

UNIVERSIDADE LUTERANA DO BRASIL
PRÓ-REITORIA ACADÊMICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA



O ESTUDO DOS NÚMEROS RACIONAIS NO BRASIL E NO MÉXICO:
um olhar na perspectiva da Teoria Socioepistemológica da Matemática Educativa

ALEXANDRE BRANCO MONTEIRO

Orientadora: Profa. Dra. Claudia Lisete Oliveira Groenwald
Coorientador: Prof. Dr. Ricardo Arnoldo Cantoral Uriza

Canoas
2017

UNIVERSIDADE LUTERANA DO BRASIL
PRÓ-REITORIA ACADÊMICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA



O ESTUDO DOS NÚMEROS RACIONAIS NO BRASIL E NO MÉXICO:
um olhar na perspectiva da Teoria Socioepistemológica da Matemática Educativa

ALEXANDRE BRANCO MONTEIRO

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil para obtenção do título de Doutor em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Claudia Lisete Oliveira Groenwald

Coorientador: Prof. Dr. Ricardo Arnaldo Cantoral Uriza

Canoas
2017

ALEXANDRE BRANCO MONTEIRO

**O ESTUDO DOS NÚMEROS RACIONAIS NO BRASIL E NO MÉXICO:
um olhar na perspectiva da Teoria Socioepistemológica da Matemática Educativa**

Orientadora: Profa. Dra. Claudia Lisete Oliveira Groenwald

Coorientador: Prof. Dr. Ricardo Arnoldo Cantoral Uriza

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil para obtenção do título de Doutor em Ensino de Ciências e Matemática.

Banca Examinadora:

Profa. Dra. Carmen Teresa Kaiber - ULBRA

Profa. Dra. Daniela Reyes Gasperini – CINVESTAV

Profa. Dra. Tania Elisa Seibert - ULBRA

Profa. Dra. Vanilde Bisognin - UNIFRA

Canoas

2017

Dedico à todas aquelas pessoas, que direta ou indiretamente, de alguma forma acreditaram no meu potencial e me incentivaram nesse caminho e, também, a outras que com os seus exemplos de vida tanto me ensinaram, e possibilitaram assim a reescrever a minha história...

AGRADECIMENTOS

Nada é feito a sós, ainda mais uma investigação, envolve tantas pessoas e sem a colaboração delas não seria possível. Por isso quero agradecer de uma forma simples, até porque é impossível expressar a minha gratidão a essas pessoas.

Agradecer a professora doutora Claudia Groenwald pelos anos de convívio, carinho e confiança, mais que uma orientadora, uma amiga. Foi um ciclo de seis anos de convivência quase diária, onde a conheci e aprendi a admirá-la, muito obrigado por tudo.

Muito obrigado doutor Ricardo Cantoral, pela hospitalidade e ensinamentos. Aprendi pelas ideias e pela simplicidade dos atos.

Tania Elisa Seibert, talvez a primeira a dizer que era possível, meu eterno respeito e admiração.

Agradecer a Rodrigo Della Vecchia, aprendi muito contigo meu amigo nas nossas longas conversas.

Ninguém foi tão presente que a minha amiga de toda caminhada Andrielly. Colega, amiga e irmã, junta-se tudo e resume-se a nossa parceria de uma década. Sinceramente faltam palavras para dizer o quanto sou grato.

Muito obrigado ao amigo Lucas Seibert pelos sonhos realizados, e aos amigos, de QG, Tiago, Robson e Ilisandro pelas conversas e risadas. E também aos amigos Neide, Karine e Jonata pela amizade e parceria.

Agradeço a todos os demais amigos do PPGEICIM, desculpe não citar todos os nomes, mas com certeza posso dizer a cada um o quanto também foram importantes. Tantas aprendizagens e conversas, amizades que quero cultivar para sempre, muito obrigado pelo carinho, me senti um privilegiado pela convivência com vocês.

Agradecimento aos grupo de professores do Curso de Matemática e do PPGEICIM da ULBRA, por toda aprendizagem, em especial aos professores Carmen, Jutta e Arno.

Agradeço aos amigos do Departamento de Matemática Educativa do CINVESTAV, pela receptividade e amizade durante todo o período que estive no México. Em especial ao tico Rodolfo um grande amigo, ao Toño Madriz pela confiança de me receber em sua casa, a Zuleyma, Cristina e Cristian e suas famílias pela receptividade em Yucatán. E aos amigos latino-americanos Jesús, Daniela, Kristel, Susana, Johanna, Sérgio, Jaime, Jonathan, Uzziel e Rosario. E também a um amigo *in memoria* que tanto me auxiliou, licenciado Rodolfo.

E esse trabalho não seria possível sem a participação de amigos e professores que colaboraram para a sua realização. Meu muitíssimo obrigado a Oscar, que tantas portas abriu

em Oaxaca, tornando possível o contato com escolas e professores. Aos professores Adolfo, Judith, Susana, Minelli, Kenia e Gema, aprendi muito com vocês. Agradecimento aos diretores pela confiança, permitindo acessar as escolas. E meu respeito e admiração aos alunos e aos pais que tive o privilégio de conhecer nessa caminhada pelo México. No Brasil agradeço a amiga e professora Rosana, que também auxiliou em muito nessa investigação. Aos professores Geanice, Denise, Miriam e Wagner, que em seus intervalos e momentos de planejamentos me recebiam tão receptivos e prestativos a colaborar.

E claro agradecer a pessoas que de uma forma muito próxima, mesmo sem entender o que é esse meio acadêmico foram fundamentais, sem eles não haveria razão de ser, minha família. Meu pai, João (*in memoria*) e Vera, que com somente o Ensino Fundamental incompleto, me ensinaram o mais importante, os valores. Os meus irmãos Adriana, Aline, Anderson e André, os meus sobrinhos Amanda, Lucas, Jean e também a pequena Belle.

Ao longo do tempo muitas pessoas vão se somando ao nosso ciclo familiar e de amigos, mas infelizmente também perdemos, por isso lembro da vó Iolanda que partiu subitamente em 2015, que nunca frequentou uma escola mas aprendeu a ler e escrever, uma autodidata...saudades.

Agradeço a Isadora, teu apoio e incentivo, foram muito importante.

Para finalizar, gostaria de agradecer ao povo brasileiro pela oportunidade através do Ministério da Educação, a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio Grande do Sul (FAPERGS), por possibilitarem como bolsista desde a graduação através do PROUNI, e depois no mestrado e doutorado percorrer essa caminhada.

Tenho a convicção que somente programas sociais poderão mudar a realidade da desigualdades sociais que temos no Brasil, e isso passa pela educação. É somente o investimento público em educação que possibilita um filho de operário e de dona de casa um dia se tornar Doutor. *Não se espera um favor, se espera somente uma oportunidade.*

Onde você vê

Onde você vê um obstáculo,
alguém vê o término da viagem
e o outro vê uma chance de crescer.

Onde você vê um motivo pra se irritar,
alguém vê a tragédia total
e o outro vê uma prova de paciência.

Onde você vê a morte,
alguém vê o fim
e o outro vê o começo de uma nova etapa...

Onde você vê a fortuna,
alguém vê a riqueza material,
e o outro pode encontrar por trás de tudo, a dor e a miséria total.

Onde você vê a teimosia,
alguém vê a ignorância,
um outro compreende as limitações do companheiro,
percebendo que cada qual caminha em seu próprio passo.

E que é inútil querer apressar o passo do outro,
a não ser que ele deseje isso.
Cada qual vê o que quer, pode ou consegue enxergar.

*“Porque eu sou do tamanho do que vejo.
E não do tamanho da minha altura.”*

Fernando Pessoa

RESUMO

Neste trabalho, apresentamos uma investigação sobre o processo de estudos dos Números Racionais envolvendo o Brasil e o México, tendo como suporte teórico a Teoria Socioepistemológica da Matemática Educativa (TSME). Consideramos este referencial interessante para analisar o processo de estudo dos Números Racionais em contextos diferentes, por suas características contextualizada, relativista e pragmática. Propomos o seguinte problema de pesquisa: *Como a TSME pode orientar indicações curriculares para o processo de estudo dos Números Racionais?* Nosso objetivo geral é realizar uma investigação sobre o processo de estudos dos Números Racionais no Brasil e no México, tendo como referência as indicações oficiais, procurando identificar aspectos similares e especificidades para o estudo desse conteúdo sob o enfoque da TSME e, ao final, apresentar uma proposta de ensino desse tema para o Ensino Fundamental brasileiro usando a TSME como referencial. A pesquisa foi dividida em quatro etapas de trabalhos: 1ª) estudo do referencial teórico; 2ª) análise documental sobre as leis que regem a educação de ambos os países e as orientações sobre o estudo dos Números Racionais; 3ª) visita a escolas, acompanhamento de atividades e entrevistas com um grupo de professores brasileiros e mexicanos para compreender como se dá o processo de estudo do tema; 4ª) propor uma reflexão sobre o estudo dos Racionais, nas indicações oficiais e na prática dos professores investigados. Foi necessário um período de seis meses de estudos no México. Além do aprofundamento do conhecimento sobre a teoria, o período de estudos, no México, possibilitou conhecer o sistema educativo mexicano que, comparado ao brasileiro difere em estrutura e normas. Participaram dessa investigação um grupo de professores da rede municipal de Canoas, Rio Grande do Sul, Brasil e um grupo de professores da rede pública do município de Huajuapán de León, Oaxaca, México. Com realidades diferentes, em seus sistemas educacionais quanto à estrutura e à organização, verificamos reflexos nas ações dos professores quanto a sua autonomia em relação aos planejamentos das aulas. Foi possível perceber que tanto as orientações quanto os planos de estudo são norteadores para a prática docente, mas não são as únicas referências que os professores utilizam na sua prática. Os professores brasileiros investigados, em seus discursos, afirmam que seguem os planos de estudos da escola, mas têm como suporte os livros didáticos como fonte de pesquisa principal para os planos de aula. Os professores mexicanos seguem um cronograma mais rígido para desenvolver os conteúdos em sala de aula, já que devem cumprir a base de conteúdos determinada pelo governo. Um aspecto em comum entre professores brasileiros e mexicanos é a experiência profissional como elemento fundamental para otimização de tempo e seleção de relevância dos conteúdos a serem trabalhados, assim como as metodologias adequadas para o seu ensino. Em relação ao tema Números Racionais, na fala dos professores, verificamos o uso de problemas contextualizados, que levem em consideração a realidade dos estudantes. No caso brasileiro, os contextos construídos, segundo os próprios professores soam como artificiais em relação às frações. Na realidade mexicana, encontramos mais situações cotidianas de uso de frações como contagem de horas, medidas de peso, porém, seu uso também é restrito a alguns tipos de frações. A prática docente é normada por orientações, mas também por necessidades socioculturais, devendo se adaptar a elas, e a Socioepistemologia se mostra como um referencial coerente com as necessidades educacionais encontradas, ao promover a ideia da necessidade do empoderamento profissional docente através da problematização do saber matemático e da Matemática escolar. O empoderamento profissional docente converge para as necessidades expostas pelos professores investigados, brasileiros e mexicanos, que nem sempre encontram, na instituição escolar, o apoio necessário para discutir questões de cunho didático e metodológico do estudo da Matemática, não havendo, geralmente, profissionais capacitados para dar esse suporte. A problematização do saber matemático e da matemática escolar

possibilita a reflexão epistemológica e didática dos diferentes significados dos Racionais, nem sempre abordados de forma adequada nos programas de estudos e livros didáticos. Consideramos que essa investigação atingiu a sua proposta de compreender como a TSME pode contribuir para a prática escolar, ao permitir, através dessa perspectiva, entender os aspectos explícitos e implícitos que agem e influenciam na ação dos sujeitos envolvidos no processo de estudo.

Palavras-chave: Socioepistemologia; Sistemas Educacionais; Números Racionais.

ABSTRACT

This study presents an investigation on the process of studying Rational Numbers in Brazil and in Mexico based on the Socio-Epistemological Theory of Educational Mathematics (SETEM), since we believe that using it as a theoretical framework is interesting to analyze the teaching and learning process of Rational Numbers in different contexts due to its contextualized, relativistic, and pragmatic characteristics. Therefore, we chose Brazil and Mexico as environments to be investigated in this study due to the different educational structures adopted in these countries. Based on this proposal, we propose the following research problem: *How can SETEM direct curricular guidelines for the teaching and learning process of Rational Numbers?* The main objective was to investigate the process of studying Rational Numbers in Brazil and in Mexico considering the official guidelines and trying to identify similar aspects and specific factors in the study of this topic for the Brazilian Elementary School using SETEM as framework. The research was divided in four stages: (1) A review of the specialized literature; (2) a review of the education legislation in both countries and of guidelines to teach Rational Numbers; (3) visits to schools to observe activities and conduct interviews with Brazilian and Mexican teachers to gain insight into the teaching process of the topic; (4) discussion of the teaching and learning of Rational Numbers in view of official guidelines and the daily work of the teachers interviewed. In addition to improving knowledge about the theory, the study period in Mexico was an opportunity to know the Mexican education system that, in comparison to the Brazilian system, differs in structure and regulations. It is understood that reflecting about two different education systems would clarify differences and similarities in teaching and learning of Rational Numbers concerning regulations, subjects, and practices. With that aim, the participants of this research were a group of teachers of the municipal schools of Canoas, state of Rio Grande do Sul, Brazil, and a group of teachers of public schools in the municipality of Huajuapán de León, Oaxaca, Mexico. Considering these aims, we divided this investigation in stages: literature review, a review of the education legislation of both countries and of guidelines about teaching Rational Numbers, visits to schools observing activities and carrying out interviews with a group of Brazilian teachers and a group of Mexican teachers to understand the study of this topic, and proposal of a discussion about teaching and learning Rational Numbers concerning official guidelines and teaching practices. To carry out these activities, a period of six months in Mexico was necessary. With distinct realities about their educational systems concerning structure and organization, we observed the effects on the actions of teachers in terms of their autonomy about class preparation. It was possible to see that both the guidelines and the study plans direct the teaching practice, but they are not the only references teachers use in their work. The Brazilian teachers who took part in this study, in their discourses, declare that they follow the schools' study plans, but they take textbooks as the main source of research for class preparation. Mexican teachers follow a stricter chronogram to develop the contents in classrooms, since they have to meet the requirements about elementary contents. One aspect in common between Brazilian and Mexican teachers is the professional experience as essential element to optimize time and the selection of contents to be taught based on relevance, as well as the appropriate methods to teach them. Concerning the theme Rational Numbers, the analysis of teachers' discourses revealed the use of contextualized

problems, which consider the reality of students. In Brazil, the contexts constructed, according to the teachers, sound artificial concerning fractions. In the Mexican reality we find more everyday situations where fractions can be taught, as in counting time and measuring weight, but their use is also restricted to some kinds of fractions. The teaching practice is regulated by guidelines as well as sociocultural needs and has to adapt to these. Social Epistemology stands as a coherent framework in terms of the education needs detected by promoting the notion of the need for professional empowerment for teachers based on the analysis of mathematical knowledge and Mathematics in the school environment. Professional empowering of teachers converges to the needs exposed by the participant teachers, both Brazilian and Mexican, who sometimes do not find the necessary support to discuss didactic and methodological issues in the teaching and learning of Mathematics in the schools they work at, which generally lack the skilled staff to give that support. The discussion of Mathematics knowledge and of Mathematics at schools affords a didactic and epistemological analysis of the different meanings of Rational Numbers, which sometimes are not covered appropriately in study programs and textbooks. Finally, we understand that this investigation met its objective of understanding how SEMET may contribute to teaching practice by affording to comprehend the explicit and implicit aspects that influence the action of the subjects involved in the teaching and learning process.

Keywords: Social Epistemology; Educational Systems; Rational Numbers.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Modelo de práticas aninhadas $P \rightarrow PR \rightarrow PS$	31
Figura 2 - Triângulo Didático Clássico.	33
Figura 3 - Triângulo didático na TSME.	34
Figura 4 - A tríade da <i>prática de referência</i>	35
Figura 5 - Articulação entre o <i>dME</i> , princípios da Socioepistemologia e replanejamento do <i>dME</i>	36
Figura 6 - Enfoque sistêmico da Socioepistemologia.	38
Figura 7 - Unidade de Análise Socioepistêmica (UASE).	38
Figura 8 - As quatro dimensões do saber.	40
Figura 9 - Princípios da Socioepistemologia.	41
Figura 10 - Esquema geral da TSME.	43
Figura 11 - representação de um mural do ano 3.000 a.C., exposto no Museu Metropolitano de Arte, Nova Iorque.	46
Figura 12 - Exemplo de escrita com as frações 18 e 120 no Egito.	46
Figura 13 - Exemplo de escrita com as frações 18 e 120 na escrita hierática.	47
Figura 14 - Exemplo da escrita dos números 61, 62 e 63.	49
Figura 15 - Escrituras sexagesimais dos babilônicos e escrituras atuais de frações sexagesimais.	50
Figura 16 - Uso do zero em sistema de barras numerais chinesas.	50
Figura 17 - Frações decimais.	51
Figura 18 - Escrita de números inferiores a 20.	51
Figura 19 - Escrita do número 13459.	52
Figura 20 - Exemplos de utilização do zero.	52
Figura 21 - Exemplo de disposição da operação de adição.	56
Figura 22 - Exemplo de multiplicação com <i>Números Decimais</i>	56
Figura 23 - Representação geométrica de $M = u . p + r$	60
Figura 24 - Exemplo de um caso particular.	61
Figura 25 - Representação de Números Racionais na reta numérica	62
Figura 26 - Exemplo de representação de Frações.	66
Figura 27 - Representação de uma reta numérica.	68
Figura 28 - Exemplo de tarefa	81

Figura 29 - Exemplo de tarefa.	81
Figura 30 - Exemplo de tarefa.	82
Figura 31 - Exemplo de tarefa.	83
Figura 32 - Exemplo de erro na simplificação de Frações.	83
Figura 33 - Exemplo de erro na adição de Frações.	84
Figura 34 - Exemplo de erro na subtração de Frações.	84
Figura 35 - Exemplo de erro na multiplicação de Frações.	85
Figura 36 - Exemplo de erro na multiplicação de Frações.	85
Figura 37 - Exemplo de erro na divisão de Frações.	85
Figura 38 - Estrutura do sistema de ensino mexicano e brasileiro por idade.	92
Figura 39 - Mapa Curricular da Educação Básica.	99
Figura 40 - Divisão dos períodos e graus dos <i>Modelos Curriculares</i>	100
Figura 41 - Quadro com os conteúdos a serem desenvolvidos no Segundo Período Escolar envolvendo os Números Racionais.	102
Figura 42 - Quadro com os conteúdos a serem desenvolvidos no Terceiro Período Escolar envolvendo os Números Racionais.	103
Figura 43 - Quadro com os conteúdos a serem desenvolvidos no Quarto Período Escolar envolvendo os Números Racionais.	106
Figura 44 - Construção Social do Conhecimento.	112
Figura 45 - Recorte da página inicial do site da SEP para o Nível Secundário.	117
Figura 46 - Página de acesso as orientações didáticas do primeiro grau do Nível Secundário.	118
Figura 47 - Orientação didática para conversão de frações decimais e não decimais a sua escritura decimal e vice-versa.	119
Figura 48 - Recorte do plano de aula relativo às orientações didáticas para conversão de frações decimais e não decimais a sua escritura decimal e vice-versa.	119
Figura 49 - Sumário do regimento escolar da escola EST (México).	120
Figura 50 - Imagem da página do sumário do PPP da escola EMIP.	121
Figura 51 - Conteúdos programáticos e competências cognitivas a serem desenvolvidas no 2º trimestre do 7º ano da escola EMP.	122
Figura 52 - Objetivos gerais para os anos finais do Ensino Fundamental da escola EMAB.	123
Figura 53 - Objetivos específicos para os anos finais do Ensino Fundamental da escola EMAB.	123
Figura 54 - Planos de Estudos da EMG para o 2º trimestre do 7º ano.	125

Figura 55 - Planos de Estudos do 7º ano da escola EMIP.....	125
Figura 56 - Recorte do Plano de Estudos do 7º ano da EMNP.	126
Figura 57 - Planos de Estudos do tema Números Racionais no 7º ano.	128
Figura 58 - Metodologias indicadas pelas escolas municipais investigadas.	130
Figura 59 - Lista de conteúdos e objetivos específicos da disciplina de Matemática das escolas EMCDA e EMIM para no 7º ano do Ensino Fundamental.	133
Figura 60 – Primeira parte da entrevista com Cantoral sobre livros didáticos no México.....	138
Figura 61 – Segunda parte da entrevista com Cantoral sobre livros didáticos no México.....	139
Figura 62 – Terceira parte da entrevista com Cantoral sobre livros didáticos no México.....	139
Figura 63 – Quarta parte da entrevista com Cantoral sobre livros didáticos no México.	140
Figura 64 - Exemplo das orientações dadas aos professores nos livros didáticos.....	141
Figura 65 - Distribuição dos campos da matemática escolar.	144
Figura 66 - Proposta de discussão sobre simplificação e conversão de medidas de comprimento com números decimais e fracionários.	145
Figura 67 - Atividades de introdução do conteúdo de frações e números decimais no livro Matemáticas 1.....	147
Figura 68 - Parte do sumário do livro do sexto grau do nível Primário e abordagem inicial do tema Números Naturais, Fracionário e Decimais.....	148
Figura 69 - Parte do sumário do Matemáticas Primer Grado: desarrollo del pensamiento matemático.....	149
Figura 70 - Seção <i>Dosificación</i> do livro didático <i>Matemáticas I</i>	149
Figura 71 - Seções do livro didático Matemática Bianchini (BIANCHINI, 2011).....	150
Figura 72 - Significados associados à noção de frações nos livros didáticos.....	152
Figura 73 - Recorte do planejamento anual da disciplina de Matemática para o 1º grau do nível Secundário.	155
Figura 74 - Quadro de competências/habilidades e conteúdos para o 7º ano do EF da EMIP.	155
Figura 75 - Recorte do caderno de planejamento de aulas da professora PB2.....	157
Figura 76 - Cópias do livro didático utilizado pela professora PB2.....	158
Figura 77 - Introdução do conteúdo da adição nos Números Racionais.	160
Figura 78 - Exemplo de atividades de resolução de problemas envolvendo os Números Racionais	163
Figura 79 - Entrevista com a professora PM2 sobre planejamento das aulas.	164

Figura 80 - Entrevista com os professores PB1, PB2 e PB3 sobre o uso dos livros didáticos.	166
Figura 81 - Exemplo de atividades propostas pelo professor PM3.	168
Figura 82 - Introdução do tema Números Racionais proposto pela professora PB3.....	171
Figura 83 - Exemplo de atividade parte-todo	181
Figura 84 - Registros de representação e Números Racionais	182
Figura 85 - Atividade parte-todo	185
Figura 86 - Exemplo de divisão parte-todo	186
Figura 87 - Representação visual da divisão.	186
Figura 88 - Atividade de pesquisa em jornais, revistas e encartes de lojas sobre os Números Racionais	188
Figura 89 - Exemplo de uso de frações no cotidiano mexicano.	190
Figura 90 - Diálogo entre investigador e comerciante.	191
Figura 91 - Nota fiscal de uma rede de hipermercados.	191
Figura 92 - Tabela com a medida aproximada de alguns tipos de protozoários.	193

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Exemplo de frações como operador.	70
Tabela 2 - Contagem dos acertos de Laura e André.....	72
Tabela 3 - Carga horária da disciplina de Matemática.	99

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	19
1 SE ESTUDO O MÉXICO, É SEMPRE NO BRASIL QUE ESTOU PENSANDO	22
2 SOCIOEPISTEMOLOGIA, NÚMEROS RACIONAIS E INDICAÇÕES OFICIAIS	29
2.1 SOCIOEPISTEMOLOGIA: A TEORIA NÃO É DO NINHO ONDE NASCE, E SIM DO CÉU DE ONDE VOA	29
2.1.1 A TSME e o <i>discurso Matemático Escolar</i>: uma reflexão crítica sobre consenso e hegemonia.....	33
2.1.2 A TSME e as quatro dimensões do saber	37
2.2 OS NÚMEROS RACIONAIS: HISTORICIDADE E EPISTEMOLOGIA	44
2.2.1 A historicidade das Frações	45
2.2.2 A historicidade dos <i>Números Decimais</i>	48
2.2.2.1 A consolidação do sistema de Numeração Decimal.....	55
2.2.3 Os aspectos epistemológicos dos Números Racionais.....	58
2.2.3.1 Construção geométrica e algébrica do conjunto dos \mathbb{Q}	60
2.2.3.2 Significados dos Números Racionais	63
2.2.3.2.1 Construto parte-todo	65
2.2.3.2.2 Construto quociente.....	66
2.2.3.2.3 Construto medida.....	67
2.2.3.2.4 Construto razão.....	69
2.2.3.2.5 Construto operador	70
2.2.3.2.6 Outras interpretações	71
2.3 A CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO E OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS NO ESTUDO DOS NÚMEROS RACIONAIS	75
2.3.1 As dificuldades no processo de estudo dos Números Racionais na forma de Frações e Decimais.....	79
2.3.1.1 Dificuldades no processo de estudos das Frações	80
2.3.1.2 Dificuldades no processo de estudos dos Números Decimais.....	86
2.4 UM OLHAR SOBRE OS CONTEXTOS EDUCACIONAIS BRASILEIRO E MEXICANO.....	90
2.4.1 Organização e orientações educacionais nos currículos brasileiro e mexicano	92
2.4.2 As indicações sobre o estudo da Matemática nas escolas brasileiras e mexicanas ..	95

2.4.3 As indicações brasileiras e mexicanas acerca do processo de estudo dos Números Racionais	97
2.4.3.1 Os Números Racionais no currículo da Educação Básica no México.....	98
2.4.3.2 Currículo brasileiro sobre o conteúdo dos Números Racionais	108
2.5 UMA REFLEXÃO SOBRE POLÍTICAS EDUCACIONAIS E MATEMÁTICA	110
3 DISCUSSÕES, ANÁLISE E REFLEXÕES.....	116
3.1 OS NÚMEROS RACIONAIS E AS POLÍTICAS EDUCACIONAIS.....	117
3.2 A ABORDAGEM DOS NÚMEROS RACIONAIS NOS LIVROS DIDÁTICOS: PROPÓSITOS E INDICAÇÕES OFICIAIS.....	134
3.2.1 A importância dos livros didáticos como orientações aos professores	136
3.2.2 Os Números Racionais nos livros didáticos.....	146
3.3 OS PLANEJAMENTOS DIDÁTICOS DOS PROFESSORES EM RELAÇÃO À TEMÁTICA INVESTIGADA	154
3.4 REFLEXÕES SOBRE OS NÚMEROS RACIONAIS ENVOLVENDO OS PROGRAMAS, PROBLEMÁTICAS E PROFESSORES	174
3.4.1 Os Números Racionais e a sua problematização	179
3.4.2 Os professores e as relações com o saber.....	194
CONCLUSÕES.....	197
REFERÊNCIAS	202
APÊNDICES	210
APÊNDICE A – Roteiro da entrevista com professores das escolas municipais de Ensino Fundamental de Canoas, Rio Grande do Sul, Brasil	211
APÊNDICE B – Roteiro da entrevista com professores das escolas públicas de Nível Primário e Secundário de Huajuapán de León, Oaxaca, México	214
APÊNDICE C – Autorização para uso de imagem e voz dos sujeitos brasileiros	216
APÊNDICE D – Autorização para uso de imagem e voz dos sujeitos mexicanos	217
ANEXOS	218
ANEXO A – Planos de Estudos de Matemática da escola EMIM para o 6º e 7º ano.....	219
ANEXO B – Planos de Estudos de Matemática da escola EMTAN para o 6º e 7º ano..	225
ANEXO C – Planos de Estudos de Matemática da escola EMCDA para o 6º e 7º anos	231
ANEXO D – Planos de Estudos de Matemática da escola EMP para o 6º e 7º ano.....	235
ANEXO E – Planos de Estudos de Matemática da escola EMAB para o 6º e 7º anos ...	238
ANEXO F – Planos de Estudos de Matemática da escola EMG para o 6º e 7º anos.....	241
ANEXO G – Planos de Estudos de Matemática da escola EMIP para o 6º e 7º anos	244

ANEXO H – Planos de Estudos de Matemática da escola EMNP para o 6º e 7º anos...245

INTRODUÇÃO

Neste trabalho, apresentamos uma investigação sobre o processo de estudos dos Números Racionais no Brasil e no México, tendo como suporte teórico a Teoria Socioepistemológica da Matemática Educativa (TSME), a qual objetiva o estudo da construção social do conhecimento matemático e sua difusão institucional, caracterizando-se por ser uma teoria contextualizada, relativista, pragmática e funcional (CANTORAL, 2003; 2004; 2005; 2008; 2009; 2013).

Aliado a essas ideias, a TSME considera que o conhecimento matemático tem se constituído socialmente em ambientes não escolares. Por isso sua difusão para o sistema de ensino se obriga a uma série de modificações, as quais afetam, diretamente, sua estrutura e seu funcionamento, atingindo, também, as relações que se estabelecem entre os estudantes e o professor, conciliando, sobre a mesma análise, as quatro dimensões do saber: epistemológica, didática, cognitiva e sociocultural. Isso torna necessária uma análise sistêmica sobre todos os elementos que compõem a estrutura educacional, das normas à prática.

Para aprofundarmos o estudo acerca da *TSME* e para conhecermos a estrutura do sistema educativo mexicano, realizamos um período de estudos, através do Programa de Doutorado Sanduíche no Exterior (PDSE), no *Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (CINVESTAV)* do *Instituto Politécnico Nacional (IPN)*, na Cidade do México.

Acreditamos que investigar o estudo dos Números Racionais sob o enfoque socioepistemológico pode trazer reflexões quanto ao processo de estudos desse conteúdo, no sentido de problematizar os saberes matemáticos e os saberes construídos na escola. A utilização da *TSME* como referencial teórico, na pesquisa, nos leva a emergir numa teoria ainda com poucos trabalhos desenvolvidos no Brasil, o que nos motiva a utilizar uma visão socioepistemológica para discutir os elementos que compõem o processo de estudos dos Números Racionais.

Creemos que a *TSME*, por se apresentar como uma teoria contextualizada, relativista, pragmática, entre outras características, torna interessante analisar o processo de estudo dos Números Racionais em contextos diferentes. Então, elegemos o Brasil e o México como os ambientes a ser investigados nesse trabalho, por suas estruturas educacionais diferentes. Além de aprofundarmos o conhecimento sobre a teoria, o período de estudos no México serviu para conhecermos o sistema educativo mexicano que, em comparação ao brasileiro, difere em estrutura e normas.

Acreditamos que refletir sobre dois sistemas de ensinos diferentes, nos ajuda a compreender as similitudes e diferenças do processo de estudo dos Números Racionais,

envolvendo normas, sujeitos e práticas. Assim, solicitamos a participação de um grupo de professores da rede municipal de Canoas (Rio Grande do Sul, Brasil) e um grupo de professores da rede pública do município de Huajuapán de León (Oaxaca, México).

Para lograr esses propósitos, dividimos a investigação em quatro etapas: o estudo do referencial teórico, buscando, assim aprofundar os conhecimentos acerca da TSME; a análise envolvendo as leis e os documentos que regem a educação de ambos os países e as orientações sobre o estudo dos Números Racionais (essa etapa foi importante para compreensão das normas educacionais e indicações sobre o estudo dos Números Racionais); a visita a escolas brasileiras e mexicanas, e acompanhamento, através dos planos de estudos e planejamentos dos professores, do modo como propõem o ensino desse conteúdo; análise dos dados obtidos e uma reflexão sobre o estudo dos Racionais nas indicações oficiais e na prática dos professores investigados.

Para desenvolver a proposta desta pesquisa, este trabalho está dividido em três capítulos. No primeiro capítulo, apresentamos os aspectos relevantes da investigação, como a nossa motivação, a justificativa, os objetivos e o que propomos com essa tese, com o intuito de responder ao que propomos em nossa pergunta de investigação: *Como a TSME pode orientar indicações curriculares para o processo de estudo dos Números Racionais?* Também apresentamos, neste capítulo, a metodologia utilizada na investigação e detalhamos os caminhos percorridos ao longo da investigação para que obtivéssemos êxito.

No segundo capítulo, apresentamos o nosso referencial teórico, subdividindo o capítulo em cinco seções principais: a primeira, tratando sobre a TSME, a segunda, dos Números Racionais e a terceira sobre as orientações oficiais e investigações acerca desse tema. Iniciamos o capítulo apresentando a Teoria Socioepistemológica e os seus principais preceitos, referencial teórico que nos serviu como guia na investigação. Procuramos apresentar as principais características dessa teoria e, a partir dessa perspectiva, justificar os caminhos percorridos e os resultados encontrados ao final deste trabalho.

Na continuação do capítulo, trazemos a discussão para os Números Racionais numa perspectiva histórica e epistemológica sobre esse tema. Apresentamos, assim, a construção histórica dos Números Racionais, ao longo dos tempos, caracterizando a sua divulgação e institucionalização. A partir dessa importância, baseada em investigações, tratamos dos aspectos epistemológicos envolvendo as representações fracionárias e decimais dos Números Racionais.

A terceira seção traz as dificuldades fundamentais no processo de estudo dos Racionais. Procuramos caracterizar os principais obstáculos e dificuldades apresentadas no estudo das

frações e dos decimais com base em investigações, de diversos autores e discussões metodológicas.

Fazendo a conexão com os contextos investigados, na quarta seção, lançamos um olhar sobre o Brasil e o México, nas questões de estruturas educacionais, orientações didático-pedagógicas sobre a Matemática e os Números Racionais. Iniciamos apresentando a organização e estrutura curricular dos dois países, passando pelas normas que regem a Educação e, na sequência, tratamos das indicações para o estudo da Matemática nesses países, finalizando com os Números Racionais e as indicações e distribuição ao longo da vida escolar.

De uma forma geral, é possível reconhecer com mais nitidez as dimensões epistemológicas, didáticas e os aspectos cognitivos da temática proposta, porém os aspectos socioculturais são implícitos nesse processo. Então, encerramos o capítulo, abordando políticas educacionais e a Matemática num contexto sociocultural. Dessa forma, ao longo de todo capítulo, inspirado pela TSME, lançamos um olhar sistêmico sobre todos os aspectos que envolvem os Números Racionais.

No terceiro capítulo, apresentamos a análise e reflexões da investigação. Para realizá-las, estudamos três fontes principais, tendo os Números Racionais como foco central: as orientações oficiais, por nortear as questões educacionais; os livros didáticos, por expressarem as orientações e por serem utilizados pelos professores como fonte de seus planejamentos de aulas; a prática do professor em sala de aula, a qual reflete, de forma efetiva, todas as orientações didático-pedagógicas. Concluímos o capítulo discutindo, na nossa percepção, de que modo a Socioepistemologia pode contribuir na construção do conhecimento sobre os Números Racionais, nos programas de estudos, na problematização da matemática escolar e nas ações dos professores em sala de aula.

1 SE ESTUDO O MÉXICO, É SEMPRE NO BRASIL QUE ESTOU PENSANDO¹

Com o objetivo de discutir, refletir e apresentar uma proposta para o processo de estudo dos Números Racionais para o Ensino Fundamental no Brasil, procuramos, na *Teoria Socioepistemológica da Matemática Educativa* (TSME), o suporte teórico desta investigação. Para tanto, fomos ao *Centro de Investigación de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional* (CINVESTAV), no México², a fim de aprofundar o estudo acerca dessa teoria. O México é o país de origem da TSME e o núcleo de pesquisa da teoria está no CINVESTAV.

Quando propomos um estudo sobre o processo de estudo dos Números Racionais sob a perspectiva da TSME que, entre outras características, destacamos ser uma teoria contextualizada, relativista, pragmática, surge, então, a necessidade de conhecer diferentes ambientes e situações de ensino com o propósito de compreender o chamado *discurso Matemático Escolar* (*dME*)³.

Nesse sentido, além de aprofundar o conhecimento sobre a teoria, o período no México serviu para conhecermos o sistema educativo mexicano que, em comparação ao brasileiro, difere em estrutura e normas. Dessa forma, refletir sobre dois sistemas de ensinamentos diferentes, nos ajuda a compreender as similitudes e diferenças do processo de estudo dos Números Racionais, envolvendo normas, sujeitos e práticas.

Outros motivos os quais reforçam o México como referência deste estudo:

(a) depois do Brasil, é o maior país da América Latina, sendo considerado, como o Brasil, um país em desenvolvimento⁴. Além disso, por sua grande dimensão e população, pode ser uma referência de comparação;

(b) o México tem passado por um processo de reforma em todos os âmbitos do sistema educativo, possuindo uma base comum nacional de conteúdos, diferente do sistema brasileiro atual, que tem indicações de conteúdos a serem trabalhados. Entender como se dá isso na prática colabora com a proposta final desta pesquisa;

(c) as orientações didáticas oficiais para os professores⁵ estão apoiadas na TSME.

Creemos que entender essa dinâmica é importante para a investigação, além da possibilidade de acompanhar um processo de reformulação do sistema educativo, sendo o

¹ Parafrazeando Victor Cousin, filósofo-professor. Frase original: “Se estudo a Prússia, é sempre na França que estou pensando” em Relatório sobre o estado da instrução pública na Prússia, (1831).

² Através do Programa de Doutorado Sanduíche no Exterior da Capes (PDSE).

³ Iremos discutir as ideias acerca do *dME* no referencial teórico.

⁴ Segundo o Fundo Monetário Internacional (FMI).

⁵ *Programas de estudio 2011. Guía para el Maestro. Educación Básica. Primaria. (Primeiro, Segundo, Tercero, Cuarto, Quinto y Sexto)* (MÉXICO, 2011).

referencial adotado na pesquisa utilizado como referência de orientação didática aos professores.

O fato desta investigação envolver dois países, México e Brasil, pode remeter a ideia de um estudo comparativo de ranqueamento. Porém, em nosso trabalho, o objetivo é refletir, olhar o outro (México) para entender nós mesmos (Brasil).

Ao compararmos dois países, temos que levar em conta o que procuramos no outro, e que eles têm realidades distintas, com culturas e origens diferentes. O Brasil e o México tiveram sistemas de colonização semelhantes, no sentido exploratório, e no mesmo período da história, por volta do século XVI. Mas a diferença fundamental está no fato do Brasil ter sido colonizado por Portugal e o México pela Espanha. Essa diferença é marcante nos aspectos culturais e linguísticos, além das características das populações serem muito diversas, tendo o Brasil uma miscigenação maior devido à influência da escravidão negra e de outras culturas que migraram para o país.

Comparar a educação de ambos gera uma dinâmica de raciocínio que obriga a identificar semelhanças e diferenças entre fatos, fenômenos ou processos educativos e interpretá-las, levando em consideração a relação desses com o contexto social, político, econômico, cultural a que pertencem. E esse processo de comparação deve ser dinâmico, aberto metodologicamente, pois a sua *performance* depende da atenção que prestar a outros domínios do conhecimento e da sua capacidade em acolher preocupações diversas, consciente que o seu objeto é marcado pelo percurso histórico e pelo contexto econômico-social em que se insere (FERREIRA, 2007).

Conforme Franco (2000),

o próprio processo de conhecimento do outro e de si próprio, nesta troca entre realidades culturais diversas, implica um confronto que vai além do mero conhecimento do outro. Implica a comparação de si próprio com aquilo que se vê no outro. Nesse processo comparativo, é fundamental conhecer e assumir as categorias que permitem fazer este confronto. Nem sempre são as categorias sobre as quais estamos raciocinando de modo explícito. Mas este é um processo que não acontece no vazio, e sim através de algum tipo de paradigma. Pode acontecer, entretanto, que não se tenha consciência do tipo de comparação que estamos realizando (p. 198).

Para Burke (2002), a importância dos estudos comparativos está na ênfase ao conhecimento decorrente do contato com as diferenças, dos debates e conflitos, além dos interesses e tradições compartilhados por diferentes culturas. O autor ainda trata da riqueza que a comparação pode revelar: o específico, o único, o irrepetível, próprio de uma cultura ou de uma sociedade, ou seja, é apenas graças à comparação que conseguimos ver o que não está lá; em outras palavras, entender a importância de uma ausência específica (BURKE, 2002, p. 40).

Ainda segundo Burke (2002), comparar na educação não fornece soluções que indistintamente se possam aplicar a qualquer povo e a qualquer tempo. Cada sociedade nacional

precisará descobrir os seus próprios poderes de cultura, as condições que as tenham feito surgir e os mantenham, os modos e formas dentro dos quais mais racionalmente se possam desenvolver.

Para Lourenço Filho (2004),

só ao confrontarmos o sistema de ensino de nosso próprio país com outros sistemas é que tomamos maior consciência de certos aspectos distintivos do processo da educação nacional como *conjunto*, e passamos a elaborar critérios que nos levem a melhor entender as nossas próprias instituições escolares, suas razões, propósitos e resultados. Em face de regularidade e diferenças, que se observem, é que nos propomos o problema de condições determinantes, ou *fatores* do processo educativo, aprendendo-lhes os contornos – e neles discernindo relações com outros muitos fatos da vida coletiva: os de natureza econômica, política, religiosa e, enfim, todos quantos exprimam a dinâmica cultural de nosso próprio país –, que assim passamos a melhor compreender (p. 20).

Hoje, vários organismos internacionais, como a Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura (UNESCO)⁶, Organização dos Estados Americanos (OEA)⁷ a OCDE (Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico)⁸ e o Banco Mundial têm promovido estudos comparativos sobre diferentes países, a fim de fornecer informações aos governos, como por exemplo o PISA⁹. Esses estudos seguem uma abordagem metodológica positivista e quantitativa conforme Ferreira (2008), é natural que essa comparação seja fortemente condicionada pelos interesses pragmatistas e imediatistas dessas entidades que dirigem as políticas educativas e que isso suscite algumas reações dos que recusam aceitar que ela se circunscreva a uma ação meramente técnica e desejam que enverede por caminhos mais críticos e reflexivos. Mas ressalta, ainda, que a sofisticação estatística, até pela pretensão das certezas que transmite, não deixa de ser manipuladora, criando a ilusão de que os seus resultados são a única verdade possível. Não há dúvida de que ela possibilita um exercício intelectual que permite conclusões bastante claras e com grandes possibilidades de generalização (p.136). Nossa proposta de reflexão faz caminho contrário a essas grandes instituições, pois a abordagem é qualitativa, com um olhar relativista na busca da compreensão dos contextos.

Segundo Correa (2012), a diversidade de posicionamentos no campo teórico e metodológico é outro elemento que vem aguçando o espírito crítico no escopo comparatista, bem como a divergência e convergência entre seus autores fundamentais. E é nessa

⁶ United Nations Educational, Scientific, and Cultural Organization (UNESCO).

⁷ Organização dos Estados Americanos.

⁸ Organization for Economic Co-operation and Development (OECD).

⁹ Organization of American States (OAS).

multiplicidade de ideias que procuramos os elementos para fundamentar a nossa investigação, nessa proposta de *olhar o outro para entender a si mesmo*.

Baseados nessa proposta de reflexão, propomos o seguinte problema de pesquisa: *Como a TSME pode orientar indicações curriculares para o processo de estudoagem dos Números Racionais?* Nosso objetivo geral é realizar uma investigação sobre o processo de estudos dos Números Racionais no Brasil e no México, tendo como referência as indicações oficiais, procurando identificar aspectos similares e especificidades para o estudo desse conteúdo sob o enfoque da TSME e, ao final, apresentar orientações norteadoras para o Ensino Fundamental brasileiro, tendo a TSME como referencial.

A pesquisa foi dividida em quatro etapas de trabalho: 1ª) estudo do referencial teórico; 2ª) análise documental das leis que regem a educação de ambos países e as orientações sobre o estudo dos Números Racionais; 3ª) visita a escolas, acompanhamento de atividades e entrevistas com um grupo de professores brasileiros e mexicanos, para compreender como se dá o processo de estudo do tema; 4ª) proposta de uma reflexão sobre o estudo dos Racionais, nas indicações oficiais e na prática dos professores investigados.

Essas etapas não são cronológicas, já que na primeira etapa onde foi realizado um estudo do referencial teórico, sobre as publicações acadêmicas acerca dos Números Racionais, também se inclui um período de estudos no México, entre setembro de 2015 a fevereiro de 2016, no Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV, na Cidade do México (México), sobre a orientação do Dr. Ricardo Arnoldo Cantoral Uriza, para aprofundamento da compreensão da teoria utilizada como referencial da investigação. Este período de estudo no exterior também contribuiu em muito na segunda e terceira etapa da investigação.

Na primeira etapa realizamos uma pesquisa bibliográfica acerca da TSME, a fim de compreender e traçar os caminhos a serem percorridos ao longo da investigação. Esse processo foi aprofundado no período de intercâmbio realizado no México.

Na segunda etapa, houve a análise documental das propostas curriculares das escolas pesquisadas, identificando quais conteúdos de Números Racionais são ensinados, os objetivos a serem alcançados com o estudo desses conteúdos, como são ensinados (as metodologias utilizadas), quando são ensinados e o quê, como e quando esses conteúdos estão sendo avaliados, contrastando-os com os documentos oficiais brasileiros e mexicanos.

A terceira etapa se constituiu em visitas às escolas para obtenção dos planos de estudos. No caso brasileiro (já que no México os planos são publicados pela *Secretaría de Educación Pública da Administración Pública Federal (SEP)*), entrevista com um grupo de professores brasileiros e mexicanos para compor um perfil desses profissionais e entender suas ideias,

práticas e metodologias acerca dos estudos dos Números Racionais. Fez parte dessa etapa o acompanhamento dos planejamentos desses professores, assim como as atividades e avaliações propostas sobre o tema Números Racionais. Isso foi feito através de cópias dos seus cadernos de planejamentos, indicações de fontes de pesquisas utilizadas, cópias de cadernos de alunos, análise de livros didáticos utilizados por esses professores em seus planejamentos e nas suas práticas em sala de aula. Quanto aos livros didáticos, foram investigados também aspectos como: a) quais as políticas sobre livros didáticos no Brasil e no México; b) quais os conceitos sobre Números Racionais abordados; c) que metodologias são propostas para o ensino dos Números Racionais.

Por fim, a última etapa se constitui em uma reflexão para delinear indicativos norteadores para o estudo dos Números Racionais sob a perspectiva da TSME. A partir das reflexões realizadas ao longo do processo de investigação, procuramos, ao final, contribuir com a apresentação de indicativos para o estudos dos Números Racionais para o Ensino Fundamental brasileiro.

Como parte dessas etapas, foi necessário analisar os documentos oficiais dos dois países sobre as orientações para o estudo do conteúdo dos Números Racionais, considerando a sua distribuição ao longo do currículo escolar, metodologias recomendadas e resultados esperados na compreensão desse tema por parte dos alunos do Ensino Fundamental.

As indicações oficiais se materializam na prática através dos planos de estudos. No Brasil e no México, esse processo se dá de forma muito distinta: no Brasil, ficam a critério das escolas os planos de estudos e, no México, são de responsabilidade da SEP. Investigamos, assim, um grupo de escolas da rede municipal de Canoas, Rio Grande do Sul, para termos uma referência de como se apresentam os planos de estudo no Brasil. E no México como a base é nacional, foi necessário analisar os planos de estudos propostos pela SEP.

Tanto as orientações quanto os planos de estudo são norteadores para a prática docente, mas não são as únicas referências que os professores utilizam na sua prática. Então, foi preciso investigar as metodologias propostas por um grupo de professores brasileiros e mexicanos no processo de estudo do conteúdo dos Números Racionais, para entender como de fato se dá, na sala de aula, o processo de estudo desse tema. Nesse sentido foram realizadas entrevistas com um grupo de professores do México e do Brasil.

Uma referência importante para os professores, na sua prática, e incentivada pelos governos, através de programas de distribuição para os alunos em ambos países, é o livro didático. Por isso, foi preciso investigar os livros didáticos do Brasil e do México, fazendo um comparativo entre as edições, levando em consideração critérios de qual período se abordam

Números Racionais, o que se ensina, quais as metodologias adotadas e os recursos utilizados. Os livros que serviram como referência foram os indicados pelos professores participantes. No Brasil, os livros selecionados estão dentro do Programa Nacional de Livros Didáticos (PNLD) e, no México, as coleções indicadas pela SEP.

Acreditamos que os planejamentos de aulas, atividades e avaliações propostas para o estudo do conteúdo dos Números Racionais, assim como os livros didáticos, dão subsídios interessantes para a compreensão de como as orientações oficiais se realizam na prática escolar.

Ao final desta investigação, um dos objetivos é apresentar uma proposta de estudos dos Números Racionais para o Ensino Fundamental no Brasil, a partir das reflexões realizadas ao longo da investigação, tendo como marco referencial a TSME.

Para atender a esses objetivos, é importante compreender a realidade onde estão inseridos os elementos (sistemas educativos, indicações oficiais, professores e alunos) que compõem esta pesquisa. Assim, foram eleitos os seguintes instrumentos de pesquisa:

- os planos de trabalho para o ensino dos Números Racionais de três professores de 6º e 7º ano da cidade de Canoas, assim como de um professor do 6º grau do Primário, um do 1º grau do Secundário e um do Telessecundário no México, além de entrevistas de áudio, atividades de aulas, trabalhos e provas avaliativas propostas pelos professores envolvidos na pesquisa;
- os livros didáticos indicados no PNLD e utilizados pelos professores investigados na cidade de Canoas, e os livros indicados pela SEP, no México, e utilizados pelos professores investigados no México.

Além disso, foram analisadas as leis que regem a educação e as indicações oficiais sobre o estudo dos Números Racionais no Brasil e no México. No Brasil servem como referencial a Lei de Diretrizes e Bases (LDB) nº 9.394/96 e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de 1997 e 1998. No México, a *Ley General de Educación (LGE, MÉXICO, 2013)*, *Acuerdo Número 592: por el que se establece la articulación de la Educación Básica (MÉXICO, 2011a)* e os Programas de Estudio 2011, *Guía para el Maestro, Educación Básica (MÉXICO, 2011b)*. Incluem-se, também, os planos de estudo do conteúdo dos Números Racionais de um grupo de escolas do município de Canoas e de escolas no México.

Investigamos dezesseis escolas no município de Canoas, analisando os planos de estudos do 6º e 7º ano do Ensino Fundamental em relação aos Números Racionais. Entrevistamos 46 professores de Matemática da rede municipal, através de um questionário padrão (Apêndice 1), com o intuito de compreender as metodologias e práticas em relação ao conteúdo dos Racionais, conforme a disponibilidade de participar da investigação.

Desses professores, selecionamos três que se dispuseram a participar da investigação e lecionam na mesma escola. No ano de 2015, quando realizamos a coleta de dados, essas professoras eram responsáveis por todas as turmas de 6º e 7º ano da escola. Com isso, acreditamos ter um subsídio suficiente para entender o processo de ensino dos Números Racionais, podendo fazer uma relação das indicações oficiais, para desenvolver esse tema na escola e a interpretação que esses professores dão a essas indicações.

No México, não encontramos um ambiente de acesso aos professores. Dessa forma, a escolha dos mesmos foi por indicações e disponibilidade. O critério utilizado para a seleção dos três professores foi que deveriam lecionar no 6º grau do Nível Primário e 1º grau do Nível Secundário, e serem da mesma região do país. Os professores selecionados foram: um do 6º grau do Primário, um do 1º grau do Secundário e um do 1º grau do Telessecundário, todos da *Heroica Ciudad de Huajuapán de León*, município do Estado de Oaxaca. Assim, também pudemos analisar como esses três professores de uma mesma região interpretam as orientações sobre o ensino dos Números Racionais.

Para identificação dos sujeitos nesse trabalho, convencionamos a utilização das siglas PB e um número para os professores brasileiros e PM, seguido de um número, para os professores mexicanos. As escolas foram identificadas pelas suas iniciais, por exemplo, a Escola Municipal de Ensino Fundamental Tancredo de Almeida Neves foi identificada por EMTAN.

Além das fontes de dados já enumeradas, também fazem parte dessa investigação entrevistas em áudio com o Professor Dr. Ricardo Arnoldo Cantoral Uriza, as quais subsidiaram essa investigação no entendimento da TSME e na dinâmica da compreensão do processo educacional mexicano.

Acreditamos que, com esses elementos e a planificação dessas quatro etapas de trabalho, contemplamos todos os aspectos que propomos para traçar indicativos norteadores para o estudo dos Números Racionais no Brasil.

2 SOCIOEPISTEMOLOGIA, NÚMEROS RACIONAIS E INDICAÇÕES OFICIAIS

Apresentamos, neste capítulo, o referencial teórico desta investigação. A temática de pesquisa são os Números Racionais na perspectiva da Teoria Socioepistemológica da Matemática Educativa (TSME). Os itens deste referencial são: a TSME e suas dimensões; os Números Racionais nas dimensões da TSME.

Buscamos ampliar o olhar sobre os Números Racionais, apoiados na TSME e suas quatro dimensões do saber: epistemológica, didática, cognitiva e sociocultural. Para isso, refletimos sobre cada uma das dimensões e os aspectos importantes a serem contemplados, segundo a TSME. Essa reflexão relacionar as dimensões com a proposta da investigação, o estudo dos Números Racionais em contextos diferentes, o ambiente brasileiro e mexicano.

Os aspectos epistemológicos e históricos das frações e dos números decimais apresentam o desenvolvimento desse tema dentro de um contexto de evolução da humanidade, buscando como e por que aconteceu o desenvolvimento dessa temática. Situamos a dimensão didática dentro dos contextos brasileiros e mexicanos, trazendo a legislação educacional que rege cada país, abordando as indicações e orientações metodológicas relativas ao processo de estudo dos Números Racionais. Já os aspectos cognitivos focam a construção, pelos estudantes, da ideia dos Números Racionais e as possíveis barreiras epistemológicas e didáticas encontradas ao longo desse processo.

Os aspectos socioculturais entrelaçam todas as outras dimensões, quando situam os contextos e suas particularidades, assim como a importância do tema tratado dentro do meio acadêmico e social. Em verdade, todas as dimensões estão inter-relacionadas. Tratando de uma delas conseqüentemente discutimos as outras, pois uma exerce influência sobre a outra.

A seguir, ampliamos as ideias apresentadas e que orientam esta investigação.

2.1 SOCIOEPISTEMOLOGIA: A TEORIA NÃO É DO NINHO ONDE NASCE, E SIM DO CÉU DE ONDE VOA¹⁰

Emergente do campo da Matemática Educativa¹¹ e do cruzamento entre a Matemática, as Ciências Sociais e Ciências Humanas, a Teoria Socioepistemológica da Matemática Educativa (TSME) nasceu na década de 90, no México, com o objetivo de explorar formas de pensamentos matemáticos, fora e dentro da escola, que pudessem difundir-se socialmente. A

¹⁰ Frase adaptada do documentário “Hecho en México”, de 2013, e inspirada em Cantoral (2013).

¹¹ O termo *Matemática Educativa* provém da proposta, que nasceu no CINVESTAV (México), de ensinar a Matemática desenvolvida pelos matemáticos puros no contexto escolar.

mesma tem se caracterizado por buscar explicações para a construção social do conhecimento matemático e a sua difusão institucional.

Para Cantoral (2004),

a *Socioepistemologia*, ou epistemologia das práticas sociais relativas ao saber é uma abordagem teórica de natureza sistêmica que permite tratar os fenômenos de produção e difusão do saber a partir de uma perspectiva múltipla, pois articula numa mesma unidade de análise as interações entre a epistemologia do conhecimento, sua dimensão sociocultural, os processos cognitivos que lhe estão associados e os mecanismos de sua institucionalização via educação (CANTORAL, 2004, p.1. Tradução do autor)¹².

Em 2005¹³, Cantoral apresentou o que denominou de *base estrutural*, onde está fundamentada a Teoria Socioepistemológica. Essa base está organizada em dez teses centrais, apresentados a seguir.

- Tese 1: o conhecimento matemático, assim como o científico, não foi projetado para ser ensinado na aula clássica. A orientação socioepistemológica estabelece uma filiação entre a natureza do conhecimento que os seres humanos produzem com as ações e atividades mediante as quais e em razão das quais esses saberes são produzidos. Nesse sentido, sustenta-se a existência de uma dialética entre o uso e o símbolo, ou seja, entre a atividade e a cultura.

- Tese 2: o saber matemático deve sua origem, razão de ser e sua significação a outras práticas de referências. O conhecimento matemático, ainda que considerado avançado, tem a sua origem e funções associadas às práticas socialmente estabelecidas que, em muitas ocasiões, são externas à própria Matemática mesmo. As práticas são dotadas de identidade pessoal, coletiva, nacional ou cultural em sentido amplo.

- Tese 3: as práticas sociais são a base e orientação do conhecimento humano. A socioepistemologia coloca o conhecimento matemático como resultado da prática social, pois articula a intervenção ativa com a intervenção humana, para alcançar a construção social do conhecimento, buscando, assim, a democratização da aprendizagem em Matemática.

- Tese 4: a difusão institucional do conhecimento matemático está regida por ideologias (busca de consensos, mecanismos de hegemonia e coerção). A aprendizagem requer a interação, a construção de discursos e ações. As aulas de Matemática não podem nem devem ser um local silencioso.

Em primeiro lugar, temos entendido cada vez melhor como as crianças aprendem Matemática em situações vivenciadas, partindo da experiência cotidiana, para chegar ao geral, quer dizer, de experiências concretas relacionadas com objetos ou situações

¹² La *socioepistemología*, o epistemología de las prácticas sociales relativas al saber, es una aproximación teórica de naturaleza sistémica que permite tratar con los fenómenos de producción y difusión del saber desde una perspectiva múltiple, pues articula en una misma unidad de análisis a las interacciones entre la epistemología del conocimiento, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos que le son asociados y los mecanismos de su institucionalización vía la enseñanza

¹³ Durante a Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME) 19 em Montevideo, Uruguai.

de sua vida cotidiana que lhes permitem chegar à construção de conhecimento e ao desenvolvimento de habilidades que lhes permitam compreender e confrontar os pontos de vista entre seus colegas e desses com o seu professor; processo fundamental para a aprendizagem e construção do conhecimento matemático a partir de uma perspectiva social (CANTORAL, 2013, p. 342).

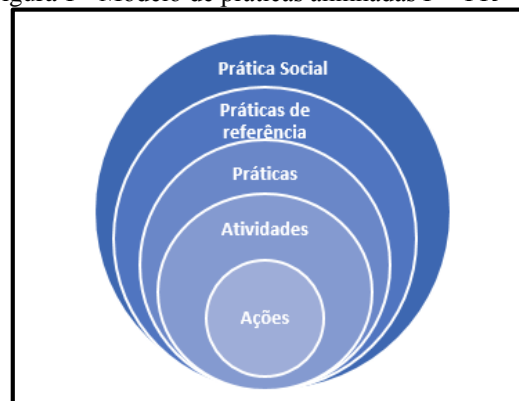
- Tese 5: o ensino da Matemática tem sido usado para ‘expulsar’ estudantes do sistema de ensino. Geralmente, tem sido do tipo memorístico, com pouco amparo na experimentação e no descobrimento compartilhado por parte das crianças e jovens.

- Tese 6: a Socioepistemologia não trata de uma epistemologia social ou sócio-epistemologia, mas sim de uma episteme do social ou Socioepistemologia. Para alcançar uma melhor adequação da Matemática ensinada com as expectativas da sociedade, o ensino da mesma deveria basear-se em situações procedentes do mundo real, a fim de permitir aos alunos e adultos utilizá-las mais facilmente em sua vida social e profissional.

- Tese 7: a Socioepistemologia tem usado, temporariamente, termos construídos por outros enfoques ou outras disciplinas do conhecimento (por exemplo, empregando a noção de aprendizagem proveniente da Psicologia), buscando reconsiderar esses construtos em virtude da grande quantidade de evidências empíricas acumuladas.

- Tese 8: a atividade e a prática são elementos de articulação teórica. A articulação necessária entre atividade e prática, citada nesta tese, é a que se mostra no modelo de práticas aninhadas (figura 1), o qual é proposto de maneira integrada com o aporte da sequência: ação – atividade – prática. Com isso, a estrutura se forma hierárquica $\{P \rightarrow PR \rightarrow PS\}$, ou seja, o conjunto de práticas sociais normaliza as ações, as atividades, as práticas e as práticas de referência.

Figura 1 - Modelo de práticas aninhadas P→PR→PS



Fonte: adaptado de Cantoral (2013).

- Tese 9: redimensionar o saber, significação coletiva e ressignificação teórica.
- Tese 10: respeito à diversidade cultural, teórica e metodológica (Cantoral, 2005). A articulação entre ação e atividade cria um sistema que estabelece uma relação simbiótica

regulatória (função normativa). Quer dizer, o passo do natural ou biológico, ao humano e cultural é normatizado pela mediação do conjunto de artefatos que a espécie humana desenvolveu (funções discursiva e identitária). Essa mediação adquire um valor funcional, de uso (função pragmática). Chamamos, a prática social de emergente¹⁴, regulatória porque possibilitará o trânsito do conhecimento ao saber.

A base de constituição do programa socioepistemológico tem se dado sobre o entendimento e a construção de significados matemáticos. Para Cantoral (2013), a Matemática é considerada parte essencial da cultura, um elemento ‘vivo’ que se cria ‘fora’, mas se recria ‘dentro’ da aula de Matemática e completa dizendo que ela “não foi inventada para ser ensinada e, no entanto, se ensina por uma necessidade funcional, conservar o saber humano e para potencializar as capacidades de ação ante uma grande quantidade de tarefas¹⁵” (2013, p. 28).

Para a TSME, o saber matemático tem se constituído socialmente, em âmbitos não escolares, e sua introdução ao sistema educativo obriga a uma série de modificações que afetam a estrutura e o funcionamento da disciplina de Matemática, impactando a relação estabelecida por professores e alunos. Ao tratar de saber matemático, a TSME fala de pluralidade de saberes, diversidade de saberes, não se restringindo ao saber sábio¹⁶. Assim, consideramos legítima, toda a forma de saber, seja esse popular, técnico ou culto, pois é o conjunto desses saberes que constitui a sabedoria humana.

A investigação desenvolvida por Farfán (1997), sobre a convergência de séries infinitas, sugere uma atenção aos aspectos sociais da construção do conhecimento, ainda que isso signifique perder, em um certo sentido, o âmbito propriamente escolar e incorporar outras práticas de referência. Por consequência, segundo Cantoral e Fáfán (2003), não podemos centrar a atenção nos conceitos e suas diferentes estruturações conceituais de forma isolada, sem tratar com as práticas que produzem ou favorecem a necessidades de tais conceitos. Os autores propõem, assim, um desafio, o de partir do conceito à prática, ou seja, adicionar ao campo da educação matemática outras práticas de referência, como a do engenheiro, do informático, entre outras.

¹⁴ A ideia de *emergente* tem a ver com a formação de níveis de realidades superiores que possuem as próprias leis e não podem ser explicadas a partir de leis de nível precedente. Cantoral (2013) exemplifica essa ideia utilizando a química, quando dizemos que há emergência de propriedades novas em um composto se, ao combinarmos dois elementos simples, obtemos ou criamos algo novo, como a molécula da água (H₂O), que é um composto químico inorgânico, formado por dois átomos de Hidrogênio (H) e um de Oxigênio (O) que possuem propriedades novas (emergentes) que não possuíam seus componentes. A água é essencial para a subexistência da vida, porém, se isolarmos seus elementos, o Oxigênio é inflamável e o Hidrogênio é explosivo.

¹⁵ “las matemáticas no inventaron para ser enseñadas y que sin embargo se enseñan por una necesidad funcional, conservar el saber humano y para potenciar las capacidades de acción ante una gran cantidad de tareas”.

¹⁶ Savoir Savant.

2.1.1 A TSME e o *discurso Matemático Escolar*: uma reflexão crítica sobre consenso e hegemonia

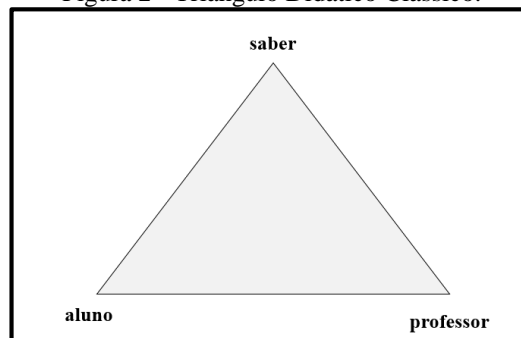
Segundo Cantoral (2013), a Socioepistemologia busca entender as razões, os procedimentos, as explicações, as escrituras ou formulações verbais que o aluno constrói para responder a uma tarefa matemática, do mesmo modo que procura decifrar os mecanismos mediante os quais a cultura e o meio contribuem na formação do pensamento matemático. A expressão *pensamento matemático* é usada para referir a diversidade de formas como pensam as pessoas que se interessam por identificar, caracterizar ou modelar conceitos e processos propriamente matemáticos em âmbitos diversos.

Cantoral e Farfán (2009) questionam de que forma podemos levar o estudante a vivenciar uma situação de aprendizagem significativa¹⁷, se a maneira dominante de ensinar está condicionada a um meio didático controlado, que não considera as questões socioculturais envolvidas nesse processo, ou seja, propõe uma *didática sem cenários culturais*¹⁸.

Os autores propõem que não olhemos mais os conceitos e suas diferentes estruturações de forma isolada, mas tratemos das práticas que produzem ou favoreçam as necessidades de tais conceitos. É importante dar maior atenção à construção social do conhecimento, deixar de analisar, exclusivamente, os conceitos matemáticos e analisá-los conjuntamente com as práticas que acompanharam a sua produção e tornam possível a sua transcendência de uma geração a outra, isto é, uma descentralização do objeto, o que não significa o seu abandono.

A TSME agrega ao triângulo didático clássico (figura 2) a dimensão social e cultural, ao descentralizar, como uma escolha metodológica, e enriquecer o processo mediante as práticas, dando um valor de uso aos conceitos matemáticos e suas propriedades.

Figura 2 - Triângulo Didático Clássico.



Fonte: Brousseau, 1996.¹⁹

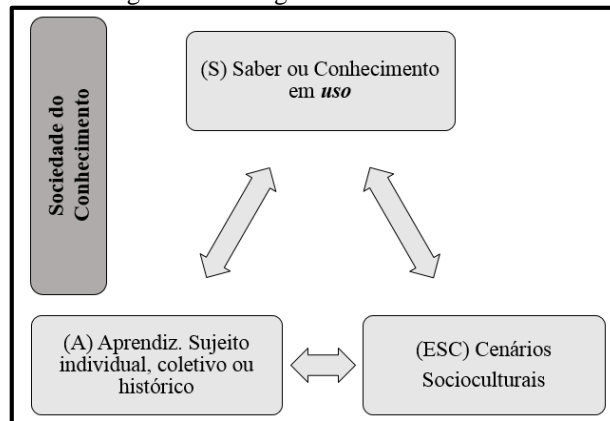
¹⁷ Aprendizagem significativa no sentido de construção de saberes enriquecidos de novos significados.

¹⁸ Aqui, os autores fazem referência ao fato de, muitas vezes, a ênfase do ensino estar no objeto matemático, outras vezes na didática, ignorando as circunstâncias sociais que envolvem os sujeitos desse processo de ensino e aprendizagem.

¹⁹ BROUSSEAU, Guy. Fundamentos e Métodos da Didática da Matemática. In: BRUN, J. Didática das Matemáticas. Tradução de: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996a. Cap. 1. p. 35-113.

Ao incorporar ao triângulo didático clássico (figura 3) os contextos culturais e perspectivas culturais para a significação do saber matemático, os principais elementos do processo didático, passam a ser o aprendiz, o saber (tanto conhecimento em uso ou como construção social do conhecimento) e os entornos socioculturais, orientados pelas *práticas de referências* e normatizados pelas *práticas sociais*. Na figura 3, apresentamos o triângulo didático, conforme a perspectiva da TSME.

Figura 3 - Triângulo didático na TSME.

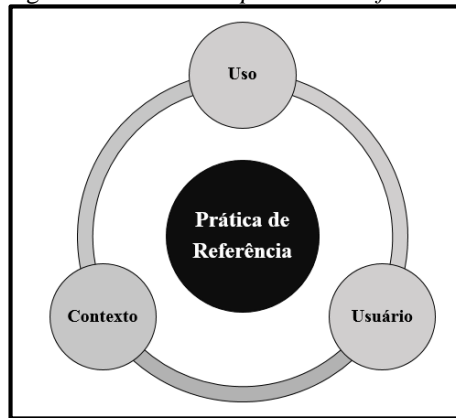


Fonte: adaptado de Cantoral, 2013.

Prestando maior atenção aos aspectos sociais da construção do conhecimento, perdemos em certo sentido, o âmbito propriamente escolar e adicionamos ao campo da Matemática Educativa outras *práticas de referências*, como a do tecnólogo, engenheiro, entre outros, o que implica uma mudança conceitual de centração (CANTORAL; FARFÁN, 2009). Não devemos olhar os conceitos e suas diferentes estruturações conceituais de forma isolada, mas sim tratar com as práticas que produzem ou favorecem a necessidade de tais conceitos. Articulado desse modo, surge a noção de *mudança* como uma concepção da aprendizagem relativa aos *contextos* e às *práticas de referências*.

A TSME postula que, para atender a complexidade da natureza do saber e seu funcionamento ao nível cognitivo, didático, epistemológico e social na vida dos seres humanos, devemos *problematizar o saber*, situando o entorno da vida do aprendiz (individual ou coletivo), o que exige um replanejamento, orientando e estruturando o *discurso Matemático Escolar (dME)* (CANTORAL, 2011).

Conforme Cantoral (2013), a problematização do saber requer uma *noção de uso* de forma concreta e pontual. O *uso* como noção exige uma *prática de referência* e acompanha o processo de formação do conceito. Sua localização, então, é fundamental para orientar a intervenção educativa, para o *replanejamento do dME*. Em suma, não existe um *uso*, sem *usuário*, e este não é tal sem o *contexto* onde acontece o uso: a tríade *uso – usuário – contexto* (figura 4) é uma expressão objetivada da existência de uma *prática de referência*.

Figura 4 - A tríade da *prática de referência*.

Fonte: adaptado de Cantoral (2013).

De acordo com Cantoral (1990, 2006, 2013), a introdução do saber matemático ao sistema educativo, legitimada por um discurso de consenso e de hegemonia no âmbito didático, é denominado pela Socioepistemologia de *dME*. A estruturação do *dME* não se reduz à organização temática dos conteúdos, nem a uma função linguística na aula para buscar que uma instrução seja recordada e ensaiada pelos alunos, mas vai além, estabelecendo uma base de consenso, assim como a construção de significados compartilhados de objetos e de processos matemáticos, tendo uma função normativa.

Para Montiel (2011, p.121):

O discurso escolar é o conjunto de interações entre o professor e estudantes, dirigidas pela exposição coerente dos saberes escolares. Essa coerência se estabelece em relação a exposições prévias e futuras, mas também a respeito dos conceitos matemáticos associados. Por sua vez, o *discurso matemático escolar* é o conjunto de restrições, implícitas ou explícitas, que *normam* a atividade de aula e o discurso escolar mesmo. Uma de suas características mais distintivas é o de alcançar hegemonia no contexto escolar²⁰.

O *dME* é o paradigma educativo que normatiza e regula a matemática escolar, levando os docentes a repetirem as mesmas aulas, ainda que os resultados alcançados na aprendizagem dos alunos nem sempre sejam satisfatórios (CANTORAL, 2013). Ao tentar facilitar a comunicação de conceitos e procedimentos matemáticos em sala de aula, esses saberes acabam se despersonalizando e se descontextualizando, o que gera uma sequência de temas isolados, perdendo o seu sentido e seu significado.

Cantoral (2013) salienta o significado do termo *discurso* adotado pela TSME:

Ao termo *discurso* devemos agregar o de *reflexão*, pois falamos de um *discurso reflexivo*, uma *reflexão discursada* das práticas. Estas quatro funções articuladas

²⁰ El discurso escolar es el conjunto de interacciones entre profesor y estudiantes, dirigidas por la exposición coherente de los saberes escolares. Esta coherencia se establece respecto de exposiciones previas y futuras, pero también respecto de los conceptos matemáticos asociados. Por su parte, el *discurso matemático escolar* es el conjunto de restricciones, implícitas o explícitas, que *norman* la actividad áulica y al discurso escolar mismo. Una de sus características más distintivas es la de alcanzar hegemonía en el contexto escolar.

mostram toda a potencialidade da prática social no desenvolvimento do conhecimento, no passo recíproco do significado individual ao significado cultural e desses ao saber instituído e em via de instituição²¹ (CANTORAL, 2013, p. 165, tradução nossa).

A TSME tem proposto uma reflexão e um *replanejamento*²² do *dME*, a fim de atender também, as demandas envolvendo os problemas sociais e culturais que acompanham a atividade educativa no campo da Matemática. Para isso, necessita uma mudança de concepção sobre a ação da Educação Matemática, indo além dos livros didáticos, currículos, programas de estudos e avaliações. É preciso um repensar profundo sobre a prática educativa como um todo, fazendo um replanejamento do *dME* comum, currículo flexível²³ a partir de um pensamento contextualizado, baseado em práticas e normado²⁴ por práticas sociais.

Sob essa perspectiva, a TSME defende que há uma necessidade de reconstrução do conhecimento matemático com propósitos didáticos amplos, com uma reorganização do *dME*, que não deve se reduzir à elaboração de um novo currículo ou de unidades temáticas de ensino, mas a uma reconstrução racional do corpo teórico. Conforme Buendía e Cordero (2005), é preciso mudar da aquisição do objeto à participação em práticas intencionadas associadas com o objeto específico. Essa ideia se refere à ressignificação dos conceitos matemáticos apoiados em práticas de referências.

Refletindo sobre o que propõe a TSME, Reyes-Gasperini (2011) apresenta uma síntese das relações entre o *dME*, os princípios da Socioepistemologia e as propostas de redesenho do *dME* (figura 5).

Figura 5 - Articulação entre o *dME*, princípios da Socioepistemologia e replanejamento do *dME*.

Discurso Matemático Escolar Atual (Soto, 2010)	Princípios da Socioepistemologia (Cantoral, 2011)	Proposta de replanejamento do Discurso Matemático Escolar
<p>CARÁTER UTILITÁRIO A organização da Matemática escolar antepôs a utilidade do conhecimento a qualquer de suas restantes qualidades. Busca que o conhecimento tenha um caráter funcional, no sentido de alcançar</p>	<p>NORMATIVA DA PRÁTICA SOCIAL A normativa das atividades e as práticas.</p>	<p>CARÁTER FUNCIONAL A Matemática escolar se organiza com base no saber e o funcionamento cognitivo, didático, epistemológico e social na vida dos seres humanos, reconhecendo as práticas sociais na base da criação do conhecimento.</p>

²¹ Al término *discurso* debemos agregar el de *reflexión*, pues se habla de un *discurso reflexivo*, una *reflexión discursiva* de las prácticas. Estas cuatro funciones articuladas muestran toda la potencialidad de la práctica social en el desarrollo del conocimiento, en el paso recíproco del significado individual al significado cultural, y de estos al saber instituido y en vías de institución.

²² A palavra original utilizada para expressar essa ideia na língua espanhola é *rediseño*, sendo a sua tradução literal como redesenho. Pela ideia de propor uma reflexão sobre as concepções didática, pedagógicas e curriculares do *dME*, optamos pela utilização do termo replanejamento. Empregamos replanejamento como uma reavaliação dos propósitos e do processo educacional como um todo, sendo a ideia muito mais ampla que uma reestruturação ou reordenação prática educativa.

²³ Flexível no sentido de ser atento às práticas e que possa promover os aspectos socioculturais ao processo pedagógico.

²⁴ Normado é uma derivação de norma, que traz a ideia de reger, no sentido de regular, e até mesmo reger as práticas.

integrar tal conhecimento à vida, para transformá-la.		
FRAGMENTAÇÃO NOS CONCEITOS Não considera os aspectos sociais, contextuais e culturais que permitem a constituição do conhecimento.	RACIONALIDADE CONTEXTUALIZADA A relação ao saber é uma função contextual.	RACIONALIDADES CONCEITUAIS DIVERSAS Reconhece, privilegia e potencializa diversos tipos de racionalidade relativa à realidade na qual o indivíduo se encontra em um momento e lugar, desde o qual será construído o conhecimento.
CARÁTER HEGEMÔNICO Supremacia de argumentações e significados frente a outras. CONHECIMENTO ACABADO E CONTÍNUO O que tem gerado que o ensino da Matemática seja reduzido à mecanização do processo ou memorização dos conceitos.	RELATIVISMO EPISTEMOLÓGICO A validade do saber é relativa ao indivíduo e ao grupo cultural.	VALIDAÇÃO DOS SABERES (CONHECIMENTOS CONSTRUÍDOS) A Matemática escolar tem diversas maneiras de vermos, se trabalharmos, construirmos, desenvolvermos, concebendo que a validade do saber é relativa ao indivíduo e ao grupo cultural na qual ele está emergido e respeito à racionalidade contextualizada que esse possui.
FALTA REFERENCIAL TEÓRICO PARA A RESSIGNIFICAÇÃO Se há ignorado que a Matemática responde a outras práticas de referência e portanto é aí que encontra uma base de significados naturais.	RESSIGNIFICAÇÃO PROGRESSIVA A significação não é estática, é funcional, relativa e contextual.	PLURALIDADE DE PRÁTICAS DE REFERÊNCIAS PARA A RESIGNIFICAÇÃO A pluralidade de práticas de referência, sua interação com diversos contextos e a própria evolução do indivíduo ou grupo ressignifica os saberes construídos, enriquecendo-os com novos significados.

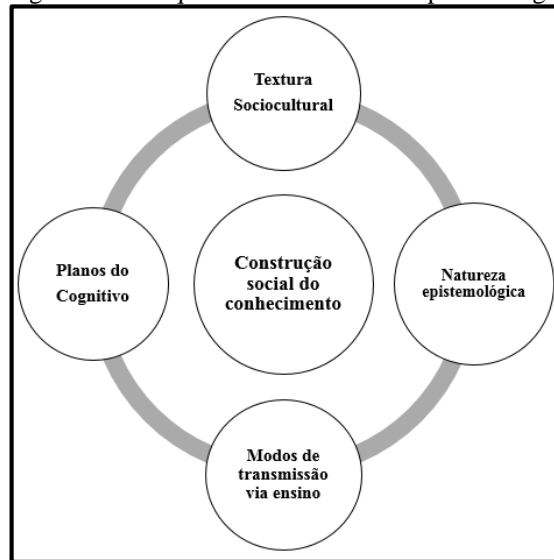
Fonte: Reyes-Gasperini, 2011 (tradução nossa).

A seguir, dando prosseguimento às reflexões sobre a TSME, tratamos das quatro dimensões do saber citadas anteriormente, as quais são integradas de forma sistêmica que guiando essa investigação propriamente dito.

2.1.2 A TSME e as quatro dimensões do saber

A Socioepistemologia, ao longo do tempo, tem se orientado por um tratamento sistêmico e articulado das quatro dimensões do saber (construção social do conhecimento): sua natureza epistemológica (a forma que conhecemos), sua textura sociocultural (a ênfase colocada ao valor de uso), os planos do cognitivo (as funções adaptativas) e os modos de transmissão via ensino (a herança cultural) (CANTORAL, 2013, p.53). Na figura 6, apresentamos o enfoque sistêmico da TSME.

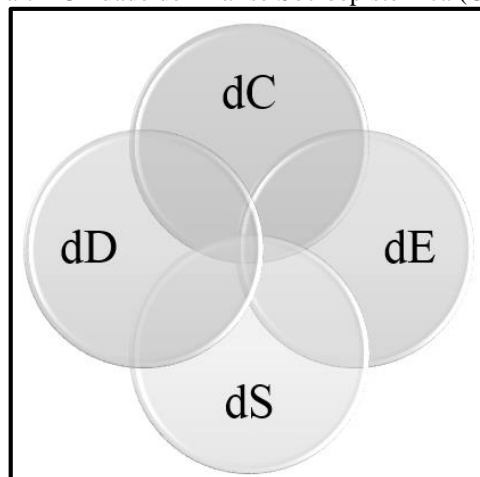
Figura 6 - Enfoque sistêmico da Socioepistemologia.



Fonte: Cantoral, 2013.

A TSME adotou a integração sistêmica de quatro dimensões para estudar os fenômenos didáticos relativos ao saber: *dimensão Epistemológica (dE)*, *dimensão Didática (dD)*, *dimensão Cognitiva (dC)* e *dimensão Sociocultural (dS)*, as quais estão articuladas, o que exige uma análise da transversalidade do saber, ou seja, uma unidade de análise socioepistêmica que articule sistematicamente as dimensões com o fenômeno em jogo. Na figura 7, apresentamos a proposta de análise socioepistêmica.

Figura 7 - Unidade de Análise Socioepistêmica (UASE).



Fonte: Reyes-Gasperini, 2013.

A *dimensão Didática* está diretamente relacionada ao costume didático, tratando a Matemática escolar como objeto de estudo e servindo fundamentalmente para localizar e explicitar o *dME*. Essa dimensão é relativa à natureza do saber como objeto institucional dirigido nos processos de ensino dos estudantes, tanto no âmbito escolar como não escolar, na vida cotidiana (CANTORAL, 2013). Cantoral ressalta que o didático é relativo à *arte de ensinar*

e isso pode se dar além da escola, o que se constitui em uma verdadeira sociedade do conhecimento.

A *dimensão epistemológica* busca tratar, em profundidade, das circunstâncias que tornaram possível a construção do conhecimento matemático, sua razão de ser, mas, sobretudo o que se tornou público. Diz respeito à forma como o saber pode ser conhecido, os tipos de relações que o sujeito estabelece frente ao objeto matemático.

Sobre essa relação, Radford (2006) afirma que a aprendizagem não consiste em construir ou reconstruir um conhecimento, mas se trata de dotar de sentido os objetos conceituais que o aluno encontra em sua cultura. A aquisição do saber é um processo de elaboração ativa de significados. Uma das fontes de aquisição do mesmo resulta do nosso contato com o mundo material, o mundo dos artefatos culturais no nosso entorno (objetos, instrumentos, etc.), onde se encontra depositada a sabedoria histórica da atividade cognitiva das gerações passadas (RADFORD, 2006).

Segundo Cantoral (2013), a *dimensão Cognitiva* do saber analisa as formas de apropriação e significação progressiva que experimenta quem se encontra na situação de construção do conhecimento. A cognição é entendida como a capacidade de fazer emergir significados a partir de realimentações sucessivas entre atores e um meio ambiente próximo, tanto físico como cultural, através de uma interação dialética entre os protagonistas. Consoante o autor, o conhecimento depende das experiências vividas que, por sua vez, modificam as próprias percepções e crenças, inclusive a própria identidade do sujeito.

A *dimensão social e cultural*, com a sua textura *Sociocultural*, se ocupa do uso do saber em situações específicas. Ao introduzir essa dimensão no modelo socioepistemológico, produziram-se reinterpretções das outras três dimensões, pois promoveu uma reflexão sobre alguns mecanismos sociais como a formação de consenso e a constituição das tradições em relação ao uso do conhecimento. Dessa forma, trata do problema da representação de um modo distinto, não pretendemos discorrer, teoricamente sobre a ação de representar o objeto mediante artefatos, ferramentas ou símbolos, mas se coloca ao nível das práticas e da forma como elas se normam por *práticas sociais* (CANTORAL, 2013).

É necessário esclarecer que a noção de *prática social* adotada pela TSME se distingue do modo usualmente empregado, que consiste em pensar em práticas sociais como as realizadas por um grupo de pessoas, como, por exemplo, jogar ou dançar. A TSME trata essas práticas como *práticas socialmente compartilhadas*, sendo que a *prática social* não é o que faz em si o indivíduo (não é a prática executada), mas sim o motivo de fazer o que faz, o que normatiza sua ação (é a orientação da prática, é a *prática social*).

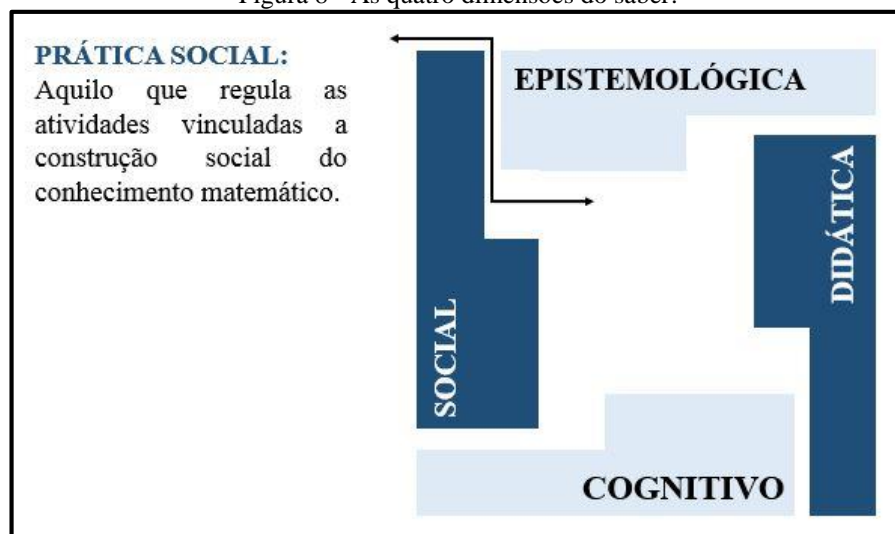
Cantoral cita Mirgüer, para conceituar as práticas sociais:

Entende-se por práticas sociais o conjunto de ações que surgem e permanecem no ambiente social, afetando e conformando a *psique* de todo indivíduo. A prática social não é estática, é ativa, se está construindo dia a dia e é produto do homem mesmo. Sua característica principal é que é vigente e gera consenso, nem sempre se manifesta ou é percebida com toda clareza, pode estar oculta, mas se intui e se pressente. A prática social pode estar constituída por atividades motrizes ou intelectuais, [...] outra característica da prática social na Educação Matemática é que não se refere a um só indivíduo, mas, a comunidades de indivíduos (MIRGÜER, 2006 apud CANTORAL, 2013, p. 101).

Para a Socioepistemologia, a espécie humana desenvolveu a capacidade de construir explicações sobre o mundo em que vive, mediante complexos processos de construção de significados compartilhados. O ponto de partida para a construção de saberes é a atividade regulada por *emergentes* de natureza social, que são denominados de práticas sociais. Essas regulam o exercício de práticas compartilhadas, através das quais, os sujeitos (individuais ou coletivos) se relacionam intra e inter psicologicamente. Os saberes são as diferentes formas de compreender e explicar as realidades e se encontram vinculados com as práticas socialmente compartilhadas, que, por sua vez, estão normatizadas pelas práticas sociais.

Podemos dizer que as línguas, as leis, a moral e a religiosidade são emergentes sociais que não poderiam ser criados por sujeitos individuais, mas sim, pelo coletivo normatizado no curso da evolução. Cantoral (2013) emprega essa ideia, para afirmar que as práticas sociais são um emergente social com características novas do tipo funcional. As funções da prática social são quatro: normativa, de identidade, pragmática (no sentido de prática) e discursiva (reflexiva). Na figura 8, apresentamos um esquema da ideia das práticas sociais como normalizadora do processo de construção social do conhecimento.

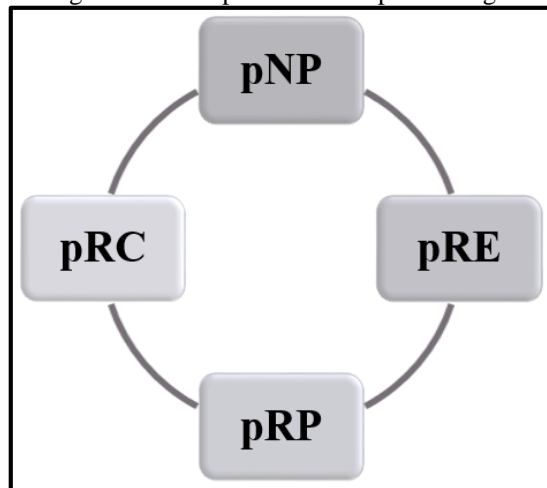
Figura 8 - As quatro dimensões do saber.



Fonte: adaptado de Montiel (2005).

Assim, conforme Cantoral (2011), a Socioepistemologia descansa sobre quatro princípios fundamentais: o princípio da racionalidade contextualizada, o princípio do relativismo epistemológico, o princípio da ressignificação progressiva ou da apropriação situada e o princípio normativo da prática social. Esses princípios não são sequenciados linearmente, mas formam uma rede interligada. Na figura 9, um esquema dos princípios da TSME.

Figura 9 - Princípios da Socioepistemologia.



Fonte: Cantoral (2013).

Para Cantoral (2013), o princípio normativo da prática social é um dos fundamentos principais para a TSME, pois assume as práticas sociais como a base e a orientação nos processos de construção do conhecimento, sendo geradoras do conhecimento, como a *Prædicere*, uma prática social que foi a base e a orientação do programa de fundação da Matemática de mudança e variação, no desenvolvimento da área conhecida como Cálculo no século XVII. Segundo Cantoral (1990), a *Prædicere* é a ação intelectual do sujeito epistêmico sobre os dados factuais, para estabelecer os padrões de regularidade do comportamento do que será predito²⁵.

A ação do sujeito (individual, coletiva ou histórica), a atividade humana (situada culturalmente), a prática (iteração deliberada do sujeito e regulada pelo contexto) e a prática de referência (expressão material e ideológica de um paradigma, seja ideológico, disciplinar ou cultural) estão normadas mediante as quatro funções da prática social (normativa, de identidade, pragmática e discursiva-reflexiva).

O princípio da racionalidade contextualizada se refere a que relação do sujeito com o saber é uma função do contexto. Predomina aqui, a ideia de que a construção do conhecimento

²⁵ Predizer é entendido como a necessidade de conhecer um estado futuro com base no presente e as variações do seu passado.

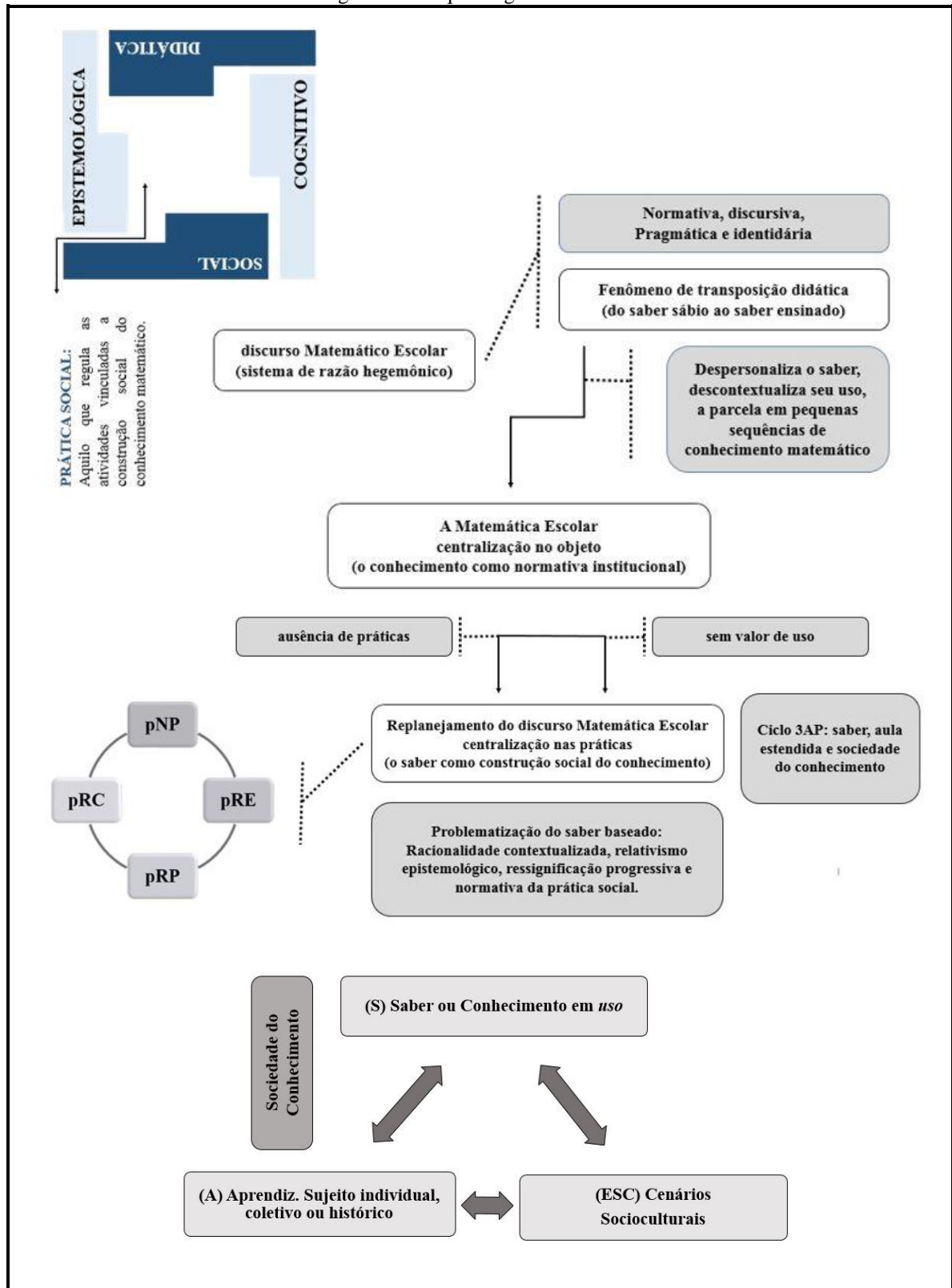
é um produto sociocultural. A racionalidade com que atua depende do contexto em que o indivíduo se encontra em determinado momento. Para explicar esse princípio, Cantoral retoma à ideia de cenário sociocultural, proposto por Crespo (2007), que afirma que esse cenário influi não só nas condutas, mas também na maneira de atuar e de pensar dos membros da sociedade que habita, modelando, de certa maneira, suas ações e pensamentos, condicionando-os fortemente.

Ao defender que a validade do saber é relativa à epistemologia de partida, tanto do indivíduo como do grupo cultural e seu contexto, a Socioepistemologia, através do princípio do relativismo epistemológico, sustenta que os pontos de vista não têm verdade, nem validade universal, mas que todo caso só possui uma validade subjetiva e relativa aos diferentes referenciais teóricos.

O princípio da ressignificação progressiva coloca que a ação é a base do desenvolvimento do conhecimento. A ação do sujeito sobre o objeto deriva dos significados construídos. Segundo Cantoral (2013), um significado posto em funcionamento em situações novas, sob o mesmo esquema construtivo, se ressignifica, produzindo conhecimentos e a essa dinâmica a TSME denomina de ressignificação progressiva, estando na base do desenvolvimento do ato de pensar. Esse mecanismo de produção de significados não isola o indivíduo do meio, mas dá uma forma de estabelecer laços de interação, pois, no momento de pôr o conhecimento em uso, necessita das ferramentas, dos argumentos, dos discursos e do entorno sociocultural.

Cantoral (2013) representa a teoria através de um esquema (figura 10), onde é possível visualizar um panorama geral da TSME.

Figura 10 - Esquema geral da TSME.



Fonte: Adaptado de Cantoral (2013).

Procuramos apresentar, neste capítulo, as principais características da TSME, que nos servem como suporte, guiando a investigação para a compreensão dos aspectos

epistemológicos, didáticos, cognitivos e socioculturais que envolvem o tema Números Racionais para o estudo dessa temática no Ensino Fundamental (1º ao 9º anos da Educação Básica).

A seguir, passamos a desenvolver a temática em estudo envolvendo as quatro dimensões da TSME.

2.2 OS NÚMEROS RACIONAIS: HISTORICIDADE E EPISTEMOLOGIA

O conceito de Números Racionais e a forma como é desenvolvida, hoje, no ambiente escolar, resulta de uma longa jornada histórica e epistemológica. A construção da ideia dos *Racionais* se articula com a evolução da humanidade, ao longo de séculos de tratativas, envolvendo diversas culturas. E assim, através da necessidade de desenvolvimento do homem e da Matemática, foram se formando as frações, os decimais e a formalização do Conjunto dos Números Racionais.

O que buscamos é retratar o caminho percorrido por essas ideias, não somente historicamente, mas epistemologicamente, buscando entender “as origens e os porquês” ocorrem as mudanças. A visão, na perspectiva histórica e epistemológica da construção do conhecimento da temática de pesquisa, complementa-se na busca por compreender a evolução ao longo dos séculos até os dias atuais.

Para Cantoral (2013), o saber matemático (o saber *sobre* algo) não pode reduzir-se a uma mera definição formal, declarativa ou relacional, a um conhecimento matemático (o conhecimento *de* algo), mas deverá ocupar-se da sua *historicização* e *dialetização*, como seus dois mecanismos fundamentais de constituição. Por essa razão, o *saber* deve ser concebido como uma construção social.

Ainda segundo o autor, o verbo *historicizar* tem as seguintes aceitações: “dar caráter histórico (a algo)” e “tomar (algo) no caráter histórico”. Mas a TSME entende a ideia de história além do cronológico fático, interessando-se por uma história crítica do desenvolvimento conceitual, uma epistemologia situada. Já a expressão *dialetizada* provém da *Dialética*, como parte da Filosofia, e serve, antes de tudo, para mostrar que o algo que se dialetiza reconhece a contradição, não como mera errata ou falha, mas sim que em seu “sistema” a contradição tem um rol interno fundamental de confrontação (2013, p. 53).

Então, esse *saber* se constrói, reconstrói, significa e ressignifica, colocando-se em tempo e espaço, explorando a ótica de quem aprende, de quem inventa, de quem o usa. Posiciona-se na opção construtiva, na perspectiva histórica, cultural, institucional, para que, em definitivo,

se redesenhe com fins didáticos. Configurando-se numa dinâmica de confrontação do antes, do agora e do depois, isto é, o saber se problematiza, *historiciza e dialetiza* com intencionalidade.

Para entender os aspectos de institucionalização dos Números Racionais envolvendo as frações e os *Números Decimais*, as quais propomos, consideramos importante refazer o trajeto histórico para compreender o epistemológico.

Dessa forma, buscamos refazer os caminhos da construção da temática de pesquisa, desde os primórdios dos primeiros relatos sobre frações, no Egito, até a formalização do conjunto dos Números Racionais, passando pela construção do Sistema de Numeração Decimal, buscando entender as mudanças históricas e epistemológicas que fizeram dos *Racionais* um objeto de saber a ser ensinado e institucionalizado academicamente.

Segundo Centeno (1988), para compreender o caminho percorrido pelos *Racionais*, é preciso ir além dos axiomas e propriedades que os constituem, sendo necessário conhecer como o conceito de número foi evoluindo, os obstáculos que foram vencidos e os conceitos matematizados previamente, até chegar à formalização atual.

2.2.1 A historicidade das Frações

As primeiras noções relacionadas aos conceitos de número, grandeza e forma podem ser encontradas nos primeiros tempos da raça humana, conforme Boyer (1996). De acordo com o autor, o conceito de número inteiro positivo é o mais antigo na Matemática e sua origem se perde nas névoas da antiguidade pré-histórica. Quando esses passaram a ser insuficientes para as suas necessidades, o homem passou a desenvolver outros artifícios que o ajudassem a resolver seus problemas, assim foi com as frações.

As primeiras ideias sobre frações estão relacionadas às civilizações egípcia e mesopotâmica, tendo a sua origem na geometria. Boyer (1996) cita a obra *Histórias* (440 a.C.), de Heródoto, que faz referência a esse fato:

Sesóstris [...] repartiu o solo do Egito entre seus habitantes [...]. Se o rio levava qualquer parte do lote de um homem [...] o rei mandava pessoas para examinar e determinar por medida a extensão exata da perda [...]. Por esse costume, eu creio, é que a geometria veio a ser conhecida no Egito, de onde passou para a Grécia (BOYER, 1996, p.6).

Percebemos, no texto, a necessidade de expressar, numericamente, uma medição. O Rei Sesóstris governou o Egito por volta do ano 3000 a.C. e, segundo Heródoto (440 a.C.), dividiu as terras em torno do Rio Nilo em lotes. Na figura 11, podemos ver uma representação de um mural da época, onde, na parte superior, aparecem agrimensores estendendo uma corda com nós.

Figura 11 - representação de um mural do ano 3.000 a.C., exposto no Museu Metropolitano de Arte, Nova Iorque.

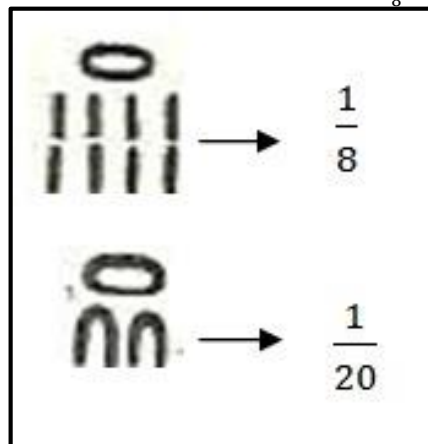


Fonte: <http://www.metmuseum.org/collection/the-collection-online/search/548574>

Os egípcios utilizavam frações com numeradores iguais a um, na época dos faraós os egípcios utilizaram um sistema de quantidade não inteiras de magnitude que, na perspectiva atual, é muito complexa (GARÍN; SANCHO, 2002). No sistema de representação o número que, atualmente, se escreve $\frac{a}{b}$ se escreveria como uma soma de frações unitárias, por exemplo: a fração $\frac{7}{12}$ os egípcios a escreveriam como uma soma de frações unitárias, assim $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$.

Ainda conforme os autores, para os egípcios as quantidades fracionárias são da forma $\frac{1}{n}$ e a soma destas frações unitárias permite representar qualquer fração, uma das exceções era a fração $\frac{2}{3}$. As inscrições hieroglíficas egípcias têm uma notação especial para frações unitárias, isto é, com numerador um. O recíproco de qualquer inteiro era indicado simplesmente colocando sobre a notação para o inteiro um sinal oval alongado. Na figura 12 temos um exemplo de escrita com as frações $\frac{1}{8}$ e $\frac{1}{20}$.

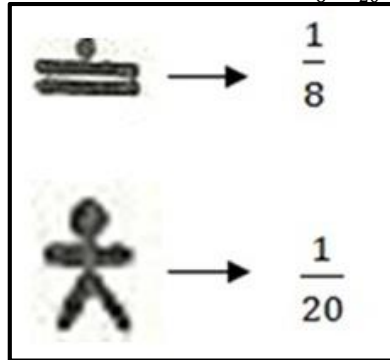
Figura 12 - Exemplo de escrita com as frações $\frac{1}{8}$ e $\frac{1}{20}$ no Egito.



Fonte: Boyer (1996).

Na notação hierática²⁶ dos papiros, o oval alongado é substituído por um ponto, colocado sobre a cifra para o inteiro correspondente. No Papiro de Ahmes²⁷, por exemplo, a fração $\frac{1}{8}$ e $\frac{1}{20}$ aparecem como na figura 13.

Figura 13 - Exemplo de escrita com as frações $\frac{1}{8}$ e $\frac{1}{20}$ na escrita hierática.



Fonte: Boyer (1996).

Apesar das frações unitárias serem facilmente manipuladas no tempo de Ahmes, o conceito de fração geral parece ter sido um enigma para os egípcios (BOYER, 1996). Com exceção da fração $\frac{2}{3}$, a qual atribuíam um papel especial nos processos aritméticos de modo que para achar o terço de um número primeiro achavam dois terços e tomavam depois a metade disso. Ainda segundo o autor, os egípcios conheciam e usavam o fato de dois terços da fração unitária $\frac{1}{p}$ ser a soma de duas frações unitárias $\frac{1}{2p}$ e $\frac{1}{6p}$. Assim também tinham percebido que o dobro da fração $\frac{1}{2p}$ é a fração $\frac{1}{p}$.

O homem, ao longo dos tempos foi adaptando a Matemática as suas necessidades culturais, aos seus avanços científicos e, assim, evoluindo o pensamento numérico. Para Santos (2005, p. 65), os conceitos numéricos foram crescendo e se, antes, serviam apenas para recenseamento, tornaram-se “marcas” adaptadas a inúmeros usos. A partir daí, não se podia apenas comparar duas grandezas por estimativa, mas era possível dividi-las em parcelas ou, pelo menos, supô-las divididas em partes iguais de uma grandeza da mesma espécie, escolhida como padrão. Apesar desse progresso, por causa de suas notações imperfeitas, os antigos não foram capazes nem de unificar a noção de fração nem de construir um sistema coerente para suas unidades de medida.

²⁶ Escrita hierática se diferenciava da forma hieroglífica, por ser mais cursiva e melhor adaptada ao uso de pena e tinta sobre folhas de papiro. Também conhecida como “sagrada”, pois se distinguia da escrita demótica ou popular.

²⁷ O Papiro de Ahmes é assim denominado por homenagem ao escriba que o copiou por volta de 1650 a.C.. Este material provém de um protótipo do Reino do Meio de cerca de 2000 a 1800 a.C., e é possível que a sua origem tenha provido de Imhotep, arquiteto e médico do Faraó Zoser, há cerca de 5000 a.C.. O Papiro de Ahmes é mais conhecido por Papiro de Rhind, por ter sido comprado pelo antiquário escocês Henry Rhind em 1858 numa cidade à beira do Nilo.

Segundo Santos (2005), em tabuletas de argila provenientes do período babilônico antigo (1990 a 1600 a.C.), é possível encontrar tabelas de números incluindo frações. E entre os gregos, casos particulares de proporções (média aritmética, geométrica e a proporção áurea) eram familiares desde a época dos pitagóricos. O autor cita o exemplo do Livro V dos Elementos de Euclides, no qual era possível encontrar a teoria das proporções de Eudoxo de Cnido (aproximadamente 408 a 355 a.C.), que não só sugere a definição atual de igualdade de Frações $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, se e somente se $ad = bc$, como é muito próxima às definições de Número Real surgidas no século XIX²⁸.

Para o autor, na segunda metade do século XV, a principal linha de desenvolvimento da Matemática passou pelo crescimento das cidades mercantis, sob a influência direta do comércio, da navegação, da astronomia e da agrimensura. Segundo Ifrah:

A notação moderna das frações ordinárias se deve aos hindus, que, devido a sua numeração decimal de posição, chegaram a simbolizar mais ou menos como nós uma Fração como $\frac{34}{1265}$, onde 34 é o numerador e 1265 é o denominador. Essa notação foi depois adotada e aperfeiçoada pelos árabes, que inventaram a famosa barra horizontal (IFRAH, 1989, p. 327).

As frações passaram a fazer parte do cotidiano das pessoas e os tipos de representação e conceitos da Antiguidade foram aperfeiçoados e adaptados às soluções dos problemas da época. As frações com numeradores maiores que o inteiro apareceram somente a partir do século XVI, representação essa já bem próxima das contidas nos livros dos séculos XIX e XX, com expressão de divisão.

2.2.2 A historicidade dos *Números Decimais*

Apesar dos árabes já possuírem conhecimento sobre os *Números Decimais* e alguns descobertos que era mais fácil calcular com frações decimais, ainda durante a Idade Média se utilizava com maior frequência as frações sexagesimais, como uma sobrevivência do cálculo dos babilônios transmitidos pelos gregos e árabes, principalmente os cálculos astronômicos.

Somente na chegada do século XVI que alguns matemáticos redescobriram ou compreenderam melhor que se pode utilizar para números menores que um a mesma escrita para os números maiores que um. E esse redescobrimento dos *Números Decimais* aparece associado a uma época rica de transformações sociais.

²⁸ Época onde ocorre a formalização do conjunto dos Números Reais.

Nessa época se dá o nascimento da ciência moderna de Copérnico (1543), dos *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural* de Newton (1687), assim como das grandes transformações da religião, da filosofia e da economia. Produz-se uma nova estrutura sociológica na Europa ocasionada pelos grandes descobrimentos e expansões do século XVI e XVII. A navegação obriga a situar-se corretamente, escolher rumos, e isto faz necessário calcular distâncias e cria problemas que exigem cálculos astronômicos (CENTENO, 1988).

O comércio se converte em uma necessidade, e deveria, portanto ser conhecido por todos. A repartição de áreas, a produção da primeira máquina, a constituição do primeiro banco, são situações que, junto com a navegação, explicam o contexto social que favoreceu o interesse pelos *Números Decimais*.

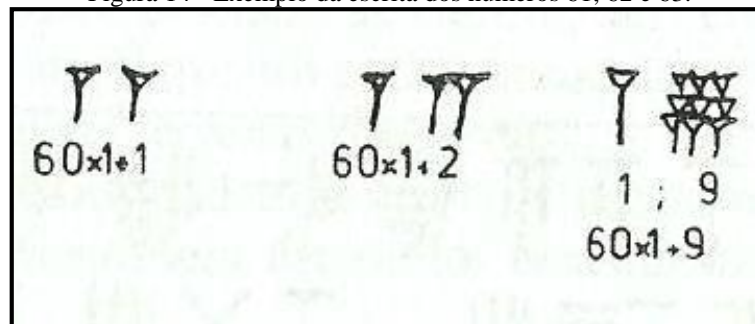
Esse caminho todo passa por quatro sistemas de numeração posicional que antecederam ao nosso sistema de numeração decimal e podemos considerá-los como os que mais contribuíram e influenciaram na gênese dos *Números Decimais*, são eles: o sistema de numeração babilônico, o maia, o chinês e o hindu, este último o mais próximo ao nosso atual sistema. A seguir apresentamos um resumo das principais contribuições de cada sistema:

a) Sistema de numeração Babilônico

O sistema babilônico foi o primeiro sistema de numeração posicional – de base 60 – que servia para representar números inteiros e frações. Esse sistema desenvolvido pelos matemáticos e astrônomos babilônicos foi o mais perfeito da antiguidade, pois seguia princípios aditivos, multiplicativos, hieroglíficos e hieráticos.

Conforme Centeno (1988), os babilônios utilizavam somente dois signos. Os primeiros cinquenta e nove se representavam com a ajuda de dois signos cuneiformes: um cravo vertical para a unidade e uma espiga para a dezena. A notação dos números inferiores a 60 se faz em um sistema de base decimal e seguindo o princípio aditivo (figura 14). Mas os números superiores a 60, estes sim utilizavam realmente o sistema posicional.

Figura 14 - Exemplo da escrita dos números 61, 62 e 63.



Fonte: Centeno (1988).

Os babilônios também escreviam frações sexagesimais, para tanto utilizavam um cravo duplo na posição inicial (figura 15), para designar a ausência de unidades, ou seja, o “zero”, que pode ser considerado o primeiro zero da história, ainda que não tivesse a condição de número.

Figura 15 - Escrituras sexagesimais dos babilônicos e escrituras atuais de frações sexagesimais.

	= 0° 1'
	= 0° 4'
	= 0° 9'
	= 0° 53'
	= 0° 0' 30"
	= 0° 6' 37" 40'''

Fonte: Centeno (1988).

Esse sistema de numeração foi tão importante para o mundo científico que apesar da natureza decimal dos nossos sistemas de numeração e medida, seguimos utilizando o sistema sexagesimal para expressar as medidas de tempo (horas, minutos e segundos), assim como as de arcos e ângulos (em graus, minutos e segundos). Ainda assim, este sistema só se diferencia do nosso na formação das cifras e na base, pois o princípio de numeração é o mesmo (CENTENO, 1988).

b) Sistema de numeração Chinês

Os matemáticos e calculadores chineses para expressar quantidades abstratas utilizavam um engenhoso sistema de numeração que combinavam barras horizontais e verticais (figura 16). Este sistema não tinha nada a ver com o sistema de numeração chinês de uso comum, e é provável que já nos séculos VIII e VII a.C. este sistema já era praticado pelos sábios chineses (CENTENO, 1988).

Figura 16 - Uso do zero em sistema de barras numerais chinesas.

1:0	2:0	7:0	1:0;6:9;2:9	1:4;7:0;0:0;0:0
<hr/>	<hr/>	<hr/>	<hr/>	<hr/>
10	20	70	106929	1470000

Fonte: Centeno (1988).

Esse sistema utilizado pelos sábios foi desenvolvido independentemente da influência exterior, e é análogo ao nosso sistema de numeração quanto ao fato de ser posicional e decimal (IFRAH, 1997). Mas se diferencia que os seus nove códigos significativos se representam por

meio do princípio aditivo, a partir de um signo especial para a unidade e de uma figura simbólica para o cinco.

Segundo Ifrah (1997) no século VIII os sábios chineses introduziram em seu sistema de numeração posicional um símbolo especial, representado por um pequeno círculo, para assinalar a ausência de unidades em alguma ordem, uma ideia influenciada pelos matemáticos hindus. Segundo Ifrah (1997, p.586) assim: “Todas as regras aritméticas ou algébricas relativas aos números inteiros, *Fracionários* ou *irracionais* alcançam rapidamente um grau de perfeccionismo semelhante ao que expõe atualmente no ensino”.

A partir daí puderam representar números inferiores à unidade, num sistema muito semelhante ao nosso (CENTENO, 1988), como no exemplo da figura 17, que mostra frações decimais tomadas de um documento da época mongólica.

Figura 17 - Frações decimais

○= 0 2 1	○ ⊥ 0 7 5	○ ○ ○ ⊥ ⊥ ⊥ ⊥ ⊥ ⊥ ⊥ ⊥ 0 0 0 6 6 7 7 7 3 0 8
0,21	0,75	0,006677308

Fonte: Centeno (1988).

c) Sistema Maia de numeração de posição

Desenvolvido pelos sacerdotes e astrônomos o sistema de numeração maia era escrito em base 20, onde cada algarismo recebia um valor dependendo da sua posição na escritura (CENTENO, 1988). Na figura 18 temos um exemplo de escrita de números maias inferiores a 20.

Figura 18 - Escrita de números inferiores a 20.

1	.	7	⋯ ○ :	13	⋯ ○ :
2	.. ○ :	8	⋯ ○ :	14	⋯ ○ :
3	... ○ :	9	⋯ ○ :	15	≡ ○
4 ○ :	10	≡ ○	16	≡ ○ ·
5	— ○	11	≡ ○ ·	17	≡ ○ :
6	⋯ ○	12	≡ ○ :	18	≡ ○ :
				19	≡ ○ :

Fonte: Centeno (1988).

Segundo Centeno (1988), para os números superiores a 20 se escrevia em uma coluna vertical que tinha tantas linhas horizontais como ordens de unidade que havia. Se lia de cima para baixo em ordem de valores decrescentes, e desta maneira a linha inferior estava associada às unidades de primeira ordem, a segunda aos múltiplos de 20, a terceira aos múltiplos de 360

(18 x 20), a quarta aos múltiplos de 7200 (18 x 20²), e assim sucessivamente. Na figura 19 o número 13.495 na escrita maia.

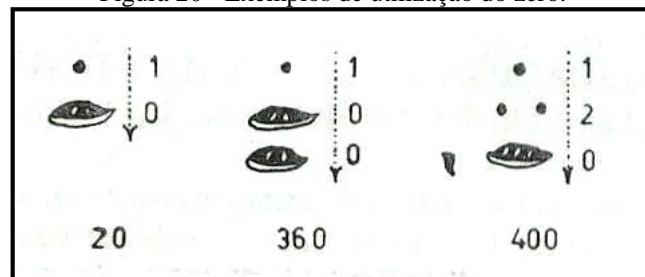
Figura 19 - Escrita do número 13459.

•	1_____1x7200
••	17_____17x360
≡	8_____8x20
••	15_____15
≡	7200 + (17 × 360) + (8 × 20) + 15

Fonte: Centeno (1988).

Este sistema também utilizava o zero, que tanto poderia ser colocado na posição final como entre os códigos. Na figura 20, exemplos de escrita.

Figura 20 - Exemplos de utilização do zero.



Fonte: Centeno (1988).

d) A Origem do sistema de numeração Hindu²⁹

Nascido na Índia setentrional há aproximadamente quinze séculos, o sistema de numeração hindu foi o primeiro a ter uma estrutura idêntica à nossa e cujos símbolos gráficos se constituiu na prefiguração dos nossos números atuais.

Conforme Centeno (1988), esta numeração possuía uma grande engenhosidade e aparece muito superior em relação aos sistemas de numeração babilônio, maia e chinês. Seus algarismos são símbolos que não fazem referência a nenhum objeto concreto e a regra de posição se aplica as potências consecutivas de base 10.

Ainda segundo a autora, devido a sua grande engenhosidade, o invento de numeração decimal de posição e do zero se coloca como um dos grandes descobrimentos fundamentais da humanidade.

O antigo sistema de numeração bramí e os nove primeiros nomes ordinários dos números da língua sânscrita foram totalmente adaptados a regra de numeração posicional de

²⁹ Devido à confusão entre indianos ocidentais (índios) e indianos orientais (indianos) é comum chamar-se estes últimos de hindus, e embora essa permuta não seja estritamente correta, torna-se conveniente para evitar mal-entendidos (EVES, 2002, p.247).

base 10. Aliada com o princípio de posição aparece o zero que constituiu no achado mais decisivo para o progresso da matemática, das ciências e das técnicas modernas.

Segundo Fandiño (2009), era comum os hindus associarem a Matemática a poesia, na famosa obra *Aryabathya*, escrita pelo matemático-poeta Aryabhata (499 d.C.), por exemplo se dá a seguinte indicação sobre como falar a incógnita x na igualdade de relações (hoje escrita $a:b = c:x$):

‘Na regra de três multiplica o fruto pelo desejo e divide pela medida; o resultado será o fruto do desejo’.

De forma muito mais prosaica: $x = \frac{bc}{a}$.

Em relação as frações, foi adotado a escritura alexandrina: denominador sobre numerador, mas sem o traço horizontal. Para as frações os hindus não adotaram o sistema posicional utilizado para os números naturais, o que ocasionou em complicados sistemas e pouco funcionais (FANDIÑO, 2009).

e) Sistema de numeração Árabe

Os árabes propagaram o sistema de numeração decimal *O Tratado de Aritmética* de Al-Huwarizmi (750-850) foi a primeira obra conhecida que o sistema decimal e das operações de cálculos nesse sistema são objetos de explicações detalhadas. Nesse tratado é exposta a maneira de contar dos hindus, de forma simples e concisa com somente nove caracteres, é possível expressar todos os números (CENTENO, 1988).

No tratado Al-Huwarizmi é explicado com detalhe o sistema numeração decimal posicional por meio dos números hindu e em particular emprega um pequeno círculo parecido com o zero. Também explica como pronunciar os adjetivos numerais, e nos casos de números grandes utilizando os conceitos de unidade, de dezena, de centena e de milhar, e acaba descrevendo as operações de cálculos.

Ainda segundo Centeno (1988), nessa obra, Al-Huwarizmi trata das frações empregando nomes particulares para as que tinham por numerador uma unidade até a fração $\frac{1}{10}$. Também descrevia em particular as frações sexagesimais e os cálculos de duplicação e divisão que considerava um papel muito importante na matemática egípcia.

O *Tratado de Aritmética* tinha um objetivo eminentemente pedagógico, e pretendia facilitar a tarefa de quem queria aprender a aritmética, tanto os números grandes quanto os pequenos e tudo o que se referia a eles, como a multiplicação, a divisão, a adição e também a subtração (CENTENO, 1988, p. 45).

Ainda conforme a autora, mais tarde por volta do ano de 950 em Damasco, o matemático Al-Uglidisi teve a ambição de recompilar toda a aritmética do seu tempo, tanto a de origem hindu, como a grega e a árabe. Em sua obra utilizou de forma natural às frações decimais e com expertise os cálculos. Empregava uma notação muito próxima a nossa, com um símbolo de separação da parte inteira da parte fracionária de um número. Como exemplifica Centeno (1988): $\overline{2}35$ que designa o número 2,35 e se lia: “duas unidades e 35 de cem”.

Desta forma Al-Uglidisi demonstrou compreender plenamente o sistema de numeração decimal, realizando facilmente multiplicações e divisões por potências de 10. Este matemático ainda explica uma das razões que prejudicaram o sistema de numeração hindu no mundo árabe. A propagação do sistema de calcular hindu se deu por meio do “tabuleiro de arena” ou “tabuleiro de calcular” utilizado pelos astrólogos ambulantes que vinham da Índia, e estes tinham fama duvidosa.

Mais conhecido que Al-Uglidisi, o astrônomo e matemático Al-Kasi escreveu “A Chave da Aritmética” que por seu conteúdo, clareza e elegância teve uma grande difusão em toda a literatura da Idade Média.

O primeiro capítulo, do segundo livro, de “A Chave da Aritmética”, foi dedicado às frações, baseadas nas frações sexagesimais, frações compostas de potências sucessivas de um décimo. Chamava essas potências de: décimas, segundo decimais, terceiros decimais, etc., e as frações, frações decimais. Segundo Centeno (1988), Al-Kasi explicou que como no sistema sexagesimal, todas as operações se efetuam exatamente como os números inteiros, mas apoiando-se na base 10, se utilizada corretamente, será mais acessível aos que não conhecem o cálculo sexagesimal.

No terceiro livro trata do sistema sexagesimal de numeração posicional, tratando da escrita e leitura de um número sexagesimal, assim como as operações de multiplicação e divisão com frações sexagesimais e com frações decimais. Onde dedica atenção especial à conversão de frações sexagesimais em frações decimais e vice-versa. Para facilitar os cálculos estabelece tabelas concisas, que ajudam expressar por meio de frações sexagesimais *Números Decimais* de forma: $a_k \times 10^n$, para $-10 \leq n \leq 10$ e $a_k = 1, 2, \dots, 9$. Quando um número de base sexagesimal não pode expressar-se por uma fração decimal finita, segundo Centeno (1988), Al-Kasi arredondava os valores aproximados de uma forma que hoje nos é familiares.

Conforme Centeno (1988) parece que Al-Kasi não conhecia os trabalhos de Al-Uglidisi, nem outras tentativas históricas de utilização dos decimais, por que reivindica categoricamente a sua invenção. Mas sendo ou não o inventor dos decimais foi ele quem explicou pela primeira vez claramente uma teoria das frações decimais, da noção de número e em particular da noção

de número decimal. As frações decimais de Al-Kasi estiveram na moda na Turquia na segunda metade do século XV e no século XVI.

2.2.2.1 A consolidação do sistema de Numeração Decimal

Conforme Centeno (1988), o francês François Viète (1540-1603) e o belga Simon Stevin (1548-1620) foram os precursores da propagação dos *Números Decimais* no ocidente. Viète em seu “Canon Mathematicus seu ad Triangula” e Stevin com a publicação do livro “La Disme”.

Viète desejava promover o uso dos *Números Decimais*, chegando a dizer que as frações sexagesimais deveriam ser utilizadas esporadicamente ou simplesmente eliminadas da matemática, portanto deveriam empregar os múltiplos e submúltiplos de dez. Apesar das sugestões que Viète fez para utilização dos decimais, isto só aconteceu consideravelmente com a publicação da obra de Stevin em 1585.

“La Disme”, título que significa “A Décima”, foi o primeiro livro da história que tratava unicamente dos *Números Decimais*. A obra tinha 36 páginas e se dirigia principalmente aos que utilizavam os números como os astrólogos, agrimensores, medidores de tapeçarias e em geral aos comerciantes. Stevin tinha como objetivo mostrar que os cálculos e as medidas poderiam ser simplificadas consideravelmente com a utilização dos decimais, inclusive as numerosas dificuldades que existiam no cálculo com as frações.

Segundo Centeno (1988) o livro é dividido em duas partes. A primeira contém as definições e a segunda explica como se pode realizar as quatro operações com os *Números Decimais*, ressaltando que o único problema consiste em observar bem, ao final da operação, a parte inteira.

Stevin define na obra uma espécie de aritmética que permite efetuar todas as contas utilizando somente os inteiros. Ele classifica as posições decimais sucessivas da progressão denominando $\frac{1}{10}$ de ‘primeira’ e designado por $\textcircled{1}$, $\frac{1}{100}$ chamada de ‘segunda’ e designada por $\textcircled{2}$ e assim sucessivamente. Então os números representados por:

- $\textcircled{}$, $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$,, são chamados de *Números Decimais*.

Um exemplo de aplicação dessa definição:

- 3 $\textcircled{1}$ 7 $\textcircled{2}$ 5 $\textcircled{3}$ que corresponde ao número 0,375 e se lê “3 primeiras, 7 segundas, 5 terceiras”.

Na figura 21, apresentamos um exemplo que consta na segunda parte do livro do Stevin, de como era a disposição para calcular a adição:

Figura 21 - Exemplo de disposição da operação de adição.

		○	①	②	③
	2	8	3	1	2
4	1	9	2	9	
<hr/>					
4	4	7	6	0	2

Fonte: Centeno (1988).

Lido como: 447 inteiros, seis décimos, zero centésimos e dois milésimos. Outro exemplo é sobre o cálculo da multiplicação, com os números $0,000378 \times 0,54$ (figura 22):

Figura 22 - Exemplo de multiplicação com *Números Decimais*.

		④	⑤	⑥	
		3	7	8	
			5	4	
<hr/>					
	1	5	1	2	
1	8	9	0		-
<hr/>					
2	0	4	1	2	
④	⑤	⑥	⑦	⑧	

Fonte: Centeno (1988).

As regras utilizadas por Stevin para calcular com os números decimais são as mesmas que utilizamos atualmente. Ainda na obra, o autor explica as vantagens que se derivam de ter um sistema de medidas, pesos e moedas baseados em divisão de decimais, acompanhado de explicações com diversos exemplos. Por último, ainda conserva para o círculo a divisão em 360 graus sugere divisões decimais de grau (CENTENO, 1988).

Em 1620 a notação de Stevin foi substituída pela notação utilizada atualmente, graças aos trabalhos do coinventor dos logaritmos John Napier. A vírgula aparece assim como um símbolo que permite separar a parte inteira da parte decimal, nos logaritmos, nos países anglo-saxões o símbolo é o ponto.

Segundo Centeno (1988), em pleno século XVIII, a aritmética destinada aos comerciantes ainda depreciavam os cálculos com decimais, que tinham pouca utilidade, dada a arbitrariedade do sistema de medidas. Só quando os países foram adaptando o sistema métrico foi quando o cálculo com decimais adquiriu interesse na vida prática.

O Sistema Métrico Decimal que tornou as unidades de medidas quase que universais apareceram por volta do século XVIII, até então cada país tinha suas próprias unidades de medida, o que obrigava a complicados cálculos de conversão. A partir de então se pensou em uma unidade que fosse independente do homem, algo que se referisse a Terra e não a uma nação em particular.

Então foi medido a longitude do meridiano, e a longitude da 40 milionésima parte do meridiano que se denominou “metro”. Esta definição do metro variou conforme se foi evoluindo a possibilidade de uma maior precisão. Em 1883 se definiu que o metro é a longitude do trajeto percorrido no vácuo pela luz laser durante um tempo de $\frac{1}{299\,792\,458}$ segundos. Criando múltiplos e submúltiplos do metro, multiplicando e dividindo por 10, 100, 1000, etc., de forma que o cálculo para conversões se tornou mais simples.

O Sistema Métrico Decimal foi estabelecido pela primeira vez na França em 1793, principalmente com objetivos políticos, onde se propunha a definição de unidades de medidas que não fosse local, mas sim válidas em todo o território nacional, buscando acabar com as complicadas conversões e as fraudes no comércio. Mas ainda que a definição oficial do metro tenha se dado em 1799, a obrigatoriedade da utilização das medidas métricas em todo território francês aconteceu somente em 1840.

Conforme Centeno (1988), o interesse pedagógico do Sistema Métrico Decimal é o que propõe Stevin na conclusão de “La Disme”: dispor de um sistema de quantificação de magnitudes que não seja dissociado de uma estratégia de cálculo. Para o astrônomo, matemático e físico francês Laplace, ‘a simplicidade do Sistema Métrico Decimal o fará acessível a todas as crianças, embora transtorne o costume dos professores’.

A adoção do Sistema Métrico Decimal por quase todos os países do mundo favoreceu o avanço dos cálculos com os decimais. Estes números seguiam sendo os de Stevin e conservaram seu caráter prático sem uma condição definida até o final do século XIX, quando Cantor e outros matemáticos começaram a se interessar nos fundamentos da matemática.

A adoção do Sistema Métrico Decimal contribuiu para a solidificação da utilização do número racional positivo na forma decimal, sendo assim, uma aliada no processo de compreensão da estrutura, da composição e dos mecanismos de funcionamento destes números. Depois de séculos funcionando de forma implícita servindo exclusivamente para medir e representar quantidades, os decimais assim como os sexagesimais dos babilônios, sem ser reconhecido nem como objeto de estudo nem como instrumento de aplicação a resolução de problemas (CENTENO, 1988).

2.2.3 Os aspectos epistemológicos dos Números Racionais

Conforme Centeno (1988), a ideia das frações e dos números decimais, durante séculos não foram tratados como ‘objetos de saber’³⁰, servindo de forma implícita exclusivamente para medir e representar quantidades. Não sendo também reconhecidos como objetos de estudos, nem como instrumento de aplicação a resolução de problemas. A ideia hoje associada a tais conceitos estão associadas a um rico contexto em significados, regidas por uma sólida teoria matemática que os define. Mas até chegarem nesse *status* passaram por distintas etapas que constituem diferentes formas de pensar.

Apesar das frações terem surgidas milhares de anos antes de Cristo (a.C.), a formalização dos *Racionais* tomaram novos rumos a partir do século XVI, em uma época de transformações sociais intensas. Como comentamos anteriormente, transformações ocasionadas pelos grandes descobrimentos e expansões da Europa, que provoca mudanças sociais, impulsionando a ciência.

Porém foi no século XIX quando a Matemática Pura passa a ser tomar uma maior proporção no meio científico, e a álgebra é tratada com maior rigor, é que os Números Racionais recebem um tratamento onde seu significado está ligado a necessidade de formalização dos Números Reais. Segundo Centeno (1988), o número decimal como objeto de saber tem seu significado último ligado ao de Número Real. Um número decimal é um Número Real e não podemos compreender o número decimal se não compreendermos os Números Reais.

Ainda conforme a autora, a formalização dos Reais no século XIX passa pelo desejo de alguns matemáticos de encontrar para a Matemática um fundamento científico aritmético, sem apoiar-se na intuição geométrica. Os trabalhos de Cauchy e Weierstrass sobre o conceito de limite de uma função, e serviram como antecedentes a construção dos Números Reais, mas o domínio de variação das variáveis na reta real estava cheio de imprecisões e confusões. Porém foi Dedekind, Cantor e Hilbert que formalizaram a ideia de conjunto dos Números Reais.

Foi preocupado com a didática que Dedekind³¹ encontrou uma construção do conjunto dos Números Reais (\mathbb{R}) partindo dos Inteiros, pelo método conhecido por ‘Cortaduras de Dedekind’. Conforme Centeno (1988), para compreender o que é uma cortadura, exemplifica com o conjunto dos Números Naturais (\mathbb{N}), que consistiria *cortar* o conjunto em classes e reparti-los em dois conjuntos diferenciados, de tal maneira que os elementos da primeira classe sejam inferiores a todos os da segunda. No caso, a primeira classe terá um último elemento e a segunda um primeiro elemento. Mas o mesmo não ocorre quando se faz um *corte* nos *Racionais*

³⁰ Ideias de Chevellard p.53

³¹ J. W. R. Dedekind (1831-1916).

de maneira a ter duas classes, como no exemplo anterior, mas agora pode ocorrer que obtenha pares de classes em que na primeira classe não tenha último elemento e na segunda não tenha primeiro elemento, a seguir apresentamos um exemplo dado por Centeno (1988):

- Fazendo um corte no conjunto dos Números Racionais (\mathbb{Q}) e formando as classes A_1 (que contém o conjunto dos *Racionais* cujo quadrado é menor ou igual a 2) e A_2 (formada por todos os *Racionais* cujo quadrado seja maior que 2). Em termos matemáticos: $A_1 = \{m|m^2 \leq 2\}$ e $A_2 = \{n|n^2 > 2\}$, o par (A_1, A_2) , é uma cortadura em que A_1 não tem último elemento e A_2 não tem primeiro elemento, esta cortadura define o número irracional $\sqrt{2}$. Para Dedekind cada vez que uma cortadura em (A_1, A_2) não está produzida por um número racional cria um número irracional perfeitamente definido por essa cortadura. Desta forma Dedekind constrói o conjunto dos \mathbb{R} com ‘o conjunto de todas as cortaduras dos *Racionais*’. Este conjunto contém todos os Números Racionais e acrescentado com outros novos números que os Irracionais.

Ainda conforme Centeno (1988), uma segunda construção dos números reais é de Cantor³², que também parte dos *Racionais*, onde define uma relação de equivalência no conjunto de sucessões fundamentais³³ e chama de número real a uma classe de equivalência. O conjunto de classes de equivalência é para Cantor o conjunto dos \mathbb{R} . Assim como Dedekind, também mostra o isomorfismo que existe entre os números reais e os pontos da reta.

Já Hilbert³⁴ dá as construções de Dedekind e Cantor um grande valor, chamando-as de métodos genéticos, e lhes concebe sobre tudo um interesse pedagógico. Mas prefere um método axiomático, introduzindo uma família de números (x, y, \dots) de tal forma que esta família constitui:

- a) Um corpo comutativo a respeito das operações de adição e de multiplicação;
- b) Um corpo totalmente ordenado;
- c) Um grupo arquimediano;
- d) Todo sistema que cumpra as condições a, b e c não é possível ampliá-lo ainda que se adicione novos elementos.

Centeno (1988) coloca que a construção axiomática dos números reais resulta muito cômoda sob muitos pontos de vista, mas mascara a *gênesis* histórica e o aspecto construtivo.

³² Georg Cantor (1845-1918).

³³ Sucessões de Números *Racionais* conhecidas por ‘Sucessões de Cauchy’.

³⁴ David Hilbert (1862-1943).

2.2.3.1 Construção geométrica e algébrica do conjunto dos \mathbb{Q}

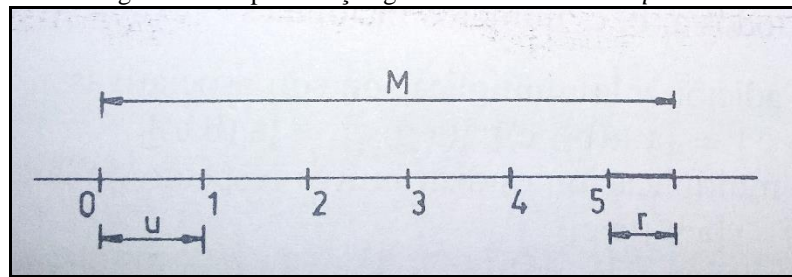
As ideias de construção geométrica e algébrica dos \mathbb{Q} , tem suas bases históricas e epistemológicas distintas, como anteriormente apresentamos, sendo as demonstrações geométricas prevalecendo na antiguidade, muito influenciadas pela Matemática grega, e as demonstrações algébricas tomando força a partir do século XIX com a necessidade de fundamentar além da geometria a Matemática.

Utilizamos Centeno (1988) para apresentar as construções geométrica e algébrica dos \mathbb{Q} . Apresentamos a seguir as duas construções:

a) Construção geométrica de \mathbb{Q}

Seja M uma magnitude e u uma unidade do mesmo gênero que M . E suponhamos que não existe um número p , tal que, p vezes u ($u.p$) seja igual a M , temos que M é igual a p vezes u mais um ‘pedaço’ que é menor que u . A esse ‘pedaço’ chamamos de resto e representamos por r . Assim podemos escrever essa situação como: $M = u . p + r$ (figura 23).

Figura 23 - Representação geométrica de $M = u . p + r$



Fonte: Centeno (1988).

Ainda conforme Centeno (1988), se considerarmos a unidade u dividida em um número n de partes iguais, cada uma delas será a n ésima parte de u ($\frac{1}{n}$ de u que representamos $\frac{u}{n}$). E suponhamos que existe um número q tal que q vezes $\frac{u}{n}$ é igual a magnitude r . Podemos escrever então: $M = \left(p . n . \frac{u}{n}\right) + q . \frac{u}{n}$ e diremos que a medida de M , a respeito da unidade $\frac{u}{n}$ é o número $(p . n + q)$. Então:

$$\text{Medida [M]} = \left(p . n . \frac{u}{n}\right) + q . \frac{u}{n} = (p . n + q) . \frac{u}{n} = \frac{m}{n} . u$$

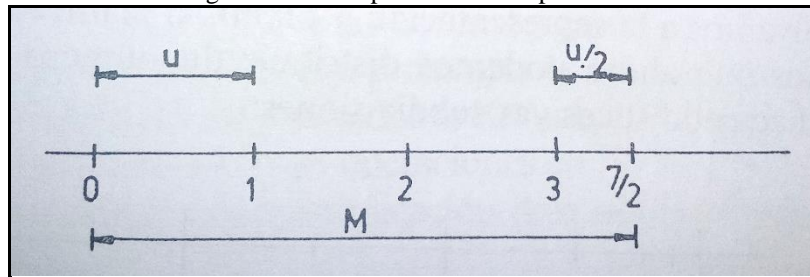
Tomamos $p . n + q = m$, dizemos que $\frac{m}{n}$ é a medida de M com a unidade u e chamamos número a fração $\frac{m}{n}$.

Exemplo de um caso particular:

Seja o segmento M (figura 24), e a unidade u . Vemos que M contém três vezes u e sobre um ‘pedaço’ de medida $\frac{u}{2}$. A medida total de M com a unidade u será $\frac{7}{2}$.

$$M = \left(3 \cdot 2 \cdot \frac{u}{2}\right) + \frac{u}{2} = 3u + \frac{u}{2} = \frac{7}{2} \cdot u$$

Figura 24 - Exemplo de um caso particular.



Fonte: Centeno (1988).

Este procedimento supõe subdividir indefinidamente a unidade. Se uma quantidade M contém m dessas partes, sua medida se designa com o símbolo $\frac{m}{n}$, e este símbolo se chama razão ou fração (CENTENO, 1988, p.61), e com esses números é possível operar a adição, subtração, multiplicação e divisão. As operações de adição e multiplicação se definem da seguinte forma:

Para todo a, b, c e d :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{(ad+bc)}{bd} \text{ com } b \text{ e } d \text{ diferente de zero}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{a} = 1$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ se } a \cdot d = b \cdot c$$

As operações de subtração e divisão se obtêm como as operações inversas da adição e subtração, respectivamente. E a partir destas definições podem provar as propriedades:

para todos a, b, c , Números Racionais

- a adição e a multiplicação são associativas

$$[(a + b) + c] = [a + (b + c)]; [(a \cdot b) \cdot c] = [a \cdot (b \cdot c)]$$

- a multiplicação é distributiva em relação a adição

$$[a \cdot (b + c) = [a \cdot b + a \cdot c]$$

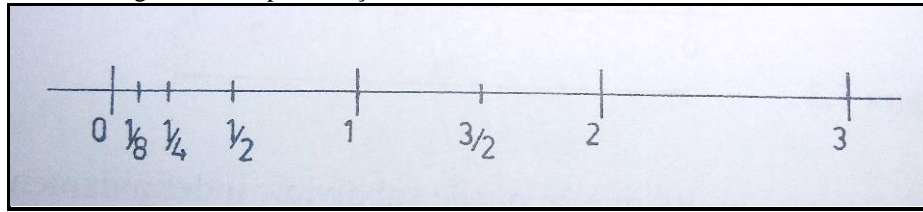
- a adição e a multiplicação são comutativas

$$[a + b = b + a]; [a \cdot b = b \cdot a]$$

Segundo Centeno (1988) essa forma de construir os Números Racionais proporciona definições que fazem possível a existência de números ‘obtidos das medidas’, estas construções se apoia na geometria e na intuição geométrica de que é possível fazer indefinidamente as subdivisões da unidade.

Ainda para a autora, com a representação geométrica é possível comprovar que podemos distribuir um número a muitos mais pontos da reta, fazendo sucessivas subdivisões (figura 25).

Figura 25 - Representação de Números Racionais na reta numérica



Fonte: Centeno (1988).

Assim, para todo Número Racional, é possível encontrar um ponto sobre a reta e a ordem dos pontos na reta será dada pela relação: a precede a b [$a > b$], se e somente se existe um elemento c que verifica a igualdade [$a = b + c$], sendo a , b e c Números Racionais, e a , b e c os pontos correspondentes na reta. Dessa forma os *Racionais* se distribuem de maneira ‘densa’ sobre a reta. Entre cada dois *Racionais* a e b é sempre possível colocar outro, basta fazer $\frac{a+b}{2}$.

Mas é importante salientar, ainda que os Números Racionais se distribuam de forma densa sobre a reta, isso não significa que se tenha um número para cada ponto da reta. O conjunto dos \mathbb{Q} tem lacunas que só são preenchidas quando se estende o conjunto dos *Racionais*, com a construção dos \mathbb{R} (CENTENO, 1988).

b) Construção algébrica de \mathbb{Q}

Dentro do conjunto dos Naturais (\mathbb{N}) a subtração nem sempre é possível, para superar essa dificuldade se construiu os Inteiros (\mathbb{Z}), como conjunto numérico que amplia \mathbb{N} , e em todas equações da forma $a + x = b$ (com a e b elementos de \mathbb{N}) tem solução (CENTENO, 1988, p.63). Do mesmo modo em que no conjunto \mathbb{Z} a divisão nem sempre é possível, as equações da forma $a \cdot x = b$ (com a e b elementos de \mathbb{Z} , e a diferente de zero), somente se tem solução quando b é múltiplo de a .

Foi novamente preciso construir um conjunto mais amplo que \mathbb{Z} , e em que a divisão seja possível, com a condição do divisor seja diferente de zero. Da mesma forma que a subtração se define em termos de adição: $a + x = b$ é equivalente a $x = b - a$. E podemos definir a divisão em termos de multiplicação: $a \cdot x = b$ é equivalente a $x = b \div a$.

Segundo Centeno (1988), o quociente $\frac{b}{a}$ é solução da equação $a \cdot x = b$, e cada fração representa um número no novo conjunto. No entanto, os números deste conjunto não são simples frações, são *famílias de frações*, já que um número pode ser representado por muitas frações, ou seja, são frações equivalentes. Podemos associar cada fração a uma família de frações de acordo com a seguinte regra: a família de frações ligadas a fração $\frac{b}{a}$ (com $a \neq 0$) está formada por todas as frações $\frac{u}{v}$ (com $u \neq 0$), tal que $\frac{b}{a} = \frac{u}{v}$, o mesmo que $b \cdot v = a \cdot u$, e a

representamos por $\frac{b}{a}$. As frações e as famílias a que pertencem verificam as seguintes propriedades:

- cada fração pertence a sua própria família, e em geral a fração $\frac{a}{b}$ pertence à família $\frac{a}{b}$;
- se uma fração pertence à família de outra, ambas são da mesma família;
- cada fração pertence a um Número Racional e somente a um.

Em outra linguagem podemos dizer:

- definimos no conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ a relação $[(a, b)R (c, d)] \Leftrightarrow [a \times d = b \times c]$;
- Demonstramos que a relação R é uma relação de equivalência;
- Chamamos \mathbb{Q} o conjunto de Números Racionais ao conjunto das classes de equivalência que a relação R em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$.

Ainda segunda a autora, um Número Racional será, portanto, uma classe de equivalência de frações. E em seu conjunto se definem as operações de adição e multiplicação, se prova que estas operações são compatíveis com a relação de equivalência e se verificam as propriedades que dão a \mathbb{Q} uma estrutura de corpo comutativo, ordenado e arquimediano. Em conclusão: não se perdeu os Inteiros, mas temos um conjunto mais rico em que a divisão é sempre possível e, todas as equações da forma: $a \cdot x = b$ tem solução porque o quociente $\frac{b}{a}$ é agora um número.

2.2.3.2 Significados dos Números Racionais

Segundo Ripoll, Ripoll e Silveira (2006), o conjunto \mathbb{Q} não é o conjunto das frações ordinárias, mas sim o conjunto das quantidades numéricas que elas representam, ou seja, o conjunto das frações ordinárias submetidas a noção de igualdade: $\frac{a}{b} = \frac{A}{B}$ quando e só quando $aB = Ab$ (sendo a, b, A, B números inteiros com b e B não-nulos). O conceito de Número Racional procura expressar a essência numérica do conceito de fração ordinária. Os autores exemplificam essa afirmação com a partição de um bolo: embora servir dois pedaços de um bolo que foi dividido em três partes não seja a mesma que servir quatro pedaços do mesmo bolo dividido em seis partes, a quantidade de bolo servida é a mesma. As frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{6}$ são numericamente iguais, e então escrevemos $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$.

O termo ‘Fração’ se deriva do latim ‘Fractio’, que significava ‘parte obtida rompendo’, ou ‘aquilo que é partido em pedaços’. Segundo Fandiño (2009), é errôneo portanto pensar que o significado original etimológico do termo já compreenda a ideia utilizada na Matemática de que a ação de ‘romper’ ou ‘partir’ seja em partes iguais, os construtos emergentes das frações é mais amplo que partir algo. Assim se amplia para o Números Racionais essa ideia, que para

Gairín e Sancho (2002), o significado do termo Número Racional não é único, existem distintas concepções que se denominam construtos (ou subconstrutos) destes entes numéricos.

O trabalho realizado por Kieren (1976) foi o primeiro a introduzir a ideia de que os Números Racionais consistem de vários construtos e que compreender a noção de um Número Racional depende de se adquirir um entendimento da confluência destes construtos. E procurando classificar as diversas interpretações dos Números Racionais o autor introduz a ideia de que estes consistem em sete construtos:

a) os Números Racionais são frações que podem ser comparadas, somadas, subtraídas, etc.;

b) os Números Racionais são frações decimais que formam uma extensão natural (via nosso sistema de numeração) para os Números Naturais;

c) os Números Racionais são classe de equivalência de frações. Assim $\left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \dots \right\}$ e $\left\{ \frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \dots \right\}$ são Números Racionais;

d) os Números Racionais são números da forma $\frac{p}{q}$, onde p e q são inteiros e $q \neq 0$. Dessa forma, os Números Racionais são números relacionais;

e) os Números Racionais são operadores multiplicativos;

f) os Números Racionais são elementos de um campo quociente ordenado e infinito. Há número da forma $x = \frac{p}{q}$, onde x satisfaz a equação $qx = p$.

g) os Números Racionais são medidas ou pontos sobre a linha ou reta numerada.

O autor defende que a compreensão do conceito de Número Racional depende da compreensão de todos esses construtos. Em 1980, Kieren assume que um completo desenvolvimento do conceito implica a compreensão de quatro subconstruto: medida, quociente, número proporcional e operador multiplicativo.

Outras pesquisas se baseiam no trabalho de Kieren para tratar ou ampliar as interpretações dos Números Racionais, como a de Behr et al (1984), que redefine os construtos indicados por Kieren, denominando-os em subconstrutos e dividindo-os em: parte-todo, coordenada linear, quociente, razão, operador, taxa de Número Racional e decimal do número racional.

Com essa variação de interpretações, a seguir apresentamos alguns desses significados baseados nos trabalhos de Llinares e Sánchez (1988), Garín e Sancho (2002) e Fandiño (2009).

2.2.3.2.1 Construto parte-todo

Segundo Llinares e Sánchez (1988), essa situação ocorre quando um “todo” (contínuo ou discreto) se divide em partes “congruentes” (equivalentes como quantidade de superfície ou quantidades de objetos). A Fração indica a relação que existe entre um número de partes e o número total de partes (que pode estar formado por vários “todos”). O todo recebe o nome de unidade e essa relação parte-todo depende diretamente da habilidade de dividir um objeto, em partes ou peças iguais.

Conforme Gairín e Sancho (2002), citam as seguintes características próprias do significado de fração como relação parte-todo:

- a) Boa parte do conhecimento se realiza de modo visual;
- b) O aluno deve realizar a tradução entre representações visuais e simbólicas;
- c) Na representação visual o aluno deve saber interpretar aqueles aspectos que representam o todo, o que representam as partes e as relações que há entre ambos;
- d) As representações icônicas que fazem de objetos reais tendem a simplificação de tais objetos mediante figuras retangulares ou circulares (em quantidades contínuas) ou simples pontos (quantidades discretas).
- e) Para determinar os elementos de uma fração há que realizar uma dupla contagem: o das partes distintas e das partes totais.

Esse construto é geralmente é o primeiro a ser apresentado aos alunos no trabalho com frações. E para Bittar e Freitas (2005), o estudo de Frações deve ser iniciado por meio de atividades, situações e materiais adequados ao nível de desenvolvimento cognitivo dos alunos, partindo dos seus conhecimentos prévios. Os autores ressaltam que é importante trabalhar com quantidades contínuas e discretas, sendo fundamental variar a forma das figuras trabalhadas, como círculos, canudos, fichas e outros.

Segundo Gairín e Sancho (2002), o fato do significado das frações como parte-todo estar fortemente vinculado às representações gráficas dificulta a conexão com a notação decimal. Só se trabalha com representações gráficas da unidade, de décimo e de centésimo, pois é inviável a representação de outras unidades de ordem inferior.

Ainda conforme os autores, estas dificuldades com as representações gráficas provocam que os estudantes abandonam rapidamente o modelo em que aprenderam as frações e trabalhem com entes numéricos abstratos. Dado as dificuldades gráficas para relacionar, por exemplo, a fração $\frac{3}{8}$ com o número 0,375 os estudantes recorrem ao algoritmo da divisão, e em consequência, mostram um conhecimento conceitual das frações sustentado nos modelos

usados durante a aprendizagem, enquanto conceitualizam as expressões decimais como entes numéricos abstratos cuja relação com as frações é unicamente procedimental.

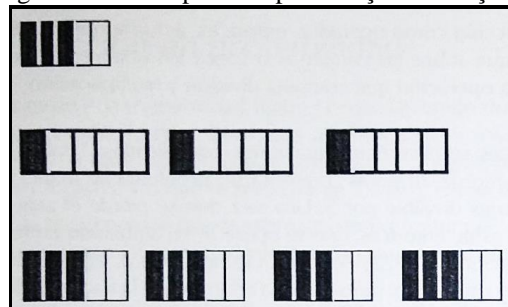
2.2.3.2.2 Construto quociente

Neste caso, a fração $\frac{a}{b}$ representa uma situação de distribuição, em que se trata de conhecer o tamanho de cada uma das partes que resultam ao distribuir a unidades em b partes iguais. Há uma clara diferença com o construto parte-todo no sentido de que a fração como quociente representa o resultado de uma ação que há de realizar o sujeito, já que há de decidir a técnica de distribuição que há de seguir, deve levar em conta as partes repartidas e as que tem por repartir, há de controlar que cada participante receba a mesma quantidade e há de dar como resultado a parte que corresponde a um dos qualquer participantes (GAIRÍN; SANCHO, 2002, p.172).

Ainda segundo os autores, este construto somente tem sentido em contextos contínuos, pois permite o fracionamento da unidade em um número qualquer de partes iguais, utilizando contextos discretos não apareceriam a fração, já que a divisão levaria a dar um número inteiro de objetos e ficariam objetos sobrando que não seria possível de dividir porque não há possibilidade de fracioná-los.

Fandiño (2009), corrobora com essa ideia, as vezes a operação de divisão indicada $\frac{a}{b}$ é também efetuada. E exemplifica com uma situação: $\frac{3}{5}$ pode indicar uma fração parte/todo, uma divisão indicada (3 objetos para distribuir entre 5 pessoas), mas também o quociente 0,6 se tal divisão é efetuada. Só que a escrita 0,6 não produz o mesmo efeito operatório que produz a fração $\frac{3}{5}$ que a originou, como em dois sentidos distintos: $\frac{1}{5}$ três vezes, ou 3 objetos distribuídos a 5 pessoas). Exemplo dessa situação na figura 26.

Figura 26 - Exemplo de representação de Frações.



Fonte: Fandiño (2009).

Na figura anterior, na primeira linha e na terceira linha, temos a fração $\frac{3}{5}$ e por tanto 0,6. Mas na segunda linha temos $\frac{3}{15}$, quer dizer $\frac{1}{5}$ portanto 0,2, o que para Fandiño (2009) muitos estudantes interpretam com 3 vezes $\frac{1}{5}$, ou seja, $\frac{3}{5}$.

A simbolização da fração como $\frac{a}{b}$ se pode interpretar de duas maneiras distintas, conforme Gairín e Sancho (2002): de um lado indica as condições de distribuição (a unidades e b indivíduos) e por outro lado, uma quantidade de magnitude, que deverá resultar dessa distribuição. Entre as características próprias deste construto os autores citam:

a) boa parte do conhecimento se percebe por representações gráficas, ainda que estas representações não sejam imprescindíveis;

b) o aluno deverá fazer traduções entre dois números, representações visuais e representações simbólicas;

c) na representação visual, o aluno deverá saber interpretar aqueles aspectos que representam as unidades que há de distribuir, os que representam as partes de devem tornar-se e as relações que há entre ambos (que indicam o resultado da divisão);

d) ainda que a fração $\frac{a}{b}$ tenha a mesma representação simbólica que o construto partetodo, representa que o fracionamento se produz em a , enquanto b indica o número de parte que há de que fazer;

e) na fração $\frac{a}{b}$ não há exigências na relação de ordem entre a e b , de maneira que a pode ser maior, menor ou igual a b .

Como no construto quociente as representações gráficas não são imprescindíveis, isso facilita a conexão entre as notações fracionária e decimal dos Números Racionais. A técnica de distribuição não é única, podendo expressar de duas formas o resultado de uma mesma divisão, que são duas maneiras de expressar uma mesma quantidade de magnitude, embora tal quantidade se tenha obtida por procedimentos distintos.

2.2.3.2.3 Construto medida

Neste construto surge a necessidade de medir o comprimento de um segmento AB tomando como unidade de medida o comprimento de um segmento CD , que não está incluído um número inteiro de vezes no segmento AB . Conforme Gairín e Sancho (2002), no âmbito escolar é frequente apresentar este significado de fração recorrendo a representação gráfica de

uma reta numérica ou um instrumento de medida, por exemplo um régua. Ainda segundo os autores:

a) boa parte do conhecimento se percebe através de representações gráficas, já que estas imitam o processo real de medida;

b) o aluno deve fazer interpretações entre dois números, representações visuais e representações simbólicas;

c) na representação visual, o aluno deve saber interpretar aqueles aspectos que representam o segmento que se está medindo, a unidade de medida, as partes que deve ser tanto na unidade de medida como no segmento que se quer medir e as relações que há em ambos;

d) mesmo quando a fração $\frac{a}{b}$ tem a mesma representação simbólica que no construto parte-todo, o que se indica é que o fracionamento há de fazê-lo tanto no segmento que há de medir como na unidade de medida;

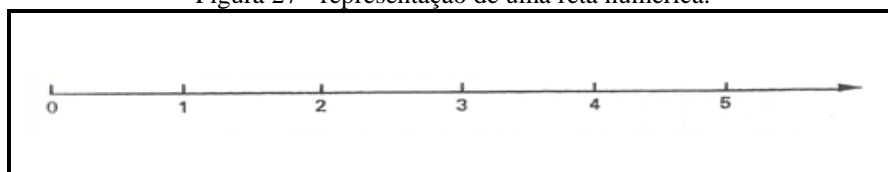
e) na fração $\frac{a}{b}$ não há exigências na relação de ordem entre a e b , de maneira que a pode ser maior, menor ou igual a b .

Conforme Dickson (1984 apud LLINARES; SÁNCHEZ, 1988), trabalhar Frações na reta numérica pode provocar dificuldades para algumas crianças, mas também apresenta vantagens como:

- faz com que as Frações impróprias (Frações maiores que a unidade) apareçam de forma muito mais natural, assim como a notação de números mistos;
- faz com que o conjunto das Frações apareça no eixo como uma extensão do conjunto dos Números Naturais (as Frações preenchem os “vazios” entre os Naturais);
- tem conexões com a ideia de medida (uso de escala).

Os resultados de algumas investigações também sugerem que a interpretação das Frações mediante a reta numérica é especialmente difícil para as crianças (NOVILLIS apud LLINARES; SÁNCHEZ, 1988, p.60). Um dos problemas que pode surgir é a identificação do segmento unidade quando a reta numérica é expandida além do 1 (figura 27).

Figura 27 - representação de uma reta numérica.



Fonte: Llinares e Sánchez (1988).

Segundo Llinares e Sánchez (1988), a reta numérica também serve como uma boa representação da interpretação das frações como medida. Além disso, o uso da representação

das frações através da reta numérica deve ajudar a criança a “conceitualizar” as relações parte-todo em um contexto e reconhecer contextos equivalentes que provêm de novas divisões da unidade. Sendo assim, conforme os autores, o manejo das frações na reta numérica pode ser uma boa introdução à noção de equivalência: a mesma parte da unidade recebe nomes diferentes em função do número de divisões.

Quanto a essa ideia de medida, Fandiño (2009) faz um questionamento importante: uma garrafa de vinho com frequência se lê $0,75\text{ l}$, que indica uma quantidade, uma medida, na unidade decimal litro, o que podemos entender se tratar de $\frac{3}{4}$ de um litro. No entanto se trata de uma fração no sentido primitivo (uma unidade-todo dividida em 4 partes iguais das quais se tomamos 3) ou simplesmente de um número para expressar uma quantidade? E complementa dizendo que, uma coisa é ter uma garrafa graduada de 1 litro e encher $\frac{3}{4}$, outra bem distinta é ter uma garrafa de vinho que já tem como medida $0,75$.

Assim é também quando compramos dois lápis que custam \$ $0,75$ cada um. É difícil pensar em transformar este $0,75$ em $\frac{3}{4}$ de \$ $1,00$, no entanto é assim. O custo total é de \$ $1,50$, resolvemos sem a necessidade de recorrer as frações que complicaria inutilmente a questão.

E a autora conclui refletindo que em situações como apresentada, tanto a quantidade de vinho na garrafa, ou o custo do lápis, são medidas, e as vezes tem sentido pensar como Números Racionais, as vezes como frações, mas em nenhum caso é necessário ou conveniente fazer referência a definição original de fração. É muito mais prático um uso direto da medida assim como vem indicada.

2.2.3.2.4 Construto razão

Segundo Llinares e Sánchez (1988), algumas vezes, as Frações são usadas como “índices comparativos” entre duas quantidades de uma grandeza (comparação de situações). Assim, utilizam-se as Frações como uma razão.

Nesse caso, não existe de forma natural uma unidade (um todo) como pode ocorrer em outros casos (a comparação pode ser bidirecional). Nessa situação, a ideia de par ordenado de números naturais toma força. Normalmente, a relação parte-parte (ou todo-todo) se escreve com $a:b$.

Alguns exemplos de diferentes contextos que podem ajudar a entender esta interpretação de Frações:

- A relação entre os pontos elementos de A e de B é de três para cinco, que pode ser representada por $\frac{3}{5}$ ou 3:5.
- A relação entre os pontos de B e de A é de cinco para três, que também pode ser representada por $\frac{5}{3}$ ou 5:3.

Neste construto a fração $\frac{a}{b}$ não representa a partição de nenhum objeto ou quantidade de magnitude, mas sim a relação que existe entre duas quantidades de magnitudes, a comparação entre os cardinais de dois conjuntos, ou a comparação entre uma quantidade de magnitude e o cardinal de um conjunto. A comparação se estabelece entre as quantidades que expressam o numerador e o denominador, e portanto, a ordem em que se cita as magnitudes que se estão comparando é essencial (GAIRÍN; SANCHO, 2002, p.180).

As dificuldades da conexão da notação decimal com este construto estão no próprio conceito, e provêm, principalmente, da justificação do fracionamento em 10 partes. E para Gairín e Sancho (2002), a razão tem que interpretar-se como tanto por um, com o passo que a notação fracionária se limita a escrever com notação decimal uma quantidade de magnitude do numerador que está expressa com notação fracionária, e em consequência a notação decimal se desenvolve no terreno da medida e não da razão.

2.2.3.2.5 Construto operador

Para Fandiño (2009), um dos significados mais utilizados na escola para frações é o de operador multiplicativo, como por exemplo:

- “Encontrar $\frac{4}{5}$ de 20 peras”, que significa operar $(20 \div 5) \times 4$ peras;
- “Encontrar um segmento CD que seja $\frac{4}{5}$ de um segmento AB que mede 20 cm”, o que significa dizer que CD medirá 16 cm.

Segundo Llinares e Sánchez (1988), essa interpretação das frações é vista em um papel de transformação: “algo que atua sobre uma situação (estado) e a modifica”. Os autores exemplificam utilizando um contexto discreto onde, em uma situação de partida (estado-unidade), o conjunto formado por 36 alunos de uma classe, onde o efeito da aplicação do operador $\frac{2}{3}$ (dois terços) pode ser representado, conforme a tabela 1.

Tabela 1 - exemplo de Frações como operador.

ESTADO-UNIDADE	OPERADOR	ESTADO FINAL
----------------	----------	--------------

(SITUAÇÃO)		
36 alunos	(Dividir por 3, multiplicar por 2)	24 alunos

Fonte: Llinares e Sánchez (1988).

Em um contexto contínuo, por exemplo, quando atua a Fração $\frac{2}{3}$, considerada como operador sobre um segmento de reta dada, se obtém outro segmento de reta $\frac{2}{3}$ do original.

Ainda conforme os autores há de observar que, nessa interpretação, se utilizam as Frações em um duplo aspecto: descrevendo uma ordem, uma ação a realizar (operador) e descrevendo um estado das coisas, ou seja, descrevendo uma situação.

Essa interpretação enfatiza o papel das Frações como elementos da álgebra de função (transformação), ao mesmo tempo em que conduz à ideia de que os Números Racionais formam um grupo (estrutura algébrica) com a multiplicação.

Encontra-se, assim, segundo Llinares e Sánchez (1988), um contexto natural para a composição de transformação (função, operador), a ideia de inversa (o operador que reconstrói o estado inicial) e a ideia de identidade (o operador que não modifica o estado inicial).

Conforme Gairín e Sancho (2002), entre as características próprias deste construto podem-se citar:

- a) a fração $\frac{a}{b}$ atua como uma função transformadora de um número ou figura, o que dá um significado muito diferente ao de outros construtos;
- b) a fração $\frac{a}{b}$ há que considerá-la como uma unidade única, mesmo quando cada um dos valores tenham distintas implicações no resultado final: multiplicar a e dividir por b .

Ainda segundo os autores, a notação decimal pode apresentar-se somente a partir de uma perspectiva formal, desde a comprovação de que o operador composto da multiplicação e da divisão produz o mesmo efeito que se atua uma expressão decimal. É preciso que já se conheça conceitualmente e procedimentalmente as expressões decimais.

2.2.3.2.6 Outras interpretações

Além dos construtos parte-todo, quociente, medida, razão e operador, Fandiño (2009) apresenta outros significados ao conceito de frações, ampliando ou especificando as interpretações. São eles: a frações em probabilidades, frações em score (pontuação), fração como Número Racional, fração como ponto de uma reta orientada, fração como uma quantidade de eleição, fração como porcentagem e fração como linguagem do cotidiano. Além de dar uma relevância a conceitualização de frações por Vergnaud e por Duval. A seguir apresentamos um resumo dessas interpretações.

- *Frações em probabilidades*: a autora exemplifica com uma situação, sobre a probabilidade de quando se lançam dois dados obter um múltiplo de 4. Os casos possíveis são 36, e os eventos favoráveis 9 (são 3 possibilidades de se obter um 4, 5 de se obter 8 e 1 de se obter um 12). Podemos expressar essa probabilidade desse evento como $\frac{9}{36}$, e essa fração é equivalente a $\frac{1}{4}$, mas somente aritmeticamente, porque intuitivamente essa transformação não diz muito sobre o caso. No caso da fração equivalente $\frac{25}{100}$ tem mais sentido, especialmente quando escrita como 25%. Outra fração equivalente, como por exemplo, $\frac{27}{108}$ perderia completamente o sentido em relação ao problema proposto. Neste caso de interpretação na probabilidade, pensar em frações como parte-todo, o que significa na probabilidade dividir, no exemplo dado, em 36 partes e tomar 9 delas? A autora conclui afirmando que é necessário admitir que nesse caso afasta-se da definição intuitiva de parte-todo.

- *Frações em score (pontuação)*: Fandiño (2009) exemplifica com a contagem de uma competição de tiro entre duas pessoas. Laura tem à disposição 5 tentativas e acerta 2 vezes o alvo, logo em seguida tem mais 3 tiros e acerta novamente 2 vezes o alvo. E André acertou o alvo 3 vezes na primeira tentativa de 5, e 1 vez em 3. E podemos expressar matematicamente conforme a tabela 2.

Tabela 2 - Contagem dos acertos de Laura e André.

Laura 1ª	Laura 2ª	Total de Laura	André 1ª	André 2ª	Total de André
$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{8}$

Fonte: Fandiño (2009).

Segundo a autora, aceitar essa descrição do jogo deve gerar dúvidas, porque nos encontramos frente a uma *adição* entre frações estruturada assim: $\frac{2}{5} + \frac{2}{3} = \frac{4}{8}$, o que estranho, mas ainda assim $\frac{4}{8}$ é equivalente a $\frac{1}{2}$, e não se pode negar que Laura acertou o alvo metade das vezes que atirou. Então as frações em score são objetos matemáticos que tem características próprias, intuitivas, distante da definição inicial de frações.

- *Fração como Número Racional*: neste caso se dá uma atenção a questões que tem a ver com a operabilidade: equivalência entre frações, adições entre frações, entre outras situações. Vejamos essa interpretação com relação a equivalência entre frações. Com o número 0,5, por exemplo, é a classe de equivalência $\{(1;2), (2;4), (3;6) \dots (10;20), (11;22), (13;26) \dots\}$ formado pelos infinitos pares ordenados de números $(a; b)$, tal que: $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N} - \{0\}$ e entre os quais aparecem o par $(1; 2)$, ou $b = 2 \times a$. Numa aula é impossível trabalhar com

este lastro infinito de pares, é pela qual se elege com frequência um representante da classe, a maioria das vezes é aquele ‘reduzido aos termos mínimos’ ou ‘frações irredutíveis’, no exemplo dado é $(1; 2)$, e se usa este para representar a classe de equivalência. Em relação a isso, Fandiño (2009) afirma que escrevendo diretamente na forma fracionária $\frac{1}{2}$, arrastamos a sequência infinita dos pares-frações equivalentes. Tanto $0,5$ como $5,7\overline{444}$ se aceitam como representantes do mesmo Número Racional, ainda sendo originalmente, entes essencialmente distintos.

Propondo a partir da operação de adição a autora instiga a reflexão sobre o que significa operar entre os *Racionais*. Na operação $0,5 + 1,2$ facilmente se resolve, é $1,7$. Mas quando se propõe $3,\overline{44} + 2,3$ não é tão fácil assim, porque uma das parcelas contém uma dízima infinita. Neste caso é conveniente passar para a forma fracionária $\frac{31}{9} + \frac{23}{10} = \frac{310+207}{90} = \frac{517}{90} = 5,7\overline{44}$. Este resultado leva a uma intuição de aceitação de adição entre *Racionais* periódicos ou mistos, muito importante na didática (FANDIÑO, 2009, p.116). Agora se realizarmos uma multiplicação de $3,\overline{44} \times 2,3$ normalmente se utilizam frações na expressão também, mas para obter o resultado $7,9\overline{22}$ é mais complicado justificar intuitivamente. A autora (2009, p.116) reflete que “a forma fracionária é inútil para representar os Números Racionais e para gerir a teoria, mas é muito útil em vários casos para gerir certas operações. Em outras palavras, $\frac{1}{2}$ não é Número Racional, mas o representa muito bem³⁵”.

- *Frações como ponto de uma reta orientada*: neste caso a fração é vista como um valor-ponto sobre a reta, muito mais perto de ser um Número Racional do que uma fração. Fandiño (2009) exemplifica esse caso como quando escrevemos $\frac{3}{4} < \frac{6}{7}$. Nessa situação não estamos avaliando o fato de que se tomarmos $\frac{3}{4}$ da mesma unidade-todo de medida obtemos menos que se tomarmos $\frac{6}{7}$, mas pelo contrário, estamos tratando diretamente as frações como Números Racionais. Se quisermos dispor as frações sobre a reta numérica, sabemos que $\frac{3}{4}$ estará antes de $\frac{6}{7}$. E para verificar a exatidão transformamos as duas frações em outras equivalentes: $\frac{21}{28}$ e $\frac{24}{28}$. As frações neste indicam uma distância, entre o ponto de origem e o ponto-fração, claro que essa distância é relativa, dado que depende da unidade de medida.

- *Fração como indicador de quantidade de eleição*: para explicar essa interpretação Fandiño (2009), propõe como exemplo a promoção de uma loja onde se dá um desconto para

³⁵ “la forma fraccionaria es inútil para representar los números racionales y para gestionar la teoría, pero es muy útil en varios casos para gestionar ciertas operaciones. En otras palabras, $\frac{1}{2}$ no es número racional, pero lo representa muy bien”.

os clientes. O método escolhido é de 1 a cada 10, o primeiro a entrar na loja recebe um bônus, logo o 11º, o 21º e assim sucessivamente. Neste caso a fração $\frac{1}{10}$ significa: que o desconto dado foi a $\frac{1}{10}$ dos clientes do dia (mas se os clientes foram 80, 7 receberam o desconto, se foram 81 ou 88, o desconto foi recebido por 8). Mas $\frac{1}{10}$ também significa, neste caso, 1 a cada 10 que não é estritamente a fração que pretende dividir uma unidade-todo em 10 partes iguais.

- *Frações como porcentagem*: esta interpretação remete a algumas semelhanças com a da probabilidade, mas difere no significado. Às vezes é mais fácil expressar 75% sob a forma de fração $\frac{75}{100}$ ou $\frac{3}{4}$, as vezes é mais conveniente deixá-lo indicado em porcentagem, ou em alguns casos no número decimal 0,75. Ainda que a escrita matemática resultem formalmente equivalentes, não são do todo *equi-significantes* na práxis cotidiana, o que significa que há significados distintos que cada um é reconhecido dentro das distintas variedades de escrituras formais.

- *Fração em linguagem do cotidiano*: segundo Fandiño (2009) muitos investigadores (Llinares e García, 1988; Streefland, 1990, 1991, 1993; Figueras, 1991; Gimenez, 1994) que se ocupam da didática das frações se inclinam por um primeiro contato informal. Esse contato seria relacionado com situações da vida diária, assim o estudante poderia controlar linguística e cognitivamente estes usos e propor alguns próprios, até alcançar a conceitualização estável e significativa do termo.

A autora exemplifica essa situação com a leitura do relógio, a afirmação ‘São sete e três quartos³⁶’ traz o fato que esses três quartos quer dizer 45 minutos, dado que se trata de três quarto de uma hora-unidade de medida equivalente a 60 minutos. Esse termo se converte mais numa referência pontual que uma fração como tal: ‘três quartos’ quer dizer que o ponteiro do minuto do relógio se encontra no 9, nessa posição específica. Se perde o sentido original da fração e se adquire um novo sentido, menos vinculado a fração e mais específico.

Outra situação é em receitas de culinárias que fazem algumas vezes referências a frações ou porcentagens, e segundo Fandiño (2009) este é um campo fabuloso de investigação intuitiva. De fato, se uma receita é para quatro pessoas, e deve-se aumentar para 6 pessoas, todos os ingredientes devem modificar. Mas não se trata de agregar 2 unidade de cada medida por cada ingrediente. E a autora questiona como poderia se projetar uma solução considerando de maneira aditiva, ao invés de modificar cada quantidade agregando o 50%, ou seja,

³⁶ Esta expressão é usual em países de língua espanhola, por exemplo México.

multiplicando por $\frac{3}{2}$, como seria em uma visão multiplicativa que traz à tona as razões. Mas esta solução não é de fato tão intuitivo para os estudantes, como poderia parecer.

Essas dois exemplos são algumas das situações possíveis de se vivenciar no cotidiano, porém, conclui a autora, que é importante as propostas de trabalho aos estudantes encontrem exemplos com base em suas experiências pessoais.

- *A conceitualização das frações e a teoria de Vergnaud*: Fandiño (2009) faz referência a teoria de Vergnaud sobre Campos Conceituais, que é um conjunto de situações, de conceito e de representações simbólicas (significante) em estreita conexão entre eles, que não podem ser analisadas de forma separada. Um Campo Conceitual é um conjunto de problemas e de situação que para poder tratar são necessários conceitos, procedimentos e representações de distintas mas conectadas. E são esses aspectos que a autora salienta que no estudo das frações devem ser tratadas em múltiplo aspectos, que detrás do termo ‘fração’ se esconde muitas situações distintas que dão sentido ao conceito, e para cada umas destas situações há invariantes sobre os quais se baseia a operabilidade dos esquemas.

- *A conceitualização das frações e a teoria de Duval*: a conceitualização nesta perspectiva passa através do signo que expressa seu mesmo objeto (FANDIÑO, 2009). Estas indicações podem ser tanto conceituais quanto didáticas, tanto a nível abstrato quanto concreto. O objeto matemático ‘fração’ tem múltiplas funções e remete a uma multiplicidade de signos, cada um dos quais pertence a distintos sistemas de signos. E segundo a autora, cada conceito matemático não só remete ao objeto mental que a sociedade e a tradição matemático construiu, mas a todos os signos que, nos distintos sistemas de signos, foram elaborados para representá-los.

2.3 A CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO E OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS NO ESTUDO DOS NÚMEROS RACIONAIS

Conforme os PCN (BRASIL, 1997), ao longo do processo de estudo escolar, os alunos irão perceber a existência de diversas categorias numéricas, criadas em função de diferentes problemas que a humanidade teve que enfrentar - Números Naturais, Números Inteiros positivos e negativos, Números Racionais (com representações fracionárias e decimais) e Números Irracionais. Os alunos poderão ampliar os conhecimentos em relação ao conceito de número ao se depararem com situações-problema envolvendo as operações de adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação.

Conforme Santos (2005, p.60):

Existe um consenso entre diversos pesquisadores da história da Matemática como, por exemplo, Boyer (1974); Caraça (1998), entre outros, afirmam que o surgimento da Matemática deve-se aos de problemas oriundos da vida diária, ou seja, salvo sua evolução e seu formalismo, a Matemática emerge de uma apreensão sensível do real, isto é, de uma tentativa de construir modelos matemáticos para resolver problemas reais.

Para tanto, é necessário que o professor esteja apto para a tarefa de realizar o ensino da Matemática vinculado com a história da evolução científica. Para Robilotta (1988): “[...] conduzir um estudante que está fora da estrutura para dentro dela é um processo altamente complexo, que demanda do professor uma razoável compreensão de como a Ciência se desenvolve e evolui”.

Uma forma de incentivar o aprendizado em relação a esse conteúdo é que essas devem aparecer em contextos variados, que proporcionem aos estudantes a realizar com elas as mesmas atividades que desenvolvem com os Números Naturais, como somar, dividir e ordenar. É importante que os alunos estabeleçam relações entre os Números Racionais e os problemas que elas resolvem utilizando os Números Naturais (BROITMAN, 2009). O confronto de ideias é essencial. “O debate força os alunos a explicitar suas hipóteses, refletir sobre as dos colegas e reelaborar o pensamento inicial”, segundo Pandovan (2009).

No primeiro contato, os alunos tentam transpor os conhecimentos já construídos sobre os Números Naturais para esse outro universo numérico e cabe à escola proporcionar situações em que fiquem claras as diferenças entre os conjuntos, para que os estudantes confrontem os saberes (BROITMAN, 2009). Ainda para a autora, os problemas envolvendo os *Racionais* são muito mais complexos para os estudantes. O aprendizado implica romper com muitas das certezas e dos saberes que os alunos construíram ao longo da vida escolar. Considerar essas rupturas é uma forma eficaz de entender a origem das dificuldades na aprendizagem desse novo campo numérico e, com isso, ajudar todos os alunos a avançar.

Para compreensão das situações de aprendizagem vivências pelos alunos Centeno (1988) diferencia o que seja *dificuldade, conflito, obstáculo e erro*:

- *A dificuldade* surge como algo que impede a boa execução do entendimento imediato de uma coisa. A dificuldade pode proceder de diversas causas: aquela relacionada com o conceito aprendido, em decorrência do método utilizado pelo professor, aquela que decorre do conhecimento que o aluno possui previamente e aquela que decorre da própria disposição de aprender do aluno.

- *Conflito* significa choque ou oposição entre formas contraditórias de interpretar uma mesma situação. Fala-se de conflito cognitivo quando duas ideias contraditórias se chocam e produzem um desequilíbrio que pode provocar dúvida e produzir erros. Esse se produz porque

as relações que se têm como válidas em uma etapa anterior, entram em contradições com outras novas ou com uma nova reorganização das antigas.

- O *Obstáculo* pode-se entender, primeiramente, como algo que faz difícil ou impossível o prosseguimento, para a consecução de um fim. Contudo, Centeno (1988, p.145) cita que Bachelard (1975) em Física e Brousseau (1976) em Matemática, argumentam que um obstáculo é um conhecimento válido em um determinado contexto e que, como tal, pode durar muito tempo, enquanto não aparece um conflito.

Os obstáculos põem uma resistência à mudança necessária para aceitar um modelo mais amplo e esta resistência pode explicar a lentidão da evolução de alguns conceitos e inclusive seu retrocesso. Em geral, são dificuldades que impedem uma aproximação ao objeto desconhecido, ou seja, o obstáculo epistemológico implica em uma dificuldade ou confusão situada no processo de produção de um conhecimento. Uma melhor compreensão das dificuldades da aprendizagem dos Números Racionais poderá ser mais bem esclarecida se forem consideradas as interferências havidas em sala de aula, decorrentes de possíveis obstáculos. Há que se considerar como obstáculos certos bloqueios que acometem a compreensão do trabalho que está sendo desenvolvido.

Brousseau (1989 apud OLIVEIRA, 1994) chama a atenção para o fato de já se terem identificado diversos obstáculos, que são fundamentalmente cognitivos (ontogênicos, epistemológicos, didáticos e mesmo culturais), e analisando as suas causas, há ainda muito por investigar nesta área, particularmente as relações entre obstáculos que coexistem.

Ainda segundo o autor, os obstáculos não provêm somente da natureza do homem, dos conhecimentos ou do modo como se ensina, outros estariam ligados a uma certa evolução cultural e ainda dos conhecimentos didáticos e epistemológicos. Assim, os obstáculos ontogênicos têm relação com as limitações do sujeito em certo momento do seu desenvolvimento. Muitas vezes os conhecimentos científicos tomados como referências não correspondem aos problemas colocados e as representações não são identificadas na cultura, neste caso se caracteriza um obstáculo cultural. Os obstáculos didáticos reenviam para decisões didáticas mal escolhidas e por fim os epistemológicos desempenham um papel essencial na formação histórica dos conhecimentos e a sua rejeição deve-se ao fato de serem integrados explicitamente no saber transmitido.

Para Oliveira (1994), muitas vezes o que acontece não são os conhecimentos ensinados que faltam, mas antes os instrumentos pessoais da compreensão do aluno, ou seja, ele não compreende porque é que tem de mudar. Neste sentido aprendizagens precoces podem aumentar as possibilidades de transformar um saber necessário em obstáculo intransponível.

- *Erros* são definidos como aqueles utilizados no sentido de conceito equivocado, de juízo falso, contrário à verdade. Os erros podem produzir-se por desconhecimento, por dúvidas ou simplesmente pela casualidade.

Oliveira (1994) na sua pesquisa analisa a chamada *Pedagogia do Erro*, que concepções errôneas podem se constituir um instrumento poderoso para diagnosticar as dificuldades de aprendizagem e, conseqüentemente contribuir para a modificação de estratégias de ensino. De fato, muitas vezes a origem de dada concepção resulta apenas da estratégia escolhida para alcançar um objetivo não ser a mais adequada. Para a autora:

Tomar consciência das nossas próprias crenças é o primeiro e principal passo com vista ao questionamento e eventual modificação de tais crenças. É importante que os professores ajudem os seus alunos a tomarem consciência das suas próprias convicções e concepções.

É neste sentido, que pensamos ser muito importante os professores conhecerem as concepções alternativas dos alunos acerca de um dado conceito e ao mesmo tempo envolvê-los no processo de análise das suas próprias concepções. Quando determinada concepção não é aplicável a uma nova situação, isto é, se entra em conflito com ela, é bem provável que ocorra mudanças e, deste modo, os alunos poderão rever os seus pontos de vista e alargar as suas concepções (OLIVEIRA, 1994, p. 146).

Para Centeno (1988) é necessário à compreensão de certos erros cometidos pelos alunos durante o processo de aprendizagem. Se o professor não conhece os erros dos alunos ou não os compreende ou os compreende mal, dificilmente poderá criar condições necessárias para provocar o progresso e a reorganização das suas ideias.

Em situações apropriadas, nas quais o aluno fracassou ao resolver um problema, ele pode analisar seu fracasso através dos erros cometidos. Assim, pode considerar como sua estratégia, voltar à ação intelectual do aluno, para compreender o porquê não se saiu bem naquele momento. Chegado aí, pode refletir seu modo de fazer e redirecionar sua ação intelectual a partir das hipóteses anteriormente usadas. Percebendo, ao final de um processo, que uma adaptação ocorrerá àquela situação problema, confirmando-se, portanto, o aluno como protagonista de sua aprendizagem.

Para Gairín e Sancho (2002), a construção do conceito de Número Racional cognitivamente efetiva exige um processo lento de domínio e integração de novos significados, que se articule com os domínios do campo numérico dos Números Naturais e dos Números Inteiros. Também supõe a incorporação de novas especificidades simbólicas, operatórias, estruturais, *Racionais* e de representação, que há de acomodar a uma variedade de novos significados.

Em relação às frações, o entendimento do conceito com as suas relações, para Llinares e Sánchez (1988, p.53) é um processo de aprendizagem de longo prazo. A variedade de

estruturas cognitivas a que as diferentes interpretações das frações estão conectadas condiciona esse processo de aprendizagem. Existe um longo caminho, desde o primeiro contato intuitivo dos alunos com as frações (relação parte-todo, metades, terços, etc.), até chegar ao conhecimento de caráter algébrico associado às frações.

Ainda segundo os autores, ao ensinar frações, deve existir um equilíbrio entre o significado das mesmas, em contextos concretos práticos (situações problemas) e em situações mais abstratas - cálculos sem contexto (caráter algébrico). A compreensão operativa do conceito de frações deve proporcionar a fundamentação em que se apoiam as operações algébricas que vão ser desenvolvidas posteriormente. Um bom trabalho metodológico com as frações pode contribuir para que essas operações algébricas não se convertam em algo sem sentido para os alunos.

2.3.1 As dificuldades no processo de estudo dos Números Racionais na forma de Frações e Decimais

Os Números Racionais, considerados um assunto importante na escolaridade básica de Matemática, apresentam-se para os alunos, em muitas oportunidades, como um obstáculo para a sua plena compreensão. Ao raciocinar sobre os Números Racionais como se fossem naturais, os alunos acabam tendo que enfrentar vários obstáculos, conforme os PCN (BRASIL, 1998, p.101):

- um deles está ligado ao fato de que cada Número Racional pode ser representado por diferentes (e infinitas) escritas fracionárias; por exemplo, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{9}$ e $\frac{4}{12}$ são diferentes representações de um mesmo número;
- outro diz respeito à comparação entre frações, pois acostumados com a relação $3 > 2$, terão que construir uma escrita que lhes parece contraditória, ou seja, $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$;
- se o tamanho da escrita numérica, no caso dos naturais, é um bom indicador da ordem de grandeza ($8345 > 83$), a comparação entre 2,3 e 2,125 já não obedece ao mesmo critério;
- se, ao multiplicar um número natural por outro natural (sendo esse diferente de 0 ou 1), a expectativa era a de encontrar um número maior que ambos, ao multiplicar 10 por $\frac{1}{2}$, ficarão surpresos ao ver que o resultado é menor do que 10;
- a sequência dos números naturais permite estabelecer sucessor e antecessor, para os *Racionais* isso não faz sentido, uma vez que entre dois Números Racionais quaisquer é sempre

possível encontrar outro racional; assim, o aluno deverá perceber que entre 0,8 e 0,9 estão números como 0,81, 0,815 ou 0,87.

Ainda tratando da compreensão dos Números Racionais, Romanatto (1997) coloca que os professores que lecionam nos 4º e 5º anos do Ensino Fundamental identificam uma certa dificuldade dos alunos compreender $\frac{4}{3}$ como uma fração. O obstáculo se explica na medida em que, se fração é parte do todo, então $\frac{4}{3}$ não é mesmo uma fração. Para que aceitemos como tal é necessário que a noção original de fração seja ampliada. O nome que usamos para as frações – próprias ou impróprias – é um vestígio de que os nossos antepassados, muito provavelmente, enfrentaram as mesmas dificuldades que observamos, atualmente, como os nossos alunos.

O autor ainda complementa que nos Números Naturais, a multiplicação (adição de parcelas iguais) está associada com a ideia de aumento, enquanto que na divisão (que pode também ser entendida como uma subtração de parcelas iguais) temos a ideia de diminuição. Entretanto, essas mesmas operações quando estendidas para os *Racionais* tem outras interpretações.

A seguir vamos tratar mais especificamente de algumas dificuldades e erros comuns que ocorre com esse tema. Para tanto, vamos nos basear nas pesquisas de Llinares e Sánchez (1988) para as Frações e de Centeno (1988) para os Números Decimais.

2.3.1.1 Dificuldades no processo de estudos das Frações

O ensino e a aprendizagem das Frações é um processo complexo para os alunos e as dificuldades podem surgir quando eles transferem as propriedades do conjunto dos Números Naturais para as Frações, não compreendo as características particulares de cada conjunto numérico. Para Nunes e Bryant:

Com as Frações, as aparências enganam. Às vezes, as crianças parecem ter uma compreensão completa delas e ainda não a têm. Elas usam os termos corretos, falam sobre Frações coerentemente, resolvem alguns problemas, mas diversos aspectos cruciais das Frações ainda lhes escapam. De fato, as aparências podem ser tão enganosas que é possível que alguns alunos passem pela escola sem superar dificuldades relativas às Frações sem que ninguém perceba (NUNES; BRYANT, 1997, p. 191).

Segundo Llinares e Sánchez (1988), as observações anotadas pelo professor em relação ao desenvolvimento do trabalho com os estudantes levam a precisar que há erros que aparecem de forma aleatória, por descuido, distração, etc., e outros erros se devem ao fato de que, simplesmente, o aluno não sabe a resposta correta e propõe um resultado ao azar.

Há outros tipos de erros que se devem a não compreensão total do conceito ou à aplicação de procedimentos errôneos, os quais podem ser devido à elaboração de métodos

persoais alternativos aos ensinados pelo professor ou pela modificação/esquecimento de algum passo de um algoritmo ensinado. Os autores apresentam tipos de erros que podem ser facilmente identificados no trabalho com as Frações, por parte dos alunos:

- Exemplo 1: alunos que trabalharam muito a interpretação parte-todo das Frações, a partir de diagramas, podem ter dificuldades ao considerar $\frac{3}{5}$ como um número compreendido entre 0 e 1, ou como a divisão de 3 entre 5 é uma situação de repartição, apresentando-se um problema conceitual na integração das distintas interpretações das Frações. Nessa situação, a utilização da Reta Numérica pode servir para ajudar o aluno a integrar as distintas interpretações.

- Exemplo 2: um aluno resolvendo uma tarefa, como na figura 28, vista a seguir.

Figura 28 - Exemplo de tarefa

$$3 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

Fonte: Llinares e Sánchez (1988).

O aluno, provavelmente, ignora o significado dos símbolos apresentados e resolve a operação utilizando o esquema aditivo dos naturais. A introdução dos números mistos, desde um primeiro momento, em um contexto concreto, ajuda a evitar/superar esse tipo de problema.

- Exemplo 3: atividades de subtração de Frações como na figura 29:

Figura 29 - Exemplo de tarefa.

$$\begin{array}{ll} \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6} & \frac{4}{5} - \frac{3}{4} = \frac{4}{20} - \frac{3 \cdot 1}{20 \cdot 20} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} & \frac{3}{4} - \frac{2}{5} = \frac{3}{20} - \frac{2}{20} = \frac{1}{20} \end{array}$$

Fonte: Llinares e Sánchez (1988).

Segundo Llinares e Sanchez (1988), é provável que, para esse aluno, alguém lhe tenha ensinado a regra para reduzir Frações a um denominador comum mediante o uso do mínimo múltiplo comum (MMC). Assim, a criança calcula corretamente, mas não altera os numeradores (pode ter esquecido/modificado algum passo do algoritmo ensinado). Esse erro pode ser devido a uma rápida introdução ao cálculo algorítmico, o que converteu o manejo dos passos do algoritmo em algo sem sentido (desconectado da ideia de equivalência de Frações).

- Exemplo 4: quando um aluno procede da maneira como mostra a figura 30, vista a seguir.

Figura 30 - Exemplo de tarefa.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} = \frac{5}{5}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{5} = \frac{10}{9} + \frac{4}{9} = \frac{14}{9}$$

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{12}{7} + \frac{6}{7} = \frac{18}{7}$$

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{2} = \frac{2}{7} + \frac{10}{7} = \frac{12}{7}$$

Fonte: Llinares e Sánchez (1988).

Esse aluno construiu um algoritmo errado e bastante complicado para somar Frações com denominadores diferentes, que consiste em colocar um denominador comum igual à soma dos denominadores e substituir os numeradores de cada Fração pelo produto do denominador e numerador da outra. Uma vez reduzidos a um denominador comum, soma-os corretamente. Essa é uma mescla de algoritmo mal aprendido com um procedimento sistemático próprio.

É importante assinalar, segundo Llinares e Sánchez (1988) que, nessas situações, os alunos acreditam que estão fazendo o correto. O único modo de corrigir esse erro é provocar um conflito, por exemplo, por meio de visualizações, tentando que a criança se dê conta da contradição que existe entre seu modo de atuar e o que lhe mostra a realidade.

Muitos dos erros apresentados no trabalho com Frações têm origem na similaridade que, tanto na linguagem como na simbologia, se apresentam com os Números Naturais. Por um lado, as Frações se nomeiam utilizando nomes iguais ou muito parecidos àqueles que são familiares no contexto dos números ordinais, assim como, por exemplo, “um quarto”, “dois quintos”, etc.

Por outro lado, e isso é o mais grave, segundo os autores, os mesmos símbolos dos Números Naturais também são utilizados para as Frações, diferenciando-se apenas no traço na horizontal. A experiência que os alunos têm com os Números Naturais às levam à tendência de ver as Frações como um conjunto de dois números naturais separados por um traço. Como consequência, acabam utilizando seus conhecimentos de cálculo, regras e algoritmos com os Números Naturais para as Frações. Isso constitui o que alguns autores denominam de “efeito de distração dos Números Naturais” (LLINARES; SÁNCHEZ, 1988 p. 158).

Pesquisas como de Nunes e Bryant (1997), Merlini (2005), Moutinho (2005) e, Nunes, Campos, Magina e Bryant (2009), analisam o processo de estudo das Frações, tratando também das dificuldades que alunos apresentam com o conteúdo de Frações, mas neste trabalho será utilizada a pesquisa de Llinares e Sánchez (1988) para categorizar os erros típicos na aprendizagem de Frações, na qual os autores discutem a origem e sugerem soluções para tais erros.

- Exemplo 5: às vezes, diante de uma tarefa de Frações equivalentes, pode-se encontrar uma resposta, como na figura 31:

Figura 31 - Exemplo de tarefa.

$$\frac{2}{5} = \frac{8}{11} = \frac{14}{17}$$

Fonte: Llinares e Sánchez (1988).

Esse exemplo reflete uma situação em que a Fração é considerada como um par de números naturais que não estão relacionados entre si. A resposta está baseada no reconhecimento de um modelo aditivo em que os numeradores (somam seis) se estendem aos denominadores.

Llinares e Sánchez (1988) afirmam que algumas investigações têm mostrado, também, que os alunos apresentam problemas diante da transitividade do sinal de igual. Assim, Hart (1981 apud LLINARES E SÁNCHEZ, 1988) assinala que, diante de uma expressão do tipo $\frac{2}{3} = \frac{\square}{12} = \frac{14}{\square}$, os alunos têm maior dificuldade em calcular \square , já que uma vez calculado o valor 8, para o numerador da segunda Fração, comparam $\frac{8}{12}$ com $\frac{14}{\square}$, o que resulta mais difícil que fazer com $\frac{2}{3}$. E não utilizar $\frac{2}{3} = \frac{14}{\square}$ pode ser devido ao fato de que só se fixam na igualdade das últimas Frações. E isso o professor deve considerar ao planejar as atividades metodológicas.

- Exemplo 7: na simplificação de uma Fração, uma criança pode escrever conforme a figura 32.

Figura 32 - Exemplo de erro na simplificação de Frações.

$$\begin{array}{ccc} \frac{2}{6} = \frac{1}{3} & \frac{4}{6} = \frac{2}{3} & \frac{3}{6} = \frac{1}{3} \\ \frac{4}{9} = \frac{2}{3} & \frac{3}{9} = \frac{1}{3} & \end{array}$$

Fonte: Llinares e Sánchez (1988).

Para Llinares e Sánchez (1988), à primeira vista, parece que não existe uma lógica nesses resultados. Mas, fazendo uma análise mais detalhada, mostra que o aluno elaborou uma regra para simplificar Frações, associando a cada Número Natural outro mais simples, pelo qual se substitui. Na prática, dois passa a ser um, três também um, quatro torna-se dois, seis é três e nove é três.

- Exemplo 8: na figura 33, consideram-se alguns exemplos de erros.

Figura 33 - Exemplo de erro na adição de Frações.

$\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6}$	$\frac{1}{2} + \frac{3}{5} = \frac{4}{7}$
$\frac{6}{7} + \frac{1}{2} = \frac{7}{9}$	$\frac{4}{5} + \frac{2}{6} = \frac{6}{11}$

Fonte: Llinares e Sánchez (1988).

Essas respostas correspondem a um dos erros mais comuns na adição de Frações, que consiste na soma independente dos numeradores e denominadores. A subtração também apresenta erros análogos a esse. A origem do erro pode estar na similaridade de notações que existem entre as Frações e os Números Naturais (levando ao uso de procedimentos aditivos com os Naturais), pois a criança pode estar confundindo com o algoritmo da multiplicação e mesclando ambos.

- Exemplo 9: erros envolvendo subtração de Frações (figura 34).

Figura 34 - Exemplo de erro na subtração de Frações.

$5 \frac{1}{2} - 3 = 2 \frac{1}{2}$	$6 \frac{1}{5} - \frac{2}{5} = 6 \frac{1}{5}$
$3 \frac{1}{5} - 2 \frac{3}{5} = 1 \frac{2}{5}$	$6 - 3 \frac{1}{2} = 3 \frac{1}{2}$

Fonte: Llinares e Sánchez (1988).

Nessa situação, a criança considera separadamente os Números Naturais e as Frações. Não considera o número misto como um todo e os subtrai em separado, não considerando, no caso das Frações, se o minuendo é ou não maior que o subtraendo. Se há uma só Fração, simplesmente a coloca.

Nesse caso, segundo Llinares e Sánchez (1988), seria conveniente propor à criança que explicasse o porquê dos seus procedimentos. A partir de, suas respostas deve-se tentar deduzir se o que lhe falta são os requisitos básicos para abordar a tarefa (como a subtração dos Números Naturais) ou que a notação do número misto não está bem aprendida. Nesse último caso, o ideal seria fazer uma recapitulação de atividades para a introdução da notação dos números mistos.

- Exemplo 10: um erro bastante comum, como mostra a figura 35, é realizar a multiplicação do seguinte modo:

Figura 35 - Exemplo de erro na multiplicação de Frações.

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{4}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{12}{6} \quad \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{6}{10} \times \frac{5}{10} = \frac{30}{10}$$

$$\frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Fonte: Llinares e Sánchez (1988).

Como se observa, as Frações se reduzem a um denominador comum e logo se multiplica os numeradores. Estes erros provêm, em muitos casos, segundo os autores, de uma mescla do algoritmo da adição com o da multiplicação. Uma introdução precoce ao manejo dos algoritmos dá lugar a uma mescla de ambos, produzindo um procedimento de cálculo sem nenhum fundamento.

- Exemplo 11: na figura 36, há outro tipo de erro comum na multiplicação de Frações.

Figura 36 - Exemplo de erro na multiplicação de Frações.

$$\frac{1}{6} \times 1 = \frac{1}{6} \quad \frac{3}{4} \times 2 = \frac{6}{8} \quad \frac{2}{3} \times 3 = \frac{6}{9}$$

Fonte: Llinares e Sánchez (1988).

Provavelmente, a criança tenha aprendido que, para multiplicar Frações, tem que multiplicar os numeradores e os denominadores e resolve o caso em que um dos fatores é um Número Natural, utilizando como fator para ambos. Também pode ser que esteja utilizando o método que lhe foi ensinado para construir Frações equivalentes (multiplicar numerador e denominador por um mesmo número).

Isso indica que alguns alunos mantêm um conflito ante a ideia de que, para obter Frações equivalentes, multiplica-se por um “número” o numerador e o denominador da Fração, podendo vê-la ao mesmo tempo, como uma Fração múltipla da outra.

- Exemplo 12: na figura 37, há uma sequência típica de erro na divisão de Frações, conforme visto a seguir.

Figura 37 - Exemplo de erro na divisão de Frações.

$$\frac{4}{9} : \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \quad \frac{2}{6} = \frac{1}{6} = \frac{2}{1}$$

$$\frac{3}{5} : \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \quad \frac{5}{4} : \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \quad \frac{2}{6} : \frac{1}{3} = \frac{2}{2}$$

Fonte: Llinares e Sánchez (1988).

Segundo Llinares e Sánchez (1988), o procedimento que se está aplicando para obter os resultados consiste em dividir separadamente os numeradores e os denominadores, ignorando os possíveis restos obtidos, se a divisão não é exata. Esse erro tem sua origem em uma confusão com o algoritmo da multiplicação.

Por outro lado, convém notar que o procedimento dá o resultado correto com alguma frequência e que, portanto, sua utilização pode ser reforçada por exercícios. Pode ser conveniente provocar o conflito de situações que podem levar a resultados absurdos.

Para os autores, a “observação” e a indagação continuada das estratégias dos alunos constituem um instrumento muito valioso para efetuar uma tarefa de diagnóstico, proporcionando, entre outras coisas, um modo de discernir os alunos que utilizam um procedimento incorreto dos que têm erros conceituais. Isso deve ter, posteriormente, implicações na hora de realizar o processo de ensino.

2.3.1.2 Dificuldades no processo de estudos dos Números Decimais

Assim como as Frações, os Números Decimais também apresentam por parte dos alunos algumas dificuldades quanto a sua interpretação. Centeno (1988) destaca quatro situações onde os erros são mais recorrentes: erros relacionado a leitura e escrita, erros relacionado com o zero, erros relacionados com a ordem entre os decimais, e erros relacionados com as operações.

Os erros de leitura e escrita estão muitas vezes relacionado ao valor posicional, como Centeno (1988) ilustra nessas situações:

- qual dos números seguintes é 37 milésimos: 0,037; 0,37; 37 ou 37000? Segundo a autora, 88% dos alunos de 9 anos e 40% de 13 anos, respondem 37000, talvez fazem referência ao fato de que para haja milésimos tem que ter três zeros.
- também quando se pede para os alunos que contem em centésimos, é fácil obter a seguinte resposta: 14,08; 14,09; 15.
- Centeno cita um exercício proposto por Brown (1981), que pedia o seguinte:
 - Em um campo de futebol havia um dispositivo que contava as pessoas que iam entrando, em um momento indica:

0	6	3	9	9
---	---	---	---	---

Quanto marcará quando entrar mais uma pessoa?

Algumas das respostas erradas obtidas foram:

6	3	1	0	0	;	6	3	9	9	1	;	0	6	4	9	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

- em situações de cálculo mental podem surgir erros de compreensão, como quando se pede para calcular mentalmente 3104 menos 200. Os erros podem ser do tipo citado por Centeno (1988), onde o resultado apresentado por um aluno foi 3003, e justificou dizendo que *como não poderia diminuir dois centos de um, diminuiu o outro cento de quatro*.

- outro exemplo de dificuldade apresentada pelos estudantes, se seis décimos como decimal se escreve 0,6 como se escreve três centésimos? Algumas das respostas erradas que a autora cita por parte dos alunos são 0,300; 3,00; 3,0; 3,100; 00,3 e 0,3.

Segundo Centeno (1988), os alunos que cometem esses erros não compreenderam completamente o sistema de numeração decimal. E estes erros se repetem quando se trata da escrita de Números Decimais menores que a unidade. A base da escrita decimal é o sistema de numeração decimal, e não se pode esperar que os estudantes compreendam a escrita dos decimais menores que a unidade enquanto não está assegurado o domínio do sistema de numeração decimal para a escrita de Números Inteiros.

Em relação aos erros relacionado com o zero, a autora coloca que alguns alunos ignoram o zero e interpretam 0,036 como 36, perdendo a estrutura global do número e passa vê-lo como um Número Inteiro. Assim como considera que 1,27 é distinto de 1,270.

Situações onde os alunos costumam cometer erros relacionados com a ordem entre os Decimais são as seguintes:

- quando se propõe aos estudantes que ordenem do menor para o maior os seguintes números: 4,5; 4,15; 4,05. A resposta mais frequente segundo Centeno (1988) é $4,05 < 4,5 < 4,15$; e justificam dizendo que *o menor é o que tem um zero, e que 5 é menor que 15*. Os Números Decimais são interpretados como pares de inteiros, e ordenados por critérios que em alguns casos podem dar lugar a respostas corretas.

- outra situação, qual é o maior dos números 0,09; 0,385; 0,3 ou 0,1814? A resposta mais frequente segundo a autora é 0,1814.

- as dificuldades se apresentam também quando se tem que intercalar um Decimal entre outros dois. Como entre 1,23 e 1,24 muitos creem que entre os dois não há nenhum número, que 1,24 é o sucessor de 1,23.

Se nessas situação apresentadas ocorrem erros, nas operações não é diferente, e merecem uma atenção por parte dos professores em relação a forma que os alunos resolvem tais atividades, muitas vezes tratando somente como se fossem Números Inteiros. Centeno (1988) traz alguns exemplos:

a) $0,70 + 0,40 + 0,20 = 0,130$

b) $17,3 + 21,8 = 38,11$

c) Fazer o número 437,56 dez vezes maior, e ter como resposta 437,560

d) $3,15 \times 10 = 30,150$

Conforme Centeno (1988), os erros que aparecem de forma sistemática por parte do aluno em situações similares, podem revelar a existência de modelos que não aparecem isolados, estando relacionados com certa maneira de conhecer que permite detectar a resistência a evolução de um conceito, isto é, um obstáculo epistemológico.

Os comportamentos do aluno podem ser corretos, as vezes durante muito tempo, ainda que estejam sustentados por modelos falsos. Se o professor não conhece os modelos errôneos dos alunos – o que não há compreendido ou há compreendido mal – dificilmente poderá criar as condições necessárias para provocar o progresso e a reorganização das ideias³⁷ (CENTENO, 1988, p. 141).

Ainda segundo a autora, o professor deve criar situações que os alunos possam manifestar o significado que dão a o que dizem, escrevem o fazem a respeito de uma ideia matemática. E alguns outros aspectos devem ser considerados e servem de reflexão para o professor, como os que Centeno (1988) destaca:

- *Conhecimento insuficiente das regras de numeração:* é necessário dominar a escrita decimal para os números maiores que a unidade, antes de poder estender de forma compreensiva a escrita de números inferiores a 1.

- *Conhecimento suficiente dos Naturais, mas resistente a mudança de status:* neste caso, os alunos que interpretam corretamente as dezenas, centenas e unidade de milhares, mas não associam as escritas de décimo, centésimo, e etc., ao mesmo esquema. Trata-se de estender o mesmo modelo de representação (10 unidades fazem uma dezena é o mesmo que dez décimos fazem uma unidade), porém essas ideias simples são muito lentas em sua elaboração cognoscitiva. Não devemos estranhar esse processo, das ideias mais simples de não serem as primeiras a serem compreendidas, onde os alunos necessitem de mais tempo para amadurecê-las, já que esse processo teve uma longa *gênesis* histórica, e que somente no século XVI essas ideias envolvendo os Racionais começam a fazer parte do meio matemático.

- *A forma de apresentação dos Decimais aos alunos:* a origem de alguns erros podem estar na forma de introduzir os Decimais, por exemplo, se a situação em que há aparecido pela primeira vez o Número Decimal é para expressar o número de habitantes de um cidade, tomando como unida o milhar ou o milhão, o Número Decimal é percebido pelos alunos como

³⁷ Los comportamientos del alumno pueden ser correctos, a veces durante mucho tiempo, aunque estén sostenidos por modelos falsos. Si el maestro no conoce los modelos erróneos de los alumnos – lo que no han comprendido o han comprendido mal – difícilmente podrá crear las condiciones necesarias para provocar el progreso y la reorganización de las ideas.

uma justaposição dos Números Inteiros, separados por uma vírgula. O mesmo acontece quando se faz introdução utilizando a ideia de medida, por exemplo, $1,23 \text{ m} = 123 \text{ cm}$. Em ambos casos basta modificar a unidade para que desapareça a vírgula, que só havia servido para disfarçar um Número Inteiro.

Este tipo de apresentação acentua a ideia que todo Natural (que expressa uma medida) se pode associar um Número Decimal modificando adequadamente a unidade, e que todo Decimal se pode associar a um Natural. Mas deixa na sombra a diferença que existe entre a *topologia discreta* dos Naturais e a *topologia densa*, ainda que não continua, dos Decimais. Em resumo, todas as formas de introduzir os Números Decimais que não permitam sua aparição como um *número novo*, com algumas propriedades distintas dos Naturais, podem ocasionar obstáculos suplementares que se somam aos obstáculos epistemológicos associados ao conceito.

- *Teoremas implícitos que os alunos fabricam:* muitas vezes os alunos fabricam regras de ação os permite obter resultados corretos, e essas regras podem ser desconhecidos pelos professores se não desenvolvem situações em que a regra não serve e conduzem ao erro. Por exemplo, algumas regras implícitas sobre o modo de ordenar os Decimais, em que consideram o menor o que tem mais algarismo depois da vírgula. Esta regra que é falsa pode produzir bons resultados em alguns casos como $12,04 < 12,4$ mas fracassa na hora de ordenar $12,413$ e $12,4$. O que realmente importa é conhecer o significado que os estudantes dão as operações que fazem, e fazer as definições ou teoremas que fabricam se façam explícitos para poder aceitá-los se são válidos, ou rebatê-los caso contrário.

- *Aplicações a situações práticas, reais e mais ou menos familiares para os alunos:* outra causa de erros pode ser a ausência de situações significativas nas quais o aluno encontre os Números Decimais. Fora as medidas e valores monetários, não existem situações familiares aos estudantes que deem sentido a algumas das operações com Decimais. Provavelmente as situações que dão significado aos Decimais e a certas operações com eles sejam somente situações escolares, mas estas devem adaptar-se as operações.

Procuramos nesse subcapítulo realizar reflexões didáticas sobre o estudo dos Números Decimais, baseados nas pesquisas de Centeno (1988). Assim como nas Frações, o trabalho com os Números Decimais se apresentam como um desafio tanto aos professores na busca de metodologias de ensino, quanto aos alunos durante o processo de aprendizagem.

2.4 UM OLHAR SOBRE OS CONTEXTOS EDUCACIONAIS BRASILEIRO E MEXICANO

Os sistemas de educação pública do Brasil e do México possuem forma distinta, em relação à organização e à estrutura. Enquanto o brasileiro é colaborativo, entre a União, estados e municípios, no México, a organização é centralizada pelo governo federal em todas as instâncias. Além disso, ambos os países apresentam outras diferenças significativas, como a obrigatoriedade da educação, propostas educacionais e base comum de conteúdos.

No Brasil, a Lei de Diretrizes e Bases (LDB) nº 9.394/96, de dezembro de 1996, em conformidade com a Constituição Federal de 1988, rege as diretrizes e bases da educação. No seu Artigo 8º, estabelece que a União, os Estados, o Distrito Federal e os Municípios organizarão, em regime de colaboração, os respectivos sistemas de ensino.

Conforme a LDB (BRASIL, 1996) a Educação Básica tem por finalidades desenvolver o educando, assegurar-lhe a formação comum indispensável para o exercício da cidadania e fornecer-lhe meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores (Art. 22). Pode ser oferecida no ensino regular e nas modalidades de Educação de Jovens e Adultos (EJA), educação especial e educação profissional. Também é assegurada às comunidades indígenas a utilização de suas línguas maternas e processos próprios de aprendizagem e, nos quilombolas, o respeito à especificidade étnico-cultural de cada comunidade.

A estrutura do sistema educacional regular brasileiro consiste na Educação Básica (Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio) e na Educação Superior. Os municípios atuam na organização da Educação Infantil e Ensino Fundamental, os Estados e o Distrito Federal são responsáveis por assegurar o Ensino Fundamental, mas, prioritariamente, devem oferecer o Ensino Médio. A União exerce uma função redistributiva e supletiva na educação, devendo prestar assistência técnica e financeira aos estados, ao Distrito Federal e aos municípios, bem como organizar o sistema de Educação Superior no país.

A Emenda Constitucional nº 59, de novembro de 2009, alterou o inciso I do Art. 208 da Constituição Federal do Brasil, tornando a educação obrigatória e gratuita dos 4 (quatro) aos 17 (dezesete) anos de idade, assegurada, inclusive sua oferta gratuita para todos os que a ela não tiveram acesso na idade própria, devendo ser implementada progressivamente³⁸, nos termos do Plano Nacional de Educação (PNE), com apoio técnico e financeiro da União.

No México, a *Ley General de Educación* (LGE), publicada em 1993 e reformulada em 2013, regula a educação oferecida pela federação, estados, municípios e instituições com

³⁸ Conforme estabelecido pela Lei nº 12.796/2013, com previsão de vigorar em 2016.

autorização ou reconhecimento de validade oficial de estudos. O financiamento da educação pública e dos serviços educativos é de responsabilidade do Executivo Federal e do governo de cada entidade federativa.

A LGE (MÉXICO, 2013) estabelece três tipos de educação: Básica, Médio Superior e Superior. A educação do tipo Básica é composta pelos níveis Pré-escolar, Primário e Secundário. O tipo Médio Superior compreende o nível bacharelado, e se organiza em três modelos: geral, tecnológico e profissional técnico, os quais devem estar organizados através de sistemas que estabeleçam um referencial curricular comum em nível nacional, bem como a revalidação e reconhecimento de estudos entre as opções que oferecem esse tipo educativo.

Conforme a LGE (MÉXICO, 2013), compete, exclusivamente, à autoridade federal, entre outras atribuições: determinar para toda a República os planos e programas de estudos para a Educação Pré-escolar, Primário, Secundário, Normal e para a formação de professores da Educação Básica; estabelecer o calendário escolar aplicável em todo o país; elaborar e manter atualizados os livros didáticos gratuitos, mediante procedimentos que permitam a participação dos diversos setores da sociedade envolvidos na educação; autorizar o uso de livros didáticos para a Educação Pré-escolar, Primário, Secundário; emitir orientações gerais às escolas de Educação Básica, para formular os programas de gestão escolar, visando melhorar a infraestrutura, comprar materiais educativos, resolver problemas de operações básicas e propiciar condições de participação entre alunos, professores e pais, sob a liderança do diretor.

A educação concedida pelo Estado, no México, é gratuita, porém, são permitidos doações ou pagamento de cotas voluntárias, ficando a cargo das autoridades educativas o estabelecimento de mecanismos de regulação, destino, aplicação, transparência e vigilância das doações ou cotas voluntárias. Segundo a lei, de maneira alguma as doações ou cotas voluntárias serão entendidas como contraprestação do serviço público, sendo proibido o pagamento de qualquer contraprestação que impeça ou condicione a prestação do serviço educativo aos educandos. Na prática, é comum as instituições públicas de ensino arrecadarem cotas mensais, semestrais ou anuais, utilizadas para compra de materiais didáticos, ou mesmo para subsidiar o custo da logística de entrega dos livros didáticos. Essas cotas, geralmente, são gerenciadas pelo conselho de pais em conjunto com a direção da instituição.

A lei estabelece que todos os habitantes do México devem cursar a educação Pré-escolar, o Primário e o Secundário e, portanto, a cobertura deve ser universal, sendo obrigação dos mexicanos fazer com que seus filhos ou menores de idade sob sua responsabilidade cursem a Educação Pré-escolar, o Primário, o Secundário e o Médio Superior.

A Educação Básica, em seus três níveis, deverá ter adaptações requeridas, para responder às características linguísticas e culturais de cada um dos diversos grupos indígenas do país, assim como da população rural dispersa e grupos migratórios.

Na figura 38, apresentamos a estrutura do sistema de ensino da Educação Básica brasileira, de acordo com a idade dos estudantes e o equivalente no México.

Figura 38 - Estrutura do sistema de ensino mexicano e brasileiro por idade.

Brasil – Estrutura do Sistema de Ensino														
Pré-escolar		Ensino Fundamental									Ensino Médio			
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	
México – Estrutura do Sistema de Ensino														
Pré-escolar			Primário					Secundário			Médio Superior			
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17

Fonte: a pesquisa.

No Brasil, o Ensino Fundamental passou de 8 para 9 anos³⁹, dividido em Séries Iniciais (1º ao 5º ano) e Séries Finais (6º ao 9º ano). No sistema regular a Educação Infantil e as Séries Iniciais do Ensino Fundamental são atendidas por professores unidocentes. As Séries Finais e o Ensino Médio por professores com formação específica para cada disciplina do currículo. No México, o atendimento é semelhante: a Educação Pré-escolar e o Primário são atendidos por professores unidocentes e os demais níveis, por professores responsáveis por disciplinas. A exceção, no México, está na modalidade Telessecundária, oferecida a localidades rurais de alta dispersão geográfica, que são atendidas por professores unidocentes.

2.4.1 Organização e orientações educacionais nos currículos brasileiro e mexicano

Outro ponto de diferença entre os dois sistemas educativos é a forma como é proposto o currículo, apresentando característica descentralizada, no Brasil, e centralizadora no México. No Brasil, não há uma Base Nacional Comum⁴⁰, específica para os conteúdos a serem ensinados na Educação Básica. Nesse sentido, o governo brasileiro orienta sobre o que deve ser ensinado, ficando a cargo das escolas e dos professores os programas e planos de estudos. No México, o governo apresenta uma Base Nacional Comum, determinando os programas e planos de estudos a serem utilizados na rede pública de todo país.

No Brasil, segundo a LDB (BRASIL, 1996), a União se incumbirá de estabelecer, em colaboração com os Estados, o Distrito Federal e os Municípios, competências e diretrizes para

³⁹ Lei Federal nº 11.274 de fevereiro de 2006.

⁴⁰ A Base Nacional Comum de conteúdos está prevista na LDB 9394/96 e está em processo de discussão para a sua implementação.

a Educação Infantil, o Ensino Fundamental e o Ensino Médio, as quais nortearão os currículos e seus conteúdos mínimos, de modo a assegurar formação básica comum. Porém, a lei determina que fica a cargo dos estabelecimentos de ensino elaborar e executar sua proposta pedagógica, em conjunto com a comunidade escolar, devendo os docentes participarem da elaboração da proposta pedagógica do estabelecimento de ensino onde atuam, assim como da elaboração e cumprimento do plano de trabalho, segundo a proposta pedagógica do estabelecimento de ensino.

Como orientação para as propostas das escolas, o Ministério da Educação (MEC), no final da década de 90, elaborou os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), procurando respeitar as diversidades regionais, culturais e políticas existentes no país, considerando a necessidade de construir referências nacionais comuns ao processo educativo em todas as regiões brasileiras. Os PCN (BRASIL, 1997) têm como proposta nortear os objetivos da Educação Básica, deixando claro seu caráter flexível, como afirma o documento do MEC:

Por sua natureza aberta, configuram uma proposta flexível, a ser concretizada nas decisões regionais e locais sobre currículos e sobre programas de transformação da realidade educacional empreendidos pelas autoridades governamentais, pelas escolas e pelos professores. Não configuram, portanto, um modelo curricular homogêneo e impositivo, que se sobreporia à competência político-executiva dos Estados e Municípios, à diversidade sociocultural das diferentes regiões do País ou à autonomia de professores e equipes pedagógicas (BRASIL, 1997, p.13).

Dessa forma, os PCN assumem o caráter de orientação, não tendo o propósito de ser uma determinação, mas um referencial que auxilie nas práticas escolares. Segundo Pires (2015), o próprio termo *Parâmetros* foi criado para conciliar um grande embate entre duas correntes de opiniões, uma que acreditava ser importante definir um conteúdo mínimo nacional e outra que defendia a inequação de se ter diretrizes em um país com tanta diversidade cultural, política, econômica e social.

Já as Diretrizes Curriculares Nacionais para Educação Básica (DCNEB) (BRASIL, 2013) aprovadas pelo Conselho Nacional de Educação (CNE), que também tratam das ações da educação brasileira, têm força de lei, são obrigatórias, mas são genéricas quando tratam de Base Nacional Comum:

Art. 14. A base nacional comum na Educação Básica constitui-se de conhecimentos, saberes e valores produzidos culturalmente, expressos nas políticas públicas e gerados nas instituições produtoras do conhecimento científico e tecnológico, no mundo do trabalho, no desenvolvimento das linguagens, nas atividades desportivas e corporais, na produção artística, nas formas diversas de exercício da cidadania e nos movimentos sociais.

§ 1º Integram a base nacional comum nacional:

- a) a Língua Portuguesa;
- b) a Matemática;

- c) o conhecimento do mundo físico, natural, da realidade social e política, especialmente do Brasil, incluindo-se o estudo da História e das Culturas Afro-Brasileira e Indígena;
- d) a Arte, em suas diferentes formas de expressão, incluindo-se a música;
- e) a Educação Física;
- f) o Ensino Religioso.

§ 2º Tais componentes curriculares são organizados pelos sistemas educativos, em forma de áreas de conhecimento, disciplinas, eixos temáticos, preservando-se a especificidade dos diferentes campos do conhecimento, por meio dos quais se desenvolvem as habilidades indispensáveis ao exercício da cidadania, em ritmo compatível com as etapas do desenvolvimento integral do cidadão (BRASIL, 2013, p.67-68).

Dessa forma, sem orientações específicas, a decisão do que e de como ensinar recai sobre os municípios, escolas e professores, aos quais cabe decidir se querem ou não seguir as orientações dos PCN (LOUZANO, 2014).

Apesar da publicação das novas diretrizes para a educação, como a DCNEB (2013), a qual faz críticas aos PCN (BRASIL, 1997; 1998), a prática docente, as indicações recentes do governo federal e os guias dos livros didáticos ainda estão apoiadas nos PCN.

E é através dos Planos de Estudos das escolas que se traduzem essas indicações. Conforme o Conselho Estadual de Educação do Rio Grande do Sul (CEED - RS), os Planos de Estudos são considerados como uma parcela do currículo, constituindo-se num importante instrumento metodológico, sendo declarado como uma abordagem essencialmente pedagógica na organização dos componentes curriculares e atividades educativas.

A Resolução nº 243/99 do CEED - RS, afirma que os Planos de Estudos, enquanto expressão concreta do projeto pedagógico da escola, serão resultado de elaboração coletiva, envolvendo o corpo docente e discente, a comunidade na qual a escola se insere e a entidade mantenedora, constituindo-se a base para a elaboração do plano de trabalho de cada professor, de modo que seja preservada a integridade e a coerência do projeto pedagógico da escola.

Fazendo referência aos artigos 12 e 13 da LDB nº 9.394 que trata da incumbência dos estabelecimentos de ensino e dos docentes, o Parecer nº 323/99 do CEED - RS diz que:

O cotejo dessas prescrições leva ao estabelecimento de uma relação entre a proposta pedagógica – que é do estabelecimento – e o plano de trabalho – que é do professor. Assim como, obrigatoriamente, haverá um projeto pedagógico – do qual derivará o currículo –, assim, também, obrigatoriamente, haverá um plano de trabalho de cada professor – objetivando concretizar o currículo. Entre o projeto pedagógico e o plano de trabalho do professor se situa o Plano de Estudos, como elemento ordenador, do ponto de vista pedagógico, do currículo da escola.

O Plano de Estudos, para poder cumprir esse papel ordenador do currículo, deverá conter a tradução das Diretrizes Curriculares Nacionais em um conjunto de atividades e disciplinas, ordenadas quanto à sequência em que devem ser cursadas ou distribuídas no tempo e caracterizadas quanto aos seus objetivos, amplitude e profundidade (CEED - RS, 1999, p.25).

No México, o processo se dá de forma bem distinta, ficando a cargo da *Secretaría de Educación Pública* da *Administración Pública Federal* (SEP) determinar os planos e programas de estudos, os quais são aplicados e obrigatórios em todo país, na Educação Pré-escolar, Primária, Secundária, Educação Normal e demais níveis para formação de professores da Educação Básica. Para tal, conjuntamente com a SEP, também são consideradas as opiniões das autoridades locais e dos diversos setores sociais envolvidos na educação, os professores e os pais, expressas através do Conselho Nacional de Participação Social na Educação, assim como as sugestões formuladas pelo *Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación* (INEE).

Os planos e programas de estudos definem os conteúdos a serem desenvolvidos no meio escolar. Conforme a LGE (MÉXICO, 2013), os planos de estudos deverão estabelecer:

- a) os propósitos de formação geral e a aquisição de conhecimentos, habilidades, capacidades e destrezas que correspondam a cada nível educativo;
- b) os conteúdos organizados em disciplinas ou outras unidades de aprendizagem às quais, no mínimo, o educando deva habilitar-se para cumprir os propósitos de cada nível educativo;
- c) as sequências indispensáveis que devem ser respeitadas pelas disciplinas ou unidades de aprendizagem que constituem um nível educativo;
- d) os critérios e procedimentos de avaliação e habilitação, para verificar se o educando cumpre os propósitos de cada nível educativo.

Os programas de estudos deverão estabelecer os propósitos específicos de aprendizagem das disciplinas ou outras unidades de aprendizagem dentro de um plano de estudos, assim como os critérios para avaliar e habilitar seu cumprimento. Poderão incluir sugestões sobre métodos e atividades para alcançar tais propósitos.

A SEP realiza revisões e avaliações sistemáticas e contínuas dos planos e programas, buscando mantê-los permanentemente atualizados. E, no caso dos programas de educação normal e demais para formação de professores da Educação Básica, eles são revisados e avaliados, ao menos a cada quatro anos, para manterem-se atualizados, conforme os parâmetros e perfis a que se refere a *Ley General del Servicio Profesional Docente* (MÉXICO, 2013).

2.4.2 As indicações sobre o estudo da Matemática nas escolas brasileiras e mexicanas

As indicações sobre o ensino da Matemática, no Brasil, ainda não têm uma base comum específica de conteúdos, estando apoiadas, principalmente, nos PCN para o Ensino Fundamental (BRASIL, 1997; 1998) e para o Ensino Médio (BRASIL, 2000) e nas DCNEB

(BRASIL, 2013). Esses documentos servem como referência, como orientação, tanto na distribuição do conteúdo ao longo do sistema escolar, quanto das metodologias a serem utilizadas.

A Matemática no Ensino Fundamental brasileiro está organizada em cinco áreas: Números e Operações; Álgebra; Geometria; Grandezas e Medidas; Estatística e Probabilidade. No Brasil, o seu ensino tem como finalidade, segundo os PCN (BRASIL, 1997), a construção da cidadania, na medida em que a sociedade se utiliza, cada vez mais, de conhecimentos científicos e recursos tecnológicos, dos quais os cidadãos devem se apropriar. Para isso, a Matemática deve estar ao alcance de todos e a democratização do seu ensino deve ser meta prioritária do trabalho docente (BRASIL, 1997, p.19).

As orientações sobre o processo de estudo da Matemática (BRASIL 1997; 1998; 2013; 2014) conduzem ao desenvolvimento de um leque de competências cognitivas, propondo a participação ativa dos alunos na construção das mesmas. O ensino de Matemática por competências vem associado a princípios metodológicos, em que destaca o estabelecimento de diversos tipos de articulações, entre os quais, uma seria a articulação entre os diferentes campos de conteúdos, para que estes não sejam isolados em campos estanques e autossuficientes. Outra seria uma articulação entre vários enfoques na abordagem de um mesmo conteúdo, ou ainda, também importante, a articulação que devemos buscar estabelecer entre as diversas representações de um mesmo conteúdo (BRASIL, 2013b).

Segundo os PCN (BRASIL, 1997), é consensual a ideia de que não existe um caminho que possa ser identificado como único e melhor para o ensino de qualquer disciplina, em particular, da Matemática. No entanto, conhecer diversas possibilidades de trabalho, em sala de aula, é fundamental para que o professor construa sua prática. O ensino de Matemática prestará sua contribuição à medida que forem exploradas metodologias que priorizem a criação de estratégias, a comprovação, a justificativa, a argumentação, o espírito crítico e favoreçam a criatividade, o trabalho coletivo, a iniciativa pessoal e a autonomia advinda do desenvolvimento da confiança na própria capacidade de conhecer e enfrentar desafios (BRASIL, 1997).

No México, os referenciais são o *Acuerdo Número 592: por el que se establece la articulación de la Educación Básica* (MÉXICO, 2011a)⁴¹ e os *Programas de Estudio 2011: Guía para el Maestro de Educación Básica* (MÉXICO, 2011b)⁴² elaborados pela SEP em virtude da *Reforma Integral de la Educación Básica* (RIEB). Tais documentos orientam as competências para a vida, o perfil do egresso, os *Estándares Curriculares* e as aprendizagens

⁴¹ Vamos nos referir a esse documento como *Acuerdo Número 592*.

⁴² Vamos nos referir a esse documento como *Programas de Estudio 2011*.

esperadas que constituem o trajeto formativo dos estudantes. Por sua dimensão nacional (base comum nacional), procuram orientar para uma formação que favoreça a construção de uma identidade pessoal e nacional dos alunos e contribuir para a formação de um cidadão democrático, crítico e criativo para a sociedade mexicana. Os conteúdos de Matemática estão divididos, na Educação Básica, em quatro eixos temáticos: Sentido Numérico e Pensamento Algébrico; Forma, Espaço e Medida; Manuseio da Informação; Atitudes para os estudos da Matemática.

Os *Programas de Estudio 2011* (MÉXICO, 2011b) propõem que as aprendizagens esperadas graduem, progressivamente, os conhecimentos, as habilidades, as atitudes e os valores que os alunos devem alcançar para ascender em conhecimentos, cada vez mais complexos, exigidos pelos *Estándares Curriculares* e para o desenvolvimento das competências exigidas. Esperam, dessa maneira, prover os estudantes das ferramentas necessárias para a aplicação eficiente de todas as formas de conhecimento adquirido, com a intenção de que respondam às demandas atuais e em diferentes contextos.

Refletindo acerca das propostas educacionais desses países, é perceptível a influência de organizações como a OCDE. Ambos vêm, nos últimos anos, buscando, através de iniciativas públicas, melhorar a qualidade da educação, tendo como referência os resultados alcançados no PISA. Essa preocupação influencia as questões didáticas e metodológicas, como o ensino pautado em competências.

Os dois países vêm apresentando, nos últimos anos, melhora nos resultados da avaliação do PISA. Em relação a proficiência em Matemática, o México ocupa o segundo lugar dos países avaliados na América Latina e o Brasil é o país que teve o maior avanço absoluto, quando feita a comparação entre os dois últimos exames nessa área do conhecimento (2003 e 2012), sendo a nação com a terceira maior evolução no desempenho global do exame até 2009.

2.4.3 As indicações brasileiras e mexicanas acerca do processo de estudo dos Números Racionais

No currículo escolar, desde os anos iniciais, estudam-se os Números Naturais, abordando o sistema de numeração decimal e as quatro operações. Depois disso os alunos passam a se familiarizar com o conjunto dos Números Racionais. Os Números Racionais passam a ser utilizadas em situações onde os Números Naturais não dão conta de representar a realidade, como, por exemplo, quando se fazem medições e sobra uma parte que não corresponde a uma unidade de medida inteira ou ao comprar meio quilo de um mantimento.

Para Broitman (2009), assim conhecer o funcionamento e as regras dessa classe numérica é fundamental para que o aluno aprofunde os conhecimentos durante a vida escolar.

2.4.3.1 Os Números Racionais no currículo da Educação Básica no México

Os *Programas de Estudio 2011* (MÉXICO, 2011b), são os documentos que orientam as competências as competências para a vida, o perfil do egresso, os *Estándares Curriculares* e as aprendizagens esperadas que constituem o trajeto formativo dos estudantes. Por sua dimensão nacional, procura orientar para uma formação que favoreça a construção de uma identidade pessoal e nacional dos alunos, e a contribuir para a formação de um cidadão democrático, crítico e criativo para a sociedade mexicana.

Os *Programas de Estudios 2011* (MÉXICO, 2011b), procura pôr ênfase no desenvolvimento de *competências*, nos *Estándares Curriculares* objetivados e nas *aprendizagens esperadas* ao longo da Educação Básica, porque:

- Uma *competência* é a capacidade de responder a diferentes situações, e implica um saber fazer (habilidades) com saber (conhecimento), assim como a valorização das consequências desse fazer (valores e atitudes).

- Os *Estándares Curriculares* são descritores de objetivos e expressam aquilo que os alunos deverão saber e ser capazes de fazer ao concluir um período escolar. Sintetizam as aprendizagens esperadas que nos programas de educação primária e secundária, se organizam por disciplina-grau-bloco⁴³, e na educação pré-escolar por campo formativo-aspecto. Os *Estándares Curriculares* são equiparáveis com os padrões internacionais e, em conjunto com as aprendizagens esperadas, constituem referentes para avaliações nacionais e internacionais que sirvam para conhecer o avanço dos estudantes durante seu trânsito pela Educação Básica, assumindo a complexidade e gradualidade das aprendizagens.

- As *aprendizagens esperadas* são indicadores objetivos que, em condições da temporalidade estabelecida nos programas de estudos, definem o que se espera de cada aluno em relação de saber, saber fazer e saber ser. Também dão concretude ao trabalho docente ao fazer constatável o que os estudantes alcançam, e constitui num referente para a planificação e avaliação em aula.

A proposta é que as aprendizagens esperadas graduem progressivamente os conhecimentos, as habilidades, as atitudes e os valores que os alunos devem alcançar para

⁴³ Asignatura-grado-bloque.

aceder a conhecimentos cada vez mais complexos, ao resultado dos *Estándares Curriculares* e ao desenvolvimento de competências (MÉXICO, 2011a).

Espera-se dessa maneira prover os estudantes de ferramentas necessárias para a aplicação eficiente de todas as formas de conhecimento adquiridos, com a intenção de que respondam as demandas atuais e em diferentes contextos.

Para isso o currículo da Educação Básica está organizado em quatro campos de formação: Linguagem e Comunicação, Pensamento Matemático, Exploração e Compreensão do Mundo Natural e Social, e Desenvolvimento Pessoal e para Convivência. A figura 39 apresenta o mapa curricular da Educação Básica, onde se permite visualizar de forma gráfica a articulação curricular.

Figura 39 - Mapa Curricular da Educação Básica

ESTÁNDARES CURRICULARES ¹	1º PERIODO ESCOLAR			2º PERIODO ESCOLAR			3º PERIODO ESCOLAR			4º PERIODO ESCOLAR								
	Preescolar			Primaria									Secundaria					
	1º	2º	3º	1º	2º	3º	4º	5º	6º	1º	2º	3º						
CAMPOS DE FORMACIÓN PARA LA EDUCACIÓN BÁSICA	Lenguaje y comunicación			Español									Español I, II y III					
	Segunda Lengua: Inglés ²		Segunda Lengua: Inglés ²									Segunda Lengua: Inglés I, II y III ²						
	Pensamiento matemático			Matemáticas									Matemáticas I, II y III					
	Exploración y conocimiento del mundo			Exploración de la Naturaleza y la Sociedad			Ciencias Naturales ³			Ciencias I (énfasis en Biología)			Ciencias II (énfasis en Física)			Ciencias III (énfasis en Química)		
	Desarrollo físico y salud			La Entidad donde Vivo			Geografía ³			Tecnología I, II y III			Geografía de México y del Mundo			Historia I y II		
EXPLORACIÓN Y COMPRESIÓN DEL MUNDO NATURAL Y SOCIAL	Desarrollo personal y social			Formación Cívica y Ética ⁴									Asignatura Estatal			Formación Cívica y Ética I y II		
	Expresión y apreciación artísticas			Educación Física ⁴									Educación Física I, II y III			Artes I, II y III (Música, Danza, Teatro o Artes Visuales)		
				Educación Artística ⁴														
DESARROLLO PERSONAL Y PARA LA CONVIVENCIA																		

Fonte: Acuerdo Número 592 (MÉXICO, 2011a).

Na tabela 3 apresentamos a carga horária da disciplina de Matemática nos níveis Primário e Secundário da Educação Básica.

Tabela 3 - Carga horária da disciplina de Matemática.

Grau(s)	Regime	Horas semanais	Horas anuais
Primeiro e segundo do Primário	Tempo completo	9	360
Terceiro do Primário	Tempo completo	7,5	300
Quarto, quinto e sexto do Primário	Tempo completo	7	280
Todos na Secundária	Tempo completo	7	280
Todos na Secundária Técnica	Tempo completo	6	240

Primeiro e segundo do Primário	Jornada ampliada ⁴⁴	7	280
Terceiro do Primário	Jornada ampliada	6	240
Quarto, quinto e sexto do Primário	Jornada ampliada	6	240
Todos na Secundária	Jornada completa	7	280
Primeiro e segundo do Primário	Meio tempo	6	240
Terceiro do Primário	Meio tempo	5	200
Quarto, quinto e sexto do Primário	Meio tempo	5	200
Todos na Secundária	Meio tempo	5	200

Fonte: *Acuerdo 592* (MÉXICO, 2011a).

Os *Estándares Curriculares* estão organizados em quatro períodos escolares de três graus cada um, segundo os *Programas de Estudios 2011* (MÉXICO, 2011b), estes cortes correspondem de maneira aproximada a certas características chave do desenvolvimento cognitivo dos estudantes. Os *Estándares* também são o referente para o projeto de instrumentos que, de maneira externa, avaliem os alunos. Na figura 40, apresenta a divisão de períodos e graus dos *Estándares*.

Figura 40 - Divisão dos períodos e graus dos *Modelos Curriculares*

<i>Estándares Curriculares</i>		
Período escolar	Grau escolar de finalização	Idade aproximada
Primeiro	Terceiro grau Pré-escolar	Entre 5 e 6 anos
Segundo	Terceiro grau do Primário	Entre 8 e 9 anos
Terceiro	Sexto grau do Primário	Entre 11 e 12 anos
Quarto	Terceiro grau do Secundário	Entre 14 e 15 anos

Fonte: *Programas de Estudios 2011* (MÉXICO, 2011b).

Tratando especificamente do campo de formação Pensamento Matemático, este busca articular e organizar o trânsito da aritmética à geometria, e da interpretação de informações e processos de mediação à linguagem algébrica; do raciocínio intuitivo ao dedutivo, e da busca de informação aos recursos que se utilizam para apresentá-los.

A ênfase deste campo se localiza com base na solução de problemas, na formulação de argumentos para explicar seus resultados e na formulação de estratégias e seus processos para tomada de decisões. Resumindo, trata-se de passar da aplicação mecânica de um algoritmo a representação algébrica (MÉXICO, 2011a).

Ao longo da Educação Básica se busca que os alunos sejam capazes de construir novos conhecimentos a partir de seus saberes prévios, o que implica:

- formular e validar conjecturas;
- construir novas perguntas;
- comunicar, analisar e interpretar procedimentos e resultados;

⁴⁴ A SEP colocou em prática um programa de ampliação da jornada escolar com um esquema próprio do Distrito Federal: as Escolas de Jornada Ampliada. Nessas se somam 400 horas à jornada regular, perfazendo um total de 1200 horas anuais destinadas à aprendizagem.

- buscar argumentos para validar procedimentos e resultados;
- encontrar diferentes formas de resolver os problemas;
- manejar técnicas de maneira eficiente.

Ao assumir a prova PISA como um consenso mundial utilizou-se desta como um referencial na elaboração dos *Estándares Curriculares* como um todo, apoiado nos três campos: a leitura como habilidade superior, o pensamento abstrato como base do pensamento complexo e o conhecimento objetivo do entorno como sustento da interpretação da realidade científica e social. Para assim, até 2021, estabelecer um currículo que permita atingir as competências do nível 3 do PISA, eliminando as deficiências de que está abaixo deste nível. Em Matemática, o nível de desempenho 3 trata:

- realizar procedimentos descritos de forma clara, incluindo aqueles que requerem decisões;
- selecionar e aplicar estratégias de solução de problemas simples;
- interpretar e utilizar representações baseadas em diferentes fontes de informação;
- elaborar escritos breves expondo suas interpretações, resultados e raciocínios.

Desta forma então os *Estándares Curriculares* de Matemática compreendem o conjunto de aprendizagens que se espera dos alunos, nos quatro períodos escolares, para conduzi-los a altos níveis de alfabetização matemática. E estão organizados em:

1. sentido numérico e pensamento algébrico;
2. forma, espaço e medida;
3. manuseio da informação;
4. atitudes para o estudos da Matemática.

E sua progressão deve entender-se como:

- transitar da linguagem cotidiana a uma linguagem matemática para explicar procedimentos e resultados;
- ampliar e aprofundar os conhecimentos, de maneira que se favoreça a compreensão e o uso eficiente de ferramentas matemáticas;
- avançar desde o requerimento de ajuda ao resolver problemas até o trabalho autônomo.

Apresentamos agora as orientações dos *Estándares Curriculares* em relação ao conteúdo de Números Racionais, e as primeiras ideias que tratam de frações e, posteriormente, dos números decimais, propostos para cada grau da Educação Básica. No primeiro período

escolar, que compreende os três anos da pré-escola, não apresentam conteúdos relacionados às frações e aos decimais, então apresentaremos a partir do segundo período escolar.

- **Segundo período escolar:** ao final do terceiro grau do primário, os estudantes deverão saber resolver problemas aditivos com diferente estrutura, utilizar os algoritmos convencionais, assim como problemas multiplicativos simples. Também deverão calcular e interpretar medidas de longitude e tempo, e identificar características particulares de figuras geométricas, e ler informações em pictogramas e gráficos de barras.

As frações estão incluídas no eixo Sentido Numérico e Pensamento Algébrico, e estes estão subdivididos em: Números e Sistema de Numeração, Problemas Aditivos e Problemas Multiplicativos. Na figura 41 apresentamos a organização das propostas para as frações nesse período escolar.

Figura 41 - Quadro com os conteúdos a serem desenvolvidos no Segundo Período Escolar envolvendo os Números Racionais.

Grau	Bloco	Conteúdos a desenvolver	Aprendizagem esperada
3º Grau	III	- Uso de frações do tipo $\frac{m}{2n}$ (meios, quartos, oitavos, etc.) para expressar oralmente e por escrito medidas diversas. - Uso de frações do tipo $\frac{m}{2n}$ (meios, quartos, oitavos, etc.) para expressar oralmente e por escrito resultado de divisão.	- Se espera que os estudantes resolvam problemas de divisão em que o resultado é uma fração da forma $\frac{m}{2n}$.
	IV	- Identificação de escritas equivalentes (aditivas, mistas) com frações. Comparação de frações em casos simples (com igual numerador ou igual denominador).	- Identificar e comparar frações simples.
	V	- Elaboração e interpretação de representações gráficas das frações. Reflexões sobre a unidade de referência. - Resolução de problemas simples de soma e subtração de frações (meios, quartos, oitavos).	- Resolver problemas simples envolvendo adição e subtração de frações.

Fonte: adaptado de *Acuerdo 592* (MÉXICO, 2011a).

- **Terceiro período escolar:** ao término desse período, os estudantes deverão saber comunicar e interpretar quantidades com números naturais, *Fracionários* ou decimais, assim como resolver problemas aditivos e multiplicativos mediante os algoritmos convencionais. Calcular perímetros e áreas, e saber descrever e construir figuras e corpos geométricos. Utilizar sistemas de referência para localizar pontos no plano ou interpretar mapas. E realizar processos de recopilação, organização, análise e apresentação de dados.

Quanto aos conteúdos de frações e decimais, objetivam-se nesse período que os estudantes consigam:

- ler, escrever e comparar números naturais, *Fracionários* e decimais;

- resolver problemas aditivos com números *Fracionários* ou decimais, usando os algoritmos convencionais;
- resolver problemas que implicam multiplicar ou dividir números *Fracionários* ou decimais entre números naturais, utilizando os algoritmos convencionais.

Na figura 42 apresentamos os conteúdos a serem desenvolvidos com as frações e os decimais nesse período escolar.

Figura 42 - Quadro com os conteúdos a serem desenvolvidos no Terceiro Período Escolar envolvendo os Números Racionais.

Grau	Bloco	Conteúdos a desenvolver	Aprendizagem esperada
4º Grau	I	<ul style="list-style-type: none"> – Notação desenvolvida de números naturais e decimais. Valor posicional dos algarismos de um número. – Resolução de problemas que impliquem em partições em terços, quintos e sextos. Análises de escrituras aditivas equivalentes e de frações maiores ou menores que a unidades. 	<ul style="list-style-type: none"> – Identificar frações equivalentes, maiores ou menores que a unidade.
	II	<ul style="list-style-type: none"> – Representações de frações de magnitudes contínuas (longitudes, superfícies de figuras). Identificação da unidade, dada uma fração da mesma. – Uso do cálculo mental para resolver somas ou subtrações com <i>Números Decimais</i>. 	<ul style="list-style-type: none"> – Identificar frações de magnitudes contínuas ou determinar que frações de uma magnitude é uma parte dada.
	III	<ul style="list-style-type: none"> – Decomposição números naturais e decimais em expressões aditivas, multiplicativas ou mistas. – Identificação frações equivalentes ao resolver problemas de divisão e medição. – Resolução, com procedimentos informais, de soma ou subtração de frações com diferente denominador em casos simples (meios, quartos, terços, etc.). 	<ul style="list-style-type: none"> – Identificar expressões aditivas, multiplicativas ou mistas. – Identificar problemas que se podem resolver com uma multiplicação e utiliza o algoritmo convencional nos casos em que seja necessário.
	IV	<ul style="list-style-type: none"> – Uso das frações para expressar partes de uma coleção. Cálculo do total conhecendo uma parte. – Resolução de somas ou subtrações de <i>Números Decimais</i> em diversos contextos. 	<ul style="list-style-type: none"> – Resolver problemas que impliquem somar ou subtrair <i>Números Decimais</i>.
	V	<ul style="list-style-type: none"> – Obtenção frações equivalentes com base na ideia de multiplicar ou dividir ao numerador e ao denominador por um mesmo número natural. – Expressão equivalentes e cálculos de dobro, metade, quadruplo, triplo, etc. das frações mais usuais ($1/2$, $1/3$, $2/3$, $3/4$, etc.). 	<ul style="list-style-type: none"> – Identificar e gerar frações equivalentes.
5º Grau	I	<ul style="list-style-type: none"> – Resolução de problemas que implique somar ou subtrair frações cujos denominadores são múltiplos um do outro. 	<ul style="list-style-type: none"> – Resolver problemas que impliquem somar ou subtrair frações com denominadores múltiplos.

	II	<ul style="list-style-type: none"> – Conhecimento de diversas representações de um número fracionário: com algarismos, mediante a reta numérica, com superfícies, etc. Analisar as relações entre a fração e o todo. – Análise do significado da parte decimal em medidas de uso comum, por exemplo, 2,3 metros, 2,3 horas. – Resolução de problemas que impliquem uma divisão de números naturais com quociente decimal. 	<ul style="list-style-type: none"> – Conhecer e analisar o significado de representações de números <i>Fracionários</i> e decimais. – Resolver problemas de divisão com quociente decimal.
	III	<ul style="list-style-type: none"> – Comparação de frações com distinto denominador, mediante diversos recursos. – Uso do cálculo mental para resolver adições e subtrações com número fracionário e decimal. 	<ul style="list-style-type: none"> – Utilizar diferentes recursos na comparação de frações. – Calcular mentalmente problemas envolvendo cálculos simples de frações e decimais.
	IV	<ul style="list-style-type: none"> – Identificação de regularidade em sucessores com números (incluindo números <i>Fracionários</i>) que tenham progressão aritmética, para encontrar termos faltantes ou continuar a sucessão. – Resolução de problemas que impliquem soma ou subtração de frações comuns com denominadores diferentes. 	<ul style="list-style-type: none"> – Resolver problemas que impliquem somar ou subtrair números <i>Fracionários</i> com denominador igual ou diferente. – Resolver problemas que impliquem identificar a regularidade de sucessores com progressão aritmética.
	V	<ul style="list-style-type: none"> – Uso da expressão n/m para representar o quociente de uma medida inteira (n) entre o número natural (m): 2 pastéis entre 3; 5 metros entre 4; etc. – Resolução de problemas que impliquem multiplicação de <i>Números Decimais</i> por números naturais, com o apoio da soma iterada. – Relação de tanto por cento com a expressão ‘n de cada 100’. Relação de 50%, 25%, 10% com as frações $1/2$, $1/4$, $1/5$, $1/10$, respectivamente. 	<ul style="list-style-type: none"> – Usar frações para expressar quocientes de divisões entre dois números naturais. – Resolver problemas que impliquem multiplicar <i>Números Decimais</i> por números naturais.
6º Grau	I	<ul style="list-style-type: none"> – Leitura, escrita e comparação de números naturais, <i>Fracionários</i> e decimais. Explicitação dos critérios de comparação. – Resolução de problemas aditivos com números naturais, decimais e <i>Fracionários</i>, variando a estrutura dos problemas. Estudo ou reafirmação dos algoritmos convencionais. – Resolução de problemas multiplicativos com valores <i>Fracionários</i> ou decimais mediante procedimento não formais. – Cálculo de tanto por cento de quantidades mediante diversos procedimentos (aplicação de correspondência ‘por cada 100, n’, aplicação de uma fração comum ou decimal, uso de 10% como base). 	<ul style="list-style-type: none"> – Resolver problemas que impliquem ler, escrever e comparar números naturais, <i>Fracionários</i> e decimais, explicitando os critérios de comparação. – Resolver problemas aditivos com números naturais, decimais e <i>Fracionários</i> que impliquem dois ou mais transformações.

	II	<ul style="list-style-type: none"> – Localização de frações e decimais na reta numérica em situações diversas. Por exemplo, se quer representar meio e a unidade está dividida em sextos, a unidade não está estabelecida, etc. – Resolução, mediante diferentes procedimentos, de problemas que impliquem a noção de porcentagem: aplicação de porcentagem, determinação, em casos simples, de porcentagem que representa uma quantidade (10%, 20%, 50%, 75%); aplicação de porcentagens maiores que 100%. 	<ul style="list-style-type: none"> – Calcular porcentagens e identificar distintas formas de representações (fração comum, decimal, %).
	III	<ul style="list-style-type: none"> – Identificação de uma fração ou um decimal entre duas frações ou decimais dados. Aproximação a propriedade de densidade dos <i>Racionais</i>, em contraste com os números naturais. – Comparação de razões em casos simples. 	<ul style="list-style-type: none"> – Localizar frações e decimais em situações propostas. – Resolver problemas simples de razão.
	IV	<ul style="list-style-type: none"> – Conversão de frações decimais a escrita decimal e vice-versa. Aproximação de algumas frações não decimais usando a notação decimal. – Identificação e aplicação de regularidade de sucessões com números (naturais, <i>Fracionários</i> ou decimais) que tenham progressão aritmética ou geométrica, assim como sucessões especiais. Construção de sucessores a partir da regularidade. – Resolução de problemas que impliquem calcular uma fração de um número natural, usando a expressão ‘a/b de n’. – Resolução de problemas de comparação de razões, com base na equivalência. – Comparação de razões do tipo ‘em cada n, m’, mediante diversos procedimentos e, em casos simples, expressão de valor da razão mediante um número de vezes, uma fração ou porcentagem. 	<ul style="list-style-type: none"> – Realizar operações de conversão de frações decimais em escrita decimal ou vice-versa. – Resolver problemas que impliquem identificar a regularidade de sucessões com progressão geométrica ou especial.
	V	<ul style="list-style-type: none"> – Resolução de problemas que impliquem uma divisão de número fracionário ou decimal entre um número natural. – Resolução de problemas de comparação de razões, com base na equivalência. 	<ul style="list-style-type: none"> – Resolver problemas que impliquem multiplicar ou dividir números <i>Fracionários</i> ou decimais com números naturais. – Resolver problemas que impliquem comparar duas ou mais razões.

Fonte: adaptado de *Acuerdo 592* (MÉXICO, 2011a).

• **Quarto período escolar:** espera-se que ao término do secundário, os estudantes saibam efetuar cálculos com expressões algébricas cujos coeficientes sejam Números Racionais; formulem equações ou funções para resolver problemas; calculem volumes e

resolvam problemas geométricos com apoio das propriedades das figuras e dos corpos; calculem porcentagens e probabilidades de eventos simples ou compostos, e comuniquem e interpretem informação mediante o uso de diferentes gráficos.

O estudo dos Números Racionais na Educação Secundária vai proporcionar ao aluno retomar e aprofundar os conhecimentos com a representação dos *Racionais*. Nessa fase é importante incentivar o aluno a transitar de uma linguagem cotidiana a uma linguagem matemática para explicar procedimentos e resultados, ampliando e aprofundando os conhecimentos, de maneira que se favoreçam a compreensão e o uso eficiente das ferramentas matemáticas. Na figura 43 apresentamos os conteúdos e as aprendizagens esperadas em relação aos *Racionais* no nível Secundário.

Figura 43 - Quadro com os conteúdos a serem desenvolvidos no Quarto Período Escolar envolvendo os Números Racionais.

Grau	Bloco	Conteúdos a desenvolver	Aprendizagem esperada
1º Grau	I	<ul style="list-style-type: none"> – Conversão de frações decimais e não decimais a sua escrita decimal e vice-versa. – Representação de números <i>Fracionários</i> e decimais na reta numérica a partir de distintas informações, analisando as convenções desta representação. – Resolução e planejamento de problemas que impliquem mais de uma operação de soma ou subtração de frações. – Resolução de problemas de divisão proporcional. 	<ul style="list-style-type: none"> – Converter números <i>Fracionários</i> a decimais e vice-versa. – Conhecer e utilizar as convenções para representar números <i>Fracionários</i> e decimais na reta numérica. – Representar sucessões de números ou de figuras a partir de um regra dada e vice-versa.
	II	<ul style="list-style-type: none"> – Resolução de problemas aditivos em que se combinam números <i>Fracionários</i> e decimais em distintos contextos, empregando os algoritmos convencionais. – Resolução de problemas que impliquem a multiplicação e divisão com números <i>Fracionários</i> em distintos contextos, utilizando os algoritmos usuais. 	<ul style="list-style-type: none"> – Resolver problemas envolvendo as quatro operações.
	III	<ul style="list-style-type: none"> – Resolução de problemas que impliquem a multiplicação de <i>Números Decimais</i> em distintos contextos, utilizando o algoritmo convencional. – Resolução de problemas que impliquem a divisão de <i>Números Decimais</i> em distintos contextos, utilizando o algoritmo convencional. – Formulação de explicações sobre o efeito da aplicação sucessiva de fatores constante de proporcionalidade em situações dadas. 	<ul style="list-style-type: none"> – Resolver problema que impliquem efetua multiplicação ou divisão com frações e <i>Números Decimais</i>.

	IV	<ul style="list-style-type: none"> – Planejamento e resolução de problemas que impliquem a utilização de números inteiros, <i>Fracionários</i> ou decimais positivos e negativos. – Análise da regra de três, empregando valores inteiros ou <i>Fracionários</i>. – Análise dos efeitos do fator inverso em uma relação de proporcionalidade, em particular em uma reprodução a escala. 	<ul style="list-style-type: none"> – Resolver problemas que impliquem o uso de números inteiros, <i>Fracionários</i> ou decimais positivos ou negativos.
	V	<ul style="list-style-type: none"> – Uso da notação científica para realizar cálculos em que intervenham quantidades muito grandes ou muito pequenas. – Resolução de problemas que impliquem o cálculo da raiz quadrada (diferentes métodos) e a potência de expoente natural de números naturais e decimais. – Resolução de problemas de proporcionalidade múltiplas. 	<ul style="list-style-type: none"> – Resolver problemas aditivos que impliquem o uso de números inteiros, <i>Fracionários</i> ou decimais positivos e negativos. – Resolver problemas que impliquem o cálculo da raiz quadrada e potências de números naturais e decimais. – Resolver problemas de proporcionalidade direta do tipo ‘valor faltante’, em que a razão interna é um número fracionário.
2º Grau	I	<ul style="list-style-type: none"> – Resolução de problemas diversos relacionados com a porcentagem, como aplicar um porcentagem a uma quantidade; determinar que porcentagem representa um quantidade a respeito à outra, e obter uma quantidade conhecendo uma parte dela e porcentagem que representa. 	<ul style="list-style-type: none"> – Resolver problemas que impliquem o cálculo de porcentagens ou de qualquer termo da relação: – Porcentagem = quantidade base x taxa – Inclusive problemas que requeiram de procedimentos recursivos.
	II	<ul style="list-style-type: none"> – Identificação e resolução de situações de proporcionalidade inversa mediante diversos procedimentos. – Realização de experimento aleatórios e registro de resultados para uma aproximação a probabilidade frequência. Relação desta com a probabilidade teórica. 	<ul style="list-style-type: none"> – Resolução de problemas envolvendo proporcionalidade e probabilidade.
	III	<ul style="list-style-type: none"> – Resolução de cálculos numéricos que impliquem usar a hierarquia das operações e parênteses, se necessário, em problemas e cálculos com números inteiros, decimais e <i>Fracionários</i>. – Representação algébrica e análise de uma relação de proporcionalidade: – $y = kx$, associando os significados das variáveis com as quantidades que intervêm nessa relação. 	<ul style="list-style-type: none"> – Resolução de cálculos envolvendo os números inteiros, decimais e <i>Fracionários</i>. – Representação algébrica e análise da proporcionalidade.
	IV	<ul style="list-style-type: none"> – Resolução de problemas que impliquem o planejamento e a resolução de equações de primeiro grau da forma $ax + b = cx + d$ e com 	<ul style="list-style-type: none"> – Resolver problemas que impliquem o uso de equações da forma:

		parênteses em um ou ambos membros da equação, utilizando coeficientes inteiros, <i>Fracionários</i> ou decimais, positivos e negativos. – Análise das características de uma gráfica que represente uma relação de proporcionalidade no plano cartesiano.	– $ax + b = cx + d$, onde os coeficientes são números inteiros, <i>Fracionários</i> ou decimais, positivos e negativos. – Identificar, interpretar e expressar relações de proporcionalidade direta ou inversa, algebricamente ou mediante tabelas e gráficos.
3º Grau	I	– Análise de representações (gráficas, tabulares e algébricas) que correspondem a uma mesma situação. Identificação das que correspondem a uma relação de proporcionalidade.	– Analisar representações em diferentes formas, identificando as relações de proporcionalidade.
	II	– Cálculo da probabilidade de ocorrência de dois eventos mutuamente excludentes e de eventos complementares (regra da soma).	– Resolver problemas envolvendo a proporcionalidade utilizando a regra da soma.
	III	– Cálculo da probabilidade de ocorrência de dois eventos independentes (regra do produto).	– Resolver problemas envolvendo a proporcionalidade utilizando a regra da soma.

Fonte: adaptado de *Acuerdo 592* (MÉXICO, 2011a).

Procuramos apresentar uma relação dos conteúdos que envolvem as frações e *Números Decimais*, com os seus construtos, ao longo da Educação Básica no currículo escolar mexicano, dando assim um panorama das indicações dos *Estándares* aos professores sobre o que abordar dessa temática.

2.4.3.2 Currículo brasileiro sobre o conteúdo dos Números Racionais

Em geral, no Brasil, o trabalho com os Números Racionais inicia-se no 4º ano do Ensino Fundamental, sendo retomado e ampliado nas duas séries subsequentes e, pontualmente, em todas as séries do Ensino Fundamental e Médio (CAMPOS; SILVA; PIETROPAOLO, 2009, p.131). Mas, as primeiras noções sobre Frações podem ser iniciadas entre o 2º e o 3º ano do Ensino Fundamental, de forma mais simples, com questões que envolvam metades e quartos, relacionados a medidas de peso, capacidade e tempo, conforme Broitman (2009, p.73).

Segundo os PCN (BRASIL, 1997) é a partir do segundo ciclo do Ensino Fundamental⁴⁵ que o ensino de Matemática deve levar o aluno a:

- Construir o significado do número racional e de suas representações (fracionária e decimal), a partir de seus diferentes usos no contexto social;

⁴⁵ 4º e 5º anos do Ensino Fundamental.

- Interpretar e produzir escritas numéricas, considerando as regras do sistema de numeração decimal e estendendo-as para a representação dos Números Racionais na forma decimal;
- Resolver problemas, consolidando alguns significados das operações fundamentais e construindo novos, em situações que envolvam números naturais e, em alguns casos, *Racionais*.

Neste ciclo, são apresentadas aos alunos situações-problema cujas soluções não se encontram no campo dos Números Naturais, possibilitando, assim, que eles se aproximem da noção de número racional, pela compreensão de alguns de seus significados (quociente, parte-todo, razão) e de suas representações, fracionária e decimal. Também espera-se, conforme os PCN (BRASIL, 1997), que o aluno saiba ler, escrever, ordenar, identificar sequências e localizar, em intervalos, números naturais e Números Racionais na forma decimal, pela identificação das principais características do sistema de numeração decimal.

No terceiro⁴⁶ e quarto⁴⁷ ciclos a ideia sobre os Números Racionais é ampliada, construindo novos significados sobre este conteúdo. Nestes ciclos a abordagem dos *Racionais*, em continuidade ao que foi proposto para os ciclos anteriores, tem como objetivo levar os alunos a perceber que os números naturais são insuficientes para resolver determinadas situações-problema como as que envolvem a medida de uma grandeza e o resultado de uma divisão.

No terceiro ciclo conforme os PCN (BRASIL, 1998) o aluno deverá ser capaz de comparar e ordenar números naturais, inteiros e *Racionais*; reconhecendo suas diferentes formas de expressão como fracionária, decimal e percentual; representar na forma decimal um número racional expresso em notação fracionária; efetuar cálculos envolvendo adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação; escolher adequadamente os procedimentos de cálculo (exato ou aproximado, mental ou escrito) em função dos contextos dos problemas, dos números e das operações envolvidas.

No quarto ciclo deve-se ampliar e consolidar os significados dos Números Racionais a partir dos diferentes usos em contextos sociais e matemáticos. Ao abordar os *Racionais* pelo seu reconhecimento no contexto diário, deve-se observar que eles aparecem muito mais na forma decimal do que na forma fracionária.

⁴⁶ 6º e 7º anos do Ensino Fundamental respectivamente.

⁴⁷ 8º e 9º anos do Ensino Fundamental respectivamente.

Assim como, resolver situações-problema envolvendo Números Racionais, ampliando e consolidando os significados da adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação, selecionar e utilizar diferentes procedimentos de cálculo. Desse modo, é desejável que o professor proponha aos alunos a análise, interpretação, formulação e resolução de novas situações-problema, envolvendo números naturais, inteiros e *Racionais* e os diferentes significados das operações, e que valorize as resoluções “aritméticas” tanto quanto as “algébricas” (BRASIL, 1998).

Em relação ao Ensino Médio os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) (BRASIL, 2006) orientam que é possível alargar e aprofundar o conhecimento dos alunos sobre números e operações, mas não isoladamente dos outros conceitos, isto é, podem-se tratar os *números decimais e fracionários*, mas mantendo de perto a relação estreita com problemas que envolvem medições, cálculos aproximados, porcentagens, assim como os números *irracionais* devem se ligar ao trabalho com geometria e medidas. É ainda importante para o aluno, nessa etapa de sua formação, o desenvolvimento da capacidade de estimativa da ordem de grandeza de resultados de cálculo ou medições e da capacidade de tratar com valores numéricos exatos ou aproximados de acordo com a situação e o instrumental disponível.

2.5 UMA REFLEXÃO SOBRE POLÍTICAS EDUCACIONAIS E MATEMÁTICA

De uma forma geral é possível olhar de forma mais nítida a epistemologia, a didática e os aspectos cognitivos da temática proposta, porém os aspectos socioculturais estão implícitos durante todo esse processo. Segundo Montiel (2011), a dimensão social afeta aos componentes epistemológicos, didáticos e cognitivos, mas sobretudo modifica sua relação sistêmica para explicar os fenômenos didáticos ao redor da construção de um conhecimento matemático particular em um cenário escolar.

Em suas investigações a autora pode distinguir momentos de uso do conceito (enquanto atividade humana), momentos de influência cultural (como as práticas de institucionalização), etapas de consenso (teorização ou consolidação dos conceitos), diferente das ferramentas e os contextos matemáticos acessíveis para a avaliação de noções e conceitos. Nesses aspectos se encontram os fatores sociais que geram conhecimento matemático, entendido estes como as restrições que pesam sobre os indivíduos pelo simples fato de viver em sociedade e que não são estritamente modificáveis por sua vontade individual.

Em relação as questões sociais e culturais que envolvem a educação, Freire (1979, p.30) destaca que os saberes são as diferentes formas de compreender e explicar a realidade e se encontram vinculados com as práticas socialmente compartilhadas, que por sua vez estão

normadas pelas práticas sociais. Quando o homem compreende sua realidade, pode levantar hipóteses sobre o desafio dessa realidade e procurar soluções. Assim, pode transformá-las e com seu trabalho pode criar um mundo próprio: seu eu e suas circunstâncias.

Os aspectos socioculturais estão presentes tanto nos propósitos educacionais, quanto na Matemática, na sua construção e eleição do que e porque ensinar. Quando falamos de políticas públicas da educação, estamos situando um propósito educacional e personalizando os elementos desse processo os adequando a um determinado tipo de sociedade e sua cultura. Assim é quando nos referimos a Matemática, sua evolução é resultados de uma construção social ao longo da história da humanidade. Conforme D'Ambrosio (1996), pode-se atribuir à Matemática o caráter de uma atividade inerente ao ser humano, praticada com plena espontaneidade, resultante de seu ambiente sociocultural e conseqüentemente determinada pela realidade material na qual o indivíduo está inserido.

Conforme Cantoral (2013), o conhecimento matemático, tem uma origem e uma função social associado a um conjunto de práticas humanas socialmente estabelecidas. Isso não deve ser entendido no sentido de que todo o conhecimento obedece a uma necessidade de uma natureza prática, posto que os historiadores e filósofos das Ciências tenham demonstrado que algumas noções matemáticas não proveem de sucessivas abstrações e generalizações do empírico. Pelo contrário, em suas ideias há uma orientação socioepistemológica, já que estabelece uma filiação entre a natureza do conhecimento que os humanos produzem com as atividades, mediante as quais e em razão das quais estes conhecimentos são produzidos.

Ainda segundo o autor, a espécie humana desenvolveu a capacidade de construir explicações sobre o mundo em que vive mediante complexos processos de construção de significados compartilhados. Incursionando também em analisar o impacto que se produz a tradução de obras educativas de uma cultura tem para outra. Freire (1979), também se preocupava com essa problemática:

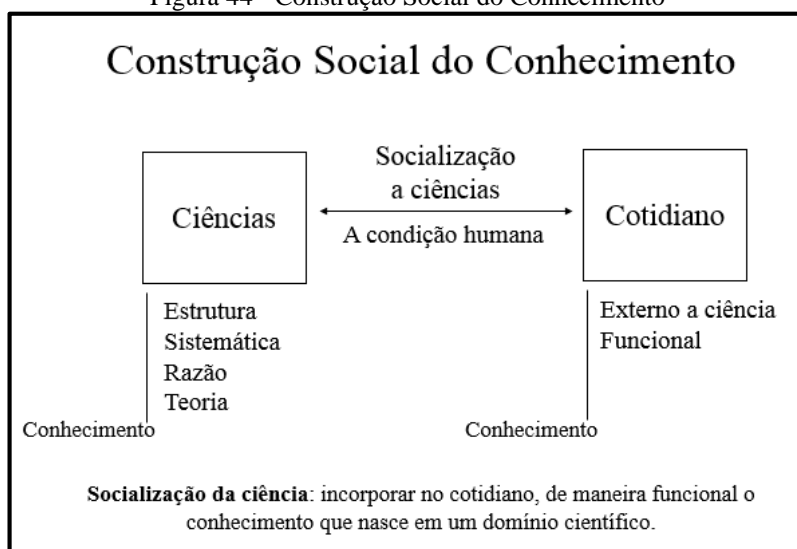
A cultura consiste em recriar e não em repetir. Quando o ser humano pretende imitar a outrem, já não é ele mesmo. Assim também a imitação servil de outras culturas produz uma sociedade alienada ou sociedade-objeto. Quanto mais alguém quer ser outro, tanto menos ele é ele mesmo. [...] O erro não está na imitação, mas na passividade com que se recebe a imitação ou na falta de análise ou de autocrítica. [...] As soluções importadas devem ser reduzidas sociologicamente, isto é, estudadas e integradas num contexto nativo. Devem ser criticadas e adaptadas; neste caso, a importação reinventada ou recriada (FREIRE, 1979, p. 35 e 36).

Gómez (2009) salienta que para explicar a construção social do conhecimento é necessário tratar da relação dialética entre o conhecimento e a base social. E nesse sentido se diferencia o domínio científico e o domínio cotidiano. O domínio científico é onde se gera o conhecimento estrutural e o domínio cotidiano como a base social é onde se expressa o

funcional. Ambos são indispensáveis para configurar essa dialética que permite dar explicações da construção da realidade socialmente compartilhada e a construção do conhecimento.

Desta relação emerge a ideia de *aula estendida*, da transposição do conhecimento científico ao cotidiano, e vice-versa, do cotidiano ao científico. Na figura 44, a autora apresenta essa relação dialética.

Figura 44 - Construção Social do Conhecimento



Fonte: Adaptado de Gómez (2009).

Assim, segundo autora, o conhecimento obedece tanto a ciência como ao cotidiano, isto é, o conhecimento que se gera dependerá do conhecimento já construído, dos contextos sociais, dos instrumentos existentes, dos ideais predominantes, dos interesses, de fenômenos sociais, dos requerimentos próprios da época, entre outros fatores.

A Ciência e a sua difusão, através da educação, estão ligadas às práticas sociais e culturais. No entanto, a Matemática tem se desenvolvido sob a premissa de que trata de objetos abstratos, anteriores por tanto, às práticas sociais e em consequência externa ao indivíduo (CANTORAL, 2004). Essa visão platônica do conhecimento permeia por igual à tarefa didática de nossos dias quando um professor comunica “verdades preexistentes” aos seus alunos mediante um discurso.

A Matemática é, desde os gregos, uma disciplina de foco nos sistemas educacionais, e tem sido a forma de pensamento mais estável da tradição mediterrânea que perdura até nossos dias como manifestação cultural que se impôs, incontestada, às demais formas. Enquanto nenhuma religião se universalizou, nenhuma língua se universalizou, nenhuma culinária ou medicina se universalizaram, a matemática se universalizou, deslocando todos os demais modos de quantificar, de medir, de ordenar, de inferir e servindo de base, se impondo, como o modo de pensamento lógico e racional que passou a identificar a própria espécie. Do *Homo sapiens* se fez recentemente uma transição para o *Homo rationalis*. Este último é identificado pela sua capacidade de utilizar matemática, uma mesma matemática para toda a humanidade e, desde Platão, esse tem sido o filtro utilizado para selecionar lideranças (D’AMBROSIO, 1990, p. 10).

A investigação realizada por Soto (2010) desfaz a afirmação que os problemas relacionados ao processo de estudo se centram no docente ou no estudante, ou seja, se evidencia que a responsabilidade não recai sobre o docente por ‘ensinar de maneira inadequada’, nem sobre o estudante por ‘não estudar o suficiente’, mas se postula que o *dME* - produto das adaptações que se realizam ao saber da obra matemática com o fim de convertê-lo em um saber ensinado centrando-se em objetos matemáticos - exclui os estudantes dessa construção do conhecimento.

Segundo Radford (2014) as discussões sobre o papel do social e da cultura na cognição humana têm levado a repensar o indivíduo no ato do conhecimento. Nessas discussões se nota um esforço por abordar o problema da cognição a partir de uma concepção de pessoa de caráter menos individualista, uma concepção na qual a dimensão sociocultural desempenha um papel decisivo, tanto na dimensão cognitiva como na identidade dos indivíduos.

O problema do desenvolvimento conceitual não se limita a relação que liga o indivíduo com o seu meio sociocultural através do conjunto de recursos materiais e conceituais. O problema é mais amplo, os recursos materiais e conceituais tem uma história, as atividades que realiza um indivíduo não são, simplesmente, dele, pois essas atividades têm sido configuradas no curso de um processo filogenético (WARTOFSKY, 1979 apud RADFORD, 2004).

Para Radford (2006), o funcionamento da sala de aula e o papel do professor não se limitam a buscar a alcançar a autonomia. Mais importante é aprender a viver na comunidade que é a sala de aula (num sentido mais amplo), aprender a estar com outros, abrir-se a compreensão de outras vozes e outras consciências, ou seja, a *ser-com-outros*.

Em relação ao termo *ser* citado na expressão *ser-com-outros*, para Radford (2006), é um conceito muito mais amplo e complexo que embarca o conceito de individualidade. *Ser* significa *ser-na-cultura*⁴⁸, e a sala de aula é o espaço social onde o aluno elabora essa reflexão definida como relação comum e ativa com a sua realidade histórico-cultural. É aqui onde ocorre o encontro do sujeito e o objeto do saber. A objetivação que permita esse encontro não é um processo individual, mas sim social (RADFORD, 2006, p.116).

O autor afirma que o pensamento não é algo que transcorre somente no plano cerebral dos alunos. O pensamento também ocorre no plano social, no território do artefato. São os artefatos que mediam e materializam o pensamento. A aprendizagem não consiste em construir ou reconstruir um conhecimento, mas se trata de dotar de sentido os objetos conceituais que o

⁴⁸ Conforme Radford, para dissipar mal entendidos, a ideia de *ser-na-cultura* não se opõe a ideia de individualidade. A ideia de *ser-na-cultura* elabora, de forma diferente, a individualidade ao romper com a dicotomia indivíduo/sociedade. Em seu lugar, está propõe uma concepção em que ‘ser’ quer dizer *ser-com-outros*.

aluno encontra em sua cultura. A aquisição do saber é um processo de elaboração ativa de significados. Uma das fontes de aquisição do saber resulta no nosso contato com o mundo material, o mundo dos artefatos culturais no nosso entorno (objetos, instrumentos, etc.) e que se encontra depositada a sabedoria histórica da atividade cognitiva das gerações passadas (RADFORD, 2006).

Dessa forma Radford, propôs através da Teoria Cultural da Objetivação⁴⁹ (TCO), uma didática baseada em princípios em que a aprendizagem é vista que entanto que atividade social enraizada numa tradição cultural que a antecede. Esses princípios se articulam ao redor de cinco conceitos relacionados entre si, conforme Radford (2006):

- O primeiro conceito é de ordem psicológica, o conceito de pensamento elaborado em termos não mentais. Propõe que o pensamento é sobre tudo uma forma de reflexão ativa sobre o mundo, mediada por artefatos, o corpo (através da percepção, gestos, movimentos, etc.), a linguagem, os símbolos;
- O segundo conceito da teoria é de ordem sociocultural, é o conceito de aprendizagem. A aprendizagem é vista como a atividade através da qual os indivíduos entram em relação não somente com o mundo dos objetos culturais (plano sujeito-objeto), mas sim com outros indivíduos (plano sujeito-sujeito ou plano de interação) e adquirem, no seguimento comum do objeto e no uso social de símbolos e artefatos;
- O terceiro conceito está relacionado com o anterior, pois é de natureza epistemológica. Como toda atividade, a aprendizagem está em volta por sistemas semióticos de significação cultural que ‘naturalizam’ as formas de questionamento e de investigação do mundo;
- Como a aprendizagem é sempre acerca de algo, os conceitos anteriores vem a ser completado por um quarto conceito de natureza ontológica, o de objetos matemáticos que temos definido como padrões fixos de atividade reflexiva incrustada no mundo constantemente em mudança pela prática social mediada pelos artefatos;
- E para voltar à teoria em sua vertente ontogênica, foi necessário introduzir um quinto conceito de natureza semiótico-cognitivo, o de objetivação ou tomada de consciência subjetiva do objeto cultural. Neste contexto, e a luz dos conceitos fundamentais anteriores, a

⁴⁹ A objetivação é um processo social, corporal e simbolicamente mediado de tomada de consciência e discernimento crítico de formas de expressão, ação e reflexão constituídas historicamente e culturalmente (RADFORD, 2014).

aprendizagem se define como processo social de objetivação desses padrões externos de ação fixa da cultura.

De maneira mais específica, a teoria coloca o objetivo da Educação Matemática como um esforço político, social, histórico e cultural cujo fim é a criação de indivíduos éticos e reflexivos que se posicionam de maneira crítica em práticas matemáticas constituídas histórica e culturalmente. E ainda conforme Radford (2014), que ao reconceitualizar a finalidade da educação matemática como um esforço histórico e social que vai além do domínio técnico de um conteúdo matemático, e ao chamar a atenção sobre a formação do indivíduo, não está simplesmente adicionando um componente subjetivo. O que em realidade está buscando é sustentar que, de um ponto de vista ontológico, o ser e o saber estão inter-relacionados de uma maneira profunda em que um não ocorre sem o outro.

Apresentamos dessa forma os aspectos que consideramos importantes do referencial teórico, envolvendo a TSME e as dimensões do saber, em relação ao tema Números Racionais, que guiará uma análise sistêmica dos dados investigados na investigação.

3 DISCUSSÕES, ANÁLISE E REFLEXÕES

Neste capítulo, faremos uma análise dos dados investigados, citados no capítulo anterior. Para tanto, vamos tratar, em três aspectos principais, discussão e análise das orientações oficiais, livros didáticos e prática dos professores.

As orientações oficiais são os aspectos que norteiam as políticas públicas educacionais no Brasil e no México. Nesse sentido, expressam as propostas para a educação quanto às ideologias didático-pedagógicas. Em relação aos Números Racionais, temos, nesse aspecto, as orientações para o seu ensino, assim como os resultados esperados de aprendizagem.

Como já mostramos anteriormente, ambos os países se distinguem nas indicações: enquanto o México tem um base nacional de conteúdos, no Brasil, há orientações sobre os conteúdos a serem trabalhados, os quais são organizados nos planos de estudos pelos professores, em consonância com o plano político-pedagógico das escolas.

Um elemento relevante, pela sua importância de expressar as indicações didático-pedagógicas e servir de apoio aos planejamentos das aulas, é o livro didático. Os governos brasileiro e mexicano apresentam programas de livros didáticos para as redes públicas de escolas. Essas políticas envolvem as indicações dos conteúdos a serem desenvolvidos em cada série escolar, atividades, propostas metodológicas e, como complemento, um suporte pedagógico aos professores.

Comparando os dois países, observamos que esse processo se dá de forma diferenciada. O programa brasileiro sobre os livros didáticos indica que os critérios e a confecção dos livros é realizada por editoradas particulares. No México, os livros para o Nível Primário, Educação Indígena e paradidáticos são confeccionados pela própria SEP, enquanto os livros para o Nível Secundário são confeccionados por editoras particulares, seguindo os critérios do governo.

Os livros analisados foram os indicados pelos professores participantes da pesquisa no Brasil e no México, focando o tema Números Racionais. No México foram os livros universais fornecidos pela SEP para o sexto ano do Nível Primário e duas coleções de livros utilizados pelos professores do primeiro ano do Nível Secundário e Telessecundário. No Brasil foi analisada uma coleção utilizada pelas professoras participantes, recebido do Governo Federal, além de outros livros didáticos utilizados individualmente por elas como referência nos planejamentos das aulas.

Finalizamos a análise com os planejamentos das aulas dos professores em relação ao conteúdo dos Números Racionais, os quais se fazem importantes porque é neles que se materializam todas as indicações oficiais e as metodologias adotadas no ensino dos Números Racionais. Nos planejamentos, encontramos sempre o conteúdo trabalhado, as atividades

propostas, os recursos didáticos empregados no processo. Como subsídio desse aspecto, realizamos cópias de cadernos de alunos. Como os critérios exigidos pelos governos em relação aos planejamentos das aulas e a forma como os professores se organizam em relação aos mesmos se diferenciam, os cadernos servem como documentos de referência.

Nesse aspectos é que analisamos o processo de estudo dos Números Racionais, procurando refletir sobre eles em uma perspectiva Socioepistemológica.

3.1 OS NÚMEROS RACIONAIS E AS POLÍTICAS EDUCACIONAIS

Como comentamos anteriormente, no capítulo 2, Brasil e México se diferenciam na apresentação de suas estruturas educacionais, sendo a brasileira colaborativa e a mexicana centralizada, mas há também a colaboração dos estados naquele país. Porém, nas orientações didáticas e pedagógicas, seguem essa mesma ideia.

No México, a SEP disponibiliza, através do seu site, as orientações sobre os programas de estudo a serem desenvolvidos para as todas disciplinas e graus dos níveis Primário e Secundário, e além de orientações didáticas e planos de aula. Na figura 45, verifica-se um recorte da página inicial do site da SEP para o Nível Secundário.

Figura 45 - Recorte da página inicial do site da SEP para o Nível Secundário

Programas de estudio

Secundaria


¡Bienvenidos al nivel de Educación Secundaria!

La Educación Secundaria constituye el último nivel de la Educación Básica, en él los estudiantes consolidan el perfil de egreso para contribuir con el desarrollo de las competencias para la vida que desde la Educación Preescolar han trabajado.

Durante la Educación Secundaria los estudiantes requieren mayor comprensión, asesoría y apoyo tutorial, pues enfrentan diferentes situaciones en su tránsito por el nivel educativo: desde los cambios físicos y psicológicos, hasta la organización misma de sus estudios, en los que cada asignatura es impartida por un docente especializado. Estos aspectos y el incremento de la presión social que se traduce en el tránsito a la vida adulta, hacen que los tres años de educación secundaria requieran de apoyos diferenciados a las necesidades de los estudiantes.

Este espacio busca brindar información a los asesores técnico pedagógicos, supervisores, directores, jefes de enseñanza, docentes y padres de familia, para favorecer el aprendizaje de los estudiantes bajo una mirada integral.

Los invitamos a compartir experiencias docentes, directivas o de asesoría técnico pedagógica relacionadas con la implementación de los programas de estudio

 Español 	 Matemáticas 	 Ciencias 
> Primer grado	> Primer grado	> Primer grado. Ciencias I (énfasis en Biología)
> Segundo grado	> Segundo grado	> Segundo grado. Ciencias II (énfasis en Física)
> Tercer grado	> Tercer grado	> Tercer grado. Ciencias III (énfasis en Química)

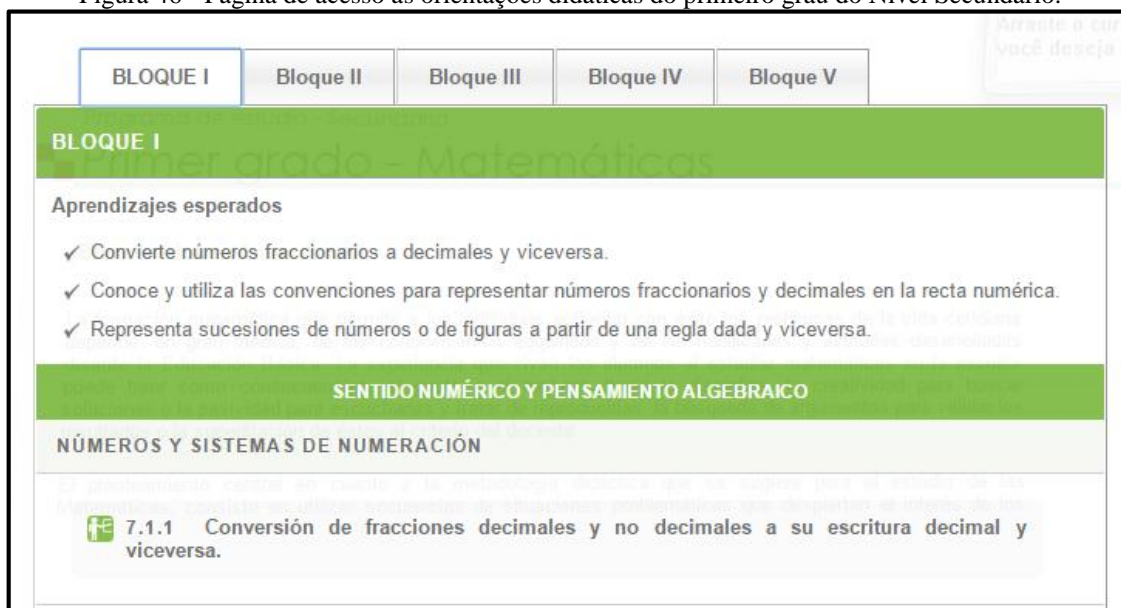
Fonte: <http://www.curriculobasica.SEP.gob.mx/index.php/prog-secundaria>

Há um site específico para cada nível, com todas as disciplinas, as quais estão subdivididas em graus, seis para o Primário e três para o Secundário. Segundo a SEP, o site é um espaço onde podemos encontrar orientações didáticas e planos de aulas que sugerem como abordar para cada um dos conteúdos. Tanto as orientações como os planos de aula são recursos adicionais aos programas de estudo.

Ainda, conforme a SEP, esse material foi construído por um grupo numeroso de assessores técnico-pedagógicos do Primário e do Secundário, assim como professores, coordenados pela equipe técnica da Dirección Geral de Desenvolvimento Curricular⁵⁰. Os materiais disponíveis não são somente para os professores, mas também para as equipes diretivas das escolas⁵¹, alunos e pais ou responsáveis.

Entre o material disponibilizado, estão as orientações didáticas, que buscam proporcionar uma visão mais ampla do conteúdo a ser estudado, as quais pretendem também vincular a Matemática com outras disciplinas e aplicações. Na figura 46, apresentamos um recorte da página de acesso às orientações.

Figura 46 - Página de acesso as orientações didáticas do primeiro grau do Nível Secundário.



Fonte: <http://www.curriculobasica.SEP.gob.mx/index.php/sec-mat-primer-grado?sid=720>

Na figura 47, há um exemplo dessas orientações para bloco I, do primeiro grau do Secundário.

⁵⁰ Dirección General de Desarrollo Curricular.


⁵¹ Fazem parte das equipes diretivas: assessores técnico-pedagógicos, supervisores, diretores e chefes de ensino.

Figura 47 - Orientação didática para conversão de frações decimais e não decimais a sua escritura decimal e vice-versa.

7.1.1 Conversión de fracciones decimales y no decimales a su escritura decimal y viceversa

En este momento los alumnos no deben tener dificultad para transformar un número decimal finito en fracción ($0.8 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$) o bien una fracción decimal en su notación decimal ($\frac{75}{100} = 0.75$), pues en sexto grado realizaron este tipo de conversiones. Es importante que los alumnos logren distinguir las fracciones que pueden ser expresadas con un decimal finito, como $\frac{1}{8}$, $\frac{4}{5}$, etcétera, entendiendo que sus denominadores pueden convertirse a una potencia de 10 y analizando el hecho de que las potencias de 10 sólo tienen como factores primos el 2 y el 5.

El proceso se complica cuando la fracción no es decimal ni puede transformarse en una de ellas o bien cuando el número decimal no es finito. Por ejemplo: ¿Cuál es el perímetro del siguiente rectángulo?



Si se decide transformar $\frac{1}{3}$ en un número decimal, se obtiene $\frac{1}{3} = 0.333 \dots$. Dado que se trata de una expresión decimal periódica, puesto que en este caso hay una cifra que se repite infinitamente, basta truncar hasta la cifra deseada. Así, el ancho del rectángulo puede representarse con 0.33 m. Una vez expresados el largo y ancho del rectángulo con el mismo tipo de número, fácilmente puede obtenerse su perímetro.

Además de practicar las conversiones entre fracciones y números decimales finitos y entre fracciones decimales y sus expresiones decimales, se sugiere estudiar las siguientes transformaciones:

Fración a un número decimal periódico puro: $\frac{1}{3} = 0.333 \dots = 0.\overline{3}$

Fración a un número decimal periódico mixto: $\frac{2}{6} = 1.1666 \dots = 1.1\overline{6}$

Los procesos inversos podrán estudiarse una vez que se trabajen las propiedades de la igualdad.

PLANES DE CLASE

Fonte:

http://www.curriculobasica.sep.gob.mx/pdf/secundaria/matematicas/OD_SECUNDARIA/Primero/Bloque1/G7B1OD1.pdf

Dentro dessa política centralizadora da SEP, as orientações são disponibilizadas para os professores inclusive, com planos de aulas (recorte figura 48).

Figura 48 - Recorte do plano de aula relativo às orientações didáticas para conversão de frações decimais e não decimais a sua escritura decimal e vice-versa.

Plan de clase (1/3)

Escuela: _____ Fecha: _____
 Profesor (a): _____

Curso: Matemáticas 1 Secundaria **Eje temático:** SNyPA

Contenido: 7.1.1 Conversión de fracciones decimales y no decimales a su escritura decimal y viceversa.

Intenciones didácticas: Que los alumnos pongan en juego diferentes recursos para convertir fracciones decimales finitas a notación decimal y viceversa (como la división de numerador entre denominador o la obtención de fracciones equivalentes).

Consigna: Organizados en equipos resuelvan el siguiente problema, pueden auxiliarse de una calculadora.

Jorge se dedica a reparar y construir diferentes estructuras metálicas. Para realizar algunos trabajos, envió a su ayudante Juan a comprar los siguientes materiales:

1. Barras de solera de las siguientes medidas: $1\frac{1}{8}$ in, $1\frac{1}{4}$ in y $\frac{1}{2}$ in. Al llegar a la ferretería, le muestran un manual donde aparecen las medidas que están disponibles.

a) 0.933 in	c) 0.5 in	e) 1.125 in	g) 1.250 in
b) 0.4375 in	d) 1.375 in	f) 1.933 in	h) 1.012 in

Fonte:

http://www.curriculobasica.sep.gob.mx/pdf/secundaria/matematicas/OD_SECUNDARIA/Primero/Bloque1/G7B1OD1.pdf

Chama atenção a preocupação que o governo mexicano tem em detalhar cada parte do processo educacional, como, por exemplo, fornecendo os planos de aulas aos professores. Ao mesmo tempo é importante ponderar que a própria secretaria destaca, no site, que os planos não devem ser seguidos como uma receita. Os professores devem analisar os planos previamente, fazendo as modificações e adequações que considerem pertinentes.

O único documento que se diferencia entre as escolas analisadas, pois era construído com a comunidade escolar, era uma espécie de regimento escolar, no qual são apresentados, principalmente, direitos e deveres da equipe diretiva, professores, alunos e pais. Na figura 49, apresentamos o sumário do regulamento de uma das escolas como exemplo.

Figura 49 - Sumário do regimento escolar da escola EST (México).

INDICE		
CAPITULO I	DISPOCIONES GENERALES	2
CAPITULO II	DE LOS DERECHOS Y OBLIGACIONES DE LOS PADRES DE FAMILIA	2
CAPITULO III	DERECHOS Y OBLIGACIONES DE LOS ALUMNOS	4
CAPITULO IV	DEL PERSONAL DE LA ESCUELA	5
CAPITULO V	DE LA SOCIEDAD DE ALUMNOS	6
CAPITULO VI	DE LA DISCIPLINA	7
CAPITULO VII	DE LOS ESTIMULOS	7
CAPITULO VIII	DE LAS SENSACIONES	8
CAPITULO IX	DE LAS EVALUACIONES, ACREDITACIONES Y PROMOCION.	9
CAPITULO X	TRANSITORIOS	10

Fonte: escola EST (México).

Já o Brasil apresenta uma característica mais autônoma, pois a LDB N° 9.394/96 define que fica a cargo dos estabelecimentos de ensino elaborar e executar sua proposta pedagógica e, dos docentes, participar da elaboração da proposta pedagógica do estabelecimento de ensino, assim como elaborar e cumprir o plano de trabalho, segundo a proposta pedagógica do estabelecimento de ensino.

A proposta pedagógica que se refere à lei é o Plano Político Pedagógico (PPP), no qual deverá estar contida a proposta curricular da escola (o que e como ensinamos e as formas de avaliação), sua organização, gestão administrativa, entre outros itens importantes para o processo educativo. Esse documento deverá ser construído, em parceria com toda a comunidade escolar, ou seja, funcionários, professores, pais e alunos. Na figura 50, apresentamos parte do sumário com os itens propostos no PPP da escola EMIP.

Figura 50 - Imagem da página do sumário do PPP da escola EMIP.

SUMÁRIO	
1- APRESENTAÇÃO	10.16 - Estudos de Recuperação
2 - FILOSOFIA DA ESCOLA	10.17- Classificação dos Alunos
3 - HISTÓRICO DA ESCOLA	10.17.1- Por Promoção
4 - DESCRIÇÃO DOS ESPAÇOS FÍSICOS, INSTALAÇÕES E EQUIPAMENTOS	10.17.2- Por Transferência
5 - DIAGNÓSTICO/CARACTERIZAÇÃO DA COMUNIDADE ESCOLA	10.17.3- Independente de Escolarização Anterior
5.2. Os alunos	10.17.4- Avanço
5.3. Os funcionários	10.18- Transferência Escolar
5.4. Os professores	10.19 - Reclassificação
6 - VISÃO PEDAGÓGICA	10.19.1- Aproveitamento de Estudos e Adaptação Curricular
7 - VISÃO DE CURRÍCULO	11 - CONTROLE DE FREQUÊNCIA
8- OBJETIVOS DO ESTABELECIMENTO	11.1 - Estudos Compensatórios de Infrequência
9 - OBJETIVOS DO ENSINO FUNDAMENTAL	11.2 - Estudos Domiciliares
10 - ORGANIZAÇÃO CURRICULAR	12 - ORGANIZAÇÃO PEDAGÓGICA
10.1 Ensino Fundamental de nove anos	12.1 Atribuições do Diretor de Escola
10.2 - Bloco Pedagógico de Alfabetização	12.2 - Atribuições do Vice-Diretor
10.3 - Concepções das Áreas de Conhecimentos	12.3 - Atribuições do Professor designado para Supervisão Escolar
10.4 - Metodologia da escola	12.4 - Atribuições do Professor designado para Orientação Escolar
10.5 - Planos de Estudos	12.5 - Atribuições do Professor
10.6 - Educação Inclusiva/Adaptação Curricular	12.6 - Atribuições dos Alunos
10.7 - Plano de trabalho do professor	12.7 - Regras de Convivência
10.8 - Regime Escolar	12.7.1- Regras relativas à equipe diretiva
10.9 - Admissão e Ingresso	12.7.2- Regras relativas ao corpo docente
10.10 - Regime de Matrícula	12.7.2.1 São deveres do corpo docente
10.10.1 Rematrícula	12.7.2.2 Será vedado ao professor
10.10.2 Matrícula:	12.7.3- Regras relativas ao apoio administrativo e demais funcionários
10.11 - Conselho de Classe -	12.7.3.1 São deveres dos funcionários do apoio administrativo, serviço de merenda, limpeza e vigilância:
10.12 - Avaliação da Aprendizagem	12.7.3.2 Será vedado aos funcionários do apoio administrativo, serviço de merenda, limpeza e vigilância:
10.12.1- Descrição dos Procedimentos na Avaliação	12.7.4- Conduta em relação não observância das regras de convivência em relação aos professores e funcionários
10.12.2 - Bloco de Alfabetização	12.7.5- Regras relativas ao corpo discente
10.12.3 - 4º ano a 8ª série	12.7.5.1 São direitos dos alunos efetivamente matriculados:
10.12.4- Alunos com Necessidades Educacionais Especiais	12.7.5.2 São deveres de todos os alunos efetivamente matriculados na Escola
10.12.5 - Terminalidade Específica	12.7.5.3 E vedado a todos os alunos efetivamente matriculados na Escola
10.13 - Expressão dos Resultados da Avaliação	12.7.5.4 Serão aplicadas as seguintes medidas aos alunos quando incidirem em transgressões às regras estabelecidas
10.13.1 Bloco de Alfabetização	12.7.5- Regras relativas aos pais e/ou responsáveis e demais membro da comunidade escolar
10.13.2- 4º ano a 8ª série	12.7.5.1 São direitos dos pais/responsáveis
10.13.3 - Alunos com Necessidades Educacionais Especiais	12.7.5.2 E dever tanto dos pais/responsáveis quanto dos demais membros da comunidade:
10.13.4 - Terminalidade Específica	12.8 - Conduta Escolar
10.14 - Avaliações Externas	12.9 - Calendário Escolar
10.15 - Expressão de Resultados de Alunos Transferidos	13 - RECURSOS, PROJETOS E PROGRAMAS DIDÁTICO-PEDAGÓGICO
	13.1- Projeto Livro e Leitura
	13.1.1 - Professor regente Projeto Livro e Leitura
	13.2- Projeto Informática: Uso das Tecnologias de Informações e Comunicação
	13.2.1- Professor Regente da Múltiplas Tecnologias

Fonte: Escola EMIP.

No PPP das escolas, deverá constar o Plano de Estudos dos conteúdos a serem desenvolvidos em todos os níveis e anos escolares. Realizamos, junto às escolas municipais de Canoas, um levantamento dos Planos de Estudos, para entendermos as indicações por elas adotadas e como essas são utilizadas pelos docentes. Analisamos características que entendemos como relevantes, nos documentos, caracterizando similaridades e diferenças entre eles.

Alguns Planos de Estudos, na sua apresentação, se identificam de forma igual, como é o caso das escolas EMIM e EMTAN:

- O referido plano contém a operacionalização do currículo escolar, as disciplinas exigidas pela legislação com as respectivas cargas horárias, bem como a amplitude e a profundidade com que as mesmas são trabalhadas. A base nacional comum e sua parte diversificada integram-se para a formação da vida cidadã.

Outro exemplo de apresentação é o da escola EMCDA, qual deixa explícitas as orientações legais que determinam os Planos de Estudos e que esses devem ser construídos em parceria com a comunidade escolar:

- A elaboração de nosso Plano de Estudo, sem deixar de levar em conta a formação do professor, considera-se como primeiro passo, o conhecimento da legislação vigente.

Nós como um dos segmentos responsáveis por esta construção dos Planos de Estudos do nível de ensino temos a obrigação de divulgar o que dispõe a legislação federal (lei 9.394/96) e as normas complementares estabelecidas pelo Conselho Estadual de Educação (Resolução n° 243).

A lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Lei n° 9.394/96) propõe esta participação ao preconizar a autonomia da escola para elaborar e executar sua proposta pedagógica.

Igualmente, o Conselho Estadual de Educação – RS, ratificando o espírito da Lei 9.394/96, institui, através da Resolução n° 243, de 07 de abril de 1999, os Planos de Estudos, enquanto expressão concreta do projeto pedagógico e resultado de elaboração coletiva, envolvendo o corpo docente e discente, a comunidade na qual a escola está inserida e a entidade mantenedora.

Conforme o Parecer n° 323/99 da CEED - RS, o Plano de Estudos, a fim de cumprir o papel ordenador do currículo, deverá conter a tradução das Diretrizes Curriculares Nacionais, em um conjunto de atividades e disciplinas, ordenadas quanto à sequência em que devem ser cursadas ou distribuídas, no tempo, e caracterizadas quanto aos seus objetivos, amplitude e profundidade. A ordenação sequencial das atividades e disciplinas será preferida pelas escolas que não adotarem o regime seriado e a distribuição no tempo será conveniente para os que adotarem os regimes seriados. Dessa forma, os Planos de Estudos das escolas investigadas apresentam os conteúdos a serem trabalhados de forma anual, sendo que algumas escolas são mais específicas e também apresentam uma divisão trimestral dos conteúdos, como a escola EMP, mostrada na figura 51, a qual apresenta os conteúdos a serem trabalhados no 2° trimestre do 7°.

Figura 51 - Conteúdos programáticos e competências cognitivas a serem desenvolvidas no 2° trimestre do 7° ano da escola EMP.

Trimestre	Conteúdos programáticos	Competências cognitivas
2°	<ul style="list-style-type: none"> - Conjunto dos Números Racionais - Operações no conjunto Q - Propriedades em Q - Expressões - Álgebra 	<ul style="list-style-type: none"> - Identificar o conjunto das frações negativas e positivas - Escrever as frações em números decimais. - Representar frações e números decimais na reta numérica. - Compreender as principais operações - Ampliar o conceito de potenciação e radiciação para o conjunto Q - Resolver expressões no conjunto Q - Identificar a equação como uma sentença matemática. - Identificar o elemento desconhecido na igualdade - Determinar o conjunto universo de uma equação.

Fonte: Planos de Estudos da escola EMP.

Em relação à Matemática, algumas escolas apresentam, nos seus Planos de Estudos, objetivos gerais para todos os anos e outras, para cada ano especificamente. A escola MRCL é um exemplo onde apresenta um objetivo geral da disciplina de Matemática para todos os anos finais do Ensino Fundamental, dizendo:

- Construir conhecimento matemático que desenvolva o raciocínio lógico e contribua para a resolução de situações do cotidiano, tornando-se um cidadão mais crítico e participativo.

Quando os objetivos se apresentam de forma geral para todos os anos é comum encontrar os termos *raciocínio lógico* e *resolução de situações do cotidiano* procurando conectar a Matemática aos quais sociais que os alunos estão inseridos, como orientam as DCNEB.

Dentre as escolas que apresentam objetivos gerais para cada ano, é dada uma ênfase maior ao conteúdo matemático, especificando as expectativas para aquele determinado ano, como no caso da escola EMAB, conforme a figura 52:

Figura 52 - Objetivos gerais para os anos finais do Ensino Fundamental da escola EMAB

Ano	Objetivo Geral
6º	O aluno deverá reconhecer números naturais e relativos, desenvolvendo o algoritmo das quatro operações em situações problemas.
7º	O aluno deverá reconhecer, operar e aplicar os conhecimentos construídos, em sala de aula, com números inteiros, equações e sistemas lineares de 1º grau na resolução de problemas.
8º	O aluno deverá reconhecer, identificar, operar e aplicar os conhecimentos, em sala de aula, na resolução de problemas.
9º	O aluno deverá reconhecer, identificar, operar e aplicar os conhecimentos, em sala de aula, na resolução de problemas.

Fonte: Planos de Estudos da escola EMAB.

Quase todos os Planos de Estudos apresentam objetivos específicos, os quais na grande maioria das escolas, estão diretamente relacionados a conteúdos matemáticos específicos, como *reconhecer operações em determinado conjunto numérico, resolver potenciação, radiciação, etc.* Mas há escolas onde os objetivos específicos são mais genéricos e estão relacionados ao *uso da Matemática no cotidiano*. Um exemplo é o da escola EMAB, que praticamente faz o caminho inverso das outras escolas. Enquanto, nos objetivos gerais, a escola relaciona mais com objetivos matemáticos (figura 52), os objetivos específicos mesclam aspectos sociais e matemáticos, como apresenta a figura 53.

Figura 53 - Objetivos específicos para os anos finais do Ensino Fundamental da escola EMAB.

Ano	Objetivos Específicos
6º	<ul style="list-style-type: none"> - Fazer uso da linguagem matemática como ferramenta do cotidiano; - Selecionar, organizar e relacionar informações de diferentes representações e formas, fazendo uma “ponte” entre teoria e prática; - Analisar, comparar e relacionar os acontecimentos do cotidiano com o conteúdo desenvolvido em sala de aula; - Realizar atividades articuladas com o cotidiano e outras áreas do conhecimento e da educação.

7º	<ul style="list-style-type: none"> - Fazer uso da linguagem matemática como ferramenta do cotidiano; - Analisar, comparar e relacionar os acontecimentos do cotidiano com o conteúdo desenvolvido em sala de aula; - Identificar, reconhecer e operar Números Racionais; - Representar situações escritas em linguagem matemática; - Reconhecer, identificar e calcular equação e inequação do 1º grau com uma incógnita; - Resolver sistemas de equação de 1º grau, utilizando qualquer método de resolução; - Reconhecer e aplicar os conceitos adquiridos na regra de três simples para cálculo de porcentagens.
8º	<ul style="list-style-type: none"> - Fazer uso da linguagem matemática como ferramenta do cotidiano; - Reconhecer, relacionar, identificar e operar com números reais; - Reconhecer, distinguir, determinar, reordenar, operar com polinômios, produtos notáveis e ângulos; - Reconhecer, distinguir, verificar, construir e aplicar as definições formuladas para polígonos e propriedades.
9º	<ul style="list-style-type: none"> - Reconhecer, identificar e realizar operações com radicais; - Reconhecer, identificar e calcular as raízes de uma equação do 2º grau; equações biquadradas e equações irracionais; - Resolver situações problemas e teoremas aplicando as relações compatíveis em cada caso.

Fonte: Planos de Estudos da escola EMAB.

A respeito dos Planos de Estudos, conforme o item 19 do Parecer nº 323/99, a caracterização de objetivos, abrangência e amplitude das atividades e disciplinas é informação essencial, para que o professor tenha uma orientação clara para a elaboração de seu plano de trabalho, segundo a proposta pedagógica do estabelecimento. Essa caracterização poderá ser feita, ou sob a forma de “ementa de disciplina”, ou como “programa da disciplina”, ou outra forma capaz de cumprir o papel de atribuir conteúdo e significado à atividade ou disciplina. Na elaboração dessa ementa ou programa, a consulta aos Parâmetros Curriculares Nacionais – ou outros – será essencial.

Os Planos de Estudos são orientações fundamentais ao trabalho do professor. É neles que se ampara a prática de sala de aula propriamente dita, e esse tem que estar em consonância com o projeto político pedagógico da escola. Nos documentos analisados das escolas de Canoas, cada um apresenta uma característica própria, sendo possível perceber que alguns detalham mais os propósitos, metodologias a serem adotadas, e outros se focam mais nos conteúdos a serem trabalhados.

Quanto aos conteúdos matemáticos, algumas escolas são semelhantes na apresentação, diferindo muito pouco os Planos entre si. Como exemplo, na figura 54 temos uma apresentação simplificada com os conteúdos programáticos e competências cognitivas para cada ano das séries finais do EF.

Figura 54 - Planos de Estudos da EMG para o 2º trimestre do 7º ano

Trimestre	Conteúdos programáticos	Competências cognitivas
2º	<ul style="list-style-type: none"> - Conjunto dos Números Racionais - Operações no conjunto Q - Propriedades em Q - Expressões - Álgebra 	<ul style="list-style-type: none"> - Identificar o conjunto das frações negativas e positivas - Escrever as frações em números decimais. - Representar frações e números decimais na reta numérica. - Compreender as principais operações - Ampliar o conceito de potenciação e radiciação para o conjunto Q - Resolver expressões no conjunto Q - Identificar a equação como uma sentença matemática. - Identificar o elemento desconhecido na igualdade - Determinar o conjunto universo de uma equação.

Fonte: Planos de Estudos da EMG.

A escola EMIP é um exemplo da utilização da ideia de Competências e Habilidades na apresentação dos conteúdos matemáticos (figura 55). Os conteúdos como em outras escolas, são anuais sem divisão por trimestres.

Figura 55 - Planos de Estudos do 7º ano da escola EMIP

ANO	COMPETÊNCIA/HABILIDADES MÍNIMAS A SEREM TRABALHADAS	CONTEÚDOS RELATIVOS ÀS HABILIDADES	COMPETÊNCIAS/HABILIDADES MÍNIMAS PARA APROVAÇÃO
7º ANO	Reconhecer e relacionar os números inteiros e racionais no nosso dia-a-dia; Representar geometricamente os números inteiros; Resolver expressões numéricas envolvendo números inteiros e racionais; Utilizar as operações fundamentais envolvendo números inteiros e racionais; Resolver equações e problemas de 1º grau; Observar as relações de regra de três na Física e em situações Matemáticas; Identificar razões centésimas e suas relações com a porcentagem. Interpretar e resolver situações-problema que envolvam Z e Q.	Números inteiros; Números racionais; Operações fundamentais (Z, Q); Equações e problemas do 1º grau; Regras de três; Porcentagem; Resolução de problemas (Z, Q).	Resolver situações-problemas que envolvem números inteiros e racionais nas operações fundamentais, utilizando estratégias pessoais; Resolver situações problema que envolvam equações do primeiro grau; Aplicar corretamente as regras de porcentagem.

Fonte: Planos de Estudos da escola EMIP.

Nenhum dos dois exemplos anteriores traz indicações das metodologias e avaliações a serem utilizadas pelos professores. Algumas escolas, como a EMNP fornecem um Plano de Estudos mais completo aos docentes para cada ano. Na figura 56, está um recorte do Plano de Estudos para o 7º ano, que além dos conteúdos a serem desenvolvidos, ainda apresenta indicações sobre a metodologia, objetivos específicos, critérios e instrumentos de avaliação, além de temas transversais.

Figura 56 - Recorte do Plano de Estudos do 7º ano da EMNP.

Áreas do Conhecimento/ Temas Centrais	CONTEÚDOS	OBJETIVOS ESPECÍFICOS
MATEMÁTICA 7º ano	OBJETIVO GERAL: Renovar o desenvolvimento do espírito crítico e investigativo.	
-Conjunto dos Números Inteiros Relativos		-Identificar um número inteiro relativo, lendo e escrevendo. -Identificar os subconjuntos de Z -Representar os números inteiros relativos na reta numerada. -Reconhecer números opostos. -Comparar dois números inteiros relativos. -Ordenar números inteiros.
METODOLOGIA	Desenvolver atividades com diferentes fontes de informação, trabalhando com documentos variados, estimulando procedimentos de pesquisa, organização de informações coletadas, promovendo questões sobre o cotidiano e suas relações com contextos mais amplos.	
AVALIAÇÃO	CRITÉRIOS: O aluno será avaliado constantemente através de sua participação e envolvimento nas atividades propostas, assim como a tomada de iniciativa, sugestões, criatividade e desempenho nas aulas. INSTRUMENTOS: Trabalhos escritos, provas teóricas, dinâmicas de grupo, fichas de acompanhamento do desenvolvimento individual, fichas de observação e auto-avaliação sobre a participação.	
TEMAS TRANSVERSAIS	CIÊNCIA E TECNOLOGIA: Explorar a matemática no computador. SAÚDE: Pesquisar o número de alunos por turma que adquiriram um certo tipo de doença (catapora, etc.) e representar em números fracionários. SEXUALIDADE: Pesquisar e entrevistar pessoas do bairro sobre a prevenção de doenças sexualmente transmissíveis, gravidez, montando quadros comparativos. VIDA FAMILIAR: Entrevistar alunos da escola e verificar a situação familiar. MEIO AMBIENTE: Resolver problemas sobre questões ambientais. TRABALHO E CONSUMO: A importância dos estudos para o trabalho e poder analisar melhor o que compra.(preço, validade, etc). CULTURA/LINGUAGENS: Aproveitar as estatísticas do bairro, da cidade para as resoluções de problemas.	

Fonte: Planos de Estudos da escola EMNP.

Analisando os Planos de Estudos das escolas de Canoas, é possível perceber diferenças entre eles nas apresentações dos conteúdos a serem desenvolvidos, mas as similaridades entre alguns documentos levam à reflexão sobre os critérios utilizados na construção dos mesmos.

Os Planos de Estudos vão além de uma simples base curricular, contendo uma relação de nomes de componentes curriculares a que é atribuída uma carga horária, conforme o Parecer nº 323/99 da CEED – RS. Constituem-se em uma visão clara do que vai ser estudado, quando vai ser estudado, por quanto tempo será estudado e quais os objetivos, os conteúdos e a profundidade do que vai ser estudado.

Percebemos analisando os Planos de Estudos, que esses se utilizam das orientações dos PCN para estabelecer os conteúdos, as metodologias e quando serão estudados. Os PCN são orientações que trazem concepção, metodologias de ensino, sugestões didáticas e servem como base (mesmo não sendo obrigatórios) como referencial das ações escolares.

O estudo dos Números Racionais, segundo os PCN (BRASIL, 1998), nas suas representações fracionária e decimal, merecem especial atenção, no terceiro ciclo, partindo da exploração de seus significados, tais como a relação parte/todo, quociente, razão e operador.

Eles estão contidos no bloco Números e Operações e conforme os PCN, o ensino da Matemática nesse ciclo, em relação aos Números Racionais, deve visar:

- ampliar e construir novos significados para os Números Racionais, a partir de sua utilização no contexto social e da análise de alguns problemas históricos que motivaram sua construção;
- resolver situações-problema envolvendo Números Racionais e, a partir delas, ampliar e construir novos significados da adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação;
- identificar, interpretar e utilizar diferentes representações dos Números Racionais, indicadas por diferentes notações, vinculando-as aos contextos matemáticos e não-matemáticos;
- selecionar e utilizar procedimentos de cálculo (exato ou aproximado, mental ou escrito) em função da situação-problema proposta.

Quanto aos conceitos e procedimentos a serem adotados os PCN (BRASIL, 1998) trazem que os mesmos devem promover:

- compreensão do sistema de numeração decimal, identificando o conjunto de regras e símbolos que o caracterizam e extensão das regras desse sistema para leitura, escrita e representação dos Números Racionais na forma decimal;
- reconhecimento de Números Racionais em diferentes contextos - cotidianos e históricos - e exploração de situações-problema em que indicam relação parte/todo, quociente, razão ou funcionam como operador;
- localização na reta numérica de Números Racionais e reconhecimento de que esses podem ser expressos na forma fracionária e decimal, estabelecendo relações entre essas representações;
- análise, interpretação, formulação e resolução de situações-problema, compreendendo diferentes significados das operações, envolvendo números naturais, inteiros e racionais, reconhecendo que diferentes situações-problema podem ser resolvidas por uma única operação e que, eventualmente, diferentes operações podem resolver um mesmo problema;
- elaboração de cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) envolvendo operações - racionais - por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos nelas envolvidos, utilizando a calculadora para verificar e controlar resultados.

A partir da investigação dos Planos de Estudos realizada junto às escolas municipais de Canoas, na figura 57, apresentamos os conteúdos e os objetivos a serem desenvolvidos em relação ao tema Números Racionais no 7º ano do Ensino Fundamental.

Figura 57 - Planos de Estudos do tema Números Racionais no 7º ano.

Escola	Conteúdos/Tópicos	Objetivos Específicos/Competências cognitivas
EMAB	<ul style="list-style-type: none"> - Aplicação no cotidiano - Operações com Números Racionais - Resolução de problemas 	<ul style="list-style-type: none"> - fazer uso da linguagem matemática como ferramenta do cotidiano; - analisar, comparar e relacionar os acontecimentos do cotidiano com o conteúdo desenvolvido em sala de aula; - identificar, reconhecer e operar Números Racionais; - representar situações escritas em linguagem matemática.
EMCDA	<ul style="list-style-type: none"> - Conjunto dos Números Racionais 	<ul style="list-style-type: none"> - compreensão do significado das operações e uso adequado das habilidades de cálculos na solução dos problemas do cotidiano. - incentivar a curiosidade e o desenvolvimento da consciência crítica na busca de novos conhecimentos.
EMEF	Números Racionais <ul style="list-style-type: none"> - Operações 	<ul style="list-style-type: none"> - identificar os Números Racionais; - representar na reta numérica os Números Racionais; - desenvolver as operações fundamentais com os Números Racionais; - demonstrar que os Números Racionais podem ser representados na forma de fração.
EMF	<ul style="list-style-type: none"> - Revisão: 06 operações e números decimais e operações com frações. - Conjunto dos Números Racionais: - introdução - representação na reta - módulo - simétrica - comparação - inverso - operações (06) - expressões numéricas 	<ul style="list-style-type: none"> - compreender a teoria, aprender e assimilar, aplicar processos matemáticos; - desenvolver o raciocínio lógico e dedutivo; - aplicar o conhecimento adquirido na resolução de problemas propostos e situações do cotidiano (aplicação matemática).
EMG	<ul style="list-style-type: none"> - Conjunto dos Números Racionais - Operações no conjunto Q - Propriedades em Q 	<ul style="list-style-type: none"> - identificar o conjunto das frações negativas e positivas - escrever as frações em números decimais. - representar frações e números decimais na reta numérica. - compreender as principais operações. - ampliar o conceito de potenciação e radiciação para o conjunto Q. - resolver expressões no conjunto Q.
EMI	Números inteiros (Z) e racionais(Q) <ul style="list-style-type: none"> - Módulo, simétricos, comparação de números, representação dos números, subconjuntos, as 4 operações, potenciação, radiciação e expressões. 	<ul style="list-style-type: none"> - realizar cálculos mentais, escritos ou aproximados, envolvendo operações com inteiros e racionais.
EMIM	Números Racionais: <ul style="list-style-type: none"> - o uso; a representação; o módulo; o oposto e o inverso dos Números Racionais; - comparação e operações dos Números Racionais; - potenciação dos Números Racionais: propriedades da potenciação. 	<ul style="list-style-type: none"> - reconhecer a necessidade do uso dos Números Racionais no cotidiano; - identificar e reconhecer os números inteiros como parte do conjunto dos Números Racionais; - comparar dois Números Racionais (identificando corretamente se o primeiro é maior que, menor que ou igual ao segundo).
EMIP	<ul style="list-style-type: none"> - Números Racionais - Operações fundamentais (Z, Q) 	<ul style="list-style-type: none"> - reconhecer e relacionar os números inteiros e racionais no nosso dia-a-dia;

		<ul style="list-style-type: none"> - resolver expressões numéricas envolvendo números inteiros e racionais; - utilizar as operações fundamentais envolvendo números inteiros e racionais; - interpretar e resolver situações-problema que envolvam \mathbb{Z} e \mathbb{Q}.
EMJPS	<ul style="list-style-type: none"> - Conjunto dos Números Racionais - Frações 	<ul style="list-style-type: none"> - operações e expressões numéricas com as 06 operações (soma, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação). - rever características dos números fracionários. - resolver problemas com frações negativas. - reconhecer uma fração como parte de partes congruentes. - perceber que, para comparar frações, é necessário que os inteiros sejam do mesmo tamanho.
EMML	<p>Representação dos Números Racionais</p> <ul style="list-style-type: none"> - Comparação - Operações (+ , - , : , x , $\sqrt{\quad}$...) 	<ul style="list-style-type: none"> - dominar a leitura e a escrita da linguagem matemática. - fazer cálculos e resolver problemas. - analisar e interpretar fatos e situações expressas em gráficos e tabelas. - compreender seu entorno social e atuar sobre ele - receber criticamente os meios de comunicação e publicidade. - planejar, trabalhar e decidir em grupo.
EMNP	<ul style="list-style-type: none"> - Conjunto dos Números Racionais Relativos - Adição, Subtração, Multiplicação e Divisão em \mathbb{Q} 	<ul style="list-style-type: none"> - identificar Números Racionais Relativos; - identificar subconjuntos de \mathbb{Q}; - comparar Números Racionais Relativos; - calcular a soma, diferença, produto e quociente de Números Racionais Relativos; - resolver expressões numéricas; - calcular potências de base \mathbb{Q} e de expoente \mathbb{N} ou \mathbb{Z}; - calcular a raiz quadrada de um Número Racional.
EMNPM	<ul style="list-style-type: none"> - conjuntos \mathbb{Z} e \mathbb{Q} (representação, comparação e operações); - adição, subtração, multiplicação e divisão em \mathbb{Z} e \mathbb{Q}; - potenciação e raiz quadrada em \mathbb{Z} e \mathbb{Q}. 	<ul style="list-style-type: none"> - reconhecimento dos números inteiros (\mathbb{Z}) e racionais relativos (\mathbb{Q}) em diferentes contextos e a exploração de situações – problema em que indiquem falta, diferença, orientação (origem) e deslocamento entre dois pontos; - realizar as quatro operações com \mathbb{Z} e \mathbb{Q}; - determinar potência e raiz quadrada de base \mathbb{Z} e expoente \mathbb{N} e de base \mathbb{Q} e de expoente \mathbb{N} e \mathbb{Z}.
EMP	<ul style="list-style-type: none"> - Conjunto dos Números Racionais - Operações no conjunto \mathbb{Q} - Propriedades em \mathbb{Q} 	<ul style="list-style-type: none"> - identificar o conjunto das frações negativas e positivas - escrever as frações em números decimais. - representar frações e números decimais na reta numérica. - compreender as principais operações. - ampliar o conceito de potenciação e radiciação para o conjunto \mathbb{Q}. - resolver expressões no conjunto \mathbb{Q}.
EMMR CL	<ul style="list-style-type: none"> - Conjunto \mathbb{Q}; - escrita fracionária de Números; - comparação de frações; - representação geométrica na reta numerada; - Números Racionais opostos; - adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação em \mathbb{Q} e suas propriedades; - expressões em \mathbb{Q} - operações, ordem das operações, sinais de associação. 	<ul style="list-style-type: none"> - conhecer e identificar o conjunto dos Números Racionais relativos como aplicação do conjunto \mathbb{Z}; - resolver operações com Números Racionais relativos e aplicar em problemas; - resolver expressões fracionárias.
EMTAN	<ul style="list-style-type: none"> - Conjunto dos Números Racionais relativos: conceito e representação geométrica; 	<ul style="list-style-type: none"> - não apresentou objetivos específicos.

	- adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação de Números Racionais.	
--	---	--

Fonte: Planos de Estudos das escolas municipais.

Algumas escolas apresentam, nos seus Planos de Estudos, os conteúdos de forma mais detalhada, outras de forma muito genérica. Contudo, o que podemos ver em comum é a formalização dos estudos dos conjuntos dos Números Racionais no 7º ano, além da forte influência das indicações dos PCN nos objetivos específicos no estudo do tema.

A partir da investigação acerca das indicações oficiais sobre Números Racionais e de que forma eles são expressos nos Planos de Estudos das escolas, investigamos, junto a um grupo de professores da rede municipal de Canoas, como essas indicações se dão na sua prática de sala de aula.

Alguns dos Planos de Estudos indicam metodologias a serem utilizadas no processo de estudo da Matemática. Das dezesseis escolas investigadas, somente metade delas fazem isso. Algumas, de forma genérica para todas disciplinas de todos os anos do Ensino Fundamental, como apresenta a figura 58.

Figura 58 - Metodologias indicadas pelas escolas municipais investigadas.

Escola	Ano	Metodologia indicada no ensino de Matemática
EMAB	7º	<ul style="list-style-type: none"> - Situações-problema que se inserem na realidade do aluno - Exercícios de aplicação - Jogos matemáticos - Trabalhos em grupos e individual - Pesquisas - Exposições - Aulas expositivas e dialogadas - Uso de calculadora para a compreensão dos cálculos de porcentagem - Uso de informática como ferramenta de aprendizagem
EMEF	7º	- Desenvolver aulas expositivas e dialogadas, bem como utilizar material concreto para auxiliar na compreensão dos conteúdos em estudo. Instigar o aluno a construir e desenvolver seu raciocínio lógico.
EMIM	1º ao 9º do EF para todas disciplinas	<p>- O processo de estudo é orientado através de metodologia dialógica, onde o aluno formula hipóteses, investiga, pesquisa, reflete, observa e critica.</p> <p>A ação pedagógica envolve educadores e educandos num processo interativo, considerando os aspectos da vida cidadã, tendo como objetivo a formação integral do educando, levando ao pleno desenvolvimento das áreas afetivas, cognitivas e psicomotoras.</p> <p>A escola envolve todos os aspectos da aprendizagem, através de diferentes recursos e técnicas, e o professor atua como um orientador e incentivador deste processo.</p> <p>Trabalhar com materiais diversos, narração de histórias, filmes com assuntos em estudo, exposição de trabalhos em grupos e individuais, saídas de estudos, apresentações artísticas e atividades recreativas que desenvolvam habilidades motoras e cognitivas.</p>
EMJPS	7º	<ul style="list-style-type: none"> - Utilizar técnicas para entrosamento da turma. - Construir regras de convivência. - Aula expositiva dialogada. - Quadro negro. - Livro didático. - Atividade orientada com manipulação de material concreto. - Questionamentos orais. - Manipulação de jornais e revistas entre outros materiais concretos.

		<ul style="list-style-type: none"> - Resolução de situações-problema. - Atividade em grupo. - Pesquisas de reportagens em jornais e revistas. - Folhas com atividades. - Utilização da internet.
EMNP	7º	- Desenvolver atividades com diferentes fontes de informação, trabalhando com documentos variados, estimulando procedimentos de pesquisa, organização de informação coletadas, promovendo questões sobre o cotidiano e suas relações com contextos mais amplos.
EMNPT	7º	- Desenvolver atividades com diferentes fontes de informação trabalhando com documentos variados, estimulando procedimentos de pesquisa, organização de informações coletadas, promovendo questões sobre o cotidiano e suas relações com contextos mais amplos.
EMTAN	1º ao 9º do EF para todas disciplinas	- O trabalho será realizado, considerando as variadas estratégias metodológicas e recursos que permitam uma aprendizagem significativa e prazerosa para os (as) alunos (as), buscando relacionar os conhecimentos prévios aos conhecimentos científicos e aos temas que atravessam tais conhecimentos.
IMML	7º	<ul style="list-style-type: none"> - Aula expositiva - Resolução de exercícios e problemas - Jogos lógicos - Materiais concretos - Vídeos (filmes didáticos) - Atividades (jogos, materiais, concretos, exercícios...) realizadas individualmente e no pequeno e grande grupo - Uso de encartes comerciais - Análise de gráficos e pirâmides populacionais - Pesquisas de preços de supermercados...

Fonte: Planos de Estudos das escolas municipais.

Analisando os Planos de Estudos, apesar de mesmos serem constituídos pelo corpo docente de cada escola é possível verificar que algumas apresentam metodologias idênticas, como é o caso das escolas EMNP e EMNPT, o que nos induz a pensar que esses documentos sofrem uma grande influência das orientações oficiais, como os PCN, com discursos muitos semelhantes.

Conforme a DCNEB (BRASIL, 2013a), com base no do artigo 27 da LDB, podemos entender que o processo didático em que se realizam as aprendizagens fundamenta-se na diretriz que assim delimita o conhecimento para o conjunto de atividades:

Os conteúdos curriculares da Educação Básica observarão, ainda, as seguintes diretrizes:

I – a difusão de valores fundamentais ao interesse social, aos direitos e deveres dos cidadãos, de respeito ao bem comum e à ordem democrática;

II – consideração das condições de escolaridade dos estudantes em cada estabelecimento;

III – orientação para o trabalho;

IV – promoção do desporto educacional e apoio às práticas desportivas não-formais (BRASIL, 2013a, p.24).

Ainda, segundo o documento, a organização curricular assim concebida supõe outra forma de trabalho na escola, que consiste na seleção adequada de conteúdos e atividades de aprendizagem, de métodos, procedimentos, técnicas e recursos didático-pedagógicos. A perspectiva da articulação interdisciplinar é voltada para o desenvolvimento não apenas de

conhecimentos, mas também de habilidades, valores e práticas. E quanto a organização da matriz curricular, serão observados os critérios a seguir:

[...] III – da interdisciplinaridade e da contextualização, que devem ser constantes em todo o currículo, propiciando a interlocução entre os diferentes campos do conhecimento e a transversalidade do conhecimento de diferentes disciplinas, bem como o estudo e o desenvolvimento de projetos referidos a temas concretos da realidade dos estudantes [...] (BRASIL, 2013a, p.34).

Quanto à seleção dos conteúdos, os PCN (BRASIL, 1997), afirmam que há um razoável consenso no sentido de que os currículos de Matemática para o Ensino Fundamental devam contemplar o estudo dos números e das operações (no campo da Aritmética e da Álgebra), do espaço e das formas (no campo da Geometria), das grandezas e das medidas (que permite interligações entre os campos da Aritmética, da Álgebra e da Geometria). E complementam:

O desafio que se apresenta é o de identificar, dentro de cada um desses vastos campos, de um lado, quais conhecimentos, competências, hábitos e valores são socialmente relevantes; de outro, em que medida contribuem para o desenvolvimento intelectual do aluno, ou seja, na construção e coordenação do pensamento lógico-matemático, da criatividade, da intuição, da capacidade de análise e de crítica, que constituem esquemas lógicos de referência para interpretar fatos e fenômenos (BRASIL, 1997, p.34).

Nas escolas pesquisadas em Canoas, o conteúdo dos Números Racionais está no currículo do 7º ano. As indicações mais corriqueiras em relação aos Números Racionais nos Planos de Estudos investigados foram:

- *propriedades;*
- *operações com os Números Racionais;*
- *representar na reta numérica os Números Racionais;*
- *resolução de Problemas;*
- *aplicação no cotidiano.*

Esses são os conceitos que mais aparecem indicados nos Planos de Trabalhos das escolas, o que dão um indicativo sobre a forma como deve ser desenvolvida a temática pelo professor. Isso nos dá um indicativo que as escolas seguem as orientações dos PCN para o ensino dos Números Racionais.

Em algumas escolas, a indicação dos conteúdos é apresentada de forma bem simplificada, como no caso da escola EMCDA. Em outras, é bem mais detalhados como o caso é o caso da escola EMIM. Para realizar um comparativo, na figura 59, apresentamos a lista de conteúdos e objetivos específicos indicados pelas escolas para a disciplina de Matemática.

Figura 59 - Lista de conteúdos e objetivos específicos da disciplina de Matemática das escolas EMCDA e EMIM para no 7º ano do Ensino Fundamental.

Escola	Conteúdos	Objetivos específicos
EMCDA	<ul style="list-style-type: none"> - Conjunto dos números inteiros - Conjunto dos Números Racionais - Equação do 1º grau - Resoluções de problemas do 1º grau com uma variável - Sistema de equação do 1º grau - Razão e proporção - Regra de três - Porcentagem 	<ul style="list-style-type: none"> - compreensão do significado das operações e uso adequado das habilidades de cálculos na solução dos problemas do cotidiano; - incentivar a curiosidade e o desenvolvimento da consciência crítica, na busca de novos conhecimentos.
EMIM	<p>SONDAGEM:</p> <ul style="list-style-type: none"> - conjunto dos números naturais e suas operações: adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação; - frações e números decimais. <p>NÚMEROS INTEIROS:</p> <ul style="list-style-type: none"> - o uso cotidiano dos números positivos e negativos; - o conjunto dos números inteiros; - representação geométrica; - comparação; - módulo (ou valor absoluto); - opostos (ou simétricos); - operações; - expressões numéricas e resolução de problemas envolvendo todas as operações. <p>NÚMEROS RACIONAIS</p> <ul style="list-style-type: none"> - o uso, a representação, o módulo, o oposto e o inverso dos Números Racionais; - comparação e operações dos Números Racionais; - potenciação dos Números Racionais: propriedades da potenciação. <p>EQUAÇÕES DO 1º GRAU</p> <ul style="list-style-type: none"> - resolução de equações do 1º grau com o uso de técnicas algébricas; - representação de sentenças matemáticas; - resolução de problemas através de equações do 1º grau com uma incógnita - equações do 1º grau com duas incógnitas; - sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas; - inequações. <p>RAZÃO E PROPORÇÃO</p> <ul style="list-style-type: none"> - razões e razões especiais; - porcentagem; <p>GRANDEZAS PROPORCIONAIS E REGRA DE TRÊS</p>	<ul style="list-style-type: none"> - perceber e solucionar eventuais lacunas de aprendizagem dos conceitos da sondagem necessários para o aprendizado do conteúdo do 7º ano; - reconhecer a necessidade do uso dos números negativos no cotidiano (temperaturas, altitudes, saldos, etc); - identificar Z e perceber que o conjunto dos números naturais faz parte do conjunto dos números inteiros - representar os números inteiros na reta, a fim de obter melhor visualização para comparação de inteiros e identificação de sucessores e antecessores; - compreender o conceito de módulo como a distância entre o número e o ponto de origem - compreender o conceito de simetria entre inteiros através da confecção de figuras simétricas; - compreender situações onde são necessários os números inteiros, operando-os com a utilização de adição, subtração, multiplicação; - reconhecer a necessidade do uso dos Números Racionais no cotidiano; - identificar e reconhecer os números inteiros como parte do conjunto dos Números Racionais; - comparar dois Números Racionais (identificando corretamente se o primeiro é maior que, menor que ou igual ao segundo); - compreender as propriedades da potenciação e utilizá-las, reconhecendo estas como uma maneira de facilitar os cálculos - identificar uma equação do 1º grau e seus termos: primeiro e segundo membros; - resolver equações do 1º grau utilizando as propriedades matemáticas; - representar matematicamente e resolver sentenças dadas em problemas cotidianos; - reconhecer situações-problema onde é necessária a utilização de duas variáveis; - resolver sistemas de equações com duas variáveis a partir de problemas; - reconhecer uma inequação do 1º grau e resolver utilizando os princípios aditivo e multiplicativo das desigualdades do tipo $>ou<$; - compreender a ideia de razão com exemplos cotidianos e reconhecer razões especiais (escala, velocidade média, densidade demográfica, etc.); - converter razões em porcentagem; - identificar a proporção como uma razão; - observar a relação entre grandezas e estabelecer relações entre elas;

<ul style="list-style-type: none"> - proporcionalidade direta e inversa - regra de três simples e composta <p>ÂNGULOS</p> <ul style="list-style-type: none"> - conceito, usos e medidas - classificação e propriedades <p>ÁREA DE FIGURAS</p> <ul style="list-style-type: none"> - cálculo da área de diferentes figuras planas 	<ul style="list-style-type: none"> - resolver situações-problema que envolvam proporcionalidade; - reconhecer o vértice e os lados de um ângulo; - determinar a medida de um ângulo e identificar ângulos: reto, agudo e obtuso; - calcular a área de diferentes figuras planas: quadrado, retângulo, triângulo, losango, paralelogramo e trapézio.
--	---

Fonte: Planos de Estudos das escolas EMCDA e EMIM.

Nesse primeiro momento da análise apresentamos como se refletem as orientações oficiais no processo educacional, dando ênfase ao tema Números Racionais, principalmente como se expressam nos Planos de Estudos das escolas brasileiras, e como essas orientações são interpretadas nesses documentos que servem como referência para as ações escolares.

Dando continuidade à análise dos dados obtidos, na sequência, analisamos e comparamos os livros didáticos indicados pelos professores brasileiros e mexicanos.

3.2 A ABORDAGEM DOS NÚMEROS RACIONAIS NOS LIVROS DIDÁTICOS: PROPÓSITOS E INDICAÇÕES OFICIAIS

O Brasil e o México possuem programas de livros didáticos para estudantes das escolas públicas. No Brasil, através do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e, no México, por meio da *Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos* (CONALITEG), que avalia os livros didáticos, seleciona e distribui às escolas. Os programas de livros didáticos de ambos os países são antigos: o brasileiro iniciou em 1929 e o mexicano em 1959.

O programa brasileiro tem por objetivo fornecer às escolas públicas de Ensino Fundamental e Médio livros didáticos, obras literárias, obras complementares e dicionários. O PNLD é executado em ciclos trienais alternados, adquirindo e distribuindo livros para todos os alunos de determinada nível, e repondo e complementando os livros reutilizáveis. São reutilizáveis os seguintes componentes: Matemática, Língua Portuguesa, História, Geografia, Ciências, Física, Química e Biologia. Os consumíveis são: Alfabetização Matemática, Letramento e Alfabetização, Inglês, Espanhol, Filosofia e Sociologia. Para atender a todos os alunos, são distribuídas, também, versões acessíveis (áudio, Braille e MecDaisy⁵²) dos livros aprovados e escolhidos no âmbito do PNLD. O programa especifica todos os critérios exigidos para as inscrições das obras, que são avaliadas pelo MEC, que elabora o Guia do Livro Didático,

⁵² O MecDaisy trata-se de uma ferramenta tecnológica que permite a produção de livros em formato digital acessível. Possibilita a geração de livros digitais falados e sua reprodução em áudio, gravada ou sintetizada e apresenta facilidade de navegação pelo texto, permitindo a reprodução sincronizada de trechos selecionados, o recuo e o avanço de parágrafos e a busca de seções ou capítulos.

composto das resenhas de cada obra aprovada. Após, escola escolhe, dentre os livros constantes no Guia, aqueles que deseja utilizar, levando em consideração seu planejamento pedagógico.

No México, a CONALITEG é a responsável pelo programa de livros didáticos e obras complementares para os níveis Pré-escolar, Primário, Secundário, Telesssecundário e escolas indígenas (em 42 línguas diferentes). Também inclui livros em Braille e em macrotipo⁵³ para os níveis Primário e Secundário. Os livros didáticos autorizados pela SEP são incluídos no catálogo do CONALITEG e disponibilizado para as escolas e professores.

Diferente do programa brasileiro, no qual as editoras produzem e imprimem os livros, conforme os editais publicados pelo PNLD, no México, os livros destinados aos níveis Pré-escolar, Primário, Telessecundário, Educação Indígena, bem como as versões de Braille e macrotipo para o nível Primário são produzidos pela SEP e impressos sob responsabilidade do CONALITEG⁵⁴.

Os livros do nível Secundário (assim como as versões Braille e macrotipo para esse nível), materiais educacionais e obras literárias para as bibliotecas escolares são produzidos e impressos por editoras privadas. Eles são avaliados e selecionados pela SEP, conforme o artigo 12 da LGE e o *Acuerdo Secretarial Número 385*, que determina os critérios e procedimentos para autorizar o uso dos livros didáticos.

Um aspecto relevante a ser destacado é como os livros didáticos brasileiros e mexicanos são concebidos. No Brasil, são mais detalhados, desenvolvendo os conceitos a serem trabalhados e atividades de cada conteúdo. No México, apresentam uma breve explicação do conteúdo e focam nas atividades sobre o tema, havendo uma Base Nacional comum que as escolas devem seguir.

Em relação aos livros didáticos, nesta investigação, foram analisados os recebidos pelas escolas dos professores participantes da pesquisa. Foram eles: no Brasil, Matemática Bianchini (BIANCHINI, 2011), para o 6º e 7º anos do Ensino Fundamental; no México, *Desafíos Matemáticos* (SEP, 2014), para o 6º grau do Nível Primário; *Matemáticas Primer Grado: desarrollo del pensamiento matemático* (CANTORAL, FARFÁN, MONTIEL, LEZAMA, MOLINA, CABAÑAS, CASTAÑEDA, SÁNCHEZ E MARTÍNEZ-SIERRA, 2014), para o 1º grau do Nível Secundário; *Matemáticas 1* (Trigueiros, Lozano, Inés, Sandoval, Jinich e Córtes, 2012), para o 1º grau do Nível Secundário; *Matemáticas 1: 1er Grado Volumen 1* (SEP, 2015), para o 1º grau do nível Telessecundário.

⁵³ Os livros de macrotipo do Secundário são uma edição em tamanho dupla carta (tabloide) dos livros originais.

⁵⁴ Cerca de 14% dos livros distribuídos anualmente são impressos na gráfica da CONALITEG, no estado de Querétaro (México); os outros 86% são impressos em gráficas privadas.

Entendemos que o livro didático tem um papel relevante no processo escolar, não só pela importância que os governos dão, através dos programas de distribuição, ou pela magnitude de milhões de estudantes e professores alcançados, mas também, pela influência que estes possuem na prática do professor, em sala de aula, como referência.

3.2.1 A importância dos livros didáticos como orientações aos professores

Segundo Silva (2010), o livro didático assume múltiplas funções e características: constitui-se como uma referência de conteúdos para alunos e professores, guia orientador de atividades em sala de aula e como padrão de organização e sistematização do currículo. Ainda, segundo o autor, a ação do professor na sala de aula é muito influenciada pela maneira como os livros abordam os conteúdos matemáticos.

O autor ainda afirma que:

O controle sobre a educação pelo Estado é também expresso com relação aos livros didáticos, já que este se configura como um dos maiores compradores, pelo PNLD, ao mesmo tempo em que é ele que regula e avalia os livros didáticos. O Estado estabelece/sugere o conteúdo, por meio dos PCN, estabelece métodos de avaliação dos livros didáticos, configurando-se assim como o elemento chave de todo o processo (SILVA, 2010, p.56).

Segundo o Guia dos Livros Didáticos do Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) 2011 (BRASIL, 2010, p.13), no que diz respeito ao professor, o livro didático desempenha, entre outras, as importantes funções de:

- auxiliar no planejamento e na gestão das aulas, seja pela explanação de conteúdos curriculares, seja pelas atividades, exercícios e trabalhos propostos;
- favorecer a aquisição dos conhecimentos, assumindo o papel de texto de referência;
- favorecer a formação didático-pedagógica;
- auxiliar na avaliação da aprendizagem do aluno.

Ainda conforme esse documento, o livro didático é recurso auxiliar no processo de ensino-aprendizagem e não pode, portanto, ocupar o papel dominante nesse processo. Assim, cabe ao professor manter-se atento, para que sua autonomia pedagógica não seja comprometida.

Conforme o Guia de Livros Didáticos PNLD 2014 (BRASIL, 2013b), no processo de ensino e aprendizagem, o livro didático é um interlocutor que dialoga com o professor e com o aluno. Nesse diálogo, o livro é portador de uma perspectiva sobre o saber a ser estudado e sobre o modo mais eficaz de aprendê-lo.

O documento utiliza as ideias de Gérard & Roegiers (1998 apud BRASIL, 2013b), para ressaltar as funções mais importantes do livro didático na relação com o aluno:

- favorecer a aquisição de conhecimentos socialmente relevantes;

- propiciar o desenvolvimento de competências cognitivas que contribuam para aumentar a autonomia;
- consolidar, ampliar, aprofundar e integrar os conhecimentos adquiridos;
- auxiliar na autoavaliação da aprendizagem;
- contribuir para a formação social e cultural e desenvolver a capacidade de convivência e de exercício da cidadania.

Dialogando com o grupo de professores investigados, foi possível entender nesses casos específicos, como todo esse processo dos programas de livros didáticos propostos pelos governos chega à sala de aula. Como exemplo, apesar das políticas públicas e do esforço de promover a escolha do livro de didático pelos professores, através dos Guias de Livros Didáticos do PNLD, nem sempre as escolas recebem os livros escolhidos pelo corpo docente, ou mesmo, como os projetos do PNLD é trienal, alguns professores não participaram da escolha, por não estarem alocados na escola na época da escolha.

Mas, independentemente da situação, a indicação é que o livro sirva como auxílio ao trabalho didático do professor, e o Guia de Livros Didáticos (BRASIL, 2010) ressalta:

É preciso observar, no entanto, que as possíveis funções que um livro didático pode exercer não se tornam realidade, caso não se leve em conta o contexto em que ele é utilizado. Em outras palavras, as funções acima referidas são histórica e socialmente situadas e, assim, sujeitas a limitações e contradições. Por isso, tanto na escolha quanto no uso do livro, o professor tem o papel indispensável de observar a adequação desse instrumento didático à sua prática pedagógica, ao seu aluno e ao projeto político-pedagógico de sua escola (BRASIL, 2010, p.13).

É relevante salientar, que apesar de toda a sua importância, o livro didático não deve ser o único suporte do trabalho pedagógico do professor, mas assumiu protagonismo entre os professores investigados, principalmente entre os professores brasileiros.

Como citamos anteriormente, Brasil e México possuem orientações gerais para o trabalho didático-pedagógico dos professores. E, além dessas orientações gerais, os livros didáticos possuem orientações específicas sobre os conteúdos, com sugestões de metodologias a serem adotadas.

Em uma das entrevistas realizadas durante essa investigação, Cantoral explicou como funciona essa dinâmica no México. Seu grupo de pesquisa participou da elaboração dos guias para os professores⁵⁵ dos níveis Primário e Secundário. Do nível Primário participaram, além de Cantoral, também Farfán, Márquez e Sánchez. Do Secundário⁵⁶, o grupo foi composto por

⁵⁵ Programas de estudio 2011. Guía para el Maestro. Educación Básica. Primaria. (Primeiro, Segundo, Tercero, Cuarto, Quinto e Sexto) (MÉXICO, 2011).

⁵⁶ Os Programas de estudio são os mesmos para as três modalidades de Secundário: Telessecundário, Técnico e Geral.

Farfán Márquez, Montiel Espinosa e Buendía Ábalos, com a colaboração de Reyes-Gasperini, Gutiérrez Adrián, Moreno Valdez, Balam Güemez y Flores García.

Na figura 60, reproduzimos os trechos mais importantes dessa entrevista. Para facilitar o entendimento, todas as entrevistas na língua espanhola serão apresentadas com os trechos originais e a tradução para língua portuguesa.

Figura 60 – Primeira parte da entrevista com Cantoral sobre livros didáticos no México.

Trechos originais	Trechos traduzidos
Cantoral: <i>Este fue el grupo mira, Pensamiento Matemático, fue Rosa María, Guadalupe e yo.</i>	Cantoral: <i>Veja, este foi o grupo. O Pensamento Matemático foi Rosa María, Guadalupe e eu.</i>
Investigador: <i>¡Sí!</i>	Investigador: <i>Sim!</i>
Cantoral: <i>Responsable por el campo. Cada área tenía un grupo responsable.</i>	Cantoral: <i>Responsável pelo campo. Cada área tinha um grupo responsável.</i>
Investigador: <i>¿Un grupo responsable?</i>	Investigador: <i>Um grupo responsável?</i>
Cantoral: <i>Pero los contenidos era responsable otro equipo, Hugo Balbuena por ejemplo en Matemáticas, ton son dos ideas que van a combinar. Hay que ver este Guía para los Maestros.</i>	Cantoral: <i>Mas pelos conteúdos era responsável outra equipe: Hugo Balbuena, por exemplo, em Matemática. Então são duas ideias que combinam. Tem que ver este Guía para los Maestros.</i>
Investigador: <i>¿El Guía para Maestro? Sí.</i>	Investigador: <i>O Guía para Maestro? Sim.</i>
Cantoral: <i>Programas va más o menos usual, común. Aquí está, esta parte que apoya el pensamiento matemático, este fuera nuestro. Y habían un esquema [...] que todo mundo deberían tener que seguir, por intenciones, por planificación, organización...</i>	Cantoral: <i>Programas serão mais ou menos habituais, comuns. Aqui está esta parte que apoia o pensamento matemático. Este foi nosso. E havia um esquema [...] que todo mundo deveria seguir, por intenções, por planejamento, organização...</i>
Investigador: <i>¿Esto era una determinación de la SEP que deberían seguir?</i>	Investigador: <i>Esta era una determinación de la SEP que deberían seguir?</i>
Cantoral: <i>Sí [...] Programas es lo otro grupo.</i>	Cantoral: <i>Sim! [...] Programas é de outro grupo.</i>
Investigador: <i>¿Es una determinación de los contenidos que deben ser trabajados nos grados?</i>	Investigador: <i>É uma determinação dos conteúdos que devem ser trabalhados nos graus?</i>
Cantoral: <i>Exactamente [...]</i>	Cantoral: <i>Exatamente [...]</i>

Fonte: a pesquisa (tradução nossa).

Os “Programas de estudio 2011. Guía para el Maestro. Educación Básica. Primaria” foram elaborados pela *Dirección General de Desarrollo Curricular* (DGDC) e pela *Dirección General de Formación Continua de Maestros en Servicio* (DGFCMS), que pertencem à *Subsecretaría de Educación Básica* da SEP. Esses documentos estão divididos em duas partes, os *Programas de Estudios* de responsabilidade da DGDC e o *Guía para los Maestros* sob responsabilidade da DGFCMS.

Foi nessa segunda parte que o grupo de Cantoral participou da elaboração do eixo denominado *Campo de Formación Pensamiento Matemático*, à qual ele se referiu na entrevista. Esse eixo é dividido em cinco enfoques: *Enfoque del campo de formación, Planificación, Organización de ambientes de aprendizaje, Evaluación e Orientaciones pedagógicas y didácticas. Ejemplos*. Nessa parte da entrevista, tratamos sobre a forma de trabalho desses grupos (figura 61).

Figura 61 – Segunda parte da entrevista com Cantoral sobre livros didáticos no México.

Trechos originais	Trechos traduzidos
<p>Investigador: <i>¿Los grupos trabajan aparte, o este grupo influencio lo trabajo de otro grupo?</i></p> <p>Cantoral: <i>Uno, conocíamos lo trabajo de los demás, dialogábamos pero éramos autónomos, cada uno podría escribir o que quería, pero los programas estaban hecho cuando empezamos.</i></p> <p>Investigador: <i>Sí, ya había los puntos a ser trabajados pelos grupos.</i></p> <p>Cantoral: <i>Exactamente, ya estaba. Y uno se adaptaba a ellos con tú filosofía, pero cada área del saber trabajaba diferente. La área de la Lengua y de las Matemáticas seguirán la idea Socio.</i></p> <p>Investigador: <i>¿La Lengua también?</i></p> <p>Cantoral: <i>Sí, tú puedes ver, la práctica social, de lo uso de lenguaje.</i></p> <p>Investigador: <i>¿Y lo otro grupo de las Matemáticas, lo otro grupo de trabajo, había una aproximación con la Socio también, o no?</i></p> <p>Cantoral: <i>Lo grupo de la Lengua, Lenguaje. Los que diseñaran lo currículo es alguien que era egresado del CINVESTAV.</i></p> <p>Investigador: <i>Conocía las ideas.</i></p> <p>Cantoral: <i>Sí, conocía. Pero, ello se limitó también a o que ya había en la anterior reforma curricular, o sea, ello no cambio en demasiado.</i></p> <p>Investigador: <i>Ello utilizó algunas de las ideas, más no solamente de la Socio.</i></p> <p>Cantoral: <i>Sí.</i></p>	<p>Investigador: <i>Os grupos trabalham à parte, ou este grupo influenciou o trabalho do outro grupo?</i></p> <p>Cantoral: <i>Conhecíamos o trabalho dos demais, dialogávamos, mas éramos autônomos. Cada um poderia escrever o que queria, mas os programas estavam feitos quando começamos.</i></p> <p>Investigador: <i>Sim, já havia os pontos a serem trabalhados pelos grupos.</i></p> <p>Cantoral: <i>Exatamente, já havia. E cada um se adaptava a eles com a sua filosofia, mas cada área do saber trabalhava diferente. A área da Língua e da Matemática seguiram a ideia Socio.</i></p> <p>Investigador: <i>A Língua também?</i></p> <p>Cantoral: <i>Sim, você pode ver a prática social do uso de linguagem.</i></p> <p>Investigador: <i>E o outro grupo da Matemática, o outro grupo de trabalho, havia uma aproximação com a Socio também, ou não?</i></p> <p>Cantoral: <i>O grupo da Língua, Linguagem, os que projetaram o currículo é alguém que era egresso do CINVESTAV.</i></p> <p>Investigador: <i>Conhecia as ideias.</i></p> <p>Cantoral: <i>Sim, conhecia. Mas ele se limitou, também, ao que já havia na reforma curricular anterior, ou seja, ele não mudou demais.</i></p> <p>Investigador: <i>Ele utilizou algumas das ideias, mas não somente da Socio.</i></p> <p>Cantoral: <i>Sim.</i></p>

Fonte: a pesquisa (tradução nossa).

Na continuação da entrevista (figura 62), tratamos da influência das ideias da TSME presente na construção desse documento, onde Cantoral cita trechos e faz comentários, relacionando-os com a Teoria da Socioepistemologia. Nessa parte da entrevista, destacamos, em parênteses e negrito, esses comentários nos trechos citados. Cantoral inicia falando do enfoque do *Campo de Formación*:

Figura 62 – Terceira parte da entrevista com Cantoral sobre livros didáticos no México.

Trechos originais	Trechos traduzidos
<p>Cantoral: <i>El tratamiento escolar de las Matemáticas en los Planes y Programas de la SEP, esto hice otra gente, y nosotros decimos: “El tratamiento escolar deesees planes (que aquí están), se ubica en el campo de Pensamiento Matemático (aquello que nosotros proponemos), con la consigna (objetivo) de desarrollar el pensamiento avanzado en el uso intencionado del conocimiento (aquí ya sai la primera idea Socio, no es el conocimiento, pero lo uso de lo conocimiento), favoreciendo la diversidad de enfoques (esto es relativismo), el apoyo en los contextos sociales, culturales y lingüísticos (es la perspectiva cultural de la Socio), en el abordaje de situaciones de aprendizaje para encarar y plantear retos adecuados al desarrollo y de fomentar el interés y gusto por la matemática en un sentido amplio a lo largo de la vida de los ciudadanos (fuera del aula).</i></p>	<p>Cantoral: <i>O tratamento escolar da Matemática nos Planos e Programas da SEP, foi feito por outra pessoa, e nós dissemos: “O tratamento escolar desses planos (que aqui estão) se localiza no campo do Pensamento Matemático (aquilo que nós propomos), com o propósito (objetivo) de desenvolver o pensamento avançado no uso intencional do conhecimento (aqui já sai a primeira ideia Socio, não é o conhecimento, mas o uso do conhecimento), favorecendo a diversidade dos enfoques (isto é, relativismo), o apoio nos contextos sociais, culturais e lingüísticos (é a perspectiva cultural da Socio), na abordagem de situações de aprendizagem, para encarar e planejar desafios adequados ao desenvolvimento e fomentar o interesse e o gosto pela Matemática em um sentido amplo ao longo da vida dos cidadãos (fora da aula). Nessa direção buscamos</i></p>

<p>En esta dirección buscamos que las orientaciones (que presentamos desarrollo) esta forma en pensamiento matemático. Dada la naturaleza transversal del saber matemático (otra idea Socio, o sea, para nosotros el conjunto de la Matemáticas también está en la lengua, en la vida cotidiana, en la Física, esto es lo que decimos acá), resulta significativo destacar que, debido a ello, habrá nociones (matemáticas) y procesos matemáticos que se presentan en varios ejes (no solo en eje numérico, en varios eje) y en distintas temáticas. Las diferencias de tratamiento se podrán reconocer a través del uso que se hace de ellas mediante las representaciones y contextos de aplicación. [...] en la Planificación: Por ejemplo, el uso de problemas prácticos, comúnmente llamados 'de la vida real', recurre al lenguaje cotidiano para expresarse y es a partir de estas manifestaciones que se reconoce el fondo o base de los conocimientos, que pueden incluir también los saberes matemáticos relacionados con el aprendizaje esperado”.</p>	<p>que as orientações (que apresentamos) desenvolvam, dessa forma, pensamento matemático. Dada a natureza transversal do saber matemático (outra ideia Socio, ou seja, para nós, o conjunto da Matemática também está na língua, na vida cotidiana, na Física, isto é o que dizemos aqui), resulta significativo destacar que, devido a ele, haverá noções (matemáticas) e processos matemáticos que se apresentam em vários eixos (não só no eixo numérico, em vários eixo) e em distintas temáticas. As diferenças de tratamento podemos reconhecer através do uso que se faz delas, mediante as representações e contextos de aplicação. [...] no Planejamento, por exemplo, o uso de problemas práticos, comumente chamados 'de vida real', recorre à linguagem cotidiana para expressar-se e é a partir dessas manifestações que se reconhece, a fundo, a base dos conhecimentos, que podem incluir, também, os saberes matemáticos relacionados com a aprendizagem esperada”.</p>
--	---

Fonte: a pesquisa (tradução nossa).

Na figura 63, apresentamos outro momento da conversa no qual discutimos a relação dos livros didáticos com as orientações aos professores. Essa discussão se torna importante para entender esse processo, lembrando que o grupo de pesquisa de Cantoral também publicou uma das coleções para o nível Secundário, autorizada pelo CONALITEG para distribuição nas escolas.

Figura 63 – Quarta parte da entrevista com Cantoral sobre livros didáticos no México.

Trechos originais	Trechos traduzidos
<p>Investigador: ¿Este eres o Guía para los Maestros como trabajar con los libros textos? Cantoral: Aham! Investigador: ¿Este es el libro? (indicando o livro didático produzido pelo grupo de pesquisa de Cantoral) Cantoral: Este es el libro! Investigador: Y luego las orientaciones (falando do Guía). Cantoral: Exactamente! Investigador: ¿Las orientaciones están basadas en la Socio? Cantoral: Sí. Investigador: ¿Y lo libro? Cantoral: Se adapta. Investigador: ¿Se adapta a la Socio? Cantoral: Igual, imagino que ya entendiste. Oiga, lo Ministerio de la Educación, Secretaría de Educación propone un contenido, y propone las reglas para que los autores elabore libros. Uno se adapta al contenido, se adapta a las reglas, pero pones su filosofía, entonces el libro, que es este, eres para los alumnos, el mismo libro se coloca así y hacen observaciones para los profesores que sirven para interpretar la filosofía, pero lo programa ya está hecho. [...] A ver, los programas de estudio, los hacen</p>	<p>Investigador: Este é o Guia para os professores sobre como trabalhar com os livros didáticos? Cantoral: Aham! Investigador: Este é o livro? (indicando o livro didático produzido pelo grupo de pesquisa de Cantoral). Cantoral: Este é o livro! Investigador: E logo as orientações (falando do Guía). Cantoral: Exatamente! Investigador: As orientações estão baseadas na Socio? Cantoral: Sim. Investigador: E o livro? Cantoral: Se adapta. Investigador: Se adapta à Socio? Cantoral: Igual, imagino que já entendi. Olha, o Ministério da Educação, Secretaria de Educação propõem um conteúdo e regras para que os autores elaborem livros. Um se adapta ao conteúdo, se adapta às regras, mas põe sua filosofia. Então o livro, que é para os alunos recebe observações para os professores, que servem para interpretar a filosofia, mas o programa já está feito. [...] Veja, os programas de estudo, são feitos pela Secretaria, o conteúdo é feito pelos autores e as orientações nesse livro coincidem,</p>

la Secretaría, lo contenido del libros lo hace los autores, y las orientaciones en este libro coinciden que somos lo mismo, pero en otro libro, no. Lo contenido hice lo autor y las orientaciones nosotros.

pois somos os mesmos, mas em outro livro, não. O conteúdo fez o autor e nós as orientações nós.

Fonte: a pesquisa (tradução nossa).

Na figura 64, há um exemplo de como são as *observações* dadas aos professores nos livros didáticos, que servem, como destacou Cantoral, para interpretar a filosofia das orientações.

Figura 64 - Exemplo das orientações dadas aos professores nos livros didáticos.

SECUENCIA 2
Fracciones y decimales en la recta numérica

En esta secuencia trabajarás en la representación de números fraccionarios y decimales en la recta numérica a partir de distintas informaciones, analizando las convenciones de esta representación.

SESION 1 → **EL SALTO DE ALTURA**
>>> Para empezar

Propósito de la sesión. Resolver problemas de comparación de números fraccionarios usando la recta numérica como un recurso. Reconocer la conservación de la escala y la arbitrariedad de la posición del cero.
Organización del grupo. En la sesión el trabajo es individual y en parejas, con momentos para la discusión grupal.

Propósito del video. Contextualizar el uso y la comparación de números fraccionarios representados en la recta numérica.

El salto de altura
El salto de altura es una de las competencias atléticas más atractivas. Se trata de saltar sobre una barra horizontal que está colocada a varios metros sobre el nivel del piso. ¡Los mejores atletas saltan más de 2 metros de altura!

Para decidir cuándo un competidor gana o pierde una competencia es muy importante medir de modo muy preciso la altura de sus saltos. Las mediciones de los saltos se pueden realizar usando fracciones y números decimales.

La tabla muestra tres marcas conseguidas en el salto de altura por distintos atletas.

Año	Competencia	Atleta	Longitud aproximada del salto (metros)
1993	Campeonato Mundial de Atletismo	Javier Sotomayor	$2\frac{1}{4}$
1996	Juegos Olímpicos de Estados Unidos	Charles Austin	$2\frac{2}{5}$
2004	Juegos Olímpicos de Atenas	Stefen Holm	$2\frac{1}{2}$

Eje
Sentido numérico y pensamiento algebraico.

Tema
Significado y uso de los números.

Antecedentes
En la escuela primaria los alumnos resolvieron problemas que implicaban comparar y ordenar números decimales y fraccionarios. En esta secuencia resolverán situaciones en las que se utiliza la recta numérica como un recurso que permite dar sentido a los números fraccionarios y a los números decimales.

Propósitos de la secuencia
Representar números fraccionarios y decimales en la recta numérica a partir de distintas informaciones, analizando las convenciones de esta representación.

Sesión	Propósitos de la sesión	Recursos
1	El salto de altura Resolver problemas de comparación de números fraccionarios usando la recta numérica como un recurso. Reconocer la conservación de la escala y la arbitrariedad de la posición del cero.	Video <i>El salto de altura</i>
2	Densidad y fracciones Resolver problemas de densidad de números fraccionarios usando la recta numérica como un recurso.	Interactivo
3	El salto de longitud y los números decimales Resolver problemas de comparación y densidad de números decimales usando la recta numérica como un recurso. Reconocer la conservación de la escala y la arbitrariedad de la posición del cero.	Interactivo

64 Libro para el maestro

Fonte: Matemáticas I. Libro para el maestro. Volumen I. Telesecundaria. Primer Grado (2015).

Este livro foi elaborado pela *Coordinación de Informática Educativa del Instituto Latinoamericano de la Comunicación Educativa (ILCE)* através do convênio com a *Subsecretaria de Educación Básica del SEP*. Portanto, as observações destinadas aos professores foram feitas pela *ILCE*, baseadas nas orientações do *Guía para el Maestros*, elaboradas por Farfán, Montiel e Buendía (2011b), respeitando os programas de estudos da SEP.

No Brasil, esse processo se dá de maneira diferente: os livros didáticos são formulados e impressos por editoras privadas seguindo as orientações contidas dos editais do PNLD. Além dos critérios técnicos que constam nos editais, as editoras e autores devem respeitar a legislação brasileira vigente, como consta no *Edital de Convocação para o Processo de Inscrição e Avaliação de Coleções Didáticas para o PNLD 2014* para as séries finais do Ensino Fundamental⁵⁷:

Considerando-se a legislação, as diretrizes e as normas oficiais que regulamentam o ensino fundamental, serão excluídas as coleções que não obedecerem aos seguintes estatutos: 1. Constituição da República Federativa do Brasil. 2. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, com as respectivas alterações introduzidas pelas Leis nº 10.639/2003, nº 11.274/2006, nº 11.525/2007 e nº 11.645/2008. 3. Estatuto da Criança e do Adolescente. 4. Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental. 5. Resoluções e Pareceres do Conselho Nacional de Educação, em especial, o Parecer CEB nº 15/2000, de 04/07/2000, o Parecer CNE/CP nº 003/2004, de 10/03/2004 e a Resolução CNE/CP nº 01 de 17/06/2004, Resolução CNE/CP nº 7, de 14/12/2010, Parecer CNE/CEB nº 7/2010, Resolução CNE/CP nº 4, de 14/07/2010 (BRASIL, 2011, p.55).

Como apresentamos no referencial teórico, ao contrário do México, o Brasil não possui até o momento, uma base comum específica de conteúdo. Dessa forma, são subjetivos os conteúdos a serem trabalhados, não havendo uma normativa, por enquanto, dos conteúdos específicos a serem desenvolvidos em cada ano. No caso da Matemática, e analisando o mesmo edital anteriormente citado, considera imprescindível para que as coleções⁵⁸ sejam aprovadas:

Além dos critérios eliminatórios comuns, para o componente curricular Matemática será excluída a coleção que: 1) apresentar erro ou indução a erro em conceitos, argumentação e procedimentos matemáticos, no livro do aluno, no Manual do Professor e, quando houver, no glossário; 2) deixar de incluir um dos campos da Matemática escolar, a saber, Números e Operações, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação; 3) der atenção apenas ao trabalho mecânico com procedimentos, em detrimento da exploração dos conceitos matemáticos e de sua utilidade para resolver problemas; 4) apresentar os conceitos com erro de encadeamento lógico, tais como: recorrer a conceitos ainda não definidos para introduzir outro conceito, utilizar-se de definições circulares, confundir tese com hipótese em demonstrações matemáticas; 5) deixar de propiciar o desenvolvimento, pelo aluno, de competências cognitivas básicas, como: observação, compreensão, argumentação, organização, análise, síntese, comunicação de ideias matemáticas, memorização; 6) supervalorizar o trabalho individual; 7) apresentar publicidade de produtos ou empresas (BRASIL, 2011, p.67 e 68).

O suporte dos livros didáticos ao professor também é importante, sendo enfatizado, na avaliação das coleções de livros, como critério de aprovação. Diferente do processo mexicano,

⁵⁷ Apesar de, neste momento, já ter sido lançado o edital do PNLD para os anos finais do EF para o período de 2017/19, tratamos, nesta análise, do edital de 2014 porque os livros didáticos analisados foram baseados nesse documento.

⁵⁸ As coleções de Matemática para os anos finais do Ensino Fundamental são compostas de quatro livros, sendo um livro didático para cada ano, do 6º ao 9º.

no Brasil, o governo, no edital, coloca as diretrizes, mas as orientações didático-pedagógicas são elaboradas pelos autores das coleções.

O chamado manual do professor deve se constituir para o docente como um complemento didático-pedagógico a sua prática, sendo entendido como fundamental nesse processo. O edital de 2014 ressalta que é preciso superar a dicotomia entre os que produzem e os que ensinam os conhecimentos e repensar o papel do professor, valorizando sua competência, também, como produtor do saber.

O manual do professor deve ser um instrumento de reflexão e atualização docente dos avanços das pesquisas nos aspectos pedagógicos e didáticos do processo de ensino e aprendizagem. Baseados nesses princípios, os manuais deverão:

- 1) explicitar os objetivos da proposta didático-pedagógica efetivada pela coleção e os pressupostos teórico-metodológicos por ela assumidos; 2) descrever a organização geral da coleção, tanto no conjunto dos volumes quanto na estruturação interna de cada um deles; 3) orientar o professor para o uso adequado da coleção, inclusive no que se refere às estratégias e recursos de ensino a serem empregados; 4) indicar as possibilidades de trabalho interdisciplinar na escola, a partir do componente curricular abordado na coleção; 5) discutir diferentes formas, possibilidades, recursos e instrumentos de avaliação que o professor poderá utilizar ao longo do processo de ensino-aprendizagem; 6) promover a interação com os demais profissionais da escola; 7) sugerir textos de aprofundamento e propostas de atividades complementares às do livro do aluno. 8) propiciar a superação da dicotomia ensino e pesquisa, proporcionando ao professor um espaço efetivo de reflexão sobre a sua prática (BRASIL, 2011, p.57).

Em nossa análise, damos atenção especial ao livro Matemática - Bianchini 7º ano, por ser adotado pela escola EMIP, onde as professoras responsáveis por todas as turmas do 7º ano são participantes da pesquisa⁵⁹, o que nos permite fazer um paralelo entre os conceitos e metodologias propostas pelo livro e o que é utilizado pelas professoras na prática de sala de aula.

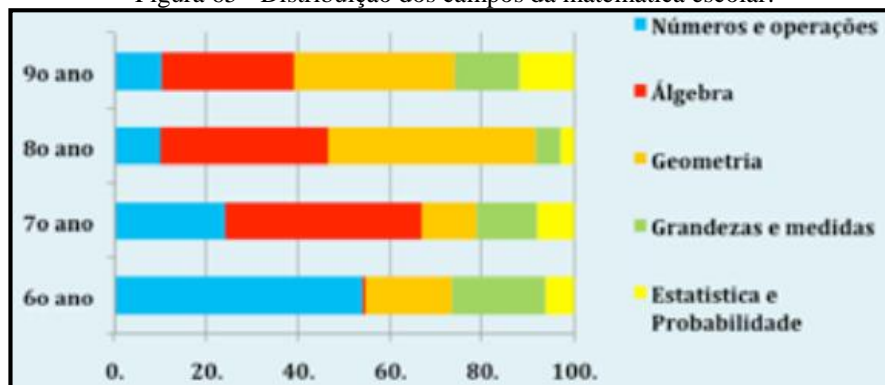
O livro didático em questão faz parte da coleção composta por livros do 6º ao 9º ano, tem como autor Bianchini (2011), está na sua 7ª edição e foi editado pela Editora Moderna. Segundo o Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE), essa é a quarta coleção mais distribuída no PNL, com um total de 1.345.301 de volumes.

Conforme Brasil (2013b), a obra destaca-se pela evolução gradual no estudo dos diversos campos da Matemática e pelas contextualizações, que são associadas a práticas sociais diversas, à história da Matemática, à própria Matemática e as outras áreas do conhecimento. Os conteúdos são abordados por meio de explanação da teoria, acompanhada de exemplos, e da seção *Exercícios Propostos*, que traz problemas de aplicação do que foi ensinado. Em geral,

⁵⁹ Professoras PB1, PB2 e PB3.

essa metodologia não dá muita oportunidade para que o aluno elabore, de modo mais autônomo, o conhecimento a ser adquirido. Na figura 65, apresentamos a distribuição dos campos da Matemática escolar, conforme o Guia, nos volumes da coleção.

Figura 65 - Distribuição dos campos da matemática escolar.



Fonte: Fonte: Guia de Livros Didáticos PNLD 2014.

Em relação à coleção, são propostas situações em que a capacidade de argumentação do estudante é mobilizada para a justificativa de suas estratégias de resoluções e suas respostas. Segundo Brasil (2013b), alguns problemas mais instigantes são outras oportunidades para que o aluno exerça sua criatividade.

O suplemento com as orientações para o professor está dividido em duas partes: a primeira, com orientações gerais sobre a proposta do livro e a segunda, com orientações específicas para o desenvolvimento dos conteúdos.

Na primeira parte, o autor trata da coleção como um todo, dos livros do 6º ao 9º ano, apresentando as propostas, objetivos gerais e a estrutura da obra. Na sequência, o autor mesmo da importância de aprender Matemática e, logo em seguida, faz uma referência ao que solicita o edital, despertar o professor para a relação entre a Matemática escolar e a Matemática acadêmica, destacando o necessário rigor científico e a sua interpretação numa linguagem escolar, com definições mais descritivas e metodologias adequadas ao nível de escolarização do aluno.

A Matemática como parte do currículo também é discutida, pois o autor menciona metodologias de ensino, a relevância de relacionar a Matemática a temas transversais e a importância do processo de avaliação. Encerra essa parte fazendo referência à formação e o desenvolvimento profissional docente, trazendo uma lista de instituições de Educação Matemática e sugestões de leituras para os professores sobre vários temas, como os eixos temáticos (Números e Operações, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação), a avaliação, a tecnologia, os jogos, a História da Matemática, entre outros.

Na segunda parte do suplemento para o professor estão os objetivos e orientações específicas para cada um dos dez capítulos do livro. O autor inicia falando sobre os objetivos do capítulo e orientações gerais. Por exemplo, no capítulo 2, que tem como tema os Números Racionais, os objetivos são:

- ampliar o conceito de número, incorporando ao conjunto \mathbb{Z} os Números Racionais positivos e negativos;
- reconhecer situações nas quais são usados os Números Racionais;
- aplicar os conceitos e as técnicas relativos aos Números Racionais para resolver problemas;
- compreender as diversas representações dos Números Racionais na forma de fração, na forma decimal e na reta numérica;
- construir e interpretar um gráfico de dupla entrada.

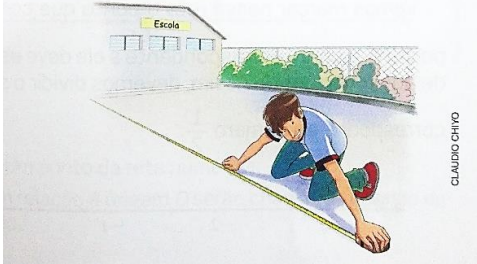
Quanto às orientações, o autor propõe metodologias e argumentos que promovem a discussão com os estudantes sobre o tema estudado, como, por exemplo, a situação que apresentamos, na figura 66, orienta no suplemento do professor, criar uma discussão a partir de uma atividade proposta no livro sobre simplificação e conversão de números decimais e fracionários.

Figura 66 - Proposta de discussão sobre simplificação e conversão de medidas de comprimento com números decimais e fracionários.

Na resolução do **exercício 6**, comentar com os alunos que os números na forma decimal permitem tal simplificação. A nova unidade na qual a medida será expressa pode ser, contudo, pouco usual, como 123 decímetros. Observe ainda que medidas expressas na forma fracionária, apesar de muito usadas em diversas áreas industriais, são menos flexíveis em relação à conversão de unidades. Por exemplo, o diâmetro de um parafuso expresso como $\frac{1}{8}$ de polegada não terá sua escrita simplificada se a trocarmos por $\frac{2}{16}$ de polegada ou por qualquer fração equivalente a esta. Nesses casos, na prática, a conversão usual é entre as unidades de medida "polegadas" e "milímetros"; por exemplo, o parafuso citado pode ter sua medida em milímetros calculada aproximadamente por:

$$\frac{1}{8} \text{ de polegada} = \frac{1}{8} \text{ de } 25,4 \text{ milímetros} = \frac{1}{8} \cdot 25,4 \text{ milímetros} \approx 3,2 \text{ milímetros}$$

6 João encontrou o comprimento, em metro, do pátio da escola e o expressou da seguinte maneira: 12,3 m. Para indicar essa medida com um número inteiro, João fez uma mudança de unidade de medida de comprimento. Como ele pode ter feito isso? Escreva a resposta em seu caderno.



CLAUDIO CHIVO

Fonte: Matemática Bianchini 7º ano (BIANCHINI, 2011).

O autor sugere bibliografias relativas ao tema tratado no capítulo e incentiva o professor a gerar discussões interdisciplinares, que podem envolver outras disciplinas, como, por exemplo, Ciências e Geografia, partindo da temática: *Consumo de Água*.

3.2.2 Os Números Racionais nos livros didáticos

Nesta seção, vamos tratar do conteúdo Números Racionais e a forma como esta temática é abordada nos livros didáticos, realizando uma reflexão sobre como são interpretadas as indicações oficiais sobre esse tema.

No Brasil, focamos no livro *Matemática Bianchini - 7º ano* (BIANCHINI, 2011), onde está centrado o tema Números Racionais, mas também vamos refletir sobre toda a coleção do autor, para entender como são distribuídos os conteúdos ligados a esse tema ao longo dos anos finais e como a proposta do autor se relaciona com as indicações do governo.

No México, os livros analisados serão os citados na seção anterior: *Desafíos Matemáticos: libro para el alumno, sexto grado* (SEP, 2014), *Matemáticas Primer Grado: desarrollo del pensamiento matemático* (CANTORAL, FARFÁN, MONTIEL, LEZAMA, MOLINA, CABAÑAS, CASTAÑEDA, SÁNCHEZ E MARTÍNEZ-SIERRA, 2014), *Matemáticas 1* (TRIGUEIROS, LOZANO, INÉS, SANDOVAL, JINICH E CÓRTEZ, 2012) e *Matemáticas 1: 1er Grado Volumen 1* (SEP, 2015), todos utilizados pelos professores investigados nesta pesquisa. Também nas coleções mexicanos buscamos refletir sobre as orientações oficiais.

Diferente do processo brasileiro, os conteúdos e o momento de abordagem dos mesmos são determinados pela legislação vigente no México, o que é seguido pelos livros didáticos e os planejamentos dos professores. Os livros mexicanos analisados, conforme determina a lei, seguem a base de conteúdos indicados no *Acuerdo 592* (MÉXICO, 2011a). Como nos referimos na seção 2.3.3.1, os estudos de Matemática, nos níveis Primário e Secundário, estão organizados em três eixos temáticos: Sentido Numérico e Pensamento Algébrico; Forma, Espaço e Medida; Manuseio da Informação. Além de promover o que chamam de atitudes em relação ao estudo da Matemática.

Um aspecto importante a ser ressaltado é que, nos livros didáticos analisados, os temas são desenvolvidos através de atividades propostas, e não através de conceitos. O livro se caracteriza por ser um material de apoio ao professor, que apresenta uma série de atividades relativas ao conteúdo a ser trabalhado. Na figura 67, apresentamos como é introduzido o tema Frações e Decimais no livro *Matemáticas 1* (TRIGUEIROS, LOZANO, INÉS, SANDOVAL, JINICH E CÓRTEZ, 2012).

Figura 67 - Atividades de introdução do conteúdo de frações e números decimais no livro Matemáticas 1.

Bloque 1 **1** **Fracciones y decimales**

Eje: Sentido numérico y pensamiento algebraico
Tema: Números y sistemas de numeración
Contenido: Conversión de fracciones decimales y no decimales a su escritura decimal y viceversa

Analiza la obra de arte

Inicio

Victoria y Martín visitaron un museo de arte moderno. Uno de los cuadros que les llamó la atención estaba hecho con mosaicos de colores y se muestra en la figura. Victoria le comentó a Martín que el cuadro sería estupendo para el problema de matemáticas que la maestra Lolita les había dejado de tarea.

Entre los dos decidieron copiarlo e incluirlo en su tarea junto con las siguientes preguntas:

- ¿Qué fracción del cuadro está pintada de cada color?
- Si el área del cuadro fuera de 1 m^2 , ¿cuál es el área que está pintada de cada color escrita como un número decimal?
- ¿Cómo se comparan las dos cantidades que encontraste como respuesta a las preguntas anteriores?

Planeación

Nuestro trabajo

En parejas, en una hoja cuadrículada, diseñarán un cuadro como el que Victoria y Martín vieron en el museo. Deben utilizar mínimo cuatro colores diferentes en una cuadrícula de 10 por 10, en la que cada cuadrado representará un mosaico.

- Además de diseñar su obra de arte, deberán responder las preguntas que Victoria y Martín hicieron para su propio cuadro y justificar por escrito cómo las resolvieron.
- Al final, pondrán su obra junto a las de sus compañeros en las paredes del salón y retarán a otro equipo a encontrar la respuesta a las preguntas.

Fonte: *Matemáticas 1* (TRIGUEIROS, LOZANO, INÉS, SANDOVAL, JINICH E CÓRTES, 2012).

Os livros analisados seguem, criteriosamente a divisão do conteúdo a ser trabalhado, ao longo do ano letivo, em cinco blocos. Porém, há uma diferença entre os livros didáticos do Nível Primário e Secundário quanto a apresentação dos conteúdos. Nos livros do Primário, os temas a serem trabalhados em cada bloco aparecem de forma contextualizada, como podemos ver no sumário do livro *Desafíos Matemáticos: libro para el alumno, sexto grado* (SEP, 2014).

Contudo, o livro do professor apresenta a indicação dos temas abordados relacionando-os aos conteúdos dos *Estándares Curriculares*. Na figura 68, apresentamos parte do sumário do livro do sexto grau do nível Primário e a abordagem inicial no livro do conteúdo de leitura, escrita e comparação de números naturais, fracionários e decimais, como exemplo dessa situação.

Figura 68 - Parte do sumário do livro do sexto grau do nível Primário e abordagem inicial do tema Números Naturais, Fracionário e Decimais.

Bloque I	
1. Los continentes en números	10
2. Sin pasarse	11
3. Carrera de robots	12
4. ¿Qué pasa después del punto?	13
5. La figura escondida	14
6. Vamos a completar	15
7. Rompecabezas	17
8. El equipo de caminata	19
9. El rancho de don Luis	20
10. La mercería	21
11. ¿Cómo lo doblo?	22
12. Se ven de cabeza	23
13. ¿Por dónde empiezo?	26
14. Batalla naval	28
15. En busca de rutas	31
16. Distancias iguales	32
17. ¿Cuál es la distancia real?	34
18. Distancias a escala	35
19. Préstamos con intereses	36
20. Mercancía con descuento	37
21. ¿Cuántas y de cuáles?	39
22. ¡Mmm... postres!	41

1 Los continentes en números

Intención didáctica
Que los alumnos ordenen y comparen números de más de seis dígitos.

Contenido
Lectura, escritura y comparación de números naturales, fraccionarios y decimales. Explicitación de los criterios de comparación.

1 Los continentes en números

Consigna
En equipos, escriban el nombre de los continentes ordenados de mayor a menor, primero de acuerdo con su superficie y después con su número de habitantes.

	Continente	Área (km ²)		Continente	Número de habitantes
1°			1°		
2°			2°		
3°			3°		
4°			4°		
5°			5°		
6°			6°		

Fonte: livro Desafíos Matemáticos: libro para el alumno, sexto grado (SEP, 2014).

Nos livros didáticos analisados para o nível Secundário, a maneira de apresentar os conteúdos se relaciona, diretamente, com os *Estándares Curriculares*, apresentando os conteúdos como indicados no documento do governo, divididos nos eixos temáticos. Na figura 69, apresentamos parte do sumário do: *Matemáticas Primer Grado: desarrollo del pensamiento matemático* (CANTORAL, FARFÁN, MONTIEL, LEZAMA, MOLINA, CABAÑAS, CASTAÑEDA, SÁNCHEZ E MARTÍNEZ-SIERRA, 2014).

Figura 69 - Parte do sumário do Matemáticas Primer Grado: desarrollo del pensamiento matemático.

		Bloque 1	
Sentido numérico y pensamiento algebraico			
Lección 1.1	Conversión de fracciones decimales y no decimales a su escritura decimal y viceversa.	14	
Lección 1.2	Representar números fraccionarios y decimales en la recta numérica a partir de distintas informaciones, analizando las convenciones de esta representación	21	
Lección 1.3	Resolución y planteamiento de problemas que impliquen más de una operación de suma y resta de fracciones.....	26	
Lección 1.4	Construcción de sucesiones de números o de figuras a partir de una regla dada en lenguaje común. Formulación en lenguaje común de expresiones generales que definen las reglas de sucesiones con progresión aritmética o geométrica, de números y de figuras	32	
Forma, espacio y medida			
Lección 1.5	Explicación del significado de fórmulas geométricas, al considerar las literales como números generales con los que es posible operar	38	
Lección 1.6	Trazo de triángulos y cuadriláteros mediante el uso del juego de geometría	43	
Lección 1.7	Trazo y análisis de las propiedades de las alturas, medianas, mediatrices y bisectrices en un triángulo.....	51	
Manejo de la información			
Lección 1.8	Resolución de problemas de reparto proporcional.....	62	
Lección 1.9	Identificación y práctica de juegos de azar sencillos y registro de los resultados posibles. Elección de estrategias en función del análisis de resultados posibles	66	
Evaluación		70	
Autoevaluación		73	
Coevaluación		74	

Fonte: Matemáticas Primer Grado: desarrollo del pensamiento matemático (CANTORAL, FARFÁN, MONTIEL, LEZAMA, MOLINA, CABAÑAS, CASTAÑEDA, SÁNCHEZ E MARTÍNEZ-SIERRA, 2014).

Os livros também apresentam, como orientação ao trabalho, em sala de aula, uma seção chamada *Dosificación*, que faz parte dos livros para os professores. Essa seção tem como objetivo a apresentação do conteúdo a ser trabalhado, o eixo a que pertence e o tempo no qual deve ser desenvolvido o trabalho em sala de aula. Então, além de termos os conteúdos determinados, também apresenta uma estimativa de tempo para ser desenvolvida a temática. A figura 70 mostra, como exemplo, parte dessa seção do livro *Matemáticas 1* (TRIGUEIROS, LOZANO, INÉS, SANDOVAL, JINICH E CÓRTEZ, 2012).

Figura 70 - Seção *Dosificación* do livro didático *Matemáticas I*.

Eje	Tema	Secuencia	Contenidos	Págs.	Semana	Calendarización
Bloque 1						
Sentido numérico y pensamiento algebraico	Números y sistemas de numeración	1. Fracciones y decimales	Conversión de fracciones decimales y no decimales a su escritura decimal y viceversa	18-25	1 y 2	
		2. Fracciones y decimales en la recta numérica	Representación de números fraccionarios y decimales en la recta numérica a partir de distintas informaciones, analizando las convenciones de esta representación	26-31	3	
	Problemas aditivos	3. Suma y resta de fracciones	Resolución y planteamiento de problemas que impliquen más de una operación de suma y resta de fracciones	32-37	4	
	Patrones y sucesiones	4. Sucesiones	Construcción de sucesiones de números o de figuras a partir de una regla dada en lenguaje común. Formulación en lenguaje común de expresiones generales que definen las reglas de sucesiones con progresión aritmética o geométrica, de números y de figuras	38-43	5	
		5. Literales y fórmulas	Explicación del significado de fórmulas geométricas, al considerar las literales como números generales con los que es posible operar	44-47	6	
Forma, espacio y medida	Figuras y cuerpos	6. Construcción de cuadriláteros	Trazo de triángulos y cuadriláteros mediante el uso del juego de geometría	48-56	7	
		7. Rectas y segmentos del triángulo	Trazo y análisis de las propiedades de las alturas, medianas, mediatrices y bisectrices en un triángulo	56-61	8	

Fonte: Matemáticas I (TRIGUEIROS, LOZANO, INÉS, SANDOVAL, JINICH E CÓRTEZ, 2012).

Como mencionamos anteriormente, os livros didáticos do nível Primário não tratam dos conceitos. Os conteúdos são trabalhados, através de atividades, focando a resolução de problemas principalmente. Já nos livros analisados do nível Secundário e Telessecundário, a dinâmica difere: além das atividades propostas, há breves explicações sobre o tema. Por exemplo, no livro *Matemáticas Primer Grado: desarrollo del pensamiento matemático*, os blocos são divididos por lições. Cada uma delas é dividida em quatro tópicos: *Para Aprender, Los Conocimientos, Los Métodos e Para Hacer*.

No tópico *Para Aprender*, o tema a ser desenvolvido naquela lição é contextualizado. A partir de um determinado assunto, é feita uma conexão para exemplificar a temática, como, por exemplo, falar de protozoários para iniciar o tema números decimais. Logo em seguida, é proposta uma série de atividades. Em *Los Conocimientos*, há uma formalização do tema e, em *Los Métodos*, são apresentadas as regras e métodos, como, por exemplo, comparar frações realizando divisões ou utilizando frações equivalentes. O tópico *Para Hacer* traz uma série de exercícios e problemas relativos ao tema tratado na lição.

Os outros dois livros analisados, *Matemáticas 1* (TRIGUEIROS, LOZANO, INÉS, SANDOVAL, JINICH E CÓRTEZ, 2012) e *Matemáticas 1: 1er Grado Volumen 1* (SEP, 2015) apresentavam, também, uma divisão das lições em tópicos, que traziam contextualização, formalização e atividades.

A coleção brasileira analisada, *Matemática Bianchini* (BIANCHINI, 2011), também tem seções com o intuito de estimular a abordagem do tema estudado. Por exemplo, no livro do 7º ano dessa coleção, encontramos seções (figura 71) dentro dos capítulos que propõem o desenvolvimento dos conteúdos: *Pense mais um pouco*, com atividades e desafios; *Para saber mais*, que inclui atividades para articulação com outras áreas do saber; *Agora é com você*; *Trabalhando a informação*, que traz os conteúdos referentes ao campo de estatística e probabilidade. Cada capítulo termina com atividades intituladas *Exercícios complementares e Diversificando*.

Figura 71 - Seções do livro didático Matemática Bianchini (BIANCHINI, 2011).

Diversificando

Treinando mais

1 Os icebergs são grandes massas de água no estado sólido que se deslocam seguindo as correntes marítimas no oceano. O que vemos fora da água é uma pequena parte do iceberg, que em geral corresponde a $\frac{1}{10}$ de seu volume.
Represente em seu caderno, na forma de fração, qual é a porção do iceberg que fica dentro da água.

Foto: SCOTT SHAW/ALAMY/ALAMY
JOEL LUIS JAVIERO

Baía de Disko, Groenlândia. (Foto de 2003.)

Pense mais um pouco...

Considere uma fração cujo numerador é múltiplo do denominador.
Essa fração representa um número racional inteiro ou um número racional não inteiro? Justifique sua resposta.

PARA SABER MAIS

Divisão de um segmento em partes iguais

Para dividir um segmento qualquer em um determinado número de partes iguais, podemos dividir a sua medida por esse número de partes e, com o auxílio da escala da régua, marcar os pontos de divisão.

Também podemos dividir um segmento por meio de uma construção com régua e compasso. Essa construção geométrica é uma aplicação prática do Teorema de Tales, que será estudado no volume 9.

Vamos dividir o segmento \overline{AB} a seguir em 7 partes de mesma medida. Acompanhe os passos:

- Inicialmente traçamos uma semirreta com origem A conforme a figura abaixo. Nessa semirreta, a partir de A e com uma mesma abertura do compasso, marcamos 7 segmentos consecutivos.

LUSTIÇÕES ANILTON BECO

Agora é com você!

Em seu caderno, trace um segmento qualquer e divida-o em 6 partes iguais, com o auxílio de régua e compasso.

Exercícios COMPLEMENTARES

65 Escreva em seu caderno a representação decimal dos números $\frac{3}{4}$ e $\frac{4}{3}$.

66 Qual dos números a seguir pode ser usado para indicar quantos irmãos tem uma pessoa? Por quê?

a) $-\frac{10}{2}$ d) $-\frac{5}{1}$

b) $\frac{7}{9}$ e) $-1\frac{3}{4}$

c) $\frac{5}{4}$

67 Entre os números racionais $3,5$; $-\frac{2}{3}$; $4,333\dots$; $\frac{12}{3}$; 3 e $-4,5$, escreva em seu caderno:

a) os números racionais inteiros;
b) os números racionais não inteiros;
c) os números que estão na forma decimal;
d) as dízimas periódicas.

TRABALHANDO A INFORMAÇÃO

Construindo um gráfico de dupla entrada

Observe os extratos bancários (com valores em reais) das contas-correntes de Cláudia e Lúcia.

RENDE MAIS				
Extrato de conta-corrente				
Cláudia dos Santos conta: 0002/0500-25				
Movimentação (valores em reais)				
Dia	Histórico	Débito	Crédito	Saldo
10/3	sem movimentação			-80,01
11/3	cheque	19,99		-100,00
12/3	depósito		60,00	-40,00
13/3	depósito		79,98	39,98
14/3	depósito		20,03	60,01

RENDE MAIS				
Extrato de conta-corrente				
Lúcia dos Santos conta: 0002/0501-26				
Movimentação (valores em reais)				
Dia	Histórico	Débito	Crédito	Saldo
10/3	saldo anterior			-80,01
11/3	depósito		100	19,99
12/3	cheque	39,99		-20,00
13/3	cheque	19,99		-39,99
14/3	depósito		60,00	20,01

Com esses extratos bancários, é possível organizar a seguinte tabela:

Saldo de conta-corrente (em reais)		
Dia	Cláudia	Lúcia
10/3	-80,01	-80,01
11/3	-100,00	19,99
12/3	-40,00	-20,00
13/3	39,98	-39,99
14/3	60,01	20,01

Dados obtidos nos extratos das contas-correntes de Cláudia e Lúcia.

Fonte: Matemática Bianchini 7º ano (Bianchini, 2011).

As seções *Pense mais um pouco*, *Para saber mais* e *Diversificando* podem propiciar momentos de ampliação do conhecimento escolar ou extraescolar, mas, para que isso ocorra, é importante que o docente busque mais informações a respeito dos assuntos tratados nesses textos.

Analisando o tema Racionais nas coleções e buscando inspiração na investigação de Flores (2010), que propõe uma identificação, em livros didáticos, dos significados propostos por Fandiño (2009) a respeito das frações, decimais e Números Racionais, vamos buscar relacionar o que é proposto nos livros didáticos analisados e os significados identificados por Fandiño (2009) sobre esse tema.

Recapitulando os significados propostos por Fandiño (2009):

1. a fração como parte de um todo, representações contínua e discreta;
2. a fração como quociente;
3. a fração como razão;
4. a fração como proporcionalidade⁶⁰;
5. a fração como operador;
6. a fração em probabilidade;
7. a fração como porcentagem;
8. a fração como Número Racional;
9. a fração como ponto de uma reta orientada;

⁶⁰ Assim como Flores (2010), distinguimos a noção de proporcionalidade em relação à noção de razão dos significados propostos por Fandiño (2009).

10. a fração como medida;
11. a fração como indicador de uma quantidade de eleição;
12. a fração em pontuação;
13. a fração como linguagem cotidiana;
14. a conceitualização da fração na teoria de Vergnaud;
15. a conceitualização signo-objeto de Duval.

Na figura 72, apresentamos, a partir dos significados de frações propostos por Fandiño, como esses se apresentam nos livros didáticos investigados.

Desafíos Matemáticos: libro para el alumno, sexto grado (SEP, 2014), *Matemáticas Primer Grado: desarrollo del pensamiento matemático* (CANTORAL, FARFÁN, MONTIEL, LEZAMA, MOLINA, CABAÑAS, CASTAÑEDA, SÁNCHEZ E MARTÍNEZ-SIERRA), *Matemáticas 1* (TRIGUEIROS, LOZANO, INÉS, SANDOVAL, JINICH E CÓRTES) e *Matemáticas 1: 1er Grado Volumen 1* (SEP)

Figura 72 - Significados associados à noção de frações nos livros didáticos.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
<i>Desafíos Matemáticos: libro para el alumno, sexto grado</i>	x	x	x		x		x	x	x	x			x		
<i>Matemáticas Primer Grado: desarrollo del pensamiento matemático</i>	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x		x		
<i>Matemáticas Segundo Grado: desarrollo del pensamiento matemático</i>			x	x	x	x	x	x			x		x		
<i>Matemáticas Tercer Grado: desarrollo del pensamiento matemático</i>			x	x		x	x								
<i>Matemáticas 1</i>	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x			x		
<i>Matemáticas 2</i>			x	x		x	x	x		x					
<i>Matemáticas 3</i>			x	x		x	x			x					
<i>Matemáticas 1: 1er Grado Volumen 1</i>	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x			x		

<i>Matemáticas 2: 1er Grado Volumen 1</i>		x	x	x		x		x		x					
<i>Matemáticas 3: 1er Grado Volumen 1</i>	x	x	x	x		x	x		x						
<i>Matemática Bianchini 6º ano</i>	x	x	x		x	x	x	x		x			x		
<i>Matemática Bianchini 7º ano</i>		x	x	x	x	x	x	x	x	x			x		
<i>Matemática Bianchini 8º ano</i>		x				x	x	x	x	x			x		
<i>Matemática Bianchini 9º ano</i>			x	x		x	x	x					x		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Fonte: a pesquisa

É necessário lembrar que os livros didáticos mexicanos e brasileiros têm propostas diferentes na sua estrutura. E, para interpretar os significados propostos por Fandiño (2009), analisamos, nos livros mexicanos, as atividades propostas e, nos brasileiros, além das atividades, também os conceitos desenvolvidos.

Analisando a tabela, é possível perceber algumas semelhanças entre os livros didáticos mexicanos, por certo reflexo da necessidade de cumprir o que determina os *Estándares*. Podemos identificar ao menos três noções em todos os graus do nível Secundário: razão, proporcionalidade e probabilidade. A semelhança, nos livros, é o tratamento dado à ideias dos Racionais, nas formas fracionária e decimal, com ênfase, primeiramente, à ideia de frações e decimais no sexto grau do Primário, no México, ou sexto ano do Ensino Fundamental, no Brasil. No sétimo ano, há uma formalização da ideia de Números Racionais.

Nesta seção, buscamos apresentar as propostas dos livros didáticos investigados sobre o tema Números Racionais. Na seção seguinte, vamos apresentar os planejamentos dos professores para compreender como as orientações oficiais e os livros didáticos são utilizados na prática de sala de aula.

3.3 OS PLANEJAMENTOS DIDÁTICOS DOS PROFESSORES EM RELAÇÃO À TEMÁTICA INVESTIGADA

Nas seções anteriores, analisamos as orientações e indicações⁶¹ oficiais em relação aos conteúdos e metodologias a serem utilizados pelos professores, com ênfase nos Números Racionais, bem como os livros didáticos utilizados pelo grupo de professores investigados, que se constituem em um importante recurso na sala de aula. A partir de agora, vamos analisar como se dá, na prática, esse processo. Primeiramente, apresentaremos uma análise dos planejamentos dos professores investigados, ou seja, como esses pensam as suas aulas, como as organizam a partir das referências oficiais.

Para compreendermos esse processo em relação aos Números Racionais, investigamos os planejamentos de 3 professores mexicanos e 3 professores brasileiros. Analisamos os planos de trabalho, diário de classes, atividades propostas, cadernos de alunos e, como complemento, questionários estruturados e entrevistas gravadas com os professores. Consideramos esses instrumentos importantes e necessários para compreensão do processo como um todo.

Identificamos os professores brasileiros como PB1, professora do 6º e 7º anos, e PB2 e PB3 professoras do 7º ano. Os professores mexicanos foram identificados como PM1, a professora do 6º grau do Primário, PM2, a professora do 1º grau do Secundário, e PM3 o professor do 1º grau do Telessecundário.

Os professores brasileiros e mexicanos, nas suas práticas profissionais, precisam cumprir certas formalidades, como preenchimento e organização de documentos formais, como, por exemplo, os diários de classe. Na prática de sala de aula, as diferenças entre professores brasileiros e mexicanos estão na organização dos planos de aula. Mais uma vez, as orientações e indicações se refletem na forma distinta como os professores realizam seus planejamentos de aula.

Ao contrário do professor brasileiro, que desenvolve um trabalho mais autônomo quanto aos conteúdos a serem trabalhados, os docentes mexicanos são *engessados* no trabalho docente em relação à base de conteúdos que devem seguir. Na figura 73, apresentamos um recorte do planejamento anual⁶² do professor PM2 da disciplina de Matemática para o 1º grau do Secundário.

⁶¹ Quando utilizamos o termo “orientações”, estamos fazendo referência a exigências. Quando dizemos “indicações” nos referimos a sugestões. Essa distinção é importante pelo modo como são organizados os currículos brasileiros e mexicanos.

⁶² Planeación anual de la asignatura de Matemáticas

Figura 73 - Recorte do planejamento anual da disciplina de Matemática para o 1º grau do nível Secundário.

PLANEACIÓN ANUAL DE LA ASIGNATURA DE: MATEMÁTICAS			GRADO: PRIMER GRADO			
TITULAR: MTRA. JUDITH GARCIA LEYVA			CICLO ESCOLAR: 2015 - 2016			
Competencias que favorecen: resolver problemas de manera autónoma, comunicar información matemática, validar procedimientos y resultados, manejar técnicas eficientemente.						
B I M E S T R E I	EJE	TEMA	Contenido del Nodal y Accesorios	Núm. De Sesiones	Fechas Probables.	
	SENTIDO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO		Encuadre.		2	26/08
			Números y sistemas de numeración	<ul style="list-style-type: none"> Conversión de fracciones decimales y no decimales a su escritura decimal y viceversa. Representación de números fraccionarios y decimales en la recta numérica a partir de distintas informaciones, analizando las convenciones de esta representación. 	4	3/09
			Problemas aditivos	<ul style="list-style-type: none"> Resolución y planteamiento de problemas que impliquen más de una operación de suma y resta de fracciones. 	4	9/09
			Patrones y ecuaciones	<ul style="list-style-type: none"> Construcción de sucesiones de números o de figuras a partir de una regla dada en lenguaje común de expresiones generales que definen las reglas de sucesiones con progresión aritmética o geométrica, de números y de figuras. Explicación del significado de fórmulas geométricas, al considerar las literales como números generales con los que es posible operar. 	4	17/09
				4	23/09	

Fonte: Planeación anual de la asignatura de Matemáticas da professora PM2.

Esse planejamento é realizado antes de iniciar o ano letivo e como percebemos, é detalhado dia a dia, para que, a partir dessa organização, o professor consiga vencer todos os conteúdos exigidos nos *Estándares Curriculares* no ano letivo. Esse sistema mais rígido mexicano contrasta com o modo adotado atualmente no Brasil, onde conteúdos a serem trabalhados estão nos planos de estudos das escolas são elaborados pela comunidade escolar. Na escola onde lecionam três professoras investigadas, por exemplo, os conteúdos a serem trabalhados com o tema Números Racionais no 7º ano do EF são apresentados na figura 74.

Figura 74 - Quadro de competências/habilidades e conteúdos para o 7º ano do EF da EMIP.

ANO	COMPETÊNCIA/HABILIDADES MÍNIMAS A SEREM TRABALHADOS	CONTEÚDOS RELATIVOS ÀS HABILIDADES	COMPETÊNCIAS/HABILIDADES MÍNIMAS PARA APROVAÇÃO
6º ANO	Efetuar as quatro operações, a potenciação e a radiciação; Resolver expressões numéricas; Estabelecer critérios de divisibilidade e suas utilidades; Reconhecer números primos; Relacionar MMC com o cotidiano e suas aplicações; Ler, identificar e quantificar as diversas formas de fração; Resolver problemas que envolvam raciocínio fracionário; Identificar os números decimais, sua leitura e escrita; Identificar visualmente figuras planas; Relacionar medidas de comprimento com o nosso cotidiano; Resolver problemas com as operações estudadas; Efetuar operações com números fracionários; Efetuar operações com números decimais.	Operações fundamentais (N, Q); Expressões numéricas; Critérios de divisibilidade; Números primos; Fatoração de IN MMC Números fracionários; Números decimais; Medidas de comprimento Geometria – figuras planas (perímetro e área).	Resolver situações problemas que envolvam o significado das operações fundamentais com os números estudados, utilizando estratégias pessoais; resolver expressões numéricas propriamente; Conhecer conceitos básicos relacionados às figuras planas.
7º ANO	Reconhecer e relacionar os números inteiros e racionais no nosso dia-a-dia; Representar geometricamente os números inteiros; Resolver expressões numéricas envolvendo números inteiros e racionais; Utilizar as operações fundamentais envolvendo números inteiros e racionais; Resolver equações e problemas de 1º grau; Observar as relações de regra de três na Física e em situações Matemáticas; Identificar razões centésimas e suas relações com a porcentagem. Interpretar e resolver situações-problema que envolvam Z e Q.	Números inteiros; Números racionais; Operações fundamentais (Z, Q); Equações e problemas do 1º grau; Regras de três; Porcentagem; Resolução de problemas (Z, Q).	Resolver situações-problemas que envolvem números inteiros e racionais nas operações fundamentais, utilizando estratégias pessoais; Resolver situações problema que envolvam equações do primeiro grau; Aplicar corretamente as regras de porcentagem.

Fonte: Projeto Político Pedagógico da escola EMIP.

Para os professores brasileiros investigados, os livros didáticos assumem um importante papel na organização e planejamento das aulas. Nos planos de trabalho investigados juntos aos professores, os livros servem como referência aos conteúdos e atividades a serem desenvolvidas em sala de aula. Essa constatação vai ao encontro do que Silva (2010) afirma sobre o livro didático assumir múltiplas funções e características, constitui-se como uma referência de conteúdos para alunos e professores, guia orientador de atividades em sala de aula e como padrão de organização e sistematização do currículo.

Essa relação dos livros didáticos à prática do professor, em sala de aula, acaba fazendo jus ao fato de que, assim como os Planos de Estudos servem como orientação ao trabalho docente, esses também são influenciados pelas indicações dos PCN, prevalecendo, desta maneira, as indicações oficiais no processo de ensino e aprendizagem.

Do grupo de professores brasileiros investigados, todos fazem referência ao uso do livro didático nos seus planejamentos. Alguns docentes utilizam cadernos para fazer os planejamentos e nele registram o material a ser utilizado nas aulas. Na figura 75, apresentamos um recorte do caderno da professora PB2, com cópias de páginas do livro didático coladas no caderno utilizado para o planejamento das aulas.

Figura 75 - Recorte do caderno de planejamento de aulas da professora PB2.

Tema: 25, 26, 27, 34, 35, 18, 17, 11
05, 14, 07

38. Você quer comprar uma camiseta de R\$ 24,85 e uma saia de R\$ 40,45. Sabendo que da posse R\$ 67,00, verifique se é possível comprar a camiseta e a saia com o dinheiro que possui.

1. Resolva o problema no caderno.
Num time de vôlei, Fernando é um dos jogadores de menor estatura, com 0,12 metro de altura a menos que Adriano. Sabendo que a altura de Everton é 1,92 metro e que ele tem 0,03 metro a menos que Adriano, qual é a altura de Fernando?

2. Efetue com a calculadora.
Corrija os resultados incorretos no caderno.
a) $4,96 + 0,75 = 4,7$
b) $5,21 - 0,003 = 5,18$
c) $4,02 + 0,009 + 3,4 = 7,429$
d) $9 - 0,9 - 0,009 = 8,99$

3. Calcule mentalmente.
a) $11,33 + 0,9$
b) $11,03 - 0,9$
c) $1,12 + 0,09$
d) $1,12 - 0,09$

4. Faça arredondamentos para décimos e efetue no caderno.
a) $7,47 + 1,21$
b) $9,76 - 2,32$
c) $9,07 + 0,554$
d) $10,75 - 1,537$

5. Leia e responda.
Rafael é lutador de boxe. Quinze dias antes de uma luta, ele estava pesando 58 kg. Na sua categoria, ele deve ter no máximo 54 kg.
Para poder competir, Rafael iniciou um treinamento intensivo e, no dia da luta, estava pesando 4,2 kg a menos. Ele atingiu o objetivo?

6. Responda ao problema em seu caderno.
Décio comprou alguns produtos. Por um aparelho de som portátil, ele pagou R\$ 219,00, por um DVD, pagou R\$ 33,54, e por um videogame, pagou R\$ 309,00. Quanto Décio gastou?

7. Identifique o padrão de cada sequência numérica e escreva em seu caderno os dois próximos termos de cada uma.
a) 0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6
b) 1,0 0,9 0,8 0,7 0,6 0,5
c) 4,5 5,0 5,5 6,0 6,5 7,0

8. Calcule o valor das expressões.
a) $0,1 + 0,2 + 0,3$
b) $0,35 + 0,4$
c) $1,25 + 6$
d) $7,56 - 5,98$
e) $2 - 0,5$
f) $7,009 - 1,005$
g) $4,69 + 19,77 - 6,12$
h) $7,58 - 5,95 + 4,98$

0,7 - 0,1 - 1,4 - 1,7
0,02 - 0,17 - 0,22 - 0,29

Fonte: Planejamento de aula professora PB2.

A professora PB2 também busca referências em mais de um livro didático. Essa é uma prática comum entre os professores brasileiros investigados na pesquisa, que buscam subsídios referências em mais de um livro para os planejamentos das aulas.

Segundo Silva (2010), a ação do professor, na sala de aula, é muito influenciada pela maneira como os livros abordam os conteúdos matemáticos. Apresentamos como exemplo que corrobora essa ideia do autor a PB2 utiliza o livro didático “Tempo de Matemática” de Miguel

Asis Name como orientação da sua prática de sala de aula, apesar dele não ser o adotado pela escola. Na figura 76, estão cópias de páginas do livro didático que a professora usa como referência.

Figura 76 - Cópias do livro didático utilizado pela professora PB2.

10

CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS

Números racionais

Chama-se **número racional** todo número que pode ser escrito em forma de fração.

São racionais:

① Todas as frações positivas:
 $+\frac{5}{6}, +\frac{1}{4}, +\frac{3}{2}$ etc.

② Todas as frações negativas:
 $-\frac{5}{6}, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{2}$ etc.

Não podemos esquecer que:

- ① Os **números naturais** podem ser escritos em forma de fração.
- ② Os **números inteiros** podem ser escritos em forma de fração.
- ③ Os **números decimais** podem ser escritos em forma de fração.

Exemplos:

$8 = \frac{8}{1}$	$5 = \frac{10}{2}$
$5 = \frac{5}{1}$	$7 = \frac{21}{3}$
$0,7 = \frac{7}{10}$	$3,51 = \frac{351}{100}$

Portanto, todo número natural, inteiro ou fracionário é um número racional. O **conjunto dos números racionais** é representado pela letra Q.

Convém destacar que:

- ① Não se costuma escrever o sinal + antes dos números racionais positivos.

Exemplos:

A $+\frac{3}{5} = \frac{3}{5}$

B $+\frac{17}{8} = \frac{17}{8}$
- ② Os quocientes de números inteiros são números racionais e a regra de sinais da divisão de inteiros permite saber o sinal do número racional.

Exemplos:

A $\frac{+5}{+8} = +\frac{5}{8}$ (mais dividido por mais dá mais)

B $\frac{-5}{-8} = +\frac{5}{8}$ (menos dividido por menos dá mais)

C $\frac{-5}{+8} = -\frac{5}{8}$ (menos dividido por mais dá menos)

D $\frac{+5}{-8} = -\frac{5}{8}$ (mais dividido por menos dá menos)

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Faça no seu caderno

1. Escreva na forma fracionária:

a) dois quintos. $\frac{2}{5}$ c) menos nove décimos. $-\frac{9}{10}$
b) menos três quartos. $-\frac{3}{4}$ d) menos cinco dezessete avos. $-\frac{5}{17}$

2. Dados:

-6 $+2$ $\frac{3}{5}$ 0 $1,8$ $-\frac{1}{4}$ 7

a) Quais são os números naturais? $+2, 0, 7$
b) Quais são os números inteiros? $-6, +2, 0, 7$
c) Quais são os números racionais? Todos

3. Verdadeiro ou falso?

a) Todo número inteiro positivo é racional. (V)
b) Todo número inteiro negativo é racional. (V)
c) Todo número decimal é racional. (V)

4. Escreva o número racional positivo ou negativo correspondente às seguintes frações. Siga o exemplo:

$-\frac{7}{2} = \frac{7}{2}$

a) $-\frac{9}{4} = \frac{9}{4}$ c) $-\frac{7}{2} = \frac{7}{2}$ e) $\frac{8}{9} = \frac{8}{9}$ g) $+\frac{11}{4} = \frac{11}{4}$
b) $-\frac{8}{5} = \frac{8}{5}$ d) $+\frac{9}{7} = \frac{9}{7}$ f) $\frac{6}{5} = \frac{6}{5}$ h) $-\frac{10}{23} = \frac{10}{23}$

5. Quais dos números abaixo são iguais a $-\frac{7}{5}$?

a) $-\frac{7}{5}$ c) $\frac{7}{5}$
b) $\frac{7}{-5}$ d) $+\frac{7}{5}$

6. Escreva os números racionais na forma irredutível. Veja o exemplo:

$\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$ $\frac{9}{10}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{1}{2}$

a) $\frac{+4}{+8} = \frac{1}{2}$ c) $\frac{+7}{+35} = \frac{1}{5}$ e) $\frac{-15}{20} = \frac{3}{4}$ g) $\frac{20}{-6} = -\frac{10}{3}$
b) $\frac{-6}{+9} = -\frac{2}{3}$ d) $\frac{-18}{-36} = \frac{1}{2}$ f) $\frac{-20}{-30} = \frac{2}{3}$ h) $\frac{-75}{100} = -\frac{3}{4}$

7. Transforme as frações em números inteiros:


a) $-\frac{36}{2} = -18$ c) $\frac{-33}{11} = -3$ e) $\frac{-84}{+4} = -21$ g) $\frac{0}{-19} = 0$
b) $+\frac{39}{13} = 3$ d) $\frac{-48}{-12} = 4$ f) $\frac{100}{-25} = -4$ h) $\frac{299}{-23} = -13$

60

Fonte: Plano de trabalho PB2.

Foi possível percebermos que, para os professores investigados, os livros didáticos assumem um importante papel na organização e planejamento das aulas, servindo como referência, tanto aos conteúdos a serem trabalhados, como para as indicações de metodologias a serem utilizadas. Como exemplo, citamos o caso da professora PB2 a qual, que para trabalhar os conceitos dos Números Racionais, se baseia no livro do Name. A figura 77 apresenta parte do planejamento com a introdução da operação de adição no livro e como foi apresentado aos alunos.

Figura 77 - Introdução do conteúdo da adição nos Números Racionais.



ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO EM Q

Operações com números racionais

Para as operações com números racionais relativos são válidas as regras operatórias das frações e dos números inteiros relativos.

Adição

A operação de adição em Q pode ser realizada da seguinte forma:


- 1 Reduzimos, se necessário, as frações dadas ao mesmo denominador comum.
- 2 Somamos os numeradores de acordo com a regra de sinais da adição de inteiros.

Exemplos:

A $\left(+\frac{1}{4}\right) + \left(+\frac{5}{6}\right) = \frac{1}{4} + \frac{5}{6} = \frac{3+10}{12} = \frac{13}{12}$

RECORDANDO!

4 · 2 = 8	12 : 4 = 3
2 · 3 = 6	12 : 6 = 2
1 · 3 = 3	3 · 1 = 3
1 · 2 · 2 · 3 = 12	2 · 6 = 12
m.m.c. (4,6) = 12	



B $\left(+\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{3-4}{6} = -\frac{1}{6}$

C $\left(-\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{-3-2}{4} = -\frac{5}{4}$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO
Faça no seu caderno

1. Efetue as adições:

a) $\left(+\frac{1}{2}\right) + \left(+\frac{3}{7}\right) = \frac{13}{14}$	c) $\left(-\frac{5}{6}\right) + \left(+\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{3}$
b) $\left(-\frac{1}{3}\right) + \left(+\frac{2}{5}\right) = \frac{1}{15}$	d) $\left(-\frac{2}{3}\right) + \left(+\frac{4}{9}\right) = -\frac{2}{9}$
2. Efetue as adições:

a) $\frac{2}{5} + \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{10}$	d) $\left(+\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{5}{3}\right) = -1$
b) $\frac{5}{3} + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{6}$	e) $\left(-\frac{4}{5}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{13}{10}$
c) $-\frac{5}{6} + \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{11}{12}$	f) $\left(+\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{1}{10}$

CAPRICHOS

16 de 15

$$E) -5 \cdot (-5) = +25 =$$

$$(1+1) \cdot (-5) = -10$$

$$25 \div 5$$

$$+5 \div 16 \text{ DP}$$

$$100$$

$$-90 = 100 - 90 = 10$$

$$F) 4 - \sqrt{81} = +0,5$$

$$-10$$

ADICÃO COM FRAÇÕES

REDUZIMOS, SE NECESSÁRIO, AS FRAÇÕES DADOS AO MESMO DENOMINADOR COMUM ATRAVÉS DO MMC.

* SEMPRE OS NÚMEROS DE ACORDO COM A REGRAS DE SINAIS DA ADIÇÃO DOS INTEIROS (SOM E TAMBÉM).

* SIMPLIFICAMOS SE FOR POSSÍVEL:

EXEMPLO:

CAPRICHOS

A) $\left(\frac{+1}{4}\right) + \left(\frac{+5}{6}\right) = \frac{+13}{12}$

$\frac{+1}{4} + \frac{+5}{6} =$

$\frac{+3}{12} + \frac{+10}{12} = \frac{+13}{12}$

4,6	2
2,3	2
1,3	3
1,1	2,2,3 = 12

CONTINUAÇÃO 18/6

B) $\left(\frac{+1}{2}\right) + \left(\frac{-2}{3}\right) =$

M.M.C.
2,3
2,3=6

$\left(\frac{+3}{6}\right) + \left(\frac{-4}{6}\right) = \frac{-1}{6}$

libro

Fonte: Plano de trabalho de PB2 e caderno de aluno.

É possível perceber que o método adotado pela professora é fiel ao apresentado no livro didático. O livro adotado dá ênfase a procedimentos e regras, não fazendo uso de metodologias como a contextualização ou mesmo resolução de problemas. Em todo capítulo destinado ao

tema Números Racionais (23 páginas), em momento algum, o livro apresenta sugestões de problemas ou faz referência alguma situação do cotidiano. A professora PB2 adota praticamente a mesma metodologia do livro, tanto na introdução do assunto quanto nas atividades propostas, mas, na conclusão do conjunto dos Racionais, quando todos os conceitos já foram desenvolvidos, é trabalhada a resolução de problemas (figura 78), para qual busca referências em outro livro didático.

Figura 78 - Exemplo de atividades de resolução de problemas envolvendo os Números Racionais

4- Resolva o problema no caderno.
Roberto reservou $\frac{1}{5}$ de seu salário para gastar com lazer e $\frac{1}{4}$ para comprar roupas. Que fração de seu salário Roberto reservou para gastos com lazer e compra de roupas? $\frac{9}{20}$

5- Resolva.
Júnior gosta de fazer economia. Para isso, ele costuma pesquisar preços antes de gastar sua mesada. Ele deposita todo o dinheiro economizado em um cofrinho. Durante a última semana, Júnior conseguiu guardar 9 moedas de R\$ 1,00; 11 moedas de R\$ 0,50; 15 moedas de R\$ 0,25; 23 moedas de R\$ 0,10 e 13 moedas de R\$ 0,05. Quanto Júnior conseguiu guardar nessa semana? R\$ 21,20

6- Responda no caderno.
No último trimestre, foi construído 1,2 km de uma estrada, que passou a ter 10,5 km. Quantos quilômetros essa estrada tinha há três meses? $9,3$ km

7- Roberto levou para seu lanche $\frac{3}{4}$ de uma torta e sua irmã levou $\frac{2}{8}$ da mesma torta. Que quantidade de torta comeram os dois irmãos? 1 torta inteira

8- Mateus gosta de livros de aventura. Há dois dias começou a ler um novo livro. No primeiro dia leu $\frac{1}{6}$ e no segundo dia leu $\frac{2}{5}$ do mesmo livro.
a) Que parte do livro ele já leu? $\frac{17}{30}$
b) Que parte do livro ainda falta ler? $\frac{13}{30}$

9- Copie e complete a tabela em seu caderno.

Produto	Quantidade	Preço por kg	Preço unitário	Total (R\$)
Açúcar	4 kg	R\$ 0,82		3,28
Café	1,5 kg	R\$ 8,20		12,30
Feijão	2,5 kg	R\$ 1,92		4,80
Alho	$\frac{1}{2}$ kg	R\$ 6,34		3,17
Óleo	3 latas		R\$ 1,14	3,42
Água	5 garrafas		R\$ 0,85	4,25
Total a pagar				31,22

10- Em uma pesquisa de opinião, os resultados foram: $\frac{2}{5}$ das pessoas entrevistadas disseram preferir Matemática, $\frac{1}{4}$ afirmou preferir Geografia, $\frac{1}{3}$ escolheu Língua Portuguesa, e as demais não indicaram uma preferência por nenhuma disciplina específica.
a) Qual a fração de pessoas que preferem Matemática ou Geografia?
 $\frac{2}{5} + \frac{1}{4} = \frac{8+5}{20} = \frac{13}{20}$

Fonte: Caderno de planejamento da professora PB2.

Apesar de utilizar o mesmo livro didático como referência, as metodologias adotadas por PB1 e PB2 diferem-se na forma e na sequência como são trabalhados no currículo. Enquanto uma das professoras (PB1) trabalha o conteúdo dos Números Racionais no início do ano letivo até a metade do mês de abril, o qual é pontualmente retomado depois, quando a professora trabalha os números negativos, a outra professora (PB2) desenvolve o tema no final de maio até o início do mês de agosto, o que mostra a autonomia das professoras em relação à organização do planejamento das suas aulas.

A questão da autonomia é um dos aspectos que diferenciam os professores brasileiros e mexicanos investigados. Foi possível perceber, ao longo da pesquisa, que os docentes brasileiros conseguem ter uma liberdade de decisão a respeito da abordagem e sequência dos conteúdos, claro que respeitando o que determinam os planos de estudo da escola. As professoras PB1 e PB2, por exemplo, lecionam na mesma escola, porém abordam o tema Números Racionais em momentos diferentes do ano letivo.

Já entre os professores mexicanos não é tão perceptível a autonomia em um primeiro momento, pois eles já possuem uma base comum de conteúdo a qual serve como referência na sequência do conteúdo. Porém, quando indagamos a professora PM2, em uma das entrevistas, sobre como ela organizava as suas aulas, foi possível entender como se dá esse processo e como ela entendia essa questão da autonomia. Apresentamos, na figura 79, trechos dessa entrevista.

Figura 79 - Entrevista com a professora PM2 sobre planejamento das aulas.

Trechos originais	Trechos traduzidos
<p>PM2: - [...] nosotros tenemos cierta libertad, pero está libertad, debo ser sincera, esta cierta libertad, la tenemos por mi punto de vista porque nuestras autoridades desconocen, nos dejan y nos dan libertad porque no saben cómo orientarnos. Entonces se hay una planeación donde nosotros tenemos que seguir lo que marcando está, porque a nosotros dan nuestro plan y programa que tenemos que llevar. Estos planes y programas ya vienen estipulados.</p> <p>Pesquisador: - [...] ¿está en lo sitio de la SEP?</p> <p>PM2: - Ya está todo. Lo que nosotros tenemos libertad es planearlo que es lo que vamos ver en primero bimestre, en segundo bimestre. [...] en esta planeación yo estoy poniendo igual como lo me marca: eje, temas, contenidos cuantas sesiones aproximadamente me voy a llevar en cada contenido, y las fechas probables en que voy usar. [...] ¿Quién nos dice eso? Nosotros, no hay nadie, es eso que yo hago. [...] Esto es lo que nosotros hacemos o lo que yo hago, porque aquí es muy probable que usted revisen planeaciones de dos o tres compañeros y lo tenía diferentes, porque cada aquí hacen a su formato. [...] Es lo que yo hago hay que contar cuantos nodales son, cuantas sesiones respectivas son, que son doscientas.</p> <p>Pesquisador: - ¿Para hacer la distribución?</p> <p>PM2: - Para poder a empezar a dosificar que es la distribución. Una vez que ya dosifiqué, ya digo dos, este contenido con la experiencia, porque no hay una regla, creo que aquí voy llevar cuatro, y aquí nada más que dos. Creo que aquí en nociones de probabilidad voy llevar cinco. Voy a distribuido, dosificando. Cuando ya dosifico entonces con</p>	<p>PM2: - [...] nós temos certa liberdade, mas esta liberdade, devo ser sincera, esta certa liberdade, a temos pelo meu ponto de vista porque nossas autoridades desconhecem, nos deixam e nos dão liberdade porque não sabem como orientar-nos. Então, se há um planejamento nós temos que seguir o que está marcando, porque a nós dão nossos planos e programa que temos que seguir. Esses planos e programas já vem estipulados.</p> <p>Pesquisador: - [...] está no site da SEP?</p> <p>PM2: - Já está tudo. Oque nós temos liberdade é planejar o que vamos ver no primeiro bimestre, no segundo bimestre. [...] neste planejamento eu estou pondo igual como marca: eixo, temas, conteúdos, quantas sessões aproximadamente vou levar em cada conteúdo e as datas prováveis em que vou usar. [...] Quem nos diz isso? Nós, não há ninguém, é isso que eu faço. [...] Isto é o que nós fazemos o que eu faço, porque aqui é muito provável que você revise planejamentos de dois ou três colegas e os tenha diferentes, porque aqui cada um faz no seu jeito. [...] É o que faço, é preciso contar quantos tópicos são, quantos períodos respectivos são, que são duzentos.</p> <p>Pesquisador: - Para fazer a distribuição?</p> <p>PM2: - Para poder começar a dosar que é a distribuição. Uma vez que já dosei, esse conteúdo com a experiência, porque não há uma regra, creio que aqui vou levar quatro, e aqui nada mais que dois. Creio que aqui em noções de probabilidade vou levar cinco. Vou distribuindo, dosando. Quando já dosei um calendário começo, desde de 26 de agosto dois períodos, 28 quatro períodos, 3 de setembro</p>

<p><i>un calendario empezó, desde de 26 de agosto dos sesiones, 28 cuatro sesiones, 3 de septiembre otras cuatro sesiones, 9 de septiembre y así de tal manera que salga planeando todo ciclo escolar. Ahora, de estas doscientas sesiones yo hago es descuento 15% dese total. ¿Por qué? Porque hay días donde nosotros paramos, para entrega de cualificaciones [...] se tenemos reunión de planeación, reunión sindical, se suspende las clases.</i></p> <p>Pesquisador: - <i>¿Esto ya está previsto en lo calendario?</i></p> <p>PM2: - <i>¡No! Esto, esta planeación, fue que yo tuve la fortuna de que cuando trabajado con una supervisora me enseñó, me dijo con suya experiencia: ‘tienes que prevenir días, se tú planea los doscientos días no va a salir, porque hay días que se pierde’. [...] Entonces, no estipulan nadie, simplemente bajo la experiencia, bajo lo que se va viviendo. Así tengo mí planeación, ya lo que voy viendo, que es lo que has veces a mí me sucede, porque ni todos os grupos son iguales, de repente estoy trabajando con ellos ángulos y me preguntan áreas, aprovecho y me meto. Meto con todo que está relacionado, y las veces son temas que van a más adelante pero por la situación los grupos presentan, nos obligan a improvisar.</i></p>	<p><i>outros quatro períodos, 9 de setembro e assim de tal maneira que esteja planejado todo ciclo escolar. Agora, desses duzentos períodos, desconto 15% desse total. Por quê? Porque há dias onde nós paramos, para entrega de avaliações [...] se temos reunião de planejamento, reunião sindical, se suspendem as aulas.</i></p> <p>Pesquisador: - <i>Isto já está previsto no calendário?</i></p> <p>PM2: - <i>Não! Isto, este planejamento, fui que eu tive a sorte de quando trabalhei com uma supervisora me ensinou, me disse com sua experiência: ‘tens que prever dias, se você planeja os duzentos dias não vão sair, porque há dias que se perde’. [...] Então, ninguém estipula, simplesmente é pela experiência, sob o que se vai vivendo. Assim tenho meu planejamento, já o que vou vendo, que é o que às vezes acontece, porque nem todas as turmas são iguais, de repente estou trabalhando com eles ângulos e me perguntam áreas, aproveito e me enfio. Enfio tudo que está relacionado, e às vezes são temas que vão mais adiante, mas pela situação em que as turmas estão, nos obrigam improvisar.</i></p>
--	---

Fonte: a pesquisa.

Ainda sobre essa questão, a professora PM1, quando questionada se segue rigidamente os planos de estudos em suas aulas, respondeu que os adapta às necessidades da turma, e que, algumas vezes, não chega a completar os programas de estudos indicados pela SEP, por falta de tempo para os alunos compreenderem os conteúdos.

A importância da experiência na organização das aulas, citada pela professora PM2, também é percebida nas professoras brasileiras, como, por exemplo, a professora PB1 com mais de 25 anos de sala de aula, que não utiliza um caderno para o planejamento das aulas e afirmou, quando questionada de como organizava o planejamento: “[...] *tenho tudo na cabeça, vou pegando dos livros, e vou tendo as ideias e vou fazendo*”. Então, mesmo com sistemas diferentes de orientações e indicações sobre a base de conteúdos a serem trabalhados, aberta como o sistema brasileiro ou mais fechado, como o mexicano, a experiência é um elemento fundamental no planejamento dos professores investigados.

Em relação aos livros didáticos, perguntamos aos professores se os utilizavam, em sala de aula, já que ambos os países possuem programas de distribuição de livros didáticos aos estudantes. E aqui surgem algumas particularidades: quanto aos professores mexicanos PM1 e PM3, o uso do livro é mais rotineiro pela questão da unicodência. São professores do sexto grau e do primeiro grau do Telessecundário, que o utilizam como apoio, em sala de aula, para atividades.

A professora PM2 utiliza, esporadicamente, o livro didático, em sala de aula, e justifica que não tem como avaliar se todos os alunos fizeram as atividades, pois somando todas as turmas tem um total de mais ou menos 150 alunos. E complementa dizendo que os professores têm uma resistência a utilizar os livros didáticos como uma forma de protesto às reformas

educativas impostas pelo governo. Acabam utilizando mais por pressão dos pais dos alunos, que pagam para ter os livros didáticos na escola.

Os professores brasileiros, quando questionados se utilizam os livros didáticos nos seus planejamentos e com os alunos, em sala de aula, resumidamente justificaram da seguinte forma (figura 80).

Figura 80 - Entrevista com os professores PB1, PB2 e PB3 sobre o uso dos livros didáticos.

PB3: - *Até o ano passado eu tinha o dia do livro, toda semana a gente tinha um dia para fazer atividades só que tinha no livro. Mas este ano, para acompanhar as atividades do oitavo ano, eu vejo que tem poucos exercícios para eles fazerem no livro e às vezes é uma coisa que é muito difícil para eles. Parece que o livro do nível está mais acima dos alunos, daí eles não conseguem fazer aquela leitura que fazem ali. Então praticamente eu uso assim esporadicamente o livro na aula. Mas é até indicação, eu dei um conteúdo na aula, e eu digo assim: o conteúdo está na página tal para vocês darem uma olhadinha, tem os alunos mais avançados.*

PB1: - *Eu utilizo mais de um livro porque é difícil ter um que contemple de forma satisfatória todo o conteúdo, então pego um pouco de cada, mas também utilizo o livro da escola com os alunos.*

PB2: - *Uso mais de um livro, tem uns que eu já sei tal coisa vou pegar aquela coisa ali, uso livros novos, uso livro antigos também. [...] (Exemplifica:) no 9º ano não uso, eu acho esse livro que veio do Bianchini, quer dizer, usei em algumas aulas, mas pouco, porque eu acho que vai muito direto e os nossos alunos não têm condições de acompanhar daquela forma. Por exemplo, começa com equação e daqui a pouco tem uma equação com fração ou número decimal, se tu começar direto assim, eles ficam perdidos e a maioria não faz nada.*

E um outro aspecto que interfere no uso em sala de aula é a que muitas vezes, os livros didáticos não são suficientes para todos os alunos. As professoras PB2 e PB3 falaram a respeito disso:

PB3: - *[...] Tem uma turma que não tem livro para todos, e isso é uma coisa, toda vez que tem que trabalhar com o livro, tem que trabalhar em dupla, então não rende, não rende a tua aula, porque eles ficam muito mais tempo conversando do que fazendo a atividade.*

PB2: - *[...] no 9º ano não tem, porque esse é o terceiro ano desse livro didático, eles sempre valem por três anos, e normalmente no terceiro ano não tem para todas as turmas.*

Investigador: - *Por quê? O que vai acontecendo?*

PB2: - *Vai sumindo.*

Investigador: - *Eles têm que devolver, certo?*

PB2: - *Eles têm que devolver. Mas assim, o controle não é 100%. No final do ano todos deveriam devolver, mas nem todos devolvem. Tem aluno que é transferido, vão embora e levam o livro junto. E às vezes assim, no primeiro ano nós temos 100 alunos do 7º ano por exemplo, e no segundo tem 120, e daí faltou. [...] vem alguns a mais, mas às vezes não fecha essa conta.*

Fonte: a pesquisa.

O livro didático é um recurso importante a ser explorado pelo professor, por isso o nosso interesse em conhecer, na prática, como os professores se apropriam desse material. Apesar de toda a sua importância, não deve ser o único suporte do trabalho pedagógico do professor. Conforme o Guia de Livros Didáticos (BRASIL, 2010), ele é recurso auxiliar no processo de ensino-aprendizagem e não pode, portanto, ocupar o papel dominante nesse processo. Assim, cabe ao professor manter-se atento, para que sua autonomia pedagógica não seja comprometida.

Apesar das políticas públicas e do esforço de promover a escolha do livro didático pelos professores, através das Guias de Livros Didáticos do PNLD, nem sempre as escolas recebem os livros escolhidos pelo corpo docente, ou mesmo, como os projetos do PNLD são trienais, alguns professores não participam da escolha, por estarem alocados há pouco tempo na escola.

Mas, independentemente da situação, a indicação é que o livro sirva como auxílio ao trabalho didático do professor. O Guia de Livros Didáticos (BRASIL, 2010) ressalta:

É preciso observar, no entanto, que as possíveis funções que um livro didático pode exercer não se tornam realidade, caso não se leve em conta o contexto em que ele é utilizado. [...] Por isso, tanto na escolha quanto no uso do livro, o professor tem o papel indispensável de observar a adequação desse instrumento didático à sua prática pedagógica, ao seu aluno e ao projeto político-pedagógico de sua escola (BRASIL, 2010, p.13).

Em relação ao tema Números Racionais, além dos planejamentos dos professores, também analisamos os cadernos dos alunos, com o intuito de compreender a ponta final desse processo de organização das aulas, o qual envolve as orientações oficiais, o uso dos livros didáticos, a busca em outras fontes, como internet e livros paradidáticos como referências metodológicas para serem utilizadas em sala de aula, sendo que os cadernos dos alunos servem como registro e refletem toda essa organização do professor.

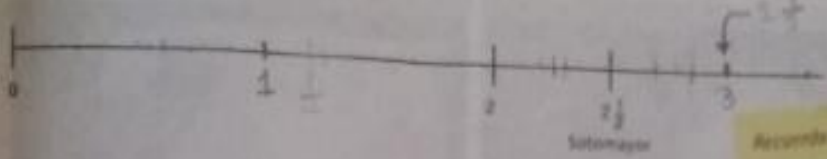
Os professores mexicanos investigados, como relataram nas entrevistas, seguem os programas de estudos da SEP, variando, às vezes, somente na sequência dos conteúdos. Percebemos que, além dos programas e planos de estudos disponibilizados a eles, também buscam em livros e internet atividades para propor a seus alunos. Podemos exemplificar com o trabalho desenvolvido pelo professor PM3, que utiliza muito o livro didático distribuído pela SEP e complementa as atividades buscando em outros livros didáticos. Na figura 81, apresentamos, na imagem da esquerda, atividades no livro didático e, na da direita, atividades pesquisadas em outros livros didáticos.

Figura 81 - Ejemplo de actividades propuestas pelo professor PM3.

MATEMÁTICAS I

Consideremos lo siguiente

En la siguiente recta se ha representado el salto de Sotomayor. Anota en el lugar correspondiente la representación de la distancia que saltaron Austin y Hölm.



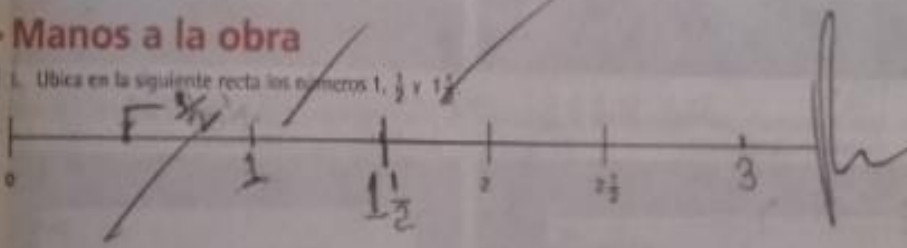
Recuerda que:
Un número mixed se puede expresar como una fracción impropia. Por ejemplo:
 $2\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$

a) ¿Quién hizo el salto de mayor altura? _____
b) ¿Quién hizo el salto de menor altura? _____

Comparen sus respuestas y comenten cómo las obtuvieron.

Manos a la obra

I. Ubica en la siguiente recta los números $1\frac{1}{2}$ y $1\frac{2}{3}$.

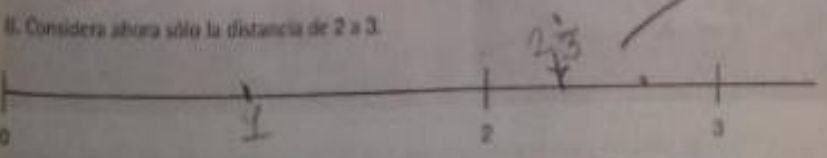


a) En la misma recta ubica el 3.

b) ¿Cómo supiste dónde va el 3? medida del número 4


c) Con tu regla mide la distancia del 0 al 1. ¿Cuánto es? 4.5
¿Y la distancia de 1 a 2? es lo mismo ¿Y la de 2 a 3? es lo mismo
Verifica que estas tres distancias sean iguales, si no es así revisa en dónde está el error.

II. Considera ahora sólo la distancia de 2 a 3.



a) Ubica el punto $2\frac{2}{3}$ (altura que saltó Hölm).

b) ¿Qué hiciste para localizar el punto $2\frac{2}{3}$?
partiendo en tres partes



PARA HACER

1. En cada inciso encierra en un círculo el número mayor. Discute con tus compañeros cuál fue la técnica que empleaste.

a) $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$	b) $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{2}$	c) 0.01 y $\frac{1}{10}$	d) $\frac{3}{4}$ y $\frac{1}{3}$
f) 0.1 y $\frac{1}{5}$	g) $\frac{4}{7}$ y $\frac{3}{5}$	h) $\frac{1}{5}$ y 0.3	i) $\frac{2}{5}$ y $\frac{2}{4}$

2. Ordena, de mayor a menor, los números indicados en cada inciso, como con tus compañeros los resultados obtenidos. Luego, ubícalos sobre la recta numérica que está debajo y explica tu procedimiento.

a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 0.2$	b) $\frac{2}{3}, 0.2, \frac{5}{2}, 1$	c) 0.01, $\frac{1}{10}, \frac{1}{5}, 0.3$
---	---------------------------------------	---

3. Escribe en cada recuadro un valor numérico para que el numerador o denominador que falta cumpla la relación de mayor que, menor que o igual, según sea el caso.

$\frac{1}{5} > \frac{\square}{10}$	$\frac{\square}{2} < \frac{4}{5}$	$\frac{4}{4} = \frac{5}{\square}$	$\frac{1}{5} = \frac{3}{\square}$
------------------------------------	-----------------------------------	-----------------------------------	-----------------------------------

Discute con tus compañeros la estrategia que seguiste para resolver estos problemas.

4. Una pieza de aluminio de un microscopio tiene un grosor de 0.125 pulgadas.

a) Traza en tu cuaderno una recta numérica en la que puedas ubicar la medida: grosor del microscopio y los siguientes valores cercanos a él: 0.12 y 0.13

b) Expresa en forma de fracción dichas cantidades: _____

5. En cada inciso encuentra un número intermedio entre los dos que se dan a continuación.

a) $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$	b) $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{2}$	c) 0.01 y $\frac{1}{10}$	d) $\frac{3}{4}$ y $\frac{1}{3}$	e) $\frac{3}{5}$ y 0.2
f) 0.1 y $\frac{1}{5}$	g) $\frac{4}{7}$ y $\frac{3}{5}$	h) $\frac{1}{5}$ y 0.3	i) $\frac{2}{5}$ y $\frac{2}{4}$	j) $\frac{2}{5}$ y $\frac{1}{11}$

6. Una vez que hayas trabajado con estas actividades, reflexiona sobre lo siguiente: ¿Es $\frac{3}{7}$ mayor que $\frac{2}{5}$? Formen grupos de cuatro compañeros y justifiquen su respuesta de distintas maneras. Propongan una técnica para decidir qué fracción es mayor.

7. Traza en tu cuaderno una recta numérica y coloca las fracciones $\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{2}{8}, \frac{3}{4}$ sobre ella.

a) ¿Cuál representa al número más grande? ¿Cuál al más pequeño?

b) ¿Recuerdas lo que viste en la lección anterior? Cuando Santiago y Natalia medían la habitación para alfombrarla, no tenían una respuesta única, sino que debían estimar sus resultados.

En este caso, comenta con tus compañeros y propongan dos números entre cada uno de los recién mencionados, ejemplo, den dos números diferentes entre $\frac{2}{8}$ y $\frac{2}{5}$.

8. Se encontró una nota que dice: En la recta estaban marcados con color cuatro puntos A, B, C y D. El tesoro está en el punto D, pero se borraron los nombres y sólo quedaron marcadas sus posiciones. Resuelve este acertijo y podrás volver a colocar los nombres de

24 Bloque 1

Fonte: a pesquisa.

Alguns fatos nos chamaram a atenção em relação aos registros dos alunos dos professores PM1, PM2 e PM3: o primeiro é que, antes de cada bloco, são listados todos os conteúdos a serem trabalhados naquele período de tempo. Outra característica é o fato que os

professores mexicanos são de escolas diferentes e todos têm por hábito avaliar os registros dos alunos no caderno e livro, para verificar se estão completos com o conteúdo e se realizaram as atividades propostas. E, em relação às metodologias empregadas, os professores utilizam muito a resolução de problemas envolvendo o conteúdo.

Já as professoras PB1, PB2 e PB3, todas da mesma escola, em sua prática apresentam semelhanças e diferenças quanto às metodologias adotadas ao ensino dos Racionais no 7º ano do EF. As três desenvolvem os conceitos indicados pelos documentos oficiais e pelos Planos de Estudos da escola, diferindo na época em que desenvolvem o trabalho, PB1 e PB3 na mesma época, e PB2 no início do ano letivo.

Em relação ao uso do livro didático em sala de aula, PB1 faz de forma mais efetiva, conforme registros dos alunos. Mas, a princípio, nenhuma das três faz referência ao uso das indicações propostas pelo livro em suas seções, ficando na utilização de atividades e apresentação do conteúdo.

A prática de sala de aula da professora PB1 é diferente de PB2 e PB3 em relação ao uso do livro didático da escola: enquanto as duas primeiras não formalizam a utilização nos registros dos alunos, PB1 tem por prática a formalização. Por exemplo, quando a professora inicia o conteúdo dos Números Racionais fazendo referência à introdução do tema no livro do Bianchini: *'Os Números Racionais, no dia a dia'*, conforme a figura 82 que apresenta a indicação do registro no caderno de um aluno e parte da introdução do livro.

Figura 82 - Introdução do tema Números Racionais proposto pela professora PB3

1º/06/19 Números Racionais

São todos os números que podem ser escritos na forma de fração, como:

$$\frac{30}{1} \quad \frac{2,7}{1} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{1400}{1} \quad \frac{-2,5}{1}$$

↓
27 frações
30 decimal

$$\frac{-24}{10}$$

$$- \frac{231}{1} \quad + \frac{2,5}{1}$$

↓
2

Lecture → pag 46 e 47

Copiar a explicação da pag 48

Por Conhecendo um pouco mais os números racionais.

Não divida de um número inteiro por outro número inteiro, diferente de zero, e o resultado pode ser um número inteiro ou um número não inteiro.

Veja os seguintes exemplos:

a) $(-30) : (+5) = -6$, pois $(-6) \times (+5) = -30$

↑ ↑ ↑
números inteiros

Nesse caso o quociente de $(-30) : (+5)$ é um número inteiro negativo, uma vez que estamos dividindo números de sinais contrários, e pode ser representado

CAPÍTULO

2

Números racionais

1 Os números racionais no dia a dia

Leia a reportagem a seguir.

A Terra não aguenta

A humanidade já consome mais recursos naturais do que o planeta é capaz de repor. O colapso é visível nas florestas, oceanos e rios. O ritmo atual de consumo é uma ameaça para a prosperidade futura da humanidade.

A exploração dos recursos naturais da Terra permite à humanidade atingir patamares de conforto cada vez maiores. Diante da abundância de riquezas proporcionada pela natureza, sempre se aproveitou como se o dote fosse inesgotável. [...] Um relatório publicado [...] pela ONG World Wildlife Fund dá a dimensão de como a exploração dos recursos da Terra saiu do controle e das consequências que isso pode ter no futuro. O estudo mostra que o atual padrão de consumo de recursos naturais pela humanidade supera em 30% a capacidade do planeta de recuperá-los. Ou seja, a natureza não dá mais conta de repor tudo o que o bicho homem tira dela. A conta da ONG foi feita da seguinte forma.

Primeiro, estimou-se a quantidade de terra, água e ar necessária para produzir os bens e serviços utilizados pelas populações e para absorver o lixo que elas geram durante um ano. A seguir, esses valores foram transformados em hectares e o resultado dividido pelo número de habitantes do planeta. Chegou-se à conclusão de que cada habitante usa 2,7 hectares do planeta por ano. Nessa conta, o brasileiro utiliza 2,4 hectares. De acordo com a análise, para usar os recursos sem provocar danos irreversíveis à natureza, seria preciso que cada habitante utilizasse, no máximo, 2,1 hectares. Se o homem continuar a explorar a natureza sem dar tempo para que ela se restabeleça, em 2030 serão necessários recursos equivalentes a dois planetas Terra para atender ao padrão de consumo.



Ilustração: André Luiz de Souza / Arte & Design / Pirella Göttsche Lowy

Fonte: Registro de aluno e Bianchini (2011).

Observando os professores citados nesta seção, percebemos uma cultura de utilização dos livros didáticos como uma referência importante no sentido de subsidiar o seu fazer em sala de aula, sendo a principal fonte de referência para os planejamentos, mesmo que os livros utilizados não sejam necessariamente, os adotados pelas escolas e distribuídos aos alunos.

Ao longo da investigação, com o acompanhamento dos planos de trabalho, durante as entrevistas, foi possível perceber que alguns dos livros utilizados eram de edições antigas. Segundo argumentos dos próprios professores, foram escolhidos conforme a identificação com as metodologias que eles adotam em sala de aula, ou seja, pela teoria dos conteúdos apresentados, pelos tipos de atividades propostas.

Um aspecto que nos pareceu importante destacar é que, nos professores mexicanos, é mais evidente o uso dos livros didáticos. Como salientamos anteriormente, na seção 4.2, quando tratamos dos livros didáticos, os mexicanos têm como característica apresentar, principalmente, atividades. Dessa forma, se torna um recurso muito utilizados pelos professores. Obviamente, o uso desse material, em sala de aula é algo pessoal. Assim os professores podem utilizar mais efetivamente, como o professor PM3 e outros, menos a professora PM2, que utiliza os livros conforme combinação com os alunos e, como ela mesma argumentou, os pais fazem pressão pela utilização dos livros didáticos nas aulas, já que esses são pagos⁶³.

Para os professores brasileiros investigados, o papel dos livros didáticos na prática de sala de aula é também de protagonista, mas foi possível perceber que os adotados pela escola são pouco utilizados com os alunos. Os livros didáticos brasileiros, geralmente, têm como características conceituar os conteúdos e propor indicações de atividades para realizar com os alunos, como, por exemplo, no livro do Bianchini, onde essas atividades ou sugestões de metodologias estão divididas em seções. Porém, essas atividades não são exploradas pelos professores investigados em sala de aula.

Quanto às semelhanças na prática dos professores investigados, os mexicanos seguem o que está estabelecido nos *Estándares* e os brasileiros, os planos de estudo da escola, como estabelece a legislação de ambos os países, com a distribuição dos conteúdos em relação ao tempo dispensado para desenvolver o tema em sala de aula. O momento da abordagem (não necessariamente o que estabelecem as normas) é um aspecto pessoal e está ligado à experiência profissional de cada um.

Na seção seguinte, apresentamos as reflexões sobre os três aspectos tratados nesse capítulo, orientações oficiais, livros didáticos e prática dos professores, especificamente, sobre os Números Racionais.

⁶³ Como explicamos anteriormente, o pagamento é feito através das cotas, para custeio da logística de entrega dos livros didáticos à escola.

3.4 REFLEXÕES SOBRE OS NÚMEROS RACIONAIS ENVOLVENDO OS PROGRAMAS, PROBLEMÁTICAS E PROFESSORES

Todo cambio debe ser despacio e estable para avanzar.

Cantoral (...en una de tantas charlas)

Ao longo desta análise, buscamos compreender o processo de estudo dos Números Racionais comparando um grupo de professores brasileiros e mexicanos, partindo da perspectiva oficial até a prática da sala de aula. Para isso, dividimos essa reflexão final em três partes: orientações oficiais, livros didáticos e a prática dos professores.

Quando falamos em uma perspectiva oficial, estamos nos limitando a tratar sobre as indicações e orientações propostas pelo governo a respeito dos Números Racionais. Sabemos que, quando são propostas metodologias e conteúdos a serem ensinados, implicitamente, há propostas mais amplas que envolvem políticas públicas. Porém, pela complexidade do assunto, nos limitamos a refletir sobre as similaridades e diferenças das propostas brasileiras e mexicanas sobre a temática de estudo.

As reformas educacionais colocadas em prática pelo governo mexicano geraram entre outros atos, o documento *Acuerdo 592: por el que se establece la articulación de la Educación Básica* (MÉXICO, 2011a), o qual rege as orientações didáticas a respeito da Educação Básica em todo território mexicano. É no *Acuerdo 592* que se incluem os *Plan de Estudios 2011: Educación Básica*, os quais define as competências para a vida, o perfil do egresso, os *Estándares Curriculares* e as aprendizagens esperadas, que constituem o trajeto formativo dos estudantes.

No capítulo 2 deste trabalho, detalhamos esses aspectos. Queremos destacar, neste momento, que as propostas educacionais apresentadas no *Acuerdo 592* têm como referencial modelos internacionais, em especial o PISA. Como o próprio documento afirma:

XI.1.PISA. Uma referência internacional

O Programa para Avaliação Internacional de Aluno da OCDE (PISA, pela sua sigla em inglês) é um referencial teórico internacional que permite conhecer o nível de desempenho dos alunos que concluem a Educação básica, e avalia alguns dos conhecimentos e habilidades necessárias que devem ter para desempenhar de forma competente na sociedade do conhecimento.

A prova PISA se converteu em um consenso mundial educativo que perfila as sociedades contemporâneas a partir de três campos do desenvolvimento na pessoa: a leitura como habilidade superior, o pensamento abstrato como base do pensamento complexo e o conhecimento objetivo do entorno como sustento da interpretação da realidade científica e social⁶⁴ (MÉXICO, 2011a, p.77, tradução nossa).

⁶⁴ XI.1. PISA. Un referente internacional

El Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos de la OCDE (PISA, por sus siglas en inglés) es un marco de referencia internacional que permite conocer el nivel de desempeño de los alumnos que concluyen la

Essas ideias adotadas influenciam os *Estándares Curriculares* sobre a aprendizagem esperada dos alunos ao final de cada um dos quatro períodos escolares. Com isso, entre outros aspectos, se definem os conteúdos a serem trabalhados, os quais já apresentamos neste trabalho, nos tópicos em relação aos Números Racionais.

No Brasil, na prática, os PCN servem como orientação às atividades escolares, apesar desses documentos serem datados da década de 90, redigidos sob a influência do construtivismo. Mas, assim como no México, o Brasil vem adotando o PISA como referência para as propostas educacionais e metas a serem alcançadas em qualidade na educação.

Caminhando para uma valorização do que propõe a OCDE, através do PISA, o Relatório Nacional do PISA 2000, elaborado pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep)⁶⁵, afirma que “a estrutura conceitual de avaliação do Enem, tendo como referência principal a articulação entre o conceito de educação básica e o de cidadania, tal como definidos nos textos constitucionais e na nova LDB, encontra-se inteiramente em consonância com os preceitos do PISA” (INEP, 2001, p. 8).

E essa política vem se fortalecendo, no Brasil, com a proposta de uma Base Nacional Comum de Conteúdos (BNCC) em discussão para a sua implementação. A BNCC tem como objetivo sinalizar o percurso de aprendizagem e desenvolvimento dos estudantes ao longo da Educação Básica, e vem, com isso, atender o Plano Nacional de Educação (PNE) e as Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais para a Educação Básica (DCNEB).

Com essa futura implementação da BNCC⁶⁶, o que hoje é uma diferença marcante na prática escolar brasileira e mexicana, passará a se assemelhar com a definição dos conteúdos a serem desenvolvidos. Com uma diferença de proposta, a Base brasileira representará uma parte do conteúdo. O restante, chamado de parte diversificada, será definido pelo professor⁶⁷,

Educación Básica, y evalúa algunos de los conocimientos y habilidades necesarios que deben tener para desempeñarse de forma competente en la sociedad del conocimiento.

La prueba PISA se ha convertido en un consenso mundial educativo que perfila las sociedades contemporáneas a partir de tres campos de desarrollo en la persona: la lectura como habilidad superior, el pensamiento abstracto como base del pensamiento complejo, y el conocimiento objetivo del entorno como sustento de la interpretación de la realidad científica y social.

⁶⁵ O Inep é uma autarquia federal vinculada ao Ministério da Educação (MEC), cuja missão é promover estudos, pesquisas e avaliações sobre o Sistema Educacional Brasileiro, com o objetivo de subsidiar a formulação e implementação de políticas públicas para a área educacional.

⁶⁶ A Base Nacional Comum Curricular é uma exigência feita ao sistema educacional brasileiro pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Brasil, 1996; 2013), pelas Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica (Brasil, 2009) e pelo Plano Nacional de Educação (Brasil, 2014).

⁶⁷ Segundo a proposta preliminar da 2ª versão da Base Nacional Comum Curricular, coordenada pelo MEC, os textos que compõem a seção que trata das áreas de conhecimentos e seus componentes curriculares não têm caráter normativo, uma vez que explicitam os fundamentos que orientaram a definição dos objetivos de aprendizagem e desenvolvimento para as áreas de conhecimento e seus componentes curriculares. Tais fundamentos devem ser

enquanto que a mexicana representa a totalidade, mas destacamos que os conteúdos apresentados nos *Estándares* não devem ser os únicos que os estudantes devem aprender (MÉXICO, 2011a).

A BNCC, no Brasil, terá como objetivo ser parte do currículo e orientará a formulação do Plano Político Pedagógico (PPP) das escolas, permitindo uma maior articulação. Essas reformas implementadas, no contexto brasileiro, poderão refletir em uma nova postura do professor referente a sua prática, obviamente envolvendo a escola como um todo. Mudará, por exemplo, a autonomia do professor em relação aos seus planejamentos, já que apresentará os conteúdos a serem desenvolvidos, ao contrário do sistema atual, no qual o professor pode atuar diretamente na eleição dos conteúdos dos planos de estudos da escola.

A nossa ideia não foi fazer uma comparação avaliativa entre os sistemas educativos mexicano e brasileiro, que se apresentam de formas diferentes, um com um base nacional de conteúdos e outro com mais autonomia na escolha dos conteúdos. O que procuramos, na investigação realizada, é entender as propostas relacionadas ao estudo dos Números Racionais e como os professores lidam, dentro da sua realidade, com essas orientações.

Também, não temos a pretensão de apresentar um currículo a respeito dos Números Racionais, até porque não temos elementos suficientes para isso. O que buscamos é uma reflexão sobre a prática, uma problematização do conhecimento construído na escola. E para isso é necessário um olhar sistêmico sobre a educação, assim, foi na TSME que nos apoiamos para delinear os pressupostos norteadores para uma futura proposta para o estudo dos Números Racionais.

Ao olhar esses dois países, com contextos diferentes, seja no aspecto sociocultural ou mesmo educacional, percebemos que são semelhantes as competências que se esperam sejam desenvolvidas em relação aos Números Racionais, tendo como referência os ciclos escolares. No México, ao final do terceiro período escolar (5º e 6º graus do Primário) e início do quarto período escolar (1º grau do Secundário), é onde se concentra a formalização dos conhecimentos acerca dos Racionais. É nesse período que esperam que os alunos façam comparações entre os naturais, fracionários e decimais, assim como resolvam problemas com os Racionais utilizando as quatro operações.

No Brasil, esse processo de formalização se inicia no final do 2º ciclo escolar (5º ano) e se efetiva no 3º ciclo (6º e 7º anos). Assim como no México, nos anos anteriores a esse período,

ressignificados à luz dos interesses e necessidades de cada sistema educacional e de cada escola, a partir de estudos e pesquisas considerados na elaboração de suas propostas curriculares.

os trabalhos com os Racionais são introdutórios à formalização, como o uso de frações do tipo $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$. São exemplos dessas constatações:

- Aprendizagens esperadas para o final do terceiro período escolar (*Estándares Curriculares, Acuerdo 592, México*):

1.1.1 Lê, escreve e compara números naturais, fracionários e decimais;

1.2.2 Resolve problemas aditivos com números fracionários ou decimais, usando algoritmos convencionais;

*1.4.1 Resolve problemas que implicam multiplicar ou dividir números fracionários ou decimais entre números naturais, utilizando algoritmos convencionais*⁶⁸.

- Aprendizagens esperadas para o 1º grau do nível Secundário (*Estándares Curriculares, Acuerdo 592, México*):

- *Resolve problemas que implicam converter números fracionários em decimais e vice-versa*⁶⁹.

- *Conhece e utiliza as convenções para representar números fracionários e decimais na reta numérica*⁷⁰.

- Aprendizagens esperadas para segundo ciclo do Ensino Fundamental (PCN, Brasil):

- *Construir o significado do número racional e de suas representações (fracionária e decimal), a partir de seus diferentes usos no contexto social.*

- *Interpretar e produzir escritas numéricas, considerando as regras do sistema de numeração decimal e estendendo-as para a representação dos números racionais na forma decimal.*

- Aprendizagens esperadas para segundo ciclo do Ensino Fundamental (PCN, Brasil):

- *Ampliar e construir novos significados para os números (naturais, inteiros e racionais) a partir de sua utilização no contexto social e da análise de alguns problemas históricos que motivaram sua construção.*

- *Identificar, interpretar e utilizar diferentes representações dos números naturais, racionais e inteiros, indicadas por diferentes notações, vinculando-as aos contextos matemáticos e não-matemáticos.*

⁶⁸ 1.1.1. Lee, escribe y compara números naturales, fraccionarios y decimales.

1.2.2. Resuelve problemas aditivos con números fraccionarios o decimales, usando los algoritmos convencionales.
1.4.1. Resuelve problemas que implican multiplicar o dividir números fraccionarios o decimales entre números naturales, utilizando los algoritmos convencionales.

⁶⁹ Resuelve problemas que implican convertir números fraccionarios a decimales y viceversa.

⁷⁰ Conoce y utiliza las convenciones para representar números fraccionarios y decimales en la recta numérica.

- Matrizes de Matemática do 5º ano do Ensino Fundamental (Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB), Brasil):

D21 – Identificar diferentes representações de um mesmo número racional.

D22 – Identificar a localização de números racionais representados na forma decimal na reta numérica.

D23 – Resolver problema utilizando a escrita decimal de cédulas e moedas do sistema monetário brasileiro.

D24 – Identificar fração como representação que pode estar associada a diferentes significados.

D25 – Resolver problema com números racionais expressos na forma decimal envolvendo diferentes significados da adição ou subtração.

O que percebemos de diferença entre as indicações é que, no México, há a mesma ênfase aos números fracionários e decimais, enquanto que, no Brasil, inicialmente, se destaca o trabalho com os decimais. Nas orientações brasileiras, destacam-se as representações dos Racionais e seus diferentes significados. Nos documentos mexicanos, essas orientações estão implícitas.

Se pensarmos nas representações fracionárias e decimais dos Números Racionais, e os seus diversos significados, percebemos que nem todos são explorados e/ou devidamente explorados e acabam confinados a um certo período ao longo da Educação Básica, criando lacunas na aprendizagem.

Lopes (2008) afirma que um dos problemas no ensino de frações é o fato do seu ensino estar restrito até o final do 7º ano, parecendo estar implícito nesse tipo de organização curricular, uma *reserva de mercado*, características de antigos currículos, em que as frações são tratadas no 5º e 6º anos, razões e proporções no 7º, álgebra no 8º e funções no 9º, criando dessa forma, a crença no caráter categórico e acumulativo dos conteúdos, bastando ensinar as frações em algum ponto do programa para, daí em diante, já estarem disponíveis como objetos de domínio dos alunos. Ainda, segundo Lopes (2008, p.11):

Confinar o tema frações em algumas séries do currículo é um erro grave, desconsidera o fato de que o desenvolvimento do pensamento proporcional se estende por um longo período que vai dos 7/8 anos aos 14/15 anos, em níveis distintos de complexidade. Uma consequência pedagógica que se pode extrair destas considerações, é que os currículos deveriam contemplar experiências diversas com frações em todas as séries do ensino fundamental e médio, algo que vá além da revisão com frações mais difíceis.

Para Lellis e Imenes (1994), existe uma grande quantidade de algoritmos, conceitos e regras que compõem o estudo das frações para os alunos. Há que extrair inteiros, há de dividir “multiplicando pela inversa da segunda fração”, que transformar números mistos em frações

impróprias, entre outros. Com tantos detalhes, torna-se difícil considerar o conteúdo adequado ou acessível para a faixa etária. As técnicas podem ser dominadas, mas as ideias não podem ser bem compreendidas. Em consequência, multiplica-se, em vão, o esforço de aprendizado, como ocorre sempre que somos obrigado a dominar algo que não se entendemos.

Ainda, segundo os autores, existe o argumento de que essa experiência desenvolve o raciocínio, mas, para eles, isso não se sustenta, já que seguir passos e memorizar palavras, embora seja uma atividade mental necessária, pode ser treinado de inúmeras maneiras mais proveitosas. Além disso, o argumento de que as frações são necessárias, no 6º ano, porque são muito usadas no dia a dia, peca por inconsistência. Na verdade, excetuando-se aquelas frações já incorporadas à linguagem - meios, terços, quartos e quintos - as frações só muito raramente surgem em situações do cotidiano. Por que, então, tanta insistência com as frações? Os próprios autores respondem:

A idade de nosso currículo sugere a resposta. Ele vem de uma época em que as unidades decimais de medida mal estavam implantadas. Polegadas, libras, onças e léguas eram largamente usadas no comércio e na indústria e todas essas unidades acham-se ligadas às frações. Naqueles tempos, a escola terminava, para a maioria, no 4º ou 5º ano do grupo escolar. Era, então, razoável - ao menos do ponto de vista social - que se tentasse equipar o estudante com conhecimentos sobre frações nessa faixa etária, posto que muitos não teriam mais nenhuma oportunidade de frequentar a escola. Essa situação modificou-se há décadas, mas o currículo continuou impávido... (LELLIS; IMENES, 1994, p.7).

Se estendermos esse olhar para além da realidade brasileira, veremos essa situação se repetindo quase que igualmente no contexto mexicano, mesmo com as reformas educativas propostas nos últimos anos. Podemos pensar que políticas globais (lê-se OCDE, Banco Mundial) influenciam na elaboração dos currículos, ou ainda, talvez, existam resquícios de programas educacionais globais, como o Movimento da Matemática Moderna que, de alguma forma, ainda que extinto, enraizou a sua influência nas grades curriculares, influenciando os currículos atuais.

3.4.1 Os Números Racionais e a sua problematização

Não há saber mais ou saber menos, há saberes diferentes.

Paulo Freire

Dentro das análises que fizemos ao longo da investigação, podemos perceber similaridades entre as propostas de ensino dos Números Racionais entre o contexto brasileiro e o mexicano. Como apresentamos anteriormente, a distribuição e o sequenciamento são semelhantes, mesmo tendo propostas de orientações bem diferentes. Porém, o que destacamos, além dos conceitos propostos por essas orientações, é a forma como são trabalhados e articulados entre esses significados.

Há uma valorização do significado parte-todo e das operações com frações, não significando atividades que propõem ao estudante uma reflexão sobre essas ideias. Quando trabalhamos a ideia de parte-todo, o destaque são para atividades envolvendo representações contínuas com barras e círculos, tipo a barra de chocolate dividida em parte iguais, ou uma pizza dividida em parte iguais para tantas pessoas, etc.

Também nas operações, destacamos uma lista de exercícios envolvendo adição, subtração, multiplicação e divisão, sem possibilitar ao aluno refletir sobre esses significados, como os PCN destacam: Por que quando se multiplica se diminui, se nos conjuntos dos Naturais a multiplicação aumenta?

Em Monteiro (2013), onde foi desenvolvido um estudo de recuperação de conteúdos com alunos com dificuldades de aprendizagem com o conteúdo de frações, foi possível perceber que as ideias iniciais desse conteúdo, que envolve equivalência, comparação, parte-todo, os alunos, na sua maioria, apresentavam dificuldades de compreensão desses conceitos. Porém, nas operações com frações que, teoricamente, necessitam de uma compreensão conceitual avançada desse conteúdo, os alunos não apresentavam dificuldades.

Podemos entender que as operações com frações podem facilitar o uso de técnicas e memorização, como na multiplicação, onde resolvemos tratando de forma independente, multiplicando numerador por numerador e denominador por denominador, assim como nas operações de adição e subtração, onde observamos, na investigação realizada, que alguns alunos perguntavam: “*se era aquela que resolviam com MMC*”.

O tratamento dado às operações, muitas vezes, favorece a memorização de regras, como, por exemplo, a divisão de frações, pois é possível encontrar, em livros didáticos, indicações como: “*A divisão pode ser representada pela multiplicação do primeiro pelo inverso do segundo*”. Esse tipo de explicação não traz aos alunos os conhecimentos necessários para que se apropriem da ideia sobre a divisão, não lhes trazendo nenhum significado conceitual, nem ao menos o entendimento sobre o processo algébrico dessa regra, fortalecendo, assim, um *discurso Matemático Escolar* centrado no algoritmo.

Nunes e Bryant (1997) citam a pesquisa de Kerslake (1986), para ressaltar que a divisão de frações não é uma operação tão simples de ser entendida pelas crianças. Kerslake considerou, em sua pesquisa, que houve evidências de que o único modelo de frações com o qual as crianças se sentiam confortáveis foi o de fração como parte de um todo. Eles consideraram difícil até mesmo entender essa visão para indicar o aspecto de divisão ou distribuição, ou seja, que a fração $\frac{a}{b}$ pode ser interpretada como coisas ‘*a*’ distribuídas entre pessoas ‘*b*’. Embora essa ideia

seja a base para o método comumente usado para transformar frações em decimais, os alunos foram relutantes em reconhecer quaisquer conexões entre $\frac{a}{b}$ e a dividido por b .

É necessário construir situação nas quais o aluno deverá refletir sobre as ideias de repartir e medir que dão sentido à divisão de frações. Exemplos:

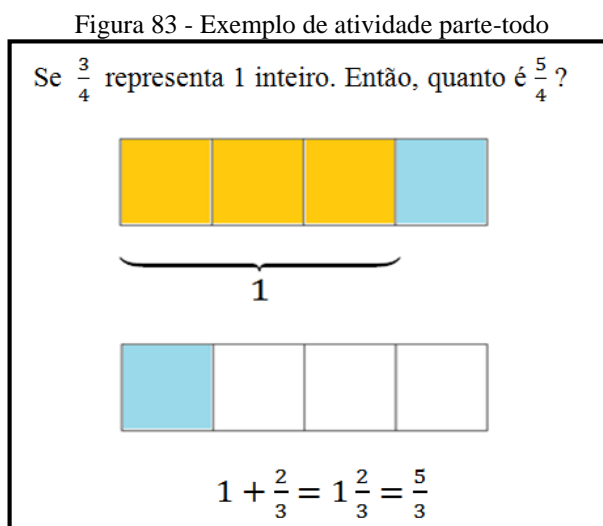
- Ideia de medir: “Quantas vezes $\frac{1}{4}$ de litro de leite cabe em $\frac{1}{2}$ litro de leite?”

- Ideia de repartir: “Quero dividir, igualmente, meia barra de chocolate entre duas pessoas. Que parte da barra cada pessoa vai receber?”

Nesse segundo problema, chamamos a atenção para a falta sobre o que seria a nossa referência, peso ou área. É importante, sempre, salientar sobre o que nos referimos quando dizemos *dividir igualmente*. Em algumas vezes, para iniciar a ideia de parte-todo, levamos pizza ou bolo para a sala de aula como uma maneira de contextualizar a situação. Por exemplo, é comum um bolo retangular, feito em casa, não ficar completamente nivelado, crescendo mais de um lado do que de outro. E quando dividimos em partes (área) iguais, é justo dizer que todos os alunos comeram igualmente o bolo?

Muitas vezes, esse tipo de problema está apoiado em alguma imagem, o que pode influenciar na ideia intuitiva de que repartir será sempre tendo a área como referência. Numa situação cotidiana, na compra de um pedaço de bolo em uma padaria, pode surgir a possibilidade de comprarmos por fatia ou por peso, e em atividades de contextualização, em sala de aula, isso nem sempre fica explícito.

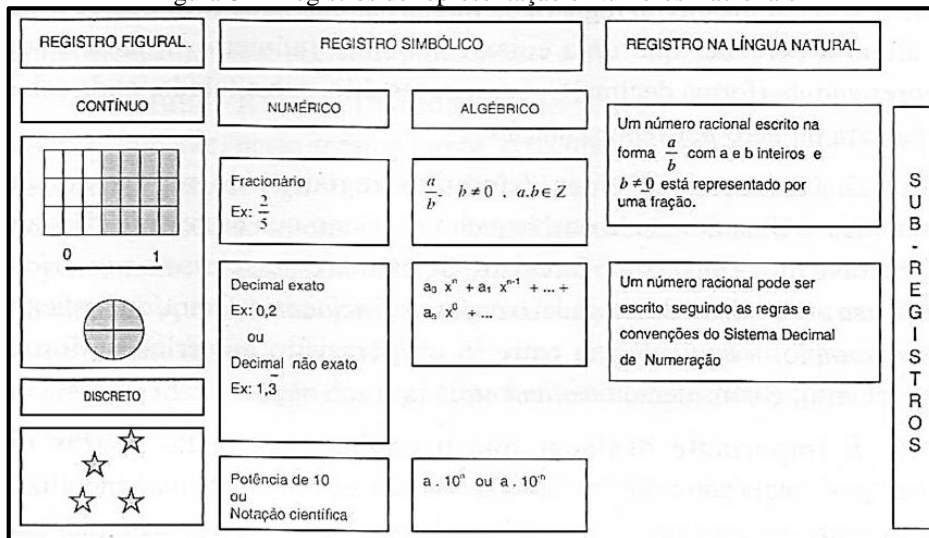
A clareza ao propor uma atividade em relação ao que é o todo e a unidade pode auxiliar na compreensão do aluno em relação a esse significado, assim como variar o tipo de atividade proposta, sendo ela contínua ou discreta, quando trabalhamos com o significado parte-todo. Um exemplo é propor atividades como da figura 83.



Fonte: a pesquisa.

Aliado à problematização dos Racionais, devemos fazer uso dos registros de representações figural, simbólico e de língua natural, propostos por Duval para os Números Racionais. Na figura 84, Maranhão e Iglori (2003) exemplificam esses registros.

Figura 84 - Registros de representação e Números Racionais



Fonte: Maranhão e Iglori (2003).

Explorar situações que instiguem o aluno a transitar pelos diferentes tipos de representações pode auxiliá-lo a entender os diferentes significados dos Números Racionais. Maranhão e Iglori (2003) ressaltam que é necessário mobilizar os conhecimentos dos alunos, utilizando os registros semióticos, explorando a *conversão* e o *tratamento* das suas representações. As autoras destacam que o conhecimento de regras de correspondência entre dois registros pode não ser suficiente para mobilizá-lo e utilizá-lo simultaneamente. Isso significa que um aluno pode saber que deve dividir 1 por 4 para obter a representação decimal do Racional $\frac{1}{4}$, mas pode ser que não reconheça 0,25 como representante do mesmo Número Racional.

As autoras citam a pesquisa de Catto (2000), o qual verificou que, em geral, as conversões são menos utilizadas que os tratamentos e, quando utilizadas, priorizam um dos sentidos. E nem sempre a dificuldade é necessariamente a mesma nos dois sentidos de uma conversão. Exemplo disso, está na atividade proposta por Catto (2000) a estudantes do Ensino Médio, na qual umas das estudantes reconheceu que $\frac{1}{4} = 0,25$, porém não respondeu que $0,25 \neq \frac{1}{4}$.

Na primeira situação, as autoras creditam ao fato da estudante utilizar a regra conhecida para essa conversão (dividir 1 por 4). Já na segunda situação, ao não reconhecer $0,25 \neq \frac{1}{4}$ levou

as autoras a crer que não havia à disposição da aluna uma regra para a conversão de 0,25 para $\frac{25}{100}$ (congruente), que só exigiria o tratamento (simplificação), para chegar a $\frac{1}{4}$.

Um outro estudante, na mesma atividade também considerou $0,25 \neq \frac{1}{4}$, na sua resolução, utilizando o recurso de conversão do registro numérico $\left(\frac{1}{4}\right)$ para o figural (círculo dividido em 4 partes iguais, salientando uma delas). As autoras afirmam que o estudante considerou o significado de $\frac{1}{4}$ como de parte-todo, o que garantiu a congruência entre o registro numérico e o figural. No entanto, a não-existência de congruência na conversão decimal para o figural não favoreceu a identificação dos registros fracionário e decimal, como de um mesmo número.

Para Maranhão e Iglioni (2003), as conversões são as mudanças de registros mais eficazes para a aquisição de um conceito, havendo maior possibilidade de mobilização de conhecimentos dos alunos quando as conversões são feitas nos dois sentidos e não são congruentes (não são naturais, diretas).

Na seção 2.2.3, procuramos discutir, nos trabalhos desenvolvidos por Kieren (1976, 1980), Behr et al (1984), Llinhares e Sanchez (1988), Garín e Sancho (2002), Centeno (1988) e Fandiño (2009), sobre os diversos significados propostos por esses autores acerca dos Números Racionais, envolvendo as frações e os decimais. No caso de Fandiño (2009), ela atribuiu 15 significados às frações, enquanto outros autores propõem uma quantidade menor de significados, englobando alguns como derivação de outros.

O que queremos destacar é que, no caso das frações, ao não propor atividades que provoquem reflexões, os estudantes podem encontrar obstáculos que os impeçam de terem uma compreensão ampla sobre esse tema, mesmo podendo, conforme Nunes e Bryant (1997), manipular as frações, ao longo de todo ciclo escolar, resolvendo atividades, mas sem superar as dificuldades em relação ao entendimento desse tema.

Lellis e Imenes (1994) fazem uma reflexão sobre o currículo de Matemática no 6º ano, exemplificando com uma situação, de certa forma corriqueira, no aprendizado de Frações, em relação ao algoritmo da adição com denominadores diferentes:

- a) encontra-se o menor denominador comum das parcelas, calculando-se o mínimo múltiplo comum;
- b) troca-se cada Fração por outra, equivalente à primeira, que tenha o denominador encontrado;
- c) soma-se os numeradores dessas Frações, conservando-se o denominador.

Os autores dizem que o processo pode parecer complicado para uma criança, mas talvez não seja, pois muitas conseguem executar esses passos com sucesso, desde que bem treinadas. Mas será que compreendem o algoritmo? Para os autores, agora a resposta é outra: talvez algumas possam entender o processo, mas não é o caso da maioria.

É necessário problematizar para conflitar os diferentes significados dos Racionais e essa problematização do saber é um dos aspectos destacados pela TSME, promovendo assim, atividades que permitam abordar os Números Racionais em seus diversos significados, com a intenção de que os estudantes possam significar os processos e operações.

Cantoral e Reyes-Gasperini (2014) chamam a atenção para as noções envolvendo fração e razão, dado que a escrita se assemelha. A noção de razão se refere à relação entre magnitudes, assim, pode existir a situação, por exemplo, de que, em um conjunto de pessoas a quantidade de mulheres em relação aos homens é de 9 a 1, $9 : 1$ (para cada nove mulheres há um homem), assim como pode ser $9 : 9$, nove mulheres para nove homens, ou também $9 : 0$, onde essa relação afirma que só há mulheres nesse grupo. Os autores destacam, que esse último caso não seria válido tratar como fração, pois o denominador é zero, no entanto, como se trata de uma razão que expressa a relação entre magnitudes, é possível.

Reyes-Gasperini (2016) afirma que podemos localizar três diferenças importantes entre as noções de frações e de razão.

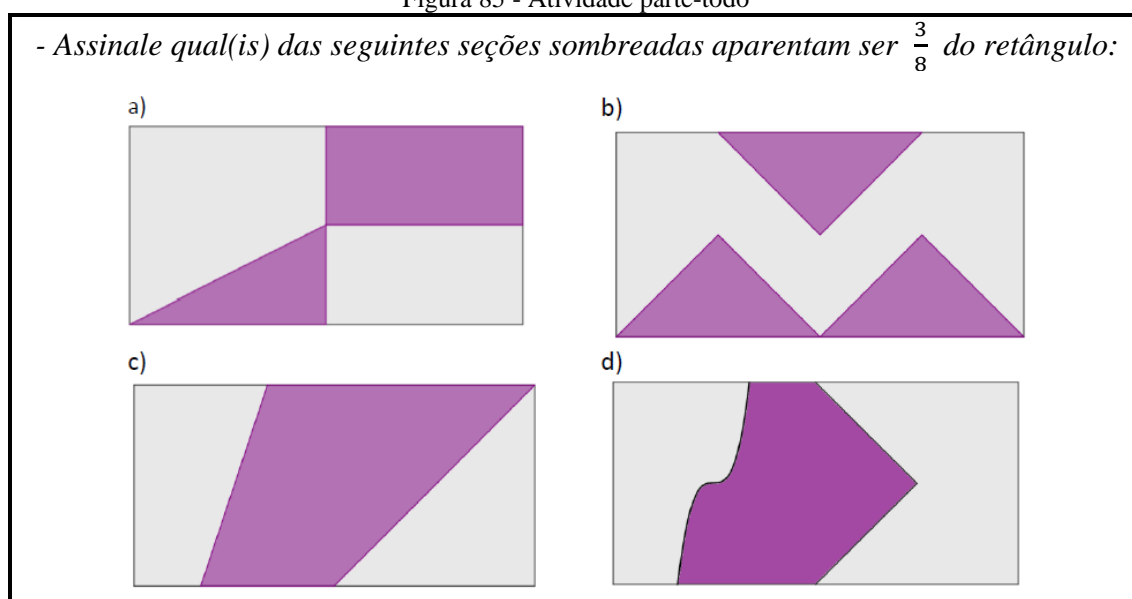
Podemos localizar três diferenças importantes entre as noções de frações e de razão. As duas primeiras, concernentes a restrições numéricas e de notação: em primeiro lugar, as razões, ao ser uma relação entre duas magnitudes, não tem a restrição de ser a divisão entre dois números inteiros (ver o caso do numerador da razão áurea, onde um termo no numerador é um número irracional), que dá como resultado um número racional (vê-se o caso da circunferência, onde a relação entre a longitude e o diâmetro é um número irracional). Em segundo lugar, ao não se tratar de uma divisão entre dois números, não é necessária a restrição realizada sobre o denominador, pois a razão não é uma fração. A terceira, para nós a mais relevante, é a essência pela qual são desenvolvidos ambos conceitos matemáticos: a fração é a expressão de uma quantidade (numerador), dividida entre outra quantidade (denominador) que representa a relação parte-parte ou parte-todo de um conjunto, enquanto que afirmamos que a razão surge ante a impossibilidade de medir magnitudes com uma mesma unidade de medida: a incomensurabilidade⁷¹. (REYES-GASPERINI, 2016, p. 236-237, tradução nossa).

⁷¹ Podemos localizar tres diferencias importantes entre las nociones de fracción y de razón. Las dos primeras concernientes a restricciones numéricas y de notación: en primer lugar, las razones al ser una relación entre dos magnitudes no tienen la restricción de ser la división entre dos números enteros (ver el caso del numerador de la razón áurea en donde uno el numerador es un número irracional) que da como resultado un número racional (véase el caso de la circunferencia en donde la relación entre la longitud y el diámetro es un número irracional). En segundo lugar, al no tratarse de una división entre dos números, no es necesaria la restricción realizada sobre el denominador, pues la razón no es una fracción. La tercera y para nosotros la más relevante, es la esencia por la cual se han desarrollado ambos conceptos matemáticos: la fracción es la expresión de una cantidad (numerador) dividida entre otra cantidad (denominador) que representa la relación parte - parte o parte - todo de un conjunto, mientras que afirmamos que la razón surge ante la imposibilidad de medir dos magnitudes con una misma unidad de medida: la incommensurabilidad

Para Cantoral e Reyes-Gasperini (2013), essa noção introduzida na Matemática escolar, para referir-se à razão como uma fração, sem as argumentações contextualizadas correspondentes à sua construção, produz, entre os estudantes, uma perda de significação e, como consequência, uma falta de compreensão do conceito matemático, produzindo assim, uma banalização da aprendizagem ao levar o aluno ao manejo de algoritmos não significativos. Essa afirmação corrobora o que a TSME tem afirmado, que a função hegemônica do dME impede a aprendizagem dos estudantes e os limita à algoritmização e memória.

É necessário explorar o maior número possível dos significados dos Racionais, para uma melhor compreensão por parte dos alunos, saindo das situações mecânicas. Um exemplo, a figura 85, onde apresentamos uma atividade de parte-todo, proposta pelo grupo de investigação sobre Construção Social do Pensamento Matemático do DME do CINVESTAV, na formação de professores do *Programa Interdisciplinario para el Desarrollo Profesional Docente en Matemáticas*⁷²:

Figura 85 - Atividade parte-todo

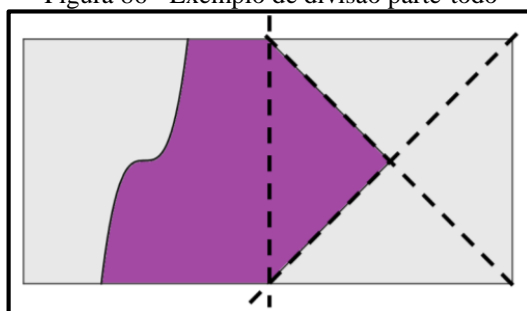


Fonte: *Programa Interdisciplinario para el Desarrollo Profesional Docente en Matemáticas*.

A proposta é trabalhar uma forma diferente de particionar as unidades, quando fazemos referência à fração como parte-todo, de maneira que permita refletir sobre a noção de igualdade que está no fundo. Nesse caso, podemos realizar a seguinte divisão (figura 86):

⁷² Programa promovido pela SEP em 2016 para professores em colaboração com o grupo de investigação sobre Construção social do pensamento matemático do DME do Cinvestav, com o intuito de melhorar o desempenho dos estudantes da Educação Médio Superior.

Figura 86 - Exemplo de divisão parte-todo



Fonte: *Programa Interdisciplinario para el Desarrollo Profesional Docente en Matemáticas.*

Nessas estas divisões sobre a unidade, é possível ver que, se imaginássemos um traço vertical, a unidade poderia se formar em dois quadrados. Supondo que são dois quadrados, então a parte pintada à esquerda, representaria a metade do quadrado, e a parte pintada, à direita, representaria uma quarta parte do quadrado, como na figura 87.

Figura 87 - Representação visual da divisão.



Fonte: *Programa Interdisciplinario para el Desarrollo Profesional Docente en Matemáticas.*

Portanto, considerando essas afirmações, cada um dos quadrado corresponderia à metade do retângulo completo, então a parte pintada, à esquerda corresponderia a uma quarta parte do retângulo e a parte pintada, à direita, à oitava parte do retângulo. Assim, temos $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$.

Durante a entrevista com os professores, uma questão que sempre foi espontânea em suas falas, principalmente entre as professoras brasileiras, é a da contextualização. As três salientaram a importância de dar significado as frações e aos decimais, criando situações nas quais pudessem reconhecer o seu uso. O interessante, nesse sentido, é que quando indagadas se poderiam dar exemplos de situações de contextualização, em relação às frações, foi o de receita culinária. Dos decimais, foi de representação monetária. Os professores relatam a dificuldade de dar sentido aos diversos significados desse tema.

Em uma das entrevistas, a professora PB2 relatou que cria situações do tipo: “*Fulano comeu $\frac{3}{4}$ da pizza*”, mas logo os alunos reagem, argumentando que nunca falam daquela maneira

em um situação real, ela faz uma reflexão dizendo que, excluindo receitas culinárias, explorar as frações em situações cotidianas parece artificial.

Lopes (2008) fez um levantamento de contextos e situações problema, em que as frações fossem imprescindíveis. O autor imaginava encontrar uma grande variedade de situações, acessíveis aos alunos do Ensino Fundamental, mas isso não se confirmou, pois a maioria das situações se referia a contextos do mundo dos adultos, pobres de significados para crianças e adolescentes. A seguir, apresentamos algumas delas.

a) As frações de uma coleção discreta, como $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ e $\frac{3}{5}$ aparecem em no contexto brasileiro, em capítulos da Constituição Federal ou do regimento de parlamentos estaduais ou municipais, como referências para aprovar leis ou mudar a constituição. Há um contexto em que o cálculo de $\frac{3}{5}$ de 513 ou $\frac{2}{3}$ de 81 não é artificial; com dois terços dos votos dos deputados federais, pode-se iniciar um processo de *impeachment* do Presidente da República; $\frac{1}{3}$ dos ministros do tribunal de contas são escolhidos pelo presidente da República, $\frac{2}{3}$ pelo Congresso Nacional.

b) As frações também aparecem em problemas reais de partilha de bens. Ainda que a temática seja adulta, podemos abordá-la através de um tratamento literário, onde a fantasia não precisa ser escondida, como fez Malba Tahan (1938) em “O problema dos 35 camelos” e “O problema dos 8 pães”, em seu clássico “O Homem que Calculava”.

c) As frações, são utilizadas no cálculo de indenizações sem justa causa. Trata-se de um contexto adulto, pouco significativo para crianças, mas adequado para cursos de EJA. Para o cálculo de 13º e férias proporcionais, fazemos uso de frações com denominadores 12 (fração de ano), 28, 29, 30 ou 31 (fração de mês).

d) As frações estão presentes, ainda, nos livros de receitas culinárias, envolvendo tanto grandezas discretas (ovos), contínuas (leite) ou híbridas (açúcar).

Ainda, segundo Lopes (2008, p.6):

O contexto é apropriado, entretanto alguns cuidados têm que ser tomados. É ilusório acreditar que se pode ir muito longe, no estudo de frações, aumentando ou diminuindo uma receita. Nos contextos de receitas, em geral as frações são operadores sobre uma quantidade discreta ou contínua. Professores e matemáticos, que apreciam uma cozinha sabem muito bem que há certa distância entre a matemática formal e a dos livros de receita.

Numa atividade prática, proposta pela professora PM3, os alunos, em dupla, tinham que identificar números inteiros, números decimais e números fracionários, em jornais, revistas e encartes de lojas. Os exemplos mais encontrados foram relacionados a preços. Na atividade da figura 88, apresentamos alguns trabalhos realizados pelos alunos.

Figura 88 - Atividade de pesquisa em jornais, revistas e encartes de lojas sobre os Números Racionais

PAINEL MELÃO
143 x 158 x 29cm
Linha BRASIL
A vista R\$ 3.799,00
10x R\$ 412,90
A partir R\$ 419,00

R\$ 412,80
Número
Decimal

NEM CRIANÇA, NEM ADOLESCENTE
Vale lembrar que, apesar de moderna e independente, Mabi ainda é só uma pré-adolescente (ou "tween", mistura das palavras em inglês teen (adolescente) e between (entre), fase que vai dos 10 aos 13 anos. "É quando o corpo e a mente se preparam para a fase adulta. É uma época complicada, cheia de dúvidas e descobertas. Além disso, com os pais trabalhando, os jovens passam muito tempo sozinhos à frente da TV e do computador e são influenciados pelo que veem", diz Beatriz Guimarães Otero, psicoterapeuta da clínica Elipse. Segundo ela, crianças precoces como Mabi exigem pais atentos: "Nessa fase, eles se sentem enfraquecidos, então, ter personalidade forte como a da Mabi é ótimo, desde que os pais não sejam reféns de filhos controladores".

13
Número inteiro

7 LÁPIS COLOSSAL
A.M.C. 2020/2021
Tubo: 100% PLÁSTICO
100% SEM LÁZIO

49,90
Número Decimal

▪ Cada dia há desafios. Paulo diz que a parceria com o marido vai mudar além da vida pessoal. Os dois, que já trabalharam juntos em várias empresas, também possuem grande entusiasmo profissional. "Ele é um grande diretor e aprendo muito com ele. Sabemos separar bem as coisas", garante a atriz.

É atriz: Paulo Schuchman e Paula Pinna.

23
Número Inteiro

■ **Ingredientes**
 2 ovos inteiros
 2 ovos cozidos
 1 colher de chá de óleo de abacate
 1 colher de chá de sal
 1 colher de chá de açúcar
 1 colher de chá de leite em pó

■ **Modo de fazer:** Cozinhe a couve-fol em água morna, escorra bem e pise com garfo. Acrescente os ovos, a cebola, o alho, a salsinha, o suco permitido e as migalhas de pão. Misture bem e forme a bolinha com o auxílio de uma colher. Coloque em uma forma e leve para assar em forno a 180 °C por aproximadamente 45 minutos até que estejam firmes e levemente douradas. Sirva em seguida.

■ **Rendimento:** 24 bolinhas com 33 calorias cada uma.

2 1/2
Número fracionário

crédito, talão de cheques e empréstimo pessoal online. Vá a uma das **6.151** agências dos Correios que atuam como Banco Postal com seu RG, CPF e comprovante de residência e abra hoje mesmo a sua conta.

6.151
Número inteiro

Confira a obra completa do autor curilíbano que já vendeu mais de 16 mil exemplares em um mês. O e-book é uma verdadeira aventura para a inteligência e a sensibilidade!

R\$ 32,00
Número decimal

1 colher (sopa) de doce de leite cremoso (29,1 g)
90 kcal

1/2 Número fracionário
29.1 Número decimal
90 Número inteiro

Turma: 4D Data: 08/04/15

SOLE LUA
Desodorante colônia feminina 100 ml
R\$ 82,90 14 pcs

* 82,90
* Número decimal

Hidratante cremoso para o corpo 300 ml
R\$ 36,90 (29664) 06 pcs

* 36,90
* Número decimal

Fonte: atividades dos alunos da professora PM3.

Da pesquisa realizada pelos alunos, somente duas duplas encontraram exemplos de números fracionários e eram situações com receitas culinárias. Em relação às dificuldades dos estudantes em encontrar representações de números fracionários, alguns pesquisadores refletem sobre a importância do estudo das frações e os aspectos sociais que influenciam o currículo escolar, como e até onde explorar as ideias relacionadas a elas. Conforme Llinares e Sánchez (1988), muitos autores sugerem que poderia reduzir enormemente o ensino das Frações, na escola, com o argumento de sua pouca utilidade prática, e que, em uma cultura que utiliza o Sistema Métrico Decimal, as unidades métricas requerem frações decimais e não ordinárias.

Por outro lado, curiosamente, o argumento de pouca utilização das frações, por parte das crianças e adultos, é o mesmo em que outros pesquisadores se apoiam para manter sua permanência: se não são compreendidas, como podem ser utilizadas? Um melhor ensino do conceito de frações aumentaria imediatamente sua utilização na vida cotidiana (LLINARES; SÁNCHEZ, 1988, p. 25).

Diferente da realidade brasileira, na cultura mexicana, é possível reconhecer as frações em determinadas situações, como para expressar horários, por exemplo:

- *Dos y media (2:30h);*
- *Un cuarto para las tres (2:45h);*
- *Cinco y un cuarto (5:15h).*

Também é comum encontrarmos, no México, frações em unidades de medida de produtos nos mercados, como apresentamos na figura 89.

Figura 89 - Exemplo de uso de frações no cotidiano mexicano.



Fonte: a pesquisa.

Na imagem, podemos notar que é utilizado $\frac{1}{4}$ kg para indicar o peso dos queijos e essa é uma situação comum nos mercados, sendo mais habitual que o uso dos gramas, como no

diálogo realizado pelo investigador e o comerciante deste mesmo estabelecimento de onde foi tirada a foto. Apresentamos, na figura 90, parte desse diálogo.

Figura 90 - Diálogo entre investigador e comerciante.

Trechos originais	Trechos traduzidos
Pesquisador: - ¡Buenos días señor!	Pesquisador: - Bom dia, senhor!
Comerciante: - ¡Buenos días joven!	Comerciante: - Bom dia, jovem!
Pesquisador: - ¿Vende menos qué un cuarto de queso, señor?	Pesquisador: - Vende menos que um quarto de queijo, senhor?
Comerciante: - ¡Sí! Puedo vender lo que quiera, puede ser medio cuarto.	Comerciante: - Sim! Posso vender o que queira, pode ser meio quarto.
Pesquisador: - ¡Perfecto! Yo voy querer un cuarto de queso Manchego y medio cuarto de queso Menonita.	Pesquisador: - Perfeito! Eu vou querer um quarto de queijo Manchego e meio quarto de queijo Menonita.

Fonte: a pesquisa (tradução nossa).

Outra situação de utilização das frações é em notas fiscais onde os centavos são representados por uma fração decimal, como o exemplo da figura 91, onde temos a imagem de uma nota fiscal, cujo valor total da compra é de \$ 110,90 (pesos) e, logo abaixo da descrição das compras, vem por extenso o valor: ciento y diez pesos $\frac{90}{100}$ M.N. (moneda nacional).

Figura 91 - Nota fiscal de uma rede de hipermercados.



Fonte: a pesquisa.

No contexto mexicano as frações, apesar de aparecerem de forma mais natural, são mais usuais também as do tipo $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$. No exemplo citado anteriormente na feira, numa situação do cotidiano, o vendedor utilizou *medio cuarto*, ao invés de um oitavo.

Essas situações nos levam a uma reflexão sobre contextualização. Podemos buscar dois caminhos: o primeiro, mais intuitivo e, pelo que verificamos nas falas dos professores, o mais usual, é a procura de uma contextualização utilitária. Ou seja, procuramos dentro da realidade do aluno, situações em que possam reconhecer aquele objeto matemático. Com isso, geralmente, acabam criando situações artificiais, como no caso das frações. O segundo caminho é de uma contextualização funcional, situação em que buscamos dotar de significado o objeto matemático através da sua construção social.

Para Cordero (2005), a funcionalidade tem um papel importante, já que permite entender a natureza dual da Matemática, distinguir que há ocasiões em que ela é um objeto de estudo, mas em outras ocasiões, adquire um caráter de Matemática funcional, quando assume sentido em práticas de referências que não são propriamente a Matemática. Assim, verificamos a necessidade de fomentar uma Matemática funcional, aquela que se integra à vida para transformá-la, reconstruindo significados permanentemente na vida.

Llinares e Sánchez (1988) corroboram essa ideia, afirmando que os critérios guiados por necessidades sociais não parecem os mais adequados para decidir sobre o ensino das Frações, já que,

[...] ainda que muitos dos estudantes não continuem os estudos superiores, não cremos correto estabelecer discriminações “a priori” entre os que serão futuros matemáticos e cientistas dos que não serão. Por isso, não devemos limitar o currículo às estritas necessidades da vida diária e somos partidários de manter as frações na escola elementar. Agora, manter as frações não quer dizer perpetuar o desconhecimento do seu significado, com a subutilização do conceito e a sobrevalorização dos algoritmos, como em muitas ocasiões encontramos. Devemos dar ao aluno um conhecimento intuitivo profundo das frações, apresentando às crianças contextos significativos, tanto para o conceito como para seu campo de aplicação, e buscando conexões conceituais com os decimais, porcentagens, razões, etc.⁷³ (LLINARES; SÁNCHEZ, 1988, p. 33-34, tradução nossa).





Como defende a TSME, contextualizar não é uma questão utilitária, mas sim funcional. Cordero, Gómez, Silva-Crocci e Soto (2015, p.83) salientam que o utilitário se refere à visão de que a Matemática é um saber útil para resolver certas problemáticas, assim não permite vê-la como resultado da atividade humana. Ainda conforme os autores, o centro da atenção será a que tipo de problemas responde o saber, não assim como foi construído, sem uma função no contexto e na situação específica. Centrando na situação em que queremos em o que utilizar o

⁷³[...] aunque muchos de los estudiantes no continuarán estudios superiores, no creemos correcto establecer discriminaciones “a priori” entre los serán futuros matemáticos y científicos de los que no. Por ello, no debemos limitar el currículo a las estrictas necesidades de la vida diaria, y somos partidarios de mantener las fracciones en la escuela elemental. Ahora bien, mantener las fracciones no quiere decir perpetuar el desconocimiento de su significado, la infrautilización del concepto y la sobrevaloración de los algoritmos con que en muchas ocasiones nos encontramos. Debemos dar a los alumnos un conocimiento intuitivo profundo de las fracciones, presentando al niño contextos significativos tanto para el concepto como para su campo de aplicación, y buscando conexiones conceptuales con decimales, porcentajes, razones, etc.

conhecimento e não na forma como se constrói ou na sua função, focalizaremos a Matemática escolar nos objetos e processos matemáticos e não nas características da situação da qual emerge o conhecimento e que seja funcional para o sujeito.

No livro didático *Matemáticas Primer Grado: desarrollo del pensamiento matemático* (Cantoral, Farfán, Montiel, Lezama, Molina, Cabañas, Castañeda, Sánchez e Martínez-Sierra, 2014), elaborado sob a influência da TSME, é introduzida a ideia de números fracionários e decimais utilizando o contexto da Biologia. Nesse contexto, podemos reproduzir um uso funcional das frações e decimais. Na figura 92, apresentamos um exemplo dessa proposta.

Figura 92 - Tabela com a medida aproximada de alguns tipos de protozoários.

Protozoo		Medida
<i>Urostylamarina</i>		$\frac{6}{50}$ mm
<i>Stichotrichagracilis</i>		0.1 mm
<i>Geleia</i>		$\frac{18}{50}$ mm
<i>Aspidiscaffeldi</i>		$\frac{70}{100}$ mm

Fonte: *Matemáticas Primer Grado: desarrollo del pensamiento matemático* (Cantoral, Farfán, Montiel, Lezama, Molina, Cabañas, Castañeda, Sánchez e Martínez-Sierra, 2014)

É essa a ideia de trabalhar o objeto matemático como funcional, dando-lhe significado dentro de uma prática de referência, no caso a Biologia. O que pode, num primeiro momento, parecer estranho, por não fazer parte do cotidiano do aluno, é dotado de significado, ao empregar o objeto matemático numa situação habitualmente utilizada na Biologia, tratando de medidas muito pequenas.

A partir dessa situação retomamos a ideia de aula estendida, ou seja, a funcionalidade do saber escolar dando uma significação ao objeto matemático. A atividade profissional de um biólogo, por exemplo, vai necessitar desse conhecimento acadêmico sobre os Números Racionais assim como poderíamos citar outras práticas de referências, como a do farmacêutico e a sua atividade de fabricação de remédios por fórmulas de manipulação, bem como outras profissões.

O que queremos dizer é que essa construção social do conhecimento é que vai dotar de significado o saber desenvolvido na escola. Como exemplificamos anteriormente, em situações cotidianas dos alunos brasileiros e mexicanos, o uso de frações se restringe em atividades muito específicas. Então, contextualizar não é somente recriar práticas que os alunos encontram no

seu dia a dia, mas compreender e utilizar situações dos contextos sociais que tornam aquele saber relevante. Partimos, assim do utilitário, onde, muitas vezes, criamos situações artificiais para dar sentido àquele objeto, ao funcional e à sua construção social dotada de significado.

3.4.2 Os professores e as relações com o saber

A prática do professor, em sala de aula, é normada pelas orientações e pelo contexto em que está imerso. Quando orientações didáticas e/ou pedagógicas indicam, por exemplo que um determinado conteúdo deve ser trabalhado tendo como exemplo situações do cotidiano do aluno, estão tratando de forma genérica a realidade dos sujeitos. Esse cotidiano, citado nos documentos, pode ser na periferia de grandes centros urbanos, zonas rurais, comunidades indígenas, no sul ou norte do país, entre outros. Enfim, são diversas realidades que podemos ilustrar, e dentro de cada uma delas há outras diversidades.

Cabe ao professor, pela sua formação e experiência, planejar a sua aula, considerando o contexto social em que está inserido, para compreender o que ensinar, como ensinar, para que e quem está ensinando. O conhecimento acadêmico, concebido ao longo da sua formação, a experiência de trabalho em sala de aula, aliada à sensibilidade de entender e olhar a realidade de inserção, serão os instrumentos que darão ao professor a possibilidade de construir conhecimentos com os seus alunos.

O professor, como é possível observar, se adapta, também, à estrutura educacional para realizar o seu ofício docente. Na nossa investigação, encontramos dois contextos diferentes quanto à estrutura, a mexicana, com uma base de conteúdos, e a brasileira, com um sistema mais colaborativo de decisão sobre o que ensinar.

Comparando os professores brasileiros e mexicanos, que vivenciam realidades e contextos de propostas educacionais diferentes, a percepção de autonomia não é igual. Enquanto os brasileiros podem definir, através dos Planos de Estudos no Plano Político Pedagógico, os conteúdos a serem trabalhados em cada ano da Educação Básica, os mexicanos se limitam, como foi visto nos depoimentos, a modificar a ordem dos conteúdos a serem desenvolvidos.

Em relação às práticas dos professores, dois aspectos chamaram a atenção ao longo da investigação, como unânime nos discursos dos professores: a falta de apoio didático e pedagógico nas escolas e a importância da experiência.

Uma fala presente nos discursos dos professores investigados são as dificuldades em relação à didática ou metodologias a serem utilizadas com determinados conteúdos matemáticos, pois não há o apoio necessário. Nas escolas dos professores investigados, os

profissionais capacitados para essa área não tinham formação específica em Matemática, eram oriundos da Pedagogia ou da Informática, como, por exemplo, na escola mexicana EST. Então, faltam conhecimentos a esses profissionais para que possam ajudar ao professor na sua prática. Em uma das suas falas, a professora PM2 disse que, quando procurou apoio para as suas dificuldades em relação a aspectos metodológicos em sala de aula, certa vez ouviu a seguinte frase:

- *¡Más la especialista es usted!*

A frase resume a responsabilidade que o professor tem na sua prática, da qual muitas vezes, só se dá conta ao longo do tempo. Daí, entra o segundo aspecto salientado pelos professores de ambos países, a experiência. O que os auxilia são os anos de experiência em sala de aula, fato que se reflete na organização dos conteúdos a serem trabalhados e no gerenciamento do tempo a ser dedicado a cada tópico. A experiência se torna elemento fundamental na prática desses professores, pela falta de apoio de um especialista na escola e pelas poucas oportunidades que os professores de Matemática têm de se reunirem para discutir essas questões metodológicas.

Quanto aos professores mexicanos, a professora PM2, que lecionava somente Matemática (os outros dois professores, PM1 e PM3, são unidocentes), era o caso mais evidente desse isolamento: além de não ter um apoio de especialista, também tinha pouco contato com os demais professores de Matemática da escola. Quanto as professoras brasileiras, a queixa era de que não havia um momento em que os professores de Matemática poderiam se reunir dentro do horário escolar. Quando necessitavam discutir ideias ou solicitar algum apoio de algum colega, isso ocorria de maneira informal, nos horários de intervalos.

Ao mesmo tempo que não há apoio, também não há uma fiscalização efetiva do cumprimento do que está estabelecido nos *Estándares Curriculares*, no México, ou nos Planos de Estudos, no caso do Brasil. Há um controle em relação aos documentos apresentados pelos professores, como cadernos de chamadas, entre os brasileiros, e o planejamento anual dos professores mexicanos. Assim, passa a ser uma questão de ética o cumprimento dessas determinações na prática.

Creemos que o caminho de fortalecimento do professor na sua prática passa pelo seu empoderamento. O empoderamento docente, pelo olhar socioepistemológico, é um processo que estuda a profissionalização, problematizando a Matemática escolar. Reyes-Gasperini e Cantoral (2016, p.157) definem empoderamento como um processo do indivíduo no coletivo (é necessária a interação no trabalho coletivo), que parte da reflexão para consolidar-se na ação, que se produz desde o indivíduo, sem a possibilidade de ser outorgado (o trabalho colaborativo

será necessário, mas não o suficiente para garantir o empoderamento) e, sobre todas as coisas, transforma a realidade do indivíduo e seu contexto.

Os autores afirmam que o empoderamento profissional docente permite a mudança de relação com o conhecimento matemático por parte do professor, privilegiando a atividade situada do que aprende. Seu contexto de resignificação permite, ainda reconhecer as distintas formas de argumentação que favorecem diversas racionalidades contextualizadas e, nesse sentido, propiciar a natureza funcional do saber. Isso favorece, assim, um processo de resignificação progressiva do que aprendemos imerso em referenciais teóricos diversos.

É importante destacar, segundo Reyes (2016), que a Socioepistemologia não entende o empoderamento como *ter poder sobre o outro*, quer dizer, sob nenhuma hipótese defende a ideia de que o docente tenha poder sobre os estudantes, mas sim o poder sobre ele mesmo, para transformar a sua realidade e seu entorno. Esse processo acompanha o *replanejamento do discurso Matemático Escolar*⁷⁴, portanto, corresponde à mudança de relação com o conhecimento matemático escolar.

Na seção anterior, nossa proposta foi discutir a problematização dos diferentes significados dos Números Racionais e isto só será possível se o professor refletir sobre o saber matemático e a matemática escolar expressada nas orientações. Reyes (2016, p.150) salienta, que a perspectiva de empoderamento defendida pela TSME não ocorre unicamente através do questionamento dos processos de ensino ou aprendizagem, mas a partir do questionamento do próprio conhecimento matemático escolar sobre onde propõe conseguir mudanças significativas e transformação educativa. O empoderamento docente se promoverá a partir do questionamento do saber, propiciando que o docente seja dono do saber que ensina, com o qual terá conquistado autonomia, confiança e motivação para transformar-se e assim transformar a sua realidade de sala de aula.

Assim, é possível articular, de forma sistêmica, uma transformação educativa, envolvendo a problematização do saber matemático e a Matemática escolar através do desenvolvimento profissional docente.

⁷⁴ Originalmente denominado: *rediseño del discurso Matemático Escolar*

CONCLUSÃO

A realização deste trabalho possibilitou investigar aspectos do estudo dos Números Racionais, nos contextos brasileiro e mexicano, sob a perspectiva da *Teoria Socioepistemológica da Matemática Educativa (TSME)*, como possibilidades teórica e didática no estudo desse tema.

A *Socioepistemologia* é uma abordagem teórica, de natureza sistêmica, que permite tratar os fenômenos de construção e difusão do saber a partir de uma perspectiva múltipla, pois articula, numa mesma unidade de análise, as interações entre a epistemologia do conhecimento, sua dimensão sociocultural, os processos cognitivos que lhe estão associados e os mecanismos de sua institucionalização via educação (CANTORAL, 2004).

Nossa proposta, nesta investigação, foi entender as orientações sobre os Números Racionais desde os documentos oficiais até a sala de aula. Investigamos leis, orientações, planejamentos dos professores e registros de alunos, buscando compreender esse processo de interpretação dos propósitos didáticos até a prática escolar.

Como referência, olhamos para o Brasil e o México, partindo da legislação vigente a respeito da educação e chegando à prática, em sala de aula, de um grupo de professores. Para conhecer essa prática em contexto tão diverso, foi necessário visitarmos escolas no município de Canoas (Rio Grande do Sul, Brasil) e em Huajuapán de León (Oaxaca, México).

A análise produzida, sob a perspectiva da TSME, buscou aprofundar, por um lado, os conhecimentos sobre a teoria e, ao mesmo tempo, lançar um olhar sobre as perspectivas epistemológicas, didáticas, cognitivas e socioculturais presentes no estudo dos Números Racionais nos contextos investigados. Procuramos, assim, desvelar os aspectos significativos presentes na prática dos professores investigados normados pela legislação, orientações didáticas e o contexto onde estão inseridos.

Para realizar esse propósito, dividimos esta investigação em etapas: estudo do referencial teórico; análise documental sobre as leis que regem a educação de ambos os países e as orientações sobre o estudo dos Números Racionais; visita a escolas, acompanhamento de atividades e entrevistas com um grupo de professores brasileiros e mexicanos, para compreender como se dá o processo de estudo do tema. Para realizar parte dessas atividades, foi necessário um período de seis meses de intercâmbio no México⁷⁵.

Os documentos oficiais dos dois países sobre as orientações para o estudo do conteúdo dos Números Racionais permitiram compreender as propostas didático-pedagógicas,

⁷⁵ Através do Programa de Doutorado Sanduíche no Exterior da CAPES (PDSE).

considerando a sua distribuição ao longo do currículo escolar, metodologias recomendadas e resultados esperados na compreensão desse tema por parte dos alunos da Educação Básica. Esses aspectos foram importante ao analisarmos a similaridade e diferença entre os dois currículos, visto que pudemos refletir sobre o porquê de algumas práticas se repetirem, seja na sequenciação do conteúdo, seja na forma como é apresentado.

Esses documentos, além dos aspectos didáticos-pedagógicos, permitiram, também, entender a estrutura organizacional educacional do Brasil e do México. Verificamos, uma estrutura mais centralizada no México e mais colaborativa no Brasil. Dessa forma, os caminhos percorridos das orientações didáticas dos programas até a sala de aula se dá de maneira diferente. A materialização das indicações oficiais ocorre, através dos planos de estudos, e esse processo acontece de forma muito distinta nos dois países: no Brasil, ficam a critério das escolas os planos de estudos e, no México, são de responsabilidade da SEP.

Investigamos um grupo de escolas da rede municipal de Canoas (Rio Grande do Sul, Brasil), como referência de como se apresentam os planos de estudos na realidade brasileira. O que pudemos notar é que, muitas vezes, as indicações são uma listagem de conteúdos a ser desenvolvido naquela série. Um fato que consideramos grave foi as escolas terem planos de estudos de Matemática idênticos, na sua apresentação e escrita, o que pode caracterizar uma cópia entre escolas. Entendemos que isso vai contra a legislação vigente, a qual determina que cada escola deve redigir o seu Programa Político Pedagógico, considerando a realidade onde está imersa.

Com uma realidade diferente, o sistema mexicano apresenta uma base nacional de conteúdos a serem desenvolvidos, assim como fornece planos de aulas aos professores. Essa política de organização, que é diferente entre os países, reflete nas ações dos professores quanto à sua autonomia em relação aos planejamentos das aulas. Nas falas dos professores em relação à sua prática docente, foi possível perceber aspectos de como as aulas de Matemática são planejadas e conduzidas, bem como o tratamento dado ao tema Números Racionais.

Tanto as orientações quanto os planos de estudo são norteadores para a prática docente, mas não são as únicas referências que os professores utilizam na sua prática. Os professores brasileiros investigados, em seus discursos, afirmam que seguem os planos de estudos da escola, mas se apoiam em livros didáticos, principalmente, como fonte de pesquisa para os planos de aula. Os professores mexicanos seguem um cronograma mais rígido para desenvolver os conteúdos em sala de aula, já que devem cumprir a base de conteúdos.

Um aspecto ressaltado em comum pelos professores brasileiros e mexicanos é a experiência profissional como elemento fundamental para otimização de tempo e seleção de

relevância dos conteúdos a serem trabalhados, assim como as metodologias adequadas para o seu ensino. Em relação ao tema Números Racionais, a fala dos professores, encaminha-se para o uso de problemas contextualizados que levem em consideração a realidade dos estudantes. No caso brasileiro, os contextos construídos, segundo os próprios professores soam como artificiais em relação às frações. Na realidade mexicana, encontramos mais situações cotidianas de uso de frações, como contagem de horas, medidas de peso, porém, seu uso também é restrito a alguns tipos de frações (mais simples como $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, ...).

Ao longo da investigação, buscamos, em duas realidades diferentes, compreender o tratamento dado ao tema Números Racionais e, para isso, buscamos suporte na *TSME*, por entendermos que é um referencial que nos permite considerar, de forma sistêmica, os aspectos epistemológico, didático, cognitivo e sociocultural.

A *TSME* tem conseguido reconhecimento no meio da Educação Matemática, além de avanços práticos, servindo de referencial teórico para os programas de orientação aos professores do governo mexicano. Esses fatos que endossam a certeza de que a Socioepistemologia se mostra como um referencial coerente com as necessidades educacionais encontradas. Ou seja, o empoderamento profissional docente através da problematização do saber matemático e problematização da Matemática escolar. A prática docente é normada por orientações, mas, também, por necessidades socioculturais, devendo os professores se adaptarem a elas.

O empoderamento profissional docente está relacionado às necessidades expostas pelos professores investigados, brasileiros e mexicanos, que nem sempre encontram, na instituição escolar, o apoio necessário para discutir questões de cunho didático e metodológico do ensino e aprendizagem da Matemática, não encontrando, geralmente, profissionais capacitados para dar esse suporte. A problematização do saber matemático e da Matemática escolar possibilita a reflexão epistemológica e didática dos diferentes significados dos Racionais, nem sempre abordados de forma adequada nos programas de estudos e livros didáticos.

Mesmo com estruturas educacionais diferentes, nos dois países, vemos que há um fator comum quanto à necessidade de uma formação inicial e contínua que possibilite ao professor refletir sobre sua prática. No sistema mexicano, mesmo com um programa de base de conteúdos que norteia o professor em sala de aula, falta a esse profissional, muitas vezes, a formação didático-pedagógica necessária à sua ação em aula, pois a legislação permite, para os níveis Secundário e Médio Superior, o exercício da docência por pessoas com as mais diversas formações profissionais. No Brasil, é exigido do docente uma formação didático-pedagógica

na área de atuação, mas a responsabilidade na sua ação toma proporções diante de uma estrutura que possibilita ao professor eleger os conteúdos a serem trabalhados na escola, considerando o contexto onde está atuando, ao participar de forma coletiva da elaboração dos planos de estudos da escola. Porém, o Brasil está repensando essa sistemática, estando em estudo uma Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para ser implantada no final do ano de 2017. Isso, com certeza, mudará essa situação, porém no momento da pesquisa não estava em vigor.

Outra questão que consideramos importante é que apesar de contextos diferentes, com propostas educacionais também diferentes, os conteúdos e o estudo dos Números Racionais é semelhante entre o grupo de professores investigados. Acreditamos que a problemática não passa por ter ou não autonomia, mas sim em um condicionamento de um discurso que perpassa o ensino desse tema.

Cremos, assim, na necessidade de formações docentes que envolvam a problematização do saber matemático, bem como aspectos epistemológicos e a problematização do saber escolar, envolvendo os aspectos didáticos, cognitivos e socioculturais. Tais formações devem possibilitar o empoderamento desses profissionais que, através da discussão coletiva, transformar-se-ão em indivíduos comprometidos.

Acreditamos que o trabalho desenvolvido abriu caminhos para outras perspectivas investigativas durante o percurso. Entre elas, podemos ressaltar estudos específicos que envolvam a formação de professores numa perspectiva socioepistemológica, que englobem de forma sistêmica, aspectos epistemológicos e didático-metodológicos da Matemática e prática do professor em sua ação escolar.

Percebemos, também, a possibilidade de ampliar as discussões em torno da TSME na área da Educação Matemática, no Brasil, e que essa ampliação, pode dar respaldo para novas investigações com foco socioepistemológico em outras áreas do conhecimento matemático ao longo da Educação Básica. Esperamos que as discussões possam influenciar os programas de estudos, planos de aulas e as diretrizes educacionais, nos países estudados, influenciando, diretamente, no processo de ensino e aprendizagem

Também consideramos importante uma integração com trocas de experiências entre os países na área da educação, em especial, os latino-americanos, que possuem realidades socioeconômicas, em certos aspectos semelhantes. Investigações com esse cunho permitem entender, em contextos diferentes, aspectos similares que ultrapassam as questões culturais e se tornam discursos universais, e o motivo pelo qual isso acontece.

Por fim, consideramos que essa investigação atingiu a sua proposta de compreender como a TSME pode contribuir para a prática escolar, ao possibilitar, através dessa perspectiva,

entender os aspectos explícitos e implícitos que agem e influenciam a ação dos sujeitos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem.

Finalizando, agradecemos à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio Grande do Sul (FAPERGS) e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) por concederem a bolsa de doutorado que tornou possível desenvolver esta investigação.

REFERÊNCIAS

- BEHR, Merlyn; WACHSMUTH, Ipke; POST, Thomas; LESH, Richard. Order and equivalence of Rational Numbers: a clinical teaching experimente. **Journal for Research in Mathematics Education**, vol. 15, n. 5, p.323-341, 1984
- BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática Bianchini 6º ano**. 7ª. ed. São Paulo: Moderna, 2011.
- BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática Bianchini 7º ano**. 7ª. ed. São Paulo: Moderna, 2011.
- BITTAR, Marilena; FREITAS, José Luiz Magalhães. **Fundamentos e Metodologias de Matemática para os ciclos iniciais do Ensino Fundamental**. 2ª Edição. ed. Campo Grande: Editora UFMS, 2005.
- BOYER, Carl B. **História da Matemática**. 2ª Edição. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.
- BRASIL, Senado Federal. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional Nº 9.394**. Brasília: [s.n.], 1996.
- BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: [s.n.], 1997.
- BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: [s.n.], 1998.
- BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)**. Brasília: [s.n.], 2000.
- BRASIL, Congresso Nacional. **Lei Nº 10.172 Plano Nacional de Educação**. Brasília: [s.n.], 2001.
- BRASIL, Câmara de Educação Básica do Conselho Nacional de Educação. **Resolução nº 3**. Brasília: [s.n.], 2005.
- BRASIL, Congresso Nacional. **Lei Nº 11.274**. Brasília: [s.n.], 2006.
- BRASIL, Congresso Nacional. **Emenda Constitucional Nº 59**. Brasília: [s.n.], 2009.
- BRASIL, Ministério da Educação - Secretaria de Educação Básica. **Guia de Livros Didáticos - PNLD 2011**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria da Educação Básica, 2010.
- BRASIL, Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Relatório Nacional PISA 2012: Resultados brasileiros**. São Paulo: Fundação Santillana, 2012.
- BRASIL, Ministério da Educação - Secretaria de Educação Básica. **Guia de Livros Didáticos - PNLD 2014**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria da Educação Básica, 2013b.
- BRASIL, Ministério da Educação - Secretaria de Educação Básica. **Editais de convocação para o processo de inscrição e avaliação de obras didáticas para o programa nacional do livro didático PNLD 2017**. Brasília: [s.n.], 2012.

BRASIL, Ministério da Educação - Secretaria de Educação Básica. **Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica**. Brasília: [s.n.], 2013a.

BRASIL, Ministério da Educação – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). **Sistema de Avaliação da Educação Básica – SAEB**. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/web/guest/saeb-matrizes-de-referencia>. Acesso em: fevereiro de 2015.

BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: [s.n.], 2016. Disponível em <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/#/site/inicio>> Acesso em: Fevereiro de 2016.

BROITMAN, Claudia In: Paulina, Iracy. Nova ordem numérica. **Nova Escola**, São Paulo, n. Edição Especial 27, p. 72-75, Setembro 2009.

BUENDÍA, Gabriela Abalos; CORDERO, Francisco Osorio. Prediction and the periodic aspect as generators of knowledge in a social practice framework. A socioepistemological study. **Educational Studies in Mathematics**. *Kluwer publishers*, 58(3), 299-333, 2005.

BURKE, Peter. Traução: Klauss Brandini Gerhardt, Roneide Venâncio Majer. **História e Teoria Social**. São Paulo: Unesp, 2002.

CAMPOS, Tânia Maria de Mendonça; SILVA, Angélica Fontoura Garcia; PIETROPAOLO, Ruy César. Considerações a respeito do ensino e aprendizagem de representações fracionárias de Números Racionais. In: GUIMARÃES, G.; BORBA, R. E. D. S. R. **Reflexões sobre o ensino de Matemática nos anos iniciais de escolarização**. Recife: SBEM, 2009. Cap. 9, p. 131-139.

CANTORAL, Ricardo Arnoldo Uriza. **Desequilibrio y equilibración: categorías relativas a la apropiación de una base de significados próprias del pensamiento físico para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las funciones analíticas**. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. Cidade do México, México, tese de doutorado (Educação Matemática), 1990.

CANTORAL, Ricardo Arnoldo Uriza. **Matemática, matemática escolar y matemática educativa**. Reunió Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. Havana: Ministerio de Educación. 1995. p. 1-10.

CANTORAL, Ricardo Arnoldo Uriza. **La aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa: una mirada emergente**. XI Conferência Interamericana de Educação Matemática (CD ROM). Blumenau: Universidade Regional de Blumenau. 2003.

CANTORAL, Ricardo Arnoldo Uriza; FARFÁN, Rosa María Márquez. Matemática educativa: una visión de su evolución. **Revista Latinoamericana de Matemática Educativa** 6(1), p. 27-40, Cidade do México, 2003.

CANTORAL, Ricardo Arnoldo Uriza. Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa**, Santiago de Chile, 17(1), 2004. 1-9.

CANTORAL, Ricardo Arnoldo Uriza. **Socioepistemología: nota sobre a construção social do conhecimento matemático avançado**. III Congresso Internacional de Ensino da Matemática. Canoas: ULBRA. 2005.

CANTORAL, Ricardo Arnoldo Uriza; FARFÁN, Rosa María Márquez. Socioepistemología y Matemáticas. **Acta Latinamericana de Matemática Educativa 21**, p. 740-753, Coacalco, México, 2008.

CANTORAL, Ricardo Arnoldo Uriza; FARFÁN, Rosa Maria. Matemática Educativa: una visión de su evolución. **Acta Scientiae**, v. 11 n°1, p.7-20 jan./jun., Canoas, Brasil, 2009.

CANTORAL, Ricardo Arnoldo Uriza; FARFÁN, Rosa Maria; MONTIEL, Gisela Espinosa; LEZAMA, Francisco Javier Andalón; MOLINA, Juan Gabriel Zavaleta; CABAÑAS, María Guadalupe Sánchez; CASTAÑEDA, Apolo Alonso; SÁNCHEZ, Mario Aguilar; MARTÍNEZ-SIERRA, Gustavo. **Matemáticas Primer Grado: desarrollo del pensamiento matemático**. Cidade do México: McGraw-Hill, 2011.

CANTORAL, Ricardo Arnoldo Uriza. **Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa: estudios sobre construcción social del conocimiento**. 1ª Edição. ed. Barcelona: Gedisa, 2013.

CANTORAL, Ricardo Arnoldo Uriza; FARFÁN, Rosa Maria; CABAÑAS, María Guadalupe Sánchez; FERRARI, Marcela Escóla. **Matemáticas Primer Grado: desarrollo del pensamiento matemático**. Cidade do México: McGraw-Hill, 2014.

CATTO, Glória Garrido. **Registros de representação e o Número Racional: uma abordagem dos livros didáticos**. PUCSP. São Paulo, f. 168, mestrado (Educação Matemática). 2000.

CENTENO, Julia Pérez. **Numeros Decimales: por que? para que?** Madrid: Síntesis, 1988.

CORDERO, Francisco Osorio. El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en educación superior. Una mirada socioepistemológica de la integral. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, 8(3), 265-285, 2005.

CORDERO, Francisco Osorio. El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. In: CANTORAL, R. U., et al. **Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas**. México DF: Diaz de Santos, 2008. p. 285-310.

CORREA, João Jorge. A educação comparada e sua arquitetura histórica. **Publicatio UEPG: Ciências Humanas, Linguística, Letras e Artes**, Ponta Grossa, 20 (2): 117-129, julho-dezembro, 2012

CRESPO, Cecilia Rita Crespo. **Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología**. CICATA del IPN. Cidade do México, México, tese de doutorado (Educação Matemática), 312 f., 2007.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Etnomatemática: arte ou técnica de explicar e conhecer**. São Paulo: Ática, 1990.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática da teoria à prática**. São Paulo: Papirus, 1996.

EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. 3ª. ed. Campinas: UNICAMP, 2002.

FANDIÑO, Martha Isabel Pinilla. **Las fracciones: aspectos conceptuales y didácticos**. Bogotá, Colombia: Editorial Magisterio, 2009.

FARFÁN, Rosa María Márquez. *Ingeniería Didáctica: un estudio de la variación y el cambio*. México D.F.: Grupo Editorial Iberoamericano, 1997.

FERREIRA, António Gomes. O sentido da Educação Comparada: Uma compreensão sobre a construção de uma identidade. **Educação**, Porto Alegre, v. 31, n. 2, p. 124-138, maio-agosto, 2008

FLORES, Rebeca. **Significados asociados a la noción de fracción en la escuela secundaria**. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada. Cidade do México, México, dissertação de mestrado (Educação Matemática), 2010.

FRANCO, Maria Ciavatta. Quando nós somos o outro: questões teórico-metodológicas sobre estudos comparados. **Educação & Sociedade**, Campinas, SP, n. 72, p. 197 - 230, Agosto 2000.

FREIRE, Paulo. **Educação e Mudança**. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1979.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da Autonomia**. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1986.

GAIRÍN, José María Sallán; SANCHO, Julio Rocher. **Número y algoritmos**. Madrid: Síntesis, 2002.

GIMÉNEZ, Joaquin; BAIRRAL, Marcelo. **Frações no currículo do Ensino Fundamental conceituação, jogos e atividades lúdicas**. Seropédica: GEPEM/EDUR, 2005.

GOMES, Maria Laura Magalhães. Os Números Racionais em três momentos da História da Matemática Escolar Brasileira. **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 19, n. 25, p. 2-26, 2006.

GÓMEZ, Karla Margarita Osalde. **Los procesos de difusión del conocimiento matemático en el cotidiano: un estudio socioepistemológico**. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN. Cidade do México, México, dissertação de mestrado (Educação Matemática), 89 f., 2009.

GOMEZ, Karla Osalde; SILVA-CROCCI, Héctor; CORDERO, Francisco Osorio; SOTO, Daniela Soto. Exclusión, opacidad y adherencia: tres fenómenos del discurso matemático escolar. **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 27**, Coalcalco, México, 2013. 1457-1464.

IFRAH, Georges. **Os números: a história de uma grande invenção**. Trad. Stella Maria de Freitas Senra. Rio de Janeiro: Globo, 1989.

KIEREN, Thomas E. On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In: R., L. **Number and measurement**: Paper from a research workshop. Columbus, Ohio: ERIC/MEAC, 1976. p. 101-144.

KIEREN, Thomas E. Knowing Rational Numbers: ideas and symbols. In: NCTM **National Society for the Study of Education and National Council of Teachers of Mathematics**. Chicago: [s.n.], 1980a.

KIEREN, Thomas E. The Rational Number construct: its elements and mechanisms. In: KIEREN, T. E. **Recent research on number learning**. [S.l.]: [s.n.], 1980b.

LELLIS, Marcelo; IMENES, Luiz Márcio. O currículo tradicional e a Educação Matemática. **A Educação Matemática em Revista**, Blumenau, n. 2, p. 5 - 12, 1994.

LLINARES, Salvador Ciscar; SÁNCHEZ, Maria Victoria García. **Fracciones la relacion parte-todo**. Madrid: Sintesis, 1988.

LOPES, Antônio José. Matemática Hoje é feita assim. **Reflexões sobre o ensino de Frações no currículo de Matemática**, 2006. Disponível em: <<http://www.matematicahoje.com.br>>. Acesso em: Julho 2012.

LOPES, Antônio José. O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre Frações, quando tentamos lhes ensinar Frações. **BOLEMA**, Rio Claro, v. ano 21, n. 31, p. 1 -22, 2008.

LOURENÇO FILHO, Manoel Bergström. **Educação Comparada**. Brasília: MEC/Inep, 2004.

LOUZANO, Paula Baptista Jorge. **Todos pela Educação**, Dezembro 2014. Disponível em: <<http://www.todospelaeducacao.org.br/educacao-na-midia/indice/32314/paula-louzano-fala-sobre-a-necessidade-de-discutir-o-sistema-de-ensino-brasileiro/>>. Acesso em: Maio 2015.

MARANHÃO, Maria Cristina Souza de Albuquerque; IGLIORI, Sonia Barbosa Camargo. Registros de representações e Números Racionais. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (org.). **Aprendizagem em Matemática: registros de representações semiótica**. São Paulo: Papirus, 2003. Cap. 4, p. 57-70.

MERLINI, Vera Lucia. **O conceito de frações me seus diferentes significados: um estudo diagnóstico com alunos de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental**. 238 f. tese (doutorado em Educação Matemática), PUC SP. São Paulo. 2005.

MÉXICO. Cámara Diputados del H. Congreso de la Unión. **Ley General de Educación**. México DF: [s.n.], 2013.

MÉXICO. Secretaria de Educación Pública. **Acuerdo número 592 por el que se establece la Articulación de la Educación Básica**. México DF: [s.n.], 2011.

MÉXICO. Secretaria de Educación Pública. **Programas de Estudios 2011. Guía para el Maestro. Educación Básica**. México DF: [s.n.], 2011b.

MÉXICO. Secretaria de Educación Pública. **Desafíos Matemáticos: libro para el alumno, sexto grado.** México DF: [s.n.], 2014.

MÉXICO. Secretaria de Educación Pública. **Matemáticas 1: 1er Grado Volumen 1.** México DF: [s.n.], 2015.

MONTEIRO, Alexandre Branco. **Estudos de recuperação do conteúdo de frações com o uso de Tecnologias da Informação e Comunicação.** Universidade Luterana do Brasil, 227 f., dissertação de mestrado (ensino de Matemática), Canoas, 2013.

MONTIEL, Gisela Espinosa. **Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica.** Centro de Investigación en Ciencias Aplicadas y Tecnología Avanzada. Cidade do México, México, tese de doutorado, 2005.

MONTIEL, Gisela Espinosa. **Construcción de conocimiento trigonométrico: un estudio socioepistemológico.** México, D.F.: Díaz de Santos, 2011.

MORETTI, Vanessa dias; PANOSSIAN, Maria Lúcia; MOURA, Manoel Oriosvaldo. Educação, educação matemática e teoria cultural da objetivação: uma conversa com Luis Radford. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 41, n. 1, p. 243-260, Janeiro-Março 2015.

MOUTINHO, Leonel Velpereiro. **Frações e seus diferentes significados: um estudo com alunos das 4ª e 8ª séries do Ensino Fundamental.** 218 f. tese (doutorado em Educação Matemática), PUC SP. São Paulo. 2005.

NAME, Miguel Asis. **Tempo de Matemática 7º ano.** São Paulo: [s.n.], 2008.

NOVA ESCOLA, REVISTA. Nova ordem numérica, São Paulo, n. Edição Especial 27, p. 72-75, Setembro 2009.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS MATHEMATICS. **Principios y Estándares para la Educación Matemática.** Tradução de Manuel Fernández Reyes. 1. ed. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, 2000.

NUNES, Terezinha; BRYANT, Peter. **Crianças fazendo Matemática.** Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

NUNES, Terezinha; CAMPOS, Tânia Maria Mendonça; MAGINA, Sandra; BRYANT, Peter. **Educação Matemática: números e operações numéricas.** São Paulo: Cortez, 2009.

OLIVEIRA, Isolina. **O conceito de Número Racional em alunos do 6º ano de escolaridade: estratégias e dificuldades conceituais.** Instituto Superior de Psicologia Aplicada. [S.l.], p. 203 f. tese (Psicologia Educacional). 1994.

PIRES, Célia Maria Carolino. **Base Nacional Comum Curricular.** Disponível em: <https://novaescola.org.br/conteudo/3799/base-nacional-comum-curricular>. Acessado: em março de 2015.

RADFORD, Luis. Elementos de una teoría cultural de la objetivación. **Revista Latinoamericana de Investigación en Educación Matemática**, Cidade do México, n. Especial, p. 103-129, 2006.

RADFORD, Luis. De la teoría de la objetivación. **Revista Latinoamericana de Etnomatemática**, San Juan del Pasto, v. 7, n. 2, p. 132-150, Junho-Setembro 2014.

REYES-GASPERINI, Daniela.. **Empoderamiento docente desde una visión Socioepistemológica: Estudio de los factores de cambio en las prácticas del profesor de matemáticas**. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Cidade do México, México, dissertação de mestrado, 2011.

REYES-GASPERINI, Daniela; CANTORAL, Ricardo Arnoldo Uriza. Socioepistemología y Empoderamiento: la profesionalización docente desde la problematización del saber matemático. **Boletim de Educação Matemática (BOLEMA)**, Rio Claro, v.8, n. 48, p.360-382, 2014.

REYES-GASPERINI, Daniela; CANTORAL, Ricardo Arnoldo Uriza. Empoderamiento docente: la práctica docente más allá de la didáctica... ¿qué papel juega el saber en una transformación educativa? **Revista de la Escuela de Ciencias de la Educación**, Rosario (Argentina) n° 11, vol. 2, Año 12, p. 155-176. Julho a dezembro, 2016.

RIPOLL, Jaime Bruck; RIPOLL, Cydara Cavedon; SILVEIRA, José Francisco Porto. **Números Racionais, Reais e Complexos**. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2006.

RIO GRANDE DO SUL, Conselho Estadual de Educação. **PARECER Nº 323/1999**. Porto Alegre: [s.n.], 1999.

RIO GRANDE DO SUL, Conselho Estadual de Educação. **RESOLUÇÃO Nº 223/1999**. Porto Alegre: [s.n.], 1999.

ROBILOTTA, Manoel Roberto. O cinza, o branco e o preto - da revelância da história da ciência no ensino da Física. **Caderno Catarinense de Ensino de Física**, Florianópolis, n. 5, p. 7-22, junho 1988.

ROMANATTO, MAURO CARLOS. **Número Racional: relações necessárias à sua compreensão**. Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 169 f. tese (Educação Matemática). 1997.

SACRÍSTAN, Jose Gimeno. **Educar por competências: o que há de novo**. Porto Alegre: Artmed, 2010.

SANTOS, Aparecido. **O conceito de Frações e seus diferentes significados: um estudo diagnóstico junto a professores que atuam no Ensino Fundamental**. PUCSP. São Paulo, p. 203 f. mestrado (Educação Matemática). 2005.

SILVA, Angélica Fontoura Garcia. **O desafio do desenvolvimento profissional docente: análise da formação continuada de um grupo de professores da séries iniciais do Ensino Fundamental, tendo como objeto de discussão o processo de ensino e aprendizagem de Frações**. 308 f. tese (doutorado em Educação Matemática), PUC SP. São Paulo. 2007.

SILVA, Daniel Romão. **Livro didático de Matemática: lugar histórico e perspectivas.** USP Faculdade de Educação. São Paulo, p. 152. 2010.

SOTO, Daniela. **El Discurso Matemático Escolar y la Exclusión: una visión Socioepistemológica.** Centro de Investigación y de Estudios Avanzados. Cidade do México, México, dissertação de mestrado (Educação Matemática), 2010.

TRIGUEROS, María Gaisman; CORTÉS, Mercedes Lascrain; JINICH, Emanuel Charney; INÉS, Mônica Schulmaister; LOZANO, María Dolores Suárez; SANDOVAL, Ivonne Twigg Cáceres. **Matemática 1.** Cidade do México: Editorial Santillana, 2012.

APÊNDICES

**APÊNDICE A – ROTEIRO DA ENTREVISTA COM PROFESSORES DAS ESCOLAS
MUNICIPAIS DE ENSINO FUNDAMENTAL DE CANOAS, RIO GRANDE DO SUL,
BRASIL**

Este questionário faz parte de uma pesquisa de tese de doutorado sobre o ensino e aprendizagem dos Números Racionais. E desde já agradecemos a sua contribuição em responder as questões a seguir.

Nome:

Escola:

1) Qual a sua formação acadêmica?

- Licenciatura em Matemática
- Licenciatura em Ciências
- Outra licenciatura
- Outra formação

2) Você possui pós-graduação?

- Não
- Sim. Qual? Especialização, Curso _____
- Mestrado, Curso _____
- Doutorado, Curso _____

3) Qual o seu regime de trabalho?

- Nomeação, 20h 40h Outro _____
- Contrato, 20h 40h Outro _____

4) Qual o seu tempo de experiência docente?

- Até 5 anos.
- de 5 à 10 anos.
- de 10 a 15 anos.
- mais de 15 anos.

5) Quantas horas você trabalha semanalmente?

- Até 10h.
- de 10h à 20h.
- de 20h à 40h.
- mais de 40h.

6) Em quantas escolas você trabalha?

1 escola.

2 escolas.

3 ou mais escolas.

7) Você trabalha em qual(is) rede de ensino:

Somente municipal.

Municipal e estadual.

Municipal e particular.

Municipal, estadual e particular.

8) Para quais anos das séries finais do Ensino Fundamental você leciona?

6º ano.

7º ano.

8º ano.

9º ano.

EJA

9) Em que fontes você se apoia para construir seus planejamentos? Qual a principal delas?

10) Você usa livros didáticos nas suas aulas? Por que sim ou não da utilização?

11) De que forma você utiliza o livro didático?

12) Em relação ao conteúdo de Números Racionais, os livros didáticos abordam de forma adequada esse tema?

13) Quais as metodologias que você utiliza no ensino do conteúdo de Números Racionais?

14) Os alunos apresentam dificuldades na aprendizagem dos Números Racionais?

15) Quais as principais dificuldades que você identifica?

16) É possível realizar atividades práticas com esse tema, fazendo com que os alunos reconheçam os Números Racionais no seu dia a dia? Você realiza essas atividades

17) Em relação a sua experiência em relação aos Números Racionais, você percebe que os alunos conseguem relacionar os conteúdos trabalhados em sala de aula com a sua realidade cotidiana?

18) Qual a sua opinião sobre o currículo dos Números Racionais? Ele está bem estrutura e articulado?

19) Você participa de cursos de formação continuada? Qual a sua opinião sobre a qualidade e da importância desses cursos na sua prática?

- 20)** Você utiliza as orientações governamentais (por exemplo, os PCN) na sua prática de sala de aula? Por quê?
- 21)** A sua formação acadêmica foi suficiente para a sua prática? Em que sentido?
- 22)** Pela sua experiência e prática profissional, qual a sua opinião sobre o sistema educacional, em relação a sua estrutura (divisão de séries, ciclos, anos), e a forma que ele é concebido em relação às disciplinas e os conteúdos?
- 23)** Qual a influência que as questões sociais têm na realização do sua formação profissional?
- 24)** Qual a influência que as questões sociais têm na sua prática de sala de aula?
- 25)** Qual a importância que você dá as questões sociais na sala de aula? E caso isso se haja, de que forma isso acontece?
- 26)** Como é feita a avaliação em relação a esse conteúdo?
- 27)** Quando um aluno apresenta dificuldades em relação a esse tema, como é feito estudos de recuperação? De que forma é feito?
- 28)** Quais as maiores dificuldades no ensino dos Números Racionais?
- 29)** A formação profissional proporcionada pelas universidades é condizente com as necessidades da prática?
- 30)** Existe uma estrutura de apoio ao professor em sala de aula? E de que modo isso é feito?
- 31)** Qual a sua relação pessoal com os alunos, pais e comunidade?
- 32)** Você consegue reconhecer alguma influência da sua formação pessoal (experiência de vida) na sua prática profissional? E de que forma isso se dá?
- 33)** Você ajudou a organizar os planos de estudos da sua escola?

**APÊNDICE B – ROTEIRO DA ENTREVISTA COM PROFESSORES DAS ESCOLAS
PÚBLICAS DE NÍVEL PRIMÁRIO E SECUNDÁRIO DE HUAJUAPAN DE LÉON,
OAXACA, MÉXICO**

Estas cuestiones hacen parte de una investigación de tesis de doctorado sobre la enseñanza y aprendizaje de los Números Racionales. Muchas gracias por suya contribución en respondes las cuestiones.

- 1) Nombre:
- 2) Escuela:
- 3) ¿Cuál es tu formación académica (curso que hizo a nivel de graduación)?
- 4) ¿Posee posgrados?
- 5) ¿Cuál es las asignaturas que trabaja?
- 6) ¿Cuál es tu tiempo (en años) de experiencia profesional?
- 7) ¿Cuántas horas trabajas por semana?
- 8) ¿En cuántas escuelas trabaja?
- 9) ¿Trabajar en cual nivel escolar? En escuelas públicas o privadas?
- 10) ¿Los planes de estudios de la escuela son importantes en la planificación? ¿De qué manera?
- 11) ¿Puede 'ganar' todo el contenido indicado en los planes?
- 12) ¿Crees que hay tiempo para todo?
- 13) ¿Sigues las directrices de los planes de estudio en la escuela de forma rígida? O se articula el contenido flexible?
- 14) ¿Colaboró en la definición de los planes de estudio de la escuela?
- 15) ¿Para una reunión con la supervisión para discutir sus planes? ¿Y con los colegas?
- 16) ¿Hay ninguna otra indicación oficial (la escuela o de gobierno) para el desarrollo de los contenidos?
- 17) ¿Cómo planea sus clases?
- 18) Los Guías para Maestros y Plan de Estudios, hace su uso?
- 19) ¿Tu experiencia profesional es válida en este momento? ¿De qué manera?
- 20) ¿Está buscando diversificar la manera de enseñar, ¿E por qué usted haría?
- 21) ¿En relación a los números racionales, fracciones y decimales, cuál es su opinión sobre el contenido?
- 22) ¿Cuáles son las dificultades de los estudiantes?

- 23)** ¿Cuáles son sus dificultades?
- 24)** ¿Cuándo investigación o indicaciones en la enseñanza de contenido hablan sobre el uso de situaciones cotidianas del estudiante, ¿Qué entiende?
- 25)** ¿Tenido una experiencia de enseñanza de decimales antes de las fracciones, ¿Qué han notado sobre el aprendizaje de los estudiantes? ¿Lo que el rendimiento de ellos consideró las diferencias en la secuencia habitual de la enseñanza? ¿Y para usted cuál fue el reto? ¿Hacendó una evaluación de la situación, en el que las secuencias de ven un mejor uso?
- 26)** ¿Que metodologías utiliza para enseñar los números racionales?
- 27)** ¿Dónde obtendrá referencias para la enseñanza de los contenidos?
- 28)** ¿Cómo ves los libros de texto? ¿Cuáles son los aspectos positivos? ¿Cuáles son los negativos?
- 29)** ¿Sobre los libros de texto, utilizas en la planificación? ¿Cuál?
- 30)** ¿Se utiliza con los estudiantes? ¿Cuál? ¿De qué manera? O si no por qué?
- 31)** ¿ Hay alguna sugerencia sobre el contenido del números racionales o cualquier cosa que quieres decir acerca de él?
- 32)** ¿Y sobre el sistema educativo, estructura, etc., cualquier sugerencia o comentario?

**APÊNDICE C – AUTORIZAÇÃO PARA USO DE IMAGEM E VOZ DOS SUJEITOS
BRASILEIROS**

AUTORIZAÇÃO PARA USO DE IMAGEM E VOZ

Pelo presente instrumento eu, _____,
inscrito/a no RG sob o nº _____ e no CPF sob o
nº _____, residente e domiciliado a
_____ no município de Canoas –
RS, abaixo assinado/a, autorizo por ser o responsável legal, a Alexandre Branco Monteiro e a
Universidade Luterana do Brasil – ULBRA usar para pesquisa a imagem e o áudio, sejam essas
destinadas à divulgação da pesquisa da escola e universidade e/ou apenas para circulação
interna.

Para fins desse termo, entende-se como imagem qualquer forma de representação,
inclusive a fotográfica, bem como processo audiovisual que resulta da fixação de imagens, com
ou sem som, que tenha a finalidade de criar, por meio de sua reprodução, a impressão do
movimento, independente dos processos de captação, do suporte usado na inicial ou
posteriormente para fixá-lo, bem como dos meios utilizados para a sua veiculação.

Canoas, ____ de _____ de 2015.

Assinatura

**APÊNDICE D – AUTORIZAÇÃO PARA USO DE IMAGEM E VOZ DOS SUJEITOS
MEXICANOS**

AUTORIZACIÓN PARA EL USO DE IMAGEN Y VOZ

Por la presente instrumento yo, _____
_____, inscrito/a en el documento
_____ n° _____ con
domicilio _____ y residencia _____ en

_____ en la ciudad de _____ no estado
_____ en México, el abajo firmo autorizar a Alexandre Branco
Monteiro, en conjunto con la Universidade Luterana do Brasil e o Departamento de Matemática
Educativa del CINVESTAV – IPN, utilizar para investigación la imagen y el audio, destinadas
a la difusión de la investigación de escuela y universidad y / o sólo para circulación interna.

Para los propósitos de este término, se entiende que cualquier forma de representación
de imagen, incluyendo el proceso fotográfico y audiovisual que se resulta en la fijación de
imágenes, con o sin sonido, que tiene el propósito de crear, por medio de la reproducción,
impresión movimiento, independiente de los procesos de captación, del soporte utilizado en la
inicial o más tarde para arreglarlo, y los medios utilizados para su publicación.

_____, ____ de _____ de 2015.

Firma

ANEXOS

ANEXO A – PLANOS DE ESTUDOS DE MATEMÁTICA DA ESCOLA EMIM PARA O 6º E 7º ANO

PLANO DE ESTUDOS

O referido plano contém a operacionalização do currículo escolar, as disciplinas exigidas pela legislação com as respectivas cargas horárias, bem como a amplitude e a profundidade com que as mesmas são trabalhadas.

A base nacional comum e sua parte diversificada integram-se para a formação da vida cidadã.

Objetivo Geral

Possibilitar o desenvolvimento das aptidões cognitivas, afetivas e sociais do educando, buscando promover a integração deste na sociedade, através do senso crítico construtivo.

Metodologia

O processo de ensino e aprendizagem é orientado através de metodologia dialógica onde o aluno formula hipóteses, investiga, pesquisa, reflete, observa e critica.

A ação pedagógica envolve educadores e educandos num processo interativo considerando os aspectos da vida cidadã, tendo como objetivo a formação integral do educando, levando ao pleno desenvolvimento das áreas afetivas, cognitivas e psicomotoras.

A escola envolve todos os aspectos da aprendizagem através de diferentes recursos e técnicas e o professor tem a sua atuação como um orientador e incentivador deste processo.

Trabalhar com materiais diversos, narração de histórias, filmes com assuntos em estudo, exposição de trabalhos em grupos e individuais, saídas de estudos, apresentações artísticas e atividades recreativas que desenvolvam habilidades motoras e cognitivas.

Avaliação

A avaliação do aluno é contínua e cumulativa durante todo o período letivo, preponderando os aspectos afetivos e cognitivos.

O aluno será avaliado através de sua participação, criatividade, trabalhos individuais e em grupo, exercícios feitos em sala de aula, pesquisas, leituras orais, caderno, provas e atividades diversas.

ADAPTAÇÕES CURRICULARES

Em conformidade e cumprimento ao Parecer CEB/CNE nº 17, de 3 de julho de 2001 e Resolução CNE/CEB nº 02, de julho de 2001, é dever da escola oferecer Adaptações Curriculares (PM – Plano de METAS) aos alunos que apresentem necessidades educacionais especiais.

EDUCAÇÃO FÍSICA

O aluno que apresentar atestado médico, está dispensado APENAS da prática, devendo o (a) professor (a) de Educação Física proporcionar atividades a fim de cumprir a carga horária.

É necessária a expressão dos resultados de sua avaliação.

ENSINO RELIGIOSO

Aos alunos não optantes deste componente curricular, serão oferecidas atividades teóricas e práticas que não caracterizem a opção por uma crença religiosa. É necessário o cumprimento da carga horária, porém, sem expressão dos resultados de sua avaliação. Os trabalhos realizados pelos alunos não optantes deverão ser arquivados em documentação própria.

CULTURA AFRICANA – LEI 10.639 DE 9 DE JANEIRO DE 2003

Resolução nº 008 de 15 de julho de 2009. Institui normas complementares às Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação das Relações Étnico-Raciais e para o ensino de História e Cultura Afro-Brasileira e Africana e trata da obrigatoriedade da inclusão do estudo da história e cultura indígena nos currículos escolares das instituições de ensino integrantes do Sistema Municipal de Ensino, em especial nas áreas de Artes e História.

MÚSICA – LEI 11.769 DE 18 DE AGOSTO DE 2008

Altera o artigo 26 da LDBEN que diz: “O ensino da **ARTE** constituirá componente curricular obrigatório nos diversos níveis da Educação Básica, de forma a promover o desenvolvimento cultural dos alunos”, acrescentando o §6º que diz: “A música deverá ser conteúdo obrigatório mas não exclusivo do componente curricular (Arte) de que trata o §2º deste artigo.

TEMAS TRANSVERSAIS

São incorporados nas áreas do conhecimento e pelos Projetos realizados pela escola, através de propostas interdisciplinares e discussão dos temas: Ética, Orientação Sexual, Pluralidade Cultural, Trabalho e Consumo, Trânsito, Cultura Afro-brasileira.

DISCIPLINA: MATEMÁTICA 6º ANO

CONTEÚDOS	OBJETIVOS
<ul style="list-style-type: none"> • Sondagem: <ul style="list-style-type: none"> ▪ Sistema de numeração ▪ Números romanos ▪ Sucessor, antecessor, consecutivo ▪ Múltiplos e divisores ▪ Noções de geometria (figuras) • Números naturais <ul style="list-style-type: none"> ▪ Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão) • Média aritmética • Potenciação • Radiciação • Expressões numéricas • Múltiplos • Divisores • Números primos • Números compostos • Fatoração • Mínimo múltiplo comum (m.m.c) • Maximo divisor comum (m.d.c.) • Frações • Porcentagem • Números decimais • Grandezas e medidas 	<ul style="list-style-type: none"> • Mostrar que a linguagem numérica nasceu da necessidade do homem de representar quantidades de objetos. • Mostrar os símbolos inventados pelos hindus e aperfeiçoados pelos árabes e que são usados para representar, atualmente, os números. • Identificar o conjunto N dos números naturais. • Associar a adição de números naturais às Ideias de "juntar" e "acrescentar". • Reconhecer e aplicar as propriedades da adição. • Associar a subtração às ideias de "tirar", "quanto falta" e "quantos a mais". • Relacionar a adição e a subtração por meio da relação fundamental da subtração. • Determinar o valor de uma expressão numérica. • Realizar operações com números naturais, adição, subtração e multiplicação. • Resolver problemas com números naturais. • Associar a multiplicação de números naturais às idéias de "adição de parcelas iguais", "combinatória" e "proporcionalidade".

<ul style="list-style-type: none"> • Entes geométricos • Polígonos e poligonais <ul style="list-style-type: none"> ▪ classificação dos polígonos (quanto aos lados) ▪ diferença entre geometria plana e espacial ▪ vértices, arestas e faces ▪ área ▪ perímetro • Noções de estatística <ul style="list-style-type: none"> ▪ tipos de gráficos (linha, coluna/ barra, setor) 	<ul style="list-style-type: none"> • Reconhecer e aplicar as propriedades da multiplicação. • Identificar divisão exata e divisão não-exata. • Resolver problemas que envolvem divisão. • Relacionar a divisão e a multiplicação pela relação fundamental da divisão. • Saber que não existe divisão por zero. • Associar potências de números naturais à multiplicação de fatores iguais. • Calcular potências de um número natural. • Calcular a raiz quadrada exata de um número natural. • Calcular o valor de uma expressão numérica utilizando potências. • Saber as regras práticas da divisibilidade. • Determinar os divisores de um número natural. • Verificar que todos os números naturais, com exceção do 0 e do 1, possuem, pelo menos, dois divisores distintos: o número 1 e o próprio número. • Conceituar número primo. • Verificar se um número dado é ou não primo. • Decompor um número natural composto em um produto de fatores primos. • Escrever a fatoração completa de um número natural na forma de potências. • Conceituar o m.d.c. de dois ou mais números naturais. • Obter o m.d.c. de dois ou mais números usando a Teoria de Conjuntos, a decomposição em fatores primos e as divisões sucessivas. • Conceituar o m.m.c. de dois ou mais números naturais. • Determinar o m.m.c. de dois ou mais números usando a Teoria de Conjuntos e a decomposição simultânea em fatores primos. • Diferenciar figura plana da espacial. • Reconhecer e representar ponto, reta, plano, semi-reta e segmento de reta. • Reconhecer polígonos e sua classificação. • Classificar quadriláteros, triângulos, este último quanto aos lados. • Identificar vértice, arestas e faces. • Usar régua, esquadro, compasso e transferidor corretamente.
---	---

	<ul style="list-style-type: none"> • Calcular área e perímetro de figuras planas. • Interpretar e compreender um gráfico. • Levantar dados(pesquisa de campo). • Construir gráficos. • Determinar cálculos de números decimais. • Ler e escrever frações. • Identificar frações equivalentes. • Identificar frações menores que um inteiro, maiores e iguais. • Representar uma fração maior que o inteiro por meio de um número misto. • Comparar frações. • Operações com frações.
--	---

DISCIPLINA: MATEMÁTICA 7º ANO

Conteúdos	Objetivos
<ul style="list-style-type: none"> • SONDAGEM: <ul style="list-style-type: none"> - conjunto dos números naturais e suas operações: adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação - frações e números decimais • NÚMEROS INTEIROS: <ul style="list-style-type: none"> - o uso cotidiano dos números positivos e negativos; - o conjunto dos números inteiros; - representação geométrica; - comparação; - módulo (ou valor absoluto); - opostos (ou simétricos); - operações; - expressões numéricas e resolução de problemas envolvendo todas as operações. • NÚMEROS RACIONAIS <ul style="list-style-type: none"> - o uso; a representação; o módulo; o oposto e o inverso dos números racionais; - comparação e operações dos números racionais; 	<ul style="list-style-type: none"> • -perceber e solucionar eventuais lacunas de aprendizagem dos conceitos da sondagem necessários para o aprendizado do conteúdo do 7º ano • - reconhecer a necessidade do uso dos números negativos no cotidiano (temperaturas, altitudes, saldos, etc) • - identificar Z e perceber que o conjunto dos números naturais faz parte do conjunto dos números inteiros • - representar os números inteiros na reta a fim de melhor visualização para comparação de inteiros e identificação de sucessores e antecessores • - compreender o conceito de módulo como a distância entre o número e o ponto de origem • - compreender o conceito de simetria entre inteiros através da confecção de figuras simétricas • - compreender situações onde são necessários os números inteiros, operando-os utilizando adição, subtração, multiplicação. • - reconhecer a necessidade do uso dos números racionais no cotidiano; • - identificar e reconhecer os números inteiros como parte do conjunto dos números racionais;

<ul style="list-style-type: none"> - potenciação dos números racionais: propriedades da potenciação. • EQUAÇÕES DO 1º GRAU <ul style="list-style-type: none"> - resolução de equações do 1º grau com o uso de técnicas algébricas - representação de sentenças matemáticas - resolução de problemas através de equações do 1º grau com uma incógnita - equações do 1º grau com duas incógnitas - sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas - inequações • RAZÃO E PROPORÇÃO <ul style="list-style-type: none"> - razões e razões especiais - porcentagem • GRANDEZAS PROPORCIONAIS E REGRA DE TRÊS <ul style="list-style-type: none"> - proporcionalidade direta e inversa - regra de três simples e composta • ÂNGULOS <ul style="list-style-type: none"> - conceito, usos e medidas - classificação e propriedades • ÁREA DE FIGURAS <ul style="list-style-type: none"> - cálculo da área de diferentes figuras planas 	<ul style="list-style-type: none"> • - comparar dois números racionais (identificando corretamente se o primeiro é maior que, menor que ou igual ao segundo) • - compreender as propriedades da potenciação e utilizá-las, reconhecendo estas como uma maneira de facilitar os cálculos • - identificar uma equação do 1º grau e seus termos: primeiro e segundo membros; • - resolver equações do 1º grau utilizando as propriedades matemáticas; • - representar matematicamente e resolver sentenças dadas em problemas cotidianos; • - reconhecer situações-problema onde é necessária a utilização de duas variáveis • - resolver sistemas de equações com duas variáveis a partir de problemas • - reconhecer uma inequação do 1º grau e resolver utilizando os princípios aditivo e multiplicativo das desigualdades do tipo $>ou<$ • - compreender a idéia de razão com exemplos cotidianos e reconhecer razões especiais (escala, velocidade média, densidade demográfica, etc); • - converter razões em porcentagem; • - identificar a proporção como uma razão; • - observar a relação entre grandezas e estabelecer relações entre elas; • - resolver situações-problema que envolvam proporcionalidade; • - reconhecer o vértice e os lados de um ângulo; • - determinar a medida de um ângulo e identificar ângulos: reto, agudo e obtuso; • - calcular a área de diferentes figuras planas: quadrado, retângulo, triângulo, losango, paralelogramo e trapézio
--	---

ANEXO B – PLANOS DE ESTUDOS DE MATEMÁTICA DA ESCOLA EMTAN PARA O 6º E 7º ANO

PLANO DE ESTUDOS

O referido plano contém a operacionalização do currículo escolar, as disciplinas exigidas pela legislação com as respectivas cargas horárias, bem como a amplitude e a profundidade com que as mesmas são trabalhadas.

A base nacional comum e sua parte diversificada integram-se para a formação da vida cidadã.

1 – ADAPTAÇÕES CURRICULARES

Em conformidade e cumprimento ao Parecer CEB/CNE nº 02, de julho de 2001, é dever da escola oferecer Adaptações Curriculares aos alunos que apresentem necessidades educacionais especiais.

2 – EDUCAÇÃO FÍSICA

O aluno que apresentar atestado médico, está dispensado APENAS da prática, devendo o(a) professor(a) de Educação Física proporcionar atividades a fim de cumprir a carga horária.

É necessária a expressão dos resultados de sua avaliação.

3 – TEMAS TRANSVERSAIS

São incorporados nas áreas do conhecimento e pelos Projetos realizados pela escola. Através de propostas interdisciplinares, discutir assuntos como Ética, Orientação Sexual, Pluralidade Cultural, Trabalho e Consumo, Trânsito, Cultura Afro-brasileira.

4 – ENSINO RELIGIOSO

Aos alunos não optantes deste componente curricular, serão oferecidas atividades teóricas e práticas que não caracterizem a opção por uma crença religiosa. É necessário o cumprimento da carga horária, porém, sem expressão dos resultados de sua avaliação. Os trabalhos realizados pelos alunos não optantes deverão ser arquivados em documentação própria.

5 – LEI 10.639 DE 9 DE JANEIRO DE 2003

Temáticas “História e Cultura Afro-Brasileira, ministrada em todo currículo escolar, em especial nas áreas de Artes e História”.

6 – LEI 11769 DE 18 DE AGOSTO DE 2008

Altera o artigo 26 da LDBEN, acrescentando o §6º que diz: “A música deverá ser conteúdo obrigatório mas não exclusivo do componente curricular de que trata o §2º deste artigo (no caso o Art. 26 da LDBEN) que diz: “O ensino da arte constituirá componente curricular obrigatório nos diversos níveis da Educação Básica, de forma a promover o desenvolvimento cultural dos alunos.”

7 – LEI 12.472 DE SETEMBRO DE 2011

Com vistas a obediência à referida Lei, os Símbolos Nacionais devem ser incluídos como temas transversais nos currículos do Ensino Fundamental.

OBJETIVO GERAL

Proporcionar aos alunos um ambiente favorável ao seu desenvolvimento como cidadão crítico, levando-o a resolver situações problemas do cotidiano e preparando-o para uma vida em sociedade embasada na prática de valores morais, culturais e éticos.

Espera-se também que os alunos adquiram competência em relação à todas as áreas do conhecimento.

METODOLOGIA

O trabalho será realizado, considerando as variadas estratégias metodológicas e recursos que permitam uma aprendizagem significativa e prazerosa para os (as) alunos (as), buscando relacionar os conhecimentos prévios aos conhecimentos científicos e aos temas que atravessam tais conhecimentos.

AVALIAÇÃO

A avaliação será feita através dos registros que acompanham o desenvolvimento de cada educando em seu rendimento, considerando o compromisso, participação, relacionamento com colegas, pontualidade na entrega dos trabalhos, organização no grupo e individual, a capacidade de dialogar, discutir e também respeitar a opinião dos colegas, detectando se os objetivos estão sendo alcançados e conseqüentemente reforçando-os quando houver necessidade. Os conhecimentos serão também avaliados através de avaliação formal, incluindo provas e testes.

6º ANO **CIÊNCIAS NATURAIS**

TEMÁTICAS

História dos números – sistema de numeração egípcios, babilônico, romano, indo, arábicos.

Conjuntos: representação, tipos de conjunto, relação de pertinência, subconjuntos.

Conjunto dos números naturais: conceito, representação geométrica.

Adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação de números naturais.

Expressões numéricas e resolução de problemas com adição, subtração, multiplicação,
 Divisão, potenciação e radiciação.
 Divisibilidade: múltiplos de um número, divisores de um número, critérios de divisibilidade.
 Números primos e compostos.
 Decomposição de um número em fatores primos (fatoração).
 Mínimo múltiplo comum (m.m.c).
 Conjunto dos números racionais: frações, conceito e representação prática; leitura de frações;
 Tipos de frações, números mistos, frações equivalentes, simplificação de frações, comparação de frações, adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação de frações (resolução de problemas).
 Números racionais e sua representação na forma decimal
 Leitura de números decimais;
 Adição, subtração, multiplicação, divisão de números decimais.
 Geometria: ponto, reta e plano; figuras geométricas planas e espaciais; retas concorrentes e paralelas; polígonos (nome, lados, figuras); perímetro; tangram.
 Noções básicas de higiene.
 Saúde: cuidados, nutrição, vacinas, vícios, repouso e outros.
 Corpo humano e sexualidade.
 Água (tipos, tratamento, cuidados com relação ao desperdício, agentes poluidores...).

Solo, Ar
 Seres vivos e relação com o ambiente (Ecologia)

Objetivos:

- Identificar os números naturais;
- Representar os números e identificar as ordens crescente e decrescente;
- Efetuar as operações básicas e as operações inversas;
- Solucionar situações-problemas a partir das operações e suas propriedades;
- Resolver expressões numéricas;
- Aplicar conceitos de fração e suas propriedades;

- Efetuar operações, envolvendo adição, subtração, multiplicação, divisão, potencialização e radiciação;
- Converter os números decimais em frações e vice-versa;
- Identificar os diferentes polígonos e suas classificações;
- Conhecer regras práticas de divisibilidade;
- Reconhecer os números primos;
- Conceituar o m.m.c. e o m.d.c. de dois ou mais números, usando a Teoria dos Conjuntos e a decomposição simultânea em fatores primos;
- Compreender e interpretar gráficos;
- Saber que o cuidado com a higiene implica na prevenção de doenças;
- Identificar algumas doenças e os respectivos meios de prevenção;
- Entender que a reciclagem do lixo contribui para a preservação do meio em que se vive;
- Evitar desperdícios dos alimentos e da utilização da água potável;
- Identificar os recursos hídricos, utilização e tratamento;
- Conhecer a qualidade do ar que respiramos e o meio em que vivemos;
- Conhecer o ciclo da vida como parte do desenvolvimento dos seres vivos;
- Entender a cadeia alimentar que envolve os diferentes seres vivos e sua dependência na sobrevivência;
- Compreender as relações entre os seres vivos, suas conseqüências e benefícios.

7º ANO CIÊNCIAS NATURAIS

TEMÁTICAS

Conjunto dos números inteiros: conceitos, representação geométrica;

Números opostos ou simétricos;

Valor absoluto; comparação de números inteiros;

Adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação de números inteiros;

Expressões numéricas e resolução de problemas envolvendo todas as operações.

Conjunto dos números racionais relativos: conceito e representação geométrica;

Adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação de números racionais.

Porcentagem.

Equações do 1º grau:

Expressões contendo letras; valor numérico de uma expressão;

Expressões algébricas; monômios; termos semelhantes; polinômios; resolução de Equação do 1º grau e problemas;

Razões e proporções.

Geometria: ponto, reta, plano.

Figuras geométricas planas e espaciais.

Polígonos (nomes, lados, figuras); perímetros.

Ângulos (medidas do ângulo; uso do transferidor, tipos de ângulos, bissetriz).

Gráficos: de colunas, barras, setores linhas.

Ângulos complementares e suplementares.

Triângulos (Classificação).

Ângulos internos de um triângulo.

Polígonos (nomenclatura e construções).

Sistema de medidas de capacidade.

Sexualidade.

Características dos seres vivos.

Classificação dos seres vivos.

Reinos: Monera; Protista; Fungos; Animais e Vegetais.

Os seres vivos e o ambiente.

ANEXO C – PLANOS DE ESTUDOS DE MATEMÁTICA DA ESCOLA EMCDA PARA O 6º E 7º ANOS

DISCIPLINA: MATEMÁTICA 6º ANO

Objetivo Geral

A matemática caracteriza como uma forma de compreender e atuar no mundo e conhecimento gerado nessa área do saber como fruto da construção humana na sua interação constante com o contexto natural, social e cultural.

Objetivos Específicos

- Calcular utilizando os números naturais, envolvendo as quatro operações (cálculo mental, escrito e aproximado) analisando situações do cotidiano e traduzindo-os para linguagem matemática.
- Reconhecer números racionais em diferentes contextos, identificando-os quando indicam parte, todo, quociente, razão ou operação.
- Compreender a potência como produto de fatores iguais, identificando e fazendo uso das propriedades em situações problema.
- Compreender a radiciação como operação inversa da potenciação.
- Interpretar a resolução de situações problema, compreendendo os diferentes significados das operações no conjunto dos números naturais e racionais.
- Identificar as grandezas de comprimento, massa, capacidade, superfície, volume, utilizando unidades e instrumentos ordenados na resolução-problema.

Conteúdos

- Operação de adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação no conjunto N
- Divisibilidade
- Divisores de um número

- Números primos e compostos
- Fatoração completa
- MMC
- Números fracionários
- Frações equivalentes
- Operação de adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação com números fracionários
- Expressões numéricas com frações
- Problemas com números fracionários
- Perímetro de um polígono
- Medidas de comprimento, superfície, volume, capacidade, massa e de tempo.

Temas Transversais

- Pluralidade cultural
- Trabalho e consumo
- Saúde
- Orientação sexual
- Meio ambiente
- Ética

Metodologia

Proporcionar conhecimento de um contexto com sentido e significado, levando a perceber as diferentes formas para a aprendizagem, trabalhando temas transversais e conteúdos, utilizando procedimentos variados.

Avaliação

O professor deve observar se o aluno articula uma resposta pessoal com base nos conteúdos estudados, que apresente coerência e correspondência com sua possibilidade de aprender.

DISCIPLINA: MATEMÁTICA 7º ANO

Objetivo Geral

A matemática caracterizou-se como uma forma de compreender e atuar no mundo e o conhecimento gerado nessa área do saber como um fruto da construção humana na sua interação constante com o contexto natural, social e cultural.

Objetivos Específicos

- Compreensão do significado das operações e uso adequado das habilidades de cálculos na solução dos problemas do cotidiano.
- Incentivar a curiosidade e o desenvolvimento da consciência crítica, na busca de novos conhecimentos.

Conteúdos

- Conjunto dos números inteiros
- Conjunto dos números racionais
- Equação do 1º grau
- Resoluções de problemas do 1º grau com uma variável
- Sistema de equação do 1º grau
- Razão e proporção
- Regra de três
- Porcentagem

Temas transversais

- Trabalho e consumo
- Ética
- Pluralidade cultural

Metodologia

Proporcionar o conhecimento em um contexto com sentido e significado, levando o aluno a perceber diferentes formas para a aprendizagem, trabalhando temas transversais e conteúdos, utilizando procedimentos variados.

Avaliação

O professor deve observar se o aluno articula uma resposta pessoal com base nos conteúdos estudados que apresente coerência e correspondência com sua possibilidade de aprender, juntamente com avaliação (testes e trabalhos) parciais.

**ANEXO D – PLANOS DE ESTUDOS DE MATEMÁTICA DA ESCOLA EMP PARA
O 6º E 7º ANO**

Área do Conhecimento: **Matemática**

6º ano

Trim	Conteúdos	Objetivos específicos
1º	<ul style="list-style-type: none"> *Conjunto dos números naturais *Operações: adição, subtração, *Multiplicação, divisão, potenciação e radiciação. *Propriedades operatórias *Expressões numéricas *Divisibilidade *Divisores de um número *Números primos e compostos *Decomposição em fatores primos *Múltiplos de um número *Mínimo Múltiplo Comum 	<ul style="list-style-type: none"> *Identificar números naturais. *Representar números na reta – relação de ordem. *Comparar número através dos sinais =, ≤, ≥, <, > *Efetuar as operações básicas e reconhecer as operações inversas. *Interpretar as propriedades operatórias. *Identificar o conceito de potenciação e radiciação. *Solucionar situações problemas. *Resolver expressões. *Identificar a divisibilidade de um número por 2,3,4,5 e 10 *Reconhecer se um número é ou não divisível por outro. *Identificar um número primo. *Reconhecer que um número pode ser decomposto num produto de fatores. *Aplicar o conceito de mínimo múltiplo comum na resolução de problemas.
2º	<ul style="list-style-type: none"> *Conjunto dos números racionais absolutos *Frações equivalentes *Comparação de frações *Operações com frações 	<ul style="list-style-type: none"> *Verificar, que a fração é o resultado de uma divisão. *Ler frações corretamente e distinguir frações próprias, impróprias e aparentes. *Converter fração imprópria para a forma mista e vice-versa. *Reconhecer fração equivalente *Simplificar frações. *Tornar uma fração irredutível *Reconhecer que reduzir frações ao mesmo denominador é o mesmo que torná-las equivalente às primeiras. *Comparar as diversas formas de frações. *Efetuar as operações: adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação. *Resolver expressões numéricas

3º	<ul style="list-style-type: none"> *Números decimais *Operações com decimais *Noções de geometria *Poligonal 	<ul style="list-style-type: none"> *Reconhecer uma fração decimal *Converter número decimal em fração decimal e converter fração decimal em número decimal. *Efetuar operações adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação de números decimais. *Aplicar o conceito de operações com decimais na resolução de problemas. *Reconhecer o processo de medir. *Conhecer as unidades padronizadas. *Identificar dois segmentos consecutivos e representa-los. *Reconhecer poligonal simples ou não simples. *Reconhecer e nomear polígonos
----	--	--

7ºano

Trim	Conteúdos programáticos	Competências cognitivas
1º	<ul style="list-style-type: none"> *Números positivos e negativos *Conjunto dos números inteiros *Operações no conjunto Z: adição subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação *Propriedades operatórias *Expressões *Problemas 	<ul style="list-style-type: none"> *Reconhecer a existência de números negativos. *Identificar o conjunto \mathbb{Z} *Reconhecer as propriedades e aplicá-las *Ampliar o conceito de potenciação e radiciação para o conjunto \mathbb{Z} *Comparar, medir em \mathbb{Z}. *Solucionar situações problemas.
2º	<ul style="list-style-type: none"> *Conjunto dos números racionais *Operações no conjunto \mathbb{Q} *Propriedades em \mathbb{Q} *Expressões *Álgebra 	<ul style="list-style-type: none"> *Identificar o conjunto das frações negativas e positivas *Escrever as frações em números decimais. *Representar frações e números decimais na reta numérica. *Compreender as principais operações *Ampliar o conceito de potenciação e radiciação para o conjunto \mathbb{Q} *Resolver expressões no conjunto \mathbb{Q} *Identificar a equação como uma sentença matemática. *Identificar o elemento desconhecido na igualdade *determinar o conjunto universo de uma equação.

3º	<ul style="list-style-type: none">*Resolução de problemas*Equações fracionárias*Inequações.*Razão*Proporção*Regra de três simples*Porcentagem*Juros simples	<ul style="list-style-type: none">*Traduzir sentenças de linguagem portuguesa em linguagem matemática.*Representar através de equação o enunciado do problema e determinar a sua solução*Ampliar a técnica da resolução da equação do 1º grau para equações fracionárias*Reconhecer os elementos que fazem parte de uma inequação.*Interpretar o conceito de razão*Identificar os termos de uma razão*Identificar a proporção como uma igualdade de duas razões.*Aplicar a propriedade fundamental das proporções, para calcular o termo desconhecido.*Resolver problemas que envolvam duas grandezas variáveis e dependentes.*Ampliar os conhecimentos dos números racionais, para o cálculo da porcentagem.*Resolver problemas de juros simples
----	--	---

ANEXO E – PLANOS DE ESTUDOS DE MATEMÁTICA DA ESCOLA EMAB PARA O 6º E 7º ANOS

6º ANO - 2013
MATEMÁTICA
CARGA HORÁRIA: 5 períodos semanais de 45 min. distribuídos nos 200 dias letivos e 800 horas

EMENTA:

Permitir ao aluno a compreensão da sua realidade, desenvolvendo o seu conhecimento matemático, possibilitando o acesso ao mundo do trabalho e das relações sociais.

OBJETIVO GERAL:

O aluno deverá reconhecer números naturais e relativos desenvolvendo o algoritmo das quatro operações em situações problemas.

METODOLOGIA:

É realizada através de :

- Situações problemas que se inserem a realidade do aluno
- Exercícios de aplicação;
- Jogos matemáticos;
- Trabalhos em grupo e individual;
- Pesquisas
- Exposições
- Material concreto

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Fazer uso da linguagem matemática como ferramenta do cotidiano;
- Selecionar, organizar e relacionar informações de diferentes representações e formas, fazendo uma "ponte" entre a teoria e a prática;
- Analisar, comparar e relacionar os acontecimentos do cotidiano com o conteúdo desenvolvido em sala de aula;
- Realizar atividades articuladas com o cotidiano e outras áreas do conhecimento e da educação.

CONTEÚDOS	TÓPICOS
Sondagem	Revisar as quatro operações e a aplicação em situações problema, expressões numéricas com quatro operações e $()$, $[\]$ e $\{ \}$.
Conjunto dos números naturais	<ul style="list-style-type: none"> • Conjunto dos números naturais; • Representação e Linguagem Matemática; • Resolução de Problemas; • Potenciação, Raiz quadrada e Expressões numéricas envolvendo as seis operações (+, -, x, :, $\sqrt{\quad}$, 2^3) • Números primos e compostos; • MMC
Números Fracionários	<ul style="list-style-type: none"> • Representação e linguagem matemática; • Leitura; • Transformação para números decimais; • Comparação e Simplificação de Frações • Operações com frações de denominadores

	iguais e diferentes; • Expressões numéricas; • Resolução de problemas.
Geometria e Medidas de comprimento	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Reconhecer e identificar as principais figuras planas (triângulos, quadriláteros) ▪ Calcular perímetro e área das figuras planas ▪ Reconhecer e transformar as medidas de comprimento, área e volume, aplicando-as na resolução de problemas.

AVALIACAO:

Será realizada através de testagem, provas, trabalhos individuais e em grupos e atividades relacionadas ao cotidiano, visando a comprovação da aprendizagem dos conteúdos como parte integrante do processo ensino aprendizagem.

CRITERIOS PARA APROVACAO

- O aluno deverá reconhecer e efetuar as operações entre os números naturais e racionais positivos – adição – subtração – multiplicação – divisão – potenciação e raiz quadrada; aplicar esses conhecimentos no desenvolvimento das expressões numéricas e em problemas de aplicação.
- Atingir a média (60) sessenta neste componente curricular

TEMAS TRANSVERSAIS

Os temas transversais serão trabalhados nos 6º e 7º anos durante o ano no planejamento diário de cada disciplina e em projetos elaborados em conjunto pelos professores de diferentes disciplinas.

Serão oferecidas palestras, campanhas e oficinas buscando assim refletir, questionar e problematizar aspectos envolvidos na busca da qualidade de vida e suas conseqüências no meio social, abordando os seguintes temas:

- Ética; Pluralidade cultural; Saúde; Orientação sexual; Trabalho e consumo; Meio Ambiente e Drogas.

7ºano - 2013

MATEMÁTICA

CARGA HORÁRIA: 5 períodos semanais de 45 min. distribuídos nos 200 dias letivos e 800 horas

EMENTA:

Permitir ao aluno a compreensão da sua realidade, desenvolvendo o seu conhecimento matemático, possibilitando o acesso ao mundo do trabalho e das relações sociais. Incentivar a reflexão e a busca constante de novas situações e aplicações do que é construído em sala de aula.

OBJETIVO GERAL

O aluno deverá reconhecer, operar e aplicar os conhecimentos construídos em sala de aula com números inteiros, equações e sistemas lineares de 1º grau na resolução de problemas.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Fazer uso da linguagem matemática como ferramenta do cotidiano;
- Analisar, comparar e relacionar os acontecimentos do cotidiano com o conteúdo desenvolvido em sala de aula;
 - Identificar, reconhecer e operar números racionais;
 - Representar situações escritas em linguagem matemática;
 - Reconhecer, identificar e calcular equação e inequação do 1º grau com uma incógnita
 - Resolver sistema de equação de 1º grau, utilizando qualquer método de resolução;
 - Reconhecer e aplicar os conceitos adquiridos na regra de três simples para cálculo de porcentagens;

METODOLOGIA:

Será realizada através de:

- Situações problemas;
 - Exercícios de aplicação;
 - Jogos matemáticos;
 - Trabalhos em grupo e individual;
 - Pesquisas
 - Exposições
- Aulas expositivas e dialogadas
 Uso da calculadora para a compreensão dos cálculos de porcentagem;
 Uso da informática como ferramenta de aprendizagem.

Conteúdos	Tópicos
Conjuntos dos Números Inteiros	<ul style="list-style-type: none"> • Aplicação em situações cotidianas; • Leitura e Representação na reta numérica; • Módulo e simétrico; • Reconhecer a simbologia matemática aplicada aos Subconjuntos; • Operações; • Expressões numéricas; • Resolução de problemas.
Números Racionais	Aplicação no cotidiano;

ANEXO F – PLANOS DE ESTUDOS DE MATEMÁTICA DA ESCOLA EMG PARA O 6º E 7º ANOS

Área do Conhecimento: Matemática

Objetivo geral: O educando deverá identificar as operações envolvidas em situações problemas; reconhecer a aplicabilidade de algoritmos para as resoluções de problemas propostos. Conduzir os alunos a elaborar conceitos partindo de situações concretas, organizando e estruturando o seu raciocínio lógico.

6º ano

Trim	Conteúdos	Objetivos específicos
1º	<ul style="list-style-type: none"> ● *Conjunto dos números naturais ● *Operações: adição, subtração, <ul style="list-style-type: none"> ● Multiplicação, divisão, potenciação e radiciação. ● *Propriedades operatórias ● *Expressões numéricas ● *Divisibilidade ● *Divisores de um número ● *Números primos e compostos ● *Decomposição em fatores primos ● *Múltiplos de um número ● *Mínimo Múltiplo Comum 	<ul style="list-style-type: none"> ● *Identificar números naturais. ● *Representar números na reta – relação de ordem. ● *Comparar número através dos sinais =, ≤, ≥, <, > ● *Efetuar as operações básicas e reconhecer as operações inversas. ● *Interpretar as propriedades operatórias. ● *Identificar o conceito de potenciação e radiciação. ● *Solucionar situações problemas. ● *Resolver expressões. ● *Identificar a divisibilidade de um número por 2,3,4,5 e 10 ● *Reconhecer se um número é ou não divisível por outro. ● *Identificar um número primo. ● *Reconhecer que um número pode ser decomposto num produto de fatores. ● ● *Aplicar o conceito de mínimo múltiplo comum na resolução de problemas.
2º	<ul style="list-style-type: none"> ● *Conjunto dos números racionais absolutos ● *Frações equivalentes ● *Comparação de frações ● *Operações com frações 	<ul style="list-style-type: none"> ● *Verificar, que a fração é o resultado de uma divisão. ● *Ler frações corretamente e distinguir frações próprias, impróprias e aparentes. ● *Converter fração imprópria para a forma mista e vice-versa. ● *Reconhecer fração equivalente ● *Simplificar frações. ● *Tornar uma fração irredutível ● *Reconhecer que reduzir frações ao mesmo denominador é o mesmo que torná-las equivalente às primeiras. ● *Comparar as diversas formas de frações. ● *Efetuar as operações: adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação.

3º	<ul style="list-style-type: none"> ● *Números decimais ● *Operações com decimais ● *Noções de geometria ● *Poligonal 	<ul style="list-style-type: none"> ● *Reconhecer uma fração decimal ● *Converter número decimal em fração decimal e converter fração decimal em número decimal. ● *Efetuar operações adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação de números decimais. ● *Aplicar o conceito de operações com decimais na resolução de problemas. ● *Reconhecer o processo de medir. ● *Conhecer as unidades padronizadas. ● *Identificar dois segmentos consecutivos e representa-los. ● *Reconhecer poligonal simples ou não simples. ● *Reconhecer e nomear polígonos
----	--	--

7º ano

Trim	Conteúdos programáticos	Competências cognitivas
1º	<ul style="list-style-type: none"> ● *Números positivos e negativos ● *Conjunto dos números inteiros ● *Operações no conjunto Z: adição subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação ● *Propriedades operatórias ● *Expressões ● *Problemas 	<ul style="list-style-type: none"> ● *Reconhecer a existência de números negativos. ● *Identificar o conjunto Z ● *Reconhecer as propriedades e aplicá-las ● *Ampliar o conceito de potenciação e radiciação para o conjunto Z ● *Comparar, medir em Z. ● *Solucionar situações problemas.
2º	<ul style="list-style-type: none"> ● *Conjunto dos números racionais ● *Operações no conjunto Q ● *Propriedades em Q ● *Expressões ● *Álgebra 	<ul style="list-style-type: none"> ● *Identificar o conjunto das frações negativas e positivas ● *Escrever as frações em números decimais. ● *Representar frações e números decimais na reta numérica. ● *Compreender as principais operações ● *Ampliar o conceito de potenciação e radiciação para o conjunto Q ● *Resolver expressões no conjunto Q ● *Identificar a equação como uma sentença matemática. ● *Identificar o elemento desconhecido na igualdade ● *determinar o conjunto universo de uma equação.

3º	<ul style="list-style-type: none">● *Resolução de problemas● *Equações fracionárias● *Inequações.● *Razão● *Proporção● *Regra de três simples● *Porcentagem● *Juros simples	<ul style="list-style-type: none">● *Traduzir sentenças de linguagem portuguesa em linguagem matemática.● *Representar através de equação o enunciado do problema e determinar a sua solução● *Ampliar a técnica da resolução da equação do 1º grau para equações fracionárias● *Reconhecer os elementos que fazem parte de uma inequação● *Interpretar o conceito de razão● *Identificar os termos de uma razão● *Identificar a proporção como uma igualdade de duas razões.● *Aplicar a propriedade fundamental das proporções, para calcular o termo desconhecido.● *Resolver problemas que envolvam duas grandezas variáveis e dependentes.● *Ampliar os conhecimentos dos números racionais, para o cálculo da porcentagem.● *Resolver problemas de juros simples
----	--	--

**ANEXO G – PLANOS DE ESTUDOS DE MATEMÁTICA DA ESCOLA EMIP PARA
O 6º E 7º ANOS**

MATEMÁTICA

QUADRO DE COMPETÊNCIAS/HABILIDADES E CONTEÚDOS

ANO	COMPETÊNCIA/HABILIDADES MÍNIMAS A SEREM TRABALHADAS	CONTEÚDOS RELATIVOS ÀS HABILIDADES	COMPETÊNCIAS/HABILIDADES MÍNIMAS PARA APROVAÇÃO
6º ANO	<p>Efetuar as quatro operações, a potenciação e a radiciação; Resolver expressões numéricas; Estabelecer critérios de divisibilidade e suas utilidades; Reconhecer números primos; Relacionar MMC com o cotidiano e suas aplicações; Ler, identificar e quantificar as diversas formas de fração; Resolver problemas que envolvam raciocínio fracionário; Identificar os números decimais, sua leitura e escrita; Identificar visualmente figuras planas; Relacionar medidas de comprimento com o nosso cotidiano; Resolver problemas com as operações estudadas; Efetuar operações com números fracionários; Efetuar operações com números decimais.</p>	<p>Operações fundamentais (\mathbb{N}, \mathbb{Q}); Expressões numéricas; Critérios de divisibilidade; Números primos; Fatoração de \mathbb{N} MMC Números fracionários; Números decimais; Medidas de comprimento Geometria – figuras planas (perímetro e área).</p>	<p>Resolver situações-problemas que envolvam o significado das operações fundamentais com os números estudados, utilizando estratégias pessoais; resolver expressões numéricas propriamente; Conhecer conceitos básicos relacionados às figuras planas.</p>
7º ANO	<p>Reconhecer e relacionar os números inteiros e racionais no nosso dia-a-dia; Representar geometricamente os números inteiros; Resolver expressões numéricas envolvendo números inteiros e racionais; Utilizar as operações fundamentais envolvendo números inteiros e racionais; Resolver equações e problemas de 1º grau; Observar as relações de regra de três na Física e em situações Matemáticas; Identificar razões centésimas e suas relações com a porcentagem. Interpretar e resolver situações-problema que envolvam \mathbb{Z} e \mathbb{Q}.</p>	<p>Números inteiros; Números racionais; Operações fundamentais (\mathbb{Z}, \mathbb{Q}); Equações e problemas do 1º grau; Regras de três; Porcentagem; Resolução de problemas (\mathbb{Z}, \mathbb{Q}).</p>	<p>Resolver situações-problemas que envolvem números inteiros e racionais nas operações fundamentais, utilizando estratégias pessoais; Resolver situações problema que envolvam equações do primeiro grau; Aplicar corretamente as regras de porcentagem.</p>

**ANEXO H – PLANOS DE ESTUDOS DE MATEMÁTICA DA ESCOLA EMNP PARA
O 6º E 7º ANOS**

6º ano

INDICADORES DE APRENDIZAGEM

Áreas do Conhecimento/ Temas Centrais	CONTEÚDOS	OBJETIVOS ESPECÍFICOS
MATEMÁTICA 6º ano	OBJETIVO GERAL: Renovar o desenvolvimento do espírito crítico e investigativo.	
Conjuntos	-Conjuntos e elementos -Operações com conjuntos	-Reconhecer conjuntos elementos. -Representar conjuntos por diagramas, pela nomeação de seus elementos e pela propriedade que caracteriza seus elementos. -Reconhecer os conjuntos unitários e vazios. -Identificar conjuntos iguais. -Determinar e representar a intersecção de conjuntos em um diagrama. -Determinar e representar a união de conjuntos em um diagrama. -Resolver situações da vida prática.
Conjunto dos Números Naturais	0 1 -	-Estabelecer correspondência biunívoca entre os elementos de dois conjuntos -Comparar e ordenar números naturais. -Representar na reta numérica os números naturais.
Sistema de Numeração Decimal	no 32 T	-Reconhecer a ordem de um algarismo de qualquer número. -Traduzir em palavras números representados por algarismos e vice-versa. -Distinguir o valor relativo e absoluto de um número.
Adição e Subtração Em N		-Associar a adição à união de dois conjuntos. -Identificar os termos e as propriedades da adição. -Identificar os termos da subtração. -Calcular o valor de uma expressão numérica que envolve as operações de adição e subtração.
Multiplicação e Divisão em N		-Associar a multiplicação a uma soma de parcelas iguais. -Identificar as propriedades da multiplicação.

		<ul style="list-style-type: none"> -Efetuar divisão exata e compreender sua relação fundamental. -Identificar os termos divisão. -Calcular o valor de uma expressão numérica que envolve as quatro operações.
Potenciação e Radiciação		<ul style="list-style-type: none"> -Identificar os termos da potenciação e calcular potencias -Aplicar a propriedade potência de mesma base. -Identificar a radiciação com a operação inversa da potenciação. -Calcular a raiz quadrada de quadrados perfeitos.
Resolução de problemas do conjunto N		<ul style="list-style-type: none"> -Aplicar a operação inversa para calcular o elemento desconhecido de uma igualdade. -Resolver situações da vida prática.
Divisibilidade		<ul style="list-style-type: none"> -Determinar o conjunto dos múltiplos e divisores de um número. -Identificar os números divisíveis por 2,3,4,5,6,9,10.
Números Primos e Compostos		<ul style="list-style-type: none"> -Identificar os números primos e compostos. -Representar um n° como produto de fatores primos.
Máximo Divisor Comum Máximo Múltiplo Comum		<ul style="list-style-type: none"> -Determinar o m.d.c. e o m.m.c através de intersecção de conjuntos, decomposição em fatores primos, pelo processo das divisões sucessivas.
Conjunto dos Números Racionais Absolutos		<ul style="list-style-type: none"> -Identificar os termos de uma fração. -Ler e escrever os números que representam frações. -Reconhecer se uma fração é própria, imprópria e aparente. -transformar fração imprópria em número misto e vice-versa, -Identificar frações equivalentes. -Simplificar frações. -Comparar frações. -Resolver operações, expressões e problemas envolvendo números racionais.
Números Decimais		<ul style="list-style-type: none"> -Identificar frações decimais. -Escrever os números racionais sob a forma decimal e vice-versa. -Ler os n° racionais sob forma decimal. -Efetuar operações com n° decimais.
Moeda Corrente		<ul style="list-style-type: none"> -Utilizar os conhecimentos para resolver problemas na vida diária (uso de encartes).

METODOLOGIA	Desenvolver atividades com diferentes fontes de informação, trabalhando com documentos variados, estimulando procedimentos de pesquisa, organização de informações coletadas, promovendo questões sobre o cotidiano e suas relações com contextos mais amplos.
AVALIAÇÃO	<p>CRITÉRIOS: O aluno será avaliado constantemente através de sua participação e envolvimento nas atividades propostas, assim como a tomada de iniciativa, sugestões, criatividade e desempenho nas aulas.</p> <p>INSTRUMENTOS: Trabalhos escritos, provas teóricas, dinâmicas de grupo, fichas de acompanhamento do desenvolvimento individual, fichas de observação e auto-avaliação sobre a participação.</p>
TEMAS TRANSVERSAIS	<p>CIÊNCIA E TECNOLOGIA: Explorar a matemática no computador.</p> <p>SAÚDE: Pesquisar o número de alunos por turma que adquiriram um certo tipo de doença (catapora, etc.) e representar em números fracionários.</p> <p>SEXUALIDADE: Pesquisar e entrevistar pessoas do bairro sobre a prevenção de doenças sexualmente transmissíveis, gravidez, montando quadros comparativos.</p> <p>VIDA FAMILIAR: Entrevistar alunos da escola e verificar a situação familiar.</p> <p>MEIO AMBIENTE: Resolver problemas sobre questões ambientais .</p> <p>TRABALHO E CONSUMO: A importância dos estudos para o trabalho e poder analisar melhor o que compra.(preço, validade, etc)</p> <p>CULTURA/LINGUAGENS: Aproveitar as estatísticas do bairro, da cidade para as resoluções de problemas.</p>

Áreas do Conhecimento/ Temas Centrais	CONTEÚDOS	OBJETIVOS ESPECÍFICOS
MATEMÁTICA 7º ano	OBJETIVO GERAL: Renovar o desenvolvimento do espírito crítico e investigativo.	
-Conjunto dos Números Relativos Inteiros		-Identificar um número inteiro relativo, lendo e escrevendo. -Identificar os subconjuntos de Z -Representar os números inteiros relativos na reta numerada. -Reconhecer números opostos. -Comparar dois números inteiros relativos. -Ordenar números inteiros.
-Adição e Subtração em Z		-Determinar a soma de dois números inteiros. -Representar números inteiros com a notação simplificada. -Determinar a diferença entre dois números inteiros. -Identificar as propriedades da adição em Z . -resolver expressões numéricas.
-Multiplicação e Divisão em Z		-Determinar o produto de dois, três ou mais números inteiros. -Identificar as propriedades da multiplicação em Z . -Determinar o quociente de dois números inteiros, quando possível. -Resolver expressões numéricas.
-Potenciação e Raiz Quadrada em Z		-Determinar potências de base Z e expoente N . -Resolver expressões numéricas. -Resolver e aplicar as propriedades das potências. -Reconhecer a existência da raiz quadrada de números inteiros.
-Conjunto dos Números Racionais Relativos		-Identificar números racionais relativos. -Identificar subconjuntos de Q . -Comparar números racionais relativos.
-Adição, Subtração, Multiplicação e Divisão em Q		-Calcular a soma, diferença, produto e quociente de números racionais relativos. -Resolver expressões numéricas
Potenciação e Raiz Quadrada		-Calcular potências de base Q e de expoente N ou Z . -Calcular a raiz quadrada de um número racional.
Equação do 1º Grau		-Identificar a equação do 1º grau e seus

		<p>termos: primeiro e segundo membros.</p> <ul style="list-style-type: none"> -Verificar se um número dado é ou não raiz de uma equação. -Reconhecer termos semelhantes. -Resolver equações do 1º grau.
Problemas do 1º Grau com uma Variável		<ul style="list-style-type: none"> -Representar simbolicamente sentenças matemáticas. -Resolver problemas utilizando equações do 1º grau.
Inequações do 1º Grau com uma Variável		<ul style="list-style-type: none"> -Identificar inequações do 1º grau -Reconhecer as propriedades das desigualdades. -Resolver inequações do 1º grau.
Produto Cartesiano		<ul style="list-style-type: none"> -Identificar pares ordenados. -Identificar quando dois pares ordenados são iguais ou diferentes. -Determinar o produto cartesiano de dois conjuntos.
Sistemas de Equações de 1º Grau com duas Variáveis		<ul style="list-style-type: none"> -Identificar sistemas do 1º grau. -Resolver sistemas do 1º grau a duas variáveis pelo método da substituição. -Resolver sistemas do 1º grau a duas variáveis pelo método da adição.
Razão		<ul style="list-style-type: none"> -Ler uma razão, identificando antecedente e conseqüente. -Determinar razão entre grandezas.
Proporção		<ul style="list-style-type: none"> -Identificar uma proporção. -Identificar os meios e os extremos de uma proporção. -Calcular o termo desconhecido de uma proporção, utilizando a propriedade fundamental. - Resolver problemas com auxílio de uma proporção.
Regra de Três		<ul style="list-style-type: none"> -Resolver problemas com auxílio de regra de três simples (direta ou inversa). -Resolver problemas com auxílio de regra de três composta.
Porcentagem		<ul style="list-style-type: none"> -Identificar frações centesimais e taxas percentuais. - Calcular porcentagens em situações – problema da vida prática.
Juros simples		<ul style="list-style-type: none"> -Aplicar fórmulas para calcular juros, capital e taxa. -Resolver problemas sobre juro, capital e taxa.
METODOLOGIA	Desenvolver atividades com diferentes fontes de informação, trabalhando com documentos variados, estimulando procedimentos de pesquisa, organização de informações coletadas, promovendo questões sobre o cotidiano e suas relações com contextos mais amplos.	

AVALIAÇÃO	<p>CRITÉRIOS: O aluno será avaliado constantemente através de sua participação e envolvimento nas atividades propostas, assim como a tomada de iniciativa, sugestões, criatividade e desempenho nas aulas.</p> <p>INSTRUMENTOS: Trabalhos escritos, provas teóricas, dinâmicas de grupo, fichas de acompanhamento do desenvolvimento individual, fichas de observação e auto-avaliação sobre a participação.</p>
TEMAS TRANSVERSAIS	<p>CIÊNCIA E TECNOLOGIA: Explorar a matemática no computador.</p> <p>SAÚDE: Pesquisar o número de alunos por turma que adquiriram um certo tipo de doença (catapora, etc.) e representar em números fracionários.</p> <p>SEXUALIDADE: Pesquisar e entrevistar pessoas do bairro sobre a prevenção de doenças sexualmente transmissíveis, gravidez, montando quadros comparativos.</p> <p>VIDA FAMILIAR: Entrevistar alunos da escola e verificar a situação familiar.</p> <p>MEIO AMBIENTE: Resolver problemas sobre questões ambientais.</p> <p>TRABALHO E CONSUMO: A importância dos estudos para o trabalho e poder analisar melhor o que compra.(preço, validade, etc).</p> <p>CULTURA/LINGUAGENS: Aproveitar as estatísticas do bairro, da cidade para as resoluções de problemas.</p>

Anexo I – Planos de Estudos de Matemática da escola EMNPT para o 6º e 7º anos

SEXTO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

CARGA HORÁRIA: 160 HORAS/ AULA

DISCIPLINA: MATEMÁTICA

OBJETIVO GERAL DA DISCIPLINA

Levar o aluno a utilizar os diferentes significados e representações dos números naturais e racionais e das operações para resolver problemas em contexto social ou em outras áreas do conhecimento.

METODOLOGIA

Desenvolver atividades com diferentes fontes de informação trabalhando com documentos variados, estimulando procedimentos de pesquisa, organização de informações coletadas, promovendo questões sobre o cotidiano e suas relações com contextos mais amplos.

AVALIAÇÃO

Deverá ser baseada no desempenho gradativo do aluno, considerando possibilidades e limites, interesse, responsabilidade, curiosidade e participação nas atividades propostas, buscando informações mediante observações, experimentações e registros. Baseada em notas, trabalhos individuais e em grupos, na produção do próprio material didático.

OBJETIVOS	CONTEÚDOS
<ul style="list-style-type: none"> - Ampliar e construir novos significados para números naturais. - Reconhecer e analisar as propriedades que regem cada operação em números naturais. - Traduzir sentenças para linguagem simbólica da matemática. - Assimilar de modo intuitivo os conceitos primitivos de reta, ponto e plano e a seguir formar conceitos de partes da reta e seus extremos. - Partindo de divisões exatas e não – exatas, aprender os conceitos de múltiplos e divisores, dividir e ser divisível. - Assimilar o conceito de fração como par de números na forma a/b, interpretar graficamente, reconhecer e obter frações equivalentes, realizar operações fundamentais em frações. - Assimilar o conceito de decimais. - Reconhecer decimais e operar com os mesmos. - Comparar grandezas e medir comprimentos; <ul style="list-style-type: none"> - Realizar cálculos utilizando conhecimentos referente a população de negros e mestiços. 	<ul style="list-style-type: none"> - Operações no conjunto dos naturais – resolução de problemas e expressões. - Potenciação e radiciação – expressões. - Termo desconhecido (pré-requisito para Equações). - Conceitos primitivos (ponto, reta, plano e ângulos) – tipo de reta. - Geometria plana nas atividades desenvolvidas - Números primos; - Decomposição em fatores primos – MDC. MMC. - Números racionais – representações, transformações, operações e problemas; - Unidade de comprimento – perímetro;

SÉTIMO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

CARGA HORÁRIA: 160 HORAS/AULA

DISCIPLINA: MATEMÁTICA

OBJETIVO GERAL DA DISCIPLINA

Levar o aluno a utilizar os diferentes significados e representações dos números inteiros e racionais relativos e das operações para resolver problemas em contexto social ou em outras áreas do conhecimento.
--

METODOLOGIA

Desenvolver atividades com diferentes fontes de informação trabalhando com documentos variados, estimulando procedimentos de pesquisa, organização de informações coletadas, promovendo questões sobre o cotidiano e suas relações com contextos mais amplos.

AVALIAÇÃO

Deverá ser baseada no desempenho gradativo do aluno, considerando possibilidades e limites, interesse, responsabilidade, curiosidade e participação nas atividades propostas, buscando informações mediante observações, experimentações e registros. Baseada em notas, trabalhos individuais e em grupos, na produção do próprio material didático.
--

OBJETIVO	CONTEÚDO
<p>- Reconhecimento dos números inteiros (\mathbb{Z}) e racionais relativos (\mathbb{Q}) em diferentes contextos e a exploração de situações – problema em que indiquem falta, diferença, orientação (origem) e deslocamento entre dois pontos;</p>	<p>-Conjuntos \mathbb{Z} e \mathbb{Q} (representação, comparação e operações);</p> <p>- Adição, subtração, multiplicação e divisão em \mathbb{Z} e \mathbb{Q};</p>

<ul style="list-style-type: none"> - Realizar as quatro operações com \mathbb{Z} e \mathbb{Q}; - Determinar potencia e raiz quadrada de base \mathbb{Z} e expoente \mathbb{N} e de base \mathbb{Q} e de expoente \mathbb{N} e \mathbb{Z}; - Encontrar o número desconhecido em certas igualdades e operações inversas; - Através de razão, identificar uma proporção e aplicar a propriedade fundamental da proporção. Aplicar a regra de três em problemas com grandezas diretas e inversamente proporcionais; - Identificar porcentagem e resolver problemas; - Identificar e dar nomes aos ângulos; - Realizar cálculos utilizando conhecimentos referente a população de negros e mestiços. - Ler, interpretar e montar gráficos e tabelas a partir de conteúdos trabalhados 	<ul style="list-style-type: none"> - Potenciação e raiz quadrada em \mathbb{Z} e \mathbb{Q}; - Equação de 1º Grau; - Razão e Proporção; Regra de três; - Porcentagem – utilizando temas transversais; - Quantidades e proporções (população, receitas,) - Geometria plana associada nos conteúdos trabalhados - Ângulos - Estatística (gráficos e tabelas)
---	--