

UNIVERSIDADE LUTERANA DO BRASIL
PRÓ-REITORIA ACADÊMICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA



GIOVANI ROSA DELAZERI

A COMPETÊNCIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS QUE ENVOLVEM O
PENSAMENTO ALGÉBRICO: UM EXPERIMENTO NO 9º ANO DO ENSINO
FUNDAMENTAL

Canoas

2017

UNIVERSIDADE LUTERANA DO BRASIL
PRÓ-REITORIA ACADÊMICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA



GIOVANI ROSA DELAZERI

A COMPETÊNCIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS QUE ENVOLVEM O
PENSAMENTO ALGÉBRICO: UM EXPERIMENTO NO 9º ANO DO ENSINO
FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientadora: Dra. Claudia Lisete Oliveira Groenwald

Canoas
2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação – CIP

D343c Delazeri, Giovani Rosa.

A competência de resolução de problemas que envolvem o pensamento algébrico : um experimento no 9º ano do Ensino Fundamental / Giovani Rosa Delazeri. – 2017. 139 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Luterana do Brasil, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Canoas, 2017.
Orientadora: Profa. Dra. Claudia Lisete Oliveira Groenwald.

1. Educação matemática. 2. Resolução de problemas. 3. Pensamento algébrico.
4. SIENA. 5. Ensino fundamental. I. Groenwald, Claudia Lisete Oliveira. II. Título.

CDU 372.851

GIOVANI ROSA DELAZERI

**A COMPETÊNCIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS QUE ENVOLVEM O
PENSAMENTO ALGÉBRICO: UM EXPERIMENTO NO 9º ANO DO ENSINO
FUNDAMENTAL**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientadora: Dra. Claudia Lisete Oliveira Groenwald

Linha de Pesquisa: Ensino e Aprendizagem em Ensino de Ciências e Matemática.

APROVADA EM 10/05/2017

Profa. Dra. Claudia Lisete Oliveira Groenwald – Orientadora – ULBRA

Dra. Ieda Maria Giongo – UNIVATES

Dra. Carmen Teresa Kaiber – ULBRA

Dra. Clarissa de Assis Olgin – ULBRA

CANOAS

2017

Dedicatória

Dedico está dissertação ao AMOR da minha vida, Luciana Motta Amorim, que sempre me deu todo seu apoio, carinho, incentivo e muito amor. Compreendendo a ausência e a falta de tempo nesses dois anos, pois se ela não estivesse ao meu lado, certamente não teria concluído mais esta etapa na vida.

AGRADECIMENTOS

À minha namorada Luciana Motta Amorim pela compreensão e amor, sempre dedicados neste período, estando ao meu lado todo o tempo me incentivando e ajudando na construção desta dissertação.

À minha família pelo carinho e, principalmente, pela compreensão da minha ausência nestes dois anos, também pelo apoio dado na minha caminhada acadêmica desde a graduação.

À professora Claudia Lisete Oliveira Groenwald, pela dedicação, paciência, pelo tempo disponibilizado para as orientações e principalmente pelo carinho, cobranças e pela confiança no trabalho realizado.

Ao grupo GECEM, da ULBRA, pelos debates, pelo apoio e por todos os momentos de trabalho.

Ao aluno de iniciação científica Lucas Teixeira, que me auxiliou, tanto nas aplicações dos testes adaptativos, como com o SIENA.

Ao amigo Valmir Ninow, pelos incentivos nos momentos difíceis e por todas as dicas e debates durante esta caminhada.

As professoras Ieda Maria Giongo, Carmen Kaiber e Clarissa Olgin por terem aceito fazer parte da minha banca e pelas contribuições dadas à esta dissertação.

À CAPES pela bolsa taxa, que possibilitou chegar ao final da pesquisa.

RESUMO

Esta pesquisa tem por finalidade investigar se os alunos do 9º ano do Ensino Fundamental possuem desenvolvida a competência de resolução de problemas que envolvem o pensamento algébrico, nos conteúdos de equações de 1º grau e sistemas de equações de 1º grau, sendo esse um dos temas de estudo do GECEM – Grupo de Estudos Curriculares em Educação Matemática, do qual o pesquisador autor desse trabalho faz parte. Para isso foram aplicados testes adaptativos, no sistema SIENA - Sistema Integrado de Ensino e Aprendizagem, com problemas matemáticos que, para resolução, é necessário utilizar os conteúdos referidos, além das habilidades algébricas necessárias para resolvê-los. O SIENA, é um sistema informático desenvolvido pelos pesquisadores participantes do grupo de pesquisa GECEM da ULBRA e o grupo de Tecnologias Educativas da Universidade de La Laguna, Tenerife, Espanha. Os resultados das aplicações dos testes adaptativos, com 30 alunos do nono ano do Ensino Fundamental, de uma escola da rede estadual de ensino do estado do Rio Grande do Sul, do município de Porto Alegre, tornaram possível constatar que os alunos apresentaram dificuldades nos tópicos que envolviam sistemas de equações. Nos demais tópicos, os alunos obtiveram um bom desempenho, atingindo os objetivos propostos, demonstrando, assim, que possuem desenvolvida a competência de resolução de problemas que envolvam, na sua resolução, pensamento algébrico com os conteúdos de equação do 1º grau e sistemas de equações do 1º grau. O SIENA mostrou-se eficiente no desenvolvimento dos testes adaptativos, contribuindo para a identificação das dificuldades dos alunos e na apresentação de possibilidade de recuperação dos tópicos em que apresentaram dificuldades. Essa dissertação teve apoio da Capes com uma bolsa taxa ao pesquisador.

Palavras chave: Resolução de Problemas. Pensamento Algébrico. SIENA. Ensino Fundamental.

ABSTRACT

This study investigated whether 9th grade students in Elementary School have developed the competency to solve problems about algebraic thinking, more specifically the contents of linear equations and linear equation systems. These topics are the subjects of research by the Mathematical Education Curriculum Study Group (GECEM), of which the researcher who carried out this study is a member. With that in mind, adaptive tests using the Teaching and Learning Integrated System (SIENA) system were given to 30 9th grade students of a public school in Porto Alegre, state of Rio Grande do Sul, Brazil. The tests included mathematical problems about the contents covered, and required algebraic thinking. The computerized SIENA system was developed by the research team of GECEM-ULBRA and the Educational Technologies Group, Universidad de La Laguna, Tenerife, Spain. The results show that the students experience difficulties in the topics about linear equation systems. Concerning the other topics, the students exhibited good performance, meeting the objectives set and demonstrating that they had developed the competency to solve linear equations and linear equation systems using algebraic skills. Also, SIENA proved to be an efficient method in adaptive tests, affording to identify the difficulties experienced by students and to recover the topics that were difficult to students. This dissertation was supported by a CAPES grant.

Keywords: Problem solving. Algebraic thinking. SIENA. Elementary school.

Lista de Figuras

Figura 1 - Exemplos de Classificação da álgebra em processual e estrutural	19
Figura 2 - Quadro de competências e habilidades algébricas mapeadas, divididas entre processual e estrutural	19
Figura 3 - Dificuldades dos alunos na passagem da Aritmética para a álgebra	20
Figura 4 – Quadro de elementos básicos de caracterização do campo conceitual de álgebra	21
Figura 5 – Quadro de competências e habilidades algébricas desenvolvidas nas séries finais do Ensino Fundamental.....	23
Figura 6 - Atividades pensamento funcional	28
Figura 7 - Vertentes fundamentais do pensamento algébrico	29
Figura 8 - Finalidades do ensino da Matemática segundo PCN.....	32
Figura 9 - Quadro dos passos a serem seguidos na resolução de problemas.....	35
Figura 10 - Exemplo de problema resolvido	36
Figura 11 - Quadro operações de pensamento	43
Figura 12 - Quadro valor da resolução de problemas no ensino.....	44
Figura 13 - Lista de Características das atividades Matemática em quatro níveis de exigência cognitiva	45
Figura 14 - Implementação de tarefas que promovam o raciocínio e a resolução de problemas.....	46
Figura 15 - Esquema do sistema SIENA.....	53
Figura 16: Exemplo do banco de dados de um teste adaptativo de um nodo	55
Figura 17 - Idade x sexo.....	57
Figura 18 - Laboratório de Informática da escola	58
Figura 19 - Aplicação do teste piloto	58
Figura 20 - Testes dos netbooks na rede lógica.....	59
Figura 21 – Primeira aplicação dos testes adaptativos	60
Figura 22 - <i>Netbooks</i> conectados no servidor da ULBRA via WIFI	60
Figura 23 - Segunda aplicação dos testes adaptativos	61
Figura 24 - Computadores prontos para a terceira aplicação	62
Figura 25 - Terceira aplicação.....	62

Figura 26 - Utilização do Netbook como Nettablet para execução do teste adaptativo.....	63
Figura 27 - Utilização do Smartphone para a execução do testes adaptativo.....	63
Figura 28 - Retorno dos resultados preliminares aos alunos	64
Figura 29 - Grafo feito no <i>Software Compendium</i>	66
Figura 30 - Grafo inserido no SIENA.....	67
Figura 31 - Apresentação dos tópicos na pagina de acesso do SIENA	67
Figura 32 - Exemplo de questão de Nível Fácil no tópico Linguagem Matemática ...	69
Figura 33 - Exemplo de questão de nível médio no tópico Linguagem Matemática..	70
Figura 34 - Exemplo de questões de nível difícil no tópico Linguagem Matemática .	70
Figura 35 - Exemplo de questão de nível fácil no tópico Qual a pergunta do problema.	70
Figura 36- Exemplo de questão de nível médio no tópico Qual a pergunta do problema	71
Figura 37 - Exemplo de questão de nível difícil no tópico Qual a pergunta do problema	72
Figura 38 - Exemplo de questão de nível fácil no tópico Retirar dados de um problema	72
Figura 39 - Exemplo de questão de nível médio no tópico Retirar dados de um problema	73
Figura 40 - Exemplo de questão de nível difícil no tópico Retirar dados de um problema	74
Figura 41 - Exemplo de questão de nível fácil no tópico Equação do 1º grau	75
Figura 42 - Exemplo de questão de nível médio no tópico Equação do 1º grau	75
Figura 43 - Exemplo de questão de nível difícil no tópico Equação do 1º grau.....	75
Figura 44 - Exemplo de questão de nível fácil no tópico Equação do 1º grau elaborada	76
Figura 45 - Exemplo de questão de nível médio no tópico Equação do 1º grau elaborada	76
Figura 46 - Exemplo de questão de nível difícil no tópico Equação do 1º grau elaborada	76
Figura 47 - Exemplo de questão de nível fácil no tópico Problemas simples.....	77
Figura 48 - Exemplo de questão de nível médio no tópico Problemas simples	77
Figura 49 - Exemplo de questão de nível difícil no tópico Problemas simples	78

Figura 50 - Exemplo de questão de nível fácil no tópico Problemas Elaborados	79
Figura 51- Exemplo de questão de nível médio no tópico Problemas Elaborados....	79
Figura 52 - Exemplo de questão de nível difícil no tópico Problemas Elaborados	80
Figura 53 - Exemplo de questão de nível fácil no Sistema de equações do 1° grau.	81
Figura 54 - Exemplo de questão de nível médio no Sistema de equações do 1° grau	81
Figura 55 - Exemplo de questão de nível difícil no Sistema de equações do 1° grau	82
Figura 56 - Exemplo de questão de nível fácil no tópico Resolver Sistema de equações simples.....	82
Figura 57 - Exemplo de questão de nível médio no tópico Resolver Sistema de equações simples.....	83
Figura 58 - Exemplo de questão de nível difícil no tópico Resolver Sistema de equações simples.....	83
Figura 59 - Exemplo de questão de nível fácil no tópico Resolver Sistema de Equações elaboradas.....	84
Figura 60 - Exemplo de questão de nível médio no tópico Resolver Sistema de Equações elaboradas.....	85
Figura 61 - Exemplo de questão de nível difícil no tópico Resolver Sistema de Equações elaboradas.....	85
Figura 62 - Gráfico com a quantidade de alunos com desempenho 0,6	90
Figura 63 - Exemplo de um teste adaptativo de um aluno no teste piloto	91
Figura 64 - Gráfico de desempenho no tópico Linguagem Matemática	93
Figura 65 - Teste do aluno PAL 25 que obteve nota máxima	94
Figura 66 - Porcentagem de erros nos níveis de dificuldade	95
Figura 67 - Gráfico de desempenho dos alunos no tópico Qual a pergunta do problema	96
Figura 68 - Teste do aluno Pal 22	96
Figura 69 - Gráfico do percentual das questões erradas em cada nível	98
Figura 70 - Gráfico da porcentagem das questões certas.....	98
Figura 71 - Gráfico da porcentagem de erros x acertos	99
Figura 72 – Teste adaptativo do aluno Pal 16	100
Figura 73 - Gráfico de desempenho dos alunos no tópico Retirar dados de um problema	101

Figura 74 – Gráfico de desempenho dos alunos no tópico Equação do 1º grau simples	102
Figura 75 - Gráfico da porcentagem das questões respondidas corretamente	103
Figura 76 - Teste do aluno Pal 10	103
Figura 77 - Desenvolvimento das questões do aluno Pal 10	104
Figura 78 - Gráfico de desempenho dos alunos no tópico Equação do 1º grau elaboradas.....	105
Figura 79 - Gráfico de porcentagem das questões erradas	105
Figura 80 - Teste de um aluno no tópico Equação do 1º grau elaborada	106
Figura 81 - Diário de campo dos estudantes aluno Pal 01	107
Figura 82 - Gráfico de desempenho dos alunos no tópico Problema Simples	108
Figura 83 - Teste de um aluno no tópico problema simples	109
Figura 84 - Gráfico de erros em cada nível de dificuldade	110
Figura 85 - Gráfico de desempenho dos alunos no tópico problemas elaborados..	110
Figura 86 - Diário de campo dos estudantes de resoluções do aluno Pal 21	111
Figura 87 - Teste do aluno Pal 21	112
Figura 88 - Apresentação da pergunta ao aluno durante o teste	113
Figura 89 - Gráfico do desempenho dos alunos no tópico Sistema de equações...	114
Figura 90 - Teste do aluno Pal 18	114
Figura 91 - Gráfico do percentual de questões erradas em cada nível	115
Figura 92 - Gráfico do percentual de questões certas em cada nível	115
Figura 93 - Gráfico da distribuições dos erros em cada nível	116
Figura 94 - Gráfico de desempenho no tópico Resolver sistema de equações com uma incógnita	117
Figura 95 - Teste do aluno Pal 02	117
Figura 96 - Gráfico de desempenho dos alunos no tópico resolver sistemas de equações com duas incógnitas	118
Figura 97 - Gráfico da distribuição das questões respondidas erradas.....	119
Figura 98 – Teste do aluno Pal 21	120
Figura 99 - Gráfico da quantidade de alunos aprovado em cada tópico.	121
Figura 100 - Gráfico percentual do número de questões de acordo com o nível de dificuldade	122

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	14
1 REFERENCIAL TEÓRICO	17
1.1 PENSAMENTO ALGÉBRICO	17
1.2 A METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS	31
2 A PESQUISA	48
2.1 PROBLEMA	48
2.2 OBJETIVO	48
2.2.1 Objetivo geral	48
2.2.2 Objetivos específicos	49
2.3 METODOLOGIA DA INVESTIGAÇÃO	49
2.3.1 Sistema Integrado de Ensino e Aprendizagem (SIENA)	51
2.3.2 Sujeitos de pesquisa	56
2.3.3 Instrumentos de coleta de dados	57
2.3.4 Experimento	58
3 AMBIENTE DE INVESTIGAÇÃO	65
3.1 GRAFO COM OS TÓPICOS DA INVESTIGAÇÃO	65
3.2 TESTES ADAPTATIVOS	68
3.3 ELABORAÇÃO DOS TESTES	68
3.3.1 Tópico: Linguagem Matemática	69
3.3.2 Tópico: Qual a pergunta do problema	70
3.3.3 Tópico: Retirar dados de um problema	72
3.3.4 Tópico: Equação do 1º grau simples	75
3.3.5 Tópico: Equação do 1º grau elaborada	76
3.3.6 Tópico: Problemas simples	77
3.3.7 Tópico: Problemas elaborados	78
3.3.8 Tópico: Sistemas de equações	80
3.3.9 Tópico: Resolver Sistemas de equações simples	82

3.3.10 Tópico: Resolver sistemas de equações elaboradas	84
3.4 EXECUÇÃO DO TESTE PILOTO.....	86
3.5 Execução dos testes do experimento	87
3.6 Retorno dos resultados dos testes aos alunos	88
4 ANÁLISE DA INVESTIGAÇÃO	89
4.1 ANÁLISE DO BANCO DE DADOS DO SIENA E DOS REGISTROS DOS ALUNOS.....	89
4.2 ANÁLISE DE DADOS DO TESTE- PILOTO.....	89
4.3 ANÁLISES DOS TESTES DEFINITIVOS	93
4.3.1 Análise do tópico Linguagem Matemática	93
4.3.2 Análise do tópico Qual a pergunta do problema	95
4.3.3 Análise do tópico Retirar dados de um Problema	99
4.3.4 Análise do tópico Equação do 1º grau simples	102
4.3.5 Análise do tópico Equação do 1º grau elaborada	104
4.3.6 Análise do tópico Problemas simples	108
4.3.7 Análise do tópico Problemas Elaborados	110
4.3.8 Análise do tópico Sistemas de equações	113
4.3.9 Análise do tópico Resolver sistema de equações do 1º grau simples	116
4.3.10 Análise do tópico Resolver sistema de equações do 1º grau elaboradas	118
4.4 CONSIDERAÇÕES FINAIS	121
CONCLUSÃO	125
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	128
APÊNDICES	134
ANEXOS	138

INTRODUÇÃO

Esta pesquisa tem por finalidade investigar se alunos de uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental possuem desenvolvida a competência da resolução de problemas que envolvem o pensamento algébrico com os conteúdos de Equações de 1º grau e Sistemas de equações de 1º grau. Esse é um dos temas de estudo do GECEM – Grupo de Estudos Curriculares em Educação Matemática do qual o pesquisador autor desse trabalho faz parte.

Para isso, será utilizado o Sistema Integrado de Ensino e Aprendizagem (SIENA), com a aplicação de testes adaptativos com problemas matemáticos que tratem de assuntos relacionados à álgebra elementar e aos conteúdos de equações do 1º grau e Sistemas de equações do 1º grau. O SIENA é um sistema informático desenvolvido pelos pesquisadores participante do grupo de pesquisa GECEM da ULBRA e grupo de Tecnologias Educativas da Universidade de La Laguna, Tenerife, Espanha.

Desde a década de 70, discute-se que o enfoque que a Matemática deveria ter na aprendizagem é através da resolução de problemas. Segundo Onuchic e Allevato (2009, p.215): “os anos 70 marcaram uma era de crescimento preocupada com um currículo de Matemática, projetado, inicialmente, para um aumento no escore de testes de habilidades básicas”. O enfoque da Matemática através da resolução de problemas ganhou destaque dentro dos meios acadêmicos após a publicação, pelo National Council of Teachers of Mathematics – NCTM, do *Curriculum and Evaluation Standard* (NCTM, 1989), em que se declarou que o foco do ensino da Matemática deveria ser a resolução de problemas e que os alunos deveriam fazer uso de abordagens em resolução de problemas para investigar e compreender os conteúdos matemáticos.

Segundo Polya:

Educar através do processo da Resolução de problemas em sala de aula tem como objetivo elevar a criatividade e o interesse dos alunos em sala de aula, bem como, habituar os estudantes a tratar situações problemáticas abertas, e não somente torná-los seres capazes de resolver exercícios mecanicamente (POLYA, 1995, p.13).

Salienta-se a importância do pensamento algébrico em estudantes do Ensino Fundamental para a resolução de problemas, razão pela qual foi escolhida a temática de pesquisa dessa dissertação.

Para Souza (2013, p.23), atualmente, a álgebra é utilizada de forma mecânica, sem que a compreensão de o porquê do cálculo algébrico seja plenamente apropriada pelos alunos.

No ano 2000, foi lançada pelo NCTM a publicação *Principles and Standart for School Mathematics*, a qual coloca, entre seus princípios, padrões de conteúdos que são Números e Operações; Álgebra; Geometria; Medida; Análise de Dados e Probabilidade. Essa mesma publicação também ressalta os padrões de processos que são resolução de problemas; Raciocínio e Prova; Comunicação; Conexões e Representações, citando a resolução de problemas como um dos caminhos para se adquirir e usar o conhecimento do conteúdo trabalhado.

Souza (2013) também afirma que:

O professor pode usar a realidade do aluno para aplicar a resolução de problemas, partindo de problemas relacionados à sua realidade e associados a conhecimentos de anos anteriores já trabalhados a álgebra (SOUZA, 2013,p.26).

Dentro dessas perspectivas, deseja-se realizar esta investigação que visa identificar se estudantes de uma turma do 9ºano do Ensino Fundamental, de uma escola estadual de Porto Alegre, possuem a competência de resolver problemas que envolvam situações algébricas. Para isso, foram escolhidos os conteúdos de equações do 1º grau e sistemas de equações do 1º grau.

Essa dissertação está organizada em quatro capítulos, distribuídos em Referencial Teórico, A Pesquisa, Ambiente de Investigação, Análise da Investigação. A dissertação apresenta, também, introdução e conclusão. No Referencial Teórico, foram apresentados os fundamentos que nortearam a pesquisa, buscando tratar das duas temáticas integradas, expondo o que autores entendem por pensamento algébrico e resolução de problemas.

No capítulo “A Pesquisa”, foi apresentado o problema de pesquisa, os objetivos e a metodologia de investigação, bem como o sistema SIENA, os sujeitos de pesquisa e os instrumentos de coleta de dados. No capítulo Ambiente de Investigação, foi apresentado como foi elaborado, no sistema SIENA, o ambiente de investigação da pesquisa, contendo o grafo que foi construído, os testes adaptativos e a elaboração dos testes.

No capítulo de Análise da Investigação, apresentou-se os instrumentos empregados na investigação, os dados coletados e a análise e discussão dos mesmos. Foram analisados tanto o teste-piloto como os testes definitivos.

A conclusão apresenta as considerações finais da pesquisa com os resultados e as reflexões sobre os dados analisados, bem como as possibilidades de continuação em pesquisas futuras.

1 REFERENCIAL TEÓRICO

O baixo rendimento em Matemática, em particular com os conteúdos algébricos, segundo Dalton e Buriasco (2009, p.452) “parece estar relacionado com a maneira como a álgebra é trabalhada nas escolas”. Ameron (2002) afirma que nas escolas, em geral, a álgebra tradicional é apresentada aos alunos como um sistema rígido, abstrato e com pouca ligação com o mundo real.

Segundo Groenwald:

É visível a escassa capacidade da maioria dos jovens e adultos para resolver problemas, e se enfatiza o escasso treinamento de destrezas e padrões de estratégias gerais e úteis para resolver problemas que se desenvolve na escola (GROENWALD, 1999, p. 23).

Assim, esta pesquisa busca tratar das duas temáticas integradas, expondo o que autores entendem por pensamento algébrico e resolução de problemas.

1.1 PENSAMENTO ALGÉBRICO

Busca-se, neste item, caracterizar o pensamento algébrico dos estudantes do nono ano do Ensino Fundamental, os quais, normalmente, concluem esse nível de escolaridade com idades entre 14 e 15 anos, mas que na turma em que foi realizado o experimento variavam entre 14 a 17 anos.

Para Godino e Font (2003), o professor deve ter compreensão da importância que a álgebra e o pensamento algébrico têm no estudo da Matemática, afirmando que o raciocínio algébrico implica representar, generalizar e formalizar padrões e regularidades em qualquer aspecto da Matemática. E, à medida que se desenvolve esse raciocínio, se vai evoluindo no uso da linguagem e de seu simbolismo, necessário para apoiar e comunicar o pensamento algébrico, especialmente nas equações, nas variáveis e nas funções. Esse tipo de pensamento está no coração da Matemática, concebida como a Ciência dos padrões e da ordem, já que é difícil encontrar em outra área da Matemática em que formalizar e generalizar não seja um aspecto central. Em consequência, os professores em formação têm que construir essa visão do papel das ideias algébricas nas atividades Matemáticas e de como

desenvolver o pensamento algébrico nos estudantes, durante todos os níveis de ensino.

Ribeiro (2015, p.11) afirma que a álgebra é “objeto de pesquisa desde que a humanidade se debruçou sobre a realidade para construir seu conhecimento” e também para as abstrações, assim:

Deveria ser explorada desde os anos iniciais do ensino, pois dela faz parte um conjunto de processos e pensamentos que têm origem em experiências com números, padrões, entes geométricos e análise de dados. [...] trabalhada desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, pode ser o fio condutor do currículo escolar e o desenvolvimento do pensamento algébrico pode permitir que sejam realizadas abstrações e generalizações que estão na base dos processos de modelagem da vida real (RIBEIRO, 2015, p.11).

Essa atitude é corroborada por Fiorentini, Miguel e Miorin (1993, p.88) ao sustentar que “o pensamento algébrico pode ser desenvolvido gradativamente antes mesmo da existência de uma linguagem algébrica simbólica.” Então, há a construção de nexos entre as expressões numéricas e a utilização, por exemplo, de parênteses, colchetes e chaves.

Esses autores ainda tratam sobre as duas concepções da álgebra; a clássica, formatada a partir de uma aritmética universal, e a moderna, baseada em princípios simbólicos arbitrários.

Ribeiro (2015) coloca que os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), os Princípios e Normas para a Educação Escolar publicados pelo Conselho Nacional de Professores de Matemática (NCTM), e os documentos trazidos pela Associação de Professores de Portugal (APM) consideram:

Que o ensino da álgebra pode partir de experiências anteriores dos estudantes; com números e suas propriedades, podem chegar ao trabalho com símbolos e expressões; com padrões, podem desenvolver a noção de função (RIBEIRO, 2015 p. 16).

Já Kieran (1992) classifica a álgebra como processual e estrutural, em que a primeira não trata de expressões algébricas propriamente, mas sim das operações aritméticas e a segunda diz respeito ao uso de expressões algébricas contendo parte numérica e parte literal, resultando em expressões algébricas. Como exemplifica a figura 1 adaptado de Ponte, Branco e Matos (2009).

Figura 1 - Exemplos de Classificação da álgebra em processual e estrutural

Processual		Estrutural	
<ul style="list-style-type: none"> • Substituição imediata de variáveis por números. • Realização de operações aritméticas 		<ul style="list-style-type: none"> • Utilização das convenções próprias da estrutura das expressões algébricas 	
Exemplos:		Exemplos:	
1) $3x + y$, substituímos $x = 4$ e $y = 5$ $3 \cdot 4 + 5$ $12 + 5$ 17	2) $2x + 5 = 11$ $2 \cdot 1 + 5 = 7$ falsa $2 \cdot 2 + 5 = 9$ falsa $2 \cdot 3 + 5 = 11$ verdadeiro logo $x = 3$	1) $3x + y + 8x$ $11x + y$	2) $5x + 2x - 5 = -4 + 1$ $7x - 5 = -3$

Fonte: Quadro adaptado de Ponte, Branco e Matos (2009, p.78).

Segundo Becher (2009), essas perspectivas processual e estrutural são trabalhadas separadamente na maioria dos livros didáticos. Segue na figura 2 o quadro de competências e habilidades mapeadas, separadas entre processual e estrutural.

Figura 2 - Quadro de competências e habilidades algébricas mapeadas, divididas entre processual e estrutural

Álgebra Processual	
Competência algébrica	Habilidade Algébrica
Compreender representações algébricas	Ler representações algébricas
	Representar relações algébricas
	Compreender e representar algebricamente
	Compreender e expressar algebricamente
Operar algebricamente	Usar fórmulas 1
	Usar fórmulas 2
	Valor numérico
	Resolução de equações de 1º grau
	Resolver equações de 2º grau
Álgebra Estrutural	
Competência algébrica	Habilidade algébrica
Operar algebricamente	Propriedades e operações com N
	Operar algebricamente
	Propriedades e operações algébricas
	Resolução de sistemas e inequações
	Propriedades e operações com R
	Compreender e usar propriedades algébricas
Reconhecer e representar padrões	Reconhecer padrões 1
	Reconhecer padrões 2
	Criar representações
	Generalizar e deduzir fórmulas 1
	Generalizar e deduzir fórmulas 2
Resolver problemas	Problemas algébricos 1
	Problemas algébricos 2

Fonte: Becher (2009, p.60).

Talvez tal classificação se dê devido ao que Godino e Font (2003) chamam de visão tradicional da álgebra escolar, denominada, por eles, de “aritmética generalizada” que considera apenas como uma manipulação de letras que representam números indeterminados. Então, enquanto a aritmética usaria números

e expressões numéricas, nas quais os números se combinam com os símbolos; a álgebra usaria os números como variáveis, incógnitas, representadas por letras ou expressões, ainda que as operações como as regras básicas usadas por ambas possam ser as mesmas.

Segundo Radfort (2011) o significado epistemológico da álgebra é:

o do conhecimento matemático desenvolvido em torno das atividades orientadas para a Resolução de problemas pode trazer alguns “insights” acerca do modo de introduzir e estruturar a álgebra na escola; e isto nos leva a re-pensar, dentro de uma nova perspectiva, o papel dos problemas no ensino da álgebra (RADFORF, 2011,p.148).

Para Falcão (1997), a álgebra é um conjunto de procedimentos que servem para representar e resolver certos problemas da Matemática que só com a aritmética não se resolveriam. No entanto, a passagem de uma para a outra traz muitos desconfortos e problemas para o aluno, em geral, chega a colocar como um obstáculo para o aluno em sua aprendizagem, por isso o autor coloca que “álgebra é mais que generalização da aritmética”.

Ponte (2006) ressalta, na figura 3, as dificuldades que os alunos possuem na transição da aritmética para a álgebra e essa dificuldade é ponderada pelos autores que as relacionam.

Figura 3 - Dificuldades dos alunos na passagem da Aritmética para a Álgebra

- Dar sentido a uma expressão algébrica,
- Não ver a letra como representando um número,
- Atribuir significado concreto às letras,
- Pensar uma variável com o significado de um número qualquer,
- Compreender as mudanças de significado, na Aritmética e na Álgebra, dos símbolos “+” e “=” e, em particular, distinguir adição aritmética (3+5) da adição algébrica (x+3),

Fonte: Ponte (2006, p.10).

Para que essas dificuldades possam ser amenizadas, Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005), sustentam que, pedagogicamente, esse processo de transição ocorra gradativamente quando a criança estabelece relações/comparações entre expressões numéricas ou padrões geométricos, percebendo e tentando expressar as estruturas aritméticas de uma situação-problema, produzindo vários significados para uma expressão numérica.

Segundo Lemos e Kaiber (2015):

Após esta fase inicial, ocorre uma fase de transição do aritmético para o algébrico, onde o aluno passa a aceitar e conceber a existência de um número qualquer, estabelecer alguns processos e generalizações, podendo ou não utilizar a linguagem simbólica. A partir de então, quando esse processo já é natural, considerando que o aluno desenvolveu aspectos do pensamento algébrico os quais permitem que se expresse e pense genericamente [...] (LEMOS; KAIBER, 2015, p.14).

A álgebra tem dupla função, segundo Falcão (2003, p.31): “representar fenômenos e relações e auxiliar na resolução de problemas”, conforme a figura 4.

Figura 4 – Quadro de elementos básicos de caracterização do campo conceitual de álgebra

Atividades em Álgebra	
Ferramenta representacioanal	Ferramenta de Resolução de problemas
<p>Modelação: captura e descrição dos fenômenos do real.</p> <p>Função: Explicitação simbólica de relações elementares.</p> <p>Generalização: Passagem de descrições específicas ligadas a um contexto para leis gerais.</p>	<p>Algoritmos: regras sintáticas, prioridades de operações, princípio da equivalência entre equações.</p>
Elementos básicos do campo conceitual algébrico	
<p>Números, medidas, incógnitas e variáveis, regras de atribuição de símbolos, gama de acepções do sinal de igual, trânsito entre formas de linguagem.</p>	<p>Operadores, sintaxe, prioridade de operações, princípio da equivalência, conhecimento-em-ação vinculados a experiências extra-escolares, fatos aritméticos instrumentais (por exemplo: elemento neutro da adição).</p>

Fonte: adaptado de Falcão, 2003, p 31.

Essa mesma classificação da álgebra é feita por Kirshner (2001), ao afirmar que:

[...] a competência em habilidades algébricas não é uma questão de conhecer regras, tanto quanto de coordenar sugestões perceptuais baseadas em padrões (KIRSHNER, 2001, p.84 in RIBEIRO, 2015, p.12).

Também nesse sentido, Lins e Gimenez (1997) afirmam que o importante é a compreensão de como a álgebra e a aritmética se ligam, quais são seus aspectos em comum, pois isso seria fundamental para se repensar a educação aritmética e algébrica de forma única. Assim:

A educação aritmética tem sido, até aqui, insuficiente em termos de seu alcance, ao passo que a educação algébrica tem sido insuficiente em termos de objetivos. (...) Em ambos os casos, o da aritmética e o da álgebra, a mudança de perspectiva mais importante refere-se a passarmos a pensar em termos de significados sendo produzidos no interior de atividades, e não, como até aqui, pensamos em termos de técnicas ou conteúdos (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 161).

Onuchic e Allevato (2011) também percebem a necessidade de uma transição da aritmética para a álgebra (pré-álgebra), com a exploração informal de conceitos algébricos, os quais fundamentarão, mais tarde, o estudo formal da álgebra. Afirmam ainda que:

Ligações entre o uso dos números, em aritmética, e o uso de letras, na álgebra, são raramente abordados quando se passa a estudar álgebra regularmente. Em geral, não se dá aos estudantes a oportunidade de construir conexões explícitas entre esses dois domínios. Assim, deve-se considerar como pré-álgebra aquela área da aprendizagem Matemática na qual os estudantes constroem sua álgebra a partir de sua aritmética, isto é, a construir significado para os símbolos e as operações da álgebra em

termos do seu conhecimento de aritmética (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011 p.6-7).

Essa ideia de correlação entre aritmética e álgebra é reforçada pelo NCTM (2000, p.39): “Muito da ênfase simbólica e estrutural na álgebra pode construir-se sobre a extensa experiência numérica dos estudantes.”¹ Ainda que seja sustentada a ideia de que a álgebra não se restrinja a manipulações de símbolos, uma vez que há a necessidade de compreensão dos mesmos por meio do entendimento de seus conceitos, estruturas e princípios.

Nesse sentido:

Hoje, os computadores e as calculadoras podem desenhar gráficos de funções, realizar operações com símbolos e fazer a todo instante cálculos sobre tabelas de dados. Os estudantes necessitam agora aprender como interpretar as representações tecnológicas e como usar a tecnologia com eficácia e prudência (NCTM, 2000, p.39).²

Como o enfoque deste trabalho é pedagógico, cabe salientar as propostas de atividades algébricas, as quais descartam as que se resumem ao cálculo de letras, ou as que não fazem ligação entre o concreto e o formal.

Mas, não se limitando à visão tradicional de que a atividade algébrica seria “calcular com letras”, Lins e Gimenez (1997) investigam a caracterização da atividade algébrica e seus processos cognitivos peculiares. Para eles, a álgebra:

consiste em um conjunto de afirmações para as quais é possível produzir significados em termo de números e operações aritméticas, possivelmente envolvendo igualdade e desigualdade (LINS; GIMENEZ, 1997,p.150).

Dentro de diferentes maneiras de se produzir significado para a álgebra está o pensamento algébrico, composto por três características fundamentais: aritmeticismo, internalismo e analiticidade. Em que o primeiro se refere à produção de significado apenas em relação a números e operações aritméticas; o segundo diz respeito à consideração de números e operações conforme suas propriedades, e não os modelando em outros objetos, e o terceiro se relaciona à operação sobre números tanto desconhecidos como conhecidos.

Lins e Gimenez (1997) também mostram em seus estudos argumentos e evidências de que a iniciação tardia da álgebra é equivocada, uma vez que álgebra

¹ NCTM (2000,p.39) “Mucho del énfasis simbólico y estructural en el Álgebra puede construirse sobre la extensa experiencia numérica de los estudiantes. »

² NCTM (2000,p.39) “Hoy, los ordenadores y las calculadoras pueden dibujar gráficas de funciones, realizar operaciones con símbolos y hacer al instante cálculos sobre columnas de datos. Los estudiantes necesitan ahora aprender cómo usar la tecnología con eficacia y prudencia.”

e Aritmética são interdependentes. E propõem que os estudos tenham como base significados no lugar de conteúdos e que isso aconteça em ciclos.

A ideia dos ciclos é forte porque propõe um desenvolvimento que não se dá de uma só vez, substituindo a linearidade da aprendizagem- que não existe! - pelas visitas sucessivas e repetidas aos mesmos temas, cada vez de uma maneira diferente, em uma situação diferente. Os ciclos podem oferecer, além de tudo, a possibilidade de partir de uma atividade com 'intenção' algébrica, e passar para uma outra, de 'intenção' aritmética, ou vice-versa. (...) Nem o professor nem a tarefa devem manter os alunos em camisas-de-força, embora a intervenção do professor seja essencial (...) (LINS; GIMENEZ, 1997, p.166-167)

A álgebra dos Ensinos Fundamental e Médio tem a ver com a compreensão do significado das letras, símbolos e das operações. As diferenças que teremos nas variáveis virão de acordo com a utilização que for feita, assim como o momento em que for empregada, haja vista que o conceito de variável torna-se muito vago.

Segundo os PCN (BRASIL, 1998), é nas séries finais do Ensino Fundamental que as atividades algébricas serão ampliadas, desenvolvendo as habilidades de generalizar, encontrar padrões algébricos, estabelecer relações entre duas grandezas, modelizar, resolver problemas aritmeticamente difíceis, representando-os por equações, em que se faça a diferenciação das variáveis e das incógnitas.

Na figura 5, apresenta-se um quadro proposto por Becher (2009) com competências e habilidades algébricas desenvolvidas nas séries finais do ensino fundamental o qual levou em consideração as habilidades e competências propostas pelo NCTM, ENEM³, PCN e PISA⁴.

Figura 5 – Quadro de competências e habilidades algébricas desenvolvidas nas séries finais do Ensino Fundamental

Competências		Habilidades
Compreender representações algébricas	Básica	Reconhecer representações
		Ler representações
	Plena	Expressar ideias e relações usando representações algébricas
		Comparar e relacionar a representação algébrica com diferentes formas de representação
		Compreender o significado de soluções

³ ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio

⁴ PISA – Programa Internacional de Avaliação de Alunos

Operar algebricamente		Determinar o valor numérico
		Usar fórmulas
		Resolver equações
		Executar operações algébricas
		Usar propriedades algébricas
		Resolver sistemas e inequações
		Explicar fatos e procedimentos matemáticos utilizando álgebra
Reconhecer padrões e fazer generalizações	Básica	Reconhecer padrões usando métodos numéricos
		Usar tabelas para representar variações
		Provar propriedades numéricas
	Plena	Reconhecer padrões de variação
		Expressar relações usando funções e expressões
		Provar propriedades algébricas
Resolver problemas		Usar representações algébricas na Resolução de problemas
		Utilizar métodos e técnicas algébricas para resolver problemas
		Elaborar justificativas algébricas para a Resolução de problemas
		Fazer uso de diferentes formas de representação e análise para resolver problemas algébricos.

Fonte: Becher (2009,p.59).

Analisando esse quadro, pode-se depreender que para o desenvolvimento da competência de resolução de problemas, por exemplo, necessita-se de algumas habilidades como o uso de representações algébricas, métodos e técnicas, além de diferentes formas de representação e análise.

Segundo Onuchic e Allevato(2011):

Infelizmente, a maioria dos cursos de álgebra começam, logo de início, com o uso de letras como objetos matemáticos e depois prosseguem com as operações que podem ser feitas com esses objetos (ONUCHIC e ALLEVATO, 2011, p.6).

A linguagem algébrica permite expressar ideias Matemáticas de forma mais específica e com maior rigor matemático.

Essas autoras, Amado, Nobre e Carreira (2009), expõem que:

A utilização do simbolismo algébrico é uma das grandes potencialidades da álgebra, pois dá a possibilidade de distanciamento em relação aos

elementos semânticos que os símbolos representam. Deste modo, a simbologia algébrica e a sintaxe que a envolve podem tornar-se poderosas ferramentas para a Resolução de problemas (AMADO, NOBRE E CARREIRA, 2009, p.6).

Kieran (2004) propõe a classificação das atividades algébricas em três tipos: geracional, transformacional e global. O primeiro refere-se às atividades que dizem respeito à formação de expressões e equações estudadas em álgebra, tais como: “equações contendo uma incógnita que representam situações problemáticas quantitativas, expressões de generalidade que provêm de padrões geométricos ou sequências numéricas e expressões de regras” (p.22 - 23). O segundo trata das atividades baseadas em regras, como:

“[...] que incluem, por exemplo, reduzir termos semelhantes, fatorar, expandir, substituir, adicionar e multiplicar expressões polinomiais, elevar um polinômio a um determinado expoente, resolver equações, simplificar expressões, trabalhar com expressões equivalentes e equações, etc (KIERAN, 2004, p.24).

O terceiro e último tipo relaciona-se às atividades em que a álgebra é empregada como uma ferramenta, tais como resolução de problemas, a modelagem, a generalização, etc.

Ribeiro (2015, p.13) ressalta que “os livros-texto de álgebra reforçam os aspectos transformacionais, com ênfase em regras a serem seguidas para a manipulação simbólica, ao invés de atentar para as noções conceituais”.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) enfatizam a necessidade de que os professores compreendam os objetivos de ensinar álgebra e entendam como os conceitos algébricos são construídos, em lugar de enfatizarem as manipulações algébricas.

Dessa forma, cabe analisar, mesmo que brevemente, como acontece a apropriação da álgebra, ou ainda, o desenvolvimento do pensamento algébrico em alunos de diferentes níveis escolares, utilizando a seguinte classificação feita pelo NCTM (2000): nível K-2 com alunos da Educação infantil à 2ª série, nível 3-5 com alunos da terceira à quinta série, nível 6-8 com os alunos da sexta à oitava série e nível 9-12 composto dos alunos da nona a décima segunda série.

Essa classificação separa o ensino, segundo os padrões do NCTM (2000), da educação infantil ao ensino médio em quatro ciclos: ciclo A (nível k-2), ciclo B (nível 3-5), ciclo C (nível 6-8) e ciclo D (nível 9-12).

Por exemplo, as crianças (nível k-2) podem começar o trabalho “conceito de álgebra” por meio de observações de sequências, identificando certos aspectos de seu cotidiano como cronologia de ações, até relacionarem esses padrões à Matemática. Então, a tarefa do professor, nesse estágio, seria ajudar seus alunos a desenvolverem habilidades para fazerem generalizações. Isso pode acontecer por meio de perguntas norteadoras.

Segundo NCTM (2000, p.97): “quando os estudantes generalizam a partir de observações sobre os números e as operações, estão formando a base do pensamento algébrico.”⁵

Em um período mais tardio (nível 3-5), já se evidencia o raciocínio algébrico, com a possibilidade de ingresso ao estudo mais formalizado da álgebra. O professor deve, pois, ajudar seus alunos a pensarem como estabelecer e expressar uma generalização.

Isso é evidenciado pelo NCTM:

quando chegam a ter mais experiência em investigar, estruturar e justificar generalizações, podem começar a utilizar a notação de variável e as igualdades para representar seu pensamento (NCTM, 2000, p.165)⁶.

Na sequência (nível 6-8), dá-se o aumento da utilização dos símbolos algébricos, bem como do emprego de tabelas, gráficos ou equações, em problemas diversos, conectando experiências, relacionando expressões, iniciando a compreensão dos diferentes significados e usos das variáveis. Como se evidencia em: “Sempre que seja possível, o ensino e a aprendizagem da álgebra devem integrar-se com outros tópicos do currículo”⁷ (NCTM, 2000, p.227).

Já na última etapa (nível 9-12), baseando-se em suas experiências anteriores, esses alunos poderão aprofundar sua compreensão das relações e funções, ampliando seu repertório de funções com uso de ferramentas tecnológicas. Além disso, nesse estágio, a escola deveria proporcionar-lhes ideias sobre abstração e as estruturas Matemáticas. Por fim, o último aspecto a ser salientado é: “Ao mesmo tempo, o trabalho em contextos reais pode ajudá-los a dar sentido aos conceitos

⁵ NCTM (2000, p.97) « Cuando los estudiantes generalizan a partir de observaciones sobre los números y las operaciones, están formando la base del pensamiento algebraico.”

⁶ NCT M (2000, p.165) « Cuando llegan a tener más experiencia en investigar estructurar y justificar generalizaciones, pueden empezar a utilizar la notación de variable y las igualdades para representar su pensamiento.”

⁷ NCT M (2000, p. 227) « Siempre que sea posible, la enseñanza y el aprendizaje del Álgebra debe integrarse con otros tópicos del currículo.”

matemáticos subjacentes e pode favorecer a valorização desses conceitos” (NCTM, 2000, p.301).⁸

A melhor forma de indicar os grandes objetivos do estudo da álgebra, a nível escolar, segundo Ponte (2006), é dizer; então, que se visa desenvolver o pensamento algébrico dos alunos.

A Base Nacional Comum Curricular – BNCC (2016) – coloca que algumas dimensões do trabalho com álgebra, estando presente desde os anos iniciais, auxiliam no processo de ensino aprendizagem, alicerçando outras dimensões do pensamento algébrico como a resolução de problemas de estruturas algébricas.

O trabalho com álgebra, no início da escolaridade, contribui para que os estudantes/as estudantes desenvolvam um tipo de raciocínio específico, denominado pensamento algébrico. Essa ideia, atualmente considerada, diferencia-se de uma ideia de álgebra escolar como um processo de manipulação de símbolos (BNCC, 2016, p.278).

Reforçam também os PCN (Brasil, 1998) a importância que tem para o desenvolvimento do pensamento algébrico do aluno o trabalho com atividades que envolvam diferentes perspectivas e formas de conceber a álgebra, propondo novos enfoques para o seu tratamento, apresentando-a e incorporando-a dentro de novos blocos de conteúdos, nos quais privilegiem o desenvolvimento do pensamento algébrico em face ao uso mecânico do cálculo.

Assim, percebe-se que as orientações prosseguem no sentido de que:

os alunos trabalhem com problemas, que lhes permitam dar significado à linguagem e às ideias Matemáticas. Ao se proporem situações-problemas bastante diversificadas, o aluno poderá reconhecer diferentes funções de álgebra (ao resolver problemas difíceis do ponto de vista aritmético, ao modelizar, generalizar e demonstrar propriedades e fórmulas, estabelecer relações entre grandezas) (BRASIL, 1998, p.84).

Mas não há consenso sobre o conceito de pensamento algébrico, aliás, Lins e Gimenez (1997) relatam essa dificuldade:

[...] não há um consenso a respeito do que seja pensar algebricamente. Há, é verdade, um certo consenso a respeito de quais são as coisas da álgebra: equações, cálculo literal, funções, por exemplo, mas mesmo aí há diferenças – gráficos são ou não parte da álgebra? (LINS; GIMENEZ, 1997, p.89).

⁸ NCTM (2000, p.301) « Al mismo tiempo, el trabajo en contextos reales puede ayudarles a dar sentido a los conceptos matemáticos subyacentes y puede favorecer a la valoración de esos conceptos.”

Blanton & Kaput (2005), por exemplo, consideram que o pensamento algébrico dar-se-ia como um processo de generalização:

Pensamento algébrico processo em que os estudantes generalizam ideias Matemáticas a partir de um conjunto de exemplos particulares, estabelecem essa generalização através do discurso da argumentação e expressam-na gradualmente de forma simbólica apropriada à sua idade (BLANTON; KAPUT, 2005, p. 413).

Esse, talvez, seja o maior desafio, uma vez que os discentes têm a tarefa de generalizar a partir de observações, a fim de conseguirem melhor organizar o pensamento algébrico.

Lins e Gimenez (1997) atentam para o fato de se distinguir “genérico” de “generalizado”, pois:

a situação ‘generalizada’ emerge quando os alunos passam a falar do que é comum a um conjunto de casos particulares (...), ao passo que a situação ‘genérica’ emerge quando tratamos diretamente daquilo que é geral numa situação, sem a intermediação de casos particulares (LINS; GIMENEZ, 1997, p.114).

Então, seguindo a ideia de Kaput (1995, p.6-7), a formalização deveria acontecer gradualmente, na mesma medida da generalização, e não ao contrário como acontece na álgebra escolar, por exemplo.

Já Smith (2008 *in* RIBEIRO, 2015, p. 15) classifica o pensamento algébrico em representacional e simbólico, sendo que o primeiro refere-se aos processos mentais usados por um indivíduo para criar significados referenciais para algum sistema representacional e o segundo está ligado à forma de usar e compreender um sistema simbólico. Esse autor também define pensamento funcional como “o pensamento representacional que enfoca a relação entre duas, ou mais, quantidades que varia [...]”, explicitando seis atividades subjacentes ao pensamento funcional, conforme o quadro da figura 6.

Figura 6 - Atividades pensamento funcional

- 1) Engajar-se em algum tipo de atividade ou conceitual
- 2) Identificar duas ou mais quantidades que variam no curso da atividade e focar a relação entre essas duas variáveis.
- 3) Registrar padrões nos registros.
- 4) Identificar padrões de registros.
- 5) Coordenar os padrões identificados com as ações envolvidas na execução das atividades.
- 6) Usar essa coordenação para criar uma representação do padrão identificado na relação..

Fonte: adaptado de Ribeiro, (2015, p.15).

Segundo Ribeiro (2015), essa estrutura está presente em muitas atividades que são propostas por educadores matemáticos, bem como por livros-texto da Educação Básica até mesmo pelos documentos oficiais do Ministério da Educação, como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN).

Continuando na tentativa de estabelecer o domínio do pensamento algébrico, o qual está ligado ao desenvolvimento do pensamento matemático, tem-se Ponte (2009 p. 10): “o pensamento algébrico inclui três vertentes: representar, raciocinar e resolver problemas”, assim contemplando o domínio de conteúdos que devem levar ao desenvolvimento do pensamento matemático.

Representar, nesse sentido, se refere à capacidade do aluno na leitura, compreensão e operações com símbolos, traduzindo essas representações reproduzidas simbolicamente para outras formas, evidenciando sentido e interpretação do símbolo em diversos contextos.

Já raciocinar, diz respeito a relacionar propriedades Matemáticas, generalizar regras e produzir deduções.

E, por fim, resolver problemas, segundo esse mesmo autor, significa modelar situações, usando expressões, equações e sistemas na interpretação e resoluções de problemas matemáticos e de outros domínios.

Ponte, Branco e Matos (2009) representam na figura 7 essas três vertentes.

Figura 7 - Vertentes fundamentais do pensamento algébrico

Representar	<ul style="list-style-type: none"> • Ler, compreender, escrever e operar com símbolos usando as convenções algébricas usuais; • Traduzir informações representada simbolicamente para outras formas de representação(por objetos, verbal, numérica, tabelas, gráficos) e vice-versa;
Raciocinar	<ul style="list-style-type: none"> • Relacionar (em particular, analisar propriedades); • Generalizar e agir sobre essas generalizações revelando compreensão das regras; • Deduzir.
Resolver problemas e modelar situações	<ul style="list-style-type: none"> • Usar expressões algébricas, equações, inequações, sistemas (de equações e de inequações), funções e gráficos na interpretação e Resolução de problemas matemáticos e de outros domínios (modelação)

Fonte: Adaptado de Ponte, Branco e Matos (2009, p11).

Segundo Becher e Groenwald (2010):

O pensamento algébrico consiste em um conjunto de habilidades cognitivas que contemplam a representação, a resolução de problemas, o uso das operações e análises Matemáticas de situações tendo as ideias e conceitos algébricos como seu referencial (BECHER E GROENWALD, 2010, p.246).

Fiorentini, Miorin e Miguel (1993) relatam que não existe forma única de abordar o pensamento algébrico e que:

[...] elementos que consideramos caracterizadores do pensamento algébrico, tais como: percepção de regularidades, percepção de aspectos invariantes em contraste com outros que variam, tentativas de expressar ou explicar a estrutura de um situação-problema e a presença do processo de generalização. (FIORENTINI, MIORIN E MIGUEL, 1993, p.87).

O NCTM (2000) configura a álgebra como um dos cinco blocos de conteúdo, junto com números e operações, geometria, medida de análise de dados e probabilidade, devendo ser desenvolvida já na pré-escola, devido à sua importância.

Assim, segundo o NCTM (2000), o pensamento algébrico diz respeito á:

Compreender padrões, relações e funções (Estudo das estruturas)
 Representar e analisar situações Matemática e estruturas, usando símbolos algébricos (Simbolização)
 Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas (Modelação)
 Analisar mudanças em diversas situações (Estudo da variação) (NCTM, 2000, p.37).

Considerando a afirmação de Kaput (2008 in Ribeiro, 2015, p.12) de que “a álgebra é um artefato cultural e que pensar algebricamente é uma atividade humana”, dada à sua importância neste trabalho, foram elencados alguns autores que versaram sobre o tema, a fim de tomá-los como referência, sempre sem afastar-se do objetivo que é a qualificação do processo de ensino e aprendizagem.

Fiorentini, Miguel e Miorin (1993, p.88) caracterizam o pensamento algébrico como “um tipo especial de pensamento que pode se manifestar não apenas nos diferentes campos da Matemática como também, em outras áreas do conhecimento.” Afirmam que não existe uma única forma de expressá-lo, já que isso pode se dar por meio da linguagem natural, aritmética, geométrica, ou ainda, algébrica de cunho simbólico.

Kieran e Chalouh (1993, p.182) acreditam que “o sucesso do pensamento algébrico depende da correta e significativa passagem da aritmética para a álgebra.” Segundo esses mesmos autores, a transição da aritmética para a álgebra é feita pelos estudantes quando esses utilizam seus conhecimentos de aritmética como base na construção do significado dos símbolos e das operações de álgebra.

Sendo assim, o pensamento algébrico é importante do ponto de vista curricular, pois ajuda a perceber que a álgebra envolve uma forma própria de pensar, não ficando somente no uso de símbolos e suas utilizações.

Para Amado, Nobre e Carreira (2009, p.23), “O foco do pensamento algébrico consiste em utilizar símbolos para representar problemas de forma geral, aplicar procedimentos formais para obter um resultado e poder interpretar esse resultado”.

Ponte (2007) relata o desenvolvimento dessa linguagem:

Desenvolve nos alunos a linguagem e o pensamento algébrico, bem como a capacidade de interpretar, representar e resolver problemas usando procedimentos algébricos e de utilizar estes conhecimentos e capacidades na exploração e modelação de situações em contextos diversos (PONTE, 2007, p.55).

Assim, o pensamento algébrico não é algo simples, mas é composto de diferentes formas de pensamento e de compreensão dos símbolos e situações apresentadas, estando em consonância com a resolução de problemas.

Segundo a BNCC (2016) relata;

As equações de 1º grau com uma incógnita devem ser trabalhadas como objeto de estudo em si mesmo, mas como uma maneira de representar e de resolver determinados tipos de problemas. Igualmente, as técnicas de resolução de equações de 1º grau também não devem ser consideradas como objetos de estudo em si. Sua apropriação deve se dar por meio de resolução de problemas em que as equações sejam ferramentas apropriadas para a construção e para a sistematização dessas técnicas (BNCC, 2016, p.433).

Nesta pesquisa, optou-se por investigar se os alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, de uma escola estadual de ensino de Porto Alegre, possuem desenvolvida a competência de resolução de problemas que envolvem o pensamento algébrico, nos conteúdos de equações e sistemas do 1º grau e em qual nível se encontram.

A seguir apresenta-se a resolução de problemas com uma metodologia propícia ao desenvolvimento do pensamento algébrico.

1.2 A METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Segundo os PCN da Matemática (BRASIL, 1998), em contrapartida à simples reprodução de procedimentos e ao acúmulo de informações, educadores matemáticos apontam a resolução de problemas como ponto de partida da atividade

Matemática. Na figura 8, foi criado um quadro que demonstra as finalidades do ensino da Matemática visando à construção da cidadania, indicando como um dos objetivos do Ensino Fundamental:

Figura 8 - Finalidades do ensino da Matemática segundo PCN

- identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e transformar o mundo à sua volta e perceber o caráter de jogo intelectual, característico da Matemática, como aspecto que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas;
- fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos da realidade, estabelecendo inter-relações entre eles, utilizando o conhecimento matemático (aritmético, geométrico, métrico, algébrico, estatístico, combinatório, probabilístico);
- selecionar, organizar e produzir informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las criticamente;
- resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos, como intuição, indução, dedução, analogia, estimativa, e utilizando conceitos e procedimentos matemáticos, bem como instrumentos tecnológicos disponíveis;
- comunicar-se matematicamente, ou seja, descrever, representar e apresentar resultados com precisão e argumentar sobre suas conjecturas, fazendo uso da linguagem oral e estabelecendo relações entre ela e diferentes representações matemáticas;
- estabelecer conexões entre temas matemáticos de diferentes campos e entre esses temas e conhecimentos de outras áreas curriculares;
- sentir-se seguro da própria capacidade de construir conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções;
- interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente na busca de soluções para problemas propostos, identificando aspectos consensuais ou não na discussão de um assunto, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

Fonte: adaptado de BRASIL (1998, p. 47).

O enfoque da Matemática através da resolução de problemas ganhou destaque dentro dos meios acadêmicos após as publicações do NCTM, as quais declaravam que o foco do ensino da Matemática deveria ser a resolução de problemas.

Onuchic (1999, p. 204) afirma que: “No fim dos anos de 70, a resolução de problemas ganhou espaço no mundo inteiro. Começou o movimento a favor do ensino de resolução de problemas.”

Segundo Onuchic (1999):

Em 1980, é editada nos Estados Unidos uma publicação do NCTM – National Council of Teachers of Mathematics - An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980's, que chamava todos interessados, pessoas e grupos, para juntos, num esforço cooperativo maciço, buscar uma melhor educação Matemática para todos (1999, p. 204).

Em 1980, após a publicação do *Curriculum and Evaluation Standard*, declarou-se que o foco do ensino da Matemática deveria ser a resolução de

problemas e que os alunos deveriam fazer uso de abordagens em resolução de problemas para investigar e compreender os conteúdos matemáticos.

A fim de definir o conceito de resolução de problemas, traça-se a seguir um breve histórico dos principais autores sobre esse assunto.

Os primeiros registros que se têm sobre resolução de problemas, segundo Gerônimo e Saito (2012, p.123-125), estão no Papiro de Ahmed ou papiro de Rhind de 1650 a.C., o qual possuía 87 problemas sobre diversos assuntos.

Os matemáticos gregos tinham três grandes problemas que se tornaram muito estimulantes à inteligência e à ambição dos geômetras, uma vez que se mostravam insolúveis utilizando régua sem graduação e o compasso, os únicos instrumentos utilizados por Euclides nos elementos.

Segundo Carvalho, Alves e Milies (2009, p.89-90), “os três problemas, que ficaram conhecidos como os três problemas clássicos, são 1. A duplicação do cubo; 2. A quadratura do círculo; 3. A trissecção do ângulo.” A duplicação do cubo consistia em encontrar o lado do cubo, no qual o volume é o dobro do volume do cubo anterior; já a quadratura do círculo consistia em encontrar um quadrado de área igual à de um círculo dado e a trissecção do ângulo que consistia em dividir um ângulo dado em três partes iguais. Segundo esse autor, desde o século XIX, esses problemas não podem ser resolvidos com régua e compasso.

Sócrates e Platão trouxeram contribuições para esse tema. Sócrates, por exemplo, dizia que o indivíduo já detém o conhecimento a ser usado e, assim, a atividade de resolver problemas não passa de mera recordação. Segundo Régnier (2010, p.74) relata que Sócrates demonstra o seu método interrogando um escravo, que trabalha na casa de Ménon⁹, desenhando figuras geométricas no chão e fazendo-lhes perguntas, escravo este ignorante em matérias de geometria, assim, com essa situação “tenta mostrar que conhecemos verdades matemáticas que não aprendemos nem pelo ensino nem pela experiência e que deve existir um reino de verdades absolutas e imutáveis, fonte e base de todo o nosso conhecimento”.

De acordo com Brito (2006), o psicólogo e cientista político Graham Wallas, em 1926, dividiu a Resolução de problemas em quatro fases:

preparação, incubação, *insight* e verificação. A preparação refere-se ao ato de compilar e agrupar informações importantes do problema; a Incubação é o período no qual as ideias são detalhadas; o *insight* seria o momento da

⁹ Ménon (365 a.C) estudante de Sócrates.

solução e a verificação seria a comprovação da eficácia. Devido ao fato de apelar a noções vagas do pensamento e divergir da visão de Descartes, que procurava regras universais para resolver problemas, sua classificação não foi aceita (BRITO, 2006, p.24).

Na década de 40, Polya foi inovador ao discutir a Resolução de problemas em seu livro *How To Solve It* (1944, p.117), definindo noção de problema da seguinte maneira: “ter um problema significa buscar de forma consciente uma ação adequada para alcançar um objetivo imaginado, mas não imediatamente alcançado”, propondo as seguintes etapas de resolução: compreender, estabelecer um plano, executar e proceder à retrospectiva.

Para Polya (1995, p.4), na primeira etapa, a compreensão do problema é o ponto de partida para resolução, pois ele afirma que o enunciado do problema precisa ser bem entendido e o aluno deve estar em condições de identificar as principais partes, a incógnita e os dados, devendo fazer perguntas do tipo: Qual a incógnita? Quais são os dados apresentados? É possível alcançar as condições solicitadas e elas são suficientes para determinar a incógnita?

Já a segunda etapa, de estabelecer um plano, os alunos, após compreenderem do que se trata o problema, traçam estratégias que possibilitem essa solução, encontrando conexões entre os dados e a incógnita, fazendo uma relação com outro problema semelhante para que possam analisar e comparar a sua estratégia. É possível, nessa etapa, a introdução de outros elementos para uma melhor análise e compreensão do problema e também a introdução de perguntas do tipo: Você consegue ver outro enunciado para o problema utilizando os mesmo dados? Você consegue resolver alguma parte do problema?

A terceira etapa, execução do plano, normalmente é vista como mais fácil que a anterior, porém depende dela para seu sucesso, pois, para executá-la, necessita ter conhecimento prévio de vários conteúdos. Mas a elaboração de uma estratégia errada levará ao insucesso, acarretando retorno à etapa anterior, tendo de elaborar novas estratégias.

E a quarta etapa, segundo Polya, é o passo mais importante, haja vista que ela é o fechamento do problema, uma análise dos passos desenvolvidos até a solução do problema, procurando identificar possíveis falhas, verificando os resultados e os argumentos utilizados para a obtenção da solução, verificar o cerne do problema e se o resultado alcançado satisfaz essa etapa.

Kaiber e Groenwald (2008) expõem na figura 9 esses quatro passos a serem seguidos, separando-os, dando-lhes características e fazendo-lhes perguntas facilitadoras tomando como referência Polya (1978).

Figura 9 - Quadro dos passos a serem seguidos na resolução de problemas

Etapas	Características	Perguntas Facilitadoras
Compreensão do problema	Etapas de leitura do enunciado do problema para identificar dados, incógnitas e determinar o que é pedido, que elementos se têm e quais fazem falta, que semelhanças e novidades há em relação a outra situação já vivenciada	Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condição? A condição é suficiente para determinar a incógnita? É suficiente? Redundante? Contraditória?
Elaboração de um plano de ação	Etapa de criação de uma ou várias estratégias a seguir para responder o que se pede. Refere-se à utilização de estratégias já conhecidas, provenientes de outros problemas resolvidos, uso de propriedades, simplificação do problema original em partes mais fáceis que ocupam menos tempo, determinação de tarefas e divisão de responsabilidades.	Já encontrou um problema semelhante? Conhece um problema relacionado com esse? Conhece algum teorema que possa ser útil? Esse é um problema relacionado com outro que já foi resolvido? Você poderia utilizá-lo? Poderia usar o seu resultado? Poderia empregar o seu método? Considera que seria necessário introduzir algum elemento auxiliar para poder utilizá-lo? Poderia enunciar o problema de outra forma?
Execução do plano	Etapa em que se põe em prática o planejamento realizado, cumprindo ou não todas as fases, modificando aqueles elementos que se colocam como obstáculos à solução do problema e comprovando ou refutando as hipóteses do plano, replanejando até encontrar a solução desejada.	Já escreveu seu plano de ação? Os caminhos planejados estão ajudando na formulação do problema? Quais os obstáculos encontrados? Necessita replanejamento?
Visão retrospectiva, avaliação do plano.	Etapa do monitoramento da ação. Importante ressaltar dois aspectos: a avaliação da eficácia e eficiência do plano em função da comparação realizada com outros planos apresentados pra resolver o mesmo problema; validação da solução encontrada, generalização como ferramenta para elaborar outras estratégias para utilização em outro problema.	Pode verificar o resultado? Pode verificar o raciocínio? Pode obter o resultado de forma diferente? Pode empregar o resultado ou o método em algum outro problema?

Fonte: Kaiber e Groenwald (2008, p. 236).

Exemplifica-se na figura 10 a seguir as etapas propostas por Polya com um problema analisado na pesquisa, questão desenvolvida pelo pesquisador e que compõe o banco de questões dos testes adaptativos do experimento “Pensamento Algébrico” no SIENA.

Figura 10 - Exemplo de problema resolvido

Dois casais de namorados foram à feira e pararam em frente a uma banca que vendia pastéis e caldo de cana. O primeiro casal pagou R\$ 5,40 por um pastel especial e dois copos de caldo de cana. O segundo casal pagou R\$ 9,60 por três copos de caldo de cana e dois pastéis especiais. A diferença entre o preço de um pastel especial e o preço de um copo de caldo de cana foi de qual valor?
1ª etapa: Compreensão do problema
Quais são as incógnitas? O valor do pastel especial; o valor do copo de suco de cana. Quais são os dados do problema? Dois casais; uma banca na feira; valor de R\$ 5,40 pago por um pastel especial e dois copos de caldo de cana; valor de R\$ 9,60 pago por três copos de caldo de cana e dois pasteis especiais; diferença entre os preços do pastel especial e o copo de suco
2ª etapa: Estabelecimento de um plano
Nesta etapa, devemos verificar o que o problema nos fala: "dois casais foram à feira" Casal A e casal B "primeiro casal pagou R\$ 5,40 por um pastel especial e dois copos de caldo de cana" $5,40 = 1P + 2C$ "segundo casal pagou R\$ 9,60 por três copos de caldo de cana e dois pastéis especiais". $9,60 = 3C + 2P$ Resultando em duas equações e duas incógnitas, montando um sistema de equações: $\begin{cases} 5,40 = 1P + 2C \\ 9,60 = 3C + 2P \end{cases}$
3ª etapa: Execução do plano
Nesta etapa, será colocado em prática o plano estabelecido, nesse caso a resolução do sistema de equações. Necessitando do aluno conhecimentos algébricos para a resolução do mesmo. $\begin{cases} 5,40 = 1P + 2C \\ 9,60 = 3C + 2P \end{cases}$ $P + 2C - 2C = 5,40 - 2C$ $P = 5,40 - 2C$ $9,60 = 3C + 2 \cdot (5,40 - 2C)$ $9,60 = 3C + 10,80 - 4C$ $9,60 = -1C + 10,80$ $9,60 + 1C = -1C + 1C + 10,80$ $9,60 - 9,60 + C = 10,80 - 9,60$ $C = 1,20$ $P = 5,40 - 2C$ $P = 5,40 - 2 \cdot (1,20)$ $P = 5,40 - 2,40$ $P = 3,00$
A conclusão é de que o Pastel custa R\$ 3,00 e o copo de caldo de cana custa R\$ 1,20
4ª etapa: Retrospecto da resolução
Esta etapa torna-se a mais importante do processo, pois caberá aos alunos se indagarem: É possível verificar o resultado? O que eu fiz está correto? Encontrei a resposta desse problema? Nesse exemplo, o aluno encontrou que o copo de caldo de cana custa R\$ 1,20 e o pastel especial custa R\$ 3,00, mas é isso que o problema pede? Esses valores darão validade ao problema? Verificando para o primeiro casal $5,40 = 1P + 2C \rightarrow 5,40 = 3 + 2 \times 1,20 \therefore 5,40 = 5,40$ Verificando para o segundo casal $9,60 = 3C + 2P \rightarrow 9,60 = 3 \times 1,20 + 2 \times 3,00 \therefore 9,60 = 9,60$ Conclui-se que os valores encontrados estão corretos, mas é isso que o problema pede? "A diferença entre o preço de um pastel especial e o preço de um copo de caldo de cana foi de" $P - C \rightarrow 3,00 - 1,20 = 1,80$

Fonte: a pesquisa.

Analisando o problema resolvido, verifica-se como a retrospectiva torna-se importante, pois nela identifica-se se os valores encontrados são necessariamente o que o problema quer ou se há necessidade de verificar/analisar mais alguma variável.

Kaiber e Groenwald (2008) relatam que:

O professor deve motivar os alunos a reverem, na resolução de problemas, a forma de raciocínio utilizado, incentivar atitudes reflexivas quanto às diferentes maneiras de resolução e criar oportunidades para que os mesmos utilizem estratégias que exijam habilidades de construção de tabelas e de organização e interpretação de gráficos. O professor deve, ainda, enfatizar a necessidade de testar cada pensamento utilizado e intercalar, através da revisão ou da construção, os conteúdos matemáticos que sejam necessários para a resolução (KAIBER; GROENWALD, 2008, p. 236-237).

O NCTM (1989) coloca seis princípios básicos que são equidade, currículo, ensino aprendizagem, avaliação e tecnologia. Também ressalta cinco padrões de conteúdos, *o que ensinar*: Números e operações, álgebra, Geometria, Medidas e Análise de dados e a Probabilidade. E os cinco padrões de Procedimentos, *o como ensinar*. Resolução de problemas, raciocínio e prova, comunicação, conexões e representações.

Na década de 90, segundo Flemming (2005, p.74), surgiram três perguntas: O que é um problema? Quando e como utilizar um problema? Qual a finalidade de utilizarmos um problema? Na tentativa de respondê-las, vários foram os estudiosos que nortearam suas pesquisas nesse sentido, os quais são referidos a seguir.

Para Brenes e Murillo (1994), resolver um problema é fazer o que se faz, quando não se sabe o que fazer, pois se sabemos o que fazer não há problema. Nesse mesmo viés está o pensamento de Onuchic e Alevatto (2004, p. 217), as quais definem um problema como: “[...] tudo aquilo que não sabemos fazer, mas estamos interessados em fazer.” Já Dante (1996, p. 10) define problema como: “Qualquer situação que exija a maneira Matemática de pensar e conhecimento matemático para solucioná-lo.” Para o mesmo autor, os problemas têm que desafiar os alunos, demonstrarem situações reais para ser do interesse do aluno e os elementos desconhecidos têm que ser realmente desconhecidos.

Segundo o dicionário de Filosofia Abagnano (2007, p. 796), problema é qualquer situação que inclua a possibilidade de uma alternativa. O problema não tem necessariamente caráter subjetivo, não é redutível à dúvida, embora em certo sentido a dúvida também seja um problema.

Já o dicionário Michaelis¹⁰ define problema como “Toda questão em que se procura calcular uma ou várias quantidades desconhecidas, denominadas incógnitas, ligadas mediante relações a outras conhecidas, chamadas dados.”

Segundo Groenwald (1999, p.45), “Problema é qualquer situação que exija o pensar do sujeito para solucioná-lo. Problema Matemático é qualquer situação que exija a maneira Matemática de pensar e conhecimentos matemáticos para solucioná-los”.

A definição de problema utilizada nesta pesquisa é a de Polya (1995), que diz que o surgimento de um problema se dá quando procuramos maneiras/meios para conseguirmos um objetivo imediato, ocupando a maioria de nossa parte pensante com buscas incessantes para encontrar uma solução satisfatória. Segundo esse autor, um problema tem três características: tem que existir alguém disposto a resolvê-lo; tem que haver um estado inicial e um estado final a ser alcançado e tem que haver a verificação de algum possível impedimento na passagem de um estado para o outro.

Respondendo à segunda pergunta: Quando e como utilizar um problema, Pereira (2001) afirma que os problemas podem ser apresentados de quatro maneiras: os de sondagem, os de aprendizagem, os de análise e os de revisão e aprofundamento.

- problemas de sondagem: para a introdução natural e intuitiva de um novo conceito; - problemas de aprendizagem: para reforçar e familiarizar o aluno com um novo conceito; - problemas de análise: para a descoberta de novos resultados derivados de conceitos já aprendidos e mais fáceis que os problemas de sondagem; - problemas de revisão e aprofundamento: para revisar os tópicos já vistos e aprofundar alguns conceitos (PEREIRA, 2001, p.6).

Os problemas assumem características importantes quanto à sua identificação, como traz Stancanelli (2001), ao tipificá-los como convencionais e não convencionais. Como convencionais entende-se aqueles que possuem resposta única, geralmente numérica; todos os dados necessários para sua resolução estão dispostos no texto e na ordem necessária para sua resolução.

Os problemas não convencionais seriam aqueles em que os textos são mais elaborados, possibilitando estratégias variadas de resolução, mais de uma solução que pode não ser numérica. De acordo com a autora, eles podem ser listados como

¹⁰ Dicionário Michaelis online em <http://michaelis.uol.com.br/busca?r=0&f=0&t=0&palavra=problema>

problemas sem solução, problemas com mais de uma solução, problemas com excesso de dados e problemas de lógica.

Os problemas sem solução possibilitam que os estudantes tenham uma visão diferente, desenvolvendo sua capacidade de duvidar. Desse modo, possibilita-se que se tornem críticos em relação à informação que recebem. Uma das formas de trabalho que a autora sugere ao professor é pedir aos estudantes que modifiquem o enunciado de problemas desse tipo, para que passem a ter solução.

Os problemas com mais de uma solução oportunizam aos estudantes a verificação de que o processo de resolução não necessita ser único; possibilita ao estudante a análise de sua solução e a comparação com a dos colegas, verificando a eficiência e valorização de sua resolução.

Já os problemas com excessos de dados valorizam a importância do hábito da leitura e a percepção dos dados necessários à resolução do problema dispostos dentro dos textos. Os problemas de lógica são muito apreciados fora das salas de aula, em revistas de entretenimento, em brincadeiras com amigo, na escola possibilitam treinar a habilidade de checar as situações, criar hipóteses, analisar e classificar dados.

Respondendo à terceira pergunta: Qual a finalidade de utilizar um problema, segundo Dante (1996), o problema cria um caráter integrador quando os alunos debatem o conteúdo, desenvolvendo estratégias que estimularão o raciocínio e a criatividade, a fim de tornarem as aulas de Matemática mais interessantes.

Echeverría e Pozo (1998) citam que:

Ensinar a resolver problema não consiste somente em dotar os alunos de habilidades e estratégias eficazes, mas também em criar neles o hábito e atitude de enfrentar a aprendizagem como um problema para o qual deve ser encontrada uma resposta. Não é uma questão de somente ensinar a resolver problemas, mas também de ensinar a *propor* problemas para si mesmo, a transformar a realidade em um problema que mereça ser questionado e estudado [...] O verdadeiro objetivo final da aprendizagem da solução de problemas é fazer com que o aluno adquira o hábito de proporem-se problemas e de resolvê-los como forma de aprender (ECHEVERRÍA; POZO, 1998, p. 14-15).

Já Schroeder e Lester (1989, p.31 apud ONUCHIC, 1999, p.206) apresentam três maneiras diferentes de abordar resolução de problemas: ensinar sobre a resolução de problemas, ensinar Matemática para resolver problemas e ensinar Matemática através da resolução de problemas. Ensinar sobre a resolução de problemas significa trabalhar como se fosse um novo conteúdo ou como uma teoria, utilizando o modelo de resolução de problemas de Polya, por exemplo. Ensinar

Matemática para resolver problemas é preocupar-se com a habilidade em transferir o conteúdo que eles aprendem no contexto de um problema, podendo ficar restrito somente após aprender um novo conteúdo. Logo, ensinar Matemática através da resolução de problemas dá ênfase ao processo de pensamento, além de trabalhar os conteúdos matemáticos. Essa maneira, além de utilizar a teoria e os conhecimentos matemáticos recorrentes, vai ao encontro das recomendações do NCTM e dos PCN.

O NCTM (2000) embasa que:

Resolver problemas não é apenas uma meta da aprendizagem Matemática, mas também um modo importante de fazê-la. A resolução de problemas é uma parte integrante de toda aprendizagem Matemática e, portanto, não deve ser apenas uma parte isolada do programa de Matemática. A resolução de problemas em Matemática deve envolver todas as cinco áreas de conteúdos descritas nos Padrões do NCTM. Os bons problemas integram múltiplos tópicos e envolverão a Matemática significativa (NCTM, 2000, p.52).

Na publicação de Curriculum and Evaluation Standards, do NCTM (1989), há a afirmação de que a resolução de problemas deveria ser o objetivo principal de todo o ensino de Matemática e uma parte integrante de toda a atividade Matemática e que os alunos deveriam utilizá-la para investigar e compreender os conteúdos.

Os PCN (BRASIL, 1998) dão ênfase à resolução de problemas, indicando-a como ponto de partida da atividade Matemática e discutem caminhos para se fazer Matemática na sala de aula, destacando a importância da Matemática e das tecnologias de informação.

- a situação-problema é o ponto de partida da atividade Matemática e não a definição. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las; - o problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada; - aproximações sucessivas de um conceito são construídas para resolver certo tipo de problema; num outro momento, o aluno utiliza o que aprendeu para resolver outros, o que exige transferências, retificações, rupturas, segundo um processo análogo ao que se pode observar na História da Matemática; - um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações. Assim, pode-se afirmar que o aluno constrói um campo de conceitos que toma sentido num campo de problemas, e não um conceito isolado em resposta a um problema particular; - a resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas como uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode aprender conceitos, procedimentos e atitudes Matemáticas (BRASIL, 1998, p. 40-41).

Assim, Allevatto (2005) ressalta que o ensino da Matemática através da resolução de problemas coloca o foco da atenção dos alunos sobre o “dar sentido”, pois, ao resolverem problemas, os alunos necessitam refletir sobre ideias que estão inerentes e/ou ligadas ao problema.

Kaiber e Groenwald (2008), colocam que:

A metodologia resolução de problemas, quando bem desenvolvida, é eficaz para despertar no aluno o interesse pela temática a ser estudada, evitando partir de planejamento academicistas, demasiado abstratos para os alunos, propiciando a adequação da proposta de estudo ao nível intelectual e às características dos alunos. Enfatiza o porquê fazer, permitindo ao aluno desenvolver sua autonomia. [...] Além disso, dá liberdade para o trabalho em grupo e também para o aluno estabelecer as próprias estratégias, usando sua experiência para resolver uma situação problema. Incentiva a criatividade, o pensar, o desenvolvimento do raciocínio lógico. Possibilita uma aula mais ativa, com a participação do aluno, sendo o professor um orientador de trabalhos (KAIBER; GROENWALD, 2008, p. 237).

No Brasil, no final do século XX, início do século XXI, surge dentro do GTERP (Grupo de trabalho e Estudos em Resolução de Problemas) da UNESP – Rio Claro, coordenado pela professora Onuchic, a seguinte Metodologia Ensino-Aprendizagem-Avaliação, na qual esses três elementos ocorrem simultaneamente: enquanto o professor ensina, o aluno participa ativo, aprende e a avaliação ocorre de ambos os lados. Nesse método, a resolução de problemas é o ponto de partida e através dela os alunos devem realizar conexões entre diferentes ramos, gerando novos conceitos.

Segundo essa metodologia, trabalhar com *Ensino-Aprendizagem-Avaliação* exige novas posturas tanto do professor como do aluno, haja vista que coloca o foco da atenção dos alunos sobre ideias Matemáticas e sobre o seu sentido de se pensar matematicamente, utilizando estratégias diferentes, fazendo com que os alunos sejam capazes de fazer Matemática e que ela faça sentido, elevando a autoconfiança e a autoestima do estudante, pois haverá formalização de conceitos.

Esse método fornece dados de avaliação contínua, que podem ser usados para tomar decisões e espera-se que os professores se empolguem não querendo voltar a ensinar na forma dita tradicional, uma vez que o aluno analisa seus métodos e soluções, visando à construção do conhecimento e o professor avalia o processo que está acontecendo visando a reorientar as práticas discentes. Essa forma foi chamada pelo GTERP de forma Pós Polya de ver resolução de problemas.

Essa proposta consiste em organizar as atividades de acordo com as seguintes etapas: Preparação do problema, Leitura individual, Leitura em conjunto,

Resolução do Problema, Observação e incentivo, Registro das resoluções na lousa, Plenária, Busca de consenso e Formalização do conteúdo.

Allevaro e Onuchic (2009) colocam que:

Nesta metodologia, os problemas são propostos aos alunos antes de lhes ter sido apresentado formalmente o conteúdo matemático necessário ou mais apropriado à sua resolução que, de acordo com o programa da disciplina para a série atendida, é pretendido pelo professor. Dessa forma, o ensino-aprendizagem de um tópico matemático começa com um problema que expressa aspectos-chave desse tópico e técnicas Matemáticas devem ser desenvolvidas na busca de respostas razoáveis ao problema dado. A avaliação do crescimento dos alunos é feita, continuamente, durante a resolução do problema (ALLEVATO; ONUCHIC, 2009, p.140-141).

Cabe ressaltar que para utilizar qualquer uma dessas metodologias deve-se sempre lembrar que existe diferença entre exercício e problema. O primeiro relaciona-se à prática, é uma atividade de treinamento que faz uso de alguma habilidade Matemática já conhecida pelo estudante, se destaca pelo uso de procedimentos padrões, geralmente não precisando decidir sobre o procedimento a utilizar, muitas vezes aplicando fórmulas ou procedimentos já utilizados. O problema está ligado ao estabelecimento de estratégias para um determinado fim, envolvendo questionamentos, tomadas de decisões, metodologias e levando o aluno a se deparar com a aplicação de vários conhecimentos e principalmente questionando-se sobre a veracidade dos resultados.

Isso é evidenciado em Dante (1996, p.86): “Exercício serve para exercitar, para praticar um determinado algoritmo ou processo” o aluno lê o exercício e extrai as informações necessárias para praticar uma ou mais habilidades; já problema é, para o mesmo autor, “a descrição de uma situação onde se procura algo desconhecido e não se tem previamente nenhum algoritmo que garanta sua solução”, exigindo iniciativa e conhecimento de algumas estratégias.

Para D’Amore (2007):

Exercício: a resolução prevê que se devam utilizar regras e procedimentos já aprendidos, embora em processo de consolidação. Permitem a verificação imediata e o reforço. Problema: se tem um problema quanto um ou mais procedimentos, uma ou mais regras não são ainda de domínio cognitivo de quem resolve. Requer-se um ato criativo. (D’AMORE, 2007, p.286).

Lembrando que de acordo com o momento em que está sendo aplicado um problema poderá ser encarado como um exercício, não dependendo somente da experiência de quem executa, mas também dos objetivos estabelecidos enquanto o realiza, pois segundo Pozo:

Um problema se diferencia de um exercício na medida em que, neste último caso, dispomos e utilizamos mecanismos que nos levam, de forma imediata, à solução. Por isso, é possível que uma mesma situação represente um problema para uma pessoa enquanto que para outra esse problema não existe, quer porque ela não se interesse pela situação, quer porque possua mecanismos para resolvê-la com um investimento mínimo de recursos cognitivos e pode reduzi-la a um simples exercício (POZO, 1998, p.16).

Quando se trabalha a competência da resolução de problemas, objetiva-se desenvolver o raciocínio do aluno, ensinando-o a enfrentar situações novas, dando oportunidades de se envolver com as aplicações da Matemática dentro das áreas do conhecimento; assim, tornando as aulas de Matemática mais interessantes e desafiadoras.

Segundo Villella (1998), “quando falamos em operações de pensamento” estamos nos referindo, entre outras coisas, às características que proponham um crescimento intelectual, que podem ser desenvolvidas através da Resolução de problemas, elas estão explicitadas na figura 11, a seguir:

Figura 11 - Quadro operações de pensamento

Operação	Características
Buscar suposições	É estabelecer uma hipótese, levando em consideração que ela pode ser verdadeira ou falsa.
Classificar	É agrupar conceitos, ideias, considerando certos atributos comuns, que devem ser eleitos por quem realiza a tarefa.
Codificar	É transformar uma ideia em um elemento que pode dividir-se, o que implica elaborar um quadro gráfico, linguístico, simbólico; possível de ser codificado pelo receptor da informação proposta.
Comparar	É observar diferenças e semelhanças para encontrar pontos de relação entre os objetos e as ideias levadas em consideração.
Planejar a ação	É traçar um plano de ação para solucionar uma situação conflituosa.
Formular críticas	É formular juízos, analisar e avaliar a situação, de acordo com certos princípios e normas estabelecidas.
Formular hipóteses	É redigir um enunciado provisório, com caráter de estimativa, proposto como uma possível solução de um problema.
Imaginar	É formar uma ideia de algo não presente.
Interpretar	É explicar o significado de uma situação estudada.
Resumir	É estabelecer, de modo breve e condensado, a ideia do texto apresentado.
Reunir e organizar dados	É organizar os dados da situação estudada com o fim de utilizá-la para o desenvolvimento das hipóteses, soluções...
Tomar decisões	É responder a pergunta: que fazer e para quê? Envolvendo normas, leis e procedimentos válidos, assim como, valores que intervêm na situação a ser resolvida

Fonte: adaptado de Villella, Piedra Libre para la Matemática! 1998, p.144.

Zat e Groenwald (2016), afirmam, sobre as operações de pensamentos, que:

Percebe-se que a resolução de problemas está associada a objetivos claros, que desafiam o aluno a refletir, estabelecer hipóteses, observar, comparar, organizar dados, aplicar conceitos e interpretar situações, entre outras operações que favoreçam a construção do conhecimento, ou seja, pensamento e ação estão integrados. (ZAT; GROENWALD, 2016, p.440).

Já Kaiber e Groenwald (2008) reafirmam esse pensamento ao informar que:

A resolução de situação-problema deve fazer com que o aluno seja desafiado a refletir, discutir com o grupo, elaborar hipóteses e procedimentos, extrapolar as aplicações e enfrentar situações novas, não se restringindo àqueles problemas que conduzem a uma única solução ou que sejam repetição de aplicações ou conceitos. Deve, isto sim, possibilitar o raciocínio e ação (KAIBER; GROENWAL, 2008, p. 243).

Pesquisas apontam que a principal função da resolução de problemas deve ser a de desenvolver a compreensão Matemática dos alunos e que os alunos compreendem, ou não compreendem determinados conceitos ou conteúdos. Geralmente isso se manifesta quando eles resolvem problemas.

Walle (2015) trata sobre essa função:

“A resolução de problemas desenvolve nos alunos a convicção de que eles são capazes de fazer Matemática e de que a Matemática faz sentido. Toda vez que você apresenta uma tarefa baseada em resolução de problemas e aguarda uma solução, você está dizendo aos estudantes “Eu acredito que vocês podem fazer isso”. Toda vez que a turma resolve um problema e os alunos desenvolvem sua compreensão, a autoconfiança e a autoestima são ampliadas e fortalecidas” (WALLE, 2015, p.59).

Walle (2015, p.59) também expõem sobre o *valor* da resolução de problemas dentro da Matemática, que mesmo com as dificuldades encontradas, deve-se levar em consideração a compreensão dos alunos e as necessidades curriculares, o autor relata que “há boas razões para prosseguir nesse esforço.” Na figura 12, ele indica algumas dessas razões.

Figura 12 - Quadro valor da resolução de problemas no ensino

A resolução de problemas concentra a atenção dos alunos sobre as ideias e em dar sentido às mesmas
A resolução de problemas fornece dados contínuos para a avaliação que podem ser usados para tomar decisões educacionais, ajudar os alunos a ter bom desempenho e manter os pais informados.
A resolução de problema possibilita um ponto de partida para uma ampla gama de alunos.
Uma abordagem de resolução de problemas envolve os estudantes de modo que ocorrem menos problemas de disciplina.
A resolução de problemas desenvolve o “potencial matemático”.
É muito divertida!

Fonte: adaptado de Walle(2015, p.59).

Segundo BRASIL (1998), se considerarmos a resolução de problemas como peça central para o ensino da Matemática o pensar e o agir matemático se desenvolvem no enfrentamento de situações novas, quanto o indivíduo está engajado ativamente, ocasião para qual cria, desenvolve e constrói novas habilidades, permitindo ao aluno compreender a realidade em que está inserido.

Importante salientar que os tipos de atividades Matemáticas, com base nos níveis de exigências, apresentada na figura 13, segundo Smith y Stein (1998), citado

por NCTM (2015, p.19 – 20), podem variar de um conjunto de exercícios de rotina a um problema desafiador.

Figura 13 - Características das atividades Matemática em quatro níveis de exigência cognitiva¹¹

Níveis de exigências	
Exigências de baixo nível (memorização)	<ul style="list-style-type: none"> • Incluem a reprodução da memória de atos, regras, fórmulas ou definições previamente aprendidas ou já estabelecidas. • Não se podem resolver mediante procedimentos porque não existem ou porque o tempo destinado para completar a tarefa é muito curto para empregar um procedimento. • Não são ambíguas. Tais tarefas envolvem a reprodução exata das matérias vistas antecipadamente e aquilo que se vai produzir se estabelece com clareza e de maneira direta. • Não tem relação com os conceitos nem com o significado subjacente aos fatos, formulas ou definições aprendidas ou reproduzidas.
Exigência de baixo nível (procedimentos sem conexões)	<ul style="list-style-type: none"> • São algorítmicas. Usam procedimento que se requer situação específica ou o que é evidente a partir de instruções, de experiência ou da designação da tarefa previamente estabelecida. • Requerem uma exigência cognitiva limitada para seu êxito. Tem pouca ambiguidade sobre o que necessita terminar e sobre como fazer. • Não guardam relação com conceitos ou com o significado subjacente ao procedimento empregado. • Focam-se em gerar respostas corretas, no lugar de desenvolver a compreensão Matemática. • Não requerem explicações ou essas centram-se somente na descrição do procedimento utilizado.
Exigências de alto nível (procedimentos com conexões)	<ul style="list-style-type: none"> • Focam-se na atenção do estudante na utilização de procedimentos, com o propósito de desenvolver níveis mais profundos de compreensão dos conceitos e ideias Matemáticas. • Sugere-se seguir caminhos implícitos ou explícitos, os quais são procedimentos muito gerais que têm estreitas relações com ideias conceituais subjacentes, em contraposição aos limitados algoritmos que são pouco claros a respeito dos conceitos subjacentes. • Geralmente, representa-se em uma infinidade de fórmulas tais como diagramas visuais, objetos manipuláveis, símbolos e problemas contextualizados. • Levam a cabo conexões entre uma grande quantidade de representações que ajudam a resolver o significado. • Necessitam certo grau de esforço cognitivo. Ainda que possam seguir procedimentos gerais não se pode fazer a forma irracional. É necessário que os alunos envolvam-se com ideias conceituais que sejam subjacentes aos procedimentos (com o objetivo de finalizar a tarefa com êxito) e que desenvolvam sua compreensão.
Exigências de alto nível (construção da Matemática)	<ul style="list-style-type: none"> • Requerem um pensamento complexo e não algoritmo; a tarefa, suas instruções ou um exemplo resolvido não sugerem de forma explícita um enfoque ou caminho previsível e trilhado. • Solicitam que os estudantes explorem e entendam a natureza dos conceitos matemáticos, assim como os processos ou relações. • Requerem autoverificação ou a autorregulação dos processos cognitivos de UNO. • Necessitam que os estudantes tenham acesso ao conhecimento ou experiências relevantes e que façam um uso apropriado de ambas coisas ao estar trabalhando na tarefa. • Exigem que os estudantes analisem a tarefa examinem de maneira ativa suas restrições que poderem limitar as possíveis estratégias de solução e as próprias soluções. • Requerem um esforço cognitivo significativo e poderão transportar um nível de ansiedade para os estudantes, devido à natureza imprevisível dos processos de solução necessários.

Fonte: Tomado de Smith y Stein (1998, IN NCTM, 2015).

¹¹ Figura 13 << Características de las tareas Matemáticas em cuatro niveles de exigência cognitiva.(NCTM, 2014, p.19-20)

O NCTM (2015) ressalta que para o ensino da Matemática ser eficaz devem-se utilizar as atividades como forma de motivação e aprendizagem do estudante para que ele construa novos conhecimentos matemáticos através da resolução de problemas. O ensino eficaz da Matemática utiliza as atividades como forma de motivar a aprendizagem do estudante para ajudá-lo a construir novos conhecimentos matemáticos através da resolução de problemas.

O NCTM (2015) relata que para que os educandos aprendam Matemática é necessário oferecer-lhes oportunidades que envolvam as atividades, que foquem no raciocínio e na resolução de problemas. O quadro da figura 14 proporciona um resumo do que os docentes e do que os estudantes querem fazer quando se coloca em prática o raciocínio e a resolução de problemas em sala de aula.

Figura 14 - Implementação de tarefas que promovam o raciocínio e a resolução de problemas

Implementação de tarefas que promovam o raciocínio e a resolução de problemas. Ações de docentes e estudantes.	
O que os docentes estão fazendo?	O que os estudantes estão fazendo?
<p>Motivam a aprendizagem da Matemática por parte dos estudantes ao oferecer oportunidades para explorar e resolver problemas, que construam e ampliem sua atual compreensão Matemática.</p> <p>Selecionam tarefas que proporcionam diferentes formas de abordar os problemas mediante o emprego de variadas ferramentas e representações.</p> <p>Geralmente, planejam tarefas que requerem um alto nível de exigência cognitiva.</p> <p>Apoiam os estudantes quando exploram as tarefas, mas sem se adonar do seu raciocínio.</p> <p>Orientam os estudantes para que utilizem diversos enfoques e estratégias com o objetivo de que lhes deem sentido as tarefas e as resolvam.</p>	<p>Perseveram na indagação e no raciocínio das tarefas.</p> <p>Assumem a responsabilidade de dar sentido às tarefas ao recorrer e vinculá-las com seus conhecimentos prévios e suas ideias anteriores.</p> <p>Utilizam ferramentas e representações conforme necessitam, a fim de apoiar seu raciocínio e resolver problemas.</p> <p>Aceitam e esperam que seus companheiros usem uma gama de enfoques para a solução; também, entre eles analisaram e justificaram suas estratégias.</p>

Fonte: NCTM (2015, p.25).

Cabe ressaltar que segundo a BNCC (2016), as ideias de regularidade, de generalizações e de equivalências se constituem também em alicerces para o desenvolvimento de outras dimensões da álgebra, como a resolução de problemas de estrutura algébrica e a noção de função. Segundo relata a BNCC:

Os estudantes devem ser motivados a, em seu percurso escolar, questionar, formular, testa e validar hipóteses, buscar contra exemplos, modelar situações, verificar a adequação da resposta a um problema, desenvolver linguagens e, como consequência, construir formas de pensar que o levem a refletir e agir de maneira crítica sobre as questões com as quais ele se depara em seu cotidiano BNCC (2016, p. 131).

Assim, trabalhar o desenvolvimento do pensamento algébrico através da resolução de problemas possibilita que o aluno consiga compreender as aplicações da álgebra, desenvolvendo os conceitos algébricos. Para o NCTM (2000), a garantia de que os alunos tenham a oportunidade de se comprometer com um pensamento de alto nível, os docentes deverão selecionar e implementar de forma diária tarefas que estimulem o raciocínio e a resolução de problemas.

Nesse sentido, essa investigação busca identificar o desempenho dos estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental na Resolução de problemas com os conteúdos de equações do 1º grau e sistemas de equações do 1º grau, assim como investigar as estratégias utilizadas pelos alunos que envolvam o pensamento algébrico através da competência de resolução de problemas.

2 A PESQUISA

Neste capítulo, são apresentados o problema, os objetivos, a metodologia e os instrumentos de pesquisa.

2.1 PROBLEMA

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 1998), a formulação e resolução de problemas é um dos caminhos, uma das metodologias para o ensino da Matemática. O ponto de partida da atividade Matemática não é a definição, mas sim o problema. Nesse mesmo viés, os PCN Matemática (BRASIL, 1998) referem-se ao estudo da álgebra como:

[...] um espaço bastante significativo para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização, além de lhe possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas (BRASIL, p. 115, 1998).

A partir dessas reflexões, surge a pergunta de pesquisa: Qual o nível de desenvolvimento da competência de resolução de problemas que envolvam, na sua resolução, conhecimentos algébricos de alunos de uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola estadual do município de Porto Alegre do estado do Rio Grande do Sul?

2.2 OBJETIVO

A seguir, apresenta-se o objetivo geral e os objetivos específicos traçados para o desenvolvimento desta investigação.

2.2.1 Objetivo geral

Investigar se os alunos de uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental, de uma escola estadual de ensino do município de Porto Alegre, do estado do Rio Grande do Sul, possuem desenvolvida a competência de resolução de problemas que envolvem o pensamento algébrico nos conteúdos de equações do 1º grau e sistemas de equações do 1º grau.

2.2.2 Objetivos específicos

Para alcançar o objetivo geral, foram traçados os objetivos específicos descritos a seguir:

- selecionar/construir problemas matemáticos que envolvam os conteúdos de equação do 1º grau e sistemas de equações do 1º grau, envolvendo os conceitos de álgebra elementar, para aplicação em estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental;
- construir o ambiente de investigação no sistema SIENA¹², com as seguintes ações: grafo com os conceitos a serem investigados; banco de questões dos testes adaptativos de cada tópico do grafo;
- investigar o desempenho dos alunos de uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola estadual de Porto Alegre, na utilização do pensamento algébrico dentro da competência da Resolução de problemas que envolvem os conteúdos de equações do 1º grau e sistemas de equações do 1º grau.

2.3 METODOLOGIA DA INVESTIGAÇÃO

Este trabalho é direcionado para a investigação dos processos de resolução de problemas envolvendo os conceitos do pensamento algébrico de estudantes no 9º ano do Ensino Fundamental. Foi realizado um experimento envolvendo alunos de uma escola da Rede Estadual do município de Porto Alegre, do estado do Rio Grande do Sul (RS).

A escolha do *corpus* deve-se ao fato de que o nono ano do Ensino Fundamental constitui uma etapa de finalização da construção de competências dos estudantes, entre essas a do raciocínio algébrico elementar.

A escola para aplicação dos testes adaptativos foi escolhida, pois dentre as duas escolas que o pesquisador trabalha, optou-se pela que os alunos tivessem trabalhado, no sétimo ano, equações e no oitavo ano os conteúdos de álgebra, entre eles, sistemas de equações do 1º grau, entendendo que, assim, os alunos teriam os pré-requisitos para os assuntos abordados nos testes adaptativos. Essa verificação

¹² SIENA - Sistema Integrado de Ensino e Aprendizagem é um sistema informático desenvolvido pelos pesquisadores participantes do grupo de pesquisa GECM da ULBRA e o grupo de Tecnologias Educativas da Universidade de La Laguna, Tenerife, Espanha.

foi realizada por meio de entrevista com a professora titular de Matemática da turma investigada e pela análise de seus planos de estudos da escola onde foi desenvolvida a investigação (Planos de estudos em anexo II).

Foi realizada uma análise de pensamento algébrico dos estudantes, a qual envolveu desde a aritmética, passando pela álgebra e concluindo com os conceitos necessários ao pensamento algébrico, sempre visando às habilidades utilizadas na resolução de problemas.

Foi criado um banco de questões com 450 questões divididas em três níveis: fácil, médio e difícil, todas utilizando o pensamento algébrico. Esse banco de questões “alimentado” com número suficiente gerará os testes adaptativos. Com as quais os alunos podem testar seus conhecimentos, verificando o rendimento alcançado, identificando suas dificuldades e conhecimentos já adquiridos. Na elaboração das questões, foram utilizados como referência os documentos oriundos do NCTM¹³, APM¹⁴, MEC¹⁵ (PCN¹⁶, ENEM¹⁷ e os livros didáticos do PNLD (2013)¹⁸- adotados na Educação Básica).

Esta investigação desenvolveu um experimento com estudantes desse ano de escolaridade, buscando investigar as estratégias utilizadas na Resolução de problemas que envolvem conhecimentos algébricos, através da aplicação de testes adaptativos, no sistema SIENA.

Segundo Groenwald e Moreno:

Este sistema irá permitir ao professor uma análise do nível de conhecimento prévio de cada aluno e possibilitará um planejamento de ensino de acordo com a realidade dos alunos podendo proporcionar uma aprendizagem significativa (GROENWALD; MORENO, 2006, p.17).

O SIENA foi alimentado com problemas que envolvem álgebra elementar visando aos conteúdos de equações de 1º grau e sistemas de equações do 1º grau, distribuídas em três níveis de dificuldades quanto aos problemas propostos: questões fáceis, questões médias e questões difíceis, as quais foram de múltipla escolha, com cinco itens para escolha da resposta correta.

¹³ NCTM – National Council of Teacher of Mathematics

¹⁴ APM – Associação Portuguesa de Matemática

¹⁵ MEC- Ministério da Educação e Cultura

¹⁶ PCN – Parâmetros Curriculares Nacional

¹⁷ ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio

¹⁸ PNLD – Programa Nacional do Livro Didático

Foi realizado um teste piloto com nove alunos do nono ano da Escola Estadual de Ensino Médio Professor Júlio Grau com os conteúdos relativos à pesquisa, para que fosse possível verificar a aplicação dos testes, a metodologia aplicada e a dinâmica determinada. Esse teste gerou um artigo que foi apresentado na 5ª Escola de Inverno de Educação Matemática na Universidade Federal de Santa Maria, do município de Santa Maria, do estado do Rio Grande do Sul.

Após a aplicação dos testes adaptativos, com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, foi analisado o banco de dados do SIENA e os registros do desenvolvimento das questões realizadas pelos estudantes participantes do experimento piloto, buscando identificar as habilidades utilizadas na resolução dos problemas e se conseguiram relacioná-las aos conhecimentos algébricos.

A seguir apresenta-se o sistema SIENA, utilizado na presente investigação.

2.3.1 Sistema Integrado de Ensino e Aprendizagem (SIENA)¹⁹

Segundo Grossi (2008, apud Groenwald et al, 2009), os educadores têm como desafio descobrir maneiras diferentes de ensinar a mesma coisa, pois os estudantes têm ritmos e históricos variados, além disso, o sistema educacional, historicamente, é projetado igualmente para todos os estudantes, de forma que o aluno deve adaptar-se a um contexto educacional definido. Para essa autora, o professor além de questionar a abordagem do conteúdo, deve despertar a curiosidade do educando e demonstrar sua utilização em diferentes situações da vida real. Assim, um dos desafios que os professores encontram, em sala de aula, é a identificação das dificuldades individuais dos alunos.

Nesse sentido, o uso de recursos informáticos pode influenciar benéficamente quando utilizados como suporte ao trabalho docente, contribuindo na agilidade das tarefas dos mesmos, como fonte de informação do conhecimento real dos alunos, ou na utilização de sistemas inteligentes que auxiliem o professor na sua docência (GROENWALD; RUIZ, 2006).

Kampff et al (2004) afirmam que em uma sociedade de bases tecnológicas,

19 - O texto sobre o sistema SIENA, utilizado neste projeto, é um texto padrão desenvolvido pelo Grupo de Estudos Curriculares de Educação Matemática (GECM) da ULBRA e do Grupo de Tecnologias Educativas da Universidade de La Laguna em Tenerife, Espanha, desenvolvedores do SIENA.

com mudanças contínuas, não é mais possível desprezar o potencial pedagógico que as Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) apresentam quando incorporadas à educação. Assim, o computador é um instrumento pertinente no processo de ensino e aprendizagem, cabendo à escola utilizá-lo de forma coerente com uma proposta pedagógica atual e comprometida com uma aprendizagem significativa.

Nesta perspectiva, o SIENA foi organizado pelos grupos de Tecnologias Educativas da Universidade de La Laguna, Tenerife, Espanha e o GECM (Grupo de Estudos Curriculares de Educação Matemática) da ULBRA (Universidade Luterana do Brasil). O SIENA é um sistema inteligente que é:

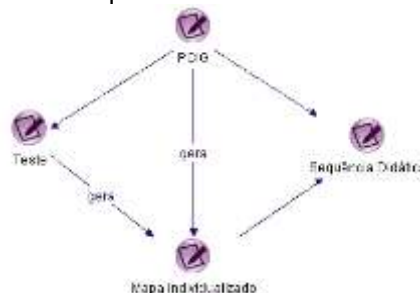
capaz de comunicar informações sobre o conhecimento dos alunos em determinado tema, tem o objetivo de auxiliar no processo de recuperação de conteúdos matemáticos, utilizando a combinação de mapas conceituais e testes adaptativos (GROENWALD; RUIZ, 2006, p.26).

Ainda segundo Groenwald e Ruiz (2006), esse sistema permite ao professor uma análise do nível de conhecimentos prévios de cada aluno, possibilitando um planejamento de ensino de acordo com a realidade dos alunos, podendo proporcionar uma aprendizagem significativa. O processo informático permite gerar um mapa individualizado das dificuldades dos alunos, o qual estará ligado a um hipertexto, que servirá para recuperar as dificuldades que cada aluno apresenta no conteúdo desenvolvido, auxiliando no processo de avaliação.

O SIENA foi desenvolvido através de uma variação dos tradicionais mapas conceituais (NOVAK; GOWIN, 1988), sendo denominado de Grafo Instrucional Conceitual Pedagógico - PCIG (*Pedagogical Concept Instructional Graph*), que permite a planificação do ensino e da aprendizagem de um tema específico. O grafo não ordena os conceitos segundo relações arbitrárias, os conceitos são colocados de acordo com a ordem lógica em que devem ser apresentados ao aluno. Portanto, o grafo deve ser desenvolvido segundo relações do tipo “o conceito A deve ser ensinado antes do conceito B”, começando pelos nodos (tópicos no grafo) dos conceitos prévios, seguindo para os conceitos fundamentais, até atingir os nodos objetivos.

Cada conceito do grafo está ligado a um teste adaptativo que gera o mapa individualizado das dificuldades do estudante e contém uma sequência didática, conforme a figura 15.

Figura 15 - Esquema do sistema SIENA



Fonte: sistema SIENA.

Um teste adaptativo informatizado é administrado pelo computador, que procura ajustar as questões do teste ao nível de habilidade de cada examinando. Segundo Costa (2009), um teste adaptativo informatizado procura encontrar um teste ótimo para cada estudante, para isso a proficiência do indivíduo é estimada interativamente durante a administração do teste e, assim, só são selecionados os itens que mensurem eficientemente a proficiência do examinado. O teste adaptativo tem por finalidade administrar questões de um banco de questões previamente calibradas, que correspondam ao nível de capacidade do examinando. Como cada questão apresentada a um indivíduo é adequado à sua habilidade, nenhuma questão do teste é irrelevante (SANDS; WATERS, 1997). Ao contrário dos testes de papel e caneta, cada estudante recebe um teste com questões diferentes e tamanhos variados, produzindo uma medição mais precisa da proficiência e com uma redução, do tamanho do teste, em torno de 50% (WAINER, 2000).

No SIENA, o teste adaptativo é realizado em cada nodo do PCIG, devendo ser cadastradas perguntas que irão compor o banco de questões dos mesmos, com o objetivo de avaliar o grau de conhecimento que o aluno possui de cada tópico. As perguntas são de múltipla escolha, classificadas em fáceis, médias e difíceis, sendo necessário definir, para cada pergunta: o grau de sua relação com o tópico; o grau de sua dificuldade; a resposta verdadeira; a possibilidade de responder a pergunta considerando exclusivamente sorte ou azar; a estimativa do conhecimento prévio que o aluno tem sobre esse conceito; o tempo de resposta (em segundos) para o aluno responder à pergunta. O teste adaptativo estima o grau de conhecimento do aluno para cada tópico, de acordo com as respostas do estudante. Para isso o teste adaptativo vai lançando perguntas aleatórias ao aluno, com um nível de dificuldade de acordo com as respostas do estudante, se o aluno vai respondendo corretamente, o sistema vai aumentando o grau de dificuldade das perguntas, e ao

contrário, se a partir de um determinado momento o aluno não responde corretamente, o sistema diminui o nível de dificuldade da pergunta seguinte.

A ferramenta informática parte dos conceitos prévios, definidos no PCIG, e começa a avaliá-los, progredindo sempre que o aluno consegue uma nota superior ao estipulado, pelo professor, no teste. Quando um conceito não é superado, o sistema não prossegue avaliando por esse ramo de conceitos do grafo, pois se entende que esse conceito é necessário para a compreensão do seguinte, abrindo para o estudante a possibilidade de realizar a sua recuperação. É importante dizer que o sistema poderá prosseguir por outras ramificações do grafo.

Para estimar o conhecimento do aluno em cada conceito do grafo, o SIENA implementa uma rede bayesiana entre os conceitos implicados nesse nodo do grafo e as perguntas, do tipo múltipla escolha, criadas para esses conceitos estão divididas em vários níveis de dificuldade. A estimativa é um processo interativo em que o sistema vai lançando perguntas e cada pergunta lançada aos estudantes se

estima o conhecimento mediante as fórmulas de Bayes: $P\left(\frac{C+}{p_{1+}}\right) = \frac{P(C+)xP\left(\frac{p_{1+}}{C+}\right)}{P(p_{1+})}$

Onde: $P(p_{1+}) = P(C+)xP\left(\frac{p_{1+}}{C+}\right) + P(C-)xP\left(\frac{p_{1+}}{C-}\right)$

$$P\left(\frac{C+}{p_{1-}}\right) = \frac{P(C+)xP\left(\frac{p_{1-}}{C+}\right)}{P(p_{1-})}$$

Para o caso que se acerte a pergunta, e

Onde $P(p_{1-}) = P(C+)xP\left(\frac{p_{1-}}{C+}\right) + P(C-)xP\left(\frac{p_{1-}}{C-}\right)$

Para o caso em que a pergunta seja respondida incorretamente.

Onde $P(C+)$ representa o conhecimento *a priori* estimado na pergunta anterior, $P\left(\frac{p_{1+}}{C+}\right)$, representa a probabilidade de que se acerte a pergunta condicionado a saber o conceito, $P\left(\frac{p_{1+}}{C-}\right)$, é a probabilidade de acertar a pergunta sem conhecer o conceito, $P\left(\frac{p_{1-}}{C+}\right) = 1 - P\left(\frac{p_{1+}}{C+}\right)$ y $P\left(\frac{p_{1-}}{C-}\right) = 1 - P\left(\frac{p_{1+}}{C-}\right)$. O proceso interativo finaliza quando a estimativa não se altera significativamente.

Enquanto a pergunta a ser lançada cada vez no proceso interativo, o teste adaptativo se adapta ao conhecimento do estudante elegendo uma pergunta de igual ou maior dificuldade, se a pergunta anterior foi contestada corretamente e dificuldade igual ou menor se a pergunta foi respondida erroneamente (incorretamente).

O sistema mostrará através do seu banco de dados quais foram as perguntas realizadas, quais foram respondidas corretamente e qual a estimativa sobre o grau de conhecimento de cada conceito, conforme o exemplo apresentado na figura 16.

Figura 16: Exemplo do banco de dados de um teste adaptativo de um nodo

Respuesta	Respuesta correcta	Tiempo (antes de que se acabe)	Pregunta	Puntos antes
1	true	49	Qual é o número que está representado no âlaco?	0.280
1	true	49	Qual é o número que está representado no âlaco?	0.280
4	false	234	Se agrupamos sessenta e cinco unidades em grupos de dez, teremos ao todo?	0.281
3	false	128	Que número está representado no QVL?	0.281
3	false	128	Que número está representado no QVL?	0.281
4	false	130	Qual o número representado no âlaco?	0.281

Fonte: sistema SIENA.

O sistema possui duas opções de uso: a primeira serve para o aluno estudar os conteúdos dos nodos do PCIG e realizar o teste, para verificar quais são seus conhecimentos sobre determinados conteúdos; a segunda opção oportuniza, ao aluno, realizar o teste e estudar os conceitos nos quais apresentou dificuldades, sendo possível uma recuperação individualizada dos conteúdos nos quais não conseguiu superar a média estipulada como necessária para avançar. Todos os nodos do PCIG estão ligados a uma sequência didática que possibilita ao aluno estudar os conceitos ou realizar a recuperação dos nodos em que apresenta dificuldades.

As sequências didáticas são um conjunto de atividades organizadas, de maneira sistemática, planejadas para o processo de ensino e aprendizagem de um conteúdo, etapa por etapa. São organizadas de acordo com os objetivos que o professor quer alcançar para a aprendizagem de seus alunos, e envolvem atividades de aprendizagem e avaliação (DOLZ; SCHNEUWLY, 2004).

Segundo Zabala (1998), as sequências didáticas são um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos. Através da sequência didática é possível analisar as diferentes formas de intervenção e avaliar a pertinência de cada uma delas.

A plataforma SIENA esta disponível no endereço <http://siena.ulbra.br>, sendo que o acesso aos trabalhos e banco de dados está restringido a usuários cadastrados no sistema. Esse cadastramento é realizado pelos administradores da plataforma e fornece um *login* e uma senha pessoal ao usuário.

Nesta investigação foram utilizados os testes adaptativos do SIENA, para análise dos dados coletados no experimento com alunos de uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola estadual de Porto Alegre. Para isso foram necessárias as seguintes ações:

- construção do grafo com as habilidades a serem avaliadas;
- construção do banco de questões para os testes adaptativos de cada tópico do grafo, com 45 questões em cada tópico.

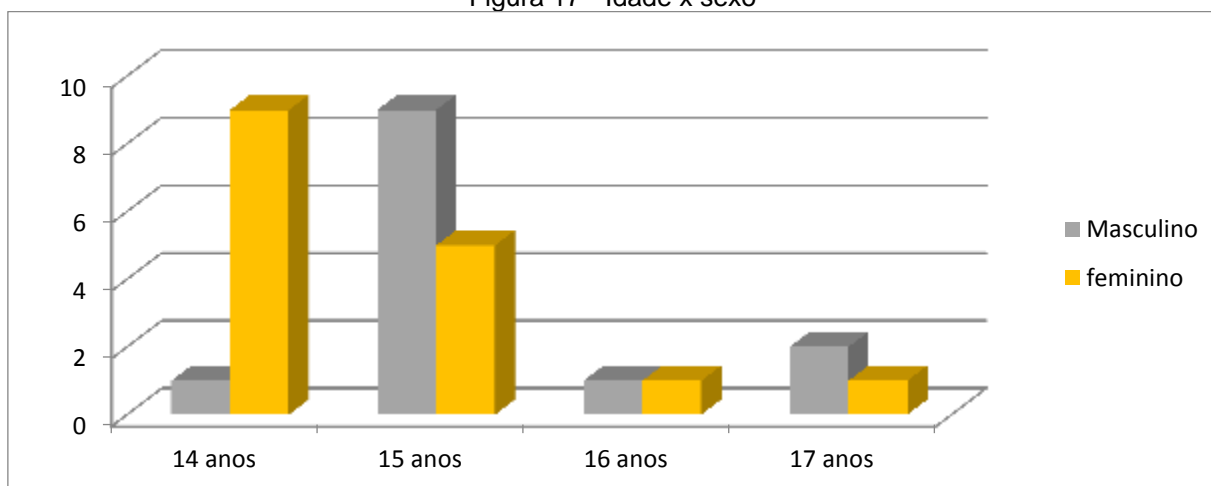
2.3.2 Sujeitos de pesquisa

Foram investigados 30 alunos de uma turma do 9º ano da Escola Estadual de Ensino Médio Professor Júlio Grau, localizada no Bairro Santa Maria Goretti, zona norte de Porto Alegre, do estado do Rio Grande do Sul.

A escola Estadual de Ensino Médio Professor Júlio Grau possuía, no ano de 2016, 999 alunos, distribuídos entre os turnos da manhã, tarde e noite. Com 21 turmas de Ensino Médio regular, nos turnos da manhã e tarde, 1 turma de Ensino Fundamental à tarde e 8 turmas de EJA-Ensino Médio à noite. Essa escola está em processo de extinção do Ensino Fundamental, para que no ano de 2017 torne-se uma Escola que atenda apenas a estudantes do Ensino Médio.

Dos 30 alunos investigados, 17 eram meninas e 13 eram meninos, com idade entre 14 e 17 anos, como mostra a figura 17. Ao longo da aplicação dos testes, houve a transferência de uma aluna. A turma era composta por alunos que realizaram, praticamente, todo o Ensino Fundamental na instituição. Na turma havia 2 alunos repetentes e 3 alunos oriundos de outra escola.

Figura 17 - Idade x sexo



Fonte: dados da pesquisa.

2.3.3 Instrumentos de coleta de dados

Para realizar a análise dos resultados dos dados coletados no experimento, foram utilizados os seguintes instrumentos: os resultados dos dois bancos de dados da plataforma SIENA, fotos dos estudantes realizando o experimento²⁰, registros das respostas dos alunos e observações do pesquisador (foi utilizado um caderno de registro das observações).

Os bancos de dados armazenam os resultados dos testes adaptativos realizados pelos alunos, com o desempenho individual, incluindo as questões dos testes e as respostas marcadas pelos alunos.

Os registros dos alunos analisados foi um diário de campo dos estudantes, distribuídos a cada estudante, com as páginas identificadas de acordo com os tópicos do grafo construído. Esses diários de campo permitiram analisar o desenvolvimento do raciocínio e os procedimentos utilizados para a resolução das questões. Foi solicitado aos alunos uma autorização assinada pelos responsáveis para uso de suas imagens. (Apêndice A)

²⁰ Nas fotos foram tomados os cuidados necessários para que os estudantes não fossem identificados.

2.3.4 Experimento

Para a aplicação dos testes adaptativos, foram utilizadas as dependências da Escola Estadual de Ensino Médio Professor Júlio Grau, escola na qual estudam os 30 alunos participantes deste experimento (Autorização no Anexo I).

Para as aplicações foi escolhido o laboratório de informática, que era composto de 19 computadores desktop, conforme a figura 18.

Figura 18 - Laboratório de Informática da escola



Fonte: a pesquisa.

Foi realizado um teste piloto, com o objetivo de testar as questões inseridas no sistema SIENA, validando-as. Também, para realizar análise do funcionamento dos equipamentos, da internet e do acesso ao servidor do SIENA, bem como analisar os resultados para compilação de um artigo que, posteriormente, foi apresentado na Escola de Inverno em Santa Maria, no ano de 2016. Desse teste piloto participaram 9 alunos voluntários (figura 19).

Figura 19 - Aplicação do teste piloto



Fonte: a pesquisa.

Após a aplicação do teste-piloto, verificou-se a necessidade de um espaço mais amplo, para que fosse possível atender mais alunos e para que eles conseguissem manusear seus diários de campo, uma vez que no laboratório de informática o espaço era restrito e poder-se-ia atender no máximo 19 alunos de cada vez. A escola já possuía um projeto de troca de ambiente do laboratório de informática para um espaço maior, então, o pesquisador, juntamente com o aluno de Iniciação Científica da ULBRA Lucas Teixeira da Silva, começou a reestruturar esse novo laboratório de informática. Foram realizadas as transferências dos computadores, das bancadas, da rede elétrica e da rede lógica de dados. Depois da instalação da rede lógica, optou-se por utilizar os *netbooks* que a escola havia recebido do governo federal, em um total de 35 aparelhos, os quais facilitariam a questão do espaço e, também, seria mais prático para os alunos.

Carregaram-se as baterias dos *netbooks* e foi realizada a instalação dos computadores na rede lógica e a realização do experimento (figura 20).

Figura 20 - Testes dos *netbooks* na rede lógica



Fonte: a pesquisa.

Nesse dia, todos os computadores foram ligados e conectados na plataforma SIENA para que fosse possível realizar os testes, tanto com a rede lógica da escola como com os próprios computadores interligados ao SIENA. Após os testes foi marcado, a primeira aplicação com os estudantes.

A primeira aplicação foi organizada para acontecer no novo laboratório de informática utilizando conexão via cabo de dados, nos 30 *netbooks*, conforme figura 21.

Figura 21 – Primeira aplicação dos testes adaptativos



Fonte: a pesquisa.

Após a aplicação do primeiro teste, o pesquisador e o aluno de iniciação científica indagaram sobre utilizar a rede *wifi* da escola, já que cada sala de aula possui um aparelho transmissor de sinal de *wifi*. Então, foi estruturada a rede lógica da escola para utilizar esse tipo de sinal. Foi feito um teste com os 35 *netbooks* conectados ao provedor do SIENA, via rede *wifi* da escola, conforme figura 22, verificando, assim, que havia suporte para a realização do experimento.

Figura 22 - *Netbooks* conectados no servidor da ULBRA via WIFI





Fonte: a pesquisa.

Todos os computadores foram conectados ao provedor da ULBRA, mas foi necessário realizar alguns ajustes, entre eles, a rede lógica da escola. Após a realização desses ajustes, iniciou-se a segunda aplicação.

Para a segunda aplicação, a turma foi dividida em dois grupos de 15 alunos, uma vez que se estivessem utilizando a rede *wifi* era possível utilizar dois ambientes. A turma do nono ano foi deslocada para o andar superior do prédio da escola, em frente ao novo laboratório de informática, assim, o pesquisador conseguiu atender aos dois grupos, com o auxílio do bolsista de iniciação científica Lucas, conforme figura 23.

Figura 23 - Segunda aplicação dos testes adaptativos



Fonte: a pesquisa.

Observa-se nas fotos os alunos utilizando os *netbooks* em dois ambientes: no novo laboratório de informática e na sala de aula. Após essa segunda aplicação,

foi possível perceber que todos os equipamentos funcionaram bem e que a rede suportou os equipamentos funcionando. Para finalizar, foi realizado o restante dos testes na sala de aula. Para que isso ocorresse, foram ligadas as redes *wifi* da sala de aula dos alunos e das duas salas ao lado.

Foi realizada a terceira aplicação do experimento. Para viabilizá-la foram utilizados 33 *netbooks* na sala de aula, deixando três de reserva para possíveis necessidades. Os computadores foram carregados, conectados à internet e logados no provedor da ULBRA, conforme a figura 24.

Figura 24 - Computadores prontos para a terceira aplicação



Fonte: a pesquisa

Após realizados os testes de acesso a rede *wifi*, os alunos receberam seus diários de campo para suas anotações e realizaram os testes adaptativos, como demonstra a figura 25.

Figura 25 - Terceira aplicação



Fonte: a pesquisa

Durante a aplicação dos testes adaptativos, observou-se que os alunos sentiam-se desafiados a realizar as atividades, uma vez que saíam da rotina de aula, utilizando as tecnologias para a aprendizagem e aplicação da resolução de problemas.

Nesse mesmo formato, na sala de aula, foram realizadas as outras três aplicações, utilizando os *netbooks*. Durante esse tempo, alguns alunos descobriram que os *netbooks*, também podem ser utilizados como *nettablets* que utilizam como sistema operacional o *Linux ubuntu*. Conforme figura 26.

Figura 26 - Utilização do *Netbook* como *Nettablet* para execução do teste adaptativo



Fonte: a pesquisa.

Poderiam, também resolver os testes adaptativos no próprio smartphone, que utiliza um sistema *android*, pois independente do sistema operacional existe a necessidade de acesso as plataforma do *google chrome* ou do *mozilla fire fox*, conforme figura 27.

Figura 27 - Utilização do Smartphone para a execução do testes adaptativo



Fonte: a pesquisa.

Após a realização do experimento e de posse dos resultados, o pesquisador deu um retorno para a turma de como havia sido o desempenho dela nos testes adaptativos, quais as dificuldades apresentadas e o porquê dos erros. Também, foram apresentadas algumas questões observando os desenvolvimentos realizados. Essa “aula” foi em forma de análise de questões, observando qual era o objetivo proposto para cada tópico e quais os diferentes níveis de dificuldade, salientando os tópicos e níveis em que apareceram dificuldades, exemplificando cada uma delas. Foram utilizados 2 períodos de aula, conforme a figura 28, com demonstrações e construções passo a passo.

Figura 28 - Retorno dos resultados preliminares aos alunos



Fonte: a pesquisa

Neste retorno aos alunos sobre os resultados preliminares dos testes adaptativos, observou-se que eles estavam muito interessados em descobrir onde estavam errando e verificar se existia mais de um método para resolver aquelas atividades que foram propostas. O pesquisador esclareceu as dúvidas e retomou os passos da resolução de problemas de Polya (1995).

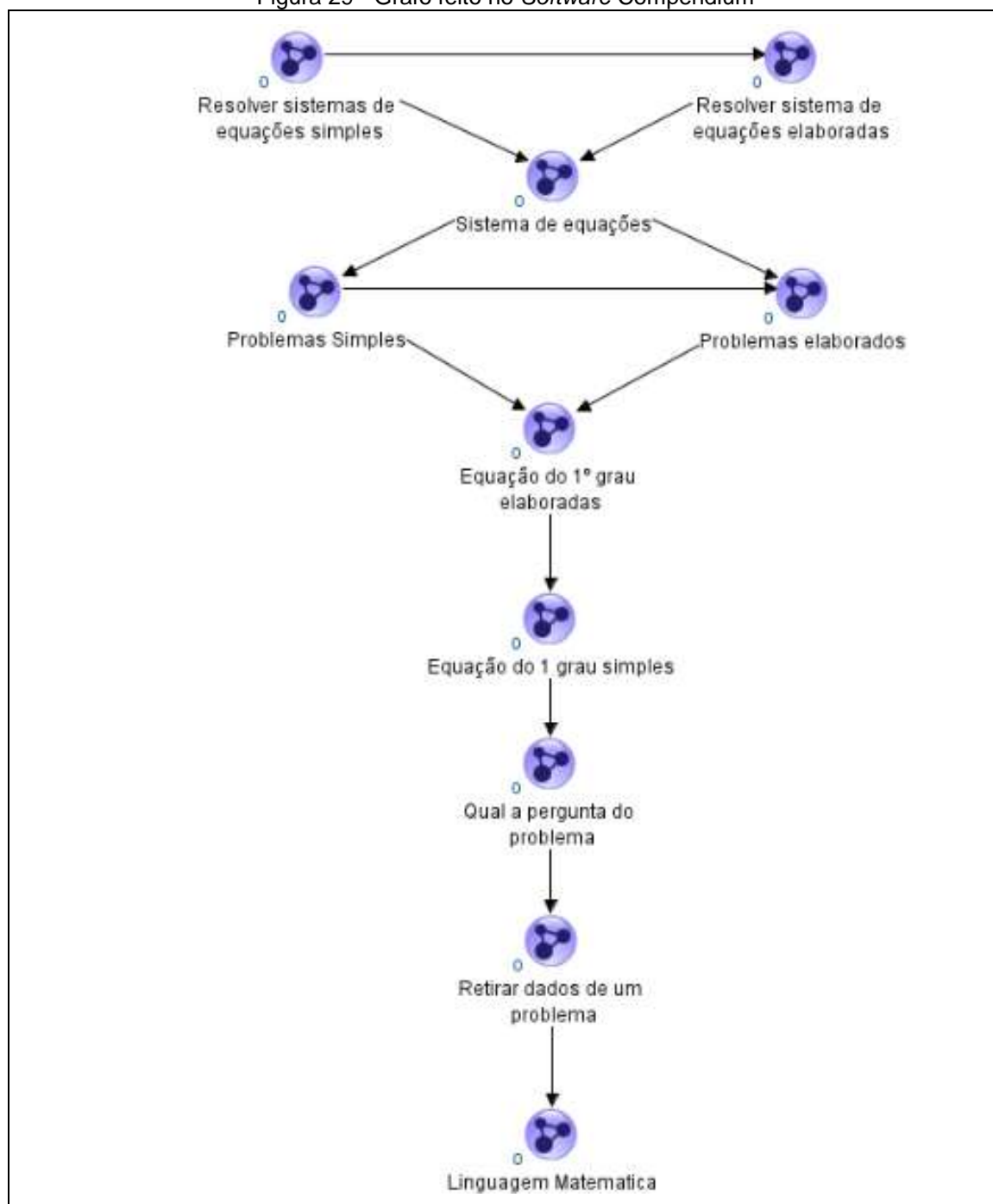
3 AMBIENTE DE INVESTIGAÇÃO

Neste capítulo, apresenta-se como foi elaborado no sistema SIENA o ambiente de investigação da pesquisa desenvolvida contendo o grafo que foi construído, envolvendo habilidades de resolução de problemas e conceitos algébricos e o banco de questões para os testes adaptativos.

3.1 GRAFO COM OS TÓPICOS DA INVESTIGAÇÃO

O grafo dos tópicos a serem trabalhados foi composto por 10 tópicos, divididos da seguinte maneira: *Linguagem Matemática, Qual a pergunta do problema, Retirar dados de um problema, Equação do 1º grau simples, Equação do 1º grau elaborada, Problemas simples, Problemas elaborados, Identificação do sistema de equações, Resolver sistemas de equações simples e Resolução de sistemas de equações elaborados.*

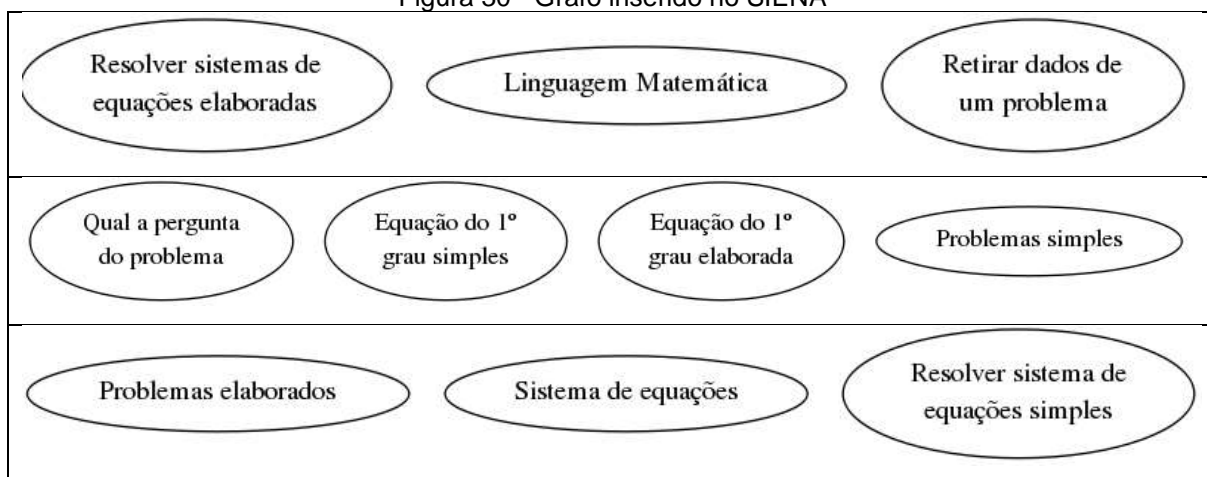
O grafo foi desenvolvido no *software Compendium*, que é uma ferramenta que permite mapear ideias e argumentos, facilitando as conexões com os tópicos.

Figura 29 - Grafo feito no *Software Compendium*

Fonte: o autor.

Na figura 30, apresenta-se o grafo incluído no SIENA. Percebe-se que o grafo quando colocado no SIENA perde a obrigatoriedade de uma sequência, haja vista que para esse teste adaptativo não foram selecionados tópicos como predecessores ou antecessores aos tópicos, podendo o estudante realizar os testes na ordem que achasse conveniente.

Figura 30 - Grafo inserido no SIENA



Fonte: <http://siena.ulbra.br/mapImagens/20.png>.

Na figura 31, apresenta-se a lista de tópicos, como aparece na página de acesso ao SIENA.

Figura 31 - Apresentação dos tópicos na página de acesso do SIENA

Nombre	Ver	Editar	Borrar	
<input type="text"/>				
Problemas simples	Ver	Editar	Borrar	
Qual a pergunta do Problema	Ver	Editar	Borrar	
Retirar dados de um problema	Ver	Editar	Borrar	
Equação do 1º grau simples	Ver	Editar	Borrar	
Problemas elaborados	Ver	Editar	Borrar	
Sistema de equações	Ver	Editar	Borrar	
Equação do 1º grau elaborada	Ver	Editar	Borrar	
Linguagem Matemática	Ver	Editar	Borrar	
Resolver sistema de equações simples	Ver	Editar	Borrar	
Resolver sistema de equações elaboradas	Ver	Editar	Borrar	

Fonte: <http://siena.ulbra.br/tópicos/20>.

Para cada tópico do grafo, foi desenvolvido um banco com 45 questões, as quais foram divididas em níveis de dificuldade: fáceis, médias e difíceis.

3.2 TESTES ADAPTATIVOS

Os testes adaptativos têm por finalidade organizar as questões do banco de dados do SIENA. Para compor esse banco de dados, é necessário cadastrar as perguntas para cada tópico, objetivando avaliar o grau de conhecimento individual de cada aluno. As questões são de múltipla escolha, numeradas de 0 a 4, sendo necessário definir: o grau de dificuldade (fácil, média ou difícil); identificar a resposta verdadeira; a possibilidade de responder a pergunta considerando somente marcação aleatória; o tempo para o aluno responder a pergunta (em segundos) e o conhecimento prévio do aluno para aquele tópico (na visão do professor).

Essas informações são de extrema importância para a realização do teste adaptativo, pois, de acordo com as repostas dadas, é possível verificar o grau de conhecimento dos alunos em relação aos tópicos trabalhados.

O sistema lança perguntas aleatórias ao aluno de acordo com o nível de dificuldade da pergunta, se o estudante erra a pergunta, diminui o nível de dificuldade, caso acerte a pergunta, aumenta o nível de dificuldade da próxima pergunta. O sistema determina o momento de parada, quanto alcançar uma estimativa sobre o grau de conhecimento do tópico ou se não existirem mais perguntas no banco de questões. Por essa razão, cada tópico do grafo deverá ter uma quantidade suficiente de questões para que o sistema possa analisar se os alunos conseguiram alcançar a nota estipulada pelo professor. Nessa investigação foi estipulada a nota 0,6 para avançar nos testes do grafo, a qual foi escolhida por ser uma nota padrão para acesso às séries seguintes, em um intervalo de [0, 1].

Para a montagem dos bancos de questões dos testes, foram desenvolvidas 45 questões para cada tópico do grafo, com três níveis de dificuldade. Os níveis de dificuldades adotados nas questões estão explicitados na análise dos dados, item 4.4.

3.3 ELABORAÇÃO DOS TESTES

As questões para os testes foram, quase que na sua totalidade, criadas e os que não foram criadas foram extraídas dos livros do Plano Nacional do Livro Didático - PNLD e da base de dados das avaliações do Ministério da Educação e Cultura(MEC).

A criação dos tópicos deu-se através das competências e habilidades pesquisadas do ENEM, Prova Brasil²¹, OBMEP²², PCN e documentos orientadores da Secretária Estadual de Educação e Secretária Municipal de Educação.

O banco de questões dos testes teve ao todo 450 questões (Apêndice B), em que as respostas foram cuidadosamente preparadas para ser possível analisar onde os alunos apresentavam dificuldades na resolução de uma questão. Seguem, a seguir, os tópicos e, na sequência, três exemplos de questões, dentro de cada tópico do grafo.

As questões foram retiradas do SIENA.

3.3.1 Tópico: Linguagem Matemática

O objetivo desse tópico foi analisar se o aluno consegue transpor da língua materna para a linguagem matemática, demonstrando sua compreensão através da escolha da equação que resolve a atividade proposta.

Neste tópico, a diferenciação quanto ao nível de dificuldade se dá em decorrência das habilidades pretendidas. No nível fácil, foram utilizadas as quatro operações básicas, bem como noções triviais como dobro, metade, etc. No nível médio, foram utilizadas as mesmas noções, utilizando linguagem que exige maior dificuldade que no nível fácil, acrescentando operações envolvendo incógnitas. No nível difícil, além das habilidades matemáticas anteriores, também foram acrescentados conhecimentos, envolvendo as operações com incógnitas, números consecutivos, números pares, ímpares, etc..

Na figura 32 apresentam-se três exemplos de questões de nível fácil.

Figura 32 - Exemplo de questão de Nível Fácil no tópico Linguagem Matemática

Qual expressão representa um número menos trinta e seis? a) $36x$ b) $X+36$ c) $36-x$ d) $X-36$ e) $36/x$	Qual expressão representa metade de um número mais cinco? a) $2x + 5$ b) $\frac{x}{2} + 5$ c) $x+2+5$ d) $\frac{2}{x} + 5$ e) $X - 2$	Qual expressão representa quinta parte de um numero mais nove? a) $5x + 9$ b) $\frac{x}{5} - 9$ c) $\frac{x}{5} + 9$ d) $5x - 9$ e) $\frac{x}{5}$
--	--	--

Fonte: A pesquisa.

²¹ Prova Brasil – É uma avaliação Nacional do Rendimento escolar, que é um complemento ao Sistema Nacional de Avaliações da Educação Básica para o cálculo do IDEB.

²² Olimpíada Brasileira de Matemática das Escola Públicas

A figura 33 apresenta exemplos com nível de dificuldade média.

Figura 33 - Exemplo de questão de nível médio no tópico Linguagem Matemática

<p>Um número menos o sua terça parte mais vinte.</p> <p>a) $X - 3x + 20$ b) $3X + 20$ c) $X - 20$ d) $X + 20$ e) $x - \frac{x}{3} + 20$</p>	<p>Cinco dezessete avos de um número mais seis.</p> <p>a) $5 - 17 + 6$ b) $5x = 17x + 6$ c) $\frac{5x}{17} + 6$ d) $5/17 + 6$ e) $5x - 17x + 6$</p>	<p>O quántuplo de um número mais sua terça parte menos dez.</p> <p>a) $4x + 3x - 10$ b) $5x - 3x - 10$ c) $5x + \frac{1}{3} - 10$ d) $\frac{x}{5} + \frac{1}{3} - 10$ e) $5x + \frac{x}{3} - 10$</p>
--	--	---

Fonte: A pesquisa.

A figura 34 apresenta três exemplos com nível difícil.

Figura 34 - Exemplo de questões de nível difícil no tópico Linguagem Matemática

<p>Qual a expressão que representa um número somado ao seu consecutivo e ao seu triplo menos sessenta?</p> <p>a) $X + 1 + 3 - 60$ b) $X+x+1+3x - 60$ c) $X + x + 1 + 3 + 60$ d) $X+1 + 3x - 60$ e) $X - x+1 - 60$</p>	<p>Qual a expressão que representa um número dividido pela sua quinta parte mais seu o consecutivo?</p> <p>a) $x/(1/5) + 2$ b) $\frac{x}{\left(\frac{x}{5}\right)} + x + 1$ c) $x \cdot \frac{x}{5} + x + 1$ d) $\frac{x}{5} + x$ e) $x + \frac{x}{5} + x + 1$</p>	<p>Qual a expressão que representa o dobro de um número somado ao triplo da metade do seu consecutivo?</p> <p>a) $2x + 3x + x+1$ b) $2x + 3x + 4x$ c) $x + 2x + \frac{4x}{2}$ d) $2x + 3x + \frac{x}{2}$ e) $2x + 3 \cdot \left(\frac{x+1}{2}\right)$</p>
--	---	--

Fonte: A pesquisa.

3.3.2 Tópico: Qual a pergunta do problema

O objetivo desse tópico foi verificar se os alunos conseguiam interpretar a questão e diante das situações apresentadas identificavam qual a possível pergunta que o problema apresentada.

Os níveis de dificuldades nesse tópico foram marcados mais pelo tipo de texto empregado e a dificuldade da leitura e interpretação, assim, necessitando a cada nível um aprofundamento da interpretação do problema.

Na figura 35 é possível observar três questões de nível fácil.

Figura 35 - Exemplo de questão de nível fácil no tópico Qual a pergunta do problema.

<p>Aninha quis fazer uma experiência com o crescimento de plantas. Colocou um grão de feijão sobre um algodão úmido e acompanhou sua germinação. Verificou que, após começar a brotar, o pezinho de feijão cresceu 3mm no 1º dia, mais 3mm no 2º dia e também mais 3mm no 3º dia. Qual a pergunta do problema?</p> <p>a) O pé de soja terá 10mm no 5º dia? b) Que altura terá esse pé de feijão no 30º dia? c) Por que Carlinha fez a experiência? d) Quantos feijões o pé de feijão deu? e) Como houve a respiração celular do pé de feijão?</p>
--

Rodrigo comprou um guarda-roupa e uma cama no valor de R\$ 2.250,00. Como ele irá parcelar esse valor em 10 meses, a loja cobrará juro simples de 2% ao mês. Nessas condições, a pergunta do problema é:

- a) **Qual será o valor de cada parcela?**
- b) Será de 13% o desconto à vista?
- c) O parcelamento de Rodrigo será de 2 anos?
- d) O guarda roupa custa mais que a cama?
- e) A Cama será o triplo do valor do guarda-roupa?

Júnior e Luís jogam na mesma equipe de basquete de sua cidade. No último jogo dessa equipe, os dois juntos marcaram 52 pontos. Júnior marcou 10 pontos a mais que Luís. A pergunta do problema pode ser:

- a) **Quantos pontos Júnior marcou nessa partida?**
- b) Essa equipe ganhou o campeonato?
- c) Júnior foi o “cestinha” da equipe?
- d) Luís foi o jogador destaque?
- e) Júnior e Luís foram a dupla que se destacou no jogo?

Fonte: A pesquisa.

A figura 36 apresenta exemplos com nível de dificuldade média.

Figura 36- Exemplo de questão de nível médio no tópico Qual a pergunta do problema

Uma galeria vai organizar um concurso de pintura e faz as seguintes exigências:

- 1ª) A área de cada quadro deve ser 600 cm².
- 2ª) Os quadros precisam ser retangulares e a largura de cada um deve ter 10 cm a mais que a altura.

Nessas condições o problema:

- a) **Quer saber qual deve ser a altura dos quadros?**
- b) Quer saber se os quadros são retangulares?
- c) Quer saber o tamanho da sala do concurso?
- d) Quer saber o nome do pintor dos quadros?
- e) Quer saber quantas pessoas participaram do concurso?

Juca está apaixonado! Para ver a namorada, ele faz uma longa viagem: 350km a cada encontro. Em uma de suas viagens, após alguns quilômetros, ele parou para um cafezinho e ainda percorreu o triplo do que já havia percorrido para chegar à cidade de sua namorada. Qual a pergunta mais adequada para o problema em questão?

- a) Juca tomará quantos cafés?
- b) **Quantos quilômetros Juca percorrerá após o cafezinho?**
- c) Com qual carro Juca percorreu esse percurso?
- d) Qual o nome da namorada de Juca?
- e) Qual a cidade de Juca?

Vinícius procura um veículo que o ajude em seu trabalho. Para isso, fez um levantamento de preços e descobriu que um certo veículo utilitário custa R\$ 15000,00 a mais que o modelo sedan da mesma marca. Os dois veículos juntos custam R\$ 69.000,00. A partir dos dados do problema, a pergunta dele pode ser:

- a) **Quanto custa o utilitário?**
- b) O veículo sedan ajudará mais Vinícius que o utilitário?
- c) A aquisição do utilitário e do sedan geraria desconto no valor final de R\$69000,00?
- d) Em relação ao combustível, o sedan é mais econômico que o utilitário?
- e) O utilitário por ser mais caro que o Sedan teria desconto à vista?

Fonte: A pesquisa.

A figura 37 apresenta três exemplos com nível difícil.

Figura 37 - Exemplo de questão de nível difícil no tópico Qual a pergunta do problema

(PMPP1101/004- ProfessorI-2012/adaptada) Um professor instituiu uma gincana de conhecimento. A cada questão que o aluno acertava, ganhava 10 pontos e a cada questão errada, perdia 5 pontos. Um aluno que respondeu a 20 questões totalizou 65 pontos. A pergunta do problema pode ser:

- a) Qual foi a equipe vencedora?
- b) O professor organizador da gincana era de matemática?
- c) Quantas questões acertou o aluno que obteve 65 pontos?**
- d) Quantas perguntas foram feitas durante a gincana?
- e) A equipe vencedora totalizou 65 pontos?

Nos primeiros Jogos Regionais da Região Centro-Oeste, as equipes femininas de atletismo de Marília e Araçatuba somaram 377 pontos. Marília fez 31 pontos a mais que Araçatuba. A pergunta do problema pode ser:

- a) Quem venceu o campeonato?
- b) Quantos pontos fizeram as outras equipes?
- c) Quantos pontos fez a equipe masculina de atletismo?
- d) Quantos pontos fez cada equipe?**
- e) Quem venceu o campeonato de futebol?

Sandra é uma estudante que quer passar uns dias de férias em Santos. Ela está decidindo entre os hotéis Palacete I (diária completa R\$ 25,00) e Palacete II (diária completa R\$ 20,00). Calculou que se escolhesse o hotel Palacete II, mais simples, poderia ficar em Santos três dias a mais que se escolhesse o hotel Palacete I. A pergunta do problema pode ser:

- a) Quantos dias de férias Sandra tem?
- b) Quantas estrelas tem cada hotel?
- c) Qual valor Sandra tem para essas diárias?**
- d) O que o hotel Palacete I oferece a mais que o hotel Palacete II?
- e) Quantos dias Sandra pretende ficar em Santos?

Fonte: A pesquisa.

3.3.3 Tópico: Retirar dados de um problema

O objetivo deste tópico foi verificar se os alunos conseguiam extrair dos problemas os dados necessários à sua compreensão e posterior resolução.

Nesse tópico, a diferenciação entre os níveis fácil, médio e difícil deu-se em decorrência do nível de atenção e interpretação em cada questão, aumentando em cada nível a quantidade de informações para serem identificados.

Na figura 38 é possível observar três questões de nível fácil.

Figura 38 - Exemplo de questão de nível fácil no tópico Retirar dados de um problema

(TJ-SP/2009 - adaptado) Em uma biblioteca escolar, uma pilha de 50 livros tinha 1,8 de altura e era formada por livros paradidáticos iguais, de 3cm de espessura, e livros didáticos iguais, de 6 cm de espessura. A biblioteca retirou a metade dos livros didáticos da pilha para arrumá-los numa estante. O problema refere-se:

- a) ao tamanho da pilha de livros.**
- b) ao espaço da biblioteca.
- c) ao tamanho da estante.
- d) ao número de estantes.
- e) ao tamanho da biblioteca

Uma escola aplicou um provão para os alunos concluintes do 9º ano do Ensino Fundamental, contendo 50 questões de matemática e 50 questões de português. Cada aluno ganhava quatro pontos para cada resposta correta e perdia um ponto para cada resposta errada. O aluno Eduardo fez 130 pontos em matemática. O problema se refere:

- ao número de questões que Eduardo acertou em português.
- ao número de questões erradas pelos alunos.
- ao número de questões que Eduardo acertou em matemática.**
- ao número de alunos aprovados no provão.
- ao número de alunos que realizaram todas as questões.

Um pintor fez um orçamento para a pintura de uma loja no Shopping. O prazo da obra era de 20 dias com uma jornada diária de 8 horas, durante 5 dias por semana. O valor do serviço ficou em R\$ 20.000,00, já que o espaço a ser pintado era de 432 metros quadrados. O profissional avisou ao contratante que deveria comprar a tinta em lata (com 18 litros) para render mais: cada litro de tinta renderia, aproximadamente, 3 metros quadrados. O problema se refere:

- ao tempo gasto na pintura da loja.
- à quantidade de latas gastas na pintura da loja.**
- ao valor pago na pintura da loja.
- à quantidade de litros de tinta que cada lata contém.
- ao tamanho em metros quadrados da loja a ser pintada.

Fonte: A pesquisa.

A figura 39 apresenta exemplos com nível de dificuldade média.

Figura 39 - Exemplo de questão de nível médio no tópico Retirar dados de um problema

(PMES- 2009/ adaptado) Em uma padaria, dois brigadeiros mais um quindim custam R\$ 5,00. Uma pessoa comprou três brigadeiros e dois quindins e pagou R\$ 8,50 por eles. Depois ela escolheu uma cuca de abacaxi com creme e uma caixa de suco de laranja. O problema se refere:

- ao valor gasto no total das compras.
- ao valor pago pela cuca.
- ao valor pago individualmente pelo quindim e brigadeiro.**
- ao valor pago pelo suco de laranja.
- ao desconto recebido na compra dos dois últimos itens.

Com a chegada do inverno, uma avó resolveu fazer mantas para seus netinhos. Preocupada em produzir os agasalhos mais rapidamente, ela comprou linha e agulhas mais grossas, a fim de render o tricô. Suas mantas teriam tamanhos diversificados: para os netos maiores, elas seriam de 1,5 mt e para os menores, 80 cm. Nos agasalhos menores, a senhora usaria o ponto *arroz*, o qual não rende muito, 5 carreiras tricotadas por centímetro. Já nas mantas maiores, usaria o ponto *malha*, que rende 3 carreiras por centímetro. Como a avó demorava cinco minutos para fazer 8 carreiras, não demoraria muito na confecção das mantas. Se quisermos saber quantas carreiras a avó deve tricotar para completar uma manta pequena, necessitamos saber:

- quantas mantas em ponto arroz ela queria tricotar.
- em quanto tempo ela faria as mantas em ponto malha.
- quantos novelos seriam necessários para a confecção das mantas.
- qual o rendimento em carreiras do ponto arroz e qual o tamanho da manta menor.**
- qual o rendimento do ponto *malha* e o tamanho da manta menor.

Em um salão de festas há vários brinquedos. Um deles é uma piscina de bolinhas com o total de 108 bolas, distribuídas entre azuis, vermelhas e amarelas. Um menino muito curioso perguntou a seu pai quantas bolinhas vermelhas tinham no brinquedo. Ele lhe respondeu que o número de bolas azuis era o dobro das vermelhas e o das amarelas era o triplo das azuis. Então, para que o menino satisfaça sua curiosidade é necessário:

- a) saber o número total de bolinhas no brinquedo.
- b) saber o número total de bolinhas e a relação entre o número de bolas azuis e amarelas.
- c) saber o número total de bolinhas e a relação entre o número das bolinhas das três cores.**
- d) saber o número total de bolinhas e a relação entre o número de bolas azuis e vermelhas.
- e) saber o tamanho da piscina de bolinhas.

Fonte: A pesquisa.

A figura 40 apresenta três exemplos com nível difícil.

Figura 40 - Exemplo de questão de nível difícil no tópico Retirar dados de um problema

Um feirante levou para a feira três caixotes. No primeiro caixote, há laranjas e maçãs, num total de 100 frutas. O número de maçãs é $\frac{2}{3}$ do número de laranjas. No segundo caixote, há limões e no terceiro há muitos quilos de uvas. O problema se refere:

- a) à quantidade de frutas que o feirante levou à feira.
- b) à quantidade de limões no segundo caixote.
- c) à quantidade de uvas no terceiro caixote.
- d) à quantidade de maçãs e de laranjas no primeiro caixote.**
- e) à quantidade de frutas no primeiro e segundo caixotes

Em uma competição de Kart, Vinícius dá uma volta completa na pista oval em 32 segundos, enquanto Diego leva 36 segundos para completar uma volta. Ambos são pilotos experientes, mas a equipe de Diego conseguiu um excelente patrocínio nesta temporada. Se quiséssemos saber em qual volta Vinícius estará quando Diego estiver na volta de número 40, precisaremos saber:

- a) quantos segundos Vinícius demora para completar uma volta.
- b) quantos segundos Diego demora para completar uma volta.
- c) qual a diferença de tempo que os dois pilotos demoram para completar a mesma volta.**
- d) qual o tamanho da pista oval.
- e) quantas voltas foram necessárias para o término da corrida.

Descobri uma loja que estava com todos os produtos em promoção. Como recebi R\$ 500,00 de comissão, comprei uma saia e uma blusa, pagando R\$ 72,00. A saia custou R\$ 6,00 mais que a blusa. Comprei um óculos de R\$ 39,90 e um lenço de R\$ 22,00. Ganhei, então, um anel que custou 20% do valor do óculos. Se desejo saber o valor unitário pago pela saia, preciso dos seguintes dados:

- a) valor total gasto na loja.
- b) valor pago pelo óculos e pelo anel.
- c) diferença de valor pago entre o óculos e o lenço e o valor do anel.
- d) diferença de valor pago pela saia e blusa e do óculos e lenço.
- e) valor pago pela saia e blusa e diferença de valor entre esses dois itens.**

Fonte: A pesquisa.

3.3.4 Tópico: Equação do 1º grau simples

O objetivo deste tópico foi verificar se os alunos conseguiam interpretar um enunciado simples, transformá-lo em uma equação e resolver as equações do 1º grau que envolve operações básicas.

O que diferencia os níveis de dificuldade serão as operações solicitadas nos enunciados para sua interpretação.

Na figura 41 apresentam-se três exemplos de questões de nível fácil.

Figura 41 - Exemplo de questão de nível fácil no tópico Equação do 1º grau

A soma de um número com o seu triplo é igual a 48. Qual é esse número? a) 10 b) 12 c) 14 d) 16 e) 18	O dobro de um número mais 10 é igual a 56. Qual é esse número? a) 12 b) 15 c) 17 d) 21 e) 23	O quádruplo de um número, aumentado de 100, é igual a 300. Qual é esse número? a) 20 b) 30 c) 40 d) 50 e) 60
--	--	--

Fonte: A pesquisa.

A figura 42 apresenta exemplos com nível de dificuldade média.

Figura 42 - Exemplo de questão de nível médio no tópico Equação do 1º grau

Somando 5 anos ao dobro da idade de Sônia, obtemos 35 anos. Qual é a idade de Sônia? a) 5 anos b) 10 anos c) 12 anos d) 15 anos e) 35 anos	O triplo de um número, mais dois, é igual ao próprio número menos quatro. Qual é esse número? a) - 3 b) - 4 c) 3 d) 1 e) - 1	O triplo de um número, menos 25, é igual ao próprio número, mais 55. Qual é esse número? a) 10 b) - 10 c) 40 d) 20 e) - 2
--	--	---

Fonte: A pesquisa.

A figura 43 apresenta três exemplos com nível difícil.

Figura 43 - Exemplo de questão de nível difícil no tópico Equação do 1º grau

O dobro de um número, menos 10, é igual à sua metade, mais 50. Qual é esse número? a) 60 b) 20 c) 12 d) 40 e) 15	A soma de um número com seu sucessor é 71. Qual é esse número? a) 35 b) 36 c) 70 d) 71 e) 74	O triplo de um número, mais dois, é igual ao próprio número, mais 8. Esse número é: a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5
--	--	--

Fonte: A pesquisa.

3.3.5 Tópico: Equação do 1º grau elaborada

O objetivo deste tópico foi verificar se os alunos conseguiam interpretar o enunciado, montar as equações e resolver equações do 1º grau mais elaboradas, utilizando noções de matemáticas além das quatro operações.

Os níveis de dificuldades desse tópico estão centralizados na interpretação dos enunciados e na resolução das operações que envolvem as incógnitas em ambos os lados da igualdade.

Na figura 44 apresentam-se três exemplos de questões de nível fácil.

Figura 44 - Exemplo de questão de nível fácil no tópico Equação do 1º grau elaborada

<p>O triplo de um número mais 30 é igual a esse próprio número mais 70. Qual é esse número?</p> <p>a) 10 b) 12 c) 15 d) 20 e) 40</p>	<p>O dobro de um número, menos 10, é igual à sua metade, mais 50. Qual é esse número?</p> <p>1) 60 2) 20 3) 12 4) 40 5) 15</p>	<p>A diferença entre os $\frac{2}{3}$ de um número e sua metade é igual a 6. Qual é esse número?</p> <p>a) 12 b) 36 c) 72 d) 144 e) 0</p>
---	---	---

Fonte: A pesquisa.

A figura 45 apresenta exemplos com nível de dificuldade média.

Figura 45 - Exemplo de questão de nível médio no tópico Equação do 1º grau elaborada

<p>A soma de dois números inteiros e consecutivos é -31. Quais são esses números?</p> <p>a) 15 e 16 b) -19 e -12 c) -16 e -15 d) -15 e -13 e) 12 e 13</p>	<p>A soma de um número com o seu consecutivo é 25. Quais são esses números?</p> <p>a) 10 e 11 b) 11 e 14 c) 13 e 14 d) 12 e 13 e) 14 e 15</p>	<p>A soma de três números consecutivos é 156. Quais são esses números?</p> <p>a) 50, 52 e 54 b) 51, 52 e 53 c) 52, 53 e 54 d) 41, 42 e 43 e) 26, 27 e 28</p>
--	--	---

Fonte: A pesquisa.

Na figura 46 é possível observar três questões de nível difícil.

Figura 46 - Exemplo de questão de nível difícil no tópico Equação do 1º grau elaborada

<p>O quádruplo de um número menos 20 é igual ao triplo desse mesmo número mais 37. Qual é esse número?</p> <p>a) 17 b) 27 c) 57 d) 67 e) 77</p>	<p>A soma de dois números é 76. Sabe-se que o número maior é 6 unidades maior que o outro. Quais são esses números?</p> <p>a) 70 e 76 b) 35 e 41 c) 41 e 47 d) 42 e 48 e) 50 e 56</p>	<p>O quádruplo de um número mais 10 é igual ao dobro desse mesmo número menos 4. Qual é esse número?</p> <p>a) -4 b) -5 c) -7 d) 5 e) 7</p>
--	--	--

Fonte: A pesquisa.

3.3.6 Tópico: Problemas simples

O objetivo deste tópico foi verificar se os alunos eram capazes de transpor da linguagem materna para a linguagem matemática, encontrando as equações, e se conseguiam resolver essas situações-problema que envolvem os conhecimentos algébricos básicos, resolvendo equações do 1º grau consideradas simples.

Os níveis nesse tópico foram determinados por enunciados curtos, diferenciando nos tipos de interpretação e nas equações encontradas para a resolução.

Na figura 47 apresentam-se três exemplos de questões de nível fácil.

Figura 47 - Exemplo de questão de nível fácil no tópico Problemas simples

<p>Somando 5 anos ao dobro da idade de Sônia, obtemos 35 anos. Qual é a idade de Sônia?</p> <p>a) 5 anos b) 10 anos c) 12 anos d) 15 anos e) 35 anos</p>
<p>Em uma fábrica, um terço dos empregados são estrangeiros e 72 empregados são brasileiros. Quantos são os empregados da fábrica?</p> <p>a) 36 b) 72 c) 108 d) 96 e) 80</p>
<p>A metade dos objetos de uma caixa mais a terça parte desses objetos é igual a 25. Quantos objetos há na caixa?</p> <p>a) 12,5 b) 30 c) 15 d) 10 e) 21,5</p>

Fonte: A pesquisa.

A figura 48 apresenta exemplos com nível de dificuldade média.

Figura 48 - Exemplo de questão de nível médio no tópico Problemas simples

<p>Foram distribuídos 28 lápis entre 3 meninos, de modo que o segundo recebeu a metade do que recebeu o primeiro e o dobro do que recebeu o terceiro. Quantos lápis recebeu cada menino?</p> <p>a) 10, 12 e 6 b) 20, 10 e 5 c) 18, 9 e 3 d) 16, 8 e 2 e) 16, 8 e 4</p>

O perímetro de um triângulo é 12 cm e as medidas dos lados são números consecutivos. Então, o menor lado mede:

- a) **3 cm**
- b) 4 cm
- c) 2 cm
- d) 5 cm
- e) 12 cm

Ari e Rui têm juntos R\$ 840,00. A quantia de Ari é igual a $\frac{3}{4}$ da quantia de Rui. Logo, Rui tem:

- a) R\$ 360,00
- b) R\$ 420,00
- c) **R\$ 480,00**
- d) R\$ 630,00
- e) R\$ 720,00

Fonte: A pesquisa.

A figura 49 apresenta três exemplos com nível difícil.

Figura 49 - Exemplo de questão de nível difícil no tópico Problemas simples

Numa escola de 1350 alunos, o número de alunos do 1º grau é o quádruplo do número de alunos do 2º grau. Quantos são os alunos do 2º grau?

- a) **270**
- b) 1080
- c) 540
- d) 1350
- e) 200

Mariângela possui R\$ 49,00. Com essa quantia ela pode vir três vezes ao cinema e ainda lhe restarão R\$ 16,00. Qual o valor do ingresso do cinema?

- a) **R\$ 11,00**
- b) R\$ 16,00
- c) R\$ 33,00
- d) R\$ 3,00
- e) R\$ 6,00

Quando Eduardo nasceu, seu pai tinha 35 anos. A soma de suas idades atuais é 65 anos. Qual a idade de Eduardo?

- a) **15 anos**
- b) 30 anos
- c) 12 anos
- d) 22 anos
- e) 20 anos

Fonte: A pesquisa.

3.3.7 Tópico: Problemas elaborados

O objetivo deste tópico foi verificar se os alunos possuem a habilidade de transcrever da linguagem materna para a linguagem matemática, resolvendo as situações-problema, cuja modelagem envolvam conhecimentos algébricos, resolvendo equações do 1º grau com qualquer tipo de operações matemáticas.

Nesse tópico, os níveis de dificuldades foram estabelecidos por dois critérios:

1º a interpretação dos enunciados, indo do nível fácil, com textos de fácil interpretação, até o nível difícil com interpretações mais apuradas.

2º os tipos de operações envolvidas e de conhecimentos matemáticos necessários para sua resolução.

Na figura 50 apresentam-se três exemplos de questões de nível fácil.

Figura 50 - Exemplo de questão de nível fácil no tópico Problemas Elaborados

<p>A idade de um pai é igual à idade ao triplo da idade de seu filho. Calcule essas idades, sabendo que juntos tem 60 anos.</p> <p>a) Pai 50 anos e filho 10 anos b) Pai 55 anos e filho 5 anos c) Pai 45 anos e filho 15 anos d) Pai 40 anos e filho 20 anos e) Pai 60 anos e filho 20 anos</p>
<p>Num estacionamento há carros e motos, totalizando 78. O número de carro é igual a 5 vezes o de motos. Quantas motos há no estacionamento?</p> <p>a) 80 b) 50 c) 23 d) 13 e) 10</p>
<p>Numa partida de basquete as duas equipes fizeram um total de 145 pontos. A equipe A fez o dobro de pontos, menos 5, que a equipe B. Então, a equipe A marcou:</p> <p>a) 45 pontos b) 50 pontos c) 90 pontos d) 92 pontos e) 95 pontos</p>

Fonte: A pesquisa.

Na figura 51 é possível observar três questões de nível médio.

Figura 51- Exemplo de questão de nível médio no tópico Problemas Elaborados

<p>Uma escola recebeu 1350 matrícula para o 7, 8 e 9 anos em 2015. Foram 420 para o sétimo ano e para o oitavo ano o dobro de matrículas do nono ano. Quantos alunos se matricularam em cada série?</p> <p>a) 300 alunos no sétimo ano, 600 alunos no oitavo ano e 450 alunos no nono ano b) 350 alunos no sétimo ano, 610 alunos no oitavo ano e 420 alunos no nono ano c) 310 alunos no sétimo ano, 620 alunos no oitavo ano e 420 alunos no nono ano d) 420 alunos no sétimo ano, 310 alunos no oitavo ano e 620 alunos no nono ano e) 620 alunos no sétimo ano, 420 alunos no oitavo ano e 310 alunos no nono ano</p>
<p>Hélio tinha certa quantia e foi ao shopping. Lá gastou $\frac{1}{3}$ da quantia na compra de um livro, gatou $\frac{1}{4}$ da quantia na compra de um CD e ainda ficou com R\$ 25,00. Qual é a quantia que Hélio tinha?</p> <p>a) R\$ 300,00 b) R\$ 60,00 c) R\$ 90,00 d) R\$ 120,00 e) R\$ 150,00</p>

Num caixote há laranjas e maçãs num total de 100 frutas. O número de maçãs é $\frac{2}{3}$ do número de laranjas. Quantas maçãs e quantas laranjas há no caixote?

- a) **40 maçãs e 60 laranjas**
- b) 60 maçãs e 40 laranjas
- c) 30 maçãs e 70 laranjas
- d) 70 maçãs e 30 laranjas
- e) 50 maçãs e 50 laranjas

Fonte: A pesquisa.

A figura 52 apresenta três exemplos com nível difícil.

Figura 52 - Exemplo de questão de nível difícil no tópico Problemas Elaborados

Otávio arranhou um segundo emprego, mas estava com dificuldades de comparecer todos os dias (inclusive sábados e domingos) ao novo trabalho. Seu patrão muito bonzinho, fez-lhe a seguinte proposta: ele receberia um salário de R\$ 300,00 sendo que, após a 6ª falta, pagaria uma multa de R\$ 2,00 para cada dia ausente. Após 30 dias, Otávio recebeu R\$ 270,00, o que revela que ele trabalhou, nesse emprego:

- a) 15 dias
- b) 13 dias
- c) 11 dias
- d) **9 dias**
- e) 21 dias

Em uma sala há três lâmpadas iguais, um televisor e um aparelho de ar condicionado. A TV consome $\frac{1}{3}$ dos quilowatt-hora (kwh) que uma das lâmpadas consome. O aparelho de ar condicionado consome 15 vezes o que consome uma lâmpada. Quando está todos ligados ao mesmo tempo, o consumo total é de 1100 kwh. Portanto, o televisor consome:

- a) 22 kw/h
- b) **20 kw/h**
- c) 18 kw/h
- d) 16 kw/h
- e) 14 kw/h

Silvio alugou um carro na Agência X por R\$ 280,00, acrescido de R\$ 3,00 por km rodado. Pedro alugou, na agência Y, por R\$ 400,00, acrescido de R\$ 1,00 por km rodado. Para que os dois tenham o mesmo gasto, a distância percorrida por eles deverá ser de:

- a) 72 km
- b) **60 km**
- c) 68 km
- d) 50 km
- e) 70 km

Fonte: A pesquisa.

3.3.8 Tópico: Sistemas de equações

O objetivo deste tópico foi verificar se os alunos conseguiam identificar as equações que formam os sistemas de equações com uma ou duas incógnitas de acordo com o problema apresentado.

O nível de dificuldade foi determinado de acordo com o tipo de problema que possuímos (tipo de interpretação) e com as operações envolvidas.

Na figura 53 apresentam-se três exemplos de questões de nível fácil.

Figura 53 - Exemplo de questão de nível fácil no Sistema de equações do 1º grau

<p>Num estacionamento há carros e motos, totalizando 78. O número de carro é igual a 5 vezes o de motos. Quantas motos há no estacionamento?</p> <p>a) $\begin{cases} x + y = 78 \\ x = 5y \end{cases}$</p> <p>b) $\begin{cases} x + y = 78 \\ x + 5y = 0 \end{cases}$</p> <p>c) $\begin{cases} x = y \\ x + 5y = 78 \end{cases}$</p> <p>d) $\begin{cases} x + y = 78 \\ 5x = y \end{cases}$</p> <p>e) $\begin{cases} x = 78 + y \\ 5 + x = y \end{cases}$</p>	<p>A soma da idade de Flávia e de Silva é 21 anos. A idade de Sílvia é $\frac{3}{4}$ da idade de Flávia, quantos anos tem cada uma?</p> <p>a) $\begin{cases} F = S + 21 \\ S = 3.4.F \end{cases}$</p> <p>b) $\begin{cases} F + S = 21 \\ S = \frac{3}{4}.F \end{cases}$</p> <p>c) $\begin{cases} F + S = 21 \\ F = \frac{3}{4}S \end{cases}$</p> <p>d) $\begin{cases} S + F = 21 \\ 3.S = 4.F \end{cases}$</p> <p>e) $\begin{cases} F + S = \frac{3}{4} \\ S + 21 = F \end{cases}$</p>	<p>Eu tenho 20 cédulas, algumas de R\$ 5,00 e outras de R\$ 10,00. O valor total de cédulas é de R\$ 165,00. Quantas cédulas de R\$ 5,00 e quantas de R\$ 10,00 eu tenho?</p> <p>a) $\begin{cases} A + B = 165 \\ 4A + 5B = 20 \end{cases}$</p> <p>b) $\begin{cases} A + B = 20 \\ 5A + B = 165 \end{cases}$</p> <p>c) $\begin{cases} A + B = 20 \\ 5A + 10B = 165 \end{cases}$</p> <p>d) $\begin{cases} 2A + B = 20 \\ A + 10B = 165 \end{cases}$</p> <p>e) $\begin{cases} A + B = 65 \\ 2A + 10B = 20 \end{cases}$</p>
---	--	---

Fonte: A pesquisa.

A figura 54 apresenta exemplos com nível de dificuldade média.

Figura 54 - Exemplo de questão de nível médio no Sistema de equações do 1º grau

<p>Num pátio existem automóveis e bicicletas. O número total de rodas é 130, e o número de bicicletas é o triplo do número de automóveis. Qual é o número de automóveis e bicicletas que se encontram no pátio?</p> <p>a) $\begin{cases} A + B = 130 \\ A = 3B \end{cases}$</p> <p>b) $\begin{cases} 4A + 2B = 130 \\ A + B = 40 \end{cases}$</p> <p>c) $\begin{cases} A + B = 130 \\ A + B = 3A \end{cases}$</p> <p>d) $\begin{cases} 4A + 2B = 130 \\ B = 3A \end{cases}$</p> <p>e) $\begin{cases} 4A + 2B = 30 \\ B = 3A \end{cases}$</p>	<p>Paga-se um produto com R\$ 180,00 com cédulas de R\$ 5,00 e de R\$ 10,00. Se o número total de cédulas é 23, então necessariamente foi pago com:</p> <p>a) $\begin{cases} C + D = 180 \\ 5C + D = 23 \end{cases}$</p> <p>b) $\begin{cases} 5C + 10D = 180 \\ C + 2D = 20 \end{cases}$</p> <p>c) $\begin{cases} 5C + 10D = 23 \\ C + D = 180 \end{cases}$</p> <p>d) $\begin{cases} C + D = 80 \\ 5C + 10D = 23 \end{cases}$</p> <p>e) $\begin{cases} 5C + 10D = 180 \\ C + D = 23 \end{cases}$</p>	<p>Nos primeiros Jogos Regionais da Região Centro-Oeste, as equipes femininas de atletismo de Marília e Araçatuba somaram 377 pontos. Marília fez 31 pontos a mais que Araçatuba. Quantos pontos fez cada equipe?</p> <p>a) $\begin{cases} M + A = 377 \\ M = A + 31 \end{cases}$</p> <p>b) $\begin{cases} M + A = 31 \\ M = A + 377 \end{cases}$</p> <p>c) $\begin{cases} M + A = 377 \\ M = 3A + 31 \end{cases}$</p> <p>d) $\begin{cases} M = 377 - A \\ M + A = 31 \end{cases}$</p> <p>e) $\begin{cases} M + A = 31 \\ M - A = 377 \end{cases}$</p>
---	---	---

Fonte: A pesquisa.

A figura 55 apresenta três exemplos com nível difícil.

Figura 55 - Exemplo de questão de nível difícil no Sistema de equações do 1º grau

<p>Quatro camisetas e cinco calções custam R\$ 105,00. Cinco camisetas e sete calções custam R\$ 138,00. Qual é o preço de cada peça?</p> <p>a) $\begin{cases} 4C + 5K = 105 \\ 5C + 7K = 138 \end{cases}$</p> <p>b) $\begin{cases} C + K = 78 \\ C + 5K = 10 \end{cases}$</p> <p>c) $\begin{cases} C + 5K = 138 \\ 5C + 7K = 105 \end{cases}$</p> <p>d) $\begin{cases} C + K = 78 \\ 5C = K \end{cases}$</p> <p>e) $\begin{cases} C = 138 + K \\ 5C + K = 105 \end{cases}$</p>	<p>Um tomate e um pepino pesam juntos 140 gr. Para fazer o equilíbrio da balança é preciso colocar 5 tomates de um lado e 2 pepinos do outro. Quanto pesa um tomate? E um pepino?</p> <p>a) $\begin{cases} T + P = 140 \\ P = 5T \end{cases}$</p> <p>b) $\begin{cases} T + P = 140 \\ 5T = 2P \end{cases}$</p> <p>c) $\begin{cases} T = P \\ T + 5P = 140 \end{cases}$</p> <p>d) $\begin{cases} T + P = 140 \\ T = 2P \end{cases}$</p> <p>e) $\begin{cases} 5T = 2P \\ T + P = 14 \end{cases}$</p>	<p>(UNAQ – 2011) – Certo dia, uma lanchonete vendeu 16 copos de suco de laranja e 14 copos de suco de abacaxi, recebendo, por isso, um total de R\$ 67,00. Uma pessoa comprou um copo de suco de cada tipo, pagando, no total, R\$ 4,50. Então, a diferença entre o preço dos copos de suco é de</p> <p>a) $\begin{cases} L + A = 7,80 \\ L + 4A = 6,70 \end{cases}$</p> <p>b) $\begin{cases} 16L + 14A = 6,70 \\ L + A = 45,00 \end{cases}$</p> <p>c) $\begin{cases} 16L + 14A = 67,00 \\ L + A = 4,50 \end{cases}$</p> <p>d) $\begin{cases} L + A = 67,00 \\ 16L + 14A = 4,50 \end{cases}$</p> <p>e) $\begin{cases} 16L + 14A = 67,00 \\ L + A = 0,45 \end{cases}$</p>
--	---	---

Fonte: A pesquisa.

3.3.9 Tópico: Resolver Sistemas de equações simples

O objetivo deste tópico foi identificar em um sistema de equações os elementos envolvidos em uma equação, resolvendo os sistemas e identificando os elementos algébricos presentes na atividade.

O nível de dificuldade solicitado neste tópico está relacionado ao enunciado, às operações envolvidas e à interpretação realizada pelo aluno.

Na figura 56 apresentam-se três exemplos de questões de nível fácil.

Figura 56 - Exemplo de questão de nível fácil no tópico Resolver Sistema de equações simples

<p>Um motorista quer fazer uma viagem de 780 km em duas etapas, de modo que na primeira etapa percorra 60 km a mais que na segunda. Quantos quilômetros ele deverá percorrer em cada etapa?</p> <p>a) 360 km e 420 km</p> <p>b) 300 km e 380 km</p> <p>c) 320 km e 380 km</p> <p>d) 500 km e 560 km</p> <p>e) 300 km e 360 km</p>
--

Dois irmãos têm 32 e 8 anos respectivamente. Quantos anos faltam para que a idade do mais velho seja o triplo da idade do mais novo?

- a) 8 anos
- b) 6 anos
- c) 4 anos**
- d) 2 anos
- e) 1 ano

Somando-se o número de habitantes de Macatuba ao de Lençóis Paulista, obtém-se 88.000 habitantes. A população de Lençóis é o triplo da de Macatuba. Quantos habitantes tem cada cidade?

- a) Lençóis 22.000 habitantes e Macatuba 44.000 habitantes
- b) Lençóis 66.000 habitantes e Macatuba 22.000 habitantes**
- c) Lençóis 22.000 habitantes e Macatuba 66.000 habitantes
- d) Lençóis 14.000 habitantes e Macatuba 45.000 habitantes
- e) Lençóis 45.000 habitantes e Macatuba 15.000 habitantes

Fonte: A pesquisa.

A figura 57 apresenta exemplos com nível de dificuldade média.

Figura 57 - Exemplo de questão de nível médio no tópico Resolver Sistema de equações simples

Num pátio existem automóveis e bicicletas. O número total de rodas é 130, e o número de bicicletas é o triplo do número de automóveis. Qual é o número de automóveis e bicicletas que se encontram no pátio?

- a) 10 automóveis e 30 bicicletas
- b) 11 automóveis e 33 bicicletas
- c) 12 automóveis e 36 bicicletas
- d) 13 automóveis e 39 bicicletas**
- e) 14 automóveis e 42 bicicletas

Foram distribuídos 28 lápis entre 3 meninos, de modo que o segundo recebeu a metade do que recebeu o primeiro e o dobro do que recebeu o terceiro. Quantos lápis recebeu cada menino?

- a) 10, 12 e 6
- b) 20, 10 e 5
- c) 18, 9 e 3
- d) 16, 8 e 2
- e) 16, 8 e 4**

Distribua 580 laranjas em duas caixas, de modo que uma delas contenha 140 laranjas a menos do que a outra

- a) 280 laranjas e 300 laranjas
- b) 320 laranjas e 260 laranjas
- c) 360 laranjas e 220 laranjas**
- d) 380 laranjas e 200 laranjas
- e) 500 laranjas e 80 laranjas

Fonte: A pesquisa.

A figura 58 apresenta três exemplos com nível difícil.

Figura 58 - Exemplo de questão de nível difícil no tópico Resolver Sistema de equações simples

Numa urna contém bolas azuis, bolas vermelhas e bolas amarelas. Ela contém ao todo 108 bolas. O número das azuis é o dobro das vermelhas e o número das amarelas é o triplo das azuis. Quantas bolas de cada cor existem na urna?

- a) 12 azuis, 24 vermelhas e 72 amarelas
- b) 24 azuis, 12 vermelhas e 72 amarelas**
- c) 20 azuis, 10 vermelhas e 68 amarelas
- d) 25 azuis, 12 vermelhas e 75 amarelas
- e) 30 azuis, 15 vermelhas e 90 amarelas

Em uma partida de videogame, Tiago conseguiu 160 pontos em três rodadas. Na 2ª rodada, ele fez 20 pontos a menos que na 1ª e na 3ª rodada ele fez o dobro de pontos feitos na 2ª. Quantos pontos Tiago fez em cada rodada?

- a) 1ª rodada 50 pontos, 2ª rodada 40 pontos e 3ª rodada 80 pontos
- b) 1ª rodada 70 pontos, 2ª rodada 35 pontos e 3ª rodada 70 pontos
- c) 1ª rodada 55 pontos, 2ª rodada 35 pontos e 3ª rodada 70 pontos**
- d) 1ª rodada 55 pontos, 2ª rodada 40 pontos e 3ª rodada 80 pontos
- e) 1ª rodada 50 pontos, 2ª rodada 30 pontos e 3ª rodada 60 pontos

Num depósito existem 24 extintores de incêndio, sendo de espuma química e dióxido de carbono. Sabendo-se que o dióxido de carbono é o triplo do de espuma química, conclui-se que o número de extintores de espuma química existentes nesse depósito é:

- 0) 3
- 1) 4
- 2) 5
- 3) 6**
- 4) 7

Fonte: A pesquisa.

3.3.10 Tópico: Resolver sistemas de equações elaboradas

O objetivo deste tópico foi resolver situações problemas envolvendo sistemas de equações do 1º grau, resolvendo através de sistemas com duas incógnitas, seja pelo processo de adição ou isolamento da incógnita.

Nível de dificuldade está diretamente relacionado:

- 1º) à interpretação do problema, ou seja, à quantidade de texto empregado;
- 2º) à resolução propriamente dita do sistema de equações, por envolver duas incógnitas.

Na figura 59 é possível observar três questões de nível fácil.

Figura 59 - Exemplo de questão de nível fácil no tópico Resolver Sistema de Equações elaboradas

Ari e Rui têm juntos R\$ 840,00. A quantia de Ari é igual a $\frac{3}{4}$ da quantia de Rui. Logo, Rui tem:

- a) R\$ 360,00
- b) R\$ 420,00
- c) R\$ 480,00**
- d) R\$ 630,00
- e) R\$ 720,00

A idade de um pai é igual ao triplo da idade de seu filho. Calcule essas idades, sabendo que juntos têm 60 anos.

- a) Pai 50 anos e filho 10 anos
- b) Pai 55 anos e filho 5 anos
- c) Pai 45 anos e filho 15 anos**
- d) Pai 40 anos e filho 20 anos
- e) Pai 60 anos e filho 20 anos

Um tomate e um pepino pesam juntos 140 gr. Para fazer o equilíbrio da balança é preciso colocar 5 tomates de um lado e 2 pepinos do outro. Quanto pesa um tomate? E um pepino?

a) **Tomate 40 gr e pepino 100 gr**
 b) Tomate 60 gr e pepino 80 gr
 c) Tomate 80 gr e pepino 60 gr
 d) Tomate 100 gr e pepino 40 gr
 e) Tomate 50 gr e pepino 90 gr

Fonte: A pesquisa.

A figura 60 apresenta exemplos com nível de dificuldade média.

Figura 60 - Exemplo de questão de nível médio no tópico Resolver Sistema de Equações elaboradas

Eu tenho 20 cédulas, algumas de R\$ 5,00 e outras de R\$ 10,00. O valor total de cédulas é de R\$ 165,00. Quantas cédulas de R\$ 5,00 e quantas de R\$ 10,00 eu tenho?

a) 1 nota de R\$ 5,00 e 16 notas de R\$ 10,00
 b) 5 notas de R\$ 5,00 e 14 notas de R\$ 10,00
 c) **7 notas de R\$ 5,00 e 13 notas de R\$ 10,00**
 d) 9 notas de R\$ 5,00 e 11 notas de R\$ 10,00
 e) 10 notas de R\$ 5,00 e 10 notas de R\$ 10,00

Paga-se um produto com R\$ 180,00 com cédulas de R\$ 5,00 e de R\$ 10,00. Se o número total de cédulas é 23, então necessariamente foi pago com:

a) **10 cédulas de R\$ 5,00**
 b) 12 cédulas de R\$ 5,00
 c) 13 cédulas de R\$ 5,00
 d) 14 cédulas de R\$ 5,00
 e) 15 cédulas de R\$ 5,00

(UMC – SP) Deseja-se cortar uma tira de couro de 120 cm de comprimento, em duas partes tais que o comprimento de uma seja igual ao triplo da outra. A parte maior mede:

a) 75 cm
 b) 80 cm
 c) 85 cm
 d) **90 cm**
 e) 95 cm

Fonte: Banco de dados do SIENA.

A figura 61 apresenta três exemplos com nível difícil.

Figura 61 - Exemplo de questão de nível difícil no tópico Resolver Sistema de Equações elaboradas

(UNAQ – 2011) – Certo dia, uma lanchonete vendeu 16 copos de suco de laranja e 14 copos de suco de abacaxi, recebendo, por isso, um total de R\$ 67,00. Uma pessoa comprou um copo de suco de cada tipo, pagando, no total, R\$ 4,50. Então, a diferença entre o preço dos copos de suco é

a) **R\$ 0,50**
 b) R\$ 0,70
 c) R\$ 1,00
 d) R\$ 1,20
 e) R\$ 1,50

(TJSP – 2006) – Numa fazenda há ovelhas e avestruzes, totalizando 90 cabeças e 260 patas. Comparando-se o número de avestruzes com o das ovelhas, pode-se afirmar que há

a) igual número de ovelhas e de avestruzes.
 b) dez cabeças a mais de ovelhas.
 c) **dez cabeças a mais de avestruzes.**
 d) oito cabeças a mais de ovelhas.
 e) oito cabeças a mais de avestruzes

(CTSB – 2009) – Dois amigos foram juntos ao supermercado para comprar vinhos. Um deles comprou 3 garrafas do vinho A e 2 do vinho B, pagando o total de R\$ 79,00. O outro comprou 5 garrafas do vinho A e 1 do vinho B, pagando o total de R\$ 92,00. Pode-se concluir que 1 garrafa do vinho A custa, em relação a 1 garrafa do vinho B,

- a) a metade.
- b) o dobro.
- c) o mesmo valor.
- d) R\$ 2,00 a mais.
- e) **R\$ 2,00 a menos.**

Fonte: A pesquisa.

3.4 EXECUÇÃO DO TESTE PILOTO

Foi realizado este teste piloto, a fim de realizar o teste do banco de dados do SIENA, como a parte de tecnologia da escola. Logo após foi escrito um artigo sobre os dados levantados no teste-piloto e apresentado na escola de inverno da UFSM.

O teste piloto foi realizado em 3 horas aula, buscando qualificar os testes a serem aplicados. Foi realizado em 9 alunos da Escola estadual de Ensino Médio Professor Julio Grau do município de Porto Alegre, em maio de 2016.

No primeiro momento, foi realizada uma conversa com a turma sobre a importância do interesse e motivação na participação dessa pesquisa e da importante contribuição de cada estudante para fins pedagógicos que ela teria, tanto para o pesquisador quanto para a escola, buscando demonstrar que isso reverteria na aprendizagem desses estudantes.

A partir do aceite por parte dos alunos, bem como da professora regente, com o recolhimento das autorizações para utilização de imagens assinadas pelos pais (Apêndice A), procedeu-se aos teste-piloto. Esses testes foram realizados no laboratório antigo²³ da instituição com computadores desktop, sendo 6 com sistema operacional Windows e 3 com o sistema operacional Linux Educacional.

Os estudantes nos testes-piloto resolveram seis tópicos: linguagem matemática, qual a pergunta do problema, equação do primeiro grau simples, equação do primeiro grau elaborada, problemas simples e problemas elaborados.

²³ Durante o ano letivo de 2016 foi realizada a troca de ambiente do laboratório de informática, saindo do seu antigo local, onde haviam 19 computadores de mesa, *desktops*, para uma sala mais ampla, onde há além dos 19 computadores de mesa, tem-se 35 *netbook*, dois pontos de *wi-fi* e toda rede lógica de dados com duas entradas de internet.

Após a aplicação desses testes, observou-se a necessidade de uma readequação da rede lógica da escola, bem como do servidor da ULBRA (onde está hospedado o SIENA). Também foi reorganizada a logística de aplicação, uma vez que o número de alunos seria maior, fazendo com que os testes definitivos acontecessem a partir de junho desse mesmo ano.

Observou-se que as questões estavam adequadas.

3.5 EXECUÇÃO DOS TESTES DO EXPERIMENTO

Após todos os ajustes efetuados e já com o novo laboratório de informática da escola em funcionamento, iniciou-se a execução dos testes definitivos, os quais também aconteceram na própria sala de aula da turma, uma vez que foi reestruturada a rede *wifi* e disponibilizados 30 *netbooks* (também usados como *tablets* por eles). As aplicações aconteceram em cinco dias letivos: 24/06; 08/07; 12/07; 14/07 e 15/07 do ano de 2016.

Em cada dia, foi disponibilizado para cada aluno um *netbook* e um diário de campo dos estudantes de 10 páginas (Apêndice C). Em cada página desse material observava-se um tópico do grafo para a resolução das atividades na mesma ordem da apresentada pelo sistema, mas que poderia ser modificada, conforme a escolha do aluno. Foi informado, também, sobre a possibilidade de executar o teste na plataforma *android*, escolhida por dois alunos.

Antes dos alunos começarem seus testes, foi explicado o funcionamento da plataforma SIENA, bem como informado que os testes seriam individuais, sem consulta aos colegas e sem a utilização de calculadoras. Também foi-lhes dito que, ao término de cada teste, eles poderiam verificar seu desempenho e, se quisessem, refazer aqueles que não tivessem alcançado o objetivo.

Concomitante à execução dos testes, foi realizado o registro por meio de fotos e filmagens. Além disso, o pesquisador teve o acompanhamento de um aluno bolsista da ULBRA, do grupo de pesquisa GECM²⁴, o qual lhe auxiliava nas questões referentes às dúvidas dos alunos sobre o sistema e sobre a conexão com o servidor.

²⁴ Grupo de Estudos Curriculares em Educação Matemática da ULBRA

Foram utilizados dez períodos de aula, distribuídos em cinco dias. A cada novo encontro, era entregue o mesmo diário de campo dos estudantes, a fim de que continuassem de onde tinham parado no dia anterior.

No último encontro, foi lembrado que, após análise dos resultados e identificadas as possíveis dificuldades, o aplicador trabalharia com a turma ainda no nono ano; portanto, antes de seu ingresso no Ensino Médio.

3.6 RETORNO DOS RESULTADOS DOS TESTES AOS ALUNOS

No dia 24 de novembro do ano de 2016, foi realizada uma aula com os alunos do nono ano participantes do experimento, quando o pesquisador utilizou 2 períodos de 50 minutos para dar-lhes o retorno dos resultados dos testes.

Primeiramente, foi explicado aos alunos, na prática, a funcionalidade do sistema SIENA, como o sistema procede à montagem dos testes para cada aluno e foi feita a análise do banco de dados de seus resultados, explicando por que pode-se chegar a resultados parecidos mesmo com o número de questões diferentes e como foi feita a análise desses resultados pelo pesquisador e como esses dados seriam apresentados.

Na sequência, foi mostrado o banco de questões no SIENA e explicado para os alunos quais os objetivos que se esperava alcançar em cada tópico e quais os objetivos foram alcançados. Foram utilizadas três questões de cada nível dentro de cada tópico para ser realizada a resolução com os alunos, resolução essa explicativa, lembrando o objetivo, observando o porquê de certas respostas poderem ser consideradas absurdas e outras que eles possam ter marcado, identificando seus possíveis erros de análise e interpretação.

No final foi realizado um debate sobre esses testes e relacionando cada tópico aos tópicos com os conteúdos em que eles terão necessidade de utilizá-los no Ensino Médio. Após foi solicitado que eles respondessem duas perguntas:

- 1) O que você achou destes testes, frente ao seu posicionamento e percepções?
- 2) O que você achou deste momento de retorno dado pelo pesquisador?

4 ANÁLISE DA INVESTIGAÇÃO

Neste capítulo, apresentam-se os instrumentos empregados na investigação, os dados coletados e a análise e discussão dos mesmos.

4.1 ANÁLISE DO BANCO DE DADOS DO SIENA E DOS REGISTROS DOS ALUNOS

Em cada tópico do grafo foi elaborado um banco de questões, com 45 problemas, envolvendo álgebra elementar e problemas, que na sua resolução envolvem os conteúdos já referidos. As questões consideradas fáceis são as que, na resolução, exigem aplicação direta de um algoritmo envolvendo as quatro operações; as questões médias necessitam que o aluno tenha, para a resolução, compreensão mais aprofundada dos conceitos algébricos, envolvendo mais de uma ação, por exemplo, aplicação de um algoritmo e linguagem algébrica, necessitando de leitura e interpretação mais detalhada. As questões difíceis necessitam que o aluno tenha compreensão aprofundada, tanto referente à leitura e interpretação, como à análise dos dados da resolução de problemas.

As questões propostas, no SIENA, são de múltipla escolha e foram definidas como índices: 0,30 para questões do nível fácil, 0,35 para questões médias e 0,40 para questões no nível difícil. O estudante será considerado apto quando conseguir a nota 0,6 no intervalo de $[0,1]$.

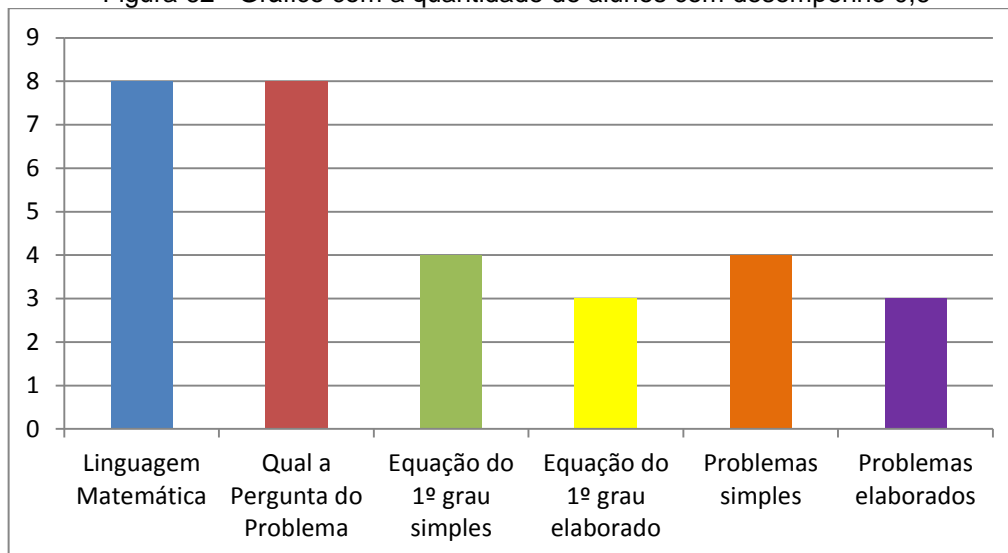
4.2 ANÁLISE DE DADOS DO TESTE- PILOTO

Para o teste-piloto foram utilizados os seguintes conceitos e habilidades: Uso adequado da Linguagem Matemática; Identificação da pergunta do problema; Resolução de equações do 1º grau simples; Resolução de equações do 1º grau elaboradas- que apresentam parênteses, frações; Resolução de problemas simples que para a resolução envolvem equações do 1º grau simples; Resolução de problemas que para a resolução envolvem equações do 1º grau complexas. Os

estudantes necessitaram de 3 horas aula para resolver os testes propostos, que ocorreram no mês de maio de 2016.

A seguir a figura 62 mostra o desempenho dos alunos no teste- piloto.

Figura 62 - Gráfico com a quantidade de alunos com desempenho 0,6



Fonte: A pesquisa.

Dos nove estudantes participantes do experimento piloto, oito conseguiram avaliação positiva, nota superior a 0,6, nos seguintes tópicos: identificar qual é a pergunta do problema e linguagem matemática. Os testes realizados tiveram em média 14 questões e os estudantes levaram em torno de 50 segundos para resolver cada questão.

Salienta-se que no SIENA cada teste é diferente, os estudantes são avaliados de acordo com suas habilidades: se acertam uma questão fácil, passam para uma questão média; se erram a média, voltam para uma fácil e seguem até o sistema conseguir identificar o nível de proficiência do estudante. As questões são escolhidas aleatoriamente pelo sistema, podendo iniciar um teste com questões de qualquer nível de dificuldade.

A seguir, apresenta-se o exemplo de um teste de um estudante no tópico linguagem matemática.

Figura 63 - Exemplo de um teste adaptativo de um aluno no teste piloto

Acabado: true
Nota: 0.996

#	Resposta	Respuesta correcta	Tiempo(antes de que se acabe)	Pregunta	Dificultad / Adivinanza	Puntos antes	Puntos después
0	2	true	227	Qual expressão representa terça parte de um número menos doze?	0.3 / 0.2	0.10000	0.28000
1	3	false	217	Qual expressão que representa o triplo de um número mais a quinta parte do número mais três?	0.35 / 0.2	0.28000	0.14540
2	0	false	218	Qual a expressão que representa um número menos trinta e seis?	0.3 / 0.2	0.14540	0.05998
3	2	false	231	Qual expressão representa um número mais duzentos e três?	0.3 / 0.2	0.05998	0.02337
4	2	true	109	Qual a expressão que representa trinta e seis menos cinco terços de um número?	0.3 / 0.2	0.02337	0.07727
5	4	true	111	Qual a expressão que representa o quádruplo de um número mais sua terça parte menos dez?	0.35 / 0.2	0.07727	0.21393
6	2	false	228	Qual a expressão que representa o dobro de um número somado ao triplo da metade do seu consecutivo?	0.4 / 0.2	0.21393	0.11978
7	0	true	112	Qual expressão representa três quartos de um número somado a sessenta?	0.35 / 0.2	0.11978	0.30664
8	0	false	205	Qual a expressão que representa o dobro do antecessor de um número menos vinte?	0.4 / 0.2	0.30664	0.18108
9	0	false	232	Qual a expressão que representa o triplo de um número mais a sua sexta parte mais vinte e sete?	0.35 / 0.2	0.18108	0.08821
10	3	true	235	Qual expressão representa um número mais cinquenta?	0.3 / 0.2	0.08821	0.25295
11	0	true	234	Qual a expressão que representa a sexta parte de um número mais o seu triplo?	0.35 / 0.2	0.25295	0.52391
12	0	true	232	Qual a expressão que representa um número subtraído do seu triplo e somado ao seu consecutivo?	0.4 / 0.2	0.52391	0.76751
13	4	true	230	Qual a expressão que representa a soma de dois números pares consecutivos?	0.4 / 0.2	0.76751	0.90829
14	2	true	231	Qual a expressão que representa o triplo de um número mais o seu antecessor menos vinte?	0.4 / 0.2	0.90829	0.96744
15	2	true	232	Qual a expressão que representa a um número dividido pelo seu consecutivo mais seu triplo?	0.4 / 0.2	0.96744	0.98891
16	4	true	232	Qual a expressão que representa um número multiplicado pelos seu consecutivo menos dez?	0.4 / 0.2	0.98891	0.99627

Fonte: a pesquisa.

No exemplo da figura 63, podemos observar o cabeçalho da tabela, que será explicado a seguir.

- corresponde à ordem das questões. O sistema sempre coloca a primeira questão como sendo de número zero. O número de questões dependerá dos acertos e erros do aluno.

Respuesta – corresponde à resposta que o aluno forneceu, ou seja, a resposta que ele marcou durante os testes adaptativos.

Respuesta correcta – corresponde ao aluno ter acertado “*true*” ou errado “*false*”.

Tiempo (antes que se acabe) – este é o tempo que o aluno ainda tem para concluir a questão, para cada uma poderá ser demarcado um tempo, no caso desses testes adaptativos os alunos possuíam 240 segundos para responder cada questão.

Pregunta – é a questão que foi apresentada para o aluno, ela aparecendo na tela, os alunos tem 240 segundos para responde-la.

Dificultad/Adivinanza – é o grau de dificuldade de cada questão.

0.3 – questão de nível fácil

0.35 – questão de nível média

0.4 – questão de nível difícil

Neste teste, o aluno acertou a primeira que era nível 0.3, o sistema automaticamente deu uma de nível superior 0.35; o aluno errou, ele baixou a pontuação. O estudante continuou errando, como está no nível 0.3, o sistema continua liberando questões desse nível. Quando ele acertou, recebeu uma questão 0.35 e logo após uma de 0.4. Voltando a errar, retorna a 0.35 e 0.3 novamente. Observe que esse aluno acertou o restante, recebendo questões do nível 0.4.

Já a *Adivinanza* é 0.2, porque são 5 alternativas como resposta, se fossem quatro alternativas, seria 0.25.

Puntos antes - é a nota que todo mundo inicia. A cada rodada, seus valores aumentam se o aluno acertar ou diminuem se errar.

Puntos después – é a pontuação pós resposta.

Nos tópicos Resolução de Equações do 1º grau simples e nos Problemas Simples, observou-se que os alunos apresentaram dificuldades: apenas quatro alunos conseguiram avaliação positiva, levando um tempo maior para resolver as questões e utilizando muitos cálculos na resolução.

Seis alunos não obtiveram avaliação positiva nos tópicos Resolução de equações do 1º grau elaboradas e Problemas elaborados, fazendo cálculos desconexos, não encontrando soluções e, por vezes, marcando alternativas aleatórias.

Constatou-se que os estudantes conseguem transpor da linguagem materna para linguagem matemática e resolver equações simples, que envolvam as quatro operações e conceitos básicos, mas a maioria não conseguiu resolver problemas que utilizassem o pensamento algébrico mais elaborado.

Esse teste-piloto serviu para que pudéssemos verificar a funcionalidade do SIENA, bem como validar os aspectos a serem levados em consideração nas análises.

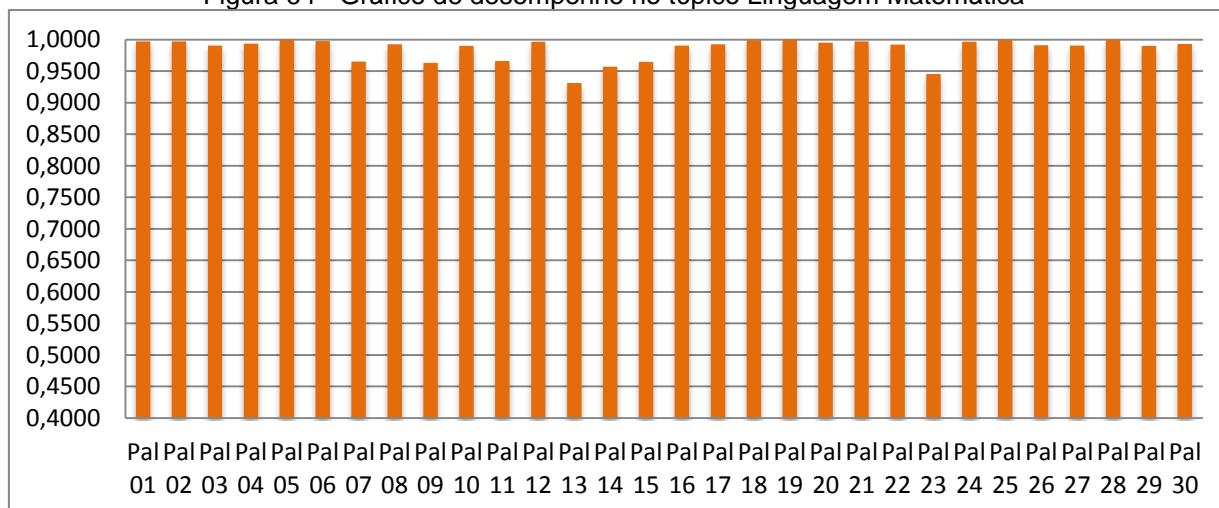
4.3 ANÁLISES DOS TESTES DEFINITIVOS

Apresentam-se a seguir os resultados das análises dos testes definitivos em cada um dos dez tópicos do grafo, realizados na plataforma SIENA. Os alunos serão identificados como Pal xx, em que Pal é a identificação de pensamento algébrico na plataforma e xx representa o número de cada estudante.

4.3.1 Análise do tópico Linguagem Matemática

Neste tópico, 100% dos alunos atingiram a nota 0,6, necessária para ter seu teste adaptativo considerado satisfatório. Nenhum aluno obteve nota inferior a 0,9313, conforme a figura 64.

Figura 64 - Gráfico de desempenho no tópico Linguagem Matemática




Fonte: a pesquisa.

Na análise dos diários de campo dos estudantes, observou-se que para esse tópico os alunos quase não realizaram anotações e que levaram em torno de 49 segundos para responder cada pergunta, dos 240 segundos que eles tinham de tempo.

Demonstrando, assim, que esses alunos possuem desenvolvida a capacidade de transformar a linguagem escrita materna em *Linguagem Matemática*, utilizando operações e símbolos algébricos.

A seguir, na figura 65, segue o exemplo do teste de um aluno que obteve nota máxima.

Figura 65 - Teste do aluno PAL 25 que obteve nota máxima



Acabado: true
Nota: 1.000

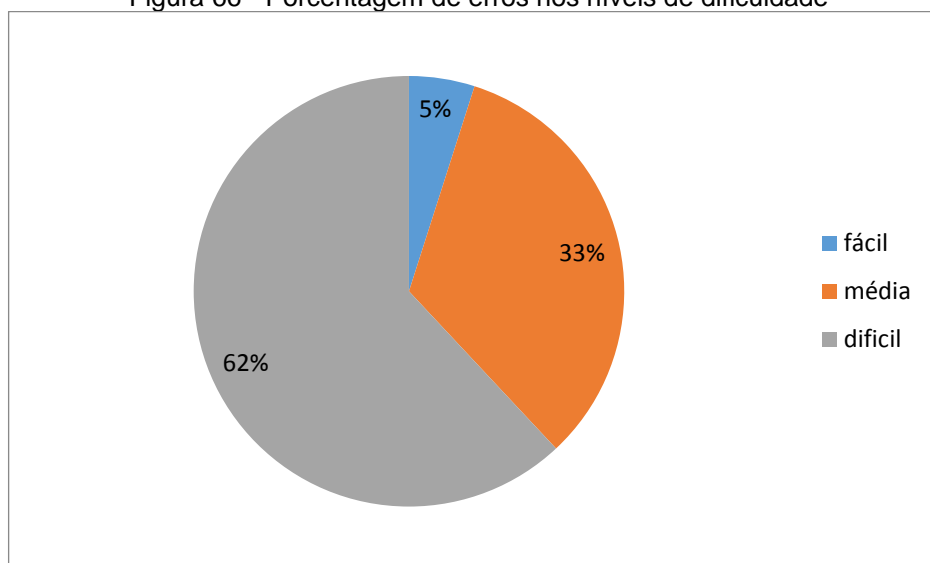
#Respuesta	Respuesta correcta	Tiempo(antes de que se acabe)	Pregunta	Dificultad / Adivinanza	Puntos antes	Puntos después
03	true	201	Qual a expressão que representa um número somado com a sua sétima parte?	0.4 / 0.2	0.50000	0.75000
11	true	193	Qual a expressão que representa um número somado ao próprio número mais quatro unidades?	0.4 / 0.2	0.75000	0.90000
24	true	203	Qual a expressão que representa um número multiplicado pelos seu consecutivo menos dez?	0.4 / 0.2	0.90000	0.96429
32	true	197	Qual a expressão que representa a um número dividido pelo seu consecutivo mais seu triplo?	0.4 / 0.2	0.96429	0.98780
43	true	212	Qual a expressão que representa um número somado ao próprio número menos trinta unidades?	0.4 / 0.2	0.98780	0.99590
50	true	213	Qual a expressão que representa a metade de um número mais seu consecutivo?	0.4 / 0.2	0.99590	0.99863
62	true	209	Qual a expressão que representa o triplo de um número mais o seu antecessor menos vinte?	0.4 / 0.2	0.99863	0.99954
70	true	216	Qual a expressão que representa um número subtraído do seu triplo e somado ao seu consecutivo?	0.4 / 0.2	0.99954	0.99985
83	true	218	Qual a expressão que representa o antecessor de um número multiplicado pelo seu sucessor?	0.4 / 0.2	0.99985	0.99995
94	true	144	Qual a expressão que representa a soma de dois números pares consecutivos?	0.4 / 0.2	0.99995	0.99998

Fonte: <http://siena.ulbra.br/tests/10597>.

Observa-se que o aluno PAL 25 resolveu um teste com 10 questões, acertando todas. Na coluna *dificuldade*, o sistema SIENA disponibilizou a primeira questão de nível 0.4, considerada difícil e, como esse aluno foi acertando, manteve sempre o mesmo nível de dificuldade. Também podemos verificar que esse aluno demorou em média 39,4 segundos para responder cada uma das questões, estando abaixo da média geral da turma.

No total, foram resolvidas 366 questões no tópico Linguagem Matemática, distribuídas entre os três níveis de dificuldade, sendo que do total de questões desse tópico os estudantes erraram 47% das questões resolvidas. A figura 66 demonstra a porcentagem de erros nos níveis de dificuldade dentro desse tópico.

Figura 66 - Porcentagem de erros nos níveis de dificuldade



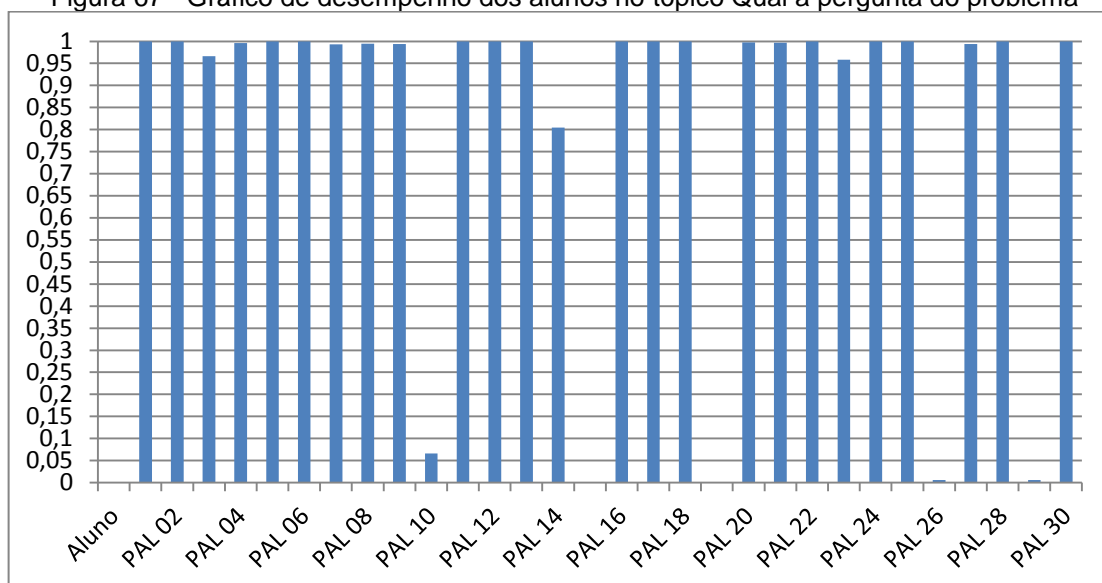
Fonte: a pesquisa.

Nota-se que os alunos que fizeram o tópico *Linguagem Matemática* dominam a representação dessa linguagem, mas dos alunos que erraram questões, 62% deles erraram questões do nível difícil, demonstrando não dominarem as que necessitam de uma interpretação de texto mais aprofundada.

4.3.2 Análise do tópico Qual a pergunta do problema

No tópico *Qual a pergunta do problema*, observa-se que 16,7% dos alunos participantes tiveram dificuldade na interpretação das atividades, uma vez que não atingiram a nota mínima necessária para ser considerado satisfatório o desempenho do teste. Em contrapartida, 30% dos alunos participantes obtiveram, nesse tópico, nota superior a 0,99991. A figura 67 demonstra o desempenho dos alunos.

Figura 67 - Gráfico de desempenho dos alunos no tópico Qual a pergunta do problema



Fonte: a pesquisa.

Os alunos nesse tópico levaram em média 52 segundos para resolver cada questão: vinte e dois dos trinta alunos fizeram apenas 10 questões, número mínimo indicado pelo SIENA. Os alunos demonstraram boa capacidade de interpretação das questões e de análise dos problemas para responderem qual a pergunta a que o problema se referia. A seguir, na figura 68, o exemplo do teste de um desses alunos que fez apenas 10 questões.

Figura 68 - Teste do aluno Pal 22

Acabado: true
Nota: 1.000

#Respuesta	Respuesta correcta	Tiempo (antes de que se acabe)	Pregunta	Dificultad / Advinanza	Puntos antes	Puntos después
03	true	122	Numa partida de basquete, as duas equipes fizeram um total de 145 pontos. A equipe A fez o dobro de pontos, menos 5, que a equipe B. A pergunta do problema pode ser:	0,3 / 0,2	0,50000	0,77778
10	true	154	Uma Escola recebeu 1.350 matrículas para o 7º, 8º e 9º anos em 2015. Foram 420 alunos matriculados no sétimo ano. No oitavo ano, o número de alunos foi o dobro dos matriculados no nono ano. Selecione uma pergunta adequada ao problema?	0,35 / 0,2	0,77778	0,91919
23	false	168	Sandra é uma estudante que quer passar uns dias de férias em Santos. Ela está decidindo entre os hotéis Palacete I (diária completa R\$ 25,00) e Palacete II (diária completa R\$ 20,00). Calculou que se escolhesse o hotel Palacete II, mais simples, poderia ficar em Santos três dias a mais que se escolhesse o hotel Palacete I. A pergunta do problema pode ser:	0,4 / 0,2	0,91919	0,85047

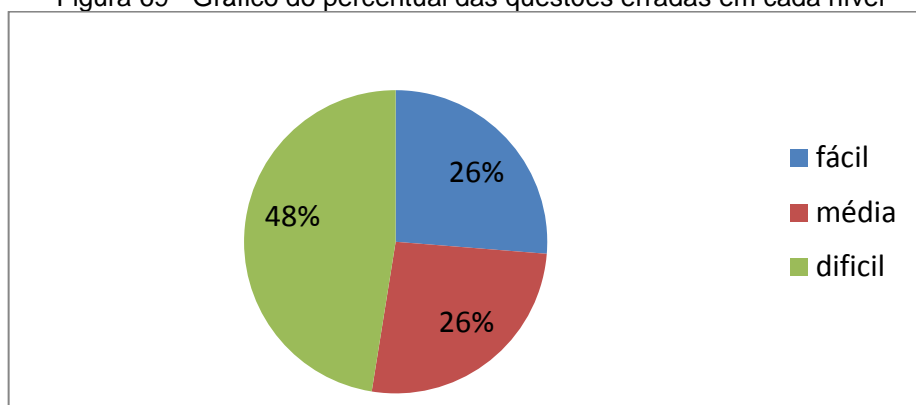
31	true	144	Juca está apaixonado! Para ver a namorada, ele faz uma longa viagem: 350km a cada encontro. Em uma de suas viagens, após alguns quilômetros, ele parou para um cafezinho e ainda percorreu o triplo do que já havia percorrido para chegar à cidade de sua namorada. Qual a pergunta mais adequada para o problema em questão?	0,35 / 0,2	0,85047	0,94868
41	true	140	(PMES-2010/adaptado) Uma pessoa comprou vários sabonetes, todos da mesma marca. Alguns com 50g e outros com 90g, num total de 40 unidades. O preço de um sabonete de 50g era de R\$ 0,70 e o de 90g era de R\$ 1,20. O valor total gasto foi de R\$ 35,50. A pergunta correspondente a esse problema pode ser:	0,4 / 0,2	0,94868	0,98229
51	true	192	(PMES-2008/adaptada) Em uma lanchonete, 2 sanduíches naturais mais 1 copo de suco custam R\$ 10,00 e 1 sanduíche natural mais 2 copos de suco custam R\$ 9,20. João comprou 1 sanduíche natural e 1 copo de suco. A pergunta do problema pode ser:	0,4 / 0,2	0,98229	0,99402
61	true	163	(IMSP/adaptada) Dois casais de namorados foram à feira e pararam em frente a uma banca que vendia pastéis e caldo de cana. O primeiro casal pagou R\$ 5,40 por um pastel especial e dois copos de caldo de cana. O segundo casal pagou R\$ 9,60 por três copos de caldo de cana e dois pastéis especiais. A pergunta do problema pode ser:	0,4 / 0,2	0,99402	0,99800
70	false	160	Um sítante vai colocar tijolos em volta de um canteiro retangular. Para isso, ficou estacas nos quatro vértices e usou 24 metros de barbante para cercar o terreno e depois colocar tijolos. Ao medir as dimensões do terreno, verificou que a medida do comprimento tem o dobro da medida da largura. A pergunta do problema pode ser:	0,4 / 0,2	0,99800	0,99601
82	true	210	Um tijolo pesa 1kg mais meio tijolo. Qual a pergunta do problema?	0,35 / 0,2	0,99601	0,99877
90	true	199	(CTSB0901/06-Téc. Adm - Secretária-2009/adaptado) Dois amigos foram juntos ao supermercado para comprar vinhos. Um deles comprou 3 garrafas do vinho A e 2 do vinho B, pagando o total de R\$ 79,00. O outro comprou 5 garrafas do vinho A e 1 do vinho B pagando o total de R\$ 92,00. A pergunta do problema pode ser:	0,4 / 0,2	0,99877	0,99959

Fonte: <http://siena.ulbra.br/tests/10543>.

Observa-se que o teste do aluno Pal 22 iniciou com uma questão nível 0,3, ou seja, considerada fácil, poderia ter iniciado com qualquer nível, já que o sistema SIENA disponibiliza a primeira questão aleatoriamente. Esse aluno acertou a primeira questão e o sistema disponibilizou outra de nível médio (valendo 0,35), a qual ele acertou, sendo apresentado mais uma de nível difícil, (valor 0,4), questão que o estudante errou. Assim, o sistema disponibiliza uma questão de nível de dificuldade menor e quando o aluno acertou foi, novamente, aumentado o nível de dificuldade da questão. Na questão sete, esse aluno errou novamente e o sistema repetiu a sistemática. Tão logo ele conseguiu demonstrar sua aptidão, o sistema encerrou seu teste com 10 questões.

Foram resolvidas, nesse tópico, um total de 315 questões, sendo que desse total, 99 obtiveram respostas erradas. Dentro das respostas erradas as de nível difícil, que necessitavam de uma interpretação mais aprofundada do problema, foram as que os alunos mais responderam errado: 47 respostas erradas. A figura 69 demonstra o percentual das questões erradas dentro de cada nível.

Figura 69 - Gráfico do percentual das questões erradas em cada nível

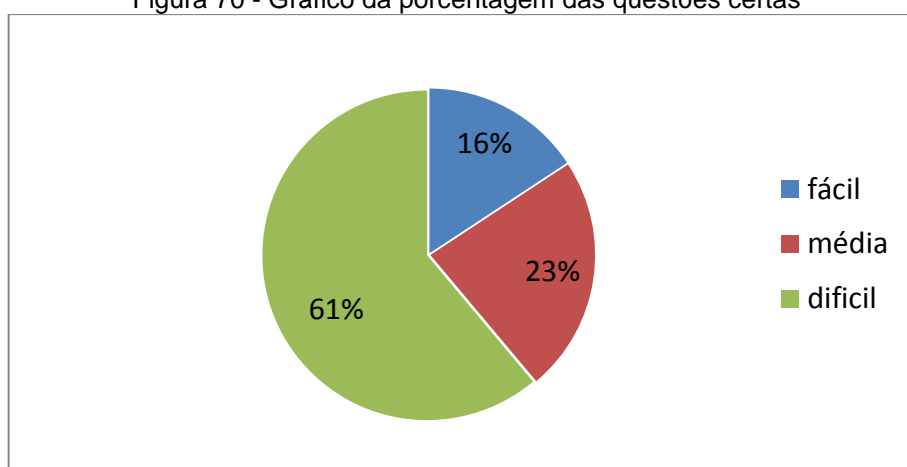


Fonte: a pesquisa.

Observa-se que as questões de nível fácil e médio obtiveram a mesma percentagem de erros.

Em contrapartida, observa-se que as questões que os alunos mais acertaram também foram as de nível difícil, totalizando 41% de todas 315 questões respondidas nos testes. Nas questões em que os alunos acertaram, 132 foram desse nível, conforme mostra a figura 70.

Figura 70 - Gráfico da percentagem das questões certas



Fonte: a pesquisa.

Assim, 61% das questões respondidas corretamente foram do nível difícil. Como o que determinava o grau de dificuldade dentro desse tópico era a interpretação mais aprofundada do texto, obteve-se, então, 216 respostas corretas das 315 respostas apresentadas, demonstrando-se, assim, que os estudantes possuem esse domínio.

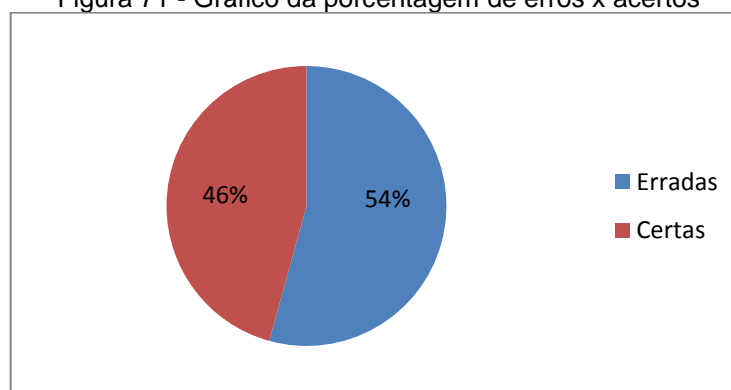
4.3.3 Análise do tópico Retirar dados de um Problema

Neste tópico, tínhamos como objetivo verificar se os alunos do nono ano de uma escola pública do município de Porto Alegre conseguiam extrair dos problemas os dados necessários à sua compreensão e posterior resolução.

Verificou-se que 13 alunos não conseguiram atingir o objetivo do tópico, apresentando dificuldade em identificar os dados necessários, não alcançando 0.6.

Dos tópicos *linguagem matemática, qual a pergunta do problema e retirar dados de um problema* que verificam os dois passos iniciais da didática da resolução de problemas de Polya, que são compreensão do problema e elaboração de um plano, esse tópico: *retirar dados de um problema* - foi o mais complicado para os alunos, pois foi o que realizaram o maior número de questões, em um total de 466. Também, observou-se que a maioria delas foram respondidas erroneamente, como observa-se na figura 71, que destaca a porcentagem de erros x acertos.

Figura 71 - Gráfico da porcentagem de erros x acertos




Fonte: a pesquisa.


Observa-se que mais de 50% das questões foram respondidas erroneamente.

Nesse tópico, nenhum aluno obteve nota 1.0 - nota máxima nos testes adaptativos – sendo a mais alta do aluno Pal 16, 0.998, conforme observa-se na figura 72.

Figura 72 – Teste adaptativo do aluno Pal 16



ULBRA



Inicio

Ajudia






Opciones para Teacher (professorsiena)

Perfil Usuario

Lista de asignaturas

Lista de competencias

Config Sesión

Acabado: true
Nota: 0.998

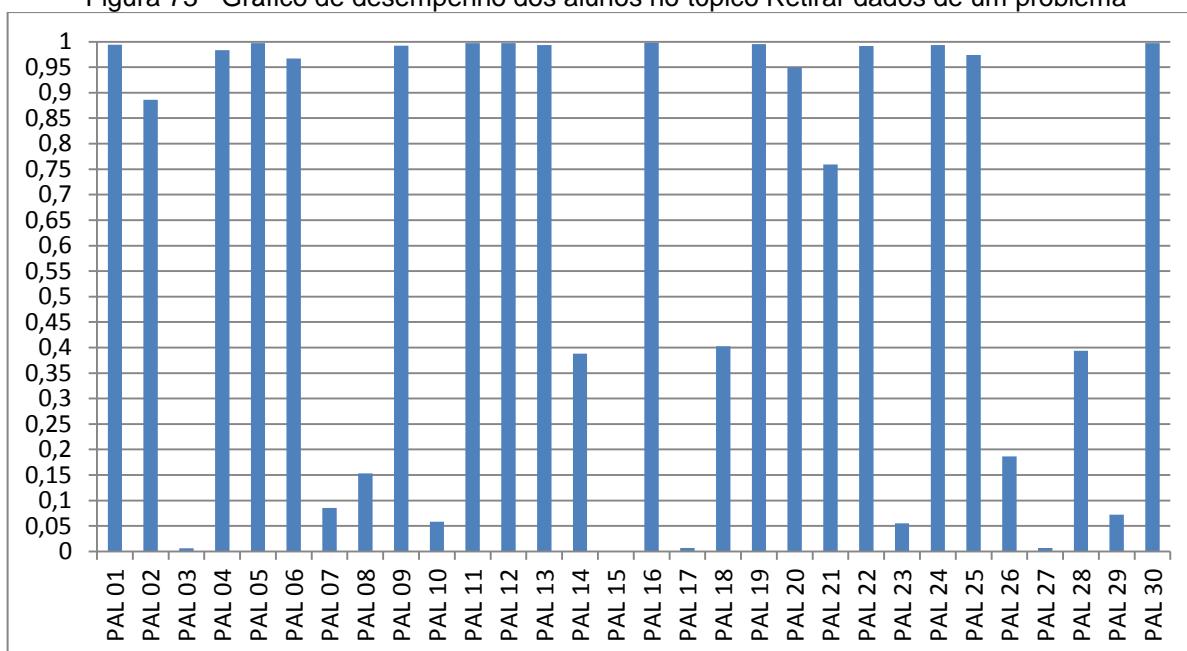
Id pregunta	Respuesta correcta	Tiempo (antes de que se acabe)	Pregunta	Dificultad / Adistancia	Puntos antes	Puntos despues
00	true	140	Um motorista quer fazer uma viagem de 780km em duas etapas, de modo que na primeira etapa percorra 50km a mais que na segunda. Para isso, ele conseguiu um patrocínio de R\$ 390,00 para cada uma das etapas, a fim de pagar os custos com o combustível e o veículo faz 9 km por litro e alimentação. Para descobriremos quantos quilômetros serão percorridos em cada etapa, precisamos saber:	0.3 / 0.2	0.50000	0.77778
10	false	153	(SEAP-2009(adaptada)) O presídio de Viterbia abriga um total de 378 detentos em 72 celas, distribuídos em celas de 4 detentos e outras celas de 6 detentos. Já a casa prisional de Fradinhos abriga 540 detentos em 90 celas. A fim de descobriremos quantas celas de 4 detentos há no presídio de Viterbia, precisamos:	0.35 / 0.2	0.77778	0.60494
21	true	168	Juca está apaixonado! Para ver a namorada, ele faz uma longa viagem: 350km a cada encontro. Em uma de suas viagens, após alguns quilômetros, ele parou para um cafezinho e ainda percorreu o triplo do que já havia percorrido para chegar à cidade de sua namorada, a qual é arborizada e muito organizada. O problema se refere:	0.3 / 0.2	0.50494	0.84275
32	true	154	Em um saquinho de festas há vários brinquedos. Um deles é uma placa de bolinhas com o total de 108 bolinhas, distribuídas entre azuis, vermelhas e amarelas. Um menino muito curioso perguntou a seu pai quantas bolinhas vermelhas tinham no brinquedo. Ele lhe respondeu que o número de bolinhas azuis era o dobro das vermelhas e o das amarelas era o triplo das azuis. Então, para que o menino satisfizesse sua curiosidade é necessário:	0.35 / 0.2	0.84275	0.94571
41	false	190	Maria foi ao supermercado comprar papel higiênico, mas quando lá chegou percebeu que os pacotes de rolos de folha dupla eram de diferentes tamanhos e valores. Uma marca vendia o pacote de 21 rolos de 30mX10cm por R\$ 29,82; já outra marca vendia o pacote de 24 rolos de 20mX10cm por R\$ 29,80. O problema se refere:	0.4 / 0.2	0.94571	0.89700
54	true	156	Júnior e Luis jogam na mesma equipe de basquete de sua cidade e concorrem ao posto de cestinha. Ao longo do campeonato, eles já marcaram 533 pontos juntos, tomando-os os dois jogadores com mais pontuação entre as equipes, deixando em terceiro lugar o da equipe da cidade vizinha. No último jogo dessa equipe, os dois juntos marcaram 52 pontos. Júnior marcou 10 pontos a mais que Luis. Para sabermos quantos pontos Júnior marcou no último jogo, precisamos saber:	0.35 / 0.2	0.89700	0.96588
64	false	167	Um feirante levou para a feira três caixotes. No primeiro caixote, há laranjas e maçãs, num total de 100 frutas. O número de maçãs é 2/3 do número de laranjas. No segundo caixote, há limões e no terceiro há muitos quilos de uvas. O problema se refere:	0.4 / 0.2	0.96588	0.93400
70	true	194	(CTSB00105- T4c. Adm. - Secretária-2009(adaptado)) Dois amigos foram juntos ao supermercado para comprar vinhos e alguns ingredientes para sopa. Um deles comprou 3 garrafas do vinho A e 2 do vinho B, pagando R\$ 79,00. O outro comprou 5 garrafas do vinho A e 1 do vinho B, pagando R\$ 92,00. Alguns ingredientes como cenoura e moranga estavam em promoção no estabelecimento e eles aumentaram a quantidade comprada. O problema se refere:	0.35 / 0.2	0.93400	0.97872
82	true	153	Uma Escola recebeu 1.350 matrículas para o 7º, 8º e 9º anos em 2015, ficando em lista de espera 327 alunos. Foram 420 alunos matriculados no sétimo ano. No oitavo ano, o número de alunos foi o dobro dos matriculados no nono ano. Para sabermos o número de alunos do oitavo ano, precisamos:	0.4 / 0.2	0.97872	0.99280
92	true	199	Em uma competição de Kart, Vinícius dá uma volta completa na pista oval em 32 segundos, enquanto Diego leva 36 segundos para completar uma volta. Ambos são pilotos experientes, mas a equipe de Diego conseguiu um excelente patrocínio nesta temporada. Se quiséssemos saber em qual volta Vinícius estará quando Diego estiver na volta de número 40, precisaríamos saber:	0.4 / 0.2	0.99280	0.99759

Fonte: <http://siena.ulbra.br/tests/10885>.

Nota-se que o aluno Pal 16 respondeu apenas duas perguntas do nível difícil corretamente. Nos testes dos outros alunos, observou-se que 13 não conseguiram acertar nenhuma questão desse nível de dificuldade e que três não conseguiram um desempenho para que o sistema lhe apresentasse questões desse nível de dificuldade.

A figura 73 demonstra o desempenho geral de todos os alunos, observando que aqueles que não atingiram 0.6 ficaram muito abaixo desse valor.

Figura 73 - Gráfico de desempenho dos alunos no tópico Retirar dados de um problema



Fonte: a pesquisa.

Os alunos demoraram, em média, 61 segundos para resolver as questões desse tópico, sendo que um aluno extrapolou o tempo máximo e seu teste foi invalidado. Foram resolvidas em média 16 questões por aluno. Apenas quatro alunos concluíram o teste em 10 questões.

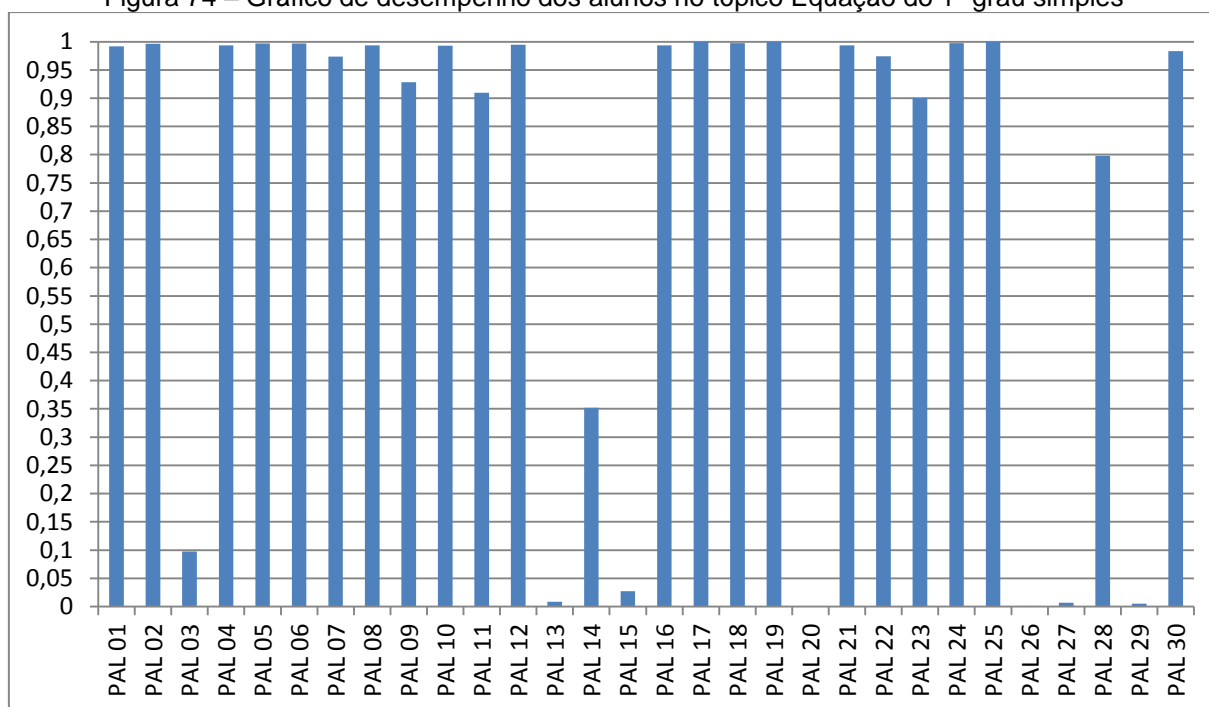
Esse tópico demonstrou que a maioria dos estudantes não conseguiu definir quais são os dados necessários para resolução de problemas. Salienta-se que a resolução dessas atividades necessitam de uma interpretação e análise mais aprofundada, o que leva a induzir que os discentes apresentam dificuldades nessa habilidade.

4.3.4 Análise do tópico Equação do 1º grau simples

Neste tópico, o objetivo era verificar se os alunos conseguiam interpretar um enunciado simples que envolvesse operações básicas, transformando-o em uma equação, para posteriormente resolvê-la.

Dos alunos que realizaram o teste, 73% atingiram a nota mínima de 0.6, conforme a figura 74. Desse percentual 50% obteve nota superior a 0.99.

Figura 74 – Gráfico de desempenho dos alunos no tópico Equação do 1º grau simples

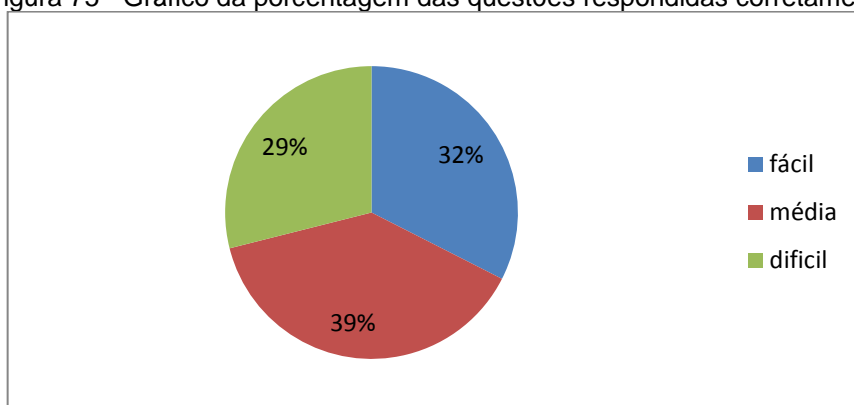


Fonte: a pesquisa.

Neste teste, dos 240 segundos disponíveis, eles demoraram, em média, 64,5 segundos para responder as questões. Apenas o aluno Pal 20 não conseguiu realizá-lo, pois todas suas tentativas extrapolaram o tempo máximo, invalidando seu teste.

Foram realizadas 385 questões nesse tópico, sendo distribuídas em 130 difíceis, 142 médias e 113 fáceis. Todos os alunos receberam, no mínimo, uma questão do nível difícil, mesmo os que não conseguiram atingir 0.6. Isso demonstra que eles passaram do nível fácil para o médio, conseguindo interpretar a linguagem matemática, identificar a pergunta do problema e resolver as equações do 1º grau simples formadas. A figura 75 demonstra a porcentagem das questões respondidas corretamente dentro de cada nível.

Figura 75 - Gráfico da porcentagem das questões respondidas corretamente



Fonte: a pesquisa.

Do total de 197 questões respondidas corretamente, pode-se observar que 39% correspondem ao no nível médio, uma vez que a caracterização do nível de dificuldade é dada pela aplicação das operações envolvidas.

Na figura 76, temos o teste do aluno Pal 10, na qual podemos observar que ele fez 10 questões, número mínimo, obtendo nota 0.993.

Figura 76 - Teste do aluno Pal 10

#	Resposta	Resposta correcta	Tiempo antes de que se acabe	Pregunta	Dificultad / Advinanza	Puntos antes	Puntos después
0	0	false	212	O triplo de um número mais 33 é igual a 99. Qual é esse número?	0.3 / 0.2	0.50000	0.27273
1	0	true	157	O dobro de um número, aumentado de 15, é igual a 49. Qual é esse número?	0.3 / 0.2	0.27273	0.56757
2	1	false	115	O triplo de um número, mais dois, é igual ao próprio número menos quatro. Qual é esse número?	0.35 / 0.2	0.56757	0.36476
3	0	true	204	O triplo de um número, mais 10, é igual a 136. Qual é esse número?	0.3 / 0.2	0.36476	0.86775
4	3	true	148	Um número somado com o seu triplo é igual a 120. Esse número é:	0.35 / 0.2	0.66775	0.86723
5	4	true	137	A diferença entre o triplo de um número e a metade desse número é 35. Qual é esse número?	0.4 / 0.2	0.86723	0.95145
6	1	false	127	O dobro de um número, menos 10, é igual à sua metade, mais 50. Qual é esse número?	0.4 / 0.2	0.95145	0.90739
7	3	false	205	O dobro de um número, diminuído de 4, é igual a esse número aumentado de 1. Qual é esse número?	0.35 / 0.2	0.90739	0.81084
8	2	true	204	O quíntuplo de um número, aumentado de 100, é igual a 300. Qual é esse número?	0.3 / 0.2	0.81084	0.93751
9	4	true	105	Se 8 cadernos custam R\$ 96,00, qual o valor de 5 cadernos?	0.35 / 0.2	0.93751	0.97990
10	3	true	191	Um número somado com o seu triplo é igual a 120. Esse número é:	0.4 / 0.2	0.97990	0.99321

Fonte: <http://siena.ulbra.br/tests/10661>.

Analisando o diário de campo dos estudantes de resoluções desse aluno, podemos supor que as questões que ele errou foram por má interpretação. Observe a figura 77.

Figura 77 - Desenvolvimento das questões do aluno Pal 10

Equação do 1º grau simples

1) $x + 33 = 99$
 $x = 99 - 33$
 $x = 66$

3) $2x + 15 = 49$
 $2x = 49 - 15$
 $2x = 34$
 $x = \frac{34}{2}$
 $x = 17$

4) $3x + 10 = 136$
 $3x = 136 - 10$
 $3x = 126$
 $x = 126$

6) $-3x + 215 = 35$
 $-3x = 35 - 215$

7) $2x - 10 = 5 + 50$
 $2x = 5 + 50 + 10$
 $2x = 65 + 10$
 $2x = 75$
 $x = \frac{75}{2}$

9) $5x + 100 = 300$
 $5x = 300 - 100$
 $5x = 200$
 $x = \frac{200}{5}$
 $x = 40$

Fonte: a pesquisa.

No exercício 1, o enunciado dizia “o triplo de um número”, mas o aluno Pal 10 escreveu somente o número, errando seu desenvolvimento, e, por consequência, a transcrição para a linguagem matemática. Na atividade 7, o problema enunciava: “O dobro de um número menos dez é igual a sua metade mais cinquenta”, observa-se que o aluno fez correto o dobro de um número menos dez, mas na parte da sua metade o aluno colocou 5, interpretando que é a metade do dez, ou seja, sua interpretação do problema foi errônea.

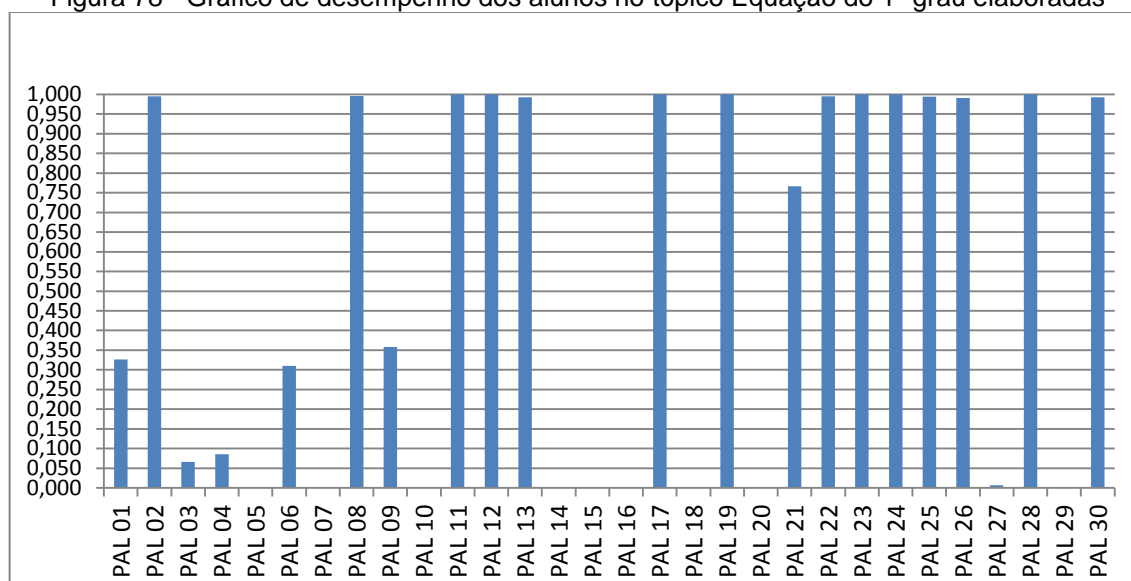
Nesse tópico, à resolução das equações foram bem sucedidas, as questões erradas relacionaram-se interpretação e à montagem das equações. Logo, pelo percentual de acertos e análise dos desenvolvimentos nesse tópico, foi alcançado o objetivo.

4.3.5 Análise do tópico Equação do 1º grau elaborada

Neste tópico, 15 alunos conseguiram notas superiores a 0.6, 4 alunos tiveram seus testes invalidados por extrapolarem o tempo máximo permitido em

todas suas tentativas e uma aluna foi transferida da escola. Na figura 78, temos o desempenho dos alunos nesse tópico.

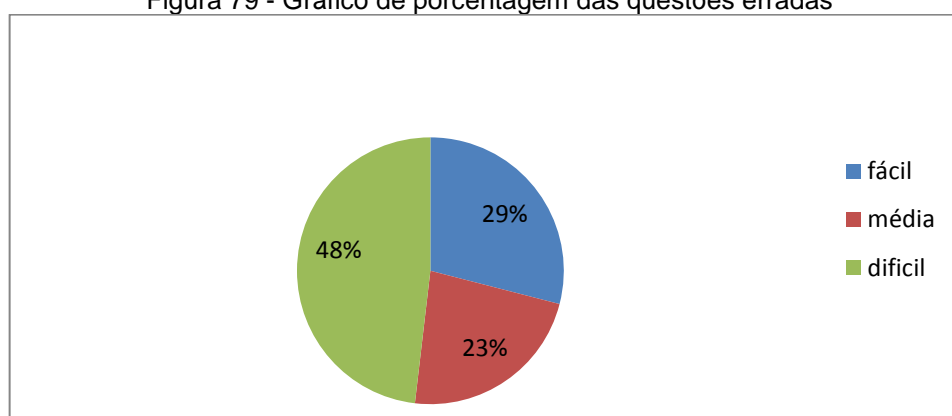
Figura 78 - Gráfico de desempenho dos alunos no tópico Equação do 1º grau elaboradas



Fonte: a pesquisa.

Neste tópico, quatro alunos atingiram nota máxima, 1.0, e um aluno teve nota 0.0. Os alunos que ficaram abaixo de 0.6 ficaram muito abaixo deste valor. Do total de 321 questões, 38% delas eram de nível difícil, demonstrando que os alunos transpuseram os outros níveis, mesmo tendo um índice de erro de 50,46%. Das questões respondidas erradas, 48% estão nesse nível de dificuldade, conforme observa-se na figura 79.

Figura 79 - Gráfico de porcentagem das questões erradas



Fonte: a pesquisa.

Para que os alunos possam ter esse índice de erros nas questões difíceis, é necessário que eles passem pelos outros dois níveis. Isso significa que dentro dos níveis de dificuldade que estão centralizados na interpretação dos enunciados e na resolução das operações que envolvem as incógnitas de ambos os lados da

igualdade eles tiveram dificuldades referentes a quando necessita de interpretação mais profunda. Vejamos a figura 80 que nos mostra o teste de um destes alunos.

Figura 80 - Teste de um aluno no tópico Equação do 1º grau elaborada

Acabado: true
Nota: 0.328

#	Resposta	Resposta correcta	Tiempo (segundos de que se acaba)	Pregunta	Dificultad / Adrinanza	Puntos antes	Puntos despues
0.4	true	true	178	Multiplicando-se um número por 5 e adicionando-se 9 ao produto, obtém-se 64. Qual é esse número?	0.4 / 0.2	0.50000	0.75000
1.2	true	true	190	O quádruplo de um número mais 10 é igual ao dobro desse mesmo número menos 4. Qual é esse número?	0.4 / 0.2	0.75000	0.90000
2.0	false	false	193	Um número tem 4 unidades a mais que o outro. A soma deles é 150. Quais são esses números?	0.4 / 0.2	0.90000	0.81818
3.0	true	true	208	A soma de dois números consecutivos é 53. Quais são esses números?	0.35 / 0.2	0.81818	0.93600
4.1	false	false	190	A soma de três números consecutivos é igual a 54. Quais são esses números?	0.4 / 0.2	0.83600	0.87970
5.1	false	false	215	A soma de dois números inteiros e consecutivos é -31. Quais são esses números?	0.35 / 0.2	0.87970	0.76186
6.4	false	false	109	A diferença entre um número e sua quinta parte é igual a 32. Qual é esse número?	0.3 / 0.2	0.76186	0.54539
7.1	true	true	200	O quádruplo de um número mais 16 é igual ao próprio número mais 16. Qual é esse número?	0.3 / 0.2	0.54539	0.80785
8.0	false	false	155	O sétuplo de um número, diminuído de 12, é igual a 36. Qual é esse número?	0.35 / 0.2	0.80785	0.64752
9.2	true	true	195	O quádruplo de um número, aumentado de 100, é igual a 300. Qual é esse número?	0.3 / 0.2	0.54752	0.86540
10.1	true	true	206	O quádruplo de um número, diminuído de 10, é igual ao dobro desse número, aumentado de 2. Qual é esse número?	0.35 / 0.2	0.86540	0.95433
11.2	false	false	185	Três números pares e consecutivos têm por soma 60. O maior deles vale	0.4 / 0.2	0.95433	0.91265
12.4	false	false	81	de um número aumentados de 12 são iguais aos $3x$, $5x$, $7x$ e $9x$ desse número. Qual é esse número?	0.35 / 0.2	0.91265	0.82050
13.2	false	false	193	A soma de um número com seu sucessor é 71. Qual é esse número?	0.3 / 0.2	0.82050	0.63156
14.0	false	false	164	Um número somado com sua quarta parte é igual a 20. Qual é esse número?	0.3 / 0.2	0.63156	0.39129
15.2	false	false	217	A metade de um número somada com sua terça parte é igual a 25. Qual é esse número?	0.3 / 0.2	0.39129	0.19423
16.4	true	true	196	O dobro de um número, diminuído de 4, é igual a esse número aumentado de 1. Qual é esse número?	0.3 / 0.2	0.19423	0.45761
17.0	false	false	218	A soma de dois números consecutivos é 35. Quais são esses números?	0.35 / 0.2	0.45761	0.26960
18.0	false	false	210	A diferença entre os $2x$ e $3x$ de um número é sua metade é igual a 6. Qual é esse número?	0.3 / 0.2	0.26960	0.12159
19.0	true	true	197	O triplo de um número, mais dois, é igual ao próprio número menos quatro. Qual é esse número?	0.3 / 0.2	0.12159	0.32636

Fonte: <http://siena.ulbra.br/tests/10720>.

O aluno Pal 01 fez um total de 20 questões, mas não conseguiu obter nota 0.6. Observa-se que o sistema iniciou o teste dele com uma questão de nível difícil, quando ele veio a errar, o sistema baixou o nível, elevando-o assim que ele acertou. Esse aluno fez as questões em uma média de 54,6 segundos cada, superior aos 51 segundos da média geral.

Na figura 81 será apresentado o desenvolvimento desse aluno para uma breve análise.

Figura 81 - Diário de campo dos estudantes aluno Pal 01

The image shows a student's handwritten work for three problems. Three boxes highlight specific parts of the solutions:

- Box 1 (Problem 7):** Shows the equation $x - \frac{5}{x} = 32$. The student multiplies both sides by x to get $x^2 - 5 = 32x$, then rearranges to $x^2 - 32x - 5 = 0$. They then incorrectly divide the constant term by 4, resulting in $x = \frac{32}{4} = 8$.
- Box 2 (Problem 9):** Shows the equation $6x - 12 = 36$. The student adds 12 to both sides to get $6x = 48$, and then divides by 6 to get $x = 8$.
- Box 3 (Problem 13):** Shows the equation $\frac{3}{5}x + 12 = \frac{5}{7}$. The student incorrectly subtracts $\frac{5}{7}$ from both sides to get $\frac{21x}{35} - \frac{36}{35} = 12$, then multiplies by 35 to get $21x = 12 + 36$, and finally divides by 21 to get $x = \frac{48}{21}$.

Fonte: a pesquisa.

Observe estas três resoluções grafadas, o aluno Pal 01 compreendeu que no problema 6 no sistema (que ele representou em sua folha de resolução como o exercício 7), que tratava de um subtração de dois valores e que um se refere-se ao número e outro à quinta parte, mas ele não soube representar essa quinta parte, pois ao invés de representar $\frac{x}{5}$ representou por $\frac{5}{x}$, assim, levando-o à resolução errada da questão.

Fato semelhante ocorreu na questão 13 da sua resolução, em que o enunciado falava o seguinte: “Os $\frac{3}{5}$ de um número aumentado de 12 são iguais aos $\frac{5}{7}$ desse número”, observe que o aluno escreveu $\frac{3}{5}x + 12 = \frac{5}{7}$, novamente esquecendo da parte de $\frac{5}{7}$ desse número, novamente errando a resolução da pergunta do sistema.

Na questão 9, esse aluno montou a equação correta, fez o desenvolvimento correto, chegando ao resultado correto, mas marcou a alternativa incorreta, errando, novamente o seu resultado.

Dos 15 alunos que alcançaram a nota mínima, 8 fizeram 10 questões; para o restante foi necessário um número maior de questões a serem respondidas. Este tópico tinha como objetivo verificar se os alunos conseguiam interpretar o enunciado, montar as equações e resolver equações do 1º grau mais elaboradas, utilizando

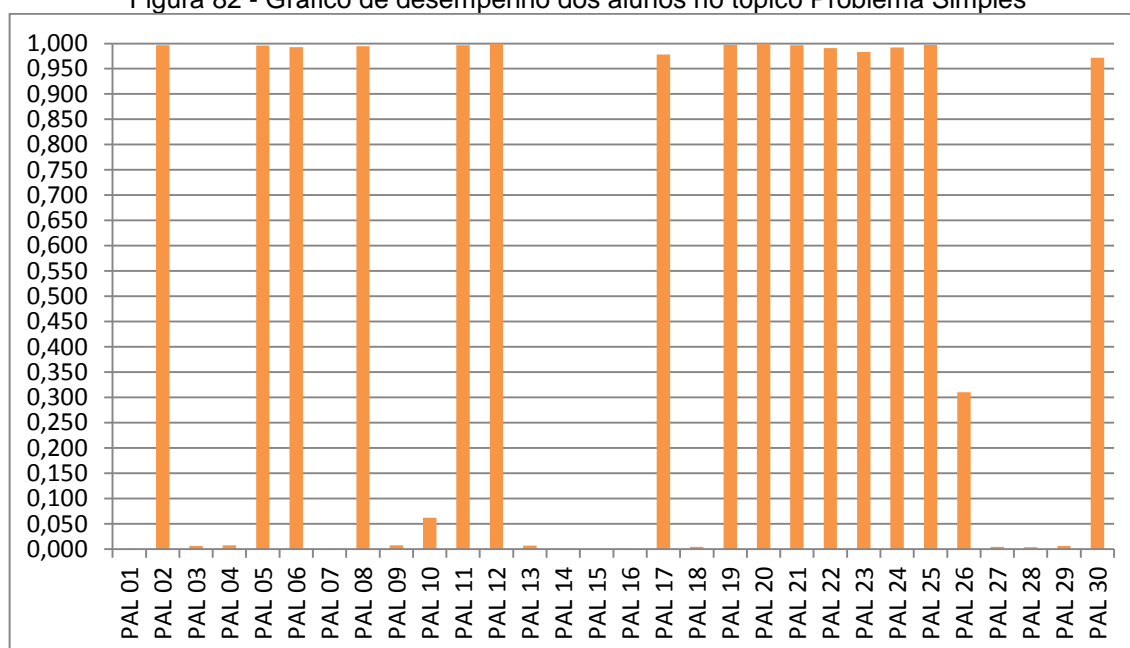
noções matemáticas além das quatro operações. Os alunos demonstraram dificuldade nas interpretações dos enunciados, pois os níveis de dificuldade estavam centrados na interpretação dos enunciados e posterior resolução.

4.3.6 Análise do tópico Problemas simples

Neste tópico, o objetivo era verificar se os alunos eram capazes de transpor da linguagem materna para a linguagem matemática, encontrando as equações, e se eles conseguiam resolver essas situações-problema que envolviam os conhecimentos algébricos básicos, resolvendo equações do 1º grau consideradas simples.

Os alunos responderam 360 questões nesse tópico, divididas em 98 de nível fácil, 105 de nível médio e 157 de nível difícil: 15 alunos obtiveram a nota mínima e 12 alunos quase zeraram o teste, conforme a figura 82 que demonstra o desempenho deles.

Figura 82 - Gráfico de desempenho dos alunos no tópico Problema Simples



Fonte: a pesquisa.

Nenhum aluno obteve nota 1.0 e os que não alcançaram a nota 0.6 ficaram muito abaixo, sendo a mais “próxima” 0.31. Os alunos fizeram em média 12 questões, demorando 59 segundos para responder cada uma delas nesse tópico. O aluno Pal 19 fez 10 questões, demorou 36 segundos para cada uma e obteve a segunda nota mais alta neste teste, conforme a figura 83.

Figura 83 - Teste de um aluno no t3pico problema simples

ULBRA

Inicio

Ayuda

Opciones para Teacher (professorsiena)

Perfil Usuario

Lista de asignaturas

Lista de competencias

Cerrar Sesión

Acabado: true

Nota: 0.997

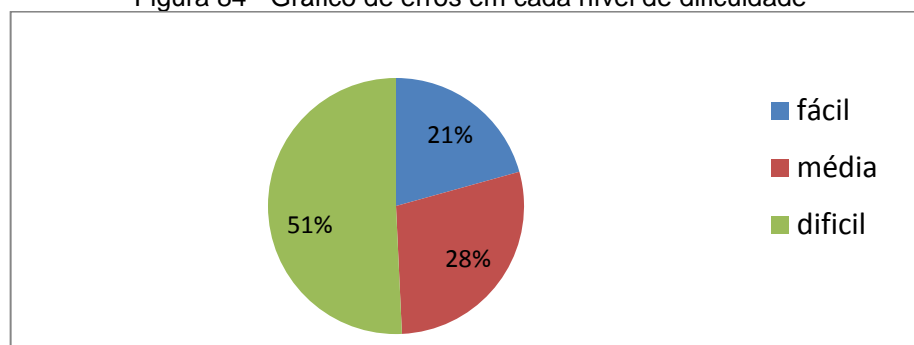
#Resposta	Resposta correcta	Tiempo (antes de que se acabe)	Pregunta	Dificultad / Adivinanza	Puntos antes	Puntos después
32	true	161	Uma fita de 247 metros vai ser dividida em duas partes, de modo que uma tenha 37 metros a mais que a outra. Quanto mede a parte maior?	0.4 / 0.2	0.50000	0.75000
16	true	199	As idades de três irm3os somam 99 anos. Sabendo-se que o mais jovem tem um terço da idade do mais velho e o segundo irm3o tem a metade da idade do mais velho, qual a idade do mais velho?	0.4 / 0.2	0.75000	0.90000
21	false	203	Numa escola de 1350 alunos, o n3mero de alunos do 1º grau 3 o qu3druplo do n3mero de alunos do 2º grau. Quantos s3o os alunos do 2º grau?	0.4 / 0.2	0.90000	0.81818
32	true	211	$\langle \text{math} \rangle \langle \text{min} \rangle \langle \text{row} \rangle \langle \text{mtext} \rangle \langle \text{UF-GO} \rangle \langle \text{mtext} \rangle \langle \text{mrow} \rangle \langle \text{mfrac} \rangle \langle \text{mrow} \rangle \langle \text{mn} \rangle \langle \text{m} \rangle \langle \text{mrow} \rangle \langle \text{mrow} \rangle \langle \text{mn} \rangle \langle \text{m} \rangle \langle \text{mrow} \rangle \langle \text{mfrac} \rangle \langle \text{mtext} \rangle \langle \text{de} \rangle \langle \text{mtext} \rangle \langle \text{mrow} \rangle \langle \text{math} \rangle$ Diminuindo-se 6 anos da idade de minha filha obt3m-se os	0.35 / 0.2	0.81818	0.93600
44	true	215	Um pr3mio de R\$ 500,00 foi repartido entre Sibel3 e Fernanda, de modo que Sibel3 recebeu R\$ 80,00 a mais que Fernanda. Qual o pr3mio recebido por Fernanda?	0.4 / 0.2	0.93600	0.97772
52	false	215	Fabiana tem 5 anos a mais que Marcela. A soma da idade de ambas 3 igual a 39 anos. Qual 3 a idade de cada uma?	0.4 / 0.2	0.97772	0.95640
60	true	197	Deve-se distribuir R\$ 438,00 entre tr3s pessoas, de modo que as duas primeiras recebam quantias iguais e a terceira receba o dobro da soma do que as duas primeiras pessoas receberam. Quanto cada uma das pessoas recebeu?	0.35 / 0.2	0.95640	0.98617
72	true	215	A idade de um pai 3 igual ao triplo da idade de seu filho. Calcule essas idades, sabendo que juntos tem 60 anos.	0.4 / 0.2	0.98617	0.99535
80	false	209	$\langle \text{math} \rangle \langle \text{min} \rangle \langle \text{row} \rangle \langle \text{mtext} \rangle \langle \text{A soma das idades de Carlos e M3rio 3 40 anos. A idade de Carlos 3} \langle \text{mtext} \rangle \langle \text{mfrac} \rangle \langle \text{mrow} \rangle \langle \text{mn} \rangle \langle \text{m} \rangle \langle \text{mrow} \rangle \langle \text{mrow} \rangle \langle \text{mn} \rangle \langle \text{m} \rangle \langle \text{mrow} \rangle \langle \text{mfrac} \rangle \langle \text{mtext} \rangle \langle \text{da} \rangle \langle \text{mtext} \rangle \langle \text{mrow} \rangle \langle \text{math} \rangle$ idade de M3rio. Qual a idade de M3rio?	0.4 / 0.2	0.99535	0.99074
94	true	207	Foram distribuidos 28 l3pis entre 3 meninos, de modo que o segundo recebeu a metade do que recebeu o primeiro e o dobro do que recebeu o terceiro. Quantos l3pis recebeu cada menino?	0.35 / 0.2	0.99074	0.99713

Fonte: <http://siena.ulbra.br/tests/10620>.

Este aluno obteve tr3s erros na sua resolu33o: todos no n3vel dif3cil, n3o recebeu, pelo sistema, nenhuma quest3o de n3vel f3cil, sendo que no seu di3rio de campo dos estudantes de resolu33o foram feitas quest3es somente de organiza33o de racioc3nio, sem a necessidade de equacionar para resolver.

Assim como o aluno PAL 19 recebeu em seu teste sete quest3es de n3vel dif3cil, os outros alunos tamb3m obtiveram quest3es desse n3vel, apenas cinco alunos n3o fizeram nenhuma quest3o desse n3vel. N3o esquecendo que para que o aluno chegasse a essas quest3es, era necess3rio, na maioria das vezes, passar por, pelo menos, um dos n3veis anteriores. Por isso que 44% das 360 quest3es foram desse n3vel e tamb3m o n3mero de quest3es erradas foi significativo, conforme a figura 84.

Figura 84 - Gráfico de erros em cada nível de dificuldade



Fonte: a pesquisa.

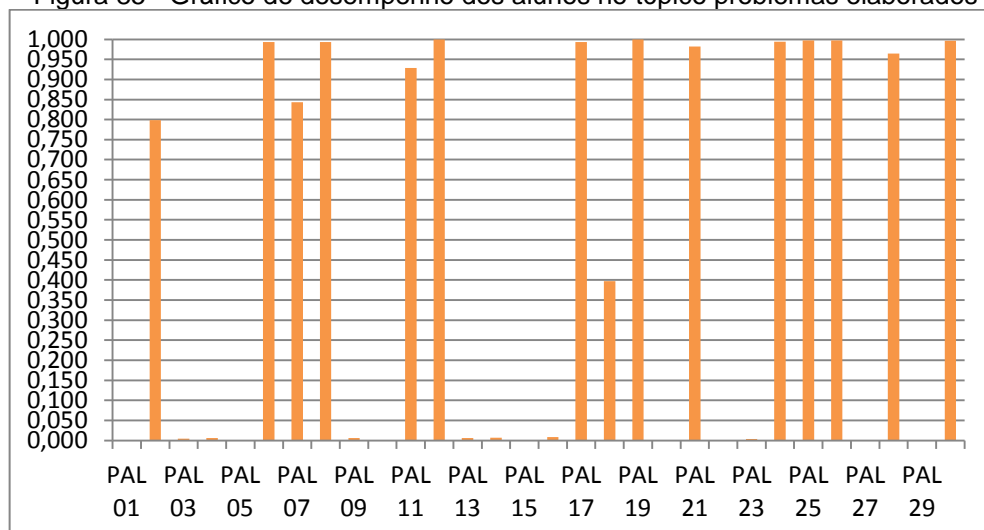
Foram 51% das questões erradas no teste adaptativo do nível difícil, lembrando que nesse tópico o que determina o nível de dificuldade são os tipos de interpretação e as equações encontradas para a resolução.

4.3.7 Análise do tópico Problemas Elaborados

O que difere o objetivo desses problemas elaborados dos problemas simples é que nesse tópico poderá aparecer qualquer tipo de operações matemáticas que envolvam o conhecimento algébrico, necessitando uma carga maior de atenção.

Foram realizadas um total de 328 questões distribuídas nos três níveis de dificuldade, sendo 134 no nível fácil, 103 no médio e 92 no difícil. Nesse tópico, observou-se que os alunos demonstraram dificuldade de interpretação; por vezes realizando perguntas de interpretação durante a aplicação do teste. Assim, apenas 48% deles conseguiram atingir a nota mínima de 0.6, conforme a figura 85 demonstra o desempenho dos alunos nesse tópico.

Figura 85 - Gráfico de desempenho dos alunos no tópico problemas elaborados



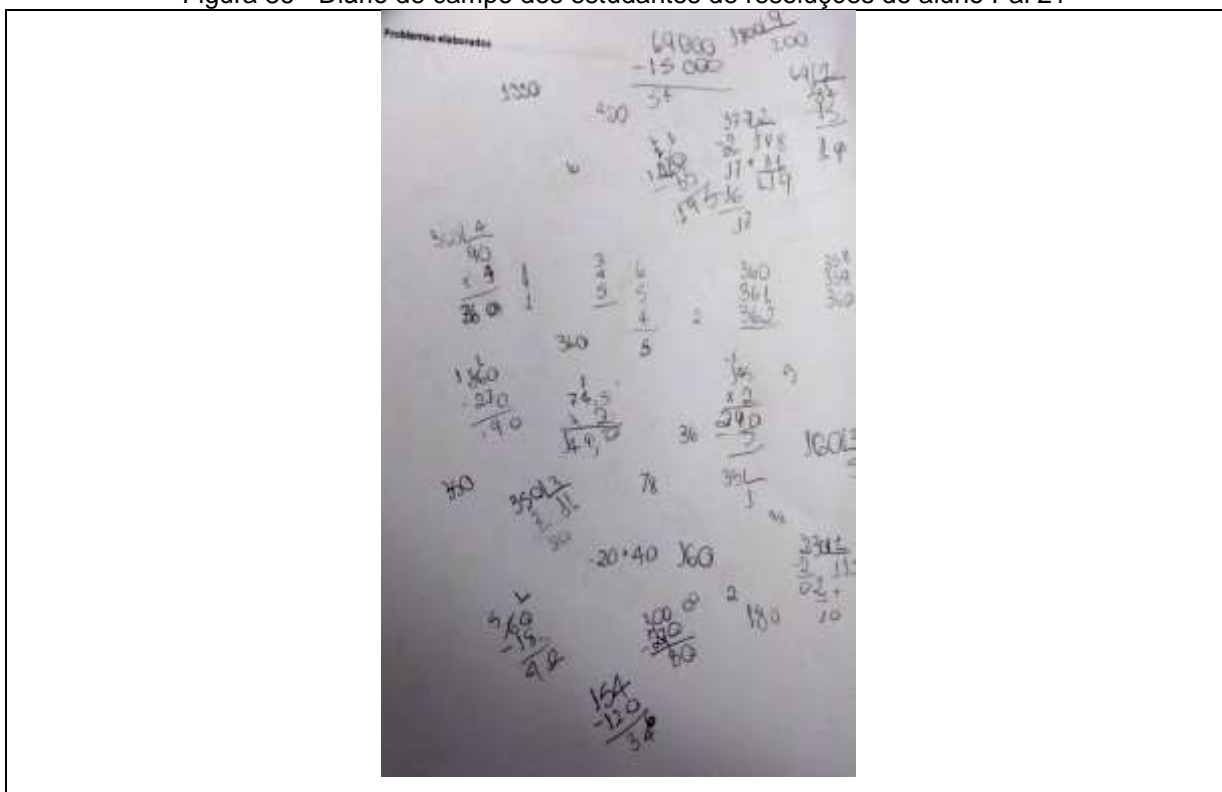
Fonte: a pesquisa.

Observa-se que 6 alunos tiveram seus testes invalidados, por não conseguirem responder as questões apresentadas. Tivemos também 9 alunos que obtiveram nota inferior a 0.1, enquanto dois tiveram nota 1.0, pontuação máxima. Dos alunos que haviam conseguido alcançar 0.6 no tópico problemas simples, apenas 11 conseguiram repetir isso nos problemas elaborados, mas, em contrapartida, 3 que não haviam conseguido no simples, tiveram êxito nos elaborados.

Nesse trimestre, os alunos realizaram 92 questões no nível difícil, sendo que 52% delas eles erraram. O que determinava o nível de dificuldade era a interpretação dos enunciados, iniciando com textos fáceis até interpretações mais apuradas, isso tudo aliado aos tipos de operações envolvidas e conhecimentos matemáticos necessários.

Os alunos levaram em média 68,08 segundos para resolver cada questão. Sendo que foi resolvida uma média de 13,7 questões por aluno nesse tópico. Demonstraram dificuldades nas resoluções, por vezes, não utilizando artifícios algébricos conforme observa-se na figura 86, em que consta o diário de campo dos estudantes de resoluções.

Figura 86 - Diário de campo dos estudantes de resoluções do aluno Pal 21



Fonte: a pesquisa.

Note-se que o aluno ao conseguir uma interpretação mais precisa não utiliza muitos artifícios algébricos em sua resolução. Esse é um dos estudantes que obteve nota superior a 0.6 no teste adaptativo. A seguir, a figura 87 mostra o teste que ele resolveu.

Figura 87 - Teste do aluno Pal 21

The screenshot shows the ULBRA test interface. On the left, there is a sidebar with navigation options: Inicio, Ayuda, Opciones para Teacher (professorsiena), Perfil Usuario, Lista de asignaturas, Lista de competencias, and Cerrar Sesión. The main area displays the test results for a student named Pal 21. The test is marked as 'Acabado: true' with a score of 0.982. A table lists 14 questions with their IDs, correct answers, times taken, and difficulty scores.

#Resposta	Resposta correcta	Tiempo(antes de que se acabe)	Pregunta	Dificultad / Adrinanza	Puntos antes	Puntos después
02	true	147	Em uma chácara existem galinha e coelhos totalizando 35 animais, os quais somam juntos 100 pés. Determina o número de galinhas e coelhos existentes nessa chácara	0.4 / 0.2	0.50000	0.75000
14	true	193	José usou $\frac{1}{2}$ de seu salário para pagar o aluguel de seu apartamento. Como ele recebeu de salário R\$ 1800,00, o seu aluguel foi de $\frac{9}{10}$	0.4 / 0.2	0.75000	0.90000
22	true	189	Adi uma conta corrente, em um banco, e depusitei certa quantia. Fui fazendo depósitos sucessivos até esta quantia dobrar. Então, retirei R\$ 600,00, e fiquei com R\$ 1800,00. O depósito inicial foi de $\frac{1}{2}$	0.4 / 0.2	0.90000	0.95429
33	false	167	Certo veículo utilitário custa R\$ 15000,00 a mais que o modelo sedan da mesma marca. Se os dois juntos custam R\$ 50000,00, o utilitário custa $\frac{1}{3}$	0.4 / 0.2	0.96429	0.93103
41	true	184	Numa urna contém bolas azuis, bolas vermelhas e bolas amarelas, totalizando 108 bolas. O número das azuis é o dobro das vermelhas e o número das amarelas é o triplo das azuis. Quantas bolas de cada cor existem na urna?	0.35 / 0.2	0.93103	0.97772
53	falsa	188	Numa competição de Kart, Marcus dá uma volta completa na pista oval em 28 segundos, enquanto José leva 32 segundos para completar uma volta. Quando Marcus completar a volta de número 40, José estará completando quantas voltas?	0.4 / 0.2	0.97772	0.95640
63	true	219	Pensei em três números consecutivos, cuja soma é 1083. Qual foi o maior dos três números que pensei?	0.35 / 0.2	0.95640	0.98617
71	false	171	Ache os números cuja diferença é $\frac{1}{3}$ de um número e o triplo do segundo é igual a $\frac{1}{7}$ de um número e o triplo do primeiro é igual a $\frac{1}{3}$ de um número	0.4 / 0.2	0.98617	0.97271
81	false	225	Juca está apaixonado! Para ver a namorada, ele faz uma longa viagem: 350 km a cada encontro. Numa de suas viagens, após alguns quilômetros, ele parou para um cafezinho e ainda percorreu o triplo do que já havia percorrido para chegar à cidade de sua namorada. Quantos quilômetros ele percorreu após o cafezinho?	0.35 / 0.2	0.97271	0.93975
94	true	168	Numa partida de basquete as duas equipes fizeram um total de 145 pontos. A equipe A fez o dobro de pontos, menos 5, que a equipe B. Então, a equipe A marcou $\frac{1}{2}$	0.3 / 0.2	0.93975	0.98201

Fonte: <http://siena.ulbra.br/tests/10803>.

Observa-se no decorrer do teste desse aluno que ele passou por todos os níveis de dificuldade, errando questões do nível difícil e do médio. Fez o mínimo de questões necessárias e levou em média 54 segundos para resolver cada uma delas.

4.3.8 Análise do tópico Sistemas de equações

O objetivo deste tópico foi verificar se os estudantes conseguiam identificar as equações que formam os sistemas de equações com uma ou duas incógnitas. Para isso o aluno teria que utilizar os tópicos já analisados de *Linguagem Matemática* e *Qual a pergunta do problema*, haja vista que os problemas apareciam assim, conforme nos mostra a figura 88.

Figura 88 - Apresentação da pergunta ao aluno durante o teste

Answer saved

Pregunta 2

Um estudante apanhou aranhas e joaninhas num total de 15, e as guardou numa caixa. Contou em seguida 108 patas. Quantas aranhas e joaninhas ele apanhou? (lembre-se que a aranha tem 8 patas e a joaninha 6)

3 Min. 13 Seg. restantes

- $\begin{cases} a + j = 108 \\ a + j = 15 \end{cases}$
- $\begin{cases} a + j = 15 \\ 8a + 6j = 108 \end{cases}$
- $\begin{cases} a + j = 15 \\ 8a + 6j = 108 \end{cases}$
- $\begin{cases} a + 6j = 100 \\ 8a + j = 15 \end{cases}$
- $\begin{cases} a + j = 15 \\ 8a = 6j \end{cases}$

Enviar

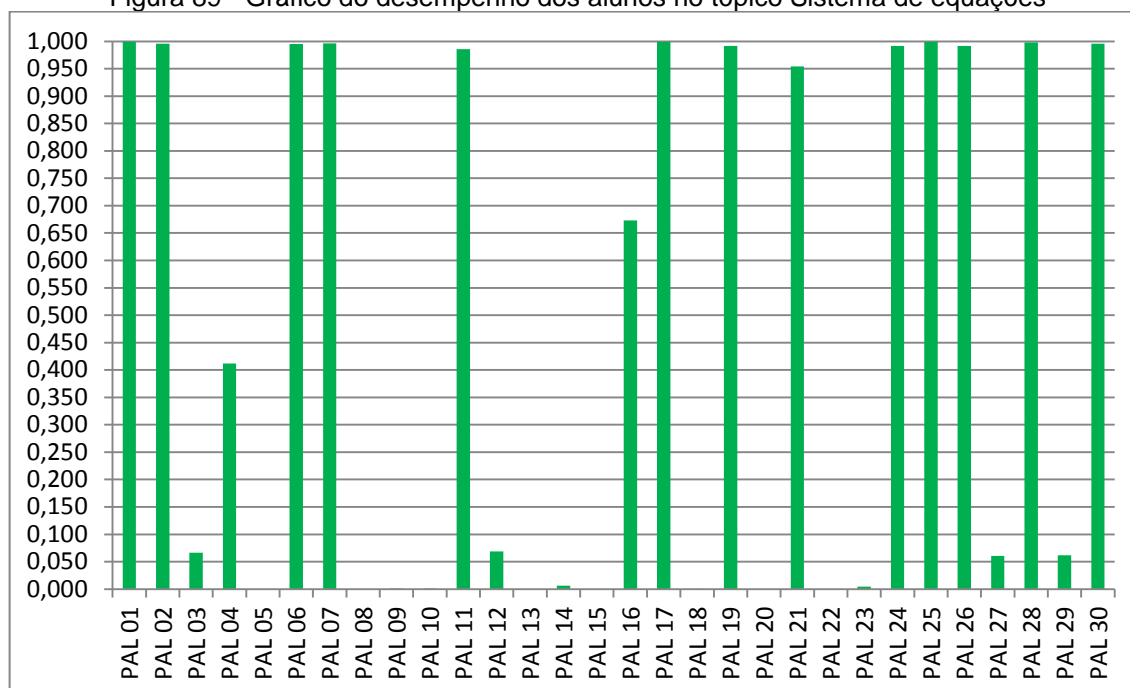
chat window

Fonte: <http://siena.ulbra.br/test/11075>.

Nota-se que o aluno recebe a questão, tendo que realizar a interpretação do enunciado, retirar os dados necessários do problema e montar as equações conforme a linguagem matemática que ele encontrou, para somente depois poder marcar qual a alternativa condiz com a sua análise.

Nesse tópico observa-se um total de 318 questões respondidas, sendo 121 questões no nível fácil, 98 no médio e 99 no difícil. Desse total, foram quase 54% das questões respondidas erroneamente. Quatorze alunos alcançaram notas superiores a 0.6 e 6 alunos tiveram seus testes invalidados por extrapolarem o tempo e/ou não terem conseguido responder aos problemas. A figura 89 mostra o desempenho dos alunos nesse teste.

Figura 89 - Gráfico do desempenho dos alunos no tópico Sistema de equações



Fonte: a pesquisa.

Tivemos 10 alunos que ficaram no intervalo de 0.01 até 0.599. Analisando seus resultados, consegue-se ver que 9 discentes mantiveram o tempo de resolução próximo da média, variando apenas a quantidade de questões. Um aluno fez a média de tempo de 1,8 segundos por questão, atingindo nota 0.001, conforme a figura 90, que mostra o teste do aluno Pal 18.

Figura 90 - Teste do aluno Pal 18

Acabado: true
Nota: 0.001

#Resposta	Respuesta correcta	Tiempo(antes de que se acabe)	Pregunta	Dificultad / Avanzanza	Puntos antes	Puntos después
03	false	237	Somando-se o número de habitantes de Macatuba ao de Lençóis Paulista, obtêm-se 88.000 habitantes. A população de Lençóis é o triplo da de Macatuba. Quantos habitantes tem cada cidade?	0.35 / 0.2	0.50000	0.38435
11	true	239	Eu tenho 20 cédulas, algumas de R\$ 5,00 e outras de R\$ 10,00. O valor total de cédulas é de R\$ 165,00. Quantas cédulas de R\$ 5,00 e quantas de R\$ 10,00 eu tenho?	0.3 / 0.2	0.30435	0.60494
24	false	238	Paga-se um produto com R\$ 180,00 com cédulas de R\$ 5,00 e de R\$ 10,00. Se o número total de cédulas é 23, então necessariamente foi pago com:	0.35 / 0.2	0.60494	0.40117
30	false	239	(UF - SE) Numra casa há bolas brancas e bolas pretas num total de 360. Se o número de brancas é o quádruplo do de pretas, então o número de bolas brancas é:	0.3 / 0.2	0.40117	0.20078
42	false	238	Marcos e Plínio têm juntos R\$ 35.000,00. Marcos tem a mais que Plínio R\$ 5.000,00. Quanto tem cada um?	0.3 / 0.2	0.20078	0.08610

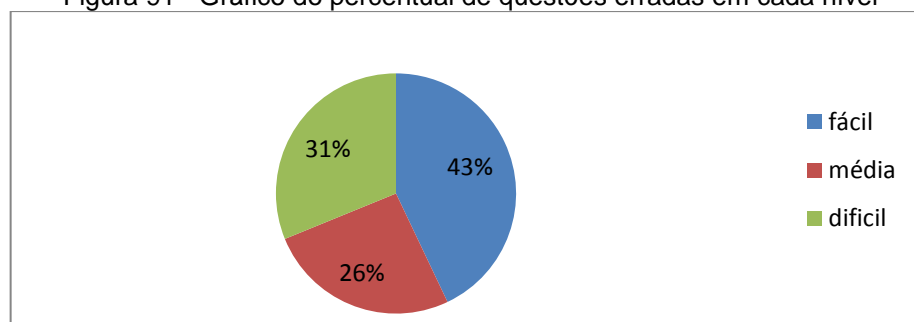
52	false	238	Eu tenho 30 cédulas, algumas de R\$ 5,00 e outras de R\$ 10,00. O valor total das cédulas é de R\$ 250,00. Quantas cédulas de R\$ 5,00 e quantas cédulas de R\$ 10,00 eu tenho?	0,3 / 0,2	0,08610	0,03412
64	false	238	A idade de um pai é igual à idade ao triplo da idade de seu filho. Calcule essas idades, sabendo que juntos tem 60 anos.	0,3 / 0,2	0,03412	0,01307
72	false	238	O perímetro de um retângulo mede 74 cm. Quais são suas medidas, sabendo-se que o comprimento tem 5 cm a mais que a largura?	0,3 / 0,2	0,01307	0,00404
81	false	239	Num estacionamento há carros e motos, totalizando 78. O número de carros é igual a 5 vezes o de motos. Quantas motos há no estacionamento?	0,3 / 0,2	0,00494	0,00186
83	false	238	Fábia tem 5 anos a mais que Marcela. A soma da idade de ambas é igual a 39 anos. Qual é a idade de cada uma?	0,3 / 0,2	0,00186	0,00070

Fonte: <http://siena.ulbra.br/tests/11035>.

Nitidamente, observa-se que esse aluno nem teve tempo hábil de ler as questões, apenas marcando aleatoriamente, fazendo, assim, apenas 10 questões.

Os níveis de dificuldade nesse tópico foram determinados pelo tipo de interpretação solicitada e pelas operações envolvidas. As questões em que os estudantes mais erraram foram as de nível fácil, demonstrando dificuldade de interpretação nos enunciados, conforme a figura 91.

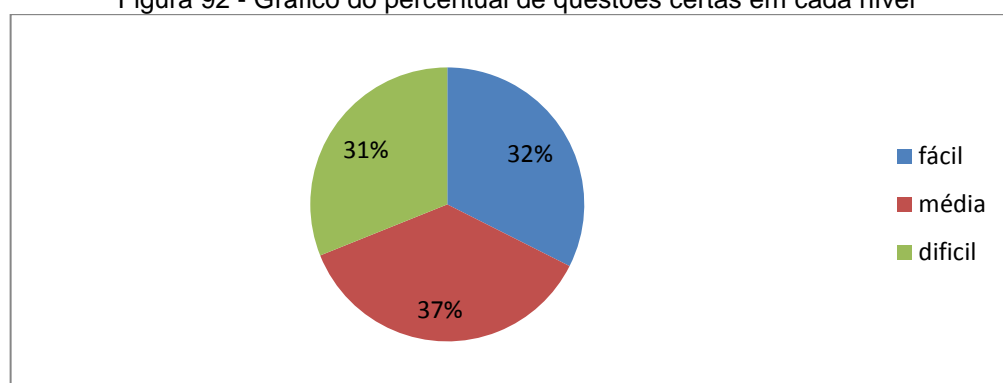
Figura 91 - Gráfico do percentual de questões erradas em cada nível



Fonte: a pesquisa.

Neste gráfico, podemos observar que das 170 questões que foram marcadas erradas somente 31% dos estudantes conseguiu chegar às questões difíceis; já das 148 questões que obtiveram respostas corretas, não houve uma diferença muito grande nas marcações das respostas, conforme figura 92.

Figura 92 - Gráfico do percentual de questões certas em cada nível



Fonte: a pesquisa.

Na distribuição das marcações das respostas corretas, observou-se que as questões que os alunos mais acertaram foram as de nível médio, mas que não houve diferença muito grande entre os níveis.

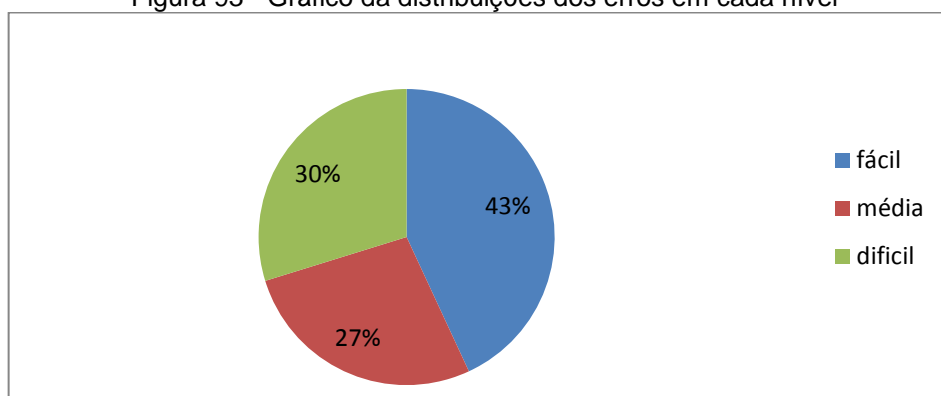
A maioria dos estudantes que alcançaram a nota mínima fizeram 10 questões e passaram pelos três níveis de dificuldades dentro desse tópico.

4.3.9 Análise do tópico Resolver sistema de equações do 1º grau simples

Neste tópico, tinha-se como objetivo identificar em um sistema de equações os elementos envolvidos em uma equação, resolvendo os sistemas e identificando os elementos algébricos presentes, além disso, o aluno também teve que utilizar muito da linguagem matemática, da retirada de dados e da análise da pergunta do problema, pois, sem esses passos, ele teria dificuldade em trabalhar com sistema de equação.

Foram respondidas um total de 336 questões, distribuídas nos três níveis de dificuldade, sendo 130 questões no nível fácil, 106 no nível médio e 100 no nível difícil. Desse total, os alunos obtiveram um total de 56% de questões respondidas errado. A figura 93 apresenta a distribuição desses erros separados por níveis.

Figura 93 - Gráfico da distribuições dos erros em cada nível

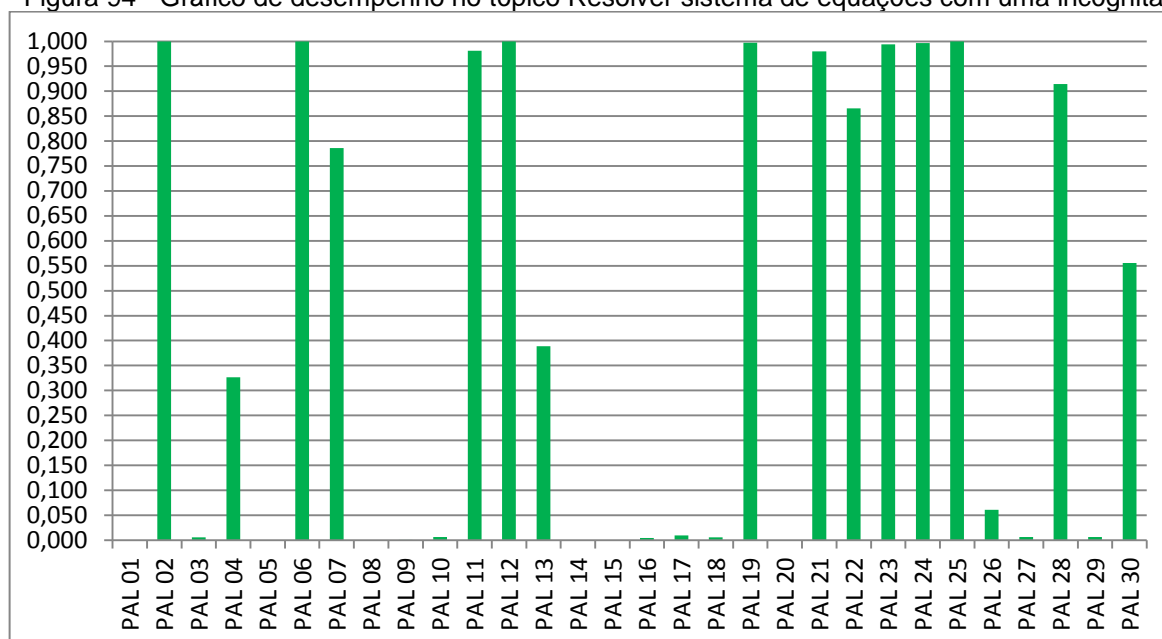


Fonte: a pesquisa.

No desenvolvimento do teste, daqueles alunos que concluíram, apenas 3 não conseguiram chegar às questões de nível difícil; os outros conseguiram desenvolver seus testes chegando até esse nível.

O que chama atenção é que 59% dos estudantes participantes do teste não conseguiram atingir a nota 0.6 e apenas 4 obtiveram nota 1.0, conforme o gráfico de desempenho da figura 94.

Figura 94 - Gráfico de desempenho no tópico Resolver sistema de equações com uma incógnita



Fonte: a pesquisa.

Também de acordo com o gráfico, tivemos 6 alunos que tiveram seus testes invalidados e 9 que obtiveram nota inferior a 0,01. Os alunos demoraram em média 51,4 segundos para responder cada questão. O discente que obteve a nota mais alta demorou em média 85,6 segundos para responder cada uma das 10 questões que o sistema lhe deu. A seguir, a figura 95 traz o teste do aluno Pal 02.

Figura 95 - Teste do aluno Pal 02

#Resposta	Resposta correcta	Tiempo(antes de que se acabe)	Pregunta	Dificultad / Adivinanza	Puntos antes	Puntos después
01	true	205	Numa caixa, o número de bolas pretas é o triplo de bolas brancas. Se tiramos 2 brancas e 26 pretas, o número de bolas de cada cor ficará igual. Qual a quantidade de bolas brancas?	0.3 / 0.2	0.50000	0.77778
13	true	202	Dois família tem juntas 18 filhos. Uma delas possui o dobro da quantidade de filho da outra. Quantos filhos tem cada família?	0.35 / 0.2	0.77778	0.91919
22	true	120	A soma das idades de dois irmãos é 29 anos e daqui a 8 anos a idade do mais velho será o dobro da idade do mais novo. Qual é a idade de cada irmão?	0.4 / 0.2	0.91919	0.97153
32	true	99	Em uma partida de videogame, Tiago conseguiu 160 pontos em três rodadas. Na 2ª rodada, ele fez 20 pontos a menos que na 1ª, e na 3ª rodada ele fez o dobro de pontos feitos na 2ª. Quantos pontos Tiago fez em cada rodada?	0.4 / 0.2	0.97153	0.99033
43	false	190	Num caixote há laranjas e maçãs num total de 100 frutas. O número de maçãs é dois terços do número de laranjas. Quantas maçãs e quantas laranjas há no caixote?	0.4 / 0.2	0.99033	0.99084

54	true	154	A soma das idades de Carlos e Mário é 40 anos. A idade de Carlos é três quintos da idade de Mário. Qual a idade de Mário?	0,35 / 0,2	0,98084	0,99402
61	true	144	Um terreno retangular tem 18 metros a menos de largura do que de comprimento. O perímetro do terreno é de 84 metros. Qual é o comprimento e a largura desse terreno?	0,4 / 0,2	0,99402	0,99800
74	false	133	A soma das idades de Fernando e Hélio é 35 anos. Hélio, daqui a 4 anos, terá o dobro da idade que Fernando tinha há 3 anos, qual é a idade de cada um?	0,4 / 0,2	0,99800	0,99601
80	true	165	(UMC – SP) Deseja-se cortar uma tira de couro de 120 cm de comprimento, em duas partes tais que o comprimento de uma seja igual ao triplo da outra. A parte maior mede:	0,35 / 0,2	0,99601	0,99877
93	true	132	Num depósito existem 24 extintores de incêndio, sendo de espuma química e dióxido de carbono. Sabendo-se que o dióxido de carbono é o triplo do de espuma química, conclui-se que o número de extintores de espuma química existentes nesse depósito é:	0,4 / 0,2	0,99877	0,99959

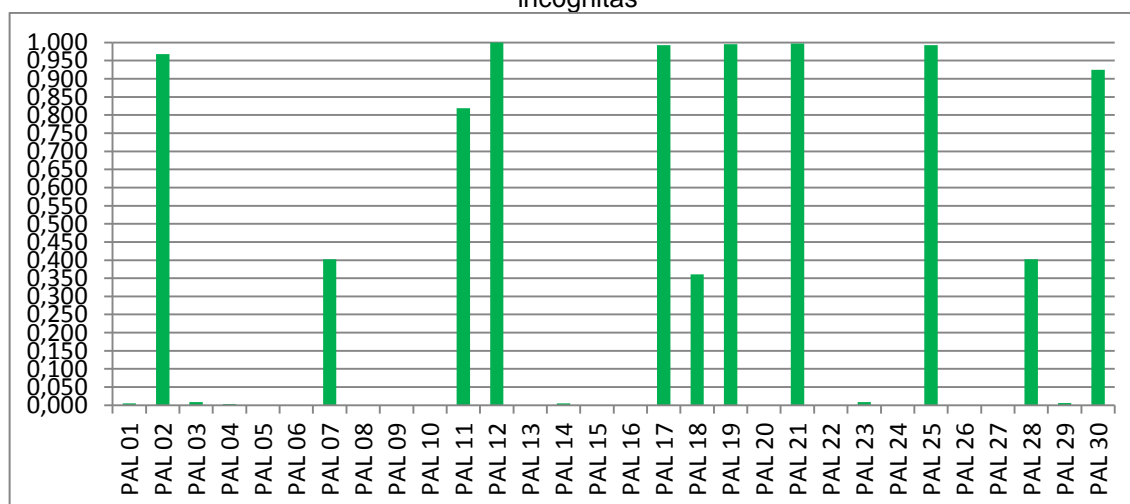
Fonte: <http://siena.ulbra.br/tests/10935>.

Mesmo o aluno Pal 02 errando duas questões, o teste dele obteve uma nota ótima, pois as questões que ele errou eram de nível difícil, mas ele já havia acertado outras questões desse nível, demonstrando, assim, ter a compreensão e capacidade de resolver um sistema de equações, haja vista que o nível de dificuldade nesse teste é dado pela utilização das operações e pelo grau de interpretação que o enunciado requer.

4.3.10 Análise do tópico Resolver sistema de equações do 1º grau elaborado

Neste tópico, obtivemos apenas 24% dos alunos desta turma que atingiram o objetivo que era resolver situações-problema envolvendo sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas, seja por qualquer processo que o aluno esteja acostumado a resolver. A figura 96 traz o gráfico do desempenho dos alunos.

Figura 96 - Gráfico de desempenho dos alunos no tópico resolver sistemas de equações com duas incógnitas

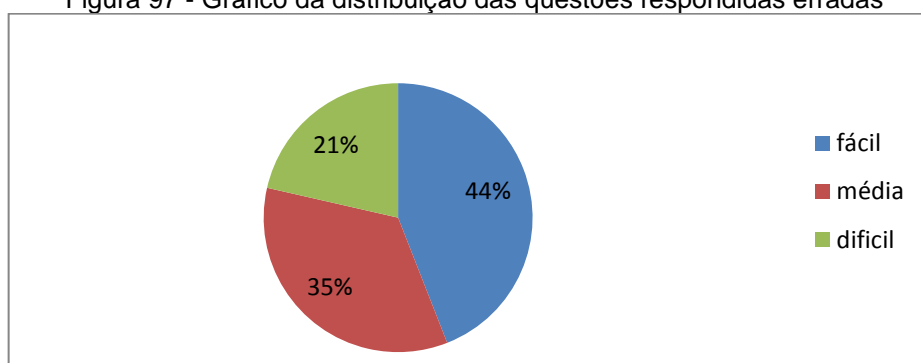


Fonte: a pesquisa.

Podemos observar que apenas 8 alunos obtiveram nota superior a 0.6 nesse tópico e que 10 invalidaram seus testes. Também 9 alunos ficaram com notas inferiores a 0.01.

Foram respondidas 275 questões, sendo que 168 foram respondidas errado, destaca-se a figura 97 que demonstra a distribuição em cada nível.

Figura 97 - Gráfico da distribuição das questões respondidas erradas



Fonte: a pesquisa.

A porcentagem alta de erros no nível fácil demonstra que os alunos demonstraram muita dificuldade para chegar aos outros níveis. Das 57 respostas dadas às questões de nível difícil, 44 foram respondidas pelos 8 estudantes que obtiveram nota entre 0.6 e 1.0. Dos 9 alunos que não alcançaram nota 0.6, que tiveram os testes validados, apenas 3 não receberam questões desse nível para responder. Nesse tópico, o que define a dificuldade é a interpretação do problema, ou seja, o tipo de texto empregado e a resolução propriamente dita do sistema de equação, para poder encontrar a resposta correta.

Os alunos responderam em média 13,75 questões, demorando em média 67,1 segundos para responder cada uma. O estudante que mais demorou levou em média 153,5 segundos. A figura 98 mostra o teste do aluno Pal 21.

Figura 98 – Teste do aluno Pal 21

Acabado: true
Nota: 0.997

#Resposta	Resposta correcta	Tiempo (antes de que se acabe)	Pregunta	Dificultad / Adhiranza	Puntos antes	Puntos después
00	false	142	Um estudante apanhou aranhas e joaninhas num total de 15, e as guardou numa caixa. Contou em seguida 108 patas. Quantas aranhas e joaninhas ele apanhou? (Lembre-se que a aranha tem 8 patas e a joaninha 6)	0.4 / 0.2	0.50000	0.33333
13	true	109	Num pátio existem automóveis e bicicletas. O número total de rodas é 130, e o número de bicicletas é o triplo do número de automóveis. Qual é o número de automóveis e bicicletas que se encontram no pátio?	0.35 / 0.2	0.33333	0.61905
21	true	166	(JMSF - 2002) – Dois casais de namorados foram à feira e pararam em frente a uma banca que venda pastéis e caldo de cana. O primeiro casal pagou R\$ 5,40 por um pastel especial e dois copos de caldo de cana. O segundo casal pagou R\$ 9,80 por três copos de caldo de cana e dois pastéis especiais. A diferença entre o preço de um pastel especial e o preço de um copo de caldo de cana foi de	0.4 / 0.2	0.61905	0.82979
32	true	161	(PMES – 2009) – Em uma padaria, dois brigadeiros mais um quindim custam R\$ 5,00. Uma pessoa comprou três brigadeiros e dois quindins e pagou R\$ 8,50 por eles. Nessas condições, pode-se concluir que	0.4 / 0.2	0.82979	0.93600
43	false	179	(CTSB – 2009) – Dois amigos foram juntos ao supermercado para comprar vinhos. Um deles comprou 3 garrafas do vinho A e 2 do vinho B, pagando o total de R\$ 79,00. O outro comprou 5 garrafas do vinho A e 1 do vinho B, pagando o total de R\$ 92,00. Pode-se concluir que 1 garrafa do vinho A custa, em relação a 1 garrafa do vinho B,	0.4 / 0.2	0.93600	0.67970
50	true	235	Paga-se um produto com R\$ 180,00 com cédulas de R\$ 5,00 e de R\$ 10,00. Se o número total de cédulas é 23, então necessariamente foi pago com:	0.35 / 0.2	0.87970	0.95962
53	false	200	(CASA/SP – 2010) (adaptada) – Em um jogo de 38 perguntas, cada competidor responde todas as perguntas e pode atingir, no máximo, 100 pontos. Cada pergunta respondida corretamente vale 2 ou 5 pontos, dependendo da pergunta. Quantas questões de 5 pontos foram respondidas?	0.4 / 0.2	0.95962	0.92238
72	true	168	Eu tenho 20 cédulas, algumas de R\$ 5,00 e outras de R\$ 10,00. O valor total de cédulas é de R\$ 165,00. Quantas cédulas de R\$ 5,00 e quantas de R\$ 10,00 eu tenho?	0.35 / 0.2	0.92238	0.97475
82	true	190	(TJSP – 2005) – Numa fazenda há ovelhas e avestruzes, totalizando 90 cabeças e 260 patas. Comparando-se o número de avestruzes com o das ovelhas, pode-se afirmar que há	0.4 / 0.2	0.97475	0.99144
90	true	180	(PMES – 2008) – Em uma lanchonete, 2 sanduíches naturais mais 1 copo de suco custam R\$ 10,00, e 1 sanduíche natural mais 2 copos de suco custam R\$ 9,20. O preço de um sanduíche natural mais um copo de suco é	0.4 / 0.2	0.99144	0.99713

Fonte: <http://siena.ulbra.br/tests/10997>.

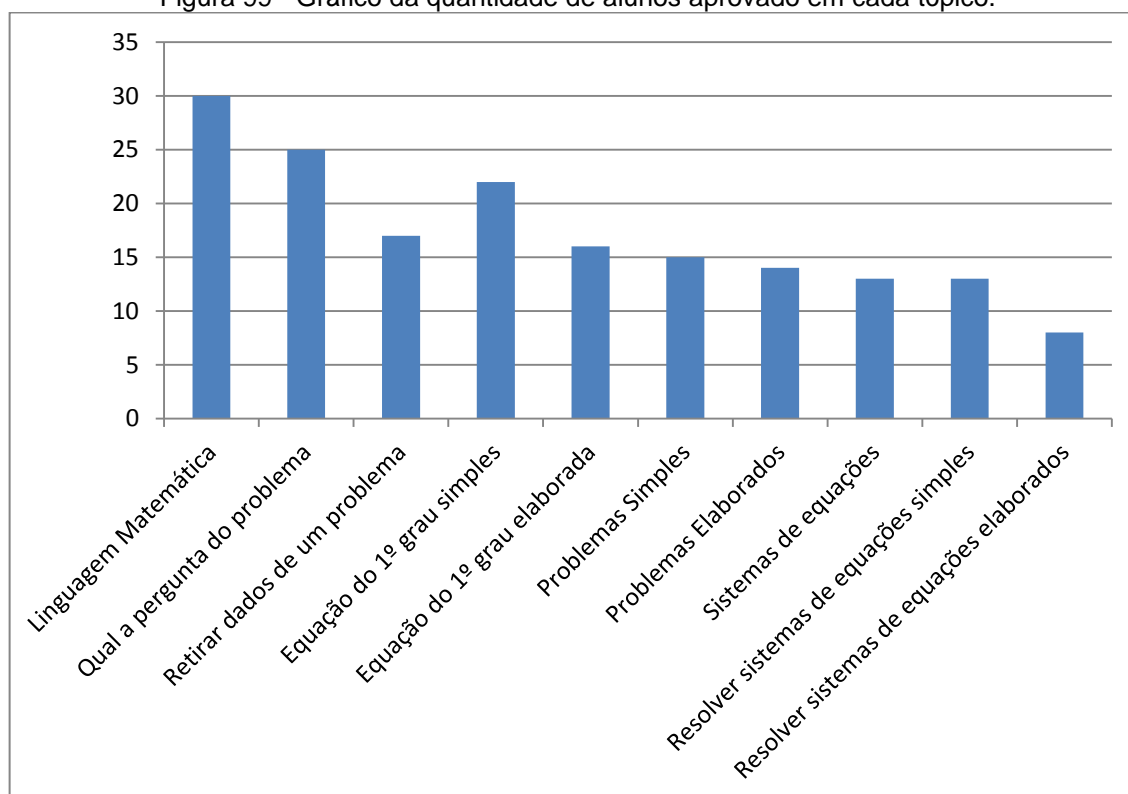
Este aluno respondeu 10 questões, errando apenas 3 questões sendo elas do nível difícil, obtendo nota 0.997. Os alunos demonstraram grande dificuldade nesse tópico, em virtude de não conseguirem interpretar os problemas, pois se trabalhava com duas incógnitas e eles não apresentaram dificuldade em montar os sistemas de equações para poder resolvê-los.

4.4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os estudantes obtiveram desempenho relativamente bom nos tópicos em que necessitavam interpretação básica das operações envolvendo componentes algébricos. Os alunos, dentro dos passos destacados por Polya(1945), conseguiram realizar a compreensão dos problemas, haja vista que nos tópicos Linguagem Matemática, Qual a pergunta do problema e Retirar dados de um problema, obtivemos mais de 59% dos alunos que atingiram os objetivos propostos, alcançando no mínimo nota 0,6. No segundo passo desse autor, referente a estabelecer um plano para a resolução, os alunos também conseguiram atingir seus objetivos, pois se observou que mesmo errando algumas questões eles utilizavam artifícios algébricos para a resolução dos problemas. Na execução dos problemas, observou-se uma dificuldade naqueles em que os discentes necessitavam de uma leitura mais aprofundada, envolvendo mais operações.

Os tópicos em que os alunos saíram-se melhores foram Linguagem matemática, Qual a pergunta do Problema e Equação do 1º grau simples. A figura 99 apresenta um gráfico da quantidade de alunos que obteve aprovação em cada tópico, ou seja, daqueles que tiraram nota superior á 0,6.

Figura 99 - Gráfico da quantidade de alunos aprovado em cada tópico.

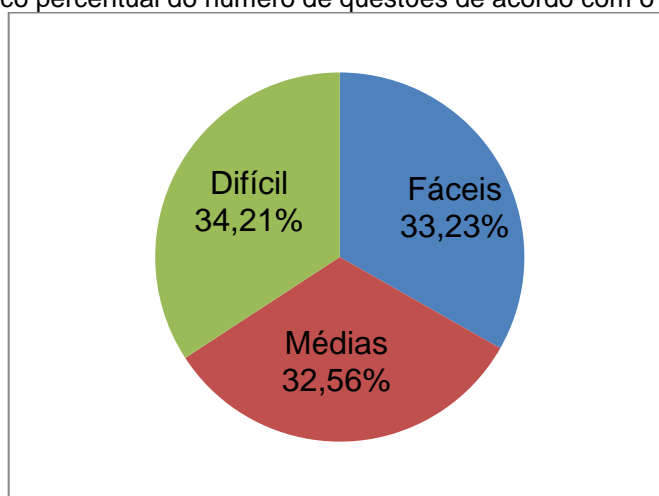


Fonte: a pesquisa.

Na figura anterior, pode-se observar também que o tópico com o menor número de alunos que atingiram o objetivo foi Resolução de sistema de equações elaboradas, com apenas 26,67% conseguindo aprovação. Os alunos apresentaram muita dificuldade na montagem e análise dos sistemas, assim comprometendo todo seu desempenho nesse tópico, pois, não conseguindo organizar o sistema de equações do 1º grau, não conseguiam dar continuidade ao desenvolvimento.

Nos testes adaptativos, os estudantes realizaram um total de 3470 questões, distribuídas nos três níveis de dificuldade, como demonstra a figura 100, que trata do percentual do número de questões, de acordo com o nível de dificuldade.

Figura 100 - Gráfico percentual do número de questões de acordo com o nível de dificuldade



Fonte: a pesquisa.

Observa-se na figura 100 que dentro do total de questões apresentadas aos 30 alunos, durante os testes adaptativos, os níveis de dificuldade ficaram equilibrados e que em média cada estudante respondeu 115 questões. Lembrando que o sistema SIENA distribui o tipo e a quantidade de questões para cada aluno, de acordo com o desempenho no teste adaptativo.

Na realização dos testes, o pesquisador observou que os estudantes tinham empenho e empolgação para a realização das questões, pois, para a sua realização, utilizavam computador, *tablet* ou *smartphone*. A utilização dessas tecnologias chamou a atenção dos discentes, fazendo com que eles realizassem os testes adaptativos com mais empolgação e interesse, principalmente as atividades que desafiavam seu conhecimento. A possibilidade que os alunos tinham de verificar seu desempenho também fez com que alguns tentassem melhorar suas notas ou até se saírem melhor que os colegas. Um ponto negativo observado foi que alguns, quando se deparavam com questões que possuíam enunciados muito extensos,

desestimulavam-se e acabavam, por vezes, não realizando as questões por completo: ou por não compreenderem o enunciado; ou por não conseguirem formalizar um raciocínio, assim gerando um número enorme de questões, podendo chegar até 20 questões.

Os alunos, em linhas gerais, obtiveram um bom desempenho nos testes adaptativos atingindo os objetivos propostos, pois na resolução dos mesmos obtiveram a aprovação em mais de 50% dos tópicos utilizados nesta pesquisa. Em algumas situações em que demonstraram maior dificuldade, eles necessitaram de uma base algébrica mais apurada para a resolução dos problemas, sempre tentando trazer para a aritmética com vistas a resolver os problemas ao invés de pensar algebricamente.

Dentro das expectativas do pesquisador, pode-se afirmar que os alunos do nono ano desta escola da rede estadual de ensino do Estado do Rio Grande do Sul possuem desenvolvida a competência de resolução de problemas que envolvam, na sua resolução, conhecimentos algébricos. Mas podemos observar que os conhecimentos algébricos desses alunos necessitam de uma maior ênfase no domínio da linguagem algébrica quando se necessita de uma leitura de textos mais longos e que na sua resolução necessitam do uso de sistemas de equações.

Após a realização do experimento, os estudantes participantes tiveram a oportunidade de manifestar seu pensamento em relação ao trabalho realizado por meio da resposta de duas perguntas: *O que você achou destes testes, frente ao seu posicionamento e percepção?* e *O que você achou deste momento de retorno dado pelo pesquisador?*

Respondendo à primeira pergunta, em geral, os alunos acharam os testes bem interessantes, mas afirmam ter como dificuldade a interpretação dos enunciados, tornando, por vezes, as questões mais difíceis. Mesmo assim conseguiram realizá-las em sua maioria. Também colocaram como positivo a possibilidade de perceber seus erros (pequenos ou grandes) e tentar saná-los.

A falta de atenção e o esquecimento de alguns conhecimentos básicos também contribuíram para alguns erros, os quais proporcionaram a retomada dos conteúdos e a resolução de questões, até então, consideradas difíceis por eles.

O nível de dificuldade variou de fácil a difícil, segundo eles, seja por que disseram não entender o que era solicitado ou pela dificuldade das questões relacionadas à matemática em si, mas todos apreciaram o experimento.

Já em relação à segunda pergunta, eles acharam muito válido o retorno do pesquisador, seja por que revisaram conteúdos aprendidos há mais tempo dos quais haviam se esquecido; seja por que ajudou a entender questões não compreendidas, seja, ainda, por que puderam esclarecer os erros cometidos e a forma de como solucioná-los, acrescentando que a turma pode ter uma ideia de como está seu aproveitamento em matemática como um todo.

Pode-se destacar que os alunos obtiveram bom desempenho nos tópicos: Linguagem Matemática, Identificar Qual a pergunta do problema, Retirar dados do problema, Equação do 1º grau simples, Equação do 1º grau elaborada e Problemas simples; apresentaram, todavia, dificuldades nos tópicos: Resolver problemas elaborados, Identificar Sistemas de Equações, Resolver Sistema de Equações simples e Resolver Sistemas de Equações elaboradas.

CONCLUSÃO

A pesquisa desenvolvida objetivou investigar se os alunos de uma turma do nono ano do Ensino Fundamental possuem desenvolvida a competência de resolução de problemas que envolvem o pensamento algébrico nos conteúdos de equações do 1º grau e sistemas de equações do 1º grau.

Para atingir essa meta, diferentes etapas foram executadas. A primeira envolveu um levantamento bibliográfico sobre pensamento algébrico e resolução de problemas. Ainda nessa etapa, iniciou-se a criação de problemas matemáticos que envolvessem a álgebra para utilização de um pensamento algébrico. A segunda fase foi o estudo sobre o funcionamento do sistema informático SIENA, construção do grafo com os tópicos. A terceira fase foi a implementação do sistema de investigação na plataforma SIENA, em que foi criado o banco de questões, em que para cada tópico foram utilizadas 45 questões distribuídas dentro dos níveis de dificuldade. Essas questões foram utilizadas para alimentar os testes adaptativos gerados por esse sistema. A quarta fase referiu-se à aplicação dos testes adaptativos com trinta alunos do nono ano do Ensino Fundamental de uma Escola Estadual de Ensino do município de Porto Alegre, do Estado do Rio Grande do Sul.

Nesta pesquisa, após a análise dos resultados obtidos pela aplicação dos testes adaptativos, foi possível identificar que os estudantes possuem dificuldade na resolução dos problemas que envolvem sistemas de equações na sua organização e resolução, possuindo uma compreensão limitada sobre esse assunto. Nos outros tópicos desta investigação, os alunos demonstram dominar os problemas, que para sua resolução necessitam do uso do pensamento algébrico e também o domínio da linguagem Matemática, bem como a compreensão dos problemas.

Os registros dos alunos, tanto nos diários de campo como no banco de dados do SIENA e nas observações feitas pelo pesquisador durante os experimentos, revelaram que os alunos possuem uma certa resistência ao hábito de leitura e interpretação de textos mais longos. Observou-se que os estudantes ao serem “desafiados” pelo texto demonstram uma estratégia para a resolução das atividades, mas que a grande maioria, quando essa estratégia “falha”, não verifica as variáveis que empregou.

É importante salientar que nas aplicações dos testes adaptativos, os alunos utilizaram variadas ferramentas para sua execução como computadores *desktop*, *netbook*, *tablets* e os seus *Smartphones*. A utilização dessas tecnologias fez com

que transparecesse, durante as aplicações, que eles estavam mais interessados no desenvolvimento das atividades.

Em relação aos tópicos, constatou-se que, por meio do desempenho dos alunos fornecido pelo banco de dados do SIENA, o tópico em que eles obtiveram maior dificuldade foi o que envolvia sistemas de equações, pois alguns discentes conseguiram realizar a montagem do sistema, mas na sua resolução erraram.

O tópico em que demonstraram maior facilidade foi o de linguagem Matemática, no qual eles de acordo com o problema deveriam assinalar a alternativa que continha a expressão numérica correspondente ao problema, obtendo 100% de aprovação nesse tópico.

Após as aplicações dos testes adaptativos e da análise de dados, foi realizada uma aula com a turma do nono ano participante desse experimento, quando foi explicado o objetivo de cada tópico e foram demonstradas duas questões em cada nível de dificuldade. Foi uma aula muito interessante, em que os alunos fizeram muitas perguntas e se deram conta dos erros que cometeram, muitos por falta de atenção e outros por não compreenderem o que o problema requeria para sua resolução. Os estudantes foram unânimes em apontar os tópicos com maior dificuldade como sendo os que envolviam na sua resolução sistema de equações do 1º grau. Foi realizada uma conversa informal com os alunos sobre o que eles haviam achado da aplicação dos testes: alguns relataram que era muito bom para poderem ver como eles estão ao ingressar no ensino médio; outros acharam algumas questões difíceis, mas gostaram muito de realiza-las.

Em relação à plataforma SIENA, essa se mostrou eficiente como suporte aos testes aplicados, possibilitando um ambiente no qual os alunos podem trabalhar de forma individualizada, respeitando suas especificidades e podendo refazer os testes nos quais eles não obtiveram aprovação. O SIENA fornece um banco de dados que auxilia na identificação das dificuldades individuais do aluno, também disponibiliza o tempo que o mesmo demorou ao responder às questões, bem como as alternativas que marcaram. Também possibilita uma análise dos números de questões respondidas em cada nível de dificuldade.

Espera-se que esta investigação contribua para que os professores trabalhem a competência da resolução de problemas, utilizando o pensamento algébrico e que o referencial teórico utilizado nesta pesquisa possa ser aprofundado e aprimorado para que sirva como embasamento para novas análises. Também se

deseja que as análises da pesquisa contribuam para o processo de ensino e aprendizagem, a fim de que com elas possamos, cada vez mais, aprofundar esses temas no Ensino Fundamental, assim, organizando a base matemática de nosso aluno, aplicando e entendendo a utilização do pensamento algébrico na resolução de problemas.

Serão desenvolvidas pesquisas futuras com atividades didáticas para o desenvolvimento do pensamento algébrico integrado à metodologia resolução de problemas, sequência didática eletrônica com a temática avaliada e realização de experimentos nos quais os estudantes realizem estudos de recuperação para as dificuldades que apresentem.

Essa dissertação teve o apoio da Capes com uma bolsa taxa para o pesquisador.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABBAGNANO, Nicola. **Dicionário de filosofia**. 1ª edição brasileira, Ed. Martins Fontes, São Paulo, 2007.

ALLEVATO, Norma Suely Gomes. **Associando o computador à resolução de problemas fechados: análise de uma experiência**. UNESP, São Paulo, 2005.

ALLEVATO, Norma Suely Gomes; ONUCHIC, Lourdes de La Rosa. **Ensinando Matemática na sala de aula através da Resolução de problemas**. Boletim GEPEM, Rio de Janeiro, ano 33, n 55, p133-156, jul./dez. 2009.

AMADO, Nélia; NOBRE, Sandra; CARREIRA, Suzana. **Conceitos e raciocínio matemático na resolução de problemas numéricos**. Lisboa, Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. 2009.

AMERON, Barbara Van. **Reinvention of early Algebra: Developmental reserch on the transition from arithmetic to álgebra**. 2002. Tese de doutorado. Proefschrift Universit Utrecht. Disponível em: <http://dspace.library.uu.nl/bitstream/handel/1874/874/full.pdf?sequence=18>. Acesso em Novembro de 2015.

ASSOCIAÇÃO DOS PROFESSORES DE MATEMÁTICA. **Princípios e normas para a Matemática escolar**. Lisboa: APM, 2007.

BECHER, Ednei Luis. Características do pensamento algébrico de estudantes do 1º ano do ensino médio. Canoas (Dissertação de Mestrado PPGECIM), ULBRA, 2009.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática: introdução aos parâmetros curriculares nacionais**. Brasília: 1998 a.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática: introdução aos parâmetros curriculares nacionais**. Brasília: 1998 b.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Currícular**. Brasília: 2016.

BRASIL. Senado Federal **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional nº. 9394** , Brasília, 1996.

BRENES, Victor; MURILLO, Marielos. **Algunos objetos de estudio del constructivismo**. Memorias de la Octava Reunión Centroamericana y del Caribe sobre formación de profesores e investigación em Matemática Educativa. Univesidad Estatal a Distancia, San José de Costa Rica: p. 373-378. 1994

BRITO. Márcia Regina Ferreira de (org.). **Solução de Problemas e a Matemática escolar**. Campinas: Ed. Alínea, 2006.

CARVALHO, João Pitombeira; ALVES, Sérgio; MILIES, Francisco César Polcino. **A geometria do globo terrestre**. IME/USP. Disponível em www.bienasbm.ufba.br, v.29, 2009. Acesso em 23 de maio de 2016.

- COSTA, Denise Reis. **Métodos estatísticos em testes adaptativos informatizados**. 2009. 107 f. Dissertação (Mestrado em Estatística) – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2009.
- D'AMORE, Bruno. **Elementos de didática da Matemática**. São Paulo: Ed. Livraria da Física, 2007.
- DALTO, Jader Otavio; BURIASCO, Refina Luzia Corio. **Problema proposto ou problema resolvido: Qual a diferença?** Revista Educação e Pesquisa, São Paulo, V.35, n.3, p.449-461, set./dez. 2009.
- DANTE, Luiz Roberto. **Didática da resolução de problemas de Matemática**. São Paulo: Ática, 1996.
- DANTE, Luiz Roberto. **Didática da resolução de problemas de Matemática**. São Paulo: Ática, 1989.
- DANTE, Luiz Roberto. **Formulação e resolução de problemas de Matemática teoria e prática**. 1ª. ed. São Paulo: Ática, 2010.
- DOLZ, Joaquim. SCHNEUWLY, Bernard. **Gêneros orais e escritos na escola**. Campinas/SP: Mercado das Letras, 2004.
- ECHEVERRÍA, María del P. P. A Solução de Problemas em Matemática. In: POZO, Juan Ignacio (org). **A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender**. Porto Alegre: Artmed, 1998.
- FALCÃO, Jorge da Rocha. **Linguagem algébrica**. Revista didática da Matemática. p.25-38. UFPE, 1997
- FALCÃO, Jorge T. R. **Alfabetização algébrica nas séries iniciais. Como começar?** *Boletim GEPEM*, 42, 27-36, 2003.
- FIORENTINI, Dario; FERNANDES, Fernando Luís .Pereira; CRISTOVÃO, Eliane Matesco. **Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico**.In. Seminário Luso-Brasileiro de Investigações Matemáticas no Currículo e na Formação de Professores, Lisboa, 2005. Disponível em: <http://www.educ.fc.pt/docente/jponte/temporario/SEMLB/Fiorentini-Fernandes-Cristovao2.doc>. Acesso em 03 de março de 2015.
- FLEMMING, Diva Marilia. **Tendências em educação matemática**. 2 ed. Palhoça: Unisul Virtual, 2005.
- GERONIMO, Rafael Rix; SAITO, Fumikazu. **O papiro de Rhind: um estudo preliminar**. Revista de produção discente em Educação Matemática. São Paulo. PUC-SP, 2012. V.1, n.1. P.123-132.

GODINO, Juan. D.; FONT. Vicenç. **Razonamiento Algebraico y su Didáctica para Maestros**. Disponível em: <http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/> Acesso em: abril de 2015. Granada, Espanha: Universidade de Granada, 2003.

GROENWALD, Claudia Lisete Oliveira. **A Matemática e o desenvolvimento do raciocínio lógico**. Educação matemática em Revista – SBEM – RS. 1999, nº 1, 23-30.

GROENWALD, Claudia Lisete Oliveira. **Resolvendo problemas na matemática**. Acta Scientiae, Canoas, v. 1, n. 1, p. 45-51, Março 1999.

GROENWALD, Claudia Lisete Oliveira; MORENO, Lorenzo Ruiz. **Formação de Professores de Matemática: uma proposta de ensino com novas tecnologias**. Acta Scientiae, Canoas, v.8, n.2, jul./dez.2006.

GROENWALD, Claudia Lisete Oliveira; BECHER, Ednei Luis, **Características do Pensamento Algébrico de Estudantes do 1º Ano do Ensino Médio**. Educação Matemática Pesquisa, v.12, n.2, 2010.

KAIBER, Carmen Teresa; GROENWALD, Claudia Lisete Oliveira. Educação Matemática. In: BONIN, Iara Tatiana; RIPOLL, Daniela; KIRCHOF, Edgar Roberto; POOLI, João Paulo (Orgs.) **Cultura, Identidades e Formação de Professores: Perspectivas para a Escola Contemporânea**. Canoas: Ed. ULBRA, 2008. P.225 – 248

KAMPPFF, Adriana Justin Cerveira; MACHADO, José Carlos; CAVEDINI, Patrícia. **Novas Tecnologias e Educação Matemática**. In: x workshop de informática na escola e xxiii congresso da sociedade brasileira de computação, 2004, Bahia. Disponível em: <[http://www.cinted.ufrgs.br/renote/nov2004/artigos/a12_tecnologias_matematica .pdf](http://www.cinted.ufrgs.br/renote/nov2004/artigos/a12_tecnologias_matematica.pdf)> Acesso em: 10 jun. 2008.

KAPUT, James e BLANTON, M. **Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning**. *Journal for Researching Mathematics Education*, 36, 412-446. 2005.

KAPUT, James. *Reserch Base Supporting Long Tern Algebra Reform?* In: **Annual Meeting of North American Chapter of the International Group For The Psychology Of Mathematics Eduction**, 17., Columbus, 1995. Disponível em: <http://eric.ed.gov/PDFS/ED389539.pdf>. Acesso em: 12 outubro de 2015

KIERAN, Carolyn. *Algebraic thinking in the early grades: What is it?* – In: **The Mathematics Educator** (Singapore) 8, p.139-151, 2004.

KIERAN, Carolyn. CHALOUH, Louise. *Prealgebra: The transition from arithmetic to álgebra*. In.: **Research Ideas for the classroom middle grades mathematics** (p. 179-198) New York, MadMillan, 1993.

KIERAN, Carolyn. *The learning and teaching of school algebra*. In Grows, D. A. (Ed.), **Handbook of research on mathematics teaching and learning** (pp. 390-419). New York, NY: MacMillan, 1992.

KIRSHNER, David. *The structural Algebra Option Revisited*. In.: SUTHERLAND, R. (Eds.) **Perspectives on School Algebra**. Dordrecht: Luwer Academic Publishers, London, 2001. P.83-98.

LEMOS, Andrielly Viana; KAIBER, Carmem Tereza. Equações de 1º grau: Reflexões Teóricas e Metodológicas. In: KAIBER, Carmem Tereza (org.) **PRÁTICAS ESCOLARES NO ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA**. Canoas: Ed. ULBRA, 2015. Cap. 1, p.11-52.

LINS, Romulo Campos; GIMENEZ, Joaquim. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. São Paulo: PAPIRUS, 1997.

MIGUEL, Antonio; FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria Ângela. **Contribuição para um Repensar... a Educação Algébrica Elementar** In: Pro-posições, v.4, nº 1(10): 78 - 91, 1993.

MORA, David. **Aprendizaje Y enseñanza: proyectos y estrategias para una educación matemática del futuro**. La Paz: Campos Iris, 2004.

MURLICK, Viviane R.; GROENWALD, Claudia Lisete Oliveira. **Recuperação individualizada de conteúdos matemáticos utilizando sistemas inteligentes**. In: VI CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Puerto Montt. Anais. Chile: 2009.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS – NCTM. **Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics**. Reston, Va.: NCTM, 1989.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS - NCTM. **Principios e Estándares para la Educación Matemática**. Trad. Manuel Fernández Reyes. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, 2000.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS – NCTM. **De los principios a la acción: Para garantizar el éxito matemático para todos**. Reston, Va.: NCTM, 2015.

NOVAK, Joseph. GOWIN D. **Aprediendo a aprender**. Barcelona: Ediciones Martínez Roca, S.A, 1988.

ONUCHIC, Lourdes de La Rosa. **Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas**. São Paulo: UNESP, p. 199-218, 1999.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, Maria Apareicda. Viggiani; BORBA, Marcelo de Carvalho (Org.) **Educação Matemática: pesquisa em movimento**. São Paulo: Cortez, 2009. p. 212- 231.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATTO, Norma Suely Gomes. Álgebra e pensamento algébrico através da resolução de problemas. In: **XII Conferencia Interamericana de Educação Matemática**, 2011.

PEREIRA, Antônio Luiz. **Motivação para a disciplina de Seminários de Resolução de Problemas**. São Paulo, IME - USP, 2001.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático**; tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo. – 2 Reimpr. – Rio de Janeiro: Interciencia, 1995.

PONTE, João Pedro. **Álgebra no currículo escolar**. Educação e Matemática – Revista da Associação dos Professores de Matemática. Lisboa n. 85, nov/dez, 2005.

PONTE, João Pedro. Numeros e álgebra no currículo escolar. In. VALE, Pimentel; SANTOS, Luis e CANAVARRO, Pedro. (Eds.) **Numeros e álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores**. P. 5-27, Lisboa: 2006.

PONTE, João Pedro. **Programa de Matemática do Ensino Básico**. Lisboa: Ministério da Educação/DGIDC, 2007.

PONTE, João Pedro, BRANCO, Neusa., & MATOS, A. **Álgebra no ensino básico**. Lisboa: DGIDC, 2009.

POZO, Juan Ignacio. **A solução de Problemas: aprender a resolver, resolver para aprender**. Porto Alegre: ArtMed, 1998.

RADFORD, Luis. **Cognição Matemática: História, Antropologia e Epistemologia**. 1 ed. Editora da física, 2011.

RÉGNIER, Nadja Maria Acioly. Competências “ Matemáticas”: Análise de aspectos conceituais e da dimensão sociocultural dos conceitos. In: BRITO, **Márcia Regina Ferreira de. Solução de Problemas e Matemática Escolar**. Campinas, SP: Ed. Alínea, 2010. P. 55-82.

RIBEIRO, Alessandro Jacques; **Álgebra para a formação de professores: explorando os conceitos de equação e de função**, 1 ed. Belo Horizonte: Autentica Editora, 2015.

SANDS, William A.;WATERS, Brian K. Introduction to ASVAB and CAT. In: SANDS, William A.; WATERS, Brian K.; MCBRIDE, James R.(Eds.). **Computerized adaptive testing: from inquiry to operation**. Washington: American Psychological Association, 1997.

SOUZA, Maria Helena Soares de . **Matemática em questão, 6º ano**. São Paulo, Ed. Saraiva, 2013.

STANCANELLI, Renata. Conhecendo diferentes tipos de problemas. In: SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. **Ler, escrever e resolver problemas**. Porto Alegre: Artmed, 2001. p.103-218.

VILLELLA, José. **Piedra libre para la Matemática!** Buenos Aires: Copyright, 1998

WAINER, Howard. **Computerized adaptive testing: a primer**. New Jersey: Lawewnce Erlbaum Associates, 2000.

WALLE, John A. Van de. **Matemática no ensino fundamental: formação de professores em sala de aula**. 6ª ed. Editora Artmed, 2015.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa: como ensinar**. Porto Alegre: Artmed, 1998.

ZAT, Ancila Dall'Onda, GROENWALD, Claudia Lisete Oliveira. **Resolução de Problemas matemáticos no “sexto ano” do Ensino Fundamental no município de Canoas**. REVEMAT, Florianopolis, SC, v.11, n.2,p. 437-456, 2016.

APÊNDICES

APÊNDICE A – AUTORIZAÇÃO PARA USO DE IMAGEM



**Escola Estadual de Ensino
Médio Professor Júlio Grau**



Senhor Responsável, viemos através desse informar que seu filho _____ está participando de um teste adaptativo em que visa analisar se os alunos do nono ano possuem desenvolvida a competência da Resolução de problemas que envolvem o pensamento algébrico. Esse projeto é uma parceria da ULBRA/RS com a Universidade de La Laguna em Tenerife, Espanha, através do Sistema Integrado de Ensino e Aprendizagem (SIENA). Este teste será aplicado pelo Prof^o. Esp. Giovani Rosa Delazeri, mestrando da ULBRA e professor de Matemática do ensino médio da escola Júlio Grau juntamente com a professora Geanine Coutinho, professora titular de Matemática do nono ano e ensino médio. Os resultados deste teste serão utilizados para analisar a possível dificuldade que os alunos possam e posteriormente podermos trabalha-las antes do ingresso no Ensino Médio.

Sendo assim venho solicitar aos senhores a autorização para o uso de imagem e voz do aluno referido, destinados a divulgação da pesquisa da escola e da universidade.

Eu, _____, responsável pelo aluno, inscrito/a no RG sob o nº _____ e no CPF sob o nº _____, autorizo o uso de imagem e voz do aluno _____ para uso exclusivo da divulgação desta pesquisa sobre os testes aplicados.

Porto Alegre, ____ de Junho de 2016.

Assinatura do responsável

APÊNDICE B – CD COM BANCO DE QUESTÕES UTILIZADAS NOS
TESTES ADAPTATIVOS

APÊNDICE C - DIÁRIO DE CAMPO DOS ESTUDANTES PARA
RESOLUÇÕES – NO CD

ANEXOS

ANEXO I – AUTORIZAÇÃO DA ESCOLA PARA APLICAÇÃO DA PESQUISA E DIVULGAÇÃO DOS RESULTADOS.

ANEXO II – PLANOS DE ESTUDOS DO ENSINO FUNDAMENTAL ANOS FINAIS –
NO CD