for a=1 e b=1 a reta será coincidente

+Se a reta for a=1 e b≠1 a reta será paralela

+Se a reta tiver a=1 e b=1 e ouver uma reta com seu inverso e simetrico, será uma reta paralela

+Quando a de uma reta for negativo e o outro positivo e mais nenhum ponto em comum será uma reta coincidente

Fonte: Registros escritos das duplas de alunos investigados.

Em relação aos erros e dificuldades observadas nas duplas que não apresentaram bom desempenho neste conceito, sobretudo nos testes adaptativos inicial, estas referem-se a dificuldade de interpretação e compreensão dos enunciados e dados relevantes, que deveriam ser observados nos registros semióticos em que a situação problema estava descrita, identificação dos coeficientes da Reta no registro gráfico e simbólico e os padrões que estes representam em posições relativas entre retas, identificar a existência de invariantes nos registros gráficos e simbólicos, como por exemplo, identificar que o coeficiente angular não varia em retas paralelas, erros de tratamentos nas resoluções de sistemas lineares e determinantes de matrizes, erros de sinal ao passar da equação geral para reduzida.

Já no teste adaptativo final as duplas que necessitaram realizar mais estudos neste conceito observou-se nas que apresentaram rendimentos satisfatórios, melhoras em relação a estas dificuldades. As figuras 108 e 109 apresentam, respectivamente, um teste inicial em que ilustra as dificuldades mencionadas em questões resolvidas incorretamente e um teste final em que aponta para a superação destas dificuldades.

Figura 108 - Teste adaptativo inicial do conceito 4 realizado pela dupla d10301

#	Respuesta	Respuesta correcta	Tiempo(antes de que se acabe)	Pregunta	Dificultad / Adivinanza	Puntos antes	Puntos después
0	1	false	279	101) Duas retas r e s têm coeficientes angulares iguais a A e B respectivamente. Para que elas sejam perpendiculares a relação verdadeira é:	0.35 / 0.25	0.30000	0.16667
1	1	true	205	92) A reta perpendicular a reta x = 4 é:	0.3 / 0.25	0.16667	0.35897
2	3	false	443	104) Dado o gráfico, então podemos dizer que:	0.35 / 0.25	0.35897	0.20719
3	1	false	559	98) A reta perpendicular à reta é:	0.3 / 0.25	0.20719	0.09464
4	2	false	574	99) A reta paralela à reta é :	0.3 / 0.25	0.09464	0.04014
5	0	false	430	97) Com relação as retas definidas como coincidentes e paralelas podemos afirmar que:	0.3 / 0.25	0.04014	0.01645
6	1	false	563	95) A representação algébrica de uma reta perpendicular à outra pode ser definida por:	0.3 / 0.25	0.01645	0.00665
7	1	true	230	91) O par de retas paralelas é:	0.3 / 0.25	0.00665	0.01839
8	2	true	916	111) Uma reta que passa na origem e é perpendicular a outra reta que passa nos pontos de abscissas três e zero e ordenadas zero e dois respectivamente tem pontos na forma:	0.45 / 0.25	0.01839	0.03958
9	1	false	886	115) De acordo com o gráfico:	0.45 / 0.25	0.03958	0.02413

Fonte: Banco de dados do Sistema SIENA.

Figura 109 - Teste adaptativo final do conceito 4 realizado pela dupla d10301

#	Respuesta	Respuesta correcta	Tiempo(antes de que se acabe)	Pregunta	Dificultad / Adivinanza	Puntos antes	Puntos después
0	2	true	575	107) O ponto de intersecção das retas do gráfico é:	0.35 / 0.25	0.30000	0.52703
1	3	true	937	113) Qual dos gráficos a seguir apresenta duas retas perpendiculares?	0.45 / 0.25	0.52703	0.71026
2	0	true	994	117) Sabendo que a reta s é perpendicular à reta r e a reta t é paralela à reta s, então a equação das retas "s" e "t" são respectivamente:	0.45 / 0.25	0.71026	0.84358
3	1	true	984	112) A equação da reta que intersecta um eixo coordenado em ordenada igual a -1 e é perpendicular à bissetriz do primeiro quadrante é:	0.45 / 0.25	0.84358	0.92227
4	1	true	959	114) Sendo duas retas concorrentes no ponto de abscissa -1 e ordenada 2 onde uma das retas é paralela ao eixo das abscissas então a outra que faz 45 graus com essa reta terá coeficiente angular igual a reta:	0.45 / 0.25	0.92227	0.96310
5	3	true	924	116) A reta que passa no ponto de intersecção das retas -2x-y+3=0 e x-y+3=0 e pelo ponto (-2,-1) é:	0.45 / 0.25	0.96310	0.98288
6	2	true	978	120) A posição relativa de duas retas, uma com pontos caracterizados por P(2t, t-3) e outra pela equação x – y+2 = 0 é:	0.45 / 0.25	0.98288	0.99215
7	0	true	995	119) O ângulo formado pela reta perpendicular a reta que passa pelos pontos do gráfico e pela origem do plano cartesiano é:	0.45 / 0.25	0.99215	0.99642
8	2	true	1005	118) A equação da reta que passa pelo ponto de encontro das retas e também pela origem do plano cartesiano do gráfico é:	0.45 / 0.25	0.99642	0.99837
9	2	true	698	111) Uma reta que passa na origem e é perpendicular a outra reta que passa nos pontos de abscissas três e zero e ordenadas zero e dois respectivamente tem pontos na forma:	0.45 / 0.25	0.99837	0.99926

Fonte: Banco de dados do Sistema SIENA.

No conceito 5, *Ângulo entre duas Retas, Distância entre Ponto e Reta e Área de uma*

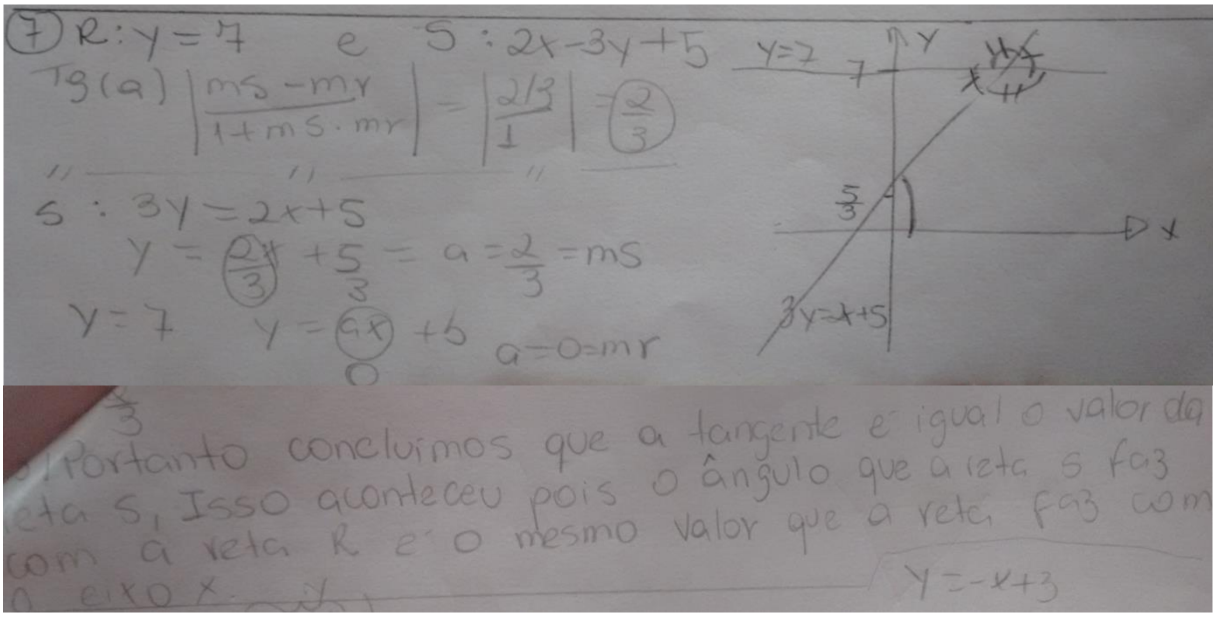
Região Triangular, de modo geral, observou-se que as duplas investigadas que obtiveram bom desempenho neste conceito, apresentaram as habilidades matemáticas H1, H2, H4, H8, H9, H12, H13, H14 e H16, as quais são requeridas para os conteúdos deste conceito.

Como exemplo, observou-se que as duplas que resolveram corretamente o problema gerador 7 deste conceito, segundo a figura 58 já apresentada, demonstraram as habilidades matemáticas H1, H2, H4, H8, H12, H13, H16. Este problema aborda uma conversão não congruente do registro gráfico para o registro língua natural, na qual o aluno deveria compreender que sendo a Reta $y = 7$ paralela ao eixo *X'X*, o coeficiente angular da Reta s é a tangente do ângulo entre as duas retas, já que o ângulo entre as duas retas e o ângulo formado pela Reta *s* e o eixo *X'X* é o mesmo. Para realizar tal conversão o aluno poderia necessitar do registro gráfico, como registro intermediário, para melhor visualização das modificações nas variáveis visuais envolvidas.

Nos registros escritos referentes à resolução deste problema observou-se que as duplas realizaram os tratamentos necessários para identificar o coeficiente angular e calcular a tangente do ângulo formado pelas duas retas dadas na representação algébrica. Interpretaram que o coeficiente angular da Reta *s* descrita pela equação $2x -3y + 5 = 0$, ou seja, o ângulo que esta Reta forma com o eixo *X'X* corresponde ao mesmo ângulo que esta forma com a Reta $y= 7$, pois reconheceram o padrão existente (H2) entre esta Reta e este eixo, ou seja, é uma Reta paralela a este eixo.

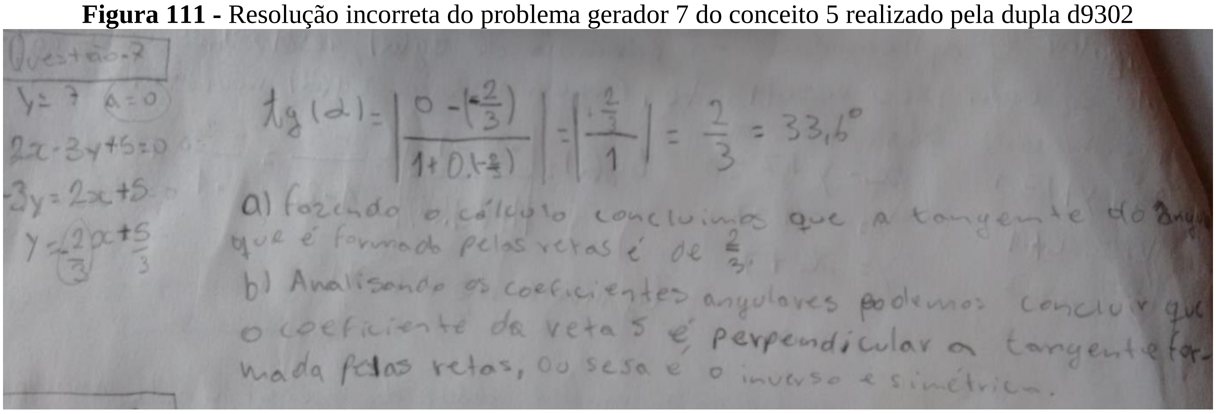
Observou-se que 14 duplas utilizaram o registro gráfico para visualizar este padrão e reconhecer a modificações nas variáveis visuais e a existência de invariantes (H4), ou seja, que uma Reta paralela não varia seu coeficiente angular, apenas o seu coeficiente linear, visível na intersecção da Reta com o eixo da ordenadas. Desta forma, expressaram na língua natural a conclusão de que o valor do coeficiente angular da Reta s é o mesmo valor da tangente dos ângulos forma com a Reta $y = 7$. Verificou-se que os erros cometidos neste problema ocorreram ao interpretar o coeficiente angular da Reta *s* como inverso multiplicativo e simétrico ao coeficiente formado pelas duas retas. As figuras 110 e 111 ilustram, respectivamente, uma resolução correta e outra incorreta, conforme mencionadas, desenvolvidas por duas das duplas investigadas.

Figura 110 - Resolução correta do problema gerador 7 do conceito 5 realizado pela dupla d15302



Fonte: Registros escritos das duplas de alunos investigados.

Figura 111 - Resolução incorreta do problema gerador 7 do conceito 5 realizado pela dupla d9302



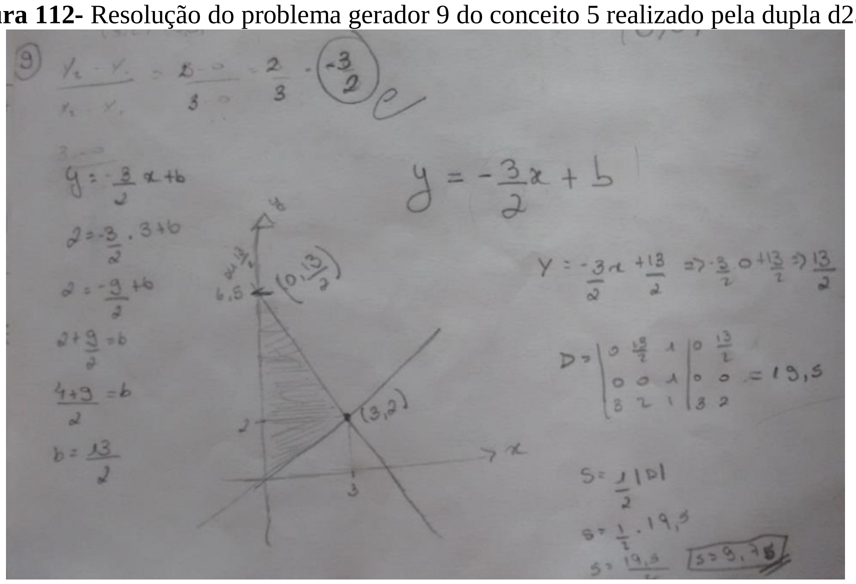
Fonte: Registros escritos das duplas de alunos investigados.

Nos registros escritos referente à resolução do problema 9 deste conceito, conforme apresentado na figura 60 anteriormente, evidencia-se também as habilidades matemáticas H1, H2, H8, H12, H13, H14 e H16 para as duplas que o resolveram corretamente.

Neste problema sobre área da região triangular, considerado uma conversão não congruente, parte dos registros língua natural e gráfico para o registro simbólico na representação numérica. Para resolução o aluno deveria entender o conceito de perpendicularidade para encontrar a equação da Reta perpendicular à Reta dada no gráfico, e para isto, inicialmente deveria encontrar o coeficiente angular da Reta do gráfico que poderia ser realizado pelas relações trigonométricas no triângulo retângulo. Mas, para isto o aluno deve compreender a relação da tangente do ângulo com o coeficiente angular e visualizar no gráfico os catetos oposto e adjacente ao ângulo correspondente. A seguir determinar o valor do coeficiente angular desta Reta perpendicular à Reta apresentada no gráfico, interpretando padrões relacionados à perpendicularidade entre retas em diferentes registros semióticos (H2), ou seja, que este valor do coeficiente é o inverso multiplicativo e o simétrico e que a inclinação da Reta perpendicular é para a esquerda, e ainda que se intersectam no Ponto (3,2). E, a partir do coeficiente linear encontrado, determinar o terceiro vértice do triângulo para realizar o cálculo da área desta região triangular.

Observou-se que muitas duplas realizaram um tratamento no registro gráfico, traçando a Reta perpendicular para definir o terceiro vértice do triângulo e hachurar a área da região triangular, ou seja, se utilizaram de um registro intermediário para melhor compreensão e visualização do problema proposto. A figura 112 ilustra esta resolução desenvolvida por uma dupla investigada.

Figura 112- Resolução do problema gerador 9 do conceito 5 realizado pela dupla d2302.



Fonte: Registros escritos das duplas de alunos investigados.

Com relação as dificuldades apresentadas neste conceito nos registros escritos pelas duplas investigas, estas referem-se à interpretação dos dados em problemas propostos, não assimilaram os conceitos de paralelismo e perpendicularismo, erros de sinais nos tratamentos numéricos para calcular a distância entre Ponto e Reta, ângulo formado entre duas retas e área da região triangular. Observa-se que ao realizar o teste adaptativo final, após realizarem mais estudos neste conceito, as duplas que apresentaram dificuldades tiveram uma melhora em seu desempenho, como foi mostrado nos gráficos dos rendimentos das turmas investigadas. As figuras 113 e 114 apresentam, respectivamente, o teste adaptativo inicial com desempenho insatisfatório e o teste final como exemplo desta evolução.

Figura 113 - Teste adaptativo inicial do conceito 5 realizado pela dupla d9301

#	Respuesta	Respuesta correcta	Tiempo(antes de que se acabe)	Pregunta	Dificultad / Adivinanza	Puntos antes	Puntos después
0	3	false	470	129- Quais equações representam retas que formam um ângulo de 90 graus entre si e são bissetrizes dos quadrantes do plano cartesiano?	0.3 / 0.25	0.30000	0.14634
1	3	true	630	123-A área da região formada pelos pontos P1(2,2), P2(5,4), P3(6,1) é:	0.3 / 0.25	0.14634	0.32432
2	1	false	845	133- O gráfico que apresenta um ângulo de aproximadamente 24,7 graus entre as duas retas é:	0.35 / 0.25	0.32432	0.18301
3	1	true	638	124- A área da região formada pela reta de equação x + 2y – 6 = 0 e os eixos coordenados é:	0.3 / 0.25	0.18301	0.38545
4	0	false	545	138-A distância entre a reta r1, de equação 3y = 4x – 2, e a reta r2, de equação 3y = 4x + 8, sabendo que as duas retas são paralelas é:	0.35 / 0.25	0.38545	0.22642
5	3	false	205	127- Duas retas, sendo "r" paralela ao eixo das abscissas e "s" com coeficiente angular negativo. Assim, o menor ângulo formado entre as duas retas deve ser:	0.3 / 0.25	0.22642	0.10481
6	2	false	504	126- Sabendo que os vértices de um triângulo são os pontos A(m,m), B(m, -m) e C(0,0), determine a área da região triangular ABC em função de m. (Fonte: Dante (2010, p. 74)).	0.3 / 0.25	0.10481	0.04474
7	1	false	421	122- Dada a equação da reta 2x –y +5 = 0 e o ponto P(4,3), a distância da reta ao ponto é:	0.3 / 0.25	0.04474	0.01839
8		false		125- Uma estrada definida conforme o mapa pela equação –x +4y -4 = 0, passa próximo à um posto de combustíveis localizado no ponto P(7,1). Qual a menor distância em quilômetro(km) que um veículo trafegando nesta estrada percorre para chegar no posto:	0.3 / 0.25	0.01839	0.00744

Fonte: Banco de dados do Sistema SIENA.

Figura 114 - Teste adaptativo final do conceito 5 realizado pela dupla d9301

#	Respuesta	Respuesta correcta	Tiempo(antes de que se acabe)	Pregunta	Dificultad / Adivinanza	Puntos antes	Puntos después
0	1	true	346	134- Identifique o gráfico que possui o ângulo de aproximadamente 63 graus formado entre as retas:	0.35 / 0.25	0.30000	0.52703
1	2	true	914	146- Qual o gráfico da reta perpendicular à reta de equação y = -x+1 e que dista √2 u.c. do ponto P(3,0).	0.45 / 0.25	0.52703	0.71026
2	0	true	1338	145- Sabendo que a reta "r" de equação –x+y-1=0 forma ângulo de 45 graus com a reta "s". A representação algébrica de uma reta perpendicular à reta "s" pode ser escrita como:	0.45 / 0.25	0.71026	0.84358
3	2	false	960	143- Seja a reta r que passa pelos pontos A(0, -31) e B(1, -29) obtenha a equação de uma reta paralela a reta r e que dista √5 do ponto P(6,0).	0.45 / 0.25	0.84358	0.76392
4	0	true	541	131- A distância do ponto de abscissa -3 e ordenada 4 à reta do gráfico é:	0.35 / 0.25	0.76392	0.89377
5	0	true	1336	142- Dadas as equações das retas: r: y= x -1 e s: 4y= 2x – 3 e sabendo que a reta t perpendicular a reta s passa pelo ponto (7/2, 1), encontre a área da figura delimitada pelas retas r, t e o eixo x.	0.45 / 0.25	0.89377	0.94874
6	0	true	1010	Segundo o gráfico a reta "s" é perpendicular ao eixo das abscissas e os ângulos dos vértices A e B:	0.45 / 0.25	0.94874	0.97603
7	0	true	998	147- Seja a reta r que passa pelos pontos A(0, -31) e B(1, -29) qual o gráfico que representa uma reta paralela a reta r e que dista √5 do ponto P(6,0).	0.45 / 0.25	0.97603	0.98896
8	2	false	1012	144- A equação da reta que faz ângulo de 45 graus com a reta do gráfico e passa pelo ponto P(-1,2) é:	0.45 / 0.25	0.98896	0.98174
9	0	true	943	135- Qual dos gráficos possui a menor região limitada por duas retas e um eixo coordenado?	0.35 / 0.25	0.98174	0.99290

Fonte: Banco de dados do Sistema SIENA.

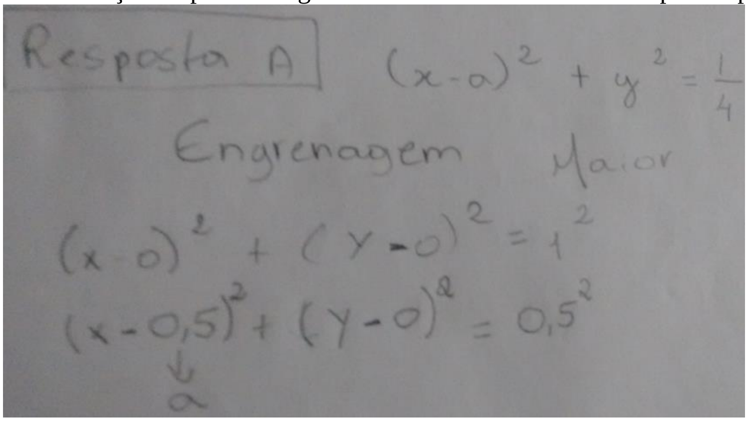
No conceito 6, *Equação da Circunferência*, observou-se que as duplas investigadas que obtiveram bom desempenho neste conceito, apresentaram as habilidades matemáticas H1, H2, H4, H5, H8, H12, H13, H17, H18, H19 e H20, as quais são requeridas para os conteúdos deste conceito. Salienta-se que das 34 duplas, apenas 25 realizaram os problemas geradores deste conceito. E das 25 duplas, apenas duas apresentaram rendimento satisfatório. Nesse sentido, observa-se que as duplas apresentaram muitas dificuldades no estudo deste conceito. No entanto, verifica-se uma melhora significativa para as duplas que realizaram mais de um teste adaptativo, o que significa que mesmo duplas que não resolveram os problemas geradores ou obtiveram desempenho satisfatório, estudaram este conceito explorando os recursos didáticos disponíveis.

Como exemplo, observou-se que as duplas que resolveram corretamente o problema gerador 3 deste conceito, segundo a figura 62 já apresentada, demostraram as habilidades matemáticas H1, H4, H5, H8, H13, H18, H19 e H20. Neste problema apresenta-se, uma simulação com o movimento dinâmico de engrenagens impulsionadas por uma barra vertical. Considerado uma conversão congruente, o problema é apresentado no registro figural na representação geométrica da Circunferência (movimento dinâmico) e no registro língua natural, os alunos deviam fazer a conversão para a representação algébrica respondendo qual o modelo de equação da Circunferência da engrenagem menor que representa esta simulação.

Para resolução o aluno deveria visualizar que a barra vertical $\overline{CE}$ representa o diâmetro da Circunferência, logo o raio é a metade da sua medida. E sabendo este raio, determina-se com um tratamento na representação numérica o raio da Circunferência menor, pois este tem a metade do valor do raio da Circunferência menor. Sabendo ainda que o Ponto do centro da Circunferência maior localiza-se na origem do sistema de referência (plano cartesiano), o aluno deve realizar um tratamento numérico somando um número inteiro com um fracionário para encontrar o valor da coordenada “x” do Ponto do centro da Circunferência menor, demonstrando reconhecer a existência de invariantes (H4), neste caso, o fato de que a coordenada y do Ponto do centro da Circunferência menor é zero como na Circunferência maior, pois ao observar o movimento da simulação é possível verificar que os pontos do centro estão alinhados na horizontal. Assim, as duplas iriam identificar a equação correspondente ao modelo desta simulação (H5).

As duplas que resolveram incorretamente este problema, embora conseguindo calcular o valor correto do raio da Circunferência menor, não representaram corretamente o Ponto do centro respectivo a esta Circunferência, ou seja, não fizeram as interpretações pertinentes para chegar as conclusões necessárias para a resolução, não demonstrando principalmente as habilidades H1 e H4. A figura 115 apresenta a resolução correta realizada por uma dupla de alunos desenvolvida segundos estas interpretações e procedimentos.

Figura 115 - Resolução do problema gerador 3 do conceito 6 realizado pela dupla d12302



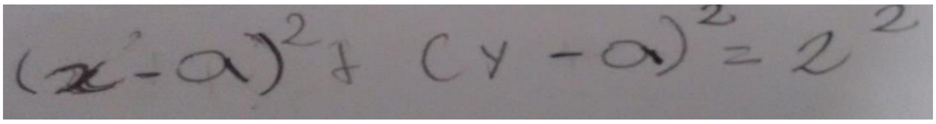
Fonte: Registros escritos das duplas de alunos investigados.

Outro exemplo de problema em que se pode destacar as habilidades H1, H3, H8, H12, H18, H13, H19 e H20 para as duplas que resolveram corretamente é o problema 10 deste conceito, apresentado anteriormente na figura 63. Este problema apresenta um *applet* com o movimento dinâmico de uma Circunferência em que seu centro se desloca sobre uma Reta, ou seja, ocorre uma translação desta Circunferência. A partir deste movimento analisado pelos alunos, os mesmos deveriam escrever a equação correspondente ao movimento (a translação) da Circunferência, ou seja, fazer uma conversão do registro gráfico, a qual possui modificações nas variáveis visuais, para o registro simbólico na representação algébrica.

Para resolução esperava-se que os alunos ao manipularem o *applet* e identificassem que o Ponto da Circunferência translada sobre uma Reta que passa na origem do plano cartesiano, possui pontos com coordenadas iguais, e segundo a inclinação desta Reta, a mesma possui coeficiente angular positivo. Identificadas estas variáveis visuais os alunos deveriam reconhecer que estas se referem ao padrão (H2) de uma Reta de representação algébrica $y = x$, ou seja, que seus pares ordenados possuem coordenadas iguais. Com estas interpretações as duplas deveriam expressar a representação algébrica desta translação da Circunferência, identificando que embora o Ponto do centro da Circunferência varie em relação ao movimento de translação, suas coordenadas variam mantendo sempre o mesmo valor numérico dependendo da posição em que a Circunferência se encontra sobre a Reta $y = x$. Ou seja, os alunos ao expressar a representação algébrica desta translação, a equação reduzida, devem escrever as coordenadas do Ponto do centro da Circunferência utilizando letras iguais, que significa uma variação, mas com mesmo valor *(a, a)*, por exemplo.

Observou-se que 10 das 25 duplas que resolveram este problema demonstraram estas compreensões requeridas pelo problema expressando corretamente a representação algébrica do movimento de translação da Circunferência. As duplas que não resolveram corretamente este problema, não identificaram que a Reta em o Ponto do centro da Circunferência translada possui coordenadas iguais, assim utilizaram letras diferentes para representar este Ponto na representação algébrica desta translação. A figura 116 ilustra esta resolução correta realizada por umas destas duplas.

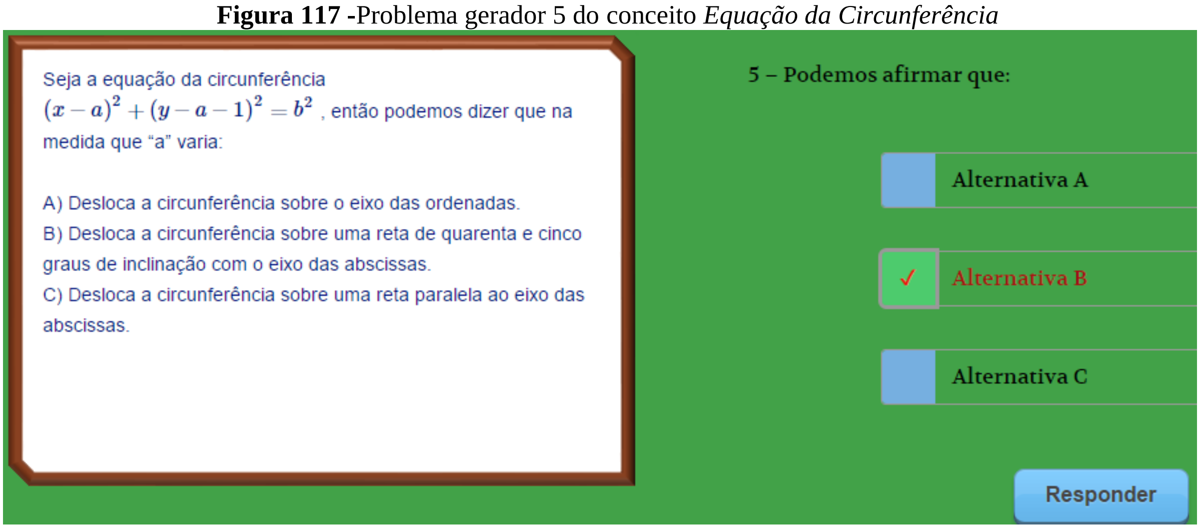
Figura 116 - Resolução do problema gerador 10 do conceito 6 realizado pela dupla d9301



Fonte: Registros escritos das duplas de alunos investigados.

O problema gerador 5 deste conceito, apresenta uma conversão de registros semióticos invertendo seus sentidos. Este problema é apresentado no registro simbólico, representação algébrica e as duplas devem interpretar o movimento desta Circunferência com a variação de um parâmetro que influencia nas coordenadas do Ponto do centro. Desta forma as duplas realizam uma conversão congruente do registro simbólico para o registro língua natural, utilizando, possivelmente, o registro gráfico como registro intermediário, para possibilitar as visualizações nas modificações das variáveis visuais respectivas ao registro simbólico e realizar as interpretações necessárias para a resolução deste problema. A figura 117 apresenta o problema explicitado.

Figura 117 -Problema gerador 5 do conceito *Equação da Circunferência*

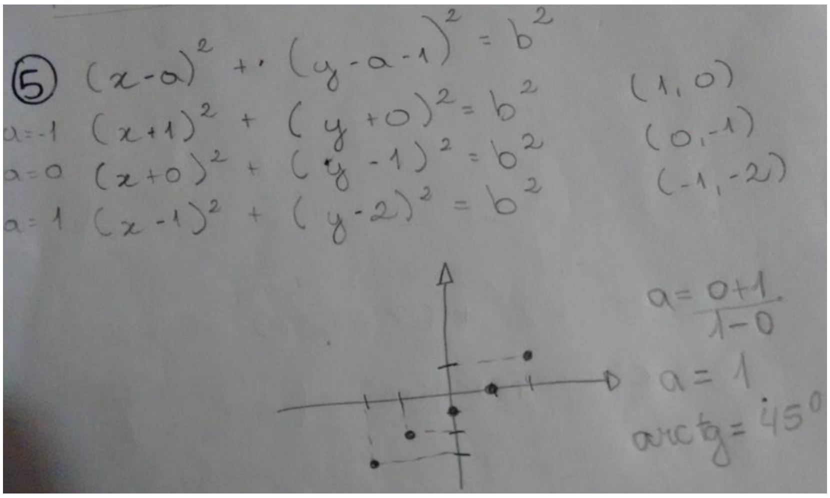


Fonte: Sistema de Estudos do AVA.

As duplas que resolveram corretamente este problema atribuíram valores para o parâmetro *a* substituindo-os na equação reduzida do enunciado e com isto perceberam que as coordenadas do Ponto do centro variavam segundo estes valores atribuídos, o que caracterizava uma movimentação da Circunferência (translação). Para visualizar esta movimentação houve duplas que representou graficamente os pontos do centro encontrados para esta Circunferência. Ao verificar que estes pontos formavam uma Reta, tomaram 2 pontos e identificaram o coeficiente angular da mesma e calculando o arco tangente deste valor verificaram que corresponde a uma Reta de 45 graus de inclinação, ou seja, concluíram que a Circunferência se desloca sobre uma Reta com esta inclinação. Com relação ao parâmetro *b*, as duplas não atribuíram valor para este e o mantiveram como *b* nos cálculos realizados, o que significa que estas duplas reconheceram que a variação deste parâmetro influencia na modificação do raio e diâmetro da Circunferência, mas não no seu deslocamento (translação), ou seja, reconheceram a existência de invariantes para análise da situação-problema (H4). Infere-se que as duplas que resolveram corretamente este problema apresentaram as habilidades matemáticas H1, H4, H8, H13 e H19. A figura 118 apresenta os registros escritos da resolução deste problema por uma dupla investigada ilustrando os procedimentos mencionados.

.

Figura 118 - Resolução do problema gerador 5 do conceito 6 realizado pela dupla d9301



Fonte: Registros escritos das duplas de alunos investigados.

As dificuldades apresentadas pelas duplas neste conceito no estudo e no teste adaptativo inicial remetem à interpretação da situação-problema, interpretação de padrões em diferentes registros semióticos, reconhecimentos das implicações nos diferentes registros com as modificações das variáveis visuais, reconhecimento de equações que representam uma

Circunferência na representação algébrica. Cometeram erros de tratamentos nos cálculos algébricos e numéricos, por exemplo, ao passar da equação geral para a reduzida, calcular o raio e Ponto do centro da Circunferência. Erraram ao representar graficamente uma Circunferência não identificaram que as coordenadas do Ponto do centro são simétricas.

Entretanto, ao observar os resultados das duplas que realizaram mais de um teste adaptativo e os registros escritos das resoluções destes testes nota-se que estas duplas estudaram os recursos didáticos disponíveis para estudos deste conceito, mostrando uma evolução em relação a estas dificuldades e erros cometidos. As figuras 119 e 120 apresentam respectivamente um teste inicial com desempenho insatisfatório e um teste final com desempenho satisfatório ilustrando esta evolução.

Figura 119 - Teste adaptativo inicial do conceito 6 realizado pela dupla d4301

#	Respuesta	Respuesta correcta	Tiempo(antes de que se acabe)	Pregunta	Dificultad / Adivinanza	Puntos antes	Puntos después
0	1	true	855	170- A equação reduzida da circunferência de representação geométrica é :	0.35 / 0.25	0.30000	0.52703
1	2	false	960	172 - A equação reduzida da circunferência que se desloca "t" unidades verticalmente é:	0.45 / 0.25	0.52703	0.40068
2	1	false	930	162- – Os pontos de abscissa 4 e ordenada -2 e abscissa 2 e ordenada 0 são extremidades do diâmetro de uma circunferência de equação:	0.35 / 0.25	0.40068	0.23780
3	2	true	663	155- Os possíveis valores de "k" de modo que a equação (x-2)2 + (y-3)2 = k2 - 5 represente uma circunferência são:	0.3 / 0.25	0.23780	0.46627
4	0	true	804	167- Segundo o gráfico podemos afirmar que:	0.35 / 0.25	0.46627	0.69432
5	1	true	1019	174- Seja a equação da circunferência $(x-a)^2 + (y-a-1)^2 = b^2$, então podemos dizer que na medida que "a" varia:	0.45 / 0.25	0.69432	0.83325
6	2	false	1057	177- De acordo com o gráfico pode-se dizer que:	0.45 / 0.25	0.83325	0.74989
7	3	false	278	166- Um submarino usa seu sonar para navegação e com isto identifica possíveis obstáculos na sua trajetória. Sabendo que o sonar do submarino posicionado no ponto de abscissa 3 e ordenada 1(distâncias do ponto central do sistema de orientação - Longitude 0o e Latitude 0o) percebeu uma rocha a dois kilômetros na sua frente. Então o gráfico que melhor representa situação é:	0.35 / 0.25	0.74989	0.58319
8	1	true	364	157- As condições para que uma equação represente uma circunferência são:	0.3 / 0.25	0.58319	0.79665
9	3	false	861	169- Dados dois pontos conforme o gráfico, a equação reduzida da circunferência de centro "O" e que passa pelo ponto "P" é:	0.35 / 0.25	0.79665	0.64642
10	2	false	678	153- O diâmetro da circunferência de centro no ponto C(-3, -1) e que passa no ponto P(0,2) é:	0.3 / 0.25	0.64642	0.42240
11	0	true	673	154- O comprimento da circunferência de equação x2 + y2 - 2x - 4y + 4 = 0 é:	0.3 / 0.25	0.42240	0.67188
12	3	false	466	163- Os valores de "a" e "b" na equação $(x+a)^2 + (y-b)^2 = 1$ da circunferência correspondem:	0.35 / 0.25	0.67188	0.48864
13	2	false	757	160- A equação $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0$ determina, no plano cartesiano, um conjunto de pontos equidistantes do ponto:	0.3 / 0.25	0.48864	0.27653
14	3	false	458	156- A equação reduzida da circunferência que tem centro em C(2,5) e raio 3.	0.3 / 0.25	0.27653	0.13261
15		false		158- O objeto matemático circunferência é:	0.3 / 0.25	0.13261	0.13261

Fonte: Banco de dados do Sistema SIENA.

Figura 120 - Teste adaptativo final do conceito 6 realizado pela dupla d4301

#	Respuesta	Respuesta correcta	Tiempo(antes de que se acabe)	Pregunta	Dificultad / Adivinanza	Puntos antes	Puntos después
0	0	true	948	162- – Os pontos de abscissa 4 e ordenada -2 e abscissa 2 e ordenada 0 são extremidades do diâmetro de uma circunferência de equação:	0.35 / 0.25	0.30000	0.52703
1	1	true	981	173- A variação de "t" na equação da circunferência $(x+t)^2 + (y-3)^2 = 1$ provoca:	0.45 / 0.25	0.52703	0.71026
2	0	true	1155	178- O gráfico que representa o movimento da circunferência na medida em que "a" varia na equação $x^2 + y^2 + 2x - 2ya - 3 + a^2 = 0$ é:	0.45 / 0.25	0.71026	0.84358
3	1	false	1182	179- De acordo com o gráfico a equação que representa o seu movimento na direção apresentada da seta "a" unidades de medida é:	0.45 / 0.25	0.84358	0.76392
4	0	true	806	164- Sobre a equação da circunferência $(x+a)^2 + (y-b)^2 = c$ podemos dizer que:	0.35 / 0.25	0.76392	0.89377
5	1	true	1051	175- Se duas circunferências tem seus centros a uma distância de 5 unidades de medida (u.m.) e possuem raios de 3 e 4 u.m. respectivamente. Então se a primeira circunferência está situada num ponto de abscissa 4 e ordenada 1, a outra que está no primeiro quadrante será:	0.45 / 0.25	0.89377	0.94874
6	1	true	1039	174- Seja a equação da circunferência $(x-a)^2 + (y-a-1)^2 = b^2$, então podemos dizer que na medida que "a" varia:	0.45 / 0.25	0.94874	0.97603
7	1	true	1011	176- Um submarino usa seu sonar para navegação e com isto identifica possíveis obstáculos na sua trajetória. Sabendo que o sonar do submarino posicionado no ponto de abscissa 3 e ordenada 1(distâncias do ponto central do sistema de orientação - Longitude 0o e Latitude 0o) percebeu uma rocha a dois kilometros 45 graus a sua direita. Então o gráfico que melhor representa a situação é:	0.45 / 0.25	0.97603	0.98896
8	1	true	853	172 - A equação reduzida da circunferência que se desloca "t" unidades verticalmente é:	0.45 / 0.25	0.98896	0.99495
9	3	true	950	171- A equação reduzida da circunferência que se desloca "t" unidades horizontalmente é:	0.45 / 0.25	0.99495	0.99770

Fonte: Banco de dados do Sistema SIENA.

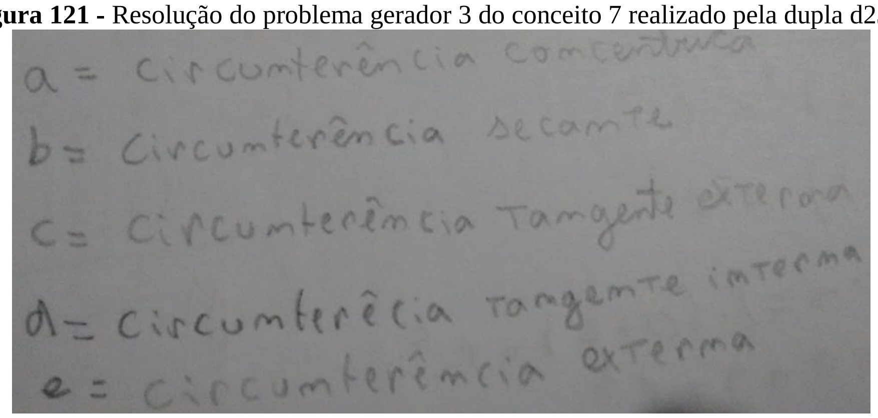
No conceito 7, *Circunferência: posições relativas*, observou-se que as duplas investigadas que obtiveram bom desempenho neste conceito, apresentaram as habilidades matemáticas H1, H2, H3, H4, H8, H9, H12, H13, H15, H17, H18, H19, H20 e H21 as quais são requeridas para os conteúdos deste conceito. Salienta-se que das 34 duplas apenas 18 realizaram os problemas geradores deste conceito e destas 18, apenas 4 duplas obtiveram desempenho satisfatório. Observou-se que as duplas optaram por realizar o primeiro teste adaptativo, sem resolver os problemas do estudo, o que possivelmente fez com estes alunos não explorassem o material de estudos deste conceito, e consequentemente, a maior parte das duplas não obtiveram resultados satisfatórios.

No teste final, conforme os resultados apresentados nas tabelas 1 e 2 e no gráfico das figuras 88 e 91, respectivamente, é possível verificar uma melhora significativa para as duplas que se dispuseram a realizar mais testes. Observou-se durante as aulas, que estas duplas mesmo não apresentando resoluções para os problemas geradores estudaram os recursos do material de estudos para realizar os testes adaptativos deste conceito.

As duplas demonstraram as habilidades matemáticas H2, H4, e H21, por exemplo, ao resolverem corretamente o problema gerador 3 deste conceito, já apresentado na figura 64. Este problema é considerado uma conversão congruente do registro figural na representação geométrica da Circunferência para o registro língua natural. O aluno deveria conhecer os conceitos das posições relativas entre circunferências e, a partir destes, definir no registro língua natural cada uma das posições relativas entre circunferências, segundo as representações geométricas apresentadas. Desta forma, os alunos que resolveram corretamente identificaram as posições relativas para as circunferências representadas geometricamente, demonstrando interpretar e reconhecer padrões e identidades neste registro, relativos aos conceitos de cada posição relativa.

A figura 121 ilustra a resposta correta descrita por uma das duplas investigadas.

Figura 121 - Resolução do problema gerador 3 do conceito 7 realizado pela dupla d2302


a = circumferência concentrica
b= circumferência secante
c= circumferência Tangente externa
d= circumferêcia tangemte interma
e = circumferência exterma

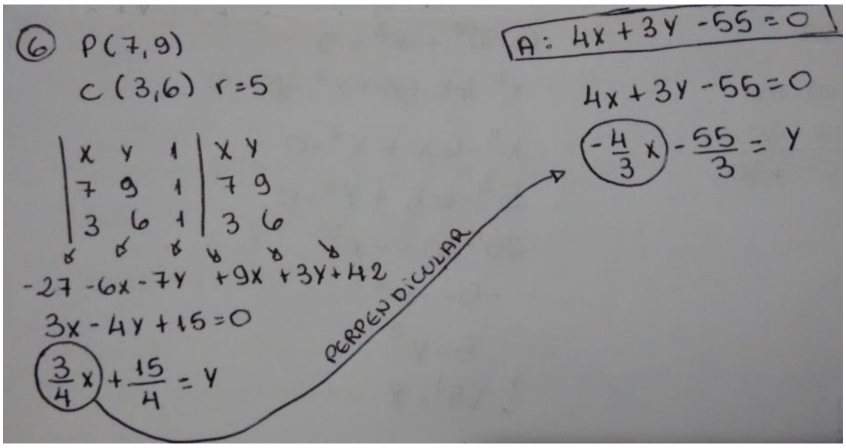
Fonte: Registros escritos das duplas de alunos investigados.

Outro exemplo em que as duplas demonstraram as habilidades H1, H3, H12, H13, H15, H19 e H21, pode ser observado no problema gerador 6 deste conceito, apresentando anteriormente na figura 65. Este problema apresenta uma conversão não-congruente do registro língua natural para o registro simbólico na representação algébrica. Ao interpretar o problema o aluno deveria demonstrar conhecer o conceito de posição relativa entre Reta e Circunferência, sabendo que a Reta tangente que passa no Ponto P é perpendicular a Reta que passa no Ponto do centro da Circunferência e neste Ponto *P* e, assim, adotar os procedimentos e tratamentos que deve realizar para a resolução.

Desta forma ao encontrar a equação da Reta que passa no centro da Circunferência e no Ponto *P*, realizando um tratamento na representação algébrica ao resolver o sistema de equações ou ao resolver o determinante da matriz formada por 3 pontos desta Reta, sendo um deles expresso por *(x, y).* Fazendo isto, deve conhecer o conceito de perpendicularidade determinando o coeficiente angular da Reta perpendicular a esta encontrada, o qual é o inverso multiplicativo e o simétrico. E, assim sabendo o coeficiente angular e o Ponto *P* em que passa a Reta tangente, deveria encontrar, aplicando outro tratamento na representação algébrica, o coeficiente linear desta Reta tangente para determinar sua equação correspondente.

A figura 122 ilustra a resolução de umas das duplas que resolveram este problema segundo estas interpretações e tratamentos necessários.

Figura 122 - Resolução do problema gerador 6 do conceito 7 realizado pela dupla d12302



Fonte: Registros escritos das duplas de alunos investigados.

As dificuldades apresentadas pelas duplas neste conceito, principalmente no primeiro teste adaptativo, referem-se à identificação e interpretação dos dados relevantes para a resolução dos problemas propostos, dificuldades em identificar padrões e aplicar os conceitos referentes as posições relativas entre Ponto e Circunferência, Reta e Circunferência e entre circunferências, dificuldades relacionadas ao conceito de retas perpendiculares e a implicação deste conceito na determinação do coeficiente angular, erros de tratamentos algébricos e numéricos, por exemplo, para obter as equações geral e reduzida da Circunferência, para calcular a distância entre pontos e entre um Ponto e uma Reta.

Nas resoluções do último teste adaptativo realizado pelas duplas que não haviam apresentado rendimento satisfatório e retornaram ao material de estudos para então fazer novos testes, observa-se que estas apresentaram uma evolução positiva em relação as dificuldades mencionadas. As figuras 123 e 124 apresentam, respectivamente, um teste inicial e um teste final de uma destas duplas.

Figura 123 - Teste adaptativo inicial do conceito 7 realizado pela dupla d6301

#	Respuesta	Respuesta correcta	Tiempo(antes de que se acabe)	Pregunta	Dificultad / Adivinanza	Puntos antes	Puntos después
0	1	false	254	187- Sobre as posições relativas entre uma reta e uma circunferência podemos afirmar que:	0.3 / 0.25	0.30000	0.14634
1	1	false	455	188- Sobre as posições relativas entre um ponto P e uma circunferência podemos afirmar que:	0.3 / 0.25	0.14634	0.06417
2	1	true	779	183 – Dadas a reta r de representação algébrica $2x + y - 1 = 0$, e a circunferência de representação algébrica $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$. Qual a posição da reta r em relação a circunferência.	0.3 / 0.25	0.06417	0.16107
3	1	false	55	197- Com o projeto Silvam será implantado um radar com capacidade de captar sinais num raio de 250 Km. Um técnico situou a ação desse radar no sistema de coordenadas cartesianas, conforme a figura abaixo. A equação dessa circunferência tangente aos eixo coordenados é:	0.35 / 0.25	0.16107	0.08223
4	1	false	760	181- Dadas uma reta r de equação $2x – y + 1 = 0$ e uma circunferência λ de equação $x^2 + y^2 - 2x = 0$, verifique a posição relativa de r e λ e, se houver, determine os pontos comuns (tangente ou secante).	0.3 / 0.25	0.08223	0.03460
5	1	true	461	186- Sobre as posições relativas entre duas circunferências podemos afirma que:	0.3 / 0.25	0.03460	0.09120
6	1	false	865	194- Sejam C1 e C2 duas circunferências concêntricas. Sabendo que o raio de C2 mede 5 e a equação de C1 é $x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$, então a equação de C2 é:	0.35 / 0.25	0.09120	0.04474
7	1	false	232	189- No tiro com arco, o círculo mais central (mosca) pode ser descrito pela equação $x^2 + y^2 - 36 = 0$, onde x e y são dados em centímetros. Qual a área desse círculo?	0.3 / 0.25	0.04474	0.01839
8	1	false	636	185- Determine as coordenadas dos pontos comuns às circunferências de equações $x^2 + y^2 = 30$ e $(x - 3)^2 + y^2 = 9$.	0.3 / 0.25	0.01839	0.00744
9	1	false	597	182- Determine a posição relativa entre o ponto P(1,3) e a circunferência λ: $(x + 1)^2 + (y – 2)^2 = 16$.	0.3 / 0.25	0.00744	0.00299

Fonte: Banco de dados do Sistema SIENA.

Figura 124 - Teste adaptativo final do conceito 7 realizado pela dupla d6301

#	Respuesta	Respuesta correcta	Tiempo(antes de que se acabe)	Pregunta	Dificultad / Adivinanza	Puntos antes	Puntos después
0	1	true	500	195- De acordo com o gráficos abaixo, podemos afirmar que:	0.35 / 0.25	0.30000	0.52703
1	0	false	664	202- O ponto A(2,3) pertence à circunferência de equação $x^2 + y^2 - 2x - 2y – 5 = 0$. Determine a equação da reta tangente à circunferência no ponto A.	0.45 / 0.25	0.52703	0.40068
2	2	true	919	198- Dada a reta r de equação $x - y + k = 0$ e circunferência de equação $x^2 + (y-1)^2 = 1$. Se a reta dista $\sqrt{2}$ u.c da circunferência qual dos gráficos representa corretamente a posição relativa entre a reta e circunferência.	0.35 / 0.25	0.40068	0.63481
3	2	true	1200	208- De acordo com o gráfico pode-se dizer que:	0.45 / 0.25	0.63481	0.79271
4	2	true	1034	205- Considere a reta s e o ponto C representados no gráfico. Determine a equação reduzida da circunferência de centro C e tangente a s.	0.45 / 0.25	0.79271	0.89377
5	3	false	1076	203- Quais as equações das retas paralelas a reta r: $x - 2y + 3$ e que são tangentes à circunferência λ: $x^2 + y^2 = 125$.	0.45 / 0.25	0.89377	0.83466
6	3	true	816	192- Determinando-se o centro e o raio das circunferências $x^2 + y^2 - 2y – 8 = 0$ e $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$, pode-se garantir que:	0.35 / 0.25	0.83466	0.92920
7	1	false	1024	204- Dada a circunferência $(x-3)^2+(y-1)^2=k^2$ e a reta $3x+2y-6=0$. Para $k > 0$ podemos afirmar que a reta:	0.45 / 0.25	0.92920	0.88732
8	1	false	880	194- Sejam C1 e C2 duas circunferências concêntricas. Sabendo que o raio de C2 mede 5 e a equação de C1 é $x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$, então a equação de C2 é:	0.35 / 0.25	0.88732	0.78609
9	0	true	793	181- Dadas uma reta r de equação $2x – y + 1 = 0$ e uma circunferência λ de equação $x^2 + y^2 - 2x = 0$, verifique a posição relativa de r e λ e, se houver, determine os pontos comuns (tangente ou secante).	0.3 / 0.25	0.78609	0.91142
10		false		197- Com o projeto Silvam será implantado um radar com capacidade de captar sinais num raio de 250 Km. Um técnico situou a ação desse radar no sistema de coordenadas cartesianas, conforme a figura abaixo. A equação dessa circunferência tangente aos eixo coordenados é:	0.35 / 0.25	0.91142	0.91142

Fonte: Banco de dados do Sistema SIENA.

Com esta análise observa-se que as atividades de conversão de registros a maiores dificuldades foram em questões consideradas difíceis que requeriam conversões não-congruentes e que envolviam o registro língua natural em um dos sentidos. De acordo com Duval (2003) a atividade de conversão que envolve a língua natural, sendo este um registro multifuncional requer um custo cognitivo maior para o aluno.

Verifica-se que houve uma melhora significativa das duplas pesquisadas ao realizarem o teste final no SIENA e que muitas dificuldades não foram mais apresentadas ao longo do processo de ensino e aprendizagem. No entanto, as dificuldades mais recorrentes referem-se as habilidades de identificar e interpretar os dados relevantes em uma dada situação-problema para buscar possíveis estratégias de resolução utilizando conhecimentos algébricos e geométricos, referentes aos conceitos de Ponto, Reta e Circunferência; ler, articular e interpretar padrões em diferentes registros e representações semióticas matemáticas como recursos para fazer inferências e construir argumentos; identificar regularidades em situações semelhantes para estabelecer regras, algoritmos e propriedades relacionadas à Geometria; reconhecer a existência de invariantes ou identidades que impõe condições a serem utilizadas para analisar e resolver situações-problema; o que mostra ser necessário buscar novas alternativas para que estes alunos apresentem em maior número estas habilidades.

6.3 A PROPOSTA METODOLÓGICA NA VISÃO DOS ALUNOS E DA PROFESSORA TITULAR

Ficou evidente, de acordo com o protocolo de observações, durante o experimento que já nas primeiras aulas os alunos demonstraram resistência à metodologia utilizada. Observou-se que os alunos consideravam o uso da tecnologia mais como lazer e não para atividades de estudos, preferindo aulas em que a professora apresentava o conteúdo formal, com explicações e exemplos de atividades que se repetiam nos exercícios. Nesta dinâmica os estudantes têm clareza do que será solicitado nas atividades. Já na metodologia utilizada, os estudantes são solicitados a resolverem situações problemas e suas dificuldades devem ser resolvidas com pesquisas no material de apoio (recursos didáticos desenvolvidos para a sequência didática), exigindo estudos independentes, com um nível maior de dificuldades, que não estão habituados.

Na metodologia utilizada os alunos necessitam comprometer-se mais com sua aprendizagem, pois cada um deveria pesquisar para aprender e sanar suas dúvidas, sendo o professor o mediador do processo de ensino e aprendizagem, colocando-se a disposição para gerenciar dúvidas e indicar caminhos na sequência didática, onde poderiam encontrar explicações que auxiliassem a resolver as dúvidas encontradas. Esta quebra de paradigma foi impactante nas primeiras semanas de aula, e mais ainda porque eles realizavam as avaliações a cada conceito do grafo, para a temática Geometria Analítica, para sua própria autoavaliação e verificação da aprendizagem pelo professor, o que também não é usual em um planejamento tradicional, acarretando ansiedade nos estudantes para conseguir um bom desempenho, o que também não estão acostumados.

Após este período inicial os alunos foram se acostumando com a metodologia empregada para a investigação e tornando-se um pouco mais independentes da professora e da pesquisadora utilizando o Sistemas de Estudos, explorando os recursos didáticos disponibilizados e ao resolverem os testes foram, aos poucos, adquirindo o hábito de consultar o material disponibilizado na sequência didática.

Observou-se que os alunos tinham maior interesse em acessar, além do material de estudo, os *applets* desenvolvidos no Geogebra, por serem dinâmicos permitindo a visualização das mudanças nas variáveis visuais e valores escalares das representações semióticas (DUVAL, 2003) utilizadas nos mesmos. O que indica que tais recursos devem ser mais explorados e são indicados para este tipo de metodologia.

Desta forma, observou-se uma mudança de comportamento de muitos alunos que demonstraram resistência no início do processo, com a metodologia, sendo que alguns comentaram que era uma metodologia nova, mais interativa e os recursos didáticos utilizados favoreciam a aprendizagem, pois as explicações eram ilustradas e "bem explicadas", comentou um aluno. Embora, alguns mencionaram sentir falta de áudio para contribuir no entendimento, e um pequeno grupo de alunos ainda, principalmente os menos participativos, continuaram preferindo aulas no método tradicional.

Na opinião da professora titular das turmas investigadas, ao conversar com a mesma sobre a metodologia utilizada, ela menciona que nesta metodologia:

> os alunos têm total liberdade para a pesquisa e interação com a mesma, evoluindo a medida que vão avançando, os passos traçados para esta evolução foram muito bem pensados e organizados, propiciando um avanço com responsabilidade e autonomia. Já com os métodos tradicionais os alunos são mais passivos, respondendo a estímulos idênticos e evoluindo ao mesmo tempo, no ritmo que o professor impõe (Professora titular).

Ao final da pesquisa a professora titular comentou que achou o trabalho realizado excelente, apenas acrescentaria algumas dinâmicas e trabalhos em pequenos grupos como forma de troca entre os alunos, contribuindo, dessa forma, com o aprendizado das duplas. E com relação aos recursos disponibilizados com a metodologia a professora comentou que os considera importantes porque "trabalham com a aproximação do conteúdo na realidade do aluno, colocando ao seu alcance tudo o que necessita para um aprendizado responsável e significativo, propiciando momentos de descobertas e avanços e tornando o aluno agente ativo de seu aprendizado" (PROFESSORA TITULAR).

Em relação resistência com a metodologia da pesquisa realizada e preferência dos alunos com o método anterior, que a professora titular utilizava, ela acredita que os alunos "sentiram a dor de sair da zona de conforto que estiveram durante o primeiro trimestre, o peso do estudo trouxe um desconforto nos primeiros encontros. Contudo houve aprendizado significativo, os conceitos melhoraram em relação ao primeiro trimestre" (PROFESSORA TITULAR).

A partir das opiniões expostas pelos alunos ao longo da experiência e da opinião da professora titular, pode-se inferir que mesmo havendo resistência por parte dos alunos é importante desenvolver atividades que requerem um nível cognitivo maior, que exigem pesquisa, concentração e pensamento matemático mais elaborado. Para os alunos investigados isto não era trivial dentro do processo de ensino e aprendizagem o que os fizeram sair de sua zona de conforto, mas de acordo com os resultados positivos obtidos preconiza-se insistir na utilização deste tipo de metodologia.

6.4 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

A pesquisa desenvolvida visou investigar como implementar (desenvolver, aplicar e avaliar) uma proposta metodológica para o Ensino Médio com os conteúdos de Geometria Analítica articulada com os Registros de Representação Semiótica.

Para responder a esta questão, diferentes etapas foram executadas: levantamento bibliográfico sobre os Registros de Representação Semiótica, as tendências metodológicas para o ensino da Matemática e o processo de ensino e aprendizagem da temática Geometria Analítica de acordo com as políticas públicas; seleção das escolas públicas do Rio Grande do Sul a serem investigadas as propostas curriculares para o Ensino Médio no que tange ao conteúdo de Geometria Analítica, a partir dos resultados iguais ou acima de 555,00 para a disciplina de Matemática, no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) do ano de 2010 (critério para seleção das escolas); aplicação de um questionário com professores de Matemática do Ensino Médio de escolas públicas do Rio Grande do Sul, com médias iguais ou acima de 555,00 em Matemática, conforme os resultados do ENEM do ano de 2010, para identificar como estes desenvolvem o processo de ensino e aprendizagem da Geometria Analítica, se procuram utilizar diferentes Registros de Representação Semiótica e explorar tarefas de tratamentos e conversões entre esses registros, como e quando estes conteúdos são avaliados e se as propostas curriculares das escolas são seguidas; análise documental das propostas curriculares das escolas pesquisadas identificando quais conteúdos de Geometria Analítica são ensinados, quais os objetivos a serem alcançados com o estudo destes conteúdos, como são ensinados (as metodologias utilizadas), quando são ensinados (em que momento do Ensino Médio), e o que, como e quando estes conteúdos estão sendo avaliados, contrastando-as com as Políticas Públicas (Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio e Proposta Curricular de Matemática do Rio Grande do Sul) no que se refere ao Ensino da Matemática e particularmente da Geometria Analítica; investigação nos livros didáticos nacionais para o Ensino Médio aprovados pelo Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) do ano de 2012, para identificar os conteúdos de Geometria Analítica propostos, em que momento do Ensino Médio sugerem que sejam abordados e quais metodologias propõem para o ensino destes conteúdos, quais registros de representação semiótica são utilizados e como são explorados; implementação do Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA) com as seguintes ações: 1) construção e implementação do grafo no Sistema Integrado de Ensino e Aprendizagem (SIENA) e no Sistema de Estudos (ambiente informático desenvolvido para esta pesquisa), com os conteúdos de Geometria Analítica abordados no Ensino Médio, com base nos dados coletados nas etapas anteriores, abordando os conteúdos de Geometria Analítica trabalhados nas escolas pesquisadas, propostos pelos livros didáticos nacionais para o Ensino Médio e pelas políticas públicas (Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, Proposta Curricular de Matemática do Rio Grande do Sul); 2) desenvolvimento de uma sequência didática eletrônica implementada no Sistema de Estudos a partir do grafo construído, e embasada na teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval e nas tendências metodológicas para a área de Educação Matemática; 3) construção do banco de questões para os testes adaptativos em cada conceito do grafo, no SIENA, de acordo com a sequência didática desenvolvida, os quais serão realizados pelos alunos após a aplicação da sequência didática como um recurso de verificação da aprendizagem dos alunos e eficácia da sequência desenvolvida; desenvolvimento de um experimento com um grupo de alunos do Ensino Médio, com a aplicação do ambiente de investigação; análise dos dados coletados durante a aplicação do experimento com as observações e protocolos realizados, registros escritos dos alunos investigados e análise dos bancos de dados do Sistema de Estudos e do SIENA respectivas aos estudos dos conteúdos de Geometria Analítica e testes adaptativos dos mesmos, realizados pelos alunos, para identificação de habilidades matemáticas desenvolvidas e dificuldades acerca da Geometria Analítica por estes alunos.

Para coleta de dados, utilizaram-se os seguintes instrumentos de investigação, a partir das etapas mencionadas: as propostas curriculares para o Ensino Médio das escolas públicas do Rio Grande do Sul com as melhores médias em Matemática, conforme os resultados do Exame Nacional do Ensino Médio, do ano de 2010 (critério para seleção das escolas), no que se refere aos conteúdos de Geometria Analítica; o questionário (apêndice A) aplicados aos professores de Matemática do Ensino Médio das escolas selecionadas; os livros didáticos nacionais para o Ensino Médio, aprovados pelo Plano Nacional do Ensino Médio 2012 e pesquisa nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio no que tange os conteúdos de Geometria Analítica; o banco de dados do Sistema de Estudos com as respostas dos problemas geradores de cada conceito do grafo com os conteúdos de Geometria Analítica; o banco de dados do SIENA com o resultado dos testes adaptativos; análise dos registros escritos dos estudantes durante o experimento realizado; os protocolos de observação dos encontros presenciais do experimento realizado.

Com estes instrumentos e com a triangulação dos dados buscou-se encadear e contextualizar os resultados obtidos para responder nove questões que contribuem para responder o problema de pesquisa. A seguir apresentam-se estas nove questões e as respectivas respostas obtidas com a investigação:

1) O que apresentam as Políticas Públicas do Brasil e do Rio Grande do Sul para o ensino da Geometria Analítica no Ensino Médio?

As Políticas Públicas destacam a importância e a função deste conteúdo para o ensino da Matemática no Ensino Médio, abordando a Geometria Analítica como um tema que tem como função tratar algebricamente as propriedades e os elementos geométricos. Desta forma, o aluno do Ensino Médio terá a oportunidade de conhecer essa forma de pensar que transforma problemas geométricos na resolução de equações, sistemas ou inequações.

No estudo da Geometria Analítica, as Políticas Públicas estudadas no capítulo 3.1 afirmam que o aluno deve perceber que um mesmo problema pode ser abordado com diferentes instrumentos matemáticos (registros semióticos) de acordo com suas características. Por exemplo, a construção de uma Reta que passe por um Ponto dado e seja paralela a uma Reta dada pode ser obtida de diferentes maneiras. Se o Ponto e a Reta estão desenhados em papel, a solução pode ser feita por meio de uma construção geométrica, usando-se instrumentos. No entanto, afirma que se o Ponto e a Reta são dados por suas coordenadas e equações, o mesmo problema possui uma solução algébrica, mas que pode ser representada graficamente.

Destacam também, que mais importante do que a memorização de diferentes equações para um mesmo ente geométrico, é necessário investir para garantir a compreensão do que a Geometria Analítica propõe. Para isso, aponta que o trabalho com este tema pode ser centrado em estabelecer a correspondência entre as equações e seus gráficos e a resolução de problemas que exigem o estudo da posição relativa de pontos, retas, circunferências e parábolas.

Preconizam que deve ser oportunizado ao aluno conhecer uma forma de pensar em Matemática, entender o mundo do século XVII, que deu origem ao cartesianismo, o que pode ser uma excelente oportunidade para que o aluno perceba o desenvolvimento histórico do conhecimento e como certos momentos dessa história transformaram a ciência e a forma de viver da humanidade.

As Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 2006), por exemplo, caracterizam a Geometria Analítica como o estudo das propriedades geométricas com base em uma equação, o estudo dos pares ordenados de números que são soluções de uma equação, por meio das propriedades de uma figura geométrica, e recomendam que estes aspectos sejam trabalhados nas escolas. Nesse sentido, este documento preconiza que a Geometria Analítica permite a articulação entre geometria e álgebra, e para que esta articulação seja significativa para o aluno, o professor deve trabalhar o entendimento de figuras geométricas via equações e o entendimento de equações via figuras geométricas. E, afirma que as equações devem ser deduzidas quanto ao sentido geométrico de seus parâmetros, estabelecendo relações entre os coeficientes de pares de retas paralelas ou perpendiculares, distinguindo os sistemas de equações. Estas afirmações remetem ao que Duval (2003, 2004), também recomenda sobre o estudo de equações e gráficos, salientando a necessidade de ser trabalhado a conversão entre os registros simbólico e gráfico nos dois sentidos, explorando as variações sistemáticas próprias de cada um dos registros. No caso das representações gráficas, estas variações estão relacionadas as unidades significantes neste registro determinadas pelas variáveis visuais e valores escalares correspondentes a escrita simbólica.

As Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 2006), também destacam a importância de trabalhar o conceito de vetor sob enfoques geométricos e algébricos. No entanto, este conceito, como investigado nas escolas públicas do Rio grande do Sul, não é parte do currículo. Segundo o documento esta abordagem seria importante, pois é utilizado nas aulas de Física no Ensino Médio.

É preconizado, ainda neste documento, explorar os sistemas de equações *2* x *2* com duas variáveis analisando o significado correspondente ao seu sentido geométrico, integrando o estudo da posição relativa de duas retas no plano, enfatizando a análise dos casos de intersecção de retas coincidentes, paralelas associando seus significados algébricos com geométricos. Afirma, também ser necessária a resolução de sistema *2* x *3* e *3* x *3* pelo processo de escalonamento, discutindo as diferentes condições das soluções do sistema. Manifestam a importância da utilização de *softwares* matemáticos para exploração e construção de diferentes conceitos matemáticos, como a construção de retas paralelas e perpendiculares, pontos, mediatrizes, bissetrizes, possibilitando estabelecer e identificar as características próprias destes objetos matemáticos, por meio das diversas representações que estes programas possibilitam explorar.

É mencionado também neste documento, a possibilidade de estabelecer relações com o conteúdo de funções, equações e desigualdades da Geometria Analítica com o auxílio destes softwares, pois permitem explorar as representações algébricas e gráficas de um objeto simultaneamente. Assim, é possível que o professor explore com os alunos a correspondência das unidades significantes entre estas representações do objeto contribuindo para que entendam e apreendam os conceitos matemáticos envolvidos. No entanto, ao relacionar o conteúdo de funções entende-se ser importante salientar aos alunos os conceitos imbricados a este e à Geometria Analítica, o qual se refere ao lugar geométrico e sistema de posições, o que difere do conceito de função, ou seja, utilizam-se os mesmos registros simbólicos e gráficos, mas com significados diferentes segundo os conceitos de cada conteúdo.

As Matrizes de Referência do SAEB (BRASIL, 2008), destacam os seguintes descritores como habilidades a serem verificadas se o aluno as desenvolveu ou não ao estudar o conteúdo de Geometria Analítica: identificar a localização de pontos no plano cartesiano (descritor 6), interpretar geometricamente os coeficientes de uma equação da Reta (descritor 7), identificar a equação de uma Reta a partir de dois pontos dados ou de um Ponto e sua inclinação (descritor 8), relacionar a determinação do Ponto de intersecção de duas ou mais retas com a resolução de uma sistema de equações com duas incógnitas (descritor 9), reconhecer, dentre as equações do segundo grau com duas incógnitas, as que representam circunferências (descritor 10) (BRASIL, 2008). Estes descritores foram importantes para delinear as habilidades matemáticas demonstradas ou não pelos alunos com o experimento desta investigação.

Relacionado à documentos do estado do Rio Grande do Sul sobre o conteúdo de Geometria Analítica especificamente, encontrou-se menção apenas nos Referenciais Curriculares, (RIO GRANDE DO SUL, 2009), que abordam Geometria Analítica no terceiro ano do Ensino Médio a qual preconizam que deve ser apresentada por meio de seus aspectos históricos que estabelecem a importância da descoberta da relação da geometria com a álgebra, e da localização de pontos em mapas. Destacam que é importante que o aluno entenda a relação entre os conceitos algébricos e geométricos para a compreensão em Matemática e também para a aplicação em outras áreas do conhecimento, o que também é mencionado nos documentos de Política Públicas Nacionais referente a este conteúdo. Nos documentos sobre o Ensino Médio Politécnico instaurado em 2011, não encontrou-se menção específica à Geometria Analítica.

Com relação ao estudo da Reta os Referenciais Curriculares do Rio Grande do Sul (RIO GRANDE DO SUL, 2009), afirmam que os alunos, para determinar sua equação, devem entender que a relação entre as coordenadas x e y, refere-se ao fato de que todos os segmentos nela contidos têm a mesma inclinação que pode ser associada à representação de grandezas diretamente proporcionais. Neste documento é considerado importante, que o professor contemple a representação algébrica da Reta na sua forma geral e reduzida explorando tanto retas paralelas aos eixos coordenados e as retas inclinadas em relação aos eixos, identificando a inclinação como sendo $m = -\frac{a}{b}$, enfatizando o cálculo do coeficiente angular, a partir de dois pontos e uma Reta.

O documento aponta, também, que deve ser feito um estudo sobre as posições relativas entre duas retas ou mais, enfatizando o ângulo que há entre duas retas concorrentes e a distância entre duas retas paralelas. Destaca-se que este documento não propõe a exploração das posições relativas entre duas retas por meio da resolução de sistemas como sugerem as Orientações Curriculares Nacionais, (BRASIL, 2006). No caso da Circunferência, sugerem que seja apresentada a sua equação, a partir de sua definição, com centro na origem do sistema de coordenadas.

Neste contexto, buscou-se levar em consideração na construção da sequência didática e banco de questões desenvolvidos nesta investigação, as recomendações apresentadas por tais Políticas Públicas relacionando-as com a teoria dos Registros de Representação Semiótica.

2) A Geometria Analítica é parte do currículo de Matemática desenvolvido nas escolas estaduais do Rio Grande do Sul?

Para chegar a esta resposta selecionou-se 52 escolas estaduais em diferentes cidades a partir das notas iguais ou maiores que 555,00 obtida no Exame Nacional do Ensino Médio em 2010. Destas 52 escolas 45 aceitaram contato com a pesquisadora. Foram investigadas as propostas curriculares destas escolas e emitido um questionário sobre o ensino da Geometria Analítica nestas escolas.

Na maioria das escolas investigadas (43), as propostas curriculares apontam que este tema é objeto de estudo no terceiro ano do Ensino Médio, e em 2 escolas não é trabalhado este conteúdo neste nível de ensino. Desta forma, como a Geometria Analítica é trabalhada na maioria das escolas investigadas, considera-se pertinente o desenvolvimento desta investigação no âmbito de uma proposta metodológica para o ensino e aprendizagem deste tema.

3) Quais conteúdos de Geometria Analítica são ensinados no Ensino Médio e quais objetivos a serem alcançados com o estudo destes conteúdos?

As propostas curriculares das escolas investigadas e as respostas do questionário direcionado aos professores que lecionam Geometria Analítica nestas escolas, apontam que os conteúdos trabalhados são Ponto, Reta e Circunferência. E nestes conteúdos são explorados: distância entre dois pontos, Ponto médio de um segmento, condição de alinhamento de 3 pontos, coeficiente angular da Reta, equação geral e reduzida da Reta, posições relativas entre 2 retas (paralelas, perpendiculares e concorrentes), intersecção entre retas, ângulo entre duas retas, Reta bissetriz, distância entre Ponto e Reta, equação geral e reduzida da Circunferência, posições relativas entre Ponto e Circunferência , posições relativas entre Reta e Circunferência. O coeficiente linear é trabalhado em apenas 7% das escolas, o qual é importante para que o aluno a partir da representação gráfica da Reta possa escrever o valor correspondente na representação algébrica da Reta, ou ainda, a partir da representação algébrica visualize o Ponto de intersecção com o eixo y’y na sua representação gráfica. A área da região triangular é trabalhada em apenas 11% escolas , o qual permite trabalhar pontos colineares, Reta perpendicular a base de um triângulo e fazer uma conexão com a geometria plana. A equação paramétrica da Reta é tralhada em 7% escolas , de acordo com as respostas dos professores e planos curriculares, a qual permite explorar uma outra forma de representação algébrica da equação da Reta e estabelece conexões com conteúdos na área da Física. Enquanto a equação segmentária foi apontada ser trabalhada em 11% das 43 escolas. As posições relativas entre 2 circunferências que permite explorar representações figurais e gráficas da Circunferência e distância entre dois pontos (raios das circunferências) identificou-se ser trabalhada em 56% (24) escolas.

Segundo estes dados verifica-se que importantes explorações relacionadas aos conteúdos de Ponto, Reta e Circunferência são pouco realizadas pelas escolas investigadas, e considerando a importância destas explorações para o ensino e aprendizagem da Geometria Analítica, como também para outras áreas da Ciência preconiza-se que as mesmas estejam presentes em uma proposta metodológica para esta temática.

Os objetivos (habilidades e competências) que se buscam atingir com o ensino da Geometria Analítica, foram mencionados por mais de 70% das 43 escolas, nas respostas dos professores e planos curriculares, os seguintes: identificar e utilizar conceitos sobre plano cartesiano, distância entre dois pontos, Ponto médio de um segmento e condições de alinhamento de três pontos para resolução de problemas; reconhecer as características das retas e suas equações; reconhecer e utilizar as condições de paralelismo, perpendicularismo, ângulos formados entre retas e distância entre Ponto e Reta; determinar a equação geral e reduzida da Circunferência; identificar as posições relativas entre Ponto e Circunferência e entre Reta e Circunferência.

Observa-se que estes objetivos remetem a habilidades pontuais a serem desenvolvidas e poucas (34%) tem o objetivo de que o aluno reconheça a Geometria Analítica como uma associação entre a geometria e a álgebra para utilizar conhecimentos algébricos e geométricos para resolução de situações-problemas, pois também a capacidade de resolver problemas relacionados a esta temática é apresentada por apenas 13% das escolas. Assim, infere-se que há necessidade de uma proposta metodológica para o ensino da Geometria Analítica que enfatizem essas habilidades como objetivos, pois estes são indispensáveis para o entendimento e aprendizagem deste tema.

4) Quais metodologias ou Tendências Metodológicas para o ensino da Matemática são utilizadas para o ensino da Geometria Analítica e em que momento do Ensino Médio é abordada?

A Geometria Analítica é abordada no terceiro ano do Ensino Médio nas escolas investigadas. De acordo com as respostas dos professores e as propostas curriculares destas escolas a metodologia mais utilizada (93% das respostas de 45 professores) é a Resolução de Problemas e a História da Matemática (67% das respostas). Embora não foi investigado o que estes professores seguem destas metodologias. E com relação a utilização da Resolução de Problemas há um contraste com os objetivos apresentados, pois resolver situações- problemas foi um objetivo mencionado por poucas escolas.

Além disso, o uso de recursos tecnológicos foi mencionado por apenas 23% dos professores e raramente mencionaram outras metodologias como Modelagem Matemática e Jogos, sendo que 5% destes professores afirmaram não utilizar nenhuma destas metodologias.

Entende-se que utilizar diferentes metodologias pode contribuir para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática, e especificamente nesta pesquisa da Geometria Analítica, de forma que seja possibilitado aos alunos diferentes meios para a compreensão deste tema.

5) O que, como e quando estes conteúdos estão sendo avaliados?

Relacionada a avaliação do tema Geometria Analítica, as propostas curriculares e as respostas dos professores investigados apontam que esta é um processo constante durante o desenvolvimento dos conteúdos deste tema, sendo que 80% dos professores além de realizar provas e trabalhos, levam em consideração a participação dos alunos nas aulas.

Considera-se que a participação é um fator a ser levado em consideração na avaliação, assim nesta investigação, observou-se a participação e comprometimento dos alunos durante o experimento pela professora pesquisadora e a titular da turma, sendo que a professora titular acrescentou este dados a sua avaliação final junto as notas fornecidas pelos bancos de dados do Sistema de Estudos e do SIENA.

6) Os professores do Ensino Médio que lecionam Geometria Analítica articulam os Registros de Representação Semiótica? E quais as dificuldades observadas por estes professores que são apresentadas pelos seus alunos?

Em relação as atividades propostas no tema Geometria Analítica articuladas aos Registros de Representação Semiótica, as respostas dos professores investigados apontam que 100% destes propõem atividades de tratamentos nas representações numéricas e algébricas, sendo que apenas 13% afirmaram utilizar tratamentos no registro língua natural, o qual considera-se importante para interpretação dos conceitos e consequentemente da aprendizagem do tema.

Além destas atividades propostas, é possível verificar nas respostas dos professores, que 100% destes apontam propor conversões do registro simbólico na representação numérica para o registro gráfico, já no sentido inverso apenas 80% propõem atividades deste tipo, 100% apontam propor conversões do registro simbólico na representação algébrica para o registro gráfico e vice-versa. Porém, quando se trata da língua natural poucos professores mencionam propor atividades de conversão neste registro, apenas deste para o registro gráfico 58% dos professores afirmaram propor. Já no sentido inverso e conversões envolvendo a língua natural e registro simbólico este índice encontra-se abaixo de 30% das respostas.

Com relação as dificuldades que os alunos apresentam ao estudar Geometria Analítica, 100% dos professores responderam ser a interpretação e compreensão de problemas e dificuldades nos conhecimentos prévios como: operações com frações, números decimais, produtos notáveis, regras de sinais, formação de pares ordenados, potenciação e radiciação. E 93% mencionaram as dificuldades com nomenclaturas e conceitos. Infere-se que a dificuldade de interpretação e compreensão de problemas e conceituais podem estar diretamente ligadas as atividades de transformação de registros, pois poucos professores propõem atividades com a língua natural o que contribui para a interpretação e assimilação de conceitos.

Outras dificuldades muito mencionadas pelos professores relacionam a definição de equações algébricas da Reta representadas no plano cartesiano, o que remete a conversão do registro gráfico para o registro algébrico, e sendo esta uma conversão não congruente, requer um nível cognitivo maior dos alunos, devendo ser bastante exploradas no trabalho com a Geometria Analítica. Ainda, dificuldades em tratamentos nas representações algébricas envolvidos na resolução de sistemas de equações, o qual é um tratamento necessário para a conversão do registro gráfico para o simbólico na representação algébrica, e dificuldade em visualizar as posições relativas dos conteúdos de Reta e Circunferência, o que entende-se remeter a associação com os conceitos (língua natural) destas posições e associá-los as suas representações algébricas e gráficas.

Neste contexto, infere-se, segundo Duval (2003, 2004) que a mobilização e a articulação entre diferentes registros semióticos é condição fundamental para compreensão da Matemática, e aqui especificamente da Geometria Analítica que possui uma diversidade de registros que necessitam ser explorados. Assim, é fundamental que uma proposta metodológica para esta temática busque em suas diferentes metodologias utilizadas, mobilizar e articular os diferentes registros semióticos requeridos por tal temática.

7) O que os livros didáticos do Ensino Médio, aprovados pelo Plano Nacional do Livro Didático do ano de 2012, abordam de Geometria Analítica, quais metodologias propõem para seu ensino, quais Registros de Representação Semiótica utilizam e como são explorados estes registros?

Para responder esta questão foram investigados os sete livros aprovados pelo PNLD (BRASIL, 2011), os quais estão descritos no capítulo 4.2. Em relação aos conteúdos que envolvem a temática Geometria Analítica, verificou-se que apenas um livro aborda coeficiente linear de uma Reta e apenas três abordam as equações paramétricas da Reta. Pode-se fazer uma relação com os conteúdos abordados pelos professores investigados, pois os mesmos afirmaram adotar algum dos livros aprovados pelo PNLD (BRASIL, 2011), e em apenas 7% das 43 escolas investigadas são trabalhados o coeficiente linear e as equações paramétricas.

Com relação as metodologias propostas, este documento afirma que os livros analisados abordam o conteúdo de Geometria Analítica de forma fragmentada dando ênfase a exercícios que o aluno recai no treinamento a partir destes modelos dificultando o professor conduzir aulas que os alunos pensem e discutam soluções de problemas reconhecendo a necessidade de ampliação dos conhecimentos. Verificou-se que o livro Matemática- Contexto e Aplicações (DANTE, 2010) apresenta uma seção em que aborda um problema real e utiliza as diferentes fases da metodologia de Resolução de Problemas para resolução do mesmo.

Ainda sobre outras metodologias propostas, verificou-se obras que apenas no manual do professor abordaram texto sobre Etnomatemática, Modelagem Matemática, Recurso Tecnológicos, História da Matemática e Resolução de Problemas sugerindo que o professor inserisse tais metodologias em suas aulas, mas não apresentam sugestões de atividades relacionadas a algum conteúdo matemático utilizando tais metodologias.

Quanto a exploração de registros semióticos, as obras analisadas apresentaram em maior frequência (mais que 15 exemplos e atividades) os registros simbólicos numéricos e algébricos, sendo que a língua natural está mais presente nas explicações do conteúdo e o registro gráfico é muito frequente (mais que 15 exemplos e atividades) em duas obras e frequente (entre 10 e 15 exemplos e atividades) em cinco obras, e o registro figural é pouco frequente (menos de 10 exemplos e atividades) em todas as 7 obras.

Observou-se que os livros analisados priorizam os tratamentos nas representações numéricas e algébricas, pois estes apresentam-se com muita frequência nos mesmos, enquanto que tratamentos no registro língua natural e no registro gráfico são pouco frequentes ou inexistentes e no registro figural é inexistente em todas as obras.

Com relação as atividades de conversão observou-se que é muito frequente em todas as obras a conversão do registro simbólico na representação algébrica para o registro gráfico, mas não fazem questionamentos sobre as variáveis visuais e valores escalares, cabendo ao professor esta tarefa. E no sentido inverso é frequente em quatro obras e pouco frequente nas demais três obras. As conversões do registro língua natural para o simbólico na representação algébrica são pouco frequentes e são apresentada em apenas três das sete obras, e também são pouco frequentes atividades no sentido inverso desta conversão. Do registro gráfico para o simbólio na representação numérica é pouco frequente em todas as obras e no sentido inverso é muito frequente em duas obras, inexistente em uma e pouco frequente nas demais. Já a conversão do registro língua natural para o registro gráfico é inexistente nestas obras e a conversão no sentido inverso é pouco frequente e observou-se em apenas três obras.

Observa-se que as atividades propostas relacionadas aos tratamentos e conversões entre registros vão ao encontro do que é proposto pelos professores investigados, pois estes também propõem mais tratamentos nas representações numéricas e algébricas do que com registros na língua natural e gráfico. E entre as atividades de conversão que mais afirmam propor está do registro simbólico na representação algébrica para o registro gráfico, o que possivelmente ocorre pela utilização do livro didático como maior fonte de atividades propostas aos alunos. Desta forma, infere-se a necessidade dos livros didáticos abordarem a Geometria Analítica mobilizando e articulando diferentes registros semióticos em atividades de transformação de registros, pois segundo Duval (2004) é isto que garante a apreensão do objeto matemático e a conceitualização, o que salienta a necessidade de uma proposta metodológica que enfatize tais atividades.

8) Quais habilidades matemáticas e dificuldades apresentam um grupo de alunos do Ensino Médio, que não estudaram Geometria Analítica, com a experiência em um AVA, de uma proposta metodológica articulada com a teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval, no desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem deste tema?

Na análise do desempenho dos alunos com a implementação do experimento desenvolvido nesta investigação, foram consideradas habilidades matemáticas que estão de acordo com as políticas públicas investigadas. Para esta análise foram coletados dados dos bancos de dados do Sistema de Estudos e do SIENA, além dos registros escritos dos alunos nas resoluções dos problemas geradores e dos testes adaptativos. Observou-se à medida que os estudantes não que obtiveram desempenho satisfatório (média 0,6) nos estudos e nos testes adaptativos dos conceitos do grafo desenvolvido com os conteúdos de Geometria Analítica e voltavam a realizar os estudos com os recursos didáticos disponibilizados na sequência didática para realizar novos testes adaptativos, as habilidades matemáticas analisadas foram sendo demonstradas, pois se observou que dificuldades apresentadas inicialmente foram sendo trabalhadas neste processo.

Desta forma, pode-se afirmar que os alunos que obtiveram desempenho satisfatório, em geral, apresentaram as seguintes habilidades matemáticas: identificar e interpretar os dados relevantes em uma dada situação-problema para buscar possíveis estratégias de resolução utilizando conhecimentos algébricos e geométricos, referentes aos conceitos de Ponto, Reta e Circunferência; ler, articular e interpretar padrões em diferentes registros e representações semióticas matemáticas como recurso para fazer inferências e construir argumentos; identificar regularidades em situações semelhantes para estabelecer regras, algoritmos e propriedades relacionadas à Geometria; reconhecer a existência de invariantes ou identidades que impõe condições a serem utilizadas para analisar e resolver situações-problema; elaborar possíveis modelos matemáticos que expressem a relação entre grandezas para analisar e resolver uma situação-problema; avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas; avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando diferentes representações semióticas e conhecimentos geométricos; identificar a localização de pontos no plano cartesiano e representá-los numérica, algébrica e graficamente; aplicar e realizar tratamentos referentes ao conceito de distância entre dois pontos, distância entre Ponto e Reta no plano cartesiano e com base em suas coordenadas; determinar com tratamentos numéricos e representar graficamente as coordenadas de um Ponto médio de um segmento; aplicar o conceito e representar a condição de alinhamento de três pontos (pontos colineares); obter e relacionar as diferentes formas (geral, reduzida e paramétrica) da equação da Reta; interpretar, determinar com tratamentos numéricos e algébricos, e representar geometricamente os coeficientes angular e linear da equação de uma Reta; identificar e representar algebricamente a equação de uma Reta apresentada a partir de dois pontos dados ou de um Ponto e sua inclinação; relacionar a determinação do Ponto de interseção de duas ou mais retas e a posição relativa entre elas com a resolução de um sistema de equações com duas incógnitas; determinar, analiticamente, a área de um triângulo e ângulo formado por 2 retas; reconhecer, dentre as equações do 2.º grau com duas incógnitas, as que representam circunferências; estabelecer relação entre a representação gráfica da Circunferência e sua representação algébrica; identificar na representação algébrica as coordenadas do centro e o raio da Circunferência; reconhecer e obter as equações geral e reduzida da Circunferência; identificar e obter as posições relativas entre Ponto e Circunferência, Reta e Circunferência e entre duas circunferências.

No entanto, salienta-se que nem todos os alunos que obtiveram desempenho satisfatório nos conceitos do grafo com o conteúdo de geometria Analítica apresentaram todas estas habilidades, pois também apresentaram erros nas resoluções dos problemas geradores e nos demais testes adaptativos após o primeiro realizado, mesmo apresentando uma evolução em seu rendimento.

Observa-se, segundo a análise realizada que os principais erros cometidos tanto pelos alunos que obtiveram bom desempenho, quanto por aqueles que não obtiveram ou não realizaram novos testes para melhorar seu desempenho estão relacionados a interpretação dos enunciados da questão na língua natural e abstração dos conceitos estudados, o que segundo Duval (2004) são dificuldades relacionadas a mobilização e articulação de registros de representação. Estas dificuldades foram mais recorrentes em questões difíceis, as quais eram consideradas questões com conversões não congruentes entre diferentes registros semióticos.

Apresentaram, também, dificuldades de visualização das modificações nas variáveis visuais correspondentes as representações algébricas e gráficas da Reta, identificação dos coeficientes da Reta no registro gráfico e simbólico e os padrões que estes representam em posições relativas entre retas, identificar a existência de invariantes nos registros gráficos e simbólicos, interpretação de padrões em diferentes registros semióticos, reconhecimentos das implicações nos diferentes registros com as modificações das variáveis visuais, dificuldades em identificar padrões e aplicar os conceitos referentes as posições relativas entre Ponto e Circunferência, Reta e Circunferência e entre circunferências,

Outras dificuldades observadas foram na ordem das coordenadas de um Ponto em relação a língua natural (qual era a abscissa e qual a ordenada), ou seja, escrever um Ponto na sua forma numérica a partir da sua representação na língua natural, dificuldades na localização dos quadrantes e os sinais que as coordenadas dos pontos situados em cada quadrante possuem, dificuldades nos tratamentos envolvendo as relações com o Teorema de Pitágoras, nos tratamentos envolvendo cálculos para encontrar a distância entre pontos, nos tratamentos para resolução do determinante de uma matriz para verificação de colinearidade entre pontos, e nos tratamentos requeridos nas representações numéricas e algébricas de frações, dificuldades em realizar tratamentos em sistemas lineares para conversão do registro gráfico para o simbólico na representação algébrica, erros de sinais ao realizar tratamentos para passar da equação geral para a equação reduzida da Reta, compreensão de definições conceitos referentes aos coeficientes de uma Reta, erros de sinais para determinar o coeficiente angular a partir de dois pontos, confusão entre o valor do coeficiente angular e o ângulo que este representa, não assimilaram os conceitos referentes as posições relativas entre retas, erros de sinais nos tratamentos numéricos para calcular a distância entre Ponto e Reta, ângulo formado entre duas retas e área da região triangular, reconhecimento de equações que representam uma Circunferência na representação algébrica, erros de tratamentos nos cálculos algébricos e numéricos ao passar da equação geral para a reduzida da Circunferência, calcular o raio e Ponto do centro da Circunferência.

Com relação as atividades de conversão de registros a maiores dificuldades foram em questões consideradas difíceis que requeriam conversões não-congruentes e que envolviam o registro língua natural em um dos sentidos. De acordo com Duval (2003) a atividade de conversão que envolve a língua natural, sendo este um registro multifuncional requer um custo cognitivo maior para o aluno.

Diante da análise realizada, pode-se inferir que houve uma melhora significativa das duplas de alunos pesquisados ao realizarem o teste final no SIENA e que muitas dificuldades não foram mais apresentadas ao longo do processo de ensino e aprendizagem. No entanto, as dificuldades mais recorrentes referem-se as habilidades de identificar e interpretar os dados relevantes em uma dada situação-problema para buscar possíveis estratégias de resolução utilizando conhecimentos algébricos e geométricos, referentes aos conceitos de Ponto, Reta e Circunferência; ler, articular e interpretar padrões em diferentes registros e representações semióticas matemáticas como recursos para fazer inferências e construir argumentos; identificar regularidades em situações semelhantes para estabelecer regras, algoritmos e propriedades relacionadas à Geometria; reconhecer a existência de invariantes ou identidades que impõe condições a serem utilizadas para analisar e resolver situações-problema.

Assim, entende-se que a proposta metodológica desenvolvida contribuiu para a aprendizagem dos alunos investigados no tema Geometria Analítica, no entanto ainda há necessidade de desenvolver outras atividades, ou buscar outras tendências metodológica que possam possibilitar que os alunos venham a sanar estas dificuldades recorrentes.

9) Quais abordagens didático-pedagógicas devem ser priorizadas no ensino e aprendizagem da Geometria Analítica em um AVA?

A partir da análise realizada, das habilidades que os alunos investigados demonstraram e das observações realizadas durante o experimento com os mesmos, entende-se ser primordial abordagens didático-pedagógicas que mobilizem e articulem diferentes Registros de Representação Semiótica, tanto na explicação dos conceitos como em problemas propostos, sendo necessário associar estas abordagens com diferentes tendências metodológicas para o ensino da Matemática.

Observou-se que, mesmo havendo resistência dos alunos para com a metodologia proposta, pois há a concepção entre os alunos do uso da tecnologia mais para o lazer que para estudos, estes demonstraram afinidade como uso de tecnologias. Apresentaram motivação em utilizar os *applets* desenvolvidos pois afirmavam conseguir visualizar conceitos estudados e identificar semelhanças com os problemas propostos nas variações de variáveis visuais e valores escalares e suas implicações nos registros gráficos e simbólicos, utilizando inclusive este *applets* para analisar e resolver outras situações- problemas propostas.

Os alunos também mostraram maior interesse nos jogos propostos, em atividades e problemas que envolveram simulações e modelos matemáticos, além de problemas que continham aspectos da realidade, como por exemplo, o problema do teleférico entre a estação de trem São Luís e a ULBRA.

Assim, infere-se que estas atividades mencionadas sejam priorizadas em um AVA, dada a importância das mesmas para a motivação dos alunos e suas possibilidades de contribuir para a aprendizagem destes. Além disso, é importante desenvolver atividades que requerem um nível cognitivo maior, que exigem pesquisa, concentração e pensamento matemático mais elaborado, pois sabe-se que isto não é trivial dentro do processo de ensino e aprendizagem, mas de acordo com os resultados positivos obtidos preconiza-se insistir na utilização deste tipo de metodologia.

Entende-se que ao responder estas nove questões, responde-se ao problema desta investigação: como implementar (desenvolver, aplicar e avaliar) uma proposta metodológica para o Ensino Médio com os conteúdos de Geometria Analítica articulada com os Registros de Representação Semiótica?

Infere-se que todo o estudo realizado para a implementação desta proposta metodológica foi importante, sendo cada uma das etapas desenvolvidas essenciais para o desenvolvimento, aplicação e avaliação da mesma. Ou seja, para implementar uma proposta metodológica para o Ensino Médio com os conteúdos de Geometria Analítica articulada com os Registros de Representação Semiótica considera-se fundamental estudar esta teoria; estudar as políticas públicas, o que elas recomendam para o ensino deste tema e as habilidades matemáticas que esperam-se ser desenvolvidas ou demonstradas pelos educandos; investigar as propostas curriculares da escolas em relação a este tema e como os professores desenvolvem o processo de ensino e aprendizagem do mesmo, a fim de buscar contribuir com as dificuldades que os mesmo encontram ao ensinar Geometria Analítica, por meio de uma proposta que apresente inovações neste processo; investigar e compreender como os livros didáticos trabalham este tema, pois estes influenciam no processo de ensino e aprendizagem desenvolvido nas escolas, sendo possível aproveitar atividades que estejam de acordo com a proposta metodológica a ser implementada; estudar as tendências metodológicas para o Ensino da Matemática que possam ser utilizadas nesta proposta. Embasado nestes aspectos é possível desenvolver uma sequência com atividades que busquem motivar os alunos, como também exijam dos mesmos um nível cognitivo maior, possibilitando a assimilação e apreensão dos conceitos de Geometria Analítica, o que contribuirá para a formação de cidadãos capazes de analisar situações, raciocinar e visualizar estratégias para resolução de problemas em sua vida e na sociedade.

CONCLUSÃO

Esta pesquisa buscou investigar a temática Geometria Analítica no atual sistema de Ensino Médio e as possibilidades didático-pedagógicas de uma proposta metodológica articulada com a teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval, para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem deste tema, no currículo de Matemática do Ensino Médio utilizando Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC).

Para alcançar este objetivo foram traçados os seguintes objetivos específicos:

a) Identificar quais conteúdos de Geometria Analítica são ensinados, quais os objetivos a serem alcançados com o estudo destes conteúdos, as metodologias utilizadas e se estas referem-se ao uso dos Registros de Representação Semiótica com tarefas de diferentes natureza de tratamentos e conversões entre os diferentes registros semióticos, quando são ensinados, e o que, como e quando estes conteúdos estão sendo avaliados, contrastando com as Políticas Públicas (Parâmetros Curriculares Nacionais e a Proposta Curricular de Matemática do Rio Grande do Sul) no que tange à Matemática e os conceitos de Geometria Analítica;

b) Investigar os livros didáticos de Matemática, do Plano Nacional do Livro Didático de 2012, para o Ensino Médio, no que se refere a Geometria Analítica e os Registros de Representação Semiótica;

c) Investigar como desenvolver o processo de ensino e aprendizagem em um ambiente virtual de aprendizagem, com os conteúdos de Geometria Analítica articulada com a teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval .

d) Identificar o desenvolvimento de habilidades matemáticas e dificuldades apresentadas por um grupo de alunos de uma turma do Ensino Médio, com a implementação de um experimento com o AVA desenvolvido sobre os conteúdos de Geometria Analítica embasado na teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval.

Considera-se que as etapas metodológicas definidas nesta investigação alcançaram cada um destes objetivos, os quais estão relacionados às nove questões respondidas com as ações e instrumentos de coleta de dados adotados e os dados coletados. As respostas obtidas foram fundamentais para responder ao problema de pesquisa: como implementar (desenvolver, aplicar e avaliar) uma proposta metodológica para o Ensino Médio com os conteúdos de Geometria Analítica articulada com os Registros de Representação Semiótica.

Com a implementação da proposta metodológica desenvolvida para o processo de ensino e aprendizagem da Geometria Analítica, nos conteúdos de Ponto, Reta e Circunferência, verificou-se que, em geral, os alunos investigados em duas turmas do Ensino Médio, em uma escola pública estadual do município de Canoas- RS, apresentaram as 21 habilidades ligadas a estes conteúdos e estabelecidas a partir do estudo das políticas públicas nacionais e estaduais. No entanto, apresentaram dificuldades, sobretudo nos problemas geradores dos estudos dos conceitos do grafo do tema Geometria Analítica e no primeiro teste adaptativo realizado no sistema SIENA.

A análise dos dados coletados mostrou que a medida que os alunos que não obtiveram desempenho satisfatório (média 0,6) foram retomando os estudos e explorando os recursos didáticos disponibilizados na sequência didática do AVA desenvolvido para fazer novos testes adaptativos no sistema SIENA, estas dificuldades foram sendo cada vez menos apresentadas e as habilidades definidas adquiridas ou demonstradas. Salienta-se que nem todos os alunos, mesmo atingindo o desempenho satisfatório demonstraram todas as 21 habilidades matemáticas, o que requer que esta sequência didática seja ampliada no intuito de que esta proposta metodológica contribua para que as habilidades menos demonstradas sejam adquiridas e as dificuldades ainda existentes, sanadas. No entanto, ficou claro que os alunos foram evoluindo em seus conhecimentos, pois ocorreu uma melhora significativa em relação as dificuldades apresentadas inicialmente.

A partir dos resultados positivos encontrados com a implementação da proposta metodológica desenvolvida em um ambiente virtual de aprendizagem, com estas duas turmas de alunos do terceiro ano do Ensino Médio, entende-se ser primordial abordagens didático-pedagógicas que mobilizem e articulem diferentes Registros de Representação Semiótica, tanto na explicação dos conceitos como em problemas propostos, associando estas abordagens com diferentes tendências metodológicas para o ensino da Matemática, principalmente o uso de TIC.

Desta forma, considera-se respondido o problema desta pesquisa, ou seja, para implementar uma proposta metodológica para o Ensino Médio com os conteúdos de Geometria Analítica articulada com os Registros de Representação Semiótica considera-se fundamental estudar esta teoria; estudar as políticas públicas, o que elas recomendam para o ensino deste tema e as habilidades matemáticas que esperam-se ser desenvolvidas ou demonstradas pelos educandos; investigar as propostas curriculares da escolas em relação a este tema e como os professores desenvolvem o processo de ensino e aprendizagem do mesmo, a fim de buscar contribuir com as dificuldades que os mesmo encontram ao ensinar Geometria Analítica, por meio de uma proposta que apresente inovações neste processo; investigar e compreender como os livros didáticos trabalham este tema, pois estes influenciam no processo de ensino e aprendizagem desenvolvido nas escolas, sendo possível aproveitar atividades que estejam de acordo com a proposta metodológica a ser implementada; estudar as tendências metodológicas para o Ensino da Matemática que possam ser utilizadas nesta proposta.

Conclui-se que a proposta metodológica implementada contribuiu no processo de ensino e aprendizagem da Geometria Analítica dos alunos investigados e preconiza-se, com base nestes resultados que, mesmo que haja resistência por parte dos alunos, é importante insistir na utilização deste tipo de metodologia que propõe o uso de tecnologias de forma planejada, desenvolvendo atividades que requerem um nível cognitivo maior, que exigem pesquisa, concentração e pensamento matemático mais elaborado.

Sugere-se para pesquisas futuras com o tema Geometria Analítica a ampliação do banco de questões, pois questões consideradas com nível de dificuldade médio, definidas como congruentes, com base na teoria dos Registros de Representação Semiótica, podem representar um nível de dificuldade maior para os alunos a serem investigados. Além disso, o desenvolvimento de questões que embasadas nesta teoria pode contribuir no planejamento e desenvolvimento das aulas de professores que trabalham com este tema já que os livros didáticos priorizam os tratamentos do que as conversões de diferentes registros Semióticos.

Sugere-se, também, a ampliação da sequência didática com este tema buscando desenvolver outras atividades que possam contribuir no processo de ensino e aprendizagem da Geometria Analítica.

Espera-se que esta investigação e a proposta metodológica desenvolvida possam contribuir para uma discussão e reflexão sobre o processo de ensino e aprendizagem da Geometria Analítica, mais especificamente Ponto, Reta e Circunferência aqui abordados, como também da Matemática, permeadas pela teoria dos Registros de Representação Semiótica, e consequentemente contribuir para melhorar a qualidade deste processo na área da Matemática.

REFERÊNCIAS

ABREU, Priscila Fonseca de; BAIRRAL, Marcelo Almeida. O uso que os professores de matemática fazem da informática educativa em suas aulas. In: BAIRRAL, Marcelo Almeida (Org.). **Tecnologias informáticas, salas de aula e aprendizagens matemáticas.** 1. ed. Rio de Janeiro: Ed. Da UFRRJ, 2010, p. 19- 34.

ALMEIDA, Lourdes Werle de; SILVA Karina Pessôa; VERTUAN, Rodolfo Eduardo**.** **Modelagem Matemática na Educação Básica.** São Paulo: Contexto, 2012.

ANDRADE, Luísa Silva. **Registros de Representação Semiótica e a Formação de Professores**. Canoas: ULBRA, 2008. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática), Universidade Luterana do Brasil, Canoas, 2008.

ANDRADE, Luísa Silva; Kaiber, Carmen Teresa. O Ensino de Funções e os Registros de Representação Semiótica. In: V CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DA MATEMÁTICA. Canoas. **Anais**. Rio grande do Sul: 2010.

ANDRADE, Silvanio de. **Ensino-aprendizagem da Matemática via Resolução, Exploração, Codificação e Decodificação de Problemas.** Rio Claro: UNESP, 1998. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Universidade Estadual Paulista, 1998.

ARAÚJO, Jussara de Loiola; BORBA, Marcelo de Carvalho. Contruindo pesquisas coletivamente em Educação Matemática. In: ARAÚJO, Jussara de Loiola; BORBA, Marcelo de Carvalho (Orgs.). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2004. p. 25-45.

ARRUDA, Eucídio Pimenta. **Aprendizagens e Jogos Digitais.** Campinas: Editora Alínea, 2011.

BAIER, Tânia; SCHWERTL, Simone Leal. Trabalhando a Geometria Analítica com a Postura Fenomenológica. In: III SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Águas de Lindóia. **Anais.** São Paulo: 2006.

BAIRRAL, Marcelo Almeida. **Tecnologias da Informação e Comunicação na Formação e Educação Matemática.** 1. ed. Rio de Janeiro: Ed. Da UFRRJ, 2009.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. O que pensam os professores sobre a Modelagem Matemática?. **Zetetiké**, Campinas, v.7, n.11, p. 67-85, jan./jun. 1999.

______. Modelagem Matemática na sala de aula. **Perspectiva**, Erechim, v.27, n.98, p.65-74, jun. 2003.

______; SILVA, Jonson Ney Dias. Modelagem matemática e as discussões técnicas nas interações entre professor e alunos. **Boletim Gepem.** Rio de janeiro: O grupo, n.59, jul./dez. 2011.

BARONI, Rosa L. S.; NOBRE, Sergio. A Pesquisa em História da Matemática e suas Relações com a Educação Matemática. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática:** concepções e perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999, p. 129- 136.

BASSANESI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática** : uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2002.

BARROSO, Juliane Matsubara. **Conexões com a Matemática.** vol 3. São Paulo: Moderna, 2010.

BELLEMAIN, Franck et al. Desenvolvimento de Tecnologias para a Educação Matemática- Avanços e Desafios. In: JAHN, Ana Paula; ALLEVATO, Norma Suely Gomes (Org.). **Tecnologias e Educação Matemática.** Recife: SEBEM, 2010, p. 243- 262.

BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN Nelson. **Modelagem Matemática no Ensino**. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2003. 127p.

BEZERRA, Nilra Jane Figueira. O GPS como Instrumento Didático Auxiliar no Processo de Significação Conceitual do Ensino da Geometria Analítica. In: IV SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Brasília. **Anais.** Distrito Federal: 2009.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; ROSA, Maurício. **Realidade e Cibermundo:** Horizontes Filosóficos e Educacionais Antevistos. Canoas: Ed. ULBRA, 2010.

BIEMBENGUT, Maria Salett ; HEIN Nelson. **Modelagem Matemática no Ensino**. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2003.

BODGAN, Roberto C.; BIKLEN, Sari Knopp. **Investigação Qualitativa em Educação:** uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 1999.

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e Educação Matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

BORBA, Marcelo de Carvalho. Tecnologias Informáticas na Educação Matemática e Reorganização do Pensamento. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática:** concepções e perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999, p. 285- 295.

BORNATTO, Gilmar. Modelagem – Simulação – Informática e Matemática. **Rev. PEC.** Curitiba, v.2, n.1, jul. 2001-jul. 2002.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática.** São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. Brasília: Ministério da Educação e do Desporto, 1998.

_______. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares do Ensino Médio:** ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/ Seb, 2000.

________________. **PCN+ Ensino Médio:** orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC/ Seb, 2002.

________________. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio:** ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/ Seb, 2006.

________________. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. **Guia de livros didáticos: PNLD 2012 :** Matemática / Brasília, 2011.

________________. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**, Lei nº 9394, 20 de dezembro de 1996. Brasília : MEC, 1996.

________________. Ministério da Educação. **PDE: Plano de Desenvolvimento da Educação: SAEB: ensino médio : matrizes de referência, tópicos e descritores.** Brasília : MEC, SEB; Inep, 2008. Caderno de 2011.

_________________. Ministério da Educação. **Programa Internacional de Avaliação de Alunos.** Brasília: MEC/ INEP , 2003.

_________________.Ministério da Educação. **Exame Nacional do Ensino Médio.** Brasília: MEC/INEP, 2009.

BUTTS, Thomas. Formulando Problemas Adequadamente. In: KRULIK, Stephen; REYS, Robert E.(Org.). **A Resolução de Problemas na Matemática Escolar.** Tradução de Hygino H. Domingues e Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997, p. 33- 48.

COLL, César. **Psicologia e Currículo.** São Paulo: Ática, 1997.

COMIN, Aline; etal. **História da Educação Matemática:** escrita e reescrita de histórias. Org. Ocsana Sônia Danyluk. Porto Alegre: Sulina, 2012.

CONTADOR, Paulo Roberto Martins. **Matemática Uma Breve História.** vol1, 4.ed. São Paulo: Editora Livaria da Física, 2012.

COSTA, Denise Reis. **Métodos estatísticos em testes adaptativos informatizados.** 2009. 107 f. Dissertação (Mestrado em Estatística) – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2009.

DALLEMOLE, Joseide Justin. **Registros de Representação Semiótica: uma experiência com o ambiente virtual SIENA.** Canoas: ULBRA, 2010. Dissertação (Mestrado em Ensino de de Ciências e Matemática), Universidade Luterana do Brasil, Canoas, 2010.

DAMM, Regina Flemming. Registros de Representação. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara et al. **Educação Matemática**: uma introdução. 2.ed. São Paulo: EDUC, 2002. p. 135-153.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Educação Matemática, da Teoria à Prática.** São Paulo: Papirus, 1997.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. Um Enfoque Transdisciplinar à Educação e à História da Matemática. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; BORBA, Marcelo de Carvalho (Org.). **Educação Matemática**: pesquisa em movimento. 3. ed. São Paulo: Cortez, 2009, p. 13-29.

DANTE, Luiz Roberto. **Formulação e Resolução de Problemas de Matemática:** teoria e prática. 1 ed. São Paulo: Ática, 2009.

___________________. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática.** São Paulo: Ática, 1995.

___________________. **Matemática:** contexto e aplicações. vol 3. São Paulo: Ática, 2010.

DINIZ, Maria Ignez; SMOLE, Kátia Stocco. **Ler, Escrever e Resolver Problemas:** habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001.

DOLZ, Joaquim; NOVERRAZ, Michele; SCHNEUWLY, Bernard. Seqüências didáticas para o oral e a escrita: apresentação de um procedimento. In: SCHNEUWLY, Bernard; DOLZ, Joaquim. **Gêneros orais e escritos na escola.** Tradução de Roxane Rojo e Glaís Sales Cordeiro. Campinas, SP: Mercado das Letras, 2004, p. 95-128.

DUVAL, Raymond. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org). **Aprendizagem em Matemática**: Registros de Representação Semiótica. Campinas, SP: Papirus, 2003. p.11-33.

________________. **Semiosis y Pensamiento Humano:** Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales. Tradução em casteliano de Myriam Veja Reestrepo. Universidade Del Valle: Peter Lang, 2004.

________________. **Semiosis y Pensamiento Humano:** Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales. (fascículo I). Tradução de Lênio Frenandes Levy e Marisa RosâniAbreu da Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

________________. **Ver e Ensinar Matemática de Outra Forma:** entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. Tânia M. M. Campos (Org.). Tradução de Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011.

________________. Registres de Représentation Sémiotique et fontionnement cognitif de la pensée. Annales de Didactique et Sciences Cognitives. **IREM- ULP**, Strasbourg, 1993.

________________. Gráficos e Equações: a articulação de dois registros. Tradução de Méricles Thadeu Moretti. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**. Florianópolis, v.6. n.2, p.96-112, 2011. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat.

DULLIUS, Maria Madalena; HAETINGER, Claus; QUARTIERI, Marli Teresinha. Problematizando o Uso de Recursos Computacionais com um Grupo de Professores de Matemática. In: JAHN, Ana Paula; ALLEVATO, Norma Suely Gomes (Org.). **Tecnologias e Educação Matemática.** Recife: SEBEM, 2010, p. 145- 161.

ECHEVERRÍA, Maria del Puy Pérez; POZO, Juan Ignacio. Aprender a Resolver Problemas e Resolver Problemas para Aprender. In: POZO, Juan Ignacio (Org.) **A Solução de Problemas:** aprender a resolver, resolver para aprender. Tradução de Beatriz Affonso Neves. Porto Alegre: Artmed, 1998, p. 13 –42.

ECHEVERRÍA, Maria del Puy Pérez.A Solucao de Problemas em Matemática. In: POZO, Juan Ignacio (Org.) **A Solução de Problemas:** aprender a resolver, resolver para aprender. Tradução de Beatriz Affonso Neves. Porto Alegre: Artmed, 1998, p.43- 65.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática.** Tradução Hygino H. Domingues. São Paulo: Editora da Unicamp, 2004.

FLEMMING, Diva Marília; MELLO, Ana Cláudia Collaço de. **Criatividade e Jogos Didáticos.** São José: Ed. Saint Germain, 2003.

FLORES, Cláudia Regina. **Registros de Representação Semiótica em Matemática:** história, epistemologia, aprendizagem. Bolema, 2006. Disponível em : <http://ojs,rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/viewarticle/1853> Acesso em : 10 maio 2008.

FOSSA, John A. (Org). **Facetas do Diamante:** Ensaios sobre Educação Matemática e História da Matemática. Editora da SBH: Rio Claro-SP, 2000.

GROENWALD, Claudia Lisete Oliveira; RUIZ, Lorenzo Moreno. Formação de Professores de Matemática: uma proposta de ensino com novas tecnologias. **Acta Scientiae**. Canoas, v.8, n.2, jul./dez.2006.

__________________; TIMM, Ursula Tatiana. Utilizando Curiosidades e jogos matemáticos em sala de aula. **Educação Matemática em Revista** - RS, n.2 , Ano II, p.21-26, nov.2000

________________________. La storia como risorsa per insegnare le equazioni di secondo grado. **La Matematica e la sua Didattica.** n.4, 2005.

__________________________ et al. Sequência Didática com Análise Combinatória no Padrão SCORM. **Bolema.** Rio Claro, ano22, n.34, p.27-56, 2009.

___________________; HOMA, Agostinho Iaqchan Ryokiti. Ambiente Virtual de Aprendizagem do programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática da ULBRA. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, Canoas-RS, v. 16, n.4, p.10-24, edição especial 2014.

GRIMBERG, Gérard E. História da Matemática e Educação Matemática. In: CARVALHO et al. (Org.). **História e Tecnologia no Ensino da Matemática.** Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2008, p. 207- 214.

IEZZI, Gelson, et al. **Matemática:** ciência e aplicações. vol 3. São Paulo: Saraiva, 2010.

KAISER, Gabriele; SRIRAMAN, Bharath. A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. **Zentralblatt für Didaktik Mathematik**, v.38, n.3, 2006, p.302-310.

KAMPFF, Adriana Justin Cerveira; MACHADO, José Carlos; CAVEDINI, Patrícia. Novas Tecnologias e Educação Matemática. In: X WORKSHOP DE INFORMÁTICA NA ESCOLA E XXIII CONGRESSO DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE COMPUTAÇÃO, 2004, Bahia. Disponível em: <http://www.cinted.ufrgs.br/renote/nov2004/artigos/a12_tecnologias_matematica.pdf> Acesso em: 10 jun. 2008.

LÉVY, Pierre. **As Tecnologias da Inteligência:** o futuro do pensamento na era da informática. Rio de Janeiro**:** Editora 34, 1993.

MACHADO, Nilson José et al. **Jogos no Ensino da Matemática**. Cadernos de Prática de ensino–Série Matemática. São Paulo: USP, ano1, n.1, 1990.

MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). **Aprendizagem em Matemática**: Registros de Representação Semiótica. Campinas, SP: Papirus, 2003.

MANOEL, Paiva. **Matemática- Paiva.** vol 3. São Paulo: Moderna, 2009.

MATTAR, João. **Games em educação: como os nativos digitais aprendem**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

MATTOS, Francisco R. F.; MORAES, Thiago Guimarães; GUIMARÃES, Luiz Carlos. Tecnologias de Informação na Comunicação de Objetos Matemáticos. In: JOLY, Maria Cristina Rodrigues Azevedo (Org.). **A Tecnologia no Ensino:** implicações para a aprendizagem. 1. ed. São Paulo: Casa do Psicólogo, 2002, p. 227- 242.

MARINHO, Simão Pedro. Tecnologia, educação contemporânea e desafios ao professor. In: JOLY, Maria Cristina Rodrigues Azevedo (Org.). **A Tecnologia no Ensino:**implicações para a aprendizagem. 1. ed. São Paulo: Casa do Psicólogo, 2002, p. 41- 62.

MASETTO, Marcos Tarciso. Formação continuada de docentes no ensino superior numa sociedade do conhecimento. In: I COLÓQUIO INTERNACIONAL SOBRE ENSINO SUPERIOR. Feira de Santana. **Anais.** Bahia: 2008.

MEDEIROS, Kátia Maria. O contrato didático e a resolução de problemas matemáticos em sala de aula. **Educação Matemática em Revista.** Porto Alegre: SBEM, ano 8, n. 9/10, 2001.

MENDES, Iran Abreu. **Matemática e Investigação em Sala de Aula:** tecendo redes cognitivas na aprendizagem. 2. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.
MIGUEL, Antonio; MIORIM, Maria Ângela. **História na Educação Matemática:** propostas e desafios. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

MISKULIN, Rosana Giaretta Sguerra; SILVA, Mariana da Rocha Corrêa. Cursos de Licenciatura em Matemática a Distância: uma realidade ou utopia? In: JOLY, Maria Cristina Rodrigues Azevedo (Org.). **A Tecnologia no Ensino:** implicações para a aprendizagem. 1. ed. São Paulo: Casa do Psicólogo, 2002, p. 105- 124.

MOITA, Filomena. Game On: **Jogos Eletrônicos na Escola e na Vida da Geração @**. Campinas: Editora Alínea, 2007.

MORAN, José Manuel; MASETTO, Marcos Tarciso; BEHRENS, Maria Aparecida. **Novas tecnologias e mediação pedagógica.** 19. ed. São Paulo: Papirus, 2012.

MORETTI, Méricles Thadeu. A Translação como Recurso no Esboço de Curvas por meio da Interpolação Global de Propriedades Figurais. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). **Aprendizagem em Matemática**: Registros de Representação Semiótica. Campinas, SP: Papirus, 2003. p.149-160.

_______________. O papel dos registros de representação na aprendizagem matemática. **Revista de Educação da Universidade do Vale do Itajaí**, Itajaí, ano2, n.6, p.342-362, set/dez 2002.

________________; FLORES, Cláudia Regina. Heurística, reconfiguração e aprendizagem matemática: uma possiblidade a partir do uso de figuras geométricas. **Revemat- Revista Eletrônica de Educação Matemática.** p. 5-13. UFSC, 2005.

NEHRING, Cátia Maria; POZZOBON, Marta Cristina Cezar. A Intervencão Docente no Ensino de Álgebra: atividades de livro didático e registros de representação. In: X ENCONTRO GAÚCHO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Ijuí. **Anais.** Rio Grande do Sul: SBEM, 2009.

NERES, Raimundo Luna. **Aplicação dos registros de representação semiótica no ensinoaprendizagem da matemática:** um estudo com alunos do sexto anodo ensino fundamental. Marília: Universidade Estadual Paulista, 2010. Tese (Doutorado em Educação), Universidade Estadual Paulista, Marília- SP, 2010

NOVAK, J. GOWIN D. **Aprediendo a aprender.** Barcelona: Ediciones Martínez Roca, S.A, 1988.

ONUCHIC, Lourdes de La Rosa. Ensino- Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In:BICUDO, Maria Aparecida V.(org). **Pesquisa em Educação Matemática:** concepções e perspectivas. São Paulo: Ed. UNESP, 1999.

ONUCHIC, L. R; ALLEVATO, N. S. G. Novas Reflexões sobre o Ensino- Aprendizagem de Matemática atravé da Resolução de Problemas. In: BICUDO, M. A. V; BORBA, M. C. (ORGS). **Educação Matemática:** pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004.

______; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; BORBA, Marcelo de Carvalho (Org.). **Educação Matemática**: pesquisa em movimento. 3. ed. São Paulo: Cortez, 2009, p. 213- 231.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática:** uma análise da influência francesa. 2.ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

PENTEADO, Miriam Godoy. **Redes de Trabalho:** Expansão da Informática na Educação Matemática da Escola Básica. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; BORBA, Marcelo de Carvalho (Org.). **Educação Matemática**: pesquisa em movimento. 3. ed. São Paulo: Cortez, 2009, p. 283- 295.

______. Novos Atores, Novos Cenários: discutindo a inserção dos computadores na profissão docente. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática:** concepções e perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999, p. 297- 313.

PEREIRA, Franz Kreüther. **Modelação e Simulação Matemática a partir da 5ª série:** uma proposta de uso do MS-Excel e do MS-Paint Brush no Ensino Fundamental. Artigo para avaliação parcial da disciplina Modelagem Matemática no Curso de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemáticas do NPADC/UFPA/2003. Disponível em < http://pt.scribd.com/doc/28452976/Modelacao-e-Simulacao-Matematica-a-partir-da-5%C2%AA-serie-uma-proposta-de-uso-do-MS-Excel-e-do-MS-Paint-Brush-no-Ensino-Fundamental> Acesso em: 03 out. 2012.

POLYA, George. **A Arte de Resolver Problemas:** um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

POZO, Juan Ignácio. et al. **A Solução de Problemas:** aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: Artmed, 1998.

______.Sobre a Resolução de Problemas de Matemática na high school. In: KRULIK, Stephen; REYS, Robert E.(Org.). **A Resolução de Problemas na Matemática Escolar.** Tradução de Hygino H. Domingues e Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997, p. 1- 3.

PONTE, João Pedro da. Novas Tecnologias na aula de Matemática.**Educação e Matemática**, Lisboa: APM, n.34, 1995.

PRENSKY, Marc. **Aprendizagem Baseada em Jogos Digitais**. São Paulo: Editora Senac, 2012.

RIBEIRO, Jackson. **Matemática:** ciência, linguagem e tecnologia. vol 3. São Paulo: Scipione, 2010.

RIO GRANDE DO SUL. Secretaria de Educação. **Padrão Referencial de Currículo:** documento básico. Porto Alegre: SE, 1996.

RIO GRANDE DO SUL. Secretaria da Educação. **Proposta Pedagógica para o Ensino Médio Politécnico e Educação Profissional Integrada ao Ensino Médio – 2011- 2014.** Porto Alegre: SE, 2011.

____________________. Secretaria de Estado da Educação. Departamento Pedagógico. **Referenciais Curriculares do Estado do Rio Grande do Sul: Matemática e suas Tecnologias.** Porto Alegre: SE/DP, 2009.

RODRÍGUEZ, Eugenio Carlos. La Investigación en Didáctica de la Matemática y el deseño del Currículo: una visión con el uso de la tecnología. **Acta Scientiae**. Canoas, v.11, n.2, jul./dez.2009.

SANDS, William A.;WATERS, Brian K. Introduction to ASVAB and CAT. In: SANDS, William A.; WATERS, Brian K.; MCBRIDE, James R.(Eds.). **Computerized adaptive testing:** from inquiry to operation. Washington: American Psychological Association, 1997.

SCHEFFER, Nilse Fátima; BRESSAN, Jordana Zawieruka; CORRÊA, Ricardo Machado. Narrativas Matemáticas: linguagem verbal e não-verbal a argumentação e os registros de representação na discussão do tema funções com o auxílio de tecnologias. In: JAHN, Ana Paula; ALLEVATO, Norma Suely Gomes (Org.). **Tecnologias e Educação Matemática.** Recife: SEBEM, 2010, p. 45- 61.

SILVA, Carlos Roberto da. **Explorando Equações Cartesianas e Paramétricas em um Ambiente Informático.** São Paulo: PUC, 2006. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2006.

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. **Matemática:** ensino médio. vol 3. São Paulo: Saraiva, 2010.

SOARES, Maria Arlita da Silveira; NEHRING, Cátia Maria. O Processo de Ensinar e Aprender Matemática num Mundo Globalizado e os Registros de Representação Semiótica. In: IX ENCONTRO GAÚCHO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Caxias do Sul. **Anais.** Rio Grande do Sul: SBEM, 2006.

SOUZA, Joamir. **Novo Olhar Matemática.** vol 3. São Paulo: FTD, 2010.

SUTHERLAND, Rosamund. **Ensino Eficaz da Matemática.** Porto Alegre: Artmed,2009.

TRIGO, Luz Manuel Santos. La educación matemática, resolución de problemas y el empleo de herramientas computacionales. In: Comité Interamericano de Educación Matemática (Org.). **Temas Selectos en la Educación Matemática:** xii conferencia interamericana de educación matemática. México: Ángeles Editores, 2011, p. 33- 49.

VALENTE, José Armando. A Espiral da Aprendizagem e as Tecnologias da Informação e Comunicação: repensando conceitos. In: JOLY, Maria Cristina Rodrigues Azevedo (Org.). **A Tecnologia no Ensino:** implicações para a aprendizagem. 1. ed. São Paulo: Casa do Psicólogo, 2002, p. 15- 37.

VALENTE, José Armando. Análise dos diferentes tipos de software usados na educação. In: VALENTE, José Armando (Org.) **O comportamento na sociedade do conhecimento**. Campinas: Unicamp, 1999.

WAINER, H. **Computerized adaptive testing: a primer.** New Jersey: Lawewnce Erlbaum Associates, 2000.

ZABALA, Antoni. A **Prática Educativa:** como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998.

ZANOLA, Silvia Rosa Silvia. **Videogame, Educação e Cultura**. Campinas: Editora Alínea, 2010.

APÊNDICES

APÊNDICE A- QUESTIONÁRIO APLICADO AOS PROFESSORES

Este questionário compõe ações investigativas que fazem parte da pesquisa de doutorado de Joseide Justin Dallemole pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática/ULBRA- Canoas. O nome e/ou a escola do(a) entrevistado(a) não será(ão) divulgado(s) e será(ão) usado(s) somente como referência para a investigadora. SUAS RESPOSTAS SÃO MUITO IMPORTANTES, pois elas serão fundamentais para a produção da tese que visa investigar o conteúdo de Geometria Analítica no atual sistema de Ensino Médio do Rio Grande do Sul e as possibilidades didático-pedagógicas de uma proposta metodológica articulada com a teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval, para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem deste conteúdo, no currículo de Matemática do Ensino Médio. A proposta metodológica desenvolvida será disponibilizada gratuitamente para uso dos professores em suas aulas, após a conclusão da pesquisa.

Caso deseje respondê-lo on-line acesse o site: https://docs.google.com/spreadsheet/viewform?formkey=dFQ3T1dSMzRlMG9qSVltTFItSkxFWWc6MQ#gid=0

Nome: ____

Escola em que leciona:____

Cidade: ____________________ E-mail:______________________________

Carga horária: ____________ Tempo como docente:_______________

Formação em Matemática: ( ) Graduação ( ) Especialização

( ) Mestrado ( ) Doutorado

1) Quais conteúdos de Geometria Analítica você ensina? Em que série do Ensino Médio? E qual trimestre?

2) Quais objetivos busca atingir com o ensino destes conteúdos?

3) Quais metodologias você utiliza para ensinar estes conteúdos aos alunos?

( ) História da Matemática ( ) Modelagem Matemática

( ) Resolução de problemas ( ) Atividade lúdica

( ) Recursos tecnológicos

Outras:____

3.a) Descreva as atividades lúdicas caso utilizas alguma.

3. b) Com relação a metodologia com o uso de tecnologias informáticas: jogos, planilhas, softwares, etc., fale sobre os recursos que você utiliza.

4) Qual livro didático foi adotado para uso dos alunos?

5) Você utiliza livros didáticos na preparação das suas aulas? Quais?

6) Com relação as atividades propostas aos alunos nos conteúdos de Geometria Analítica (Aqui vamos chamar de atividades na "Língua Natural", atividades cujo enunciado (Pergunta ou Resposta) apresente somente informações escritas, conceitos.):

( ) Propõe atividades que partem da Língua Natural e cuja resposta seja dada da mesma maneira.

( ) Propõe atividades que partem de informações numéricas e cuja resposta seja da mesma forma.

( ) Propõe atividades do tipo resolução de equações, escrever a equação geral na sua forma reduzida ou ao contrário.

( ) Propõe atividades a partir de gráficos que demandem para sua resolução tarefas no gráfico apresentado. (ex. Traçar a mediatriz da Reta representada no gráfico.)

( ) Propõe atividades a partir de figuras (ex. Reta, Circunferência não no plano cartesiano) e cuja resposta relacione conexões conceituais e simetrias com outras figuras.

7) Ainda procura propor atividades que:

( ) Partem da Língua Natural e cuja resposta seja uma expressão algébrica.

( ) Partem de expressões algébricas e cuja resposta seja de forma descritiva (Língua Natural).

( ) Partem da Língua Natural e cuja resposta seja apresentada em forma de gráfico.

( ) Partem de um gráfico e cuja resposta seja apresentada na forma Língua Natural.

( ) Partem de um gráfico e cuja resposta seja numérica.

( ) Partem de informações numéricas e cuja resposta seja um gráfico.

( ) Partem de expressões algébricas e cuja resposta seja um gráfico.

( ) Partem de um gráfico e cuja resposta seja uma expressão algébrica.

8) Quais as dificuldades que os alunos apresentam na aprendizagem dos conteúdos de Geometria Analítica?

9) Como é realizada a avaliação do aluno referente a sua aprendizagem em Geometria Analítica?

10) O que é avaliado?

11) Quando é avaliado?

Outras considerações:

APÊNDICE B- CD COM A SEQUÊNCIA DIDÁTICA E O BANCO DE QUESTÕES

A sequência didática apresentada neste CD também está disponível para visualização na internet pelo site: www.pesquisa.net16.net . Para utilizar esta sequência entre em contato com a pesquisadora[5] e solicite seu login e senha.

[5] jjdallemole@yahoo.com.br

APÊNDICE C- AUTORIZAÇÃO PARA USO DE IMAGEM

AUTORIZAÇÃO PARA USO DE IMAGEM

DADOS DO(A) ALUNO(A)

Nome do(a) Aluno(a): ____

Data de Nascimento: ______/_____/_____ CPF: ______________________

Célula de Identidade: ______________________ Sexo: _______

O(a) responsável pelo(a) aluno(a) acima identificado, AUTORIZA a doutoranda Joseide Justin Dallemole, do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil, campus Canoas, a utilizar-se da imagem do mesmo, para fins exclusivos de divulgação das suas atividades de pesquisa para a elaboração da tese sobre Registros de Representação Semiótica e Geometria Analítica.

A presente autorização é concedida a título gratuito, sem que nada possa ser reclamado, a qualquer título.

E, por ser esta a expressão de vontade, declaro que autorizo o uso da imagem do nome acima descrito, sem qualquer contraprestação pecuniária.

Canoas, _______ de ______________________ de _________

____

Assinatura do(a) Responsável

CPF:

APÊNDICE D- QUESTIONÁRIO PARA IDENTIFICAÇÃO DO PERFIL DOS ALUNOS

1. Nome e idade:

____

2. Mora com os seus pais? ( ) Sim ( ) Não

3. Mora no bairro da escola ou em outro bairro?__________________________________

4. Você exerce atividade profissional?

( ) Sim ( ) Não Qual? ____

5. Quantas horas você trabalha por dia? ____

6.Você repetiu na disciplina de Matemática em alguma série? Qual? ____

7. Você considera importante estudar Matemática? Por quê?

____

____

8. Quantas horas semanais você dedica ao estudo da matemática?___________________

9. Você pretende fazer a prova do Enem ? ( ) Sim ( ) Não

10. Você pretende ingressar em um curso superior ou técnico no próximo ano? Qual curso?____

11. Você tem computador em casa? ( ) Sim ( ) Não

13. Com que frequência você o utiliza? ( ) frequentemente ( ) as vezes ( ) nunca

14. Você utiliza o computador para fazer que tipo de atividades?

____

APÊNDICE E- ROTEIRO PARA PROTOCOLO DAS OBSERVAÇÕES

1) Data:

2) Duração Da aula:

3) Alunos participantes:

4) Interesse e comprometimento na realização das tarefas:

5) Manisfetações dos alunos e da professora titular:

6) Demais observações: