UNIVERSIDADE LUTERANA DO BRASIL

PRÓ-REITORIA ACADÊMICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

Sheila Motta Steffen do Nascimento

PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS NO 4º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL: ENSINO E ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÃO

Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática

ORIENTADORA

Profa. Dra. Jutta Cornelia Reuwsaat Justo

Canoas

2017

UNIVERSIDADE LUTERANA DO BRASIL

PRÓ-REITORIA ACADÊMICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

Sheila Motta Steffen do Nascimento

PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS NO 4º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL: ENSINO E ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÃO

Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Jutta Cornelia Reuwsaat Justo

Canoas, 2017

SHEILA MOTTA STEFFEN DO NASCIMENTO

PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS NO 4º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL: ENSINO E ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÃO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Linha de Pesquisa: Ensino e Aprendizagem de Ciências e Matemática

Aprovado em: ______________________

BANCA EXAMINADORA

____

Orientadora Jutta Cornelia Reuwsaat Justo
Professora Doutora – ULBRA

____

Rosana Maria Gessinger
Professora Doutora – PUCRS

____

Carmen Teresa Kaiber
Professora Doutora – ULBRA

____

Arno Bayer
Professor Doutor – ULBRA

Abril, 2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

N244p Nascimento, Sheila Motta do

Problemas multiplicativos no 4º ano do ensino fundamental: ensino e estratégias de resolução. / Sheila Motta do Nascimento. – Canoas, 2017.

. 89 f.: il.

Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Luterana do Brasil, 2017.

Orientação: Profa. Dra. Jutta Cornelia Reuwsaat Justo

1. Educação – matemática - ensino. 2. Matemática – Operações básicas - multiplicação. 3. Ensino fundamental – matemática. 4. Ensino – resolução de problemas. I. Justo, Jutta Cornelia Reuwsaat. II. Título.

CDU 372.851

Bibliotecária Responsável: Ana Lígia Trindade CRB/10-1235

RESUMO

O objetivo deste estudo foi investigar aproximações entre as estratégias espontâneas utilizadas pelas crianças do 4º ano do Ensino Fundamental para resolver problemas matemáticos e os procedimentos de ensino de seus professores diante de tais estratégias. Para isso, utilizou-se a abordagem qualitativa e empregando-se estudo de caso, composto pela observação de aulas de duas professoras, aplicação e audiogravação de resolução de problemas multiplicativos e análise de dados de 21 alunos de uma escola estadual do município de São Sebastião do Caí/RS. Este estudo teve como questão norteadora: Que aproximações são possíveis entre as estratégias espontâneas das crianças do 4º ano do ensino fundamental para resolver problemas multiplicativos e os procedimentos de ensino de seus professores? A resposta ao problema fundamentou-se tanto em teorias que discutem as estratégias espontâneas das crianças quanto no campo conceitual multiplicativo. Os resultados encontrados evidenciaram que a multiplicação ainda é considerada difícil de ser ensinada e que os erros dos alunos pouco são utilizados para um novo procedimento de ensino. As análises apontam para a falta de intervenções adequadas dos professores diante dos erros e das estratégias que os alunos encontram para a resolução de problemas. Diante disso, percebe-se a dificuldade que professores e alunos enfrentam quando o assunto são as estruturas multiplicativas, abrindo-se um leque de possibilidades de pesquisas para a evolução de procedimentos de ensino.

Palavras-chave: anos iniciais; estratégias multiplicativas; resolução de problemas.

ABSTRACT

The aim of this study was to investigate approaches between children´s spontaneous strategies – from fourth grade of elementary school - in solving problems and the teaching procedures of their teachers in front of such strategies. This study was developed using the qualitative methodology placed on case study, and composed by classes observation of two teachers, application and audio recording of solving multiplicative problems and data analysis of 21 students from a state school in São Sebastião do Caí/RS. This study had a guiding question: Which analogies are possible between the children´s spontaneous strategies - on fourth grade elementary school - in solving multiplicative problems and their teachers´s teaching procedures? The answer to the problem was based both on theories that discuss children's spontaneous strategies and the multiplicative conceptual field. The results demonstraded that multiplication is still considered difficult to be taught and that student mistakes are little used for a new teaching procedure. The analysis indicates to the lack adequated teachers interventions facing the errors and strategies that students find to solving problems. Ultimately, its possible to realize the difficult that teachers and students face to when the matter is the multiplicative structures, opening a large range of research possibilities to the teaching procedures evolution.

Key-words: primary school; multiplicative strategies; problems solving.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Em diferentes etapas e áreas da educação, percebe-se a necessidade de que os alunos desenvolvam habilidades e estratégias que lhes proporcionem a aprendizagem, por si mesmos, de novos conhecimentos e não apenas a repetição de conhecimentos prontos e acabados que fazem parte da cultura, da ciência e da sociedade.

Na aprendizagem da Matemática, os problemas são fundamentais, pois permitem ao aluno colocar-se diante de questionamentos e pensar por si próprio, possibilitando o exercício do raciocínio lógico e não apenas o uso padronizado de regras.

Embora os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 1997) estejam em desuso, constituem uma importante base de pesquisa e informação até a implementação da Base Nacional Comum Curricular.

Na relação entre o aluno e o saber matemático, os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1997) consideram que as situações cotidianas favorecem o reconhecimento de problemas, a busca e a seleção de informações e a tomada de decisões. Portanto, desenvolver uma ampla capacidade para lidar com a atividade matemática requer: ampliar habilidades de natureza prática para lidar com a Matemática; reconhecer a capacidade de lidar com um dado problema, buscando estabelecer relações entre o já conhecido e o novo; estabelecer relações entre o novo conhecimento e o conhecimento prévio; relacionar ideias matemáticas entre si e entre os demais conhecimentos e situações do cotidiano.

Do ponto de vista metodológico, os PCN (BRASIL, 1997) recomendam que os conceitos matemáticos sejam abordados por meio da resolução de problemas, salientando que esses devem ser ponto de partida da atividade matemática. Tal argumentação vai ao encontro das recomendações de educadores matemáticos (VERGNAUD, 2009; NUNES; BRYANT, 1997; SMOLE; DINIZ, 2001; JUSTO, 2009), que apontam a resolução de problemas como estratégia facilitadora para a construção de conceitos matemáticos.

Estudos mostram que as crianças, já na educação infantil, podem resolver problemas multiplicativos muito antes da instrução formal (CARPENTER, 1980). A aprendizagem da Matemática é vista como um processo gradual e contínuo vivido ao longo do ensino básico, partindo-se da experiência e dos conhecimentos que os alunos já possuem, com domínio de números e cálculos, procurando estratégias para compreender e construir novos conhecimentos.

Gonçalves (2003) procura compreender como as crianças lidam com problemas multiplicativos, identificando estratégias usadas e os recursos utilizados durante sua resolução, considerando ser uma tarefa importante ao desafio de ser professor. Compreende-se que a Matemática não pode ser reduzida a um conjunto de procedimentos mecânicos e repetitivos. Assim, a base das aulas poderia, segundo Gonçalves (2003), estar centrada em levar a turma a construir diversos caminhos para chegar aos resultados.

Cotidianamente, como docente da área de Matemática, deparo-me com grandes dificuldades de aprendizagem encontradas pelos alunos na disciplina de Matemática e isso vem tornando-se muito preocupante. Sou professora há 12 anos em escola pública e, nesse período, já vivenciei diferentes experiências, entre elas, os obstáculos encontrados na resolução de problemas das estruturas multiplicativas, em que, na maioria das vezes, a memorização e o uso corriqueiro da calculadora são aliados dos alunos. Diante das dificuldades de aprendizagem desse tipo de problema, questionei-me e resolvi pesquisar além das minhas práticas em sala de aula.

Graduada em Licenciatura plena de Matemática em 2007, pela Universidade de Caxias do Sul, continuei a realizar estudos e participar de eventos, a fim de melhorar meus métodos de ensino. Em 2008, comecei a trabalhar apenas com o Ensino Médio e foi aí que percebi que as dificuldades só aumentavam na Matemática do Ensino Médio. Diante disso, em 2012, cursei uma especialização em Saberes e Práticas do Ensino Médio, tendo novas expectativas. Ainda não satisfeita, em 2014, concluí o curso e busquei o Mestrado na área de Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil.

Nesse contexto, surgiu a pesquisa que busca compreender as possíveis aproximações entre as estratégias espontâneas de crianças do 4º ano do Ensino Fundamental em resolver problemas multiplicativos e os procedimentos de ensino de seus professores diante de tais estratégias.

Acredita-se que, como professores, é possível perceber raciocínios espontâneos dos alunos na resolução de problemas multiplicativos e, assim, intervir pedagogicamente, dando sentido aos problemas, para que eles reconheçam as operações que resolvem os problemas.

Diante disso, a pesquisa traz como objetivos identificar as estratégias usadas pelas crianças na resolução de problemas multiplicativos, verificar os procedimentos usados pelos professores para o ensino da resolução desses problemas e comparar as estratégias usadas pelas crianças com os procedimentos de ensino de seus professores. Os objetivos visam desenvolver atitudes positivas diante do saber em geral e do saber matemático em particular, vindo ao encontro dos PCN (BRASIL, 1997).

Em busca de respostas, a pesquisa foi realizada, em uma escola pública, na cidade de São Sebastião do Caí a qual foi escolhida por ser o local onde trabalho. A escola localizada no centro da cidade, possui Ensino Fundamental e Médio, contando com um total de 638 alunos.

A pesquisa é um estudo de caso de abordagem qualitativa, no qual foram analisadas duas turmas de 4º ano, em turnos opostos e com professoras diferentes, para a observação das aulas e verificação das estratégias utilizadas. A prática foi feita em apenas uma delas, sendo essa com 21 alunos, escolhida por ser em turno contrário ao horário de trabalho da pesquisadora.

A metodologia adotada para a dissertação traz aportes teóricos que envolvem diferentes conceitos e situações encontradas no campo multiplicativo, entre eles, alguns estudos empíricos (GREER, 1992), modelos intuitivos (FISCHBEIN et. al, 1985; MULLIGAN; MITCHELMORE,1997), estratégias inventadas por alunos (FUSON, 2003), critérios próprios utilizados pelas crianças (LERNER; SADOVSKY, 1996; NUNES; BRYANT, 1997), procedimentos elaborados pelas crianças sem o recebimento de instrução formal (KAMII; HOUSMAN,2002; KAMII; LIVINGSTON, 1995), entre outros não menos importantes, como Treffers e Buys (2001), Brissiaud (1994), Smole e Muniz (2013), Smole e Diniz (2001), Taxa-Amaro (2006), Golbert (2005), Justo (2004, 2009), Vila (2006) e os PCN (BRASIL, 1997).

A dissertação está apresentada em três capítulos. O primeiro apresenta uma seção sobre um estudo dos problemas multiplicativos na literatura, as estratégias usadas por crianças na resolução de problemas multiplicativos, segundo diversos autores. Em subseção, estão as pesquisas sobre as intervenções pedagógicas na resolução de problemas matemáticos multiplicativos. Além disso, outra seção neste capítulo traz as categorias semânticas apresentadas na estrutura multiplicativa. Também se buscam as contribuições e as teorias que abrangem esses esquemas, assim como as estratégias já identificadas pelos diversos autores para a resolução de problemas multiplicativos.

O segundo capítulo traz os caminhos da pesquisa, bem como o objetivo geral e os específicos, apresentando, em seu contexto, onde e como foi ela realizada e seus procedimentos; nele, estão as observações das aulas, a aplicação da resolução de problemas multiplicativos aos alunos e o método utilizado para análise de dados.

O terceiro capítulo apresenta a análise de dados das estratégias utilizadas pelas crianças, diante da resolução dos problemas, baseando-se nas resoluções e diálogos audiogravados. Apresentam-se as abordagens de ensino e a análise das estratégias usadas pelas crianças na resolução de problemas multiplicativos, através do uso da adição de parcelas iguais, da tabuada memorizada e as estratégias que geraram erros. Encerra-se o capítulo com as possíveis aproximações entre as estratégias das crianças e os procedimentos de ensino dos professores.

Por fim, apresentam-se as considerações finais com as respostas encontradas ao problema, bem como as percepções feitas durante a pesquisa quanto às estratégias e procedimentos adotados por professores e alunos.

1 PROBLEMAS MATEMÁTICOS MULTIPLICATIVOS

O campo conceitual multiplicativo, definido por Vergnaud (1983, 1988, 1990, 1991, 1994, 1996), é um conjunto conceitos e de situações que envolvem as operações de multiplicação e divisão. A metodologia comumente adotada no ensino da multiplicação e da divisão se constitui por meio de uma única perspectiva, sem considerar os diferentes conceitos e as diversas situações em que as operações podem ser abordadas. A multiplicação, juntamente com a divisão, forma a estrutura multiplicativa.

Para Vergnaud (1990, p.8), "um campo multiplicativo é um conjunto de situações que requerem uma multiplicação, divisão, ou uma combinação das duas". Assim, o campo conceitual multiplicativo, ou estrutura multiplicativa, se refere a um conjunto informal e heterogêneo de situações, cuja análise e tratamento requerem vários tipos de conceitos, esquemas, procedimentos e representações simbólicas, que se encontram em estreita relação uns com os outros.

Assim, buscando obter embasamento teórico referente aos problemas matemáticos multiplicativos, realizou-se um levantamento de bibliografias referentes às variadas estratégias de resolução para os problemas multiplicativos, reunindo-se referenciais que auxiliam o estudo de relações entre as estratégias das crianças e a forma de ensino de professores. Também foram evidenciadas as categorias semânticas de diferentes situações multiplicativas que definem conceitos, situações, procedimentos e representações variadas desse campo conceitual.

1.1 ESTUDOS DE ESTRATÉGIAS USADAS POR CRIANÇAS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS

Uma das formas mais acessíveis de proporcionar aos alunos que aprendam a aprender é a utilização da resolução de problemas como metodologia de ensino, ela baseia-se na apresentação de situações abertas e sugestivas que exijam dos alunos uma atitude ativa ou um esforço para buscar as próprias respostas, o próprio conhecimento (POZO; ECHEVERRÍA, 1988, p.09).

O ensino baseado na solução de problemas pressupõe possibilitar aos alunos o domínio de procedimentos, assim como a utilização dos conhecimentos disponíveis, para dar resposta a situações variáveis e diferentes (POZO; ECHEVERRÍA, 1988, p. 09). Sendo assim, quando se ensina através da resolução de problemas, ajuda-se os alunos a desenvolver sua capacidade de aprender a aprender, habituando-os a determinar, por si próprios, respostas às questões que os inquietam, sejam elas questões ou da vida cotidiana, ao invés de esperar uma resposta já pronta, dada pelo professor ou pelo livro-texto.

No que se refere ao ensinar a resolver problemas, Pozo e Echeverria (1988) acrescentam que não é suficiente "dotar os alunos de habilidades e estratégias eficazes", mas faz-se necessário "criar neles o hábito e a atitude de enfrentar a aprendizagem como um problema para o qual deve ser encontrada uma resposta" (POZO; ECHEVERRÍA, 1988, p. 14). Porém, não basta apenas ensinar a resolver problemas que mereçam dedicação e estudo, mas incentivar que o aluno também proponha situações-problema, partindo da realidade que o cerca.

Assim, é preciso incentivar o hábito pela problematização e a busca de respostas às próprias indagações e questionamentos, como forma de aprender. Para que uma determinada situação seja considerada um problema, deverá implicar um processo de reflexão, de tomada de decisões quanto ao caminho a ser utilizado para sua resolução, no qual automatismos não permitam a sua solução imediatamente. A resolução de problemas tem grande poder motivador para o aluno, pois envolve situações novas e diferentes atitudes e conhecimentos (POZO; ECHEVERRÍA, 1988).

A partir dos anos 90, as investigações no âmbito da aprendizagem das operações aritméticas foram realizadas, sobretudo, na sala de aula, desconsiderando as influências dos contextos sociais e culturais. No caso concreto da multiplicação, destacam-se estudos empíricos associados a tipos semânticos de situações (GREER, 1992) e a modelos intuitivos (FISCHBEIN et al, 1985; MULLIGAN; MITCHELMORE, 1997). Também há investigações que relacionam as estratégias de cálculo usadas pelos alunos com o tipo de problemas propostos e outras que caracterizam as estratégias inventadas pelos alunos na resolução de problemas (FUSON, 2003). Contudo, diversos autores afirmam que a investigação sobre a aprendizagem da multiplicação tem sido menor quando comparada com a investigação sobre outras operações aritméticas (FUSON, 2003; VERSCHAFFEL *et al*., 2007).

Estudos realizados por Kamii e colaboradores (KAMII; HOUSMAN, 2002; KAMII; LIVINGSTON, 1995) sobre procedimentos elaborados por crianças que nunca receberam instrução formal revelam um raciocínio numérico e uma compreensão das relações envolvidas nos problemas que não segue a linearidade sob a qual se assentam grande parte dos métodos de ensino. Além disso, relatam variações nas estratégias de resolução de problemas de ordem multiplicativa através adições e/ou subtrações repetidas ou através de combinações de adições/subtrações e multiplicações/divisões dentro de um mesmo problema matemático. Essas combinações estão carregadas de significados para os alunos, o que nem sempre ocorre com os algoritmos formais.

Para Kamii (2002), encorajar os alunos a usar um único método para resolver problemas limita a sua capacidade para usar um pensamento flexível e criativo. A estratégia é orientar a aprendizagem das operações. A autora refere-se ao fato de crianças realizarem seus desenhos como símbolos, a fim de chegarem, por contagem, aos resultados. Kamii chama essa estratégia de correspondência termo a termo com símbolos, sendo que a resposta correta e escrita por números é o tipo de representação no qual ideias numéricas precisam aparecer.

Segundo Kamii (1996), as estratégias usadas para a resolução de problemas multiplicativos privilegiam o desenvolvimento do raciocínio espontâneo e a intervenção de ensino planejado e desenvolvida como simples interações construtivistas.

A resolução de problemas tem um papel essencial na aprendizagem, por desencadear a ação, colocando o sujeito num movimento sistemático de assimilação. Desse modo, a resolução de uma atividade pelo aluno, de certa forma, representa o alcance que sua aprendizagem pode atingir ou como ele pensa naquele momento e naquela situação em que se encontra.

Pode acontecer que, em um contexto escolar, o aluno apresente outra forma de solucionar ou consiga resolver uma situação em um determinado contexto, como mostram os estudos de Carraher *et al* (1995) com crianças em situações de venda nas ruas da cidade.

Estudos de Nunes e Bryant (1997) relatam que, fora da escola, as crianças convivem com os números os quais não se apresentam por partes e nem sempre são usados para quantificar. Para os autores, trabalhar com os números na educação infantil deve oferecer oportunidades às crianças de explorar sequências mais longas para observar regularidades e para formular hipóteses sobre sua composição e sobre a leitura e escrita.

Segundo Nunes e Bryant (1997), a transição entre o nível de cálculo por contagem e o cálculo por estruturação é estimulada pela utilização de modelos em situações contextualizadas. Além disso, alertam para a precocidade com que aparecem nas crianças os pontos de partida para a compreensão de conceitos como a multiplicação e a divisão.

As primeiras estratégias das crianças sobre multiplicação vêm, segundo Nunes e Bryant (1997), do desenvolvimento do esquema de correspondência. Os autores assinalam que a compreensão da correspondência termo a termo capacita as crianças ao desenvolvimento de outros esquemas quantitativos, como o das correspondências de um para muitos. Tais esquemas quantitativos são básicos para o conhecimento, por exemplo, das relações multiplicativas e mereceriam compreensão conceitual por parte dos professores.

O ensino da multiplicação pressupõe o domínio da noção de número. Como as crianças chegam à escola geralmente sabendo contar, são realizadas apenas atividades de escrita de numerais e de correspondência entre número e quantidade.

A multiplicação envolve um novo entendimento em relação a um conjunto de sentidos e invariáveis, os quais não são contemplados no ensino da adição e que, de certa forma, contrastam com situações de raciocínio aditivo. O raciocínio aditivo, conforme Nunes e Bryant (1997), se traduz nas seguintes ideias:

> O número, como medida de conjuntos, envolve colocar objetos em um conjunto no qual o ponto de partida é zero; o número, como uma medida das transformações relaciona-se ao conjunto que é unido ou separado de um outro conjunto; o número como uma medida de relação estática relaciona-se ao conjunto que teria que ser unido e/ ou separado de um outro, a fim de formar dois conjuntos iguais em número (NUNES; BRYANT, 1997, p.143).

Nunes e Bryant (1997) afirmam que as situações as quais envolvem o raciocínio multiplicativo são diferentes, porque trabalham com correspondência um-para-muitos, com relações constantes entre variáveis, com situações que envolvem distribuição, divisão e divisão pela metade.

Procedimentos multiplicativos permitem compreender as propriedades dessa operação e desenvolver formas rápidas e eficazes de cálculo mental. Na perspectiva de Treffers e Buys (2001), o trabalho em torno da multiplicação deve assentar na compreensão de conceitos e propriedades, ao longo de um período largo de tempo, porque existe um conjunto de etapas que o aluno tem necessariamente de percorrer, não servindo de nada eliminar algumas delas, para chegar de forma rápida à formalização. Desenvolvem a adição sucessiva de parcelas iguais, depois do cálculo por contagem para o cálculo estruturado e, finalmente, para o cálculo formal.

No início, usa-se a contagem por grupos, usando adições repetidas e recorrendo, depois, a fatos multiplicativos conhecidos, evoluindo no cálculo, à medida que o conceito da multiplicação vai se construindo. Segundo Fosnot (2007) e Fuson (2003), são estratégias por modelação, procedimentos que buscam a operação de cálculos, que são a forma como manipulam os números, e as estratégias determinam a estrutura matemática dessas manipulações.

Segundo Brissiaud (1994), uma criança sabe contar quando consegue colocar uma correspondência termo a termo entre os objetos. No entanto, à medida que as quantidades vão aumentando, torna-se difícil para ela efetuar essa correspondência, pois é preciso marcar um ponto de partida e, muitas vezes, com a ausência de materiais, a criança acaba por partir para as representações.

Para exemplificar a correspondência termo a termo, Brissiaud (1994) relata uma situação em que os alunos irão jogar mini-tênis e para cada dois alunos é necessário ter uma bolinha. O autor sugere pensar numa turma de 28 alunos, por exemplo, onde esse pensamento direcionará alunos às representações que esquematizam o real, pois como o número é visto como alto pela criança, ela precisará fazer uma elaboração mental em busca da resolução para a resposta.

Nessa situação, é importante deixar os alunos iniciarem as resoluções práticas. Eles começarão por agrupar desenhos, mesmo que o problema não seja “vivido da classe”, explica Brissiaud (1994), uma vez que a criança “teatraliza” suficientemente uma situação fictícia.

Normalmente crianças representam o enunciado por fichas ou desenhos, destaca Brissiaud (1994). O diferencial está na solução para a resposta, pois, nos problemas ditos de divisão, o total é contado no início dos procedimentos dos grupos; já nos problemas de multiplicação, ele é contado no fim e, na maioria das vezes, a contagem é um a um, deixando de lado a construção da estrutura multiplicativa e a contagem por grupos. Logo que se utiliza um processo de contagem, os problemas ditos de multiplicação e de divisão diferem pouco, mas apresentam as mesmas dificuldades e as crianças devem contar, ainda que a unidade seja um grupo.

Outra situação trazida por Brissiaud (1994) é a leitura feita, pela criança, de um problema para a resolução. Ele exemplifica a representação de quantidade quando o problema envolve sapatos. Nessa situação, o aluno poderá interpretar ser unidade ou pares, o que é caracterizado pelo autor como uma mudança de unidade que ocorre quando o problema pode ter duas respostas consideradas corretas.

A resolução do problema trazido por Brissiaud (1994) depende da maneira como o problema é visto e trata-se de uma prática importante. Assim, para formar uma coleção de 40 objetos (sapatos), por exemplo, duas estratégias seriam possíveis: contar uma a um e obter a resposta de 40 objetos, ou, formar grupos, como de 2, formando pares. Nesse caso, encontrariam 20 objetos.

Nunes et. al (2005) defendem que as conexões entre adição e multiplicação e entre subtração e divisão são processuais: a multiplicação pode ser realizada por adições repetidas e a divisão, usando repetidas subtrações. É necessário reconhecer que a conexão entre multiplicação e adição não é conceitual, mas centrada no processo de cálculo, ou seja, o cálculo da multiplicação pode ser feito usando-se a adição repetida, pois a multiplicação é distributiva com relação à adição.

Supõe-se que, apesar das ligações processuais entre adição e multiplicação, essas duas formas de raciocínio são diferentes o suficiente para serem consideradas como distintos domínios conceituais. Portanto, segundo Nunes et. al

(2005), os termos raciocínio aditivo e multiplicativo são usados para as relações conceituais, em vez de se referirem às operações aritméticas.

Ainda conforme Nunes et. al (2005), o raciocínio aditivo refere-se a situações que podem ser analisadas a partir de um axioma básico: o todo é igual à soma das partes. Por essa razão, diz-se que o invariante conceitual do raciocínio aditivo é a relação parte todo. Em contrapartida, o raciocínio multiplicativo é a existência de uma relação fixa entre duas variáveis ou duas grandezas ou quantidades. Qualquer situação multiplicativa envolve duas quantidades em relação constante entre si. Por exemplo: Se uma caixa contém 25 bombons, quantos bombons há em 5 caixas?; Tânia comprou 3 metros de fita. Cada metro custa R$1,50. Quanto pagou ao todo?

Ao resolver problemas de raciocínio multiplicativo, busca-se uma variável que corresponda a um valor dado na outra variável, explica Nunes et. al (2005), destacando ainda, a importância de se trabalhar um período, em sala de aula, para que os alunos apliquem seus esquemas de ação sobre representações, a fim de se ter a certeza de que sua capacidade não está sendo subestimada.

Uma possibilidade de compreensão conceitual do campo multiplicativo por parte dos alunos se faz através da apropriação de situações nas quais eles tenham condições de desenvolver o próprio processo de raciocínio e tenham a oportunidade de compartilhar suas ideias sobre os conceitos apreendidos, além da capacidade de aplicá-los em diversos contextos. A aprendizagem pressupõe uma ação didático-metodológica integrada, trabalhando-se as várias ideias dos conceitos, das situações e das diferentes representações de resolução no campo multiplicativo.

Um programa de ensino que tenha o objetivo de desenvolver o raciocínio multiplicativo precisa focalizar a coordenação entre os esquemas de ação, como o esquema de correspondência e da distribuição. É essencial que os esquemas sejam coordenados, para que os alunos desenvolvam o raciocínio multiplicativo operatório.

Nunes et. al (2005) trazem um exemplo de um problema de multiplicação de relação constante com esquema de ação por distribuição: Márcio convidou três amigos para sua festa de aniversário. Para cada amigo ele quer dar 5 bolas de gude. Quantas bolas ele precisa comprar?

Esse problema tem duas variáveis, o número de amigos e o número de bolas. Trata-se de uma relação constante, 5 bolas para cada amigo. Essa questão é bem compreendida pelos alunos, por trazer uma situação cotidiana. O proposto é descobrir quantas bolas de gude serão necessárias para que Márcio possa dar cinco bolas de gude para cada amigo. O conceito empregado foi o de comparação entre razões. Como as parcelas envolvidas são todas iguais (5 bolas de gude e 3 amigos), as crianças buscam a associação entre cinco bolas de gude, que irá se repetir três vezes, tendo, assim, o 5x3.

Em comparação, também é trazido um problema de divisão: Márcio tem 15 bolas de gude. Ele vai distribuí-las igualmente entre seus três amigos. Quantas bolas de gude cada um vai ganhar? Esse problema tem a mesma estrutura, duas variáveis, número de amigos e número de bolas. Trata-se de uma relação que não pode ser resolvida por correspondência, porque a relação fixa não é conhecida. Isso quer dizer que cada amigo deverá receber a mesma quantidade de bolas de gude.

Um dos esquemas mais utilizados para resolver esse problema é distribuir as 15 bolas de gude entre os três amigos, dando uma bolinha para A, uma para B e outra para C até ter distribuído todas as 15 bolinhas.

A representação de raciocínio multiplicativo, na maioria das vezes, necessita de representações, seja por desenhos, tabelas ou gráficos em que duas variáveis estejam representadas. Os professores precisam investir, simultaneamente, em resolução de problema e no ensino de representações desse tipo, apontam Nunes et. al (2005), justificando que esse tipo de problemas, quando usado para introduzir o processo multiplicativo, não causa dificuldades e, à medida em que avançam, os gráficos podem ir se tornando cada vez menos figurativos.

É preciso analisar as formas de resoluções dos problemas multiplicativos, que se expressam graficamente por um desenho, um procedimento pessoal de cálculo ou mesmo uma técnica operatória convencional.

Didaticamente, segundo Smole e Muniz (2013), a construção de conceitos e procedimentos, em Matemática, está relacionada à atividade mental de quem aprende, considerando que compreender as formas de representações gráficas externas permite perceber significados.

As representações gráficas permitem ver como o aluno pensou, que hipótese ele tem sobre as noções e sobre os conceitos matemáticos envolvidos em um problema, que recurso de expressão utiliza, para, assim, ver como as intervenções serão feitas em aula. Para Smole e Muniz (2013), o desenho tanto serve para o resolvedor expressar a solução que pensou como para traduzir e organizar os aspectos do texto que dão as informações essenciais sobre o problema.

Quanto aos procedimentos pessoais de cálculo, as resoluções dos problemas multiplicativos já incluem sinais de aritmética, ou uso combinado de sinais e palavras com sentido matemático, como, por exemplo, “5+5+5 dá 15” e até formas mais elaboradas de expressão, como, por exemplo, “3x5=15”. Mesmo quando os alunos resolvem operações por processos convencionais, se puderem optar, muitas vezes eles preferem usar procedimentos pessoais ao resolver um problema, apontam Smole e Muniz (2013).

É importante que os alunos saibam resolver seus problemas usando as próprias formas de expressão. No entanto, essa compreensão traz ao educador uma série de outras questões, dentre as quais Smole e Muniz (2013) destacam a preocupação sobre como interpretar as diferentes representações surgidas na sala de aula, a dúvida a respeito da melhor forma de explorar as soluções dos alunos ou como intervir junto aos discentes que não conseguem expressar suas resoluções e, de modo especial, se há necessidade de exigir procedimentos formais.

Não se espera que o aluno aprenda primeiro uma operação para, depois, resolver problemas que a envolvam. Pelo contrário, propõem-se problemas para que os alunos pensem sobre as operações, seus significados e suas formas de representação. Como exemplo disso, Smole e Muniz (2013) relatam a resolução de um problema proposto para 3ª série, na qual um avô resolveu presentear seus cinco netos, no dia das crianças, dando a eles certa quantia em dinheiro. Sabendo que o avô tinha R$ 245,00 para dividir, quanto cada um deles ganhou no dia das crianças? Para resolver, alguns desenharam, outros fizeram procedimentos pessoais e cálculos e alguns se valeram do algoritmo da divisão. Em uma mesma classe, podem aparecer soluções diferentes, mesmo que os métodos de ensinar sejam iguais.

Segundo Smole e Muniz (2013), ao trabalhar os procedimentos utilizados pelas crianças para resolver os problemas, é importante ter em mente que esses podem ser diferentes daqueles que elas usariam para resolver cálculos na forma de algoritmos. Por exemplo, em uma situação de multiplicação, as crianças podem resolver por meio de somas de parcelas iguais ou agrupamentos diversos, misturando procedimentos de adições e multiplicações.

Mesmo sabendo a técnica operatória e qualquer representação, a sua evolução é determinante para a construção do pensamento matemático, fazendo-se importante mobilizar várias formas de representação no decorrer de um mesmo processo. É preciso analisar a eficiência, a validade e a possibilidade de generalização de uma forma de representação para resolver problemas multiplicativos, pois fazer um aluno passar de uma representação à outra mais complexa requer esforço e múltiplas e variadas oportunidades de reflexão.

Para Vergnaud (1991), o raciocínio multiplicativo não surge facilmente nas crianças em fases de aprendizagem escolar. Problemas do tipo produto de medidas, por exemplo, lembram o produto cartesiano e correspondem a uma função bilinear[1]. Por essa perspectiva, o autor aponta que o campo conceitual das estruturas multiplicativas é, ao mesmo tempo, o conjunto das situações cujo tratamento implica uma ou várias multiplicações e divisões e o conjunto de conceitos e teoremas que permitem analisar as situações em jogo.

Taxa-Amaro (2006) exemplifica problemas de combinatória, como, por exemplo, se alguém tem 3 camisas e 4 bermudas, de quantas maneiras diferentes pode se vestir? Nesse problema, ocorre uma estratégia por correspondência termo a termo rígida, em que os sujeitos realizam a representação gráfica primeiramente e, em seguida, fazem os pares ordenados por correspondência termo a termo entre os elementos dos dois grupos contidos no problema.

Outro exemplo, seria a formação de casais no baile da escola: dispondo-se de 3 moças e 3 rapazes, quantos casais distintos, sendo esses formado por 1 moça e 1 rapaz, poderiam se formar? Nesse problema, os alunos usam estratégias de dinâmica sem totalização e sistematização combinatória, na qual os sujeitos realizam combinações com base na ideia que poderiam "trocar" as peças indefinidamente, sem controle de quantificação. Para a autora, alguns alunos podem compreender relações multiplicativas, mesmo que não cheguem à solução quantitativa correta.

---

[1] Função bilinear cujo domínio é o produto Cartesiano de dois espaços vetoriais sobre o mesmo campo e cuja imagem está contida no campo. Ou seja, linear em ambas as variáveis.

As competências matemáticas vão sendo ampliadas à medida que a experiência matemática dos alunos se torna mais diversificada. Surgem representações múltiplas dos números associados à noção de dobro e a compreensão de algumas propriedades, bem como a compreensão entre adição e multiplicação, visando à busca de estímulos do raciocínio analítico, a duplicação de quantidades, as propriedades distributivas e a construção de cadeias de tarefas.

Essa forma de raciocinar em Matemática, por meio de um pensamento proporcional, é fundamental quando se comparam duas razões, sendo bem aplicada a situações de variação entre duas dimensões ou de comparações múltiplas. De acordo com trabalhos de Vergnaud (1988; 1991; 1994), as situações de proporcionalidade apoiam a construção das estruturas multiplicativas. Essas, por sua vez, compreendem outros conceitos que não se desenvolvem isoladamente, mas em mútua correlação. Assumindo que os conceitos multiplicativos têm a própria estrutura e que não são redutíveis às noções aditivas, essa afirmação, enfatizada há décadas por diferentes autores (Dienes,1984; Davidov,1991; Franchi,1995 apud BARRETO,2001), foi consolidada por pesquisadores que se inseriram na perspectiva dos campos conceituais proposta por Vergnaud (1990).

Kieren (1994 apud BARRETO,2001) reconhece que “o desenvolvimento das estruturas multiplicativas é decisivo para uma pessoa conceituar ou trazer à luz o mundo no qual ele ou ela vive” (p. 387) e acrescenta que somos privilegiados, pelo fato de o estudo das estruturas multiplicativas estar em andamento nos últimos anos, mesmo que em menor intensidade que outras operações aritméticas.

Um problema não é simplesmente uma tarefa matemática, mas uma ferramenta para pensar matematicamente. A resolução de problemas envolvendo as operações multiplicativas está entre as mais complexas e o ensino desses não é através do ensino de algoritmos formais, pois a sua aplicação tradicional consiste apenas em armazenamento sem compreensão.

O raciocínio multiplicativo apresentado pelas crianças pode trazer revelações sobre seus métodos de pensar e, por isso, nenhuma de suas estratégias pode ser menosprezada.

Como afirmam Carvalho e Gonçalves (2003, p.24):

> Compreender o raciocínio multiplicativo implica uma transformação muito importante no pensamento das crianças, apesar de, muitas vezes, as operações multiplicação e divisão serem consideradas relativamente simples do ponto de vista matemático. Essas duas operações revestem-se de uma grande complexidade em nível cognitivo.

Sendo o campo conceitual multiplicativo, um campo com muitos conceitos e situações, no qual a aprendizagem é de longo prazo, se torna importante oferecer às crianças oportunidades de resolverem uma grande variedade de problemas que apresentem diferentes tipos de situações e que conduzam a uma formalização dessa operação, em vez de praticarem um número restrito de situações sem significados que, muitas vezes, não são mais que a aplicação de um algoritmo aprendido muito precocemente e sem qualquer sentido.

A resolução de problemas é um desafio para as crianças. Ela exige concentração e estratégias diversas para encontrar resultados. São variadas estratégias, certas, erradas, compreensíveis ou incompreensíveis que vão surgindo nas resoluções.

Os PCN (BRASIL, 1997) estão sendo substituídos pela Base Nacional Comum Curricular. Eles apresentam importantes orientações didáticas, indicando a necessidade de trabalhar cálculos de multiplicação e divisão através de estratégias pessoais já no primeiro ciclo (2º e 3º ano) de Ensino Fundamental. No segundo ciclo (4º e 5º ano), a compreensão de multiplicação e divisão deve ser ampliada, paralelamente, envolvendo os significados das operações.

Interferir ou não em um processo de aprendizagem é um constante conflito para o professor. No entanto, esse não deveria ser o principal questionamento, e sim, o fato de como abordar as estratégias utilizadas pelas crianças. Até que ponto elas são úteis e viáveis ao processo de aprendizagem? Para Vila (2006), do ponto de vista prático, a visão da Matemática que o currículo normativo apresenta pode estar ou não em consonância com a dos professores e a dos alunos:

> Entre o currículo projetado e desenvolvido pelos professores e o que realmente os alunos assimilam costuma haver divergências e desajustes. Explicam-se tais desajustes porque os alunos reconstroem a própria visão da Matemática, os próprios conhecimentos a partir de suas experiências do que já sabem e de suas crenças (VILA, 2006, p.43).

Para o autor, a verbalização e a comunicação do pensamento desempenham um papel importante para melhorar os processos de resolução de problemas, porque o esforço de explicar ideias ajuda a torná-las claras e mais próximas de outras formas de pensamento.

Vila (2006) ainda destaca a importância de valorizar o conhecimento pessoal da criança, isto é, mostrar a ela que existem explicações diferentes da sua para os fenômenos. Porém, sem desestimulá-la, focar não em fazê-la abandonar uma concepção e adotar uma mais correta, mas sim em aumentar a capacidade da criança de distinguir concepções apropriadas para cada contexto específico.

Segundo Vila (2006), na fase de desenvolvimento, é importante a tomada de decisões sobre a maneira de aplicar aquela estratégia que se selecionou como adequada para a resolução do problema. Igualmente importante é decidir continuar pelo caminho empreendido ou abandoná-lo.

As respostas inadequadas ou incorretas podem ser explicadas e a revisão do processo permite a correção dele, ao examinar a possibilidade de melhorar e vislumbrar possíveis generalizações do resultado ou do processo, assim como formular novos problemas mudando os dados, a condição ou a pergunta.

1.1.1 Pesquisas sobre Intervenções Pedagógicas na Resolução de Problemas Matemáticos Multiplicativos

Em busca de contribuições de outros pesquisadores para a compreensão de como as crianças aprendem a resolução de problemas multiplicativos, realizaram-se pesquisas em bases nacionais como Periódicos da Capes e Banco de Teses da Capes, além de Anais do Encontro Nacional de Educação Matemática dos últimos 10 anos.

Silva (2006) desenvolveu a pesquisa com crianças de 4º ano do Ensino Fundamental, registrando e avaliando continuamente o comportamento dos alunos no desenvolvimento das atividades de resolução de problemas multiplicativos. Com base na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1990), a pesquisa traz contribuições para as operações cognitivas na resolução de problemas de produto cartesiano. A autora ressalta o levantamento de um repertório de procedimentos não convencionais empregados pelas crianças e suas justificativas, a análise de fenômenos ocorridos na passagem de uma para outra das diferentes representações do produto cartesiano[2].

Silva (2006) apresentou uma proposta de ensino para a resolução de problemas de multiplicação cartesiana, buscando estabelecer conexões entre procedimentos aditivos e multiplicativos, bem como a evolução das representações não convencionais para as convencionais, voltando-se ao domínio de competências e habilidades.

Nessa pesquisa, a autora utilizou jogos que permitiram formar as combinações para construir a tabela de dupla entrada, solicitam cálculos de duas maneiras diferentes e usam material manipulativo como etiquetas. Na análise de dados, é possível perceber a falta de associação da soma de parcelas iguais com a multiplicação e, principalmente, a falta de conexão entre as diferentes representações em que, algumas vezes, o aluno não consegue explicar tal relação.

Também Yamanaka (2009) investigou a maneira pela qual o professor concebe uma transição entre os conceitos aritméticos desenvolvidos para uma introdução da representação algébrica, nos anos iniciais do Ensino Fundamental; Além disso, quais são as ações que o professor pode desencadear para que tal transição ou passagem seja efetuada. Utilizou-se de uma abordagem quanti-qualitativa, valendo-se de instrumentos estatísticos para retratar os dados analisados.

Além de analisar as concepções dos professores quanto à elaboração de problemas de estrutura multiplicativa, Yamanaka também estudou as competências relacionadas à resolução desses problemas e sua representação algébrica, usando o enfoque da teoria dos campos conceituais de Vergnaud. Os resultados mostraram que os sujeitos concebem problemas relacionados às situações prototípicas, onde os sujeitos demonstram o primeiro sentido ao problema e às primeiras extensões de problemas de estruturas aditivas e multiplicativas, sendo que essa última destaca, basicamente, as estruturas quaternárias.

Golbert (2005) realizou seu estudo a partir de entrevista clínica com 45 sujeitos de 3ª a 5ª série. Esse estudo foi desenvolvido com objetivo de esclarecer a

[2] O produto cartesiano revela uma relação de ordem entre dois conjuntos, constituindo-se como um terceiro conjunto, multiplicação entre pares ordenados envolvendo conjuntos distintos.

construção de esquemas multiplicativos em alunos do Ensino Fundamental, tendo em vista o aprimoramento da aprendizagem da Matemática.

A autora, Golbert (2005), justifica a preocupação com a operação de multiplicar, por ser nessa aprendizagem que muitos alunos iniciam uma carreira de insucessos na Matemática, uma vez que a multiplicação implica mudanças qualitativamente importantes no desenvolvimento cognitivo dos alunos.

As crianças, com suas estratégias espontâneas, criam seus próprios conceitos de multiplicar e Golbert (2005) identificou como acontece o avanço dos conceitos implícitos na multiplicação, relacionados com a coordenação parte-todo, com a reversibilidade e com a iteração. Destacou que é possível esclarecer a construção de esquemas multiplicativos em alunos do Ensino Fundamental. Para isso, é importante estudar as raízes epistemológicas, a natureza e o papel da abstração, pois o desenvolvimento da multiplicação se inicia com esquemas [espontâneos] de sequências numéricas. Suas entrevistas abrangeram a investigação de sequências numéricas, dos esquemas de unidades compostas, dos esquemas pré-multiplicativos e dos esquemas multiplicativos, em que citou que a falta de esquemas prévios compromete o desenvolvimento dos esquemas multiplicativos, pois a multiplicação resulta de modificações nas sequências de números desenvolvidos pela criança.

Outros autores, apresentados a seguir, destacaram a importância das estratégias das crianças baseando-se em Piaget, como, por exemplo, a tese de Starepravo (2010), que trouxe essa teoria para fundamentar o ensino que privilegia o desenvolvimento do raciocínio e a aquisição de competências, evitando somente a memorização da tabuada e a aplicação de algoritmos. Para isso, foi realizada uma intervenção de ensino, planejada e desenvolvida pela própria pesquisadora, ao longo de um semestre, na 3ª série de uma escola da rede municipal de Curitiba. A multiplicação foi explorada em problemas de proporcionalidade simples e, na análise, a autora buscou indicativos de ocorrência de uma interação construtivista, caracterizada por progressos nas relações intelectuais, sociais/morais e didáticas.

Pavan, Nogueira e Kato (2010) investigaram, por meio do Método Clínico Piagetiano, se crianças da 4ª série do Ensino Fundamental reconhecem e mobilizam elementos do campo conceitual de função (como variável, dependência, correspondência, regularidade e generalização) na resolução de situações-problema do campo conceitual aditivo, na interface com o campo conceitual multiplicativo, utilizando, como instrumentos, diferentes situações-problema envolvendo ideias básicas do conceito de função.

Os resultados da pesquisa de Pavan, Nogueira e Kato (2010) evidenciaram que os sujeitos da pesquisa reconhecem e mobilizam, ainda que de modo intuitivo, esses elementos, indicando que as ideias básicas envolvidas no conceito de função podem e devem ser trabalhadas já na primeira fase do Ensino Fundamental, para, posteriormente, serem promovidas ampliações do campo conceitual.

Focando na ação-reflexão-planejamento-ação do professor, com estudantes das quatro séries iniciais do Ensino Fundamental, Merlini, Magina e Santos (2010) desenvolveram um estudo descritivo diagnóstico, aplicando teste a 349 estudantes de uma escola pública, composto por 13 questões, mas tratam, no artigo, de apenas 7 dessas questões (por serem exclusivamente de multiplicação, deixando de lado as que envolviam a divisão) com alunos da 4ª série. Pesquisaram as situações que envolviam a estrutura multiplicativa, desenvolvendo ideias a partir dos campos conceituais de Vergnaud, com o objetivo de sintetizar as ideias centrais do campo conceitual multiplicativo. Os autores chamam a atenção para os baixos desempenhos dos alunos de 4ª série do Ensino Fundamental em classes de problemas como a de produto de medidas por combinatória, de proporção simples muitos para muitos e de proporção múltipla um para muitos, pois, embora os alunos tenham entendido a questão, realizaram representações, mas não conseguiram associar o problema a uma única operação matemática.

As pesquisas citadas têm o objetivo de apresentar o desempenho de estudantes na estrutura multiplicativa, em que a multiplicação seria a operação mais adequada para a resolução. Isso remete à teoria de Vergnaud, que postula que os conceitos matemáticos traçam seus sentidos com base em uma variedade de situações e, normalmente, cada situação não pode ser analisada com a ajuda de apenas um conceito. Isso significa que uma situação, por mais simples que seja, envolve mais de um conceito e, por outro lado, um conceito não pode ser apropriado a partir da vivência de uma única situação.

Estudando a resolução de problemas numa perspectiva metodológica, destacam-se Schastai e Pedroso (2010) que implementaram um Projeto de Intervenção, denominado “Cortina de Retalhos”, realizado com alunos de 5ª série do Ensino Fundamental, efetivando a resolução de problemas através do desenvolvimento do pensamento criativo e flexível, de modo a despertar no aluno o interesse pela busca de novos instrumentos de pensamento para solucionar os problemas que lhes eram propostos.

Nesse projeto de Schastai e Pedroso (2010), os alunos deveriam, inicialmente, medir a janela usando unidades arbitrárias, como pé, mão, polegada, passo ou palma. Em seguida, ir atrás de informações sobre como construir essa cortina, quanto a mais de tecido deveria ser comprado. A partir da análise dos resultados, houve a decisão sobre os tipos de encaminhamentos e intervenções pedagógicas a serem efetivadas para que os alunos superassem suas dificuldades, ou seja, realizou-se uma análise sobre o que o estudante não conseguia fazer e sobre aquilo que já sabia fazer sozinho e, a partir disso, houve um planejamento para as atividades seguintes.

Para resolver uma situação-problema, não é suficiente a compreensão do que é exigido e a aplicação de técnicas ou fórmulas adequadas para obter a resposta correta, tão importante quanto o processo de resolução, permitindo o aparecimento de diferentes soluções, comparando-as e pedindo que os alunos expressem como chegaram ao resultado.

Conforme Golbert (2005), pode-se destacar duas premissas para a aprendizagem matemática: a primeira é que, quando confrontadas com situações matemáticas iniciais, as crianças usam os esquemas já disponíveis, na tentativa de resolvê-las. Apesar das explicações do professor sobre os métodos mais adequados, elas persistem na utilização de seus esquemas. Mas ainda, se as tentativas da criança de produzir uma resposta considerada certa, são bem sucedidas, o professor pode não perceber que ela está usando os próprios métodos. Entretanto, esses meios podem se tornar ineficientes, se a criança é desencorajada a usá-los em favor das práticas tradicionais impostas pelo professor.

A segunda premissa da aprendizagem matemática é fundamentada no construtivismo de Jean Piaget: nenhum conhecimento que implica ações e operações pode ser instalado "pronto" na cabeça dos estudantes. Pelo contrário, precisa ser ativamente construído por eles. Isso não significa menor importância do papel do professor. Sob a perspectiva das duas premissas teóricas mencionadas, o ensino torna a forma de uma orientação específica das construções conceituais da criança, o que é muito diferente da comunicação do modo "correto" de fazer as coisas (GOLBERT, 2005).

É indispensável compreender os conceitos e os métodos das crianças, não importa quão ineficazes possam parecer. A Matemática escolar atual é baseada, quase exclusivamente, em procedimentos e conceitos formais que, por sua natureza, estão muito distantes do mundo conceitual das crianças. Porém, é somente a partir dos próprios recursos conceituais que elas podem entender como progredir do concreto para o abstrato na matemática.

O educador pode mediar a formação de conceitos e a expressão oral da criança, estimulando-a, para que expresse verbalmente seu raciocínio, procurando compreender o caminho percorrido no processo mental. O ensino precisa promover a aprendizagem ao propor situações-problemas que a criança compreenda e, com ajuda do educador, atinja níveis mais elevados de desenvolvimento.

Vergnaud (1991) afirmou que nem todos os procedimentos usados pelas crianças conduzem à solução dos problemas propostos pelo professor. Tais procedimentos, porém, são importantes para se compreender o que ela faz e devem ser analisados. Podem-se identificar os erros na utilização de informações de dados do problema, saber o que as crianças desconhecem e o que desconsideram no processo de solução. O trabalho feito por Vergnaud indicou como analisar relações pertinentes, bem como o processo de representação.

Para enfatizar a importância dos procedimentos usados pelas crianças, Vergnaud (1983a, p. 393) utiliza-se de três argumentos: 1) um conceito não se forma dentro de um só tipo de situações; 2) uma situação não se analisa com um só conceito; 3) a construção e apropriação de todas as propriedades de um conceito ou todos os aspectos de uma situação são um processo de muito fôlego, que se estende ao longo dos anos, às vezes uma dezena de anos, com analogias e mal-entendidos entre situações, entre concepções, entre procedimentos, entre significantes.

Vergnaud define conceito como um tripé de três conjuntos (1983a, p. 393; 1988, p. 141; 1990, p. 145; 1993, p. 8; 1997, p. 6), C = (S, I, R) em que:

- S é um conjunto de situações que dão sentido ao conceito;
- I é um conjunto de invariantes (objetos, propriedades e relações) sobre os quais repousa a operacionalidade do conceito, ou o conjunto de invariantes operatórios associados ao conceito, ou o conjunto de invariantes que podem ser reconhecidos e usados pelos sujeitos para analisar e dominar as situações do primeiro conjunto;
- R é um conjunto de representações simbólicas (linguagem natural, gráficos e diagramas, sentenças formais, etc.) que podem ser usadas para indicar e representar esses invariantes e, consequentemente, representar as situações e os procedimentos para lidar com elas.

O primeiro conjunto – de situações – é o referente do conceito, o segundo – de invariantes operatórios – é o significado do conceito, enquanto o terceiro – de representações simbólicas – é o significante.

Portanto, o primeiro passo para estudar o progressivo domínio de um campo conceitual por parte do aluno é identificar e classificar situações. Porém, isso envolve duas ideias principais: diversidade e história. Ou seja, existe uma grande variedade de situações em um dado campo conceitual e as aprendizagens dos alunos são moldadas pelas situações com as quais se depararam e, progressivamente, dominaram, particularmente as primeiras suscetíveis de dar sentido aos conceitos e procedimentos que se quer ensinar (VERGNAUD, 1990, p. 150). A combinação dessas duas ideias dificulta o trabalho do pesquisador em ensino, porque a primeira o dirige para a análise, para a decomposição em elementos simples e para as possíveis combinações de situações, enquanto que a segunda o orienta para a busca de situações funcionais quase sempre compostas de várias relações, cuja importância relativa está largamente ligada à frequência com que são encontradas.

Portanto, quando os alunos se apropriam do significado dos problemas, eles os resolvem por meio de estratégias construídas a partir dos conhecimentos anteriores. Assim, é interessante salientar a importância de a escola considerar esse conhecimento, não se preocupando, apenas, com o ensino de algoritmos.

A utilização de diversas estratégias, na escola, poderia dar maior oportunidade para os alunos atribuírem significado à resolução de problemas, mostrando-lhes que a Matemática faz parte do seu cotidiano. Isso significa reconhecer que o aluno, quando chega à escola, traz consigo alguns conceitos matemáticos. Compete aos professores identificar esses conceitos e dar continuidade a esse processo construtivo, de forma dinâmica e com questões que tenham significado para a vida do aluno, isto é, de modo que ele possa utilizar essas questões no seu dia-a-dia.

A seguir, apresentam-se as categorias e procedimentos adotados pelas crianças no processo de resolução de problemas na visão de alguns autores.

1.2 CATEGORIAS SEMÂNTICAS DE PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS

Para uma compreensão das estratégias usadas pelas crianças em cada resolução, é preciso, antes, conhecer as categorizações utilizadas para a escolha dos problemas. As diferentes categorias de problemas multiplicativos, quando devidamente trabalhadas pelos professores, auxiliam na construção desse campo conceitual pelos alunos. Os tipos de problemas multiplicativos implicam distintos níveis de dificuldades por parte do sujeito que os resolve.

Nunes e Bryant (1997) afirmam que há níveis diferentes de raciocínio multiplicativo. Eles descrevem os seguintes tipos de problemas que envolvem diferentes lógicas para a estrutura multiplicativa:

1. Correspondência um a muitos: são situações que envolvem a ideia de proporção, trabalhando com a ação de replicar, na qual o número de replicações é conhecido como fator escalar. São apresentadas as seguintes formas de problemas:
   1.1 Multiplicação: ao resolver essas questões, o aluno pode descobrir que a solução será a mesma se ele usar a adição repetida ou a multiplicação, porque se referem a um tamanho de conjunto. A situação multiplicativa requer uma relação permanente entre dois conjuntos. Exemplo: Um trem tem 5 vagões, cada vagão tem 6 janelas, quantas janelas tem o trem?

1.2 Problema inverso de multiplicação: ao resolver essas situações, o aluno é instigado a realizar uma divisão com os elementos dados. Exemplo: Carlos vai fazer aniversário. Cada amigo que vier à sua festa vai ganhar 3 balões. Ele comprou 18 balões. Quantos amigos ele pode convidar?

1.3 Produto cartesiano: promove o uso de um método sistemático para formar combinações com pares ordenados, uma vez que os princípios invariantes do raciocínio combinatório se tornam explícitos para a criança.

Exemplo: Rita tem 3 saias e 4 blusas diferentes. Quantos trajes diferentes ela pode vestir mudando suas saias e blusas?

2 Relação entre variáveis – (covariação): diferentemente da correspondência um a muitos, a relação entre duas variáveis não é mudada pelo número de replicações. Exemplo: Meio quilo de açúcar custa R$ 0,80. Quanto custa um quilo?

3 Distribuição: há três valores a serem considerados: o total, o número de receptores e a cota (ou o tamanho da distribuição). A cota e o número de receptores estão em relação inversa um com o outro: enquanto um cresce, o outro diminui. Exemplo: Eu tenho 20 confeitos para distribuir para 5 crianças. Quantos confeitos cada uma receberá?

Os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 1997) diferenciam quatro grupos de situações envolvendo problemas multiplicativos, vistos a seguir.

1. Comparativa: Nessas situações, permite-se trabalhar com a relação entre as quantidades, uma razão entre os elementos, como dobro, triplo, metade, terça parte...

   Exemplos: — Pedro tem R$ 5,00 e Lia tem o dobro dessa quantia. Quanto tem Lia? — Marta tem 4 selos e João tem 5 vezes mais selos que ela. Quantos selos tem João? A partir dessas situações de multiplicação comparativa, é possível formular situações que envolvem a divisão. Exemplo: — Lia tem R$ 10,00. Sabendo que ela tem o dobro da quantia de Pedro, quanto tem Pedro?

2. Proporcionalidade: Nessas situações existe uma relação constante entre duas variáveis.

Exemplos: — Marta vai comprar três pacotes de chocolate. Cada pacote custa R$ 8,00. Quanto ela vai pagar pelos três pacotes? (A ideia de proporcionalidade está presente (1 está para 8, assim como 3 está para 24.) — Dois abacaxis custam R$ 2,50. Quanto pagarei por 4 desses abacaxis? (Situação em que o aluno deve perceber que comprará o dobro de abacaxis e deverá pagar — se não houver desconto — o dobro, R$ 5,00, não sendo necessário achar o preço de um abacaxi para depois calcular o de 4.)

3. Configuração retangular: envolve a ideia de uma organização retangular.
   Exemplos: — Num pequeno auditório, as cadeiras estão dispostas em 7 fileiras e 8 colunas. Quantas cadeiras há no auditório?
4. Combinatória: envolve a ideia de organizar agrupamentos diferenciados, de modo que todos possam se combinar entre si — Tendo duas saias — uma preta (P) e uma branca (B) — e três blusas — uma rosa (R), uma azul (A) e uma cinza (C) —, de quantas maneiras diferentes posso me vestir?

Vergnaud (1983, 1991) descreveu três grandes classes de problemas multiplicativos que envolvem relações ternárias e quaternárias: isomorfismo de medidas, produto de medidas e proporções múltiplas. Essas classes apresentam subdivisões, ou seja, subclasses de problemas. Para exemplificar essas classes, trazemos o quadro 1:

Quadro 1 - Tipos de problemas de estruturas multiplicativas propostos por Vergnaud

	Isomorfismo	**Produto de medidas**	**Proporções múltiplas**
Multiplicação	Tenho 3 caixas de chocolate. Em cada caixa há 12 chocolates. Quantos chocolates eu tenho?	Tenho 3 saias (verde, azul e amarela) e 2 blusas (branca e preta). Quantas combinações de roupas posso fazer, usando todas as blusas com todas as saias?	Vou viajar com um grupo de amigos. Somos 8 pessoas e vamos passar 10 dias em um hotel cuja diária é de R$ 50,00. Qual será o valor que o grupo vai pagar de hotel ao final da viagem?
Divisão	**Isomorfismo partição:** Paguei R$ 20,00 por 4 caixas de chocolate. Quanto custou cada caixa? **Isomorfismo quotição:** Gabriel tem R$ 20,00 e quer comprar caixas de chocolate que custam R$ 5,00 cada uma. Quantas caixas ele pode comprar?	Com as saias e as blusas que eu tenho, posso fazer 6 combinações. Tenho 3 saias. Quantas são as blusas?	Fiz uma viagem com um grupo de amigos. Somos 8 pessoas e passamos 10 dias em um hotel. O nosso gasto total com as diárias foi de R$ 4.000,00. Quanto foi cada diária?

Fonte: VERGNAUD, G. (1983b). **Multiplicative structures**.

Para a esta pesquisa, foram usadas as categorias semânticas dos problemas multiplicativos propostos por Justo et al. (2015). As categorias semânticas foram assim classificadas a partir de uma releitura dos critérios de classificação adotados pelos PCN e por Nunes e Bryant (1997). A classificação dos problemas multiplicativos, usada nesta pesquisa, conforme Justo et al. (2015), encontra-se disposta no quadro 2:

Quadro 2 - Categorias Semânticas dos Problemas Multiplicativos

PROPORCIONALIDADE (MP) Expressa uma relação constante entre duas variáveis.	**MP. Valor desconhecido é o produto da relação constante.** Na festa de aniversário de Carolina, cada criança levou 2 refrigerantes. Ao todo, 8 crianças compareceram à festa. Quantos refrigerantes havia?
	MPdp. Partição. Valor desconhecido é a relação constante. Oito crianças levaram 16 refrigerantes ao aniversário de Carolina. Se todas as crianças levaram a mesma quantidade de bebida, quantas garrafas levou cada uma?
	MPdm. Medição. Valor desconhecido é da variável que está sob relação constante. Numa festa foram levados 16 refrigerantes pelas crianças e cada uma delas levou 2 garrafas. Quantas crianças haviam?
COMPARAÇÃO (MCP) Comparam quantidades que estão sob a relação constante.	Marta tem 4 selos. João tem 3 vezes o que ela tem. Quantos selos tem João?
ORGANIZAÇÃO RETANGULAR (MOR) Envolvem a análise dimensional ou produto de medidas.	Um salão tem 5 fileiras com 4 cadeiras em cada uma. Quantas cadeiras há nesse salão?
ANÁLISE COMBINATÓRIA SIMPLES (MAC) Implicam situações de representação de possibilidades de acontecer um agrupamento	Uma menina tem 2 saias e 3 blusas de cores diferentes. De quantas maneiras ela pode se arrumar combinando as saias e as blusas?

Fonte: Justo et.al (2015)

Buscando reconhecer as estratégias dos alunos na resolução dos problemas multiplicativos, escolheu-se a classificação descrita no quadro 2 e, na análise dos dados, foram levadas em consideração cada uma dessas categorias semânticas e as dificuldades que apresentaram.

As categorias escolhidas levam em consideração a adaptação feita por Justo et.al. (2015) ao construir o quadro, pela abrangência diante dos autores que trabalham com esses procedimentos e categorias.

Para dar continuidade, são descritos, a seguir, os caminhos que foram traçados na pesquisa, seu contexto, procedimentos e análise de dados.

2 A PESQUISA

A pesquisa caracterizou-se como um estudo de caso com uma abordagem qualitativa. Segundo Araújo et al. (2008), o estudo de caso é um tipo de investigação especialmente adequada quando se procura compreender, explorar ou descrever acontecimentos e contextos complexos, nos quais estão simultaneamente envolvidos diversos fatores. Coutinho (*apud* ARAÚJO et al. 2008) aponta que quase tudo pode ser um “caso”: um indivíduo, um personagem, um pequeno grupo, uma organização, uma comunidade ou mesmo uma nação. Da mesma forma, Ponte (2006, p.2) considera que é:

> Uma investigação que se assume como particularística, isto é, que se debruça deliberadamente sobre uma situação específica que se supõe ser única ou especial, pelo menos em certos aspectos, procurando descobrir o que há nela de mais essencial e característico e, desse modo, contribuir para a compreensão global de certo fenômeno de interesse. (PONTE, 2006)

Por meio de um estudo de caso, buscam-se respostas para o seguinte problema: **“Que aproximações são possíveis entre as estratégias espontâneas das crianças do 4º ano do Ensino Fundamental ao resolver problemas multiplicativos e os procedimentos de ensino dos seus professores?”.**

2.1 OBJETIVOS

Buscando responder ao problema de pesquisa, delinearam-se os seguintes objetivos.

2.1.1 Objetivo Geral

Investigar aproximações entre as estratégias espontâneas das crianças do 4º ano do Ensino Fundamental ao resolver problemas multiplicativos e os procedimentos de ensino dos seus professores diante de tais estratégias.

2.1.2 Objetivos Específicos

- Identificar as estratégias usadas pelas crianças na resolução de problemas multiplicativos.
- Identificar os procedimentos usados pelos professores para o ensino da resolução de problemas multiplicativos.
- Comparar as estratégias usadas pelas crianças com os procedimentos de ensino de seus professores.

2.2 CONTEXTO DA PESQUISA

A pesquisa realizou-se na cidade de São Sebastião do Caí, pertencente ao vale do Caí, situada a 65km da Grande Porto Alegre. A cidade tem aproximadamente 23 mil habitantes, distribuídos em 112 km^2 e conta com infraestrutura de cidade típica de interior.

Emancipada da cidade de São Leopoldo em 1º de maio de 1875, já contava com várias etnias, pois foi habitada por portugueses, alemães e, posteriormente, pelos colonos italianos.

Atualmente, conta com 29 escolas municipais, que atendem a Educação Infantil e o Ensino Fundamental, e 7 escolas estaduais com o Ensino Fundamental e Médio.

Para a pesquisa, escolheu-se uma escola estadual do centro da cidade, na qual a pesquisadora leciona em turno integral. A escola possuía, em 2016, ano da pesquisa, 638 alunos de Ensino Fundamental e Médio, contando com um total de 50 funcionários. A mesma tem uma ótima infraestrutura, grande parte oriunda da colaboração de pais. O prédio principal é composto pelo andar térreo, onde ficam a secretaria, sala de professores, sala de material esportivo, sala da supervisão e sala da direção, além de 4 salas de aula. No primeiro andar desse prédio, ficam o laboratório de informática, sala de vídeo e banheiro masculino e feminino.

Saindo do prédio principal, está a rampa de acesso ao pátio, 90% coberto com banheiros masculinos e femininos, refeitório, quadra de esportes coberta, quatro salas de aula e laboratório de Ciências. Vale destacar que essa parte do prédio é totalmente acessível aos portadores de deficiência.

Para a realização desta pesquisa, foram escolhidas as duas turmas de 4º ano para observação de aula, uma no turno da manhã, com 16 alunos, e outra no turno da tarde com 21 alunos. Em ambas as turmas, os alunos estão em idade escolar correta, ou seja, não há repetentes. Quanto às professoras, para preservar suas identidades, adotaram-se as siglas de X e Y para identificá-las. No ano da pesquisa, a professora X possuía 43 anos de idade, 10 anos de magistério e lecionava na escola há 6 anos e meio. A professora Y estava com 26 anos de idade, 6 anos de magistério e trabalhava há 3 anos na escola.

2.3 PROCEDIMENTOS DE PESQUISA

A pesquisa foi desenvolvida com diferentes procedimentos. Inicia-se com a observação das aulas das duas professoras do 4º ano. Posterior a isso, aplicou-se o teste de resolução de problemas multiplicativos (Apêndice B), individualmente, com cada aluno. Devido à aplicação de forma individual e sem tempo determinado para cada realização, levou-se um tempo aproximado de três meses até que todos os alunos da turma escolhida realizassem o teste.

Após a realização, os problemas foram corrigidos e quantificados para uma análise qualitativa dos tipos de estratégias utilizadas pelos alunos. Por fim, retornou-se à sala de aula para, novamente, observar as aulas, com o intuito de que os mesmos tipos de problemas fossem abordados pela professora titular da turma, a fim de verificar os procedimentos de ensino, quando cada categoria dos problemas era abordado pela mesma.

2.3.1 Observação de aulas

Buscando estabelecer relações entre as estratégias usadas pelas crianças e a abordagem de ensino dos professores, foram observadas quatro aulas de cada professora do 4º ano. As observações duraram meio período de aula, ou seja, 2 horas. Duas observações foram realizadas antes da aplicação dos problemas multiplicativos, de modo que, sem interferir, foi possível analisar o passo a passo do ensino dos problemas multiplicativos pelas professoras e a realização de atividades propostas aos alunos. Outras duas observações foram realizadas após a aplicação do teste com os alunos e a discussão da pesquisadora com as professoras sobre as estratégias usadas pelas crianças na resolução dos problemas.

As observações que antecederam o teste foram realizadas em horário acordado com cada professora, solicitando-se a elas que, nessa aula, fosse trabalhada a resolução de problemas multiplicativos. Durante a observação, circulou-se, em sala de aula, livremente, verificando o que os alunos iam fazendo de forma individual, além de escutar os questionamentos de cada aluno, bem como observar as intervenções de cada professora.

Nas observações posteriores ao teste, dialogou-se com as professoras para lhes mostrar os testes, questionando se as estratégias usadas diante de cada problema eram usuais em aula. Como o objetivo da pesquisadora era que fossem abordados os erros cometidos nos problemas, foi solicitado que fossem propostos os mesmos tipos de problemas. Nessa observação, assistiu-se de forma geral a turma, já que a professora X trabalhou a resolução de problemas, no quadro, com a turma toda, e não individualmente. Ela abordou as hipóteses erradas para levantar questionamentos.

2.3.2 Aplicação de resolução de problemas multiplicativos

Iniciou-se a pesquisa com a elaboração de problemas multiplicativos de diferentes classes semânticas que exigissem raciocínio e conhecimentos básicos das crianças no campo multiplicativo.

A classificação dos problemas multiplicativos foi baseada no trabalho de Justo et al (2015). Assim, os problemas elaborados foram de proporcionalidade (MP), com ideia de partilha (MPdp) e de medida (MPdm), problemas multiplicativos de comparação (MCP), de organização retangular (MOR) e de análise combinatória simples (MAC). O quadro 3 apresenta os seis problemas que foram aplicados aos estudantes do 4º ano.

Quadro 3 - Problemas aplicados para resolução de alunos do 4º ano, adaptados de Justo et al (2015).

Problemas	Classificação	Enunciado do problema
A	MP	Tenho 6 saquinhos de balas com 9 balas em cada um. Quantas balas eu tenho?
B	MOR	Uma sala de aula tem as suas classes dispostas de forma retangular de modo que tem 6 filas e 5 colunas. Quantas classes há nessa sala de aula?
C	MPdp	Luiza fez 72 docinhos e os guardou em 9 caixas iguais. Quantos docinhos Luiza guardou em cada caixa?
D	MAC	Para formar o uniforme de um time de futebol, existem 5 camisetas diferentes e 4 calções. De quantas formas diferentes se pode uniformizar o time?
E	MPdm	Tenho 42 reais para comprar meias. Se cada par custa 6 reais, quantos pares conseguirei comprar?
F	MCP	Rogério tem 7 figurinhas de jogadores de futebol. Sua irmã tem 4 vezes a quantidade de Rogério. Quantas figurinhas têm a irmã de Rogério?

Fonte: a pesquisa.

Ao realizar a aplicação dos problemas para resolução, escolheram-se os alunos do 4º ano da professora X, por ser no horário mais flexível para a pesquisadora, no contraturno do seu horário de trabalho, e por tratar-se de uma turma bastante ativa e participativa. O teste (Apêndice B) foi aplicado pela pesquisadora com um grupo de 21 alunos do 4º ano da escola já mencionada, no município de São Sebastião do Caí. A aplicação foi feita individualmente com cada aluno pela pesquisadora, em acordo com a professora titular. Cada aluno ia sendo retirado da sala para realização e, como não foi determinado tempo para realização, levou-se aproximadamente, 3 meses para passar cada aluno, sendo os encontros audiogravados durante toda a resolução e transcritos, posteriormente, para a análise. Solicitou-se a autorização dos pais para a realização da pesquisa, por meio de documento formal (apêndice A), informando como seria realizada a pesquisa e para qual finalidade.

Foi oferecido, a cada aluno, material concreto, como balas, saquinhos, docinhos, caixas, camisetas, calções, meias e figurinhas de jogadores de futebol, para manusear, além de material de rascunho. Deram-se as orientações de que todo o material disponível poderia ser utilizado, além de que toda a resolução por parte do aluno poderia ser realizada da maneira como ele achasse melhor, usando ou não o material disponível, fazendo ou não contas. As resoluções foram audiogravadas. A pesquisadora fazia perguntas durante e/ou após a resolução, para que o aluno explicasse qual o raciocínio que usou para resolver os problemas.

Não foi determinado tempo para a realização das atividades, assim, cada aluno teve o tempo necessário para resolução. Após a realização dos problemas multiplicativos por todos os alunos, as gravações foram transcritas, para serem analisadas juntamente com os registros da resolução.

Após a correção dos testes, conversou-se, novamente, com as professoras X e Y, a fim de, avaliar, em conjunto, as estratégias das crianças para buscar formas de abordá-las em sala de aula. Em seguida, voltou-se à observação de aula para verificar a aplicação dos mesmos tipos de problemas, quando a professora X, titular da turma, trabalhou com as hipóteses certas e erradas que surgiram nos testes.

2.4 MÉTODO DA ANÁLISE DE DADOS

Para a investigação e posterior análise de dados, inicialmente, foram observadas as aulas de duas professoras, X e Y, e realizadas as transcrições do que foi observado.

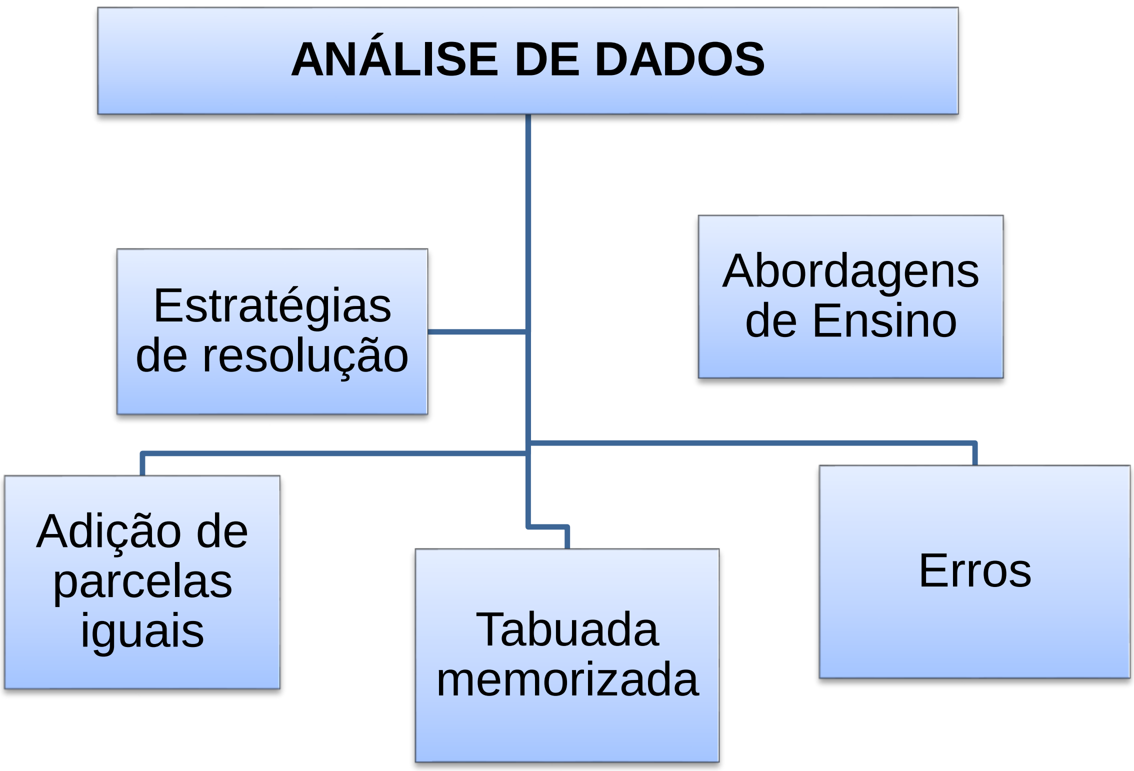
Nas observações, foi verificado como a multiplicação era trabalhada pelas professora, e como era feita a resolução de problemas multiplicativos e a realização de atividades desse tipo pelos alunos. Circulando pela sala de aula durante todo o período, foi possível perceber como cada aluno trabalhava nas atividades, bem como suas dúvidas.

Com os testes aplicados, identificaram-se as estratégias utilizadas para a resolução dos problemas multiplicativos propostos, categorizando-as e quantificando-as para análise qualitativa. A correção foi baseada nos códigos de correções dos testes de problemas aditivos e multiplicativos propostos por Justo et. al (2015), apresentados adiante na análise de dados.

Para a análise qualitativa desses dados, usaram-se recortes da resolução de alguns problemas, classificando as estratégias apresentadas que se repetiam entre os alunos, ou os erros frequentes. Os alunos foram identificados com An, onde n é um número para preservar suas identidades.

A análise de dados foi dividida em três seções, a saber: abordagens de ensino, estratégias de resolução e aproximações entre as estratégias de resolução e os procedimentos de ensino. As abordagens de ensino foram analisadas de forma descritiva como seção única sem categorizações. As estratégias das crianças foram categorizadas. Escolheram-se alguns exemplos de estratégias já encontradas na literatura da área e outros exemplos de estratégias verificadas nesse estudo. Por fim, estabeleceram-se aproximações entre as estratégias das crianças e os procedimentos de ensino dos professores. Um esquema da análise é apresentado na figura 1.

Figura 1 - Esquema de apresentação da análise de dados.



Fonte: a autora.

3 ANÁLISE DE DADOS

O capítulo da análise de dados está dividido em três seções: abordagens de ensino, estratégias de resolução e aproximações entre as estratégias de resolução e os procedimentos de ensino. Para investigar aproximações entre as estratégias utilizadas pelas crianças e os procedimentos adotados pelos professores diante dessas estratégias, foi necessário observar as aulas das duas professoras do 4º ano da escola, para verificar como a multiplicação era ensinada para as crianças e como elas resolviam as atividades e os questionamentos feitos pelas professoras.

Nas semanas seguintes, o teste de resolução de problemas multiplicativos foi aplicado individualmente com cada criança e a análise foi feita com base na categorização das estratégias utilizadas.

A fim de encontrar aproximações possíveis, conversou-se com as professoras X e Y, para, juntas, discutir as estratégias das crianças e reaplicar as questões que apresentaram muitos erros em sala de aula da professora X.

3.1 ABORDAGENS DE ENSINO

Ao iniciar a pesquisa, foram consideradas as referências bibliográficas sobre as estratégias que os alunos usavam para resolver problemas de multiplicação, sendo necessário assistir quatro aulas, duas de cada professora, para entender como a multiplicação vinha sendo ensinada aos alunos de 4º ano.

Inicialmente, assistiu-se à aula da Professora X. No ano anterior, a turma teria aprendido até a multiplicação por cinco e, neste ano, a professora introduziria as multiplicações após o cinco. Assistiram-se aulas de introdução e atividades da tabuada do sete e do oito. Em ambas as aulas, o procedimento da professora foi o mesmo: trabalhar várias multiplicações pela tabela de Pitágoras[3]. Em aula, a turma foi dividida em grupos e cada grupo recebeu um *kit* do material dourado[4].

[3] A tabela de Pitágoras ou tabela pitagórica trata-se de um quadro com linhas e colunas, no qual o resultado da multiplicação de um número da coluna por um número da linha encontra-se no ponto de cruzamento das duas. Com ela é possível efetuar todas as operações de multiplicação existentes na tabuada tradicional.

[4] Material montessoriano constituído por cubinhos, barras, placas e cubão.

A professora explicou a formação de grupos com os cubinhos. Como eles já haviam usado anteriormente, disse que a tabuada se constrói com os conjuntos de cubinhos formados, ou seja, 1 grupo com 5 unidades, por exemplo, é 1x5, 2 grupos com 5 unidades seriam 2x5 e assim por diante, até completar a tabela de Pitágoras.

Dadas as orientações iniciais, a professora distribuiu uma folha com uma historinha e solicitou que completassem a tabela da folha conforme os grupos que seriam formados.

A historinha contava que uma caixa d`água leva 1 hora para encher 8 litros e os alunos deveriam fazer as horas sucessivas para responder quanto teriam enchido em 10 horas.

Entender que as horas seriam os potinhos e os cubinhos, os litros de água, deixou as crianças confusas na construção com o material e algumas completaram a tabela sem o uso do material dourado, usando a adição de parcelas iguais. No entanto, foram advertidos pela professora, que mandou que apagassem e formassem os grupos primeiro, antes de completar a tabela.

A professora informou à turma que os cubinhos eram as unidades e cada cubinho representaria um litro de água, enquanto os potes eram as horas que vão passando. Assim, na primeira hora, teriam oito cubinhos e, na segunda mais oito e assim deveriam montar e a cada hora completar o quadro com o total de peças.

Alguns alunos brincavam enquanto montavam os conjuntos de 8 cubinhos e acabaram se perdendo na contagem, ainda assim, alguns grupos foram completando a tabela sem usar o material. Novamente, foram advertidos e a professora começou a questionar de onde vieram as respostas, como o 16 e o 24, por exemplo. Alguns explicaram a ideia dada pela professora, de dois e três potinhos com oito cada um. Outros insistiram na soma repetida de 8+8.

A turma, várias vezes, questionou a professora, pois a ideia passada anteriormente por ela fora de que a tabuada pode ser construída com a soma, ou seja, a partir do primeiro número, poderiam sempre somar as unidades para obter o resultado seguinte. Por exemplo, começando com o 7, depois, se somassem mais 7, teriam 14, que é 2x7. Assim, somando no último mais 7, teriam o 21, que é 3x7 e assim sucessivamente. Naquele momento, a construção dos conjuntos contrariava as ideias anteriores dos alunos.

A professora relatou que trabalhar com a multiplicação é muito difícil e, às vezes, é preciso dizer para ir somando até terminar, por isso insistia que construíssem os conjuntos para explorar a ideia da multiplicação.

Quando a turma completou a tabela, a professora recolheu-a e pediu para os alunos resolverem alguns cálculos como 5x8. Alguns foram contando nos dedos e outros montaram os conjuntos. O aluno escolhido para responder a essa operação disse que o resultado era 45. A professora, então, solicitou a ele que montasse para a turma os conjuntos. Ele fez cinco conjuntos, como ensinado anteriormente, no entanto, no primeiro, ele colocou 16 cubinhos e não 8, como seria o correto. Quando questionado pela professora sobre sua resposta, ele explicou que sabia que 2x8 era 16 e, por isso, quis começar por essa multiplicação. Percebendo seu erro perante a turma, ele recontou e percebeu que não poderia fazer aquele grupo de 16 e mais 4 grupos de 8, mas sim, mais 3 grupos de 8. A professora ressaltou que a ideia deve ser sempre formar os grupos com a quantidade de elementos iguais, fornecida pelo problema.

Quando a criança associa a multiplicação apenas com a ideia da soma de parcelas iguais, acaba por não construir o conceito multiplicativo e, por vezes, precisa recorrer a multiplicações anteriores antes de chegar na que realmente lhe interessa. Como exemplo, se precisa de 7x8, pode ter que construir toda a tabuada até chegar naquela multiplicação.

Porém, esse modo de conceituar a multiplicação de números naturais (a soma de parcelas iguais), muito embora seja relevante como ponto de partida para a compreensão da multiplicação de números naturais, enfatizando-se os papéis daquele que se repete e daquele que representa o número de repetições, não deve ser a única maneira na qual o professor deva basear-se para conceituar a multiplicação e apresentar às crianças.

Sobre essa questão, os PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais trazem:

> No entanto, essa abordagem não é suficiente para que os alunos compreendam e resolvam outras situações relacionadas à multiplicação, mas apenas aquelas que são essencialmente situações aditivas (BRASIL,1997, p.109).

Na operação de 8x8, os grupos diferiram nas respostas, pois muitos contaram rapidamente o número de cubinhos e se perderam. Mas foi na multiplicação de 9x8 que os alunos realmente se perderam na contagem e começaram a dar respostas incorretas. No entanto, um grupo deu a resposta correta rapidamente e explicou que fez três grupos de oito, que deu 24, e depois foi somando 24+24+24, que seria três vezes os três grupos de oito e daria 72.

Por fim, para o restante da turma que não havia conseguido, a professora solicitou que fizessem 2x8, que dá 16, e fossem somando ao resultado anterior mais 8, até obterem os demais resultados. A professora auxiliou a turma a efetuar essas somas.

O procedimento adotado pela professora X mantém os alunos no procedimento de realizarem a soma de parcelas iguais e prioriza a construção do conceito multiplicativo a partir da adição. Segundo Taxa-Amaro e Fini (2004), a atuação pedagógica dos professores no trabalho com a multiplicação como somas repetidas apresenta-se como mais um dos recursos de exploração do cálculo, mas, na visão de muitos docentes, quando chega o momento da aprendizagem da multiplicação, é possível ensinar retomando ao algoritmo da adição.

Na aula da professora Y, a metodologia usada foi um pouco diferente, com apenas 16 alunos. Ela sentou em círculo com eles no chão. No meio do círculo, haviam vários aquários desenhados e vários peixinhos, todos construídos por eles anteriormente. Por eles foi passando uma lata que possuía vários números e a ideia era sortear um número e construir a tabuada do 7, conforme a quantidade de aquários sorteados, isto é, se o aluno sorteasse o número 4, deveria montar 4 aquários com 7 peixes em cada um.

A lata foi passando e o primeiro aluno sorteou o número 5. A professora perguntou o que tinha que fazer e, como resposta, o aluno disse que deveria montar 5 aquários com 7 peixes cada um e contar. Feito isso, o aluno respondeu 35 e a lata seguiu. No seguinte, o número sorteado foi 2 e a aluna montou dois aquários com sete peixes cada um. Adiante, o aluno sorteou o 6 e fez apenas um aquário com sete peixes, mas respondeu 42. A professora questionou de onde vieram os 42 e o aluno explicou que, ao lembrar do 35, que eram 5x7, sabia que mais um aquário seria 6x7 e bastava somar à resposta anterior mais 7. A estratégia do aluno foi validada pela professora, até porque ele estava prestando atenção às respostas anteriores.

Sucessivamente, a lata foi passando e alguns alunos adotaram a mesma estratégia de lembrar de alguma resposta anterior, outros montavam todos os aquários e contavam, até que o número zero apareceu. Daí os alunos se olharam e chegaram à conclusão de que não teria nenhum peixe, pois não podiam pegar nenhum aquário. A professora, satisfeita com a atividade, pediu a colaboração dos alunos para, agora sim, montar em ordem a tabuada no quadro conforme o que se lembravam das respostas dadas.

Em ambas as turmas, a tabuada foi construída em forma de tabela. À medida que os alunos evoluíam nos números, a tabela ia sendo construída e deixada exposta em sala de aula. No entanto, muitos alunos não associaram a sua exposição, em aula, e acabaram errando cálculos, por acreditarem saber a tabuada de forma mecânica.

Percebe-se que a abordagem dada pelas professoras foi diferente e cada uma, do seu modo, procurou ensinar a tabuada. O fato é que muitos alunos não aprendem, alguns não compreendem e alguns têm dificuldade de memorizar. Segundo Aranão (1996), com a diversidade de materiais, sejam eles industrializados ou não, à disposição do professor, pode-se exercitar o raciocínio lógico-matemático da criança livre de exercícios repetitivos ou de memorização.

Em relação à prática docente, Taxa-Amaro e Fini (2004) afirmam que, ao longo das duas últimas décadas, a Escola Fundamental tem mostrado que ainda vigora a ênfase no ensino de Matemática apoiado na verbalização e na memorização. O professor quando trabalha com solução de problemas de enunciado na lousa, explica-os aos alunos que os registram nos cadernos com o algoritmo correspondente.

Magina, Santos e Merlini (2011) e Santos (2012) esclarecem que, com a utilização da soma de parcelas repetidas, apesar de ser muito exaustivo, é possível introduzir-se a multiplicação. Porém, segundo os autores, é, na maioria das vezes, a partir da ideia de adição de parcelas repetidas que se inicia o trabalho da memorização da tabuada como ferramenta indispensável para o domínio da operação de multiplicar, enfatizando por fim, o algoritmo da multiplicação com número de dois ou mais algarismos. De todo modo,

> [...] para trabalhar com problemas do campo conceitual multiplicativo, a escola, quase sempre, centra-se no ensino das tabelas de multiplicar e no

> manejo dos algoritmos, convertendo a memorização das multiplicações básicas em um dos objetivos centrais do ensino da Matemática no Ensino Fundamental. Em outras palavras, parece haver uma forte crença de que para o domínio conceitual das operações de multiplicação e divisão, basta o estudante dominar a tabuada e alguns procedimentos de cálculo para obter sucesso na resolução de diversos problemas do campo conceitual multiplicativo (MAGINA, SANTOS, MERLINI, 2011, p. 1).

Em relação à memorização e automatização de procedimentos, Taxa-Amaro e Fini (2004) citam Spinillo (1994), o qual comenta que o ensino da Matemática, na escola, tende a privilegiar esse método em detrimento da compreensão, desconsiderando noções espontâneas das crianças.

Exemplos de estratégias já encontradas na literatura da área e outros exemplos de estratégias verificadas nesse estudo foram usados para a análise de dados na resolução dos problemas multiplicativos propostos.

3.2 ESTRATÉGIAS USADAS PELAS CRIANÇAS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS

Aos alunos da turma da professora X foi proposto que resolvessem um teste com problemas multiplicativos a ser aplicado individualmente com cada aluno pela pesquisadora.

O desempenho dos 21 alunos no teste de resolução de problemas multiplicativos encontra-se descrito na tabela 1 com o detalhamento do tipo de erro encontrado em suas soluções, conforme os códigos de correção adotados por Justo et al (2015). Foram adotadas as siglas das categorias semânticas dos problemas multiplicativos de proporcionalidade (MP), comparação (MCP), organização retangular (MOR), proporcionalidade por partição (MPdp), proporcionalidade por medição (MPdm) e análise combinatória simples (MAC) (JUSTO et al, 2015).

Tabela 1 – Desempenho dos alunos do 4º ano na resolução de problemas multiplicativos

	Problema a (MP)	Problema b (MOR)	Problema c (MPdp)	Problema d (MAC)	Problema e (MPdm)	Problema f (MCP)
Correta (1)	14	10	1	6	2	12
Incorreta: raciocínio (0:1)	2	7	3	10	15	5
Incorreta: em branco (0:3)	2	2	13	3	3	-
Parcialmente Correta: procedimento de cálculo (2:2)	1	2	4	2	-	4
Parcialmente Correta: não se pode avaliar (2:4)	-	-	-	-	1	-
Parcialmente correta: falta de atenção (2:5)	2	-	-	-	-	-
Parcialmente correta: erro na resposta escrita (2:6)	-	-	-	-	-	-

Fonte: a pesquisa.

Os erros realizados pelas crianças foram categorizados com base no trabalho de JUSTO et al (2015). Assim, para a correção dos problemas, utilizou-se o código de correção da figura 2:

Figura 2 - Código de correções dos testes

CÓDIGOS DE CORREÇÃO	
Questão	Categorias de Erros
0 = incorreta 1 = correta 2 = parcialmente correta	Se incorreta (0): 1= raciocínio Se incorreta (0): 3= em branco Se incorreta (0) ou parcialmente correta (2): 4= não se pode avaliar Se parcialmente correta (2): 2= procedimento de cálculo Se parcialmente correta (2): 5= falta de atenção Se parcialmente correta (2): 6= erro na resposta escrita

Fonte: Justo et al (2015, p.39).

Entendeu-se por erros de raciocínio, quando os alunos não conseguiam chegar ao cálculo que resolvesse o problema. Os de procedimento de cálculo foram apontados quando o aluno encontrava o cálculo adequado, no entanto não conseguia desenvolver esse cálculo corretamente. Os erros de falta de atenção ocorriam quando o aluno apresentava o raciocínio adequado, desenvolvia o procedimento de cálculo correto, porém copiava erradamente os números, ou ainda realizava a operação correta, mas indicava outra. O erro na resposta escrita ocorria quando o problema era solucionado corretamente, mas a resposta escrita não respondia à pergunta proposta pelo problema. Houve, ainda, questões em que os estudantes não tentavam resolver o problema, deixando-o em branco (JUSTO et al, 2015).

Problemas como de MP, MCP e MOR costumam ser trabalhados frequentemente pelas professoras e esse fato justifica um melhor desempenho dos alunos, também demonstrado na pesquisa de Justo et. al (2015).

Outro fator é que a compreensão delas se torna mais fácil, à medida que eles compreendem e conseguem fazer representações.

Algumas questões apresentaram erros de cálculo, como o resultado da multiplicação errada ou o algoritmo inadequado. Segundo Justo et. al (2015), o maior tipo de erro são os de *raciocínio*, seguidos pelo de *procedimento de cálculo,* evidenciando-se um número elevado de questões não resolvidas (em branco), que foi considerado, pelas autoras, como falta de compreensão e aprendizagem dos conceitos envolvidos, assim como pode demonstrar falta de confiança dos alunos na própria capacidade de resolver problemas.

No entanto, o que mais chama a atenção é o número de questões deixadas em branco ou que tiveram um erro de raciocínio na releitura do problema, fato que aconteceu em grande número nas questões que envolviam a proporcionalidade por partição (MPdp), por medição (MPdm) e de análise combinatória (MAC). O mesmo é trazido por Justo et. al (2015), quando estudantes de 4º ano nas questões multiplicativas que envolviam essas classificações, tiveram baixíssimos rendimentos, MAC foi inferior à 10%, MPdp foi de 20 % enquanto que MPdm foi pouco superior a 10%.

A justificativa encontrada pela professora da turma, durante a análise dos dados, quanto à resolução de problemas de proporcionalidade por partição e por medição, em relação aos erros cometidos pelos alunos e ao número de questões deixadas em branco, foi que os exercícios de partição e medição são aprendidos mais no final do ano letivo e os problemas de combinatória simples quase ou nunca são trabalhados.

Conhecer os processos cognitivos mobilizados pelos alunos na resolução de situações multiplicativas pressupõe conhecer, de modo articulado, em diferentes dimensões, o significado que atribuem às situações multiplicativas, os procedimentos que mobilizam na resolução dessas situações, os modos simbólicos com que se expressam. Esses processos cognitivos são definidos por Vergnaud (1994) como sendo os que organizam a conduta, a representação e a percepção, bem como o desenvolvimento das competências e das concepções de um sujeito no decorrer de sua experiência de aprendizagem.

Durante a resolução individual dos problemas, foi possível verificar que as crianças fazem uso de desenhos para representar a situação-problema, utilizando-se da contagem para encontrarem a solução do problema.

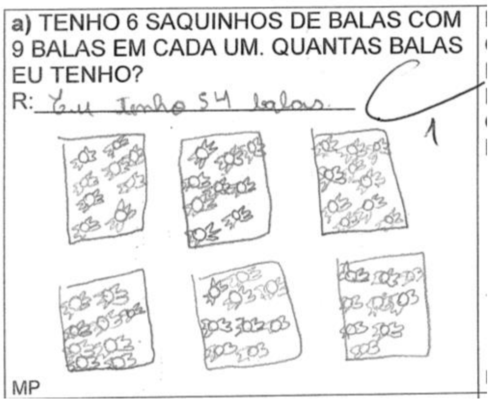
Para a análise, apresentam-se as estratégias que foram verificadas com frequência, como: adição de parcelas iguais, o uso da tabuada memorizada e as estratégias que geraram erros.

Foram utilizadas as transcrições das falas em itálico. Adotou-se a sigla **Na,** para indicar a fala dos alunos, onde n é o número de identificação do aluno e a sigla **P**, para indicar a fala da pesquisadora. Além disso, para indicar os momentos de pausa e de silêncio nas falas, são usados colchetes com reticências [...].

3.2.1 Estratégia da adição de parcelas iguais

Inicialmente, tratou-se dos exemplos da estratégia de solução da adição de parcelas iguais, que ocorreu, principalmente, nos problemas de proporcionalidade (MP) e de organização retangular (MOR). Escolheu-se, para exemplificar a solução por adição de parcelas iguais, a resolução dos problemas indicados na figura 3 (MP) e na figura 4 (MOR)

Figura 3 - Solução do A1 para o problema multiplicativo de proporcionalidade (MP).



Fonte: A pesquisa.

Com relação ao problema de proporcionalidade apresentado na figura 3, ao receber as orientações, a aluna logo começou a realizar desenhos. Finalizado o desenho, ela passou a contar os elementos, partindo do 18, que seriam 2 grupos. Ela contou um a um os elementos. A seguir, apresentam-se as respostas dadas à professora sobre o assunto.

P: *O que você fez nesta questão?*

A1: *Fiz o desenho de 6 saquinhos com 9 balas cada um e daí contei quantas tinham ao todo e achei 54.*

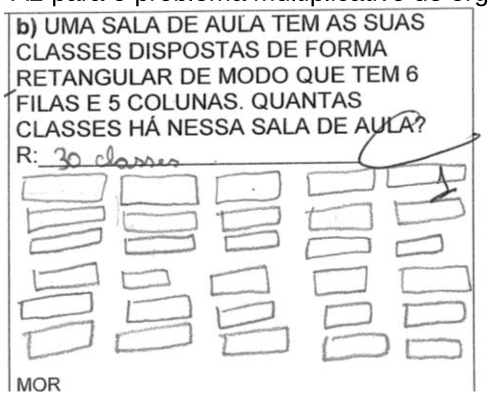
P: *Muito bem... vamos para o outro problema.*

Os estudos de Kamii e colaboradores (2002) tratam da solução apresentada pela A1. Os pesquisadores relatam procedimentos elaborados pelas crianças, revelando variações de estratégias de resolução de problemas multiplicativos através de adições repetidas.

Brissiaud (1994) diz que uma criança sabe contar quando faz uma relação termo a termo com os objetos e os nomes dos números. No entanto, à medida que as quantidades vão aumentando, é preciso marcar um ponto de partida para a contagem ou mesmo partir para contagens por agrupamentos para diminuir a possibilidade de erros na correspondência um a um.

No exemplo da figura 4, a seguir, pode-se perceber as mesmas características e representações feitas no exemplo anterior:

Figura 4 – Solução do aluno A2 para o problema multiplicativo de organização retangular (MOR)



Fonte: a pesquisa

Com relação ao problema de organização retangular apresentado na figura 4, a aluna fez o desenho das classes da sala de aula e para responder ao problema, usando a contagem um a um. A professora questionou-a:

P: *Como você está desenhando?*

A2: *Fiz 6 filas com 5 classes, mas não sei como colocar as 6 classes de cada fila que o problema tá falando.*

P: *Acha que precisa?*

A2: *Não sei, tenho que pensar...*

A2: *[...]*

P: *E daí?*

A2: *[...]*

P: *Me diz quantas filas você fez?*

A2: *Seis.*

P: *Quantas classes cada uma?*

A2: *Cinco.*

P: *E então, quantas classes tem no teu desenho?*

A2: *[...]* (começa a contar um a um).

A2: *Tem 30.*

P: *E aí, será que essa é a resposta?*

A2: *Acho que é! Não consigo desenhar mais nada aqui...* (a aluna parece nervosa e incomodada).

P: *Então, vamos olhar outro.*

A2: *Tá. Mas esse tá certo?*

P: *Sim.*

Na questão apresentada, a aluna demorou um pouco para compreender como deveria proceder, mas ao fazer a representação e entender o que se pedia, fez o desenho das 5 classes em cada fila, representando a adição de parcelas repetidas.

A adição de parcelas repetidas, nessa faixa etária, comumente se dá em forma de representação por desenhos, seguida por contagem dos elementos. Para alguns alunos, a contagem se dá a partir dos agrupamentos, no caso, seria 5+5+5... No entanto, A2 realizou a contagem elemento por elemento.

Os alunos compreendem as relações entre adição e multiplicação, mas, muitas vezes, pelo fato da tabuada ainda não ter sido memorizada, acabam aderindo a estratégias de adição repetida. Do ponto de vista de Taxa-Amaro e Fini (2004), mesmo considerando esse trabalho como somas sucessivas, a criança pode apresentar dificuldades e precisa construir uma representação interna dos dados para, depois, aplicar fórmulas matemáticas. Na maioria das vezes, registros de somas repetidas, como: 4+4+4+4=16, podem não ter significado para as crianças e nem serem entendidos como equivalentes ao algoritmo da multiplicação (4x4=16), como esperam os professores.

As conexões entre adição e multiplicação e entre subtração e divisão são processuais: a multiplicação pode ser realizada por adições repetidas e a divisão, usando repetidas subtrações. Apesar das ligações processuais entre adição e multiplicação, essas duas formas de raciocínio são diferentes o suficiente para serem consideradas como distintos domínios conceituais. Assim, os termos *raciocínio aditivo* e *multiplicativo* são usados para as relações conceituais, em vez de se referirem às operações aritméticas (NUNES; BRYANT, 2009).

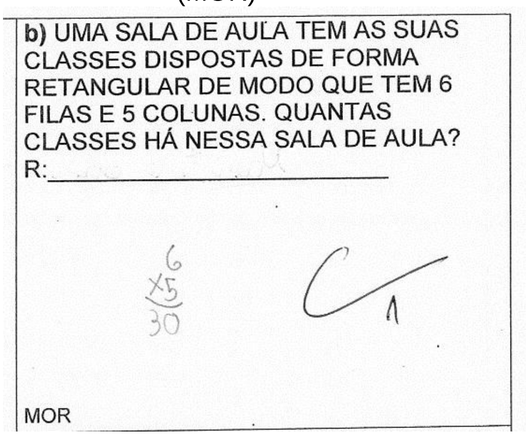
Porém, com relação aos campos conceituais aditivo e multiplicativo, Santos (2012) afirma que esses não são independentes, caracterizando certa filiação entre eles. Afirma que, em alguns aspectos, um campo conceitual pode ser importante para a compreensão do outro. Porém, vale pontuar que Vergnaud (1983b) considera útil falar em distintos campos conceituais, pois eles podem ser consistentemente descritos.

3.2.2 Estratégia do uso da tabuada memorizada

Em outras situações, pode-se verificar o uso da tabuada memorizada, através do cálculo feito de forma direta pelas crianças, o que foi verificado, tanto nos problemas de organização retangular (MOR) e análise combinatória simples (MAC), quanto nos problemas de comparação (MCP).

Para análise das questões que verificam o uso da tabuada memorizada, inicia-se com o exemplo da figura 5:

Figura 5 – Solução do aluno A3 para o problema multiplicativo de organização retangular (MOR)



b) UMA SALA DE AULA TEM AS SUAS CLASSES DISPOSTAS DE FORMA RETANGULAR DE MODO QUE TEM 6 FILAS E 5 COLUNAS. QUANTAS CLASSES HÁ NESSA SALA DE AULA?

R:________________________

6
x5
30

MOR

Fonte: a pesquisa.

Com relação ao problema de organização retangular, o aluno prontamente escreveu a operação e a resposta. Mas, ao ser questionado quanto à resposta, ele resolveu montar os grupos e contar usando os grupos (um para muitos), a fim de mostrar que a resposta estava correta, demonstrando, nesse problema, a estrutura multiplicativa já construída, conforme visto a seguir.

P: *Como podemos resolver esse?*

A3: *Também é de vezes.*

P: *E como tu vais fazer?*

A3: *6 vezes 5 que é 30.*

P: *Pode me mostrar com chegou no 30?*

A3: *(o aluno separa 6 grupos de 5 e depois conta de 5 em 5)*

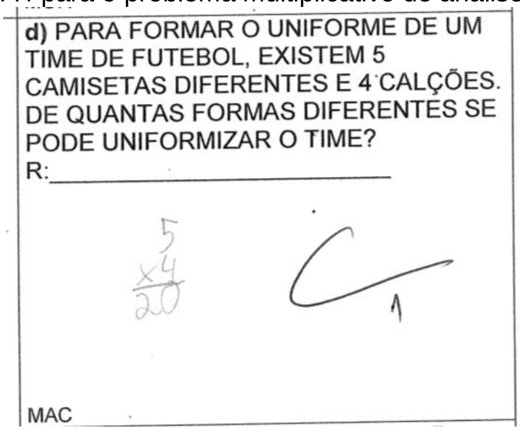
A3: *Vai dar 30.*

P: *Ok.*

Para o aluno, a tabuada é um procedimento automatizado que facilita a contagem e a resolução dos problemas. Ao ser solicitada a demonstração da resposta, a representação dos grupos e a contagem de 5 em 5 foi feita para fechar o total. O conceito multiplicativo parece estar construído de forma satisfatória por esse aluno.

Outra situação de memorização está representada na figura 6, a seguir.

Figura 6 – Solução do aluno A4 para o problema multiplicativo de análise combinatória simples (MAC)


d) PARA FORMAR O UNIFORME DE UM TIME DE FUTEBOL, EXISTEM 5 CAMISETAS DIFERENTES E 4 CALÇÕES. DE QUANTAS FORMAS DIFERENTES SE PODE UNIFORMIZAR O TIME?

R:________________________

$$\begin{array}{r} 5 \\ \times 4 \\ \hline 20 \end{array}$$

MAC

Fonte: a pesquisa.

Com relação ao problema de análise combinatória simples, o aluno demonstrou claramente o entendimento da multiplicação ao explicar seu raciocínio na questão e a construção da tabuada.

A4: *Também é de vezes.*

P: *E como vai ficar?*

A4: *5 vezes 4*

P: *Por quê?*

A4:*São 5 camisas e 4 calções, é como se fosse 5 conjuntos com quatro dentro.*

P: *Não te entendi.*

A4:*É que cada grupo, que é a camisa, tem 4 calção dentro, daí ele pode trocar 4 vezes de calção.*

P: *E como fica?*

A4: *20.*

P: *E como você chegou nesse número?*

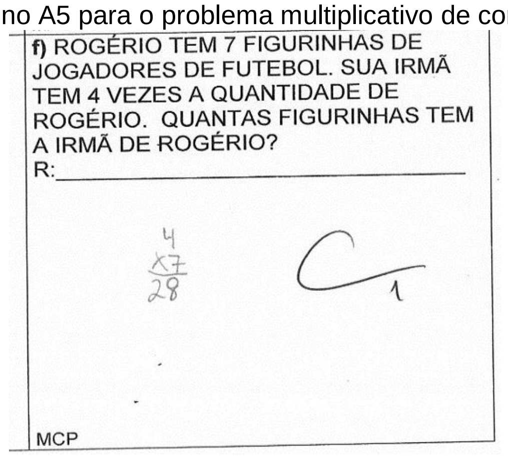
A4: *Eu sei a tabuada do 5. Daí, 5 vezes 4 dá 20.*

P: *Certo então.*

Os problemas de combinatória simples costumam ser mais difíceis para os alunos, mas, nessa situação, o aluno compreendeu a resolução como a formação das possibilidades. Segundo Nunes e Bryant (1997), a compreensão da correspondência termo a termo capacita as crianças para o desenvolvimento de outros esquemas quantitativos básicos para a apropriação das relações multiplicativas.

Em outra situação, apresenta-se o uso de uma informação de aulas anteriores, como na figura 7, a seguir.

Figura 7 – Solução do aluno A5 para o problema multiplicativo de comparação (MCP)


f) ROGÉRIO TEM 7 FIGURINHAS DE JOGADORES DE FUTEBOL. SUA IRMÃ TEM 4 VEZES A QUANTIDADE DE ROGÉRIO. QUANTAS FIGURINHAS TEM A IRMÃ DE ROGÉRIO?

R:____________________

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 7 \\ \hline 28 \end{array}$$

C 1

MCP

Fonte: a pesquisa.

Com relação ao problema de comparação apresentado na figura 7, a aluna associou a expressão ao quádruplo de alguma coisa, expressão já ouvida anteriormente em aula, o que também evidencia estar em construção o conceito multiplicativo. Embora tenha dado a resposta automática, quando foi solicitada a justificativa, fez os agrupamentos e foi contando os grupos (um para muitos).

P: *E a última?*

A5: *É de vezes.*

P: *Como fica?*

A5: *Vai ficar 4 vezes 7.*

P: *Por quê?*

A5: *É o quádruplo.*

P: *E daí fica 4 vezes 7?*

A5: *Sim.*

P: *Quanto fica?*

A5: *28.*

P: *Como sabe se é mesmo 28? Pode me mostrar?*

A5: *Sim, é só fazer 4 grupos de 7 e ir contando 7+7+7+7 que dá 28.*

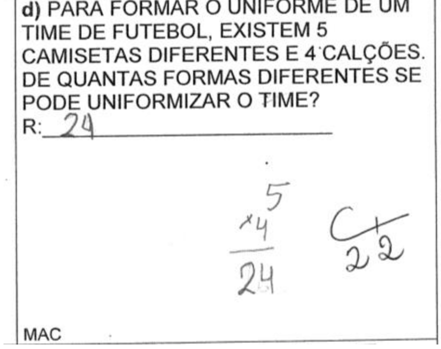
P: *Certo.*

O Pacto Nacional da Alfabetização na Idade Certa (BRASIL, 2014b, p. 49) critica a memorização da tabuada de forma mecânica e enfatiza que "aprender multiplicação requer muito mais do que memorizar as tabuadas". Porém, reconhece que a memorização da tabuada da multiplicação facilita a realização de cálculos, carecendo ser consequência da adoção de estratégias metodológicas que permitam a construção/estruturação de regularidades entre os fatos numéricos (BRASIL, 2014b, p. 49).

Broitman (2011) defende que a tabuada tem sido palco de enfrentamentos. Conforme a autora, de um lado, há educadores que defendem a sua memorização e, de outro, há os que condenam essa prática. Ela argumenta que, progressivamente, as crianças precisarão dispor de um conjunto de cálculos simples para poderem realizar outros mais complexos.

Diante desses argumentos, no entanto, apresentam-se dois exemplos de memorização errônea da tabuada que resultam em erro, como na figura 8:

Figura 8 – Solução do aluno A2 para o problema multiplicativo de análise combinatória simples (MAC)



d) PARA FORMAR O UNIFORME DE UM TIME DE FUTEBOL, EXISTEM 5 CAMISETAS DIFERENTES E 4 CALÇÕES. DE QUANTAS FORMAS DIFERENTES SE PODE UNIFORMIZAR O TIME?

R: 24

$$\begin{array}{r} 5 \\ \times 4 \\ \hline 24 \end{array}$$

22

MAC

Fonte: a pesquisa.

Com relação ao problema de análise combinatória simples apresentado na figura 8, a aluna traz a tabuada de forma mecânica e não julga necessário fazer desenhos, nem cálculos para conferir a resposta.

P: *Como você resolve esse?*

A2: *É como a letra b.*

P: *Como assim?*

A2: *Tenho 5 camisetas e 4 calções, como posso trocar só de calção, vou ter um monte de uniforme.*

P: *Você faz conta?*

A2: *Sim, de vezes.*

P: *E como fica?*

A2: *Vai ficar 5 vezes 4 que é 24.*

P: *Como?*

A2: *5 vezes 4.*

P: *E quanto dá?*

A2: *24.*

P: *Como chegou nessa resposta?*

A2: *Sei de cor [...]*

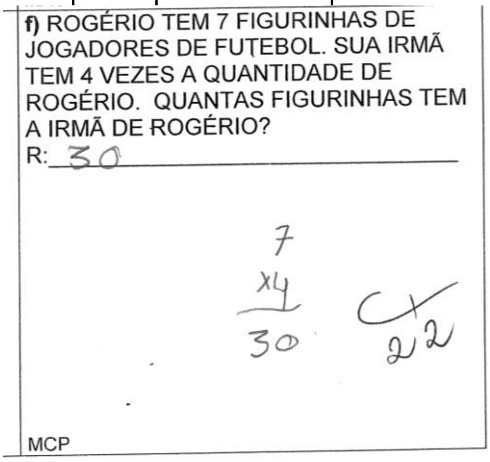
P: *E não quer conferir com o material?*

A2: *Não... não preciso fazer.*

A compreensão da combinação entre camisas e calções foi realizada de forma correta, demonstrando que a aluna compreende a situação como uma multiplicação. No entanto, a autoconfiança em “saber” a tabuada apresentou erro. Para se afirmar uma resposta da operação de multiplicação, antes é necessário conhecer a sua origem e conceitos. Com essa percepção, Treffers e Buys (2001) afirmam que o trabalho em torno da multiplicação deve assentar na compreensão de conceitos e propriedades, ao longo de um período, porque existe um conjunto de etapas que o aluno tem necessariamente que percorrer, não servindo de nada procurar eliminar algumas delas, para chegar de forma rápida à formalização.

Os procedimentos multiplicativos permitem apoiar a compreensão das propriedades dessa operação e desenvolver formas rápidas e eficazes de cálculo mental, mas memorizar a tabuada erroneamente pode causar erros na resolução de cálculos, como está exemplificado na figura 9, apresentada a seguir.

Figura 9 – Solução do aluno A6 para o problema multiplicativo de comparação (MCP)



Fonte: a pesquisa.

Com relação ao problema de comparação apresentado na figura 9, a aluna é bastante rápida ao dar a resposta e não sente necessidade de refazer nem conferir. Aposta em sua memorização.

P: *E essa, o que você faria?*

A6:*Também é de vezes?*

P: *Não sei, lê a questão e me diz o que você faria.*

A6: *Bom, são 7 figurinhas que Rogério tem e a irmã dele tem 4 vezes mais, então ela vai ter o quádruplo dele.*

P: *E como fica?*

A6: *Vai ficar 7 vezes 4.*

P: *Quanto daria?*

A6: *Daria 30.*

P: *Quanto?*

A6: *30!*

P: *Você pensa muito rápido [...] não quer olhar as questões com calma novamente?*

A6: *Não precisa.*

A confiança adquirida pela aluna, ao compreender o conceito multiplicativo, trouxe a certeza de que a operação a ser realizada era essa. Porém, a memorização da tabuada de forma errada impediu que ela obtivesse êxito na questão.

Muitos professores consideram a memorização da tabuada necessária. No entanto, diante dessa imposição, Vergnaud (2009) salienta que a mesma deve, sim, ser usada sempre que se faça necessário, mas de nada adianta memorizar sem entendê-la. Ele, expressa, ainda, que esse conhecimento deve ser construído não por uma aprendizagem e recitação decoradas, mas por exercícios de cálculo rápido, que permitam às crianças captar o interesse que efetivamente há em se conhecer de memória certos resultados. Em nenhum caso é necessário subordinar a aprendizagem dos algoritmos operatórios ao conhecimento da tabuada.

3.2.3 Estratégias que geraram erros

A resolução de problemas de combinatória simples (MAC) foi deixada pela maioria, em grande número em branco. Outro fato ocorrido foram os erros apresentados na resolução desses mesmos problemas, o que leva a verificar o que causou esses erros.

Outra situação são as resoluções dos problemas de proporcionalidade de medida (MPdm) e com ideia de partilha (MPdp). O número de erros faz questionar o fato do conceito multiplicativo ainda não ter sido construído nessas resoluções, pois grande parte dos alunos usa a adição e a subtração para a resolução.

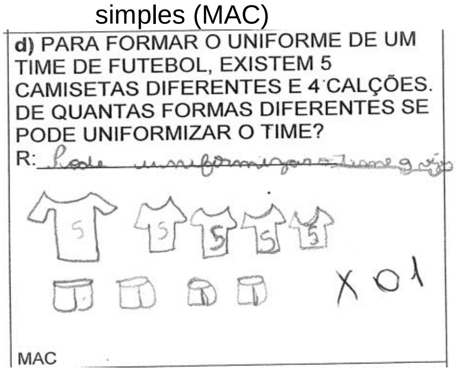
Muitos apresentaram erros na resolução das questões, por apresentarem falta de compreensão na leitura. Algumas questões, em sua releitura, passaram a ter uma nova interpretação e outras, sem esforço algum para tentar resolver, foram deixadas em branco, talvez por insegurança dos próprios alunos.

Alguns alunos costumam procurar por palavra-chave para resolver os problemas, o que pode ser um complicador. Para outros, isso não interfere, pois buscam caminhos alternativos para resolver os problemas e encontrar as respostas adequadas. Segundo Justo (2004, p.104), a dúvida das crianças pode traduzir-se como um problema de ensino, que pode “expressar-se pela ênfase excessiva no cálculo numérico, pelo trabalho com palavras-chave, por não se trabalhar com a compreensão dos problemas...”. A criança acaba, por vezes, questionando a operação a ser feita, sem a sua compreendê-la.

Percebe-se a dificuldade no cálculo relacional (compreensão do enunciado), muito mais do que nos algoritmos. Segundo Carpenter et. al (1980), a procura por palavras-chave que indicam alguma operação é constante, mas o uso delas não é aconselhável, uma vez que são boas como recurso para interpretação, mas não parecem um bom procedimento de ensino. Além disso, se forem apresentados problemas em que a palavra-chave não corresponde à operação necessária para a resolução, a criança não conseguirá resolvê-los.

Uma situação em que não aparece uma palavra-chave está na figura 10, a seguir, onde a aluna não associa as combinações a serem feitas, pois a ideia de uniformizar o time não remete o aluno às combinações, e sim apenas à soma de camisetas e calções, isto é, à quantidade de peças de uniforme.

Figura 10 – Solução do aluno A7 para o problema multiplicativo de análise combinatória simples (MAC)



Fonte: a pesquisa.

Com relação ao problema de análise combinatória simples apresentado na figura 10, o conceito da estrutura multiplicativa ainda parece não estar formado nessa resolução. A aluna está ligando a ideia de adição e demonstra não compreender muito bem a questão ao realizar sua leitura.

***P:** Lê o problema e vê o que você faria nesse.*

***A7:** [...] (Após ler, ela desenha as 5 camisas e 4 calções e automaticamente escreve o 9 na resposta).*

***P:** Como fez para achar essa resposta?*

***A7:** Contei 5 camisas mais 4 calções e deu 9.*

***P:** Acha que essa é a resposta?*

***A7:** Sim, porque não dá pra fazer mais uniforme.*

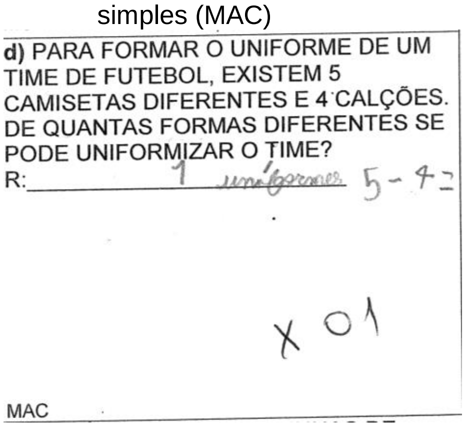
A resolução de problemas multiplicativos de análise combinatória simples, para a aluna, não é clara, pois, para ela, a ideia de uniforme seria uma peça, logo a soma foi realizada para a resposta de 9 uniformes, 5 camisetas e 4 calções.

O problema não apresenta uma palavra-chave que indique alguma operação. Segundo Carpenter et. al (1980), isso nem é indicado, pois pode tornar-se um complicador.

No entanto, se a expressão "uniforme", no problema, fosse trabalhada de forma contextualizada e através de combinações possíveis, a compreensão do problema poderia ter ocorrido de forma diferenciada.

Nesse mesmo problema, outro aluno associou a ligação, mas pensou em uniformes "fixos", isto é, sem que a troca de camisetas e calções fosse possível, embasando-se na palavra diferente, como mostra na figura 11:

Figura 11 – Solução do aluno A8 para o problema multiplicativo de análise combinatória simples (MAC)


d) PARA FORMAR O UNIFORME DE UM TIME DE FUTEBOL, EXISTEM 5 CAMISETAS DIFERENTES E 4 CALÇÕES. DE QUANTAS FORMAS DIFERENTES SE PODE UNIFORMIZAR O TIME?

R: 1 uniformes 5 - 4 =

x 01

MAC

Fonte: a pesquisa.

Com relação ao problema de análise combinatória simples apresentado na figura 11, o aluno não visualizou a multiplicação. Fez a leitura e não conseguiu interpretar o enunciado, fixando-se na ideia de outra operação de um a um.

***P:** E esse?*

***A8:** Vai dar 1.*

***P:** Mas por quê?*

***A8:** Essa é de menos.*

P: *Que conta você fez?*

A8: *5 menos 4.*

P: *Só é possível fazer 1 uniforme?*

A8: *Sim... se não falta.*

P: *Falta? Como assim?*

A8: *Tem 5 camisas e 4 calção, dá só 1 uniforme.*

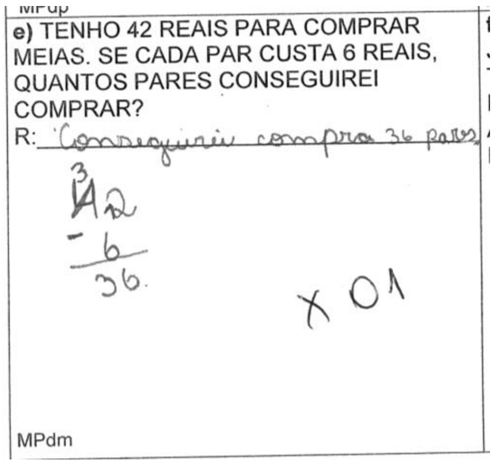
P: *Ok.*

O aluno A8, ao resolver o problema multiplicativo de análise combinatória simples, baseou-se na expressão “diferente” descrita no enunciado, o que, segundo Carpenter et. al (1980), é uma palavra-chave e o uso dela não é viável, podendo, nesse mesmo problema, perceber que a palavra indica ao aluno uma subtração, o que não seria o caso no exercício.

No desenvolvimento dessa questão, alguns alunos disseram não ser possível a resolução, pois havia mais camisetas do que calções. Outros nem tentaram a resolução, dizendo não entender, preferindo deixar em branco. Também havia alunos em que a estrutura multiplicativa ainda não foi construída em situações de análise combinatória simples. Assim, eles procuraram resolver as questões valendo-se da adição e subtração.

Outra questão para a análise é uma em que mais se verificaram erros, apresentada na figura 12, a seguir.

Figura 12 – Solução do aluno A4 para o problema multiplicativo de proporcionalidade por medição (MPdm):



Fonte: a pesquisa.

Com relação ao problema de proporcionalidade por medida, apresentado na figura 12, a resolução desse também remete à ideia de que a estrutura multiplicativa ainda não esteja bem construída, assim como o não entendimento do enunciado.

P: *E agora?*

A4: *Posso fazer a conta?*

P: *Claro, que conta você faria?*

A4: *[...] (baixa a cabeça e faz 42-6=36)*

P: *Que conta você fez?*

A4: *Fiz 42 menos 6.*

P: *Por quê?*

A4: *Se tenho 42 reais e a meia custa 6, então, se eu gastar 6, ainda tenho 36.*

P: *E essa é a resposta?*

A4: *[...] (lê novamente o problema)*

A4: *Sim. É a resposta.*

P: *Não teria outro jeito?*

A4: *Só se eu desenhar, mas daí dá muito trabalho.*

P: *Não quer desenhar para conferir?*

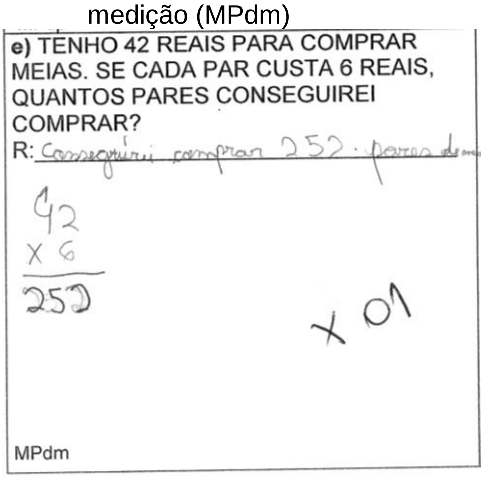
A4: *Não... (ela sorri).*

P: *Ok, vamos adiante então.*

Problemas de proporcionalidade por medida ou medição tratam do inverso da multiplicação e estão entre as operações mais complexas. O ensino de problemas por meio do ensino de algoritmos formais provoca, como nesse caso, a busca imediata de um cálculo com os números do problema. Essa busca, muitas vezes, leva ao erro (JUSTO, 2004). Outra preocupação é que, às vezes, os problemas de divisão por medição não são trabalhados em sala de aula pelos professores.

Outra criança, ao resolver esse mesmo problema, apoiou-se em palavras-chaves ao ler o problema, o que atrapalhou a resolução, como se vê na figura 13.

Figura 13 – Solução do aluno A1 para o problema multiplicativo de proporcionalidade por medição (MPdm)


e) TENHO 42 REAIS PARA COMPRAR MEIAS. SE CADA PAR CUSTA 6 REAIS, QUANTOS PARES CONSEGUIREI COMPRAR?

R: Conseguirei comprar 252 pares

42
x 6
252

x 01

MPdm

Fonte: a pesquisa.

Quanto ao problema de proporcionalidade por medição, apresentado na figura 13, a aluna demonstrou que já consegue resolver o cálculo de multiplicação, mas a falta de entendimento da questão causou o erro na sua resolução.

P: *E esse?*

A1: *(aluna começa a fazer contas).*

P: *Que conta você está fazendo?*

A1: *De vezes.*

P: *Por quê?*

A1: *Cada meia custa 6 reais...*

P: *Mas quantos pares você pode comprar? [...] isso que o problema quer saber.*

A1: *São... 252.*

P: *Como assim? O que você fez?*

A1: *42 vezes 6.*

P: *Por que vezes?*

A1: *Tenho 42 reais e cada meia custa 6 e quando é dinheiro faz vezes.*

P: *Quantos pares vai comprar?*

A1: *252.*

P: *Ok.*

A aluna já compreende parcialmente a estrutura multiplicativa, mas a palavra-chave “comprar” e a situação do contexto “dinheiro” levam-na a compreender a situação como uma multiplicação.

Na resolução desse problema, também percebeu-se que o uso das palavras-chave, no momento, tornou-se inadequado e o problema que parecia fácil teve o seu complicador.

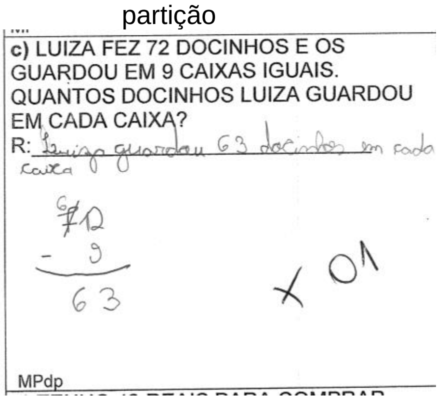
Ao resolver um problema, os alunos buscam suas estratégias de resolução. Alguns se utilizam de palavras-chave, o que não é aconselhável, outros, de material concreto; outros ainda de operações com algoritmos, mas todas as estratégias devem vir acompanhadas de compreensão.

As estratégias espontâneas das crianças fizeram-se presentes em suas resoluções. No entanto, à medida que os conhecimentos escolarizados passaram a interferir em suas resoluções, percebe-se que a estrutura multiplicativa ainda não está concluída. Ao lembrar algo trabalhado em aula, anteriormente e que não foi bem compreendido, a aluna errou a solução da questão. O que precisa ser trabalhado é a interpretação do problema, fazer algumas pressuposições sobre possíveis soluções e só depois ir ao cálculo. Validar a resposta de acordo com o que diz o problema é uma das etapas necessárias na resolução dele.

As estratégias que as crianças desenvolvem para resolver situações-problemas têm relação com os conhecimentos conceituais já construídos por elas (ORRANTIA, 2003; 2006).

Outra questão com uma quantidade significativa de erros, foi o problema da figura 14, apresentado a seguir.

Figura 14 – Solução do aluno A9 para o problema multiplicativo de proporcionalidade por partição


c) LUIZA FEZ 72 DOCINHOS E OS GUARDOU EM 9 CAIXAS IGUAIS. QUANTOS DOCINHOS LUIZA GUARDOU EM CADA CAIXA?
R: Luiza guardou 63 docinhos em cada caixa

72
- 9
63

X 01

MPdp

Fonte: a pesquisa.

Com relação ao problema de proporcionalidade por partição, apresentado na figura 14, a aluna demonstrou tê-lo interpretado de forma diferente. Verifica-se que a frase do problema é reformulada por ela, tendo, assim, outro sentido.

P: E essa dos docinhos?

A9: [...] (começa a conta).

P: Que conta tu tá fazendo?

A9: 72 menos 9.

P: Por quê?

A9: A Luiza tem 72 docinhos e vai guardar 9 em caixas, vai ficar 63.

P: Guardar 9 em caixas?

A9: É, daí vai ficar 63.

P: Mas a pergunta é quantos docinhos ela guardou em cada caixa.

A9: [...]

P: Não quer fazer desenhos?

A9: Não, vai ficar 63 docinhos em cada caixa.

P: Ok.

Ao reler o problema, a aluna permaneceu com a sua interpretação do problema, o que a levou ao erro da questão e da operação escolhida por ela.

Para Soares (2010), ler e escrever é um compromisso de todas as áreas do conhecimento, visto que cada área de conteúdo tem um tipo específico de texto. Da mesma forma, Fonseca e Cardoso (2005) afirmam que a Matemática requer o ato da leitura, assim como qualquer outra disciplina. Essas autoras sugerem atividades de leitura para o ensino de Matemática e destacam a existência de gêneros textuais próprios dessa área.

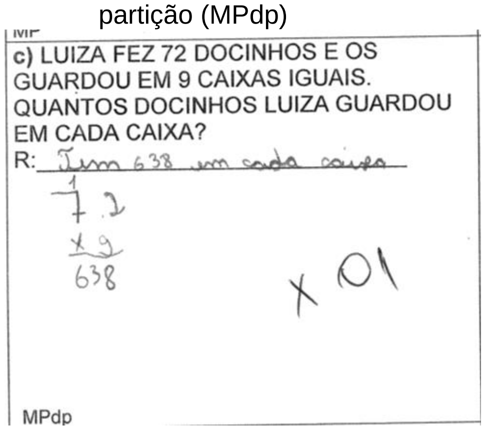
Segundo Justo (2009), possuir uma informação ou ter domínio de um algoritmo de uma operação matemática é diferente de ser capaz de acessá-la quando necessário, assim como é diferente ter uma habilidade e saber como aplicá-la.

Segundo Orrantia (2006), o processo de desenvolvimento do pensamento matemático se dá através da aprendizagem conjunta de conceitos e procedimentos, iniciando-se por volta dos 3 anos de idade, quando a integração dos esquemas protoquantitativos e da contagem verbal assume importante papel na aprendizagem da resolução de problemas.

Possuir competência na resolução de problemas, afirmam Smole e Diniz (2001), envolve uma situação que exige resolução, identificação de seus dados, mobilização de conhecimentos, construção de uma estratégia ou um conjunto de procedimentos, organização e perseverança, análise constante do processo de resolução e a validação da resposta e, se for o caso, formulação de outras situações-problema. Considerando essas habilidades, segundo Justo (2009), pode-se dizer que resolver problemas matemáticos exige a aprendizagem de conceitos, a construção de estratégias e de procedimentos, assim como habilidades metacognitivas.

No entanto, a falta de competência na resolução de problemas remete o aluno ao erro, muitas vezes sem compreensão, Como se vê na figura 15.

Figura 15 – Solução do aluno A10 para o problema multiplicativo de proporcionalidade por partição (MPdp)



Fonte: a pesquisa.

Com relação ao problema de proporcionalidade por partição, apresentado na figura 15, o aluno demonstra ter o conceito multiplicativo construído, pois sabe fazer multiplicações, embora se atrapalhe na resolução conta. Tenta usar o material, mas também se atrapalha na contagem, pois vai realizando-a um a um.

P: E esse, como podemos resolver?

A10: Posso fazer a conta?

P: Pode sim.

A10: (começa a escrever uma operação).

P: Mas que conta você está fazendo?

A10: De vezes.

P: Por quê?

A10: Ué, são 72 docinhos em 9 caixas.

P: E como ficou a sua conta?

A10: 72x9.

A10: Daí 2x9 é 18 e sobe 1 [...] (para pensar em como terminar).

A10: Posso usar o material?

P: Pode sim.

A10: [...] (separa 7 grupos de 9 objetos, conta um a um e responde).

A10: Dá 62, daí mais 1 que subi dá 63.

P: Como ficou a tua resposta então?

A10: 638.

P: É isso mesmo? Podemos continuar?

A10: Sim, é essa conta.

Nessa questão, o aluno ficou um tempo muito grande pensando e lendo o problema e, mesmo assim, ainda respondeu de forma errada. Seu conceito multiplicativo não foi usado no momento correto e o uso da tabuada e da contagem demonstra falhas.

Segundo Justo (2004), a contagem é usada por muitas crianças como uma ferramenta de pensamento para auxiliar na solução de problemas, demonstrando ser um esquema bastante influente.

No entanto, para o aluno A10, na resolução do problema multiplicativo de proporcionalidade por partilha, a contagem tornou-se um fator de erro, uma vez que ele atrapalhou-se nela, por desatenção ou insegurança nesse tipo de problema.

Ainda conforme Justo (2004), para que as crianças avancem na construção dos conceitos e saberes, é necessário propor problemas que sejam desafiadores, provoquem conflitos cognitivos, para que outras ferramentas de pensamento sejam criadas para resolvê-los.

São esses tipos de erros que fazem refletir como os alunos estão compreendendo a multiplicação, como estão construindo a tabuada e, acima de tudo, como se pode utilizar esses erros para fazê-los compreender a multiplicação.

3.3 POSSÍVEIS APROXIMAÇÕES ENTRE AS ESTRATÉGIAS DAS CRIANÇAS E OS PROCEDIMENTOS DE ENSINO

Realizadas as análises, conversou-se com as professoras sobre as estratégias que os alunos tinham usado na resolução, com o objetivo de saber se eram comuns ou se seguiam algum critério.

Em conversa com a professora X, ela apontou que, para introduzir a estrutura multiplicativa, gostava de usar o material concreto, formando grupos iguais, a fim de construir a ideia multiplicativa e, posteriormente, partia logo para o algoritmo, com a tabuada já construída. Aos poucos, trabalhava com a decomposição, ou seja, quando os números vão ficando maiores. Ela ensina a estratégia de decompor em números menores, separando-os em centena, dezena e unidade, multiplicando-os pelo fator correspondente, para, depois, somar e encontrar a resposta. Por exemplo: 112x2, ela decompõe em 100 + 10 + 2, e multiplica cada um por 2, assim, 200+20+4 será a resposta de 112x2, que é 224.

De acordo com Aranão (1996), podemos trabalhar com uma diversidade de materiais, sejam eles industrializados ou não, pois eles permitem exercitar o raciocínio lógico-matemático da criança, livre de exercícios repetitivos ou de memorização. Por outro lado, Spinillo e Magina (2004) acreditam que o uso indiscriminado do material concreto impede uma análise mais acurada acerca de sua efetiva contribuição para o ensino e a aprendizagem de conceitos lógicos matemáticos. As autoras ressaltam, ainda, que o material concreto não é utilizado de maneira que venha auxiliar as crianças na correção de seus erros, quando resolvem operações e problemas, por meio da escrita, de forma que pouco acrescenta à compreensão da criança.

Nesse sentido, Spinillo e Magina (2004) afirmam que o material concreto disponibilizado ou usado para representar as quantidades presentes no enunciado em nada contribui para a descoberta de que operação deve ser empregada. É comum observar que as crianças procuram identificar, no enunciado, palavras-chaves que sirvam de pistas para descobrir qual a operação a ser aplicada. A linguagem do problema serve, portanto, de suporte para a identificação da operação necessária para a resolução que, no entanto, nem sempre é correta ou pode levar ao erro.

A professora X, normalmente, trabalha com 5º ano e percebe os conceitos mecânicos de algoritmos que os alunos trazem, com o “arme e efetue” fazendo cálculos sem sentido, tornando-se muito complexo trabalhar com eles dessa forma. No entanto, esse ano, ela optou por trabalhar com o 4º ano, abordando os conceitos de proporcionalidade, combinatória e organização retangular da estrutura multiplicativa.

Para a professora Y, a introdução da estrutura multiplicativa torna-se mais fácil com o uso da tabuada e sempre parte do material concreto para montar os grupos e fazer a soma deles. O obstáculo encontrado, muitas vezes, é a demora na compreensão do processo de multiplicação para entender que o número deve ser multiplicado antes de somar, mas, muitas vezes, acabam somando os números sem compreensão. Por exemplo, no cálculo 3x3=6, eles visualizam o número 3 duas vezes e acabam somando-os pois a estrutura multiplicativa ainda não foi formada.

Ela destacou, também, a importância de se ter uma turma que questiona, apostando muito no material concreto. Quanto aos problemas de proporcionalidade por partição e medição, afirma que a representação dos desenhos é viável e importante enquanto os números são pequenos, mas à medida que os números vão aumentando, começa a indicar o produto por aproximações, compondo o quociente, por exemplo.

Após as conversas, a professora X, titular da turma em que foi aplicado o teste, analisou as resoluções dos alunos, ressaltando que o erro mais comum é achar que o problema é difícil e acabar não resolvendo, além de acreditar que dominam a tabuada e acabam dando respostas erradas aos cálculos. No entanto, o que mais chama a atenção é a falta de estímulos das crianças em criar hipóteses para resolução.

Após a conversa com as professoras, retornou-se a observação das aulas, mas dessa vez apenas na turma em que o teste foi realizado. Nesse momento, já em sala de aula novamente, a professora X procurou abordar a resolução de problemas semelhantes aos do teste, com o objetivo de gerar hipóteses e confrontar as corretas e erradas.

Voltou-se à sala de aula, a fim de abordar os erros mais comuns cometidos pelos alunos. Os problemas foram passados um a um, conforme a maior quantidade de erros, e a professora aguardou as hipóteses que surgiam, interferindo apenas quando os alunos não elaboraram nenhuma hipótese. Ao surgirem as hipóteses, ela fez os alunos compararem os resultados obtidos com a situação final e foi corrigindo-os com o uso do material concreto, no caso, apenas o *kit* do material dourado ou mesmo com a relação inversa entre a multiplicação e divisão, acreditando que pensaram em mais estratégias para resolver outras atividades posteriormente.

É usual observar que as crianças procuram identificar, no enunciado, palavras-chave que sirvam de pistas para descobrir qual a operação a ser aplicada. Sobre tal fato, Spinillo e Magina (2004) analisam que uma das maiores dificuldades que a criança encontra com a Matemática não decorre de seu caráter abstrato, mas da falta de referentes para as quantidades presentes no enunciado do problema ou em uma expressão matemática.

Considerando os estudos de Spinillo e Magina (2004), pode-se verificar que o material concreto levava a uma representação direta do enunciado do problema ou à representação do resultado, enquanto que fazer cálculos permitia o aparecimento de estratégias mais flexíveis, que representavam os procedimentos de resolução e as operações mentais conduzidas sobre todos os elementos do problema.

Como os professores são unânimes no uso do material concreto, no entanto, vale ressaltar que, segundo Spinillo e Magina (2004), o material concreto não é o único e nem o mais importante recurso na compreensão matemática, como usualmente se supõe. Não se deseja dizer com isso que tal recurso deva ser abolido da sala de aula, mas que seu uso seja analisado de forma crítica. O uso de todo material concreto faz parte de um processo de ensino e de aprendizagem, desde que o mesmo trabalhe com a contextualização do aluno com a sua realidade. De nada adiantaria usar algo sem sentido pelo simples fato de usar algo diferente nas aulas, além dos métodos tradicionais.

A professora explicou aos alunos que muitos dos seus erros ocorreram pela falta de compreensão da ideia multiplicativa e que eles estavam fortemente ligados à ideia aditiva. Assim, acabaram não dando sentido aos cálculos que faziam. Segundo Aquino (1997), o professor não está na escola para apontar fracassos, o que não lhe impede de apontar erros. Levar o estudante a perceber e compreender seu erro não implicará que ele não volte a ser outra vez criativo. Isso, porém, pode estimulá-lo a superar esse erro.

O erro deve ser visto como oportunidade de ensino e não como fracasso. Conforme Aquino (1997), ao aplicar um determinado problema de Matemática, em sala de aula, logo após fazer a correção, ao refletir sobre os erros, não se estaria apontando os fracassos sobre o conteúdo. Pelo contrário, essa correção serviria como uma bússola, mostrando o caminho para o estudante.

Os erros dos alunos em Matemática são muitos. Numa única atividade, pode-se detectar diversas formas de erro e diferentes caminhos na tentativa de resolver uma situação-problema. A resolução de uma atividade pelo aluno, de certa forma, representa o alcance que sua aprendizagem pode atingir ou como ele pensa naquele momento e naquela situação em que se encontra. Pode acontecer que, em um contexto escolar, o aluno apresente uma resposta e fora dele apresente outra, ou, consiga resolver uma situação num contexto, mas não em outro, como mostram os estudos de Carraher et al (1995).

Segundo Pinto (2004), o erro produzido pelo aluno pode ser considerado como um observável de grande significância para a avaliação quando concebido, não como falha, ausência, mas como elemento natural do processo de conhecer.

No entanto, a autora destaca que, para que possa ser realmente um “observável para o aluno” deve ser antes um “observável para o professor”, compreendido não como uma simples resposta errada, mas como uma questão que o aluno coloca ao docente no decorrer de seu processo de construção de conhecimento.

O que fazer diante de tais erros? Evitar problemas com excesso de dados? Se as ações pedagógicas estiverem sempre no sentido da facilitação - ou seja, retirar das situações-problema, tudo o que possa causar dificuldades - quando os alunos superarão tais dificuldades?

Na busca de superação dessa incompreensão, o que pode auxiliar pedagogicamente o professor é a exploração de situações que envolvam dados de naturezas diferentes e que o aluno tenha oportunidade de reconhecer quando se trata de simples codificação numérica, como o caso de certas datas, números de residência, números de telefone, entre outros, que representam informações numéricas, mas com o objetivo de classificar ou codificar. Isso pode contribuir para que o aluno diferencie as informações analisando-as, aproximando-se das estratégias corretas de resolução.

Na resolução de problemas de proporcionalidade por partição e por medição, os alunos foram elaborando tentativas para resolver, criando hipóteses e, posteriormente, ao comparar as estratégias e respostas, a professora usou o material concreto para simular as situações e desenvolver a compreensão dos problemas.

Mas, diante do problema de estrutura multiplicativa por análise combinatória simples, a professora preferiu não abordar esse, pois não costuma trabalhar com esses tipos de problemas e acredita que não são abordados em nenhum ano do Ensino Fundamental inicial.

Batanero (1997) afirma que, para ensinar Análise Combinatória, é preciso levar em conta o raciocínio recursivo e os procedimentos sistemáticos de enumeração no lugar de centrar esforços em aspectos algorítmicos e em definições combinatórias.

Para que o aluno não apenas memorize e, depois de algum tempo, esqueça, se faz necessário que o aprendizado aconteça de forma gradativa, com a compreensão do estudante. Para que ele chegue ao conhecimento por si só, construindo sentido para o que está aprendendo, deve refletir a respeito do problema e encontrar uma estratégia para resolvê-lo.

Por fim, a professora X destacou que as estruturas multiplicativas são muito complexas e que precisaria ter um conhecimento mais amplo para poder ajudar os alunos a corrigirem de outra forma seus erros.

Concorda-se com Menezes (1999, p 14), quando afirma que “a comunicação entre os alunos, tanto oral como escrita, constitui um aspecto que o professor deve incrementar, porque permite o desenvolvimento de capacidades, de atitudes e de conhecimentos”. Dessa forma, é essencial estabelecer uma interação entre professor e alunos, na qual exista espaço para a troca de saberes, argumentação e a construção coletiva de conhecimento, mais que a transmissão de informações. Ou seja,

> a interação, além de uma fonte para a aprendizagem da cooperação, torna-se uma fonte de construção de conhecimentos compartilhados, visto que, quando professor e alunos colaboram e interagem no debate de assuntos e problemas, diferentes pontos de vista podem surgir e serem negociados (D’ANTONIO, 2006, p 17).

Apesar de não ser uma tarefa fácil, assumir, na sala de aula, o papel de professor “observador interventor” pode potencializar o processo de ensino e aprendizagem. Acredita-se que propondo atividades que permitam o estabelecimento de uma comunicação no padrão reflexivo, utilizando perguntas inquiridoras, promovendo discussões em grupos e valorização da argumentação, é possível desenvolver uma proposta de ensino capaz de gerar conhecimento com significado.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao realizar o estudo, procurou-se responder ao problema: Que aproximações são possíveis entre as estratégias espontâneas das crianças do 4º ano do Ensino Fundamental ao resolver problemas multiplicativos e os procedimentos de ensino dos seus professores, com o propósito de investigar as aproximações entre as estratégias que o aluno apresenta e o procedimento de ensino de seus professores diante de tais estratégias?

Em busca de respostas, procurou-se conhecer os procedimentos de ensino de duas professoras do 4º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública, diante da resolução de problemas de estrutura multiplicativa e, assim, analisar quais estratégias os alunos usam para resolver esses problemas. A partir da análise dessas estratégias, procurou-se rever os procedimentos utilizados pela professora titular da turma com a qual foi realizado o teste, diante dos erros e dos acertos dos alunos, buscando possíveis aproximações.

Foram traçados, como objetivos específicos: identificar as estratégias usadas pelas crianças na resolução de problemas multiplicativos; verificar os procedimentos usados pelos professores para o ensino da resolução de problemas multiplicativos; comparar as estratégias usadas pelas crianças com os procedimentos de ensino de seus professores.

Por meio de observação das aulas percebeu-se que os professores veem a resolução de problemas de estrutura multiplicativa como algo difícil de ser trabalhado, por isso, muitas vezes, instruem os alunos a realizarem a adição de parcelas repetidas, deixando que acreditem apenas nessa relação, o que se torna um obstáculo, principalmente quando houver as estruturas de proporcionalidade por medição ou por partição, assim como as de análise combinatória simples.

Vale destacar que, no caso desse estudo, as professoras apontaram que os problemas de proporcionalidade por partição e por medição não são trabalhados no 4º ano do Ensino Fundamental e que os problemas de análise combinatória simples são pouco trabalhados.

Diante da análise dos dados da resolução de problemas multiplicativos, foram perceptíveis as diferentes estratégias de resolução, tais como o uso da adição de parcelas iguais, o uso da tabuada memorizada, destacando as estratégias espontâneas de cada criança, fazendo uso ou não de material concreto, além de se destacarem, também, as estratégias das crianças que geraram erros na resolução dos problemas.

Como procedimento de ensino da estrutura multiplicativa, verificou-se que os professores utilizam-se muito do material dourado para formar grupos para criar multiplicações e construir a tabuada. Mas esses grupos precisam aparecer sempre de forma contextualizada para o aluno, a fim de que faça sentido e não seja apenas uma forma mecanizada.

Percebeu-se, no ensino da multiplicação, que as professoras utilizam muito no procedimento da adição de parcelas iguais para a construção do conceito multiplicativo, não deixando claro que a multiplicação é a relação constante entre variáveis e que se faz necessário entender os conceitos e as situações em que ela se aplica.

Ao resolver os problemas multiplicativos, o aluno busca apoiar-se em conhecimentos aprendidos anteriormente, tornando-se possível a aproximação de suas estratégias com os procedimentos ensinados pelos professores em sala de aula. Porém, é importante que os alunos saibam resolver os problemas usando as próprias formas de expressão.

No entanto, foi possível perceber no estudo que, muitas vezes, o aluno não entende o que faz e, em algumas, nem sabe o que deve fazer, pois aprendeu a multiplicar e não a interpretar o que está fazendo e isso o leva à busca de palavras-chave, o que se torna um complicador no momento da resolução. O que o professor ensina deve ter sentido ao seu aluno.

O professor precisa estar atento ao como ensina e ao como o aluno aprende, destacando a importância que deve ser dada às estratégias que o aluno apresenta, estando elas certas ou não. Discutir os erros pode tornar-se fundamental para o ensino e a aprendizagem.

Os erros não devem ser vistos como simples respostas erradas, mas, como uma questão que foi interpretada de outra forma e é necessário avaliar a estratégia espontânea usada nessas questões, para que esse erro seja compreendido e corrigido.

Acreditar cada vez mais no pensamento e no desenvolvimento do aluno pode trazer subsídios para uma educação mais reflexiva e com objetivos de superação em meio às dificuldades de ensino e de aprendizagem da Matemática, verificando-se a necessidade de métodos diferentes dos adotados até aqui.

Ao concluir esta dissertação, questiona-se: quais métodos alternativos aos que vem sendo usados poderiam ter maior eficácia para o ensino e a aprendizagem da estrutura multiplicativa? Essa é uma questão que merece outras e novas pesquisas.

REFERÊNCIAS

ARANÃO, I.V.D. **A Matemática através de brincadeiras e jogos**. Campinas, São Paulo, 1996.

AQUINO. Julio Groppa (org.). **Erro e Fracasso:** Na Escola, Alternativas Teóricas e Práticas. São Paulo: Summus, 1997.

ARAÚJO, C. et al. **Estudo de Caso.** Métodos de Investigação em Educação. Instituto de Educação e Psicologia, Universidade do Minho, 2008. Disponível em < http://grupo4te.com.sapo.pt/estudo_caso.pdf>. Acesso em: 10 de out. 2015.

BARRETO, I.M.A. **Problemas verbais multiplicativos de quarta-proporcional:** a diversidade de procedimentos de resolução. 2001. 123 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2001.

BATANERO, M.C.; GODINO, J.D. e NAVARRO-PELAYO, V. **Razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria.** Educación Matemática, 8(1), p. 26-39, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação, **Parâmetros Curriculares Nacionais**, Brasília, Secretaria da Educação Fundamental, 1997.

_______. Ministério da Educação. Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. 2014b. **Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa**: Operações na resolução de problemas. Brasília: MEC, SEB, 2014. Capítulo Memorização de fatos numéricos Caderno 4, MEC, 2014.

________. **Lei 9394, de 20/12/96**. Estabelece as Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Disponível em <http://planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm> Acesso em: setembro de 2015.

BRISSIAUD, R. **Como as crianças aprendem a calcular.** V.13. Horizontes Pedagógicos. Instituto Piaget, p. 236, 1994.

BROITMAN, C. **As operações matemáticas no ensino fundamental I**: contribuições para o trabalho da sala de aula. Tradução de Rodrigo Vilela. São Paulo: Ática, 2011.

CARPENTER, T., et al. Solving word problems: results and implications from national assessment. **Arithmetic Teacher**, n. 28, p. 8-12, 1980.

CARRAHER, T.; CARRAHER, D.; SCHLIEMANN, A. **Na vida dez, na escola zero**. 10. ed. São Paulo: Cortez, 1995.

CARVALHO, A.; GONÇALVES, H. **Multiplicação e divisão:** conceitos em construção. Educação em Matemática nº 75, Novembro/Dezembro de 2003.

D'ANTONIO, S.R. **Linguagem e Matemática:** Uma relação conflituosa no processo de ensino? 2006. 285 f. Dissertação (Universidade Estadual de Maringá, Maringá, Paraná), 2006.

ECHEVERRÍA, M. P. P.; POZO, J. I. **Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender.** In: POZO, J. I. (Org.). A solução de problemas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1998.

FISCHBEIN, E.; DERI,M; NELLO, M. S.; MARINO, M. S. . **The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division**. Journal for Resarch in Mathematics Education, v. 16, nº 1, P. 3-17, 1985.

FONSECA, M. C. F. R.; CARDOSO, C. A. **Educação matemática e letramento:** textos para ensinar matemática, matemática para ler texto. In: NACARATO, A. M.; LOPES, C. E. (org). Escritas e Leituras na Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, p. 63-76, 2005.

FOSNOT, C. T. **Investigating Multiplication and Division.** Grades 3-5. Portsmouth, NH: Heinemann, 2007.

FUSON, K. C. **Developing mathematical power in whole number operations.** In J. Kilpatrick, G. W. Martin, & D. Schifter (Eds.), A research companion to principles and standards for schools mathematica. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, p. 68-94, 2003.

GOLBERT, C. S. **Esquemas multiplicativos: as origens da multiplicação em alunos do ensino fundamental.** 2005, 279f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Federa do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Rio Grande do Sul, 2005.

GONÇALVES, H. **A multiplicação e divisão em alunos do 1º ciclo do ensino básico.** Tese de Mestrado, escola Superior de Educação de Lisboa e departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. 2003

GREER, B. **Multiplication and Division as models of situations.** In Grouws, D. (Ed.). Handbook of research on Mathematics teaching and learning – A project of the National Council of Teachers of Mathematics. New York: Macmillian Library Reference USA, p.276-295, 1992.

JUSTO, J.C.R. **Mais... Ou menos?...:** a construção da operação de subtração no campo conceitual das estruturas aditivas. Dissertação (Mestrado em Educação)– Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre: UFRGS. 2004.

______________. **Resolução de Problemas Matemáticos Aditivos**: possibilidades da ação docente. Tese de Doutorado. Porto Alegre: UFRGS, 2009.

JUSTO, J.C.R.; REBELO, K.S.; SANTOS, J.F. ; BORGA, M. F. . Formação matemática de professores do ensino fundamental: um estudo a partir da resolução de problemas. In: GROENWALD, C.L.O.; GELLER, M.. (Org.). **Formação continuada de professores em ciências e matemática:** do projeto observatório da educação aos resultados da pesquisa. 1 ed. Canoas, v. 1, p. 29-54, 2015.

KAMII, C. **A Criança e o número.** 22.ed. Campinas: Papirus, 1996, 124p.

________; LIVINGSTON,S.J. **Desvendando a aritmética:** implicações da teoria de Piaget. 3. ed. Campinas: Papirus, 299p, 1995.

________; HOUSMAN, L.B. **Crianças pequenas reinventam a aritmética:** implicações da teoria de Piaget. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 277p, 2002.

LERNER, D; SADOVSKY, P. **A didática da matemática**. Porto Alegre: Artmed, 1996.

MAGINA, S.M.P.; SANTOS, A.; MERLINI, V.L. **Comparação multiplicativa:** a força que a expressão exerce na escolha das estratégias de resolução dos estudantes (CO). In: XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática. 2011.

MENEZES, L. **Matemática, Linguagem e Comunicação.** Conferência: Matemática, Linguagem e Comunicação. ProfMat 99 – Encontro Nacional de Professores de Matemática. Portimão, Portugal, 10 a 13 de novembro de 1999.

MERLINI, V. L.; MAGINA, S. M. P.; SANTOS, A. **O desempenho dos estudantes da 4ª série frente a problemas de estruturas multiplicativas.** In: ENEM, X, 2010, Salvador. *Anais.* Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/index.php/anais/enem. Acesso em: fevereiro, 2016.

MULLIGAN, J. T.; MITCHELMORE, M.C. **Young children´s intuitive models of multiplication and division**. Journal for Research in Mathematics Education, v.28, n° 3, 1997. p.309-330.

NUNES, T., BRYANT, P. **Crianças fazendo Matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

___________. Paper 4: **Understanding relations and their graphical representation**. Key understandings in mathematics learning. Nuffield Foundation, London, 2009. Disponível em: www.nuffieldfoundation.org. Acesso em: maio de 2016.

NUNES, T; CAMPOS, T.M.M.; MAGINA, S.; BRYANT, P. **Educação Matemática 1:** Números e operações numéricas. São Paulo: Cortez, 2005.

ORRANTIA, J. **Dificultades en el Aprendizaje de las Matemáticas:** una Perspectiva evolutiva. Revista de Psicopedagogía, Vol. 23 (71), pp. 158-180, 2006.

PAVAN, L. R.; NOGUEIRA, C. M. J.; KATO, L. A. A **mobilização das ideias básicas do conceito de funço por crianças da 4ª série do ensino fundamental em situações problemas de estruturas aditivas e/ou multiplicativas**. In: ENEM, X, 2010, Salvador. Anais. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/index.php/anais/enem. Acesso em: fevereiro, 2016.

PINTO, N.B. Avaliação da aprendizagem como prática investigativa. **Conhecimento local e conhecimento universal:** a aula e os campos do conhecimento, Curitiba: Champagnat, v. 3, 2004. p. 119-132.

PONTE, J.P. **Estudos de caso em Educação Matemática**. Lisboa: CIEDE, 2006.

SANTOS, A. **Processos de formação colaborativa com foco no campo conceitual multiplicativo:** um caminho possível com professores polivalentes. Trabalho apresentado como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Educação Matemática- Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2012.

SCHASTAI, M. B.; PEDROSO, S. M. D. **A resolução de problemas ainda é um problema?** In: ENEM, X, 2010, Salvador. *Anais.* Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/index.php/anais/enem. Acesso em: fevereiro, 2016.

SILVA, V. L. **Ensino e aprendizagem de problemas de produto cartesiano:** inter-relações entre diferentes representações. 2006. 160f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

SMOLE, K. S. e DINIZ, M. I. (orgs.). **Ler, escrever e resolver problemas:** habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001.

SMOLE, K.S.; MUNIZ, C.A. **A matemática em sala de aula:** reflexos e propostas para os anos iniciais do ensino fundamental. Porto Alegre: Penso, 2013.

SOARES, M. **O livro didático e a escolarização da leitura**. 2010. Disponível em: http://www.ufmt.br/instfis/textuais/escolariza.doc Acesso: 5 maio 2015.

SPINILLO, A.G. **O conhecimento matemático de crianças antes da matemática na escola.** A Educação Matemática em Revista (SBEM), v.2 p.41-50, 1994.

SPINILLO, A. G.; MAGINA, S. **Alguns “mitos” sobre a educação matemática e suas consequências para o Ensino Fundamental.** In: Matemática nas séries iniciais do Ensino Fundamental: A pesquisa e a sala de aula, São Paulo: Coleção SBEM, v. 2, 2004.

STAREPRAVO, A. R. **Uma análise sobre os procedimentos de solução elaborados por crianças para resolver problemas de estrutura multiplicativa.** In: ENEM, IX, 2007, Belo Horizonte. *Anais.* Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/index.php/anais/enem. Acesso em: fevereiro, 2016.

_____ **A multiplicação na escola fundamental I:** análise de uma proposta de ensino. 2010. 262f. Tese (doutorado em Educação Matemática) – Universidade São Paulo, São Paulo, 2010.

TAXA-AMARO, F.O.S.; FINI, L.D.T. **Problemas Multiplicativos:** a solução por meio de somas repetidas e produto cartesiano. 2004

TAXA-AMARO, F.O.S. Solução de Problemas com Operações Combinatórias. In: BRITO, M.R.F. **Solução de Problemas e a matemática escolar**. Campinas, São Paulo: ED. Alínea, 2006.

TREFFERS, A.; BUYS, K. Grade 2 (and 3): Calculation up to 100. **Children learn mathematics.** Van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), Utrecht: Freudenthal Institute, p. 61-88, 2001.

VERGNAUD, G. **Multiplicative structures**. In Lesh, R. and Landau, M. (Eds.) Acquisition of Mathemtics Concepts and Processes. New York: Academic Press Inc. p. 127-174, 1983b.

___________, G. **Multiplicative Structures**. In Editors Merlyn B, Laurence E. Associates. Number concepts and operations in the middle grades. Reston: National Council of teachers of mathmatics, p 141-161, 1988.

___________, G. **La teoria de los campos conceptuales**. (tradução de texto publicado na revista Recherches en Didáctique des Mathematiques, vol. 10, no. 2, 3, p. 133-170, 1990. Disponível em: (web.usbmed.edu.co/docbiblioteca/La%20teoria%20de%20los%20campos%20conceptuales.pdf). Acesso em: 20 de abril de 2015.

____________. **El niño, las matemáticas y la realidad** - Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Mexico: Trillas, 1991.

____________. **Multiplicative conceptual field:** what and why? In. Guershon, H. e Confrey, J. (Eds.). The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics. Albany, N.Y.: State University of New York Press, p. 41-59, 1994.

___________, G. **A trama dos campos conceituais na construção dos conhecimentos.** Revista do GEMPA, Porto Alegre, Nº 4, p. 9-19, 1996b.

____________. **A criança, a Matemática e a Realidade**: problemas do ensino da matemática na escolar elementar. Trad. Maria Lucia Moro. Curitiba: UFPR, 2009.

VERSCHAFFEL, L.; GREER, B.; DE CORTE, E. **Whole number concepts and operations.** In F. K. Lester (Ed.), Second handbook of research on mathematics teaching and learning, Reston, VA: NCTM, p. 557-628, 2007.

VILA, A. e CALLEJO, M. L. **Matemática para aprender a pensar:** o papel das crenças na resolução de problemas. Trad. Ernani Rosa. Porto Alegre: Artmed, 212p, 2006.

YAMANAKA, O. Y. **Estudo das concepções e competências dos professores:** a passagem da aritmética à introdução da representação algébrica nas séries iniciais do ensino fundamental. 2009. 179f. Dissertação (mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

APÊNDICES

APÊNDICE A: AUTORIZAÇÃO DOS PAIS

ULBRA – UNIVERSIDADE LUTERANA DO BRASIL

PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA - MESTRADO

AUTORIZAÇÃO

Pelo presente documento, eu, responsável pelo(a) aluno(a) ________________________________, autorizo a professora Sheila Steffen Nascimento, mestranda do Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, sob a orientação da Profa. Dra. Jutta Cornelia Reuwsaat Justo, a realizar com o aluno, individualmente, uma entrevista durante a resolução de problemas. Os resultados dessa atividade farão parte da pesquisa de Mestrado intitulada "ESTRATÉGIAS USADAS PELAS CRIANÇAS DO 4º ANO E FORMAS DE ENSINO DOS PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS".

Declaro conhecer os objetivos e procedimentos metodológicos desta pesquisa que são os seguintes:

- Investigar possíveis relações entre as estratégias espontâneas das crianças do 4º ano do ensino fundamental em resolver problemas multiplicativos e as estratégias de ensino dos seus professores diante disso.
- Para que resolvam os problemas, será disponibilizado material manipulativo como auxiliar na representação da solução da criança, assim como material para a representação escrita do pensamento.

Esses encontros serão audiogravados, para que possam ser descritos detalhadamente e exaustivamente analisados e interpretados.

São Sebastião do Caí, março de 2016

____

Assinatura do(s) Responsável(eis)

Nº Documento de Identidade:________________

APÊNDICE B – PROBLEMAS PROPOSTOS PARA OS ALUNOS

E.E.E.MÉDIO FELIPE CAMARÃO – SÃO SEBASTIÃO DO CAÍ

Nome:____________________________________Data: 4º ANO

a) TENHO 6 SAQUINHOS DE BALAS COM 9 BALAS EM CADA UM. QUANTAS BALAS EU TENHO? R:__________________________ MP	**b)** UMA SALA DE AULA TEM AS SUAS CLASSES DISPOSTAS DE FORMA RETANGULAR DE MODO QUE TEM 6 FILAS E 5 COLUNAS. QUANTAS CLASSES HÁ NESSA SALA DE AULA? R:__________________________ MOR
c) LUIZA FEZ 72 DOCINHOS E OS GUARDOU EM 9 CAIXAS IGUAIS. QUANTOS DOCINHOS LUIZA GUARDOU EM CADA CAIXA? R:______________________________ MPdp	**d)** PARA FORMAR O UNIFORME DE UM TIME DE FUTEBOL, EXISTEM 5 CAMISETAS DIFERENTES E 4 CALÇÕES. DE QUANTAS FORMAS DIFERENTES SE PODE UNIFORMIZAR O TIME? R:__________________________ MAC
e) TENHO 42 REAIS PARA COMPRAR MEIAS. SE CADA PAR CUSTA 6 REAIS, QUANTOS PARES CONSEGUIREI COMPRAR? R:__________________________________ MPdm	**f)** ROGÉRIO TEM 7 FIGURINHAS DE JOGADORES DE FUTEBOL. SUA IRMÃ TEM 4 VEZES A QUANTIDADE DE ROGÉRIO. QUANTAS FIGURINHAS TEM A IRMÃ DE ROGÉRIO? R:__________________________________ MCP