UNIVERSIDADE LUTERANA DO BRASIL
PRÓ-REITORIA ACADÊMICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

PAULO CESAR PEREIRA NAPAR

A ANÁLISE MATEMÁTICA NA CONSTITUIÇÃO DE CONHECIMENTOS PARA A ATUAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO: UMA ANÁLISE NA PERSPECTIVA EPISTÊMICA DO ENFOQUE ONTOSSEMIÓTICO

CANOAS

2018

UNIVERSIDADE LUTERANA DO BRASIL
PRÓ-REITORIA ACADÊMICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

PAULO CESAR PEREIRA NAPAR

A ANÁLISE MATEMÁTICA NA CONSTITUIÇÃO DE CONHECIMENTOS PARA A ATUAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO: UMA ANÁLISE NA PERSPECTIVA EPISTÊMICA DO ENFOQUE ONTOSSEMIÓTICO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dra. Carmen Teresa Kaiber

CANOAS

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação - CIP

N195a Napar, Paulo Cesar Pereira

A análise matemática na constituição de conhecimentos para a atuação do professor de matemática no ensino médio : uma análise na perspectiva epistêmica do enfoque ontossemiótico / Paulo Cesar Pereira Napar.-- Canoas, 2018.

177 f.: il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Luterana do Brasil, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Canoas, 2018.

Orientadora: Prof.ª Dra. Carmen Teresa Kaiber

1. Análise matemática. 2. Formação de professores. 3. Ensino de matemática. 4. Enfoque Ontossemiótico. I.Kaiber, Carmen Teresa. II. Título.

CDU: 37:504
CDD: 370.71

Bibliotecária responsável - Vanessa Levati Biff - CRB 10/2454

PAULO CESAR PEREIRA NAPAR

A ANÁLISE MATEMÁTICA NA CONSTITUIÇÃO DE CONHECIMENTOS PARA A ATUAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO: UMA ANÁLISE NA PERSPECTIVA EPISTÊMICA DO ENFOQUE ONTOSSEMIÓTICO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Prof.ª Dra. Maria Elaine dos Santos Soares – Instituto Federal Sul-rio-grandense (IFSul)

Prof. Dr. Rodrigo Dalla Vecchia – Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS)

Prof.ª Dra. Clarissa de Assis Olgin – Universidade Luterana do Brasil (ULBRA)

CANOAS

2018

AGRADECIMENTOS

- Aos meus pais e irmãos, que estiveram me apoiando e ajudando ao longo desta jornada;

- ao Adriél da Cruz e Silva e a Priscila Augusta de Quadros Scott Hood, por todo o carinho, apoio, cuidado, amizade, companheirismo e aprendizado;

- à Claudia Teresinha Ost Frank, pelos conselhos, apoio e carinho;

- à Prof.ª Dra. Carmen Teresa Kaiber, que orientou esta investigação contribuindo para a sua consolidação e para meu aprendizado acadêmico e crescimento pessoal;

- aos Professores da banca examinadora, pelas valiosas contribuições para a qualificação desta investigação;

- aos Professores do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECIM) da ULBRA, por todas as discussões e contribuições para a constituição de meu perfil enquanto pesquisador;

- à Coordenação do PPGECIM da ULBRA, por confiar a mim uma bolsa de estudos para cursar o mestrado, transformando um dos meus sonhos em realidade;

- à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), por destinarem bolsas de estudo ao PPGECIM da ULBRA;

- a todos que, de alguma forma, dedicaram um pouco de seu tempo a palavras de apoio e motivação para que eu pudesse concluir esta investigação.

Muito obrigado!

RESUMO

Este trabalho se constitui em uma pesquisa sobre a Análise Matemática no contexto da Formação de Professores de Matemática. Tem como objetivo investigar articulações entre conhecimentos matemáticos institucionais da Análise Matemática para Licenciatura em Matemática e do Ensino Médio que apresentem potencialidades para alicerçar o conhecimento do professor de Matemática para atuar no Ensino Médio. A investigação, em um contexto mais amplo, relaciona-se às discussões sobre a Análise Matemática e o seu papel enquanto componente curricular nos cursos de Licenciatura em Matemática. O referencial teórico foi estruturado a partir de três eixos: pesquisas sobre a Análise Matemática na Licenciatura; o percurso histórico em que se inserem os cursos de Licenciatura em Matemática, bem como as Diretrizes Curriculares Nacionais para Licenciatura em Matemática; e aspectos que compõem o Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e a Instrução Matemática (EOS), base teórica da investigação. Metodologicamente, a investigação se insere numa perspectiva de natureza qualitativa que incorpora elementos de pesquisa exploratória e explicativa, sob um delineamento de pesquisa bibliográfica e documental. Na delimitação dos materiais utilizados na investigação considerou-se: documentos institucionais que tratam da Formação de Professores de Matemática, documentos institucionais que trazem orientações curriculares para o Ensino Médio, Programas de Ensino do componente de Análise Matemática de cinco Instituições de Ensino Superior de Porto Alegre/RS e Região Metropolitana de Porto Alegre/RS, e referenciais institucionais dos conhecimentos matemáticos da Análise Matemática (livro didático de Ensino Superior) e do Ensino Médio (coleção de livros didáticos de Ensino Médio). A coleta de dados junto aos documentos institucionais, Programas de Ensino e os referentes institucionais do Ensino Médio, ocorreu a partir da aplicação de protocolos de investigação elaborados para esse fim. Já para a coleta de dados do referente institucional da Análise Matemática, utilizou-se como referência a Ferramenta de Análise Didática: Dimensão Epistêmica do EOS. Os resultados da investigação apontam que, no que se refere aos Programas de Ensino analisados, parte desses estão focados essencialmente no conteúdo matemático, não deixando claras as intenções sobre o componente de Análise Matemática na formação de professores de Matemática; já a outra parte, apresenta potenciais indicações sobre como a Análise Matemática tem a contribuir na formação do professor de Matemática, trazendo aspectos sobre uma visão de articulação do conhecimento com a prática docente e da necessidade formativa da reflexão, crítica e autocrítica do futuro professor. Já a análise dos materiais didáticos (livros didáticos do Ensino Médio e Ensino Superior), com base na dimensão epistêmica do EOS, evidenciou que existem articulações e relações que podem ser constituídas e percebidas a partir dos materiais didáticos do Ensino Médio e do Ensino Superior. Nesse contexto, a investigação apontou que há, por parte das instituições, a intenção de dar um tratamento à Análise Matemática no sentido que a mesma possa contribuir para a construção de conhecimentos que venham a alicerçar o conhecimento do professor de Matemática para atuar no Ensino Médio. Embora nem sempre explicitas nos materiais analisados, foi possível perceber a presença de potenciais articulações entre os conhecimentos da Análise e os do Ensino Médio, que podem ser, ainda, aprofundadas e ampliadas, destacando potencialidades para alicerçar o conhecimento do professor de Matemática para a atuação no Ensino Médio. Essa questão aponta para a necessidade de uma mediação didática por parte tanto das instituições formadoras quanto dos professores de Análise, para que, de fato, essas relações se constituam elementos que venham a contribuir para a prática docente nesse nível de ensino. Destaca-se, por fim, com base em investigações sobre a Análise Matemática na Formação de Professores de Matemática e nos próprios dados da investigação, que apesar das diretrizes apontarem para a necessidade da aproximação entre conhecimentos teóricos específicos e os conhecimentos para a prática docente, existe, ainda, um distanciamento entre esses conhecimentos na formação profissional de professores de Matemática.

Palavras-Chave: Análise Matemática para Licenciatura. Formação de Professores de Matemática. Enfoque Ontossemiótico. Ensino Médio.

ABSTRACT

This paper constitutes a research on Mathematical Analysis in the context of Mathematics Teacher Education. It aims at investigating articulations between mathematical and institutional knowledge of Mathematical Analysis for Degree in Mathematics and High School that have the potential to support the knowledge of Mathematics teacher to act in High School. The research, in a broader context, is related to the discussions about Mathematical Analysis and its role as a curricular component in Mathematics Degrees. The theoretical framework was structured around three axes: research on Mathematical Analysis in the Degree; the historical path in which the degree courses in Mathematics are inserted, as well as the National Curricular Guidelines for Degree in Mathematics; and aspects that compose the Ontosemiotic Approach to Mathematical Knowledge and Instruction (OSA), the theoretical basis of research. Methodologically, the investigation is part of a qualitative perspective that incorporates elements of exploratory and explanatory research, under a delineation of bibliographical and documentary research. In the delimitation of the materials used in the research, it was considered: institutional documents dealing with Mathematics Teacher Education, institutional documents that provide curricular guidelines for High School, Teaching Programs of the Mathematical Analysis component of five Institutions of Higher Education in Porto Alegre/RS and Metropolitan Region, and institutional references of mathematical knowledge of Mathematical Analysis (Higher Education textbook) and High School (collection of High School textbooks). The collection of data with institutional documents, Teaching Programs and institutional referents of High School, occurred from the application of research protocols designed for this purpose. As for the data collection of the institutional reference of Mathematical Analysis, Didactic Analysis Tool: Epistemic Dimension was used as reference. The results of the research indicate that, regarding the teaching programs analyzed, some of these are focused essentially on the mathematical content, not making clear the intentions about the component of Mathematical Analysis in the formation of Mathematics teachers; the other part presents potential indications about how Mathematical Analysis has to contribute to the formation of Mathematics teachers, bringing aspects about a vision of articulation of knowledge with teaching practice and the formative need of reflection, criticism and self-criticism of future teachers; on the other hand, the analysis of teaching materials (textbooks of High School and Higher Education), based on the epistemic dimension of OSA, showed that there are articulations and relationships that can be constituted and perceived from the teaching materials of High School and Higher Education. In this context, the investigation pointed out that there is an intention, on the part of the institutions, to give a treatment to the Mathematical Analysis in the sense that it can contribute to the construction of knowledge that will support the knowledge of the Mathematics teachers to act in High School. Although not always explicit in the analyzed materials, it was possible to notice the presence of potential articulations between the knowledge of the Analysis and those of High School, which can be further deepened and expanded, highlighting the potentialities to support the knowledge of Mathematics teachers to act in High school. This question points to the need for a teaching mediation by both training institutions and Analysis teachers, so that, in fact, these relationships constitute elements that contribute to the teaching practice at this level of education. Finally, based on research on Mathematical Analysis in Teacher Education in Mathematics and on the research data itself, it is important to note that, even though the guidelines point to the need to approximate theoretical knowledge and knowledge for teaching practice, there's still a gap between these knowledge in the professional training of Mathematics teachers.

Key-Words: Mathematical Analysis in the context of Mathematics Teacher Education. Teacher Education in Mathematics. Ontosemiotic Approach. High School.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE SIGLAS

BDTD – Banco Digital de Teses e Dissertações
CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CDM – Conhecimentos Didático-Matemáticos
DCN – Diretrizes Curriculares Nacionais
EJA – Educação de Jovens e Adultos
EOS – Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática
FADDE – Ferramenta de Análise Didática: Dimensão Epistêmica
GEPEFOPEM – Grupo de Estudos e Pesquisa sobre a Formação de Professores que Ensinam Matemática
GFP – Grupo de Pesquisa em Processo de Formação e Trabalho Docente dos Professores de Matemática
LDB – Leis de Diretrizes e Bases
LDBEN – Leis de Diretrizes e Bases da Educação Brasileira
MEC – Ministério da Educação
OCNEM – Orientações Curriculares Nacionais do Ensino Médio
PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais
PNLD – Plano Nacional do Livro Didático
PPC – Projeto Político de Curso
PUC-SP – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
SBEM – Sociedade Brasileira de Educação Matemática
Scielo – *Scientific Electronic Library Online*
UEL – Universidade Estadual de Londrina
UFMG – Universidade Federal de Minas Gerais
UFRJ – Universidade Federal do Rio de Janeiro.
UNESP – Universidade Estadual Paulista

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

As primeiras discussões sobre a Análise Matemática na formação inicial de professores surgem com reflexões sobre o rigor matemático e o formalismo contido em componentes curriculares de Análise para os cursos de Licenciatura (REIS, 2001). Essas investigações, focadas na discussão sobre o rigor presente na Análise Matemática, abriram espaço para outros estudos, os quais envolveram: a perspectiva de professores reconhecidos no ensino de Análise Matemática, no que se refere a conceituação de uma matemática rigorosa no tratamento de proposições, definições e teoremas (REIS, 2001); elementos históricos que trazem a necessidade do componente de Análise na formação de professores, com foco em uma discussão em torno do formalismo matemático (BATARCE, 2003); aspectos que culminam em uma possível integração desse componente com a prática profissional do docente da Educação Básica (MOREIRA; CURY; VIANNA, 2005); e a interpretação que professores de Matemática que atuam na Educação Básica e licenciandos em Matemática têm sobre o papel da Análise Matemática em sua formação (BOLOGNEZI, 2006).

As pesquisas mencionadas buscaram investigar a temática com o objetivo de possibilitar um entendimento sobre a necessidade da Análise Matemática em cursos de formação de professores. Essa necessidade decorre pelo fato de que, ainda por volta dos anos 2000, o componente curricular era inserido nos cursos de Licenciatura em caráter eletivo e, além disso, se questionava sobre a forma como esse componente era abordado (REIS, 2001; OTERO-GARCIA, 2011).

Além dos aspectos e investigações levantadas, em um trabalho de síntese, Otero-Garcia, Baroni e Martines (2013) apresentaram duas investigações. A primeira buscou entender como estava sendo tratada a Análise Matemática nas Licenciaturas, apontando sobre os elementos de planos de ensino (objetivo, ementas, indicações bibliográficas, dentre outros) em dois cursos de Licenciatura em Matemática. A segunda se referiu a entrevistas que buscaram entender a visão de professores e coordenadores de curso, da Licenciatura em Matemática, sobre o papel da Análise Matemática na formação de professores de Matemática.

Das conclusões dessas investigações, Otero-Garcia, Baroni e Martines (2013) indicam em suas considerações que, apesar dos grandes avanços percebidos na trajetória do componente de Análise Matemática, como a adoção de livros específicos para seu ensino na Licenciatura, parece que o papel do componente de Análise Matemática na formação de professores de Matemática ainda está relacionado a uma visão de ênfase no conteúdo matemático definido por formalidade. Além disso, os autores apontam que há poucas pesquisas que tenham tido foco em investigar sobre essa temática e que, desse modo, se mostram necessárias mais investigações que contribuam para as discussões sobre a questão.

Os autores consideraram, também, algumas das pesquisas já levantadas sobre a Análise Matemática em cursos de Licenciatura, como Reis (2001), Batarce (2003) e Bolognezi (2006). A partir de uma discussão em torno das pesquisas dos autores destacados, e também de suas próprias conclusões investigativas, Otero-Garcia, Baroni e Martines (2013) apresentaram uma problematização central sobre Análise Matemática na formação de professores de Matemática: qual o papel da Análise Matemática em cursos Licenciatura em Matemática?

Essa problematização, levantada pelos autores ao longo de seus trabalhos, mostra a necessidade de se investigar mais sobre o papel desse componente na formação de professores de Matemática. Isso, em consequência, traz à luz uma parte das motivações para a necessidade da realização do estudo a que se propõe esta pesquisa.

Outra questão que impulsionou a construção desta investigação diz respeito a problemáticas vivenciadas pelo autor deste trabalho, as quais levaram a busca por entendimentos que pudessem contribuir com potenciais significações sobre o papel do componente de Análise na Licenciatura em Matemática. Destacam-se questionamentos ouvidos pelo autor da investigação durante o percurso de sua formação docente inicial, levantadas por acadêmicos de um curso de Licenciatura em Matemática: “onde irei usar a Análise Matemática em minha prática como professor na Educação Básica? Para que preciso aprender Análise Matemática se não irei utilizar essas demonstrações e esse rigor todo na sala de aula? No que esse componente contribui para a minha formação enquanto professor de Matemática do Ensino Básico?”.

Essas discussões levaram ao entendimento de que a Análise Matemática, enquanto componente curricular de um curso de Licenciatura em Matemática, se mostra necessária como área de conhecimento matemático que envolve um nível elevado de habilidades com o tratamento em definições, proposições e teoremas. Porém, tendo um olhar na problematização levantada por Otero-Garcia, Baroni e Martines (2013), bem como nos questionamentos indicados pelos acadêmicos, entende-se que se deva refletir sobre como os conhecimentos que são apresentados a licenciandos, no componente de Análise Matemática, podem contribuir para sua formação profissional.

É com base nesse contexto que se desenvolveu a presente investigação, tendo como pergunta diretriz: quais articulações entre conhecimentos matemáticos institucionais da

Análise Matemática para Licenciatura em Matemática e da Educação Básica apresentam potencialidades para alicerçar o conhecimento do professor de Matemática para atuar na Educação Básica? A partir dessa pergunta, colocou-se como foco da pesquisa investigar as possíveis articulações entre os conhecimentos matemáticos institucionais da Análise Matemática e os conhecimentos matemáticos institucionais do Ensino Médio, tomando, como eixo central, uma discussão sobre as potencialidades para alicerçar o conhecimento do professor de Matemática para atuar nesse nível ensino.

Os conhecimentos institucionais são entendidos, nesta dissertação, na perspectiva do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (EOS) (GODINO; BATANERO; FONT, 2008; 2011). No âmbito do EOS, esses conhecimentos matemáticos institucionais são interpretados como os sistemas de práticas matemáticas que são concebidos e socialmente compartilhados no âmbito de uma instituição. Podem ser, por exemplo, os conhecimentos presentes em livros, planos de ensino e materiais didáticos que são concebidos institucionalmente e utilizados nos processos de estudo da Matemática.

No que se refere à estruturação metodológica, a investigação se insere em uma perspectiva qualitativa, que incorpora elementos de pesquisa exploratória, por envolver a necessidade de se analisar materiais institucionais que possibilitem atender ao objetivo dessa investigação; e explicativa, por trazer a preocupação com a construção de argumentações que justifiquem e expliquem o processo investigativo. Nesse contexto, os dados que envolvem a investigação são tomados a partir de análises produzidas de Programas de Ensino de componentes curriculares de Análise Matemática de cinco cursos de Licenciatura em Matemática de Porto Alegre e Região Metropolitana, documentos oficiais (Diretrizes Curriculares Nacionais, das licenciaturas e do Ensino Médio), livros didáticos do Ensino Médio e um livro de Ensino Superior que aborda a Análise Matemática para Licenciatura.

Teoricamente, a investigação busca respaldo no Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (EOS) (GODINO, 2009, 2011; GODINO; BATANERO, 1994; GODINO; BATANERO; FONT, 2008, 2011), mais especificamente na noção da Idoneidade Didática em sua Dimensão Epistêmica. A utilização dessa concepção teórica se justifica pelo fato da mesma proporcionar ferramentas teóricas que permitem realizar análises de processos de estudo voltados para o ensino e aprendizagem da Matemática, permitindo uma intervenção eficaz na sala de aula (GODINO, 2009), e possibilitando uma forma de pensar sobre o aprimoramento desses processos nos contextos educativos em que se inserem. Além disso, por se tratar de um trabalho voltado para a formação inicial de professores de Matemática, considera-se, ainda, a noção de

Conhecimentos Didático-Matemáticos (CDM) tomada de Godino (2009) e colaboradores (GODINO; PINO-FAN, 2014; PINO-FAN; GODINO, 2015; SOARES, 2016; GODINO, et al., 2017), para abordar as questões referentes ao conhecimento do professor de Matemática para a atuação na Educação Básica.

O texto dissertativo que é apresentado neste trabalho está organizado em sete capítulos. O primeiro, apresenta a justificativa e problematização pessoal que motivaram a realização desta investigação, bem como o contexto investigativo. Os capítulos 2, 3 e 4 são tomados como suporte teórico e contemplam: aspectos da trajetória dos cursos de Licenciatura em Matemática no Brasil, se voltando, por um lado, para aspectos da história e, por outro, para os documentos governamentais que têm regulamentado esses cursos no Brasil; pesquisas que se voltaram a investigar a Análise Matemática nos cursos de formação inicial de professores de Matemática; e noções sobre o marco teórico do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (EOS), o qual é utilizado como base para orientar as análises.

As orientações metodológicas adotadas ao longo desta investigação, bem como os elementos tomados como referência para a realização das análises, são destacadas no capítulo 5. Dali em diante, apresentam-se os elementos de produção e contribuição desta dissertação: no capítulo 6 são conduzidas e apresentadas as análises produzidas e a articulação desses elementos e, no capítulo de considerações finais, tece-se as conclusões acerca do trabalho desenvolvido e as possibilidades de trabalhos futuros relacionados à esta investigação.

1 JUSTIFICATIVA, PROBLEMATIZAÇÃO DO ESTUDO E OBJETIVOS

Apresentam-se, neste capítulo, as motivações e justificativas que conduziram a realização desta investigação, o problema de pesquisa e os objetivos emergentes da mesma. Inicialmente, apresenta-se uma motivação de caráter pessoal para a esta investigação e, em seguida, conduz-se um contexto para a pesquisa, a partir de elementos dos documentos oficiais que normatizam e regularizam os cursos de licenciatura e Licenciatura em Matemática.

1.1 MOTIVAÇÃO PESSOAL E PROBLEMA DE PESQUISA

> [...] ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para sua própria produção ou construção (FREIRE, 1996, p. 47).

A frase citada sintetiza um dos pensamentos que venho[1] construindo desde o início das minhas experiências docentes. Citar essa frase de Paulo Freire, para mim, consiste em valorizar perspectivas fundamentais acerca da significação da aprendizagem em seu âmbito de construção e transformação de cidadãos. É uma ideia que me move, que me direciona.

Na Universidade, ao longo dos anos, tive variados tipos de experiências: participação em congressos, estágio em inclusão e administração escolar pela rede municipal de Canoas/RS, voluntariado, monitoria de Cálculo Diferencial e Integral, iniciação científica, participação em grupo de pesquisa, participação do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID) e estágios obrigatórios. Essas práticas me possibilitaram reflexões sobre meus conhecimentos, ações, metodologias de ensino, pensamento crítico, formação docente e, principalmente, sobre meu papel na sociedade como futuro professor. Dessas experiências, posso destacar os estágios, tanto os obrigatórios quanto o extracurricular, a monitoria e o PIBID como percussores das minhas percepções relacionadas às estratégias de ensino, pois possibilitaram experimentações e vivências reais da atuação de um professor. Já das participações em grupo de pesquisa, posso destacar a minha evolução crítica como pesquisador na área da Educação Matemática. Devido a isso, pude perceber o crescimento que a Licenciatura vinha me proporcionando, especialmente no ano em que estava para concluir o curso.

No ano de minha formatura, em 2015, cursei dois componentes curriculares denominados Análise Matemática I e Análise Matemática II. Esses componentes curriculares

[1] Essa seção é redigida em primeira pessoa do singular por apresentar elementos de caráter pessoal do autor da investigação.

tratavam de apresentar uma Matemática com intuito formal, exigindo que o aluno utilizasse dos vários conhecimentos que obteve ao longo curso e de novos que estavam para ser apresentados durante a disciplina. A professora sempre buscou, quando possível, estabelecer relações dos conteúdos apresentados em aula com possíveis metodologias ou conhecimentos que poderiam ser utilizados no contexto do atual ou futuro ambiente de trabalho do licenciando, algo que, num alto rigor matemático, entendo ser um pouco complexo de se fazer.

Enquanto cursava Análise Matemática I, no primeiro semestre de 2015, ouvia de colegas da disciplina e de professores formados questionamentos sobre o sentido de existir Análise Matemática num curso de formação inicial de professores. As argumentações desses colegas giravam em torno de uma premissa: que provavelmente não utilizariam os conhecimentos provenientes dessa disciplina em sua atuação no Ensino Básico. Alguns questionamentos como: “onde irei usar a Análise Matemática na minha prática como professor na Educação Básica? Para que preciso aprender Análise Matemática se não irei utilizar essas demonstrações e esse rigor todo na sala de aula? No que esse componente contribui para a minha formação enquanto professor de Matemática do Ensino Básico?” eram presentes em suas falas.

Discordava de tal posicionamento dos colegas por sentir que os conhecimentos daquele componente me oportunizavam uma habilidade de refletir o modo como eu vinha conduzindo, por exemplo, as demonstrações, as provas ou mesmo atividades matemáticas com meus alunos do PIBID. Na época, entretanto, eu não sabia explicitar justificativas que pudessem contra argumentar meus colegas ou, menos ainda, para defender o estudo da Análise Matemática numa formação inicial de professores.

Próximo a concluir a disciplina de Análise Matemática I, comecei a perceber algumas diferenças em minhas ações de ensino dentro da sala de aula, principalmente nos estágios obrigatórios de docência no Ensino Médio e em minha atuação no Ensino Fundamental por meio do PIBID. Notava que meus pensamentos, na formulação de atividades, estratégias e execução de atividades matemáticas, estavam se modificando. Passei a entender Matemática com fundamentações e relações matemáticas que, nesse momento, ainda são difíceis de encontrar argumentos para expressar.

Notei que essas percepções se fortificaram, ainda mais, ao cursar o componente curricular de Análise Matemática II. Percebi que meus sentimentos de segurança e domínio sobre o ensino da Matemática foram tornando-se, cada vez mais, consistentes e flexíveis, principalmente nos aspectos que se remetiam a idealizar atividades para educandos com o "pensar matematicamente". Como consequência desses sentimentos, passei a me perguntar: que contribuições a minha formação inicial emergiam desse componente curricular de Análise Matemática?

Ao ingressar no mestrado, levei esse questionamento mais adiante. Iniciei uma busca por materiais e pesquisas que pudessem, de alguma forma, contribuir para o meu próprio entendimento sobre essas mudanças em minha visão matemática e didática como professor. Nessa busca, encontrei investigações, como a de Otero-Garcia, Baroni, Martines (2013) e Bolognezi (2006), que me levaram a refletir mais profundamente sobre a existência desse componente num curso de formação de professores. Essas reflexões foram desde a forma como esse componente é apresentado e estruturado em cursos de Licenciatura, ao modo como são concebidos pelos próprios professores de Matemática.

As reflexões geradas da articulação entre o questionamento, sobre as contribuições da Análise Matemática em minha formação, e as discussões nos trabalhos citados, motivaram-me a investigar sobre os conceitos matemáticos tratados pelo componente e a utilização desses na própria atuação do professor. Essa ideia emergiu pelo fato de se notar, inicialmente, que os trabalhos que tratavam do assunto, não abordaram, por exemplo, os aspectos epistêmicos que envolvem os conhecimentos matemáticos ensinados na Análise Matemática no âmbito de uma Licenciatura. Essa ideia de investigação se fortaleceu, ainda mais, quando iniciei buscas e leituras por referenciais, indicados por minha orientadora do Mestrado, sobre a formação do conhecimento de professores de Matemática. Essas leituras, por fim, me mostraram uma possibilidade de investigar as questões pedagógicas e matemáticas que envolvem a Análise Matemática no contexto da formação docente de professores de Matemática.

As inquietações provenientes do contexto apresentado me motivaram a propor uma investigação que, de algum modo, viesse a contribuir positivamente ao entendimento sobre o papel da Análise Matemática na Licenciatura, evidenciando questões que ainda, no meu entendimento, necessitam ser discutidas no contexto dos cursos de Licenciatura em Matemática. A partir desses argumentos, estabeleceu-se um questionamento central que direcionou essa pesquisa: **quais articulações entre conhecimentos matemáticos institucionais da Análise Matemática para Licenciatura em Matemática e da Educação Básica apresentam potencialidades para alicerçar o conhecimento do professor de Matemática para atuar na Educação Básica?**

Com determinado questionamento, e buscando delimitar e definir que aspectos seriam investigados em torno desse problema, estabeleceram-se os objetivos, geral e específicos, da pesquisa.

Assim, toma-se como **objetivo geral** investigar articulações entre conhecimentos matemáticos institucionais da Análise Matemática para Licenciatura em Matemática e do Ensino Médio que apresentem potencialidades para alicerçar o conhecimento do professor de Matemática para atuar no Ensino Médio.

Com o intuito de atender a esse objetivo geral, se estabeleceram os **objetivos específicos**:

- Investigar os objetos matemáticos institucionais da Análise Matemática, previstos para desenvolvimento em cursos de Licenciatura em Matemática, a partir de uma análise dos componentes curriculares de Análise Matemática de cursos de universidades de Porto Alegre e Região Metropolitana.
- Identificar objetos matemáticos institucionais pertinentes ao Ensino Médio, a partir das Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio.
- Analisar os objetos matemáticos institucionais da Análise Matemática para Licenciatura que, potencialmente, podem ser vinculados com objetos matemáticos do Ensino Médio.
- Investigar e apresentar possíveis articulações que, em potencial, possibilitem emergir Conhecimentos Didático-Matemáticos que permitam ao futuro professor de Matemática vincular a Análise Matemática para Licenciatura ao contexto da atuação docente no Ensino Médio.

Tendo-se definido os objetivos que direcionam essa investigação, apresenta-se na seção a seguir um contexto para o problema de pesquisa a partir dos documentos oficiais e investigações sobre a Análise Matemática no contexto da Formação de Professores de Matemática.

1.2 UM CONTEXTO PARA A PESQUISA

Os cursos de formação inicial de professores possibilitam aos acadêmicos diferentes experimentações e articulações entre os conhecimentos teóricos, didáticos, práticos e específicos. Entende-se que é necessário haver uma mobilidade entre esses conhecimentos, com o objetivo de que os futuros professores possam desenvolver conhecimentos profissionais que envolvem, e que envolverão, as suas práticas docentes.

As Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) para a Formação de Professores da Educação Básica, em nível superior, curso de licenciatura, de graduação plena – parecer nº. 9 de 8 de novembro de 2001 do Conselho Nacional de Educação (CNE) (BRASIL, 2002a) – aponta que as instituições de Ensino Superior, como mantenedoras de cursos que formam professores, precisam ter o entendimento de que a docência deve ser tida como uma ação educativa que envolve desde os aspectos base, como os conhecimentos específicos e didáticos, a aspectos mais globais, como as relações interdisciplinares do currículo para o ensino e aprendizagem, os conhecimentos culturais, éticos, políticos, linguísticos e estéticos. Ainda, de acordo com esse documento, essa ação educativa deve mostrar ao futuro professor a possibilidade de constituir um caráter de emancipação profissional.

O caráter emancipatório é entendido, segundo o referido documento, como as ações que possibilitam ao licenciando estruturar seus conhecimentos e percepções profissionais a partir do diálogo entre diferentes visões de mundo, buscando, por si só, ampliar seu domínio conceitual e de prática. Embora, atualmente, a formação de professores já seja orientada pela resolução nº. 2 de 2015 (BRASIL, 2015a), entende-se que é importante destacar elementos do parecer nº. 9 de 2001 (BRASIL, 2002a), uma vez que os cursos, de certa forma, devido à recente mudança nas orientações dos cursos de licenciatura, mantêm forte vínculo com as orientações estabelecidas em 2001.

O documento da resolução n° 2 de 1º de julho de 2015 (BRASIL, 2015) – que dispõe das Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) para a formação inicial em nível superior (cursos de licenciatura, cursos de formação pedagógica para graduados e cursos de segunda licenciatura) e para a formação continuada – que atualmente orienta o trabalho realizado nos cursos de formação inicial de professores, aponta que as instituições que oferecem cursos de formação inicial de professores devem viabilizar aos seus acadêmicos a compreensão, na construção dos aspectos políticos, culturais e curriculares, da finalidade de seu curso. Essa visão, segundo esse documento, deve possibilitar ao acadêmico o discernimento daquilo que cada componente curricular e área de conhecimentos de sua formação têm a oferecer em sua profissionalização docente.

No caso dos cursos de Licenciatura em Matemática, segundo as Diretrizes Curriculares Nacionais específicas para cursos de Bacharelado e Licenciatura em Matemática (BRASIL, 2002b) – parecer 1.302 de 6 de novembro de 2001 do CNE – faz-se necessário que o curso de graduação em Licenciatura proporcione ao estudante desenvolver habilidades que envolvam aspectos de estudo cultural e matemático, para que possa compreender a matemática na cidadania dos alunos da Educação Básica. Para tanto, é necessário que o aluno de Licenciatura em Matemática compreenda os elementos que englobam os tópicos do conhecimento de sua futura atuação docente: didático, matemático, tecnológico e cultural (BRASIL, 2002a). Esses tópicos incluem a necessidade de que o futuro professor tenha conhecimento daquilo que irá lecionar, planejar e proporcionar em sala de aula para seus educandos. Considera-se, nesse sentido, concordando com as Diretrizes Curriculares Nacionais dos cursos de licenciatura (BRASIL, 2015), que se mostra importante que o licenciando compreenda as diferentes dimensões que envolvem o lado institucional de sua aprendizagem, a fim de se estimular o desenvolvimento de sua autonomia profissional.

A ideia de autonomia é assumida num pressuposto, de acordo com DCN específicas dos cursos de Licenciatura em Matemática (BRASIL, 2002b), de que o futuro docente se habitue a interpretar e relacionar diferentes conceitos e conhecimentos. Que esses cursos visem desenvolver no licenciando as habilidades de pensar por si só, ter juízo crítico em relação à formação e a sua atuação na Educação Básica. Segundo Moreira, Cury e Vianna (2005), a formação docente em Matemática constitui-se de uma gama de experiências e áreas de conhecimento que, em alguns momentos, podem se tornar complexas para que o futuro professor consiga compreender autonomamente ou, ainda, que ele consiga compreender sem que se mostrem as possibilidades desses conhecimentos e experiências na atuação profissional. Além disso, deve-se levar em conta, também, que nem todo percurso do conhecimento deve ser apresentado de forma direta ao licenciado, tendo-se em vista a preservação de elementos que corroborem a um perfil investigativo, conduzindo a autonomia do futuro professor.

A habilidade de autonomia a ser alcançada pelo professor em formação matemática deve proporcionar ao mesmo o desenvolvimento de competências para estabelecer as relações entre conhecimento e prática. Para tanto, é importante, conforme as Diretrizes Curriculares dos Cursos de Licenciatura em Matemática (BRASIL, 2002b), que as áreas de conhecimento matemático abrangidas nos cursos de Licenciatura (Álgebra, Cálculo, Geometria e Análise) devam estar atreladas aos diversos objetos matemáticos e didáticos necessários para a docência na Educação Básica. Essa concepção, de certo modo, pode facilitar uma significação autônoma dos conhecimentos que o professor aprende em sua formação e dos conhecimentos que irá ensinar em sua prática docente (BRASIL, 2002a).

Com base na reflexão, uma questão que se entende pertinente de ser discutida no âmbito dos cursos de formação refere-se a como ficam os entendimentos dos futuros professores sobre componentes curriculares que conduzem um alto rigor matemático, tal como a Análise Matemática, que, por vezes, pode acabar não possibilitando uma relação direta aos conhecimentos da Educação Básica. A Análise Matemática é destacada, pois se entende que pode haver, em alguns momentos, a não contextualização dos conhecimentos de alto nível e rigor matemático com a prática docente de professores de Matemática da Educação Básica. Entretanto, entende-se que isso não seja uma tarefa elementar de ser feita e que requer, do professor de Análise e documentos institucionais, uma visão bastante ampliada dos conceitos matemáticos e de como esses podem se articular e apresentar nos outros níveis de ensino do conhecimento, como o Ensino Básico.

Além do argumento mencionado, entende-se, também, que nem sempre há a possibilidade de uma relação elementar entre os conhecimentos de diferentes níveis de ensino (Superior e Educação Básica) para o licenciando, e que, por vezes, o alto rigor matemático pode não se articular com os conhecimentos matemáticos e pedagógicos necessários para o perfil do egresso do curso de Licenciatura em Matemática que, segundo as DCN específicas, é formar professores de Matemática para atuarem nos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio (BRASIL, 2002b).

Investigações como a de Reis (2001), Moreira, Cury e Vianna (2005), Bolognezi (2006), Otero-Garcia, Baroni e Martines (2013) apontam, em parte, que no caso específico do componente de Análise Matemática há uma dificuldade na interpretação pessoal dos licenciandos, no que diz respeito ao papel desse componente em sua formação enquanto professores da Educação Básica. Segundo os autores, essas dificuldades se mostram presentes devido à estrutura do componente que, muitas vezes, prioriza uma matemática de alto rigor que não é utilizada no ensino da Educação Básica, aproximando o componente, segundo Reis (2001), de ideais e objetivos relacionados aos cursos de Bacharelado em Matemática.

As pesquisas destacadas apontam, também, que não só o licenciando possui essa dificuldade de entender o objetivo formativo do componente, como, igualmente, os próprios professores que já estão em atuação docente na Educação Básica. Já professores que lecionam a disciplina e coordenadores de curso, apesar de indicarem algumas relações do conteúdo matemático que fundamentam o conhecimento do professor para a atuação no Ensino Médio, por exemplo, acabam não conseguindo apresentar um objetivo concreto e consolidado para possibilitar interpretações sobre o papel da Análise Matemática na formação e atuação de professores de Matemática (OTERO-GARCIA; BARONI; MARTINES, 2013).

De certo modo, essas pesquisas indicam que ainda são necessárias investigações que venham a contribuir no entendimento da importância dos componentes curriculares que tratam da área de Análise Matemática nos cursos de formação de professores de Matemática.

No que segue, o próximo capítulo pretende apresentar um panorama histórico sobre como se constituíram as estruturas dos cursos de Licenciatura em Matemática no Brasil ao longo dos anos, buscando elementos para a compreensão sobre a Matemática em cursos de formação de professores de Matemática.

2 PANORAMA DA TRAJETÓRIA DOS CURSOS DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA NO BRASIL

Entende-se que os componentes curriculares e as áreas de conhecimento que constituem os cursos de licenciatura, atualmente, se desenham a partir de um caminhar que se manifesta no conjunto de elementos históricos e diferentes perspectivas sobre a Formação de Professores no Brasil. Pode-se inferir que as áreas de conhecimento pensadas para serem trabalhadas e ensinadas aos alunos dos mais variados cursos de licenciatura, emergem de diferentes debates e discussões sobre a atuação do professor na Educação brasileira.

Considera-se pertinente verificar como se constituíram os cursos de Licenciatura em Matemática, com o objetivo de elencar um "pano de fundo" para elucidar questões referentes a como os cursos de formação inicial de professores de Matemática foram se configurando e se adequando com o passar dos anos. Esse percurso traz reflexões sobre a formação docente, possibilitando buscar um entendimento em torno das competências e habilidades que os cursos de formação devem propiciar ao desenvolvimento dos futuros professores para a atuação profissional. Desse modo, buscou-se encontrar uma base teórica para discutir os aspectos que relacionam os conhecimentos matemáticos específicos aos conhecimentos para a prática do professor de Matemática, trazendo um potencial entrelaçamento sobre as questões que vinculam a Análise Matemática à formação do professor.

Para apresentar esse panorama, tomaram-se como referência as pesquisas de Cury (2001), Linardi (2006), Gomes (2016), Martins-Salandim (2012) e as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) que legislam os cursos de licenciatura no Brasil (BRASIL, 2002a; 2002c; 2015). Ainda, abordam-se as DCN que envolvem especificamente os cursos de formação inicial de professores de Matemática (BRASIL, 2002b), buscando respaldo sobre as áreas do conhecimento matemático que devem ser tratadas nos cursos de Licenciatura em Matemática.

2.1 BREVE TRAJETÓRIA DA HISTÓRIA DA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA NO BRASIL

Segundo Cury (2001), os primeiros cursos de formação inicial de professores surgem no Brasil em 1934, na Universidade de São Paulo (USP), sendo oferecidos pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras. Esses cursos serviram de exemplo para a organização e inclusão posterior de cursos de formação de professores em outras instituições (GOMES, 2016).

Focando nos cursos de formação de professores de Matemática, Gomes (2016) aponta que, de acordo com o Decreto nº. 7069/35 de 6 de abril de 1935, os cursos de formação inicial de professores de Matemática eram chamados de cursos das Ciências Matemáticas. Segundo a autora, tais cursos eram compostos de três anos de conhecimentos específicos, tomando como parâmetro os seguintes componentes curriculares: Geometria (Análise e Projetiva), Análise Matemática, Física Geral e Experimental, Cálculo Vetorial, Mecânica Racional, Geometria e História das Matemáticas. Além desses três anos de formação em conhecimento específico, as Faculdades de Filosofia ofereciam disciplinas didático-pedagógicas que agregavam ao curso mais um ano de formação, habilitando o profissional a atuar no secundário (GOMES, 2016). A configuração desses cursos ficou conhecida como o esquema "3+1": 3 anos de conhecimento especializado e 1 ano de habilitação em conhecimento didático.

Em 1961, após uma série de reformas setoriais, foi instituída a Universidade de Brasília (CURY, 2001). Nessa Universidade surgiram os institutos centrais de formação para atuação no ensino básico, propondo uma nova perspectiva de formação de professores e dando surgimento aos cursos que foram, então, denominados cursos de licenciatura (GOMES, 2016). Apesar disso, o molde do "esquema 3+1" ainda era percebido nos cursos ofertados por esses institutos (LINARDI, 2006).

No caso da Licenciatura em Matemática, segundo Cury (2001), a estrutura do curso consistia numa formação embasada na ideia de três anos de bacharelado em Matemática, e um ano em especialização pedagógica formativa. De acordo com a autora, os primeiros professores das disciplinas matemáticas desses cursos eram, em sua grande maioria, bacharéis em Engenharia, Matemática e Física, pois, considerando o fato da baixa quantia de profissionais específicos para atuarem nas Licenciaturas em Matemática, era necessário o aproveitamento desses outros profissionais para que os cursos pudessem se manter.

Esses profissionais possuíam sólido conhecimento em suas áreas de atuação, com uma grande bagagem de conhecimentos das áreas chamadas "duras". Porém, em geral, não possuíam formação pedagógica específica para diplomar profissionais para a atuação na Educação Básica e, nesse caso, acabavam por valorizar excessivamente os conteúdos matemáticos em prol dos métodos de ensino (CURY, 2001).

A postura de uma valorização do conteúdo matemático se estendeu por um longo tempo e, por sua vez, os licenciados formados nessa época – considerando que a influência sociocultural do professor pode servir de exemplo aos seus alunos – possivelmente mantiveram esse posicionamento ao longo de suas práticas (CURY, 2001), o que, de certo modo, pode-se perceber até os dias de hoje.

Segundo Cury (2001), os docentes que lecionavam as disciplinas de cunho específico do eixo matemático, mesmo que tivessem experiência com o Ensino Básico, não colocavam à mostra preocupações com a formação pedagógica dos acadêmicos, pois, em geral, deixavam a responsabilidade de discutir as questões do processo de ensino e aprendizagem da Matemática para os professores que lecionavam as disciplinas didático-pedagógicas. Porém, com a reforma universitária de 1968, instituída pela Lei nº. 5.540, os cursos de Licenciatura em Matemática passaram a ser mantidos pelos Institutos de Matemática, colocando, de certa forma, maior responsabilidade sobre os docentes das disciplinas específicas, no que se referia à preocupação com a formação para a atuação profissional dos licenciandos da época (CURY, 2001).

Martins-Salandim (2012) destaca que os cursos de Matemática criados no formato de licenciatura, ainda na década de 60, buscavam uma aproximação com os cursos de bacharelados, adotando uma ideia semelhante ao modelo pré-existente estabelecido pela USP (esquema 3+1). Tal pensamento, segundo o autor, indica que não havia uma clara intenção de formar professores de Matemática para atuar no ensino secundário, uma vez que a valoração da formação docente era dada com grande peso sobre a perspectiva da formação específica do conteúdo matemático e deixava de lado a função de tais cursos em formar profissionais com habilidades para ensinar Matemática na Educação Básica.

Segundo Linardi (2006), no decorrer dos anos 60 e início dos anos 70, começou-se a estabelecer quebras nos moldes curriculares das licenciaturas, as quais separavam a formação de professores entre aqueles que iriam lecionar no primário ou ginásio e aqueles que iriam ensinar no grau do colégio. Ainda, segundo a autora, a justificativa inicial dessa proposta, dada pela Indicação s/nº. do Conselho Federal de Educação em 9 de outubro de 1964, foi a falta de professores para atuar nas escolas. Além disso, foram tomadas as primeiras separações por áreas de conhecimento nas licenciaturas: Letras, Estudos Sociais e Ciências; com formação polivalente ao professor do ginásio e formação específica ao professor do secundário (LINARDI, 2006).

O foco da reformulação das licenciaturas, na época, estava em consonância à visão de que, separando a formação dos professores, era possível formar profissionais em menos tempo e com os conhecimentos necessários para a atuação no ginásio ou secundário (LINARDI, 2006). De acordo com Linardi (2006), nesse período houve uma integração do sistema educacional, estabelecendo uma união entre o primário e o ginásio, formando assim uma educação básica composta de: 1º grau no formato de 8 séries (8 anos) e 2º grau no molde de 3 a 4 anos, sendo compulsoriamente profissional. Com esse ideal, as Leis de Diretrizes de Bases de 25 de agosto de 1971 instituíram as chamadas licenciaturas curtas, com duração de 3 anos e que davam foco a formação de professores para atuarem no 1º grau, e licenciaturas plenas, com duração de 4 anos e que davam foco a formação de professores para atuarem no 2º grau (LINARDI, 2006).

Nos anos 80, com o surgimento de investigações sobre o ensino da Matemática, o cenário educacional foi tomado por um contexto de ampliação de discussões que objetivavam externar dúvidas e críticas aos moldes curriculares e formativos dos cursos de Licenciatura em Matemática da época (MARTINS-SALANDIM, 2012). Surgia, nesse mesmo período, um movimento de reformulação dos cursos de formação em licenciatura que:

> [...] se fortaleceu com a instalação do Comitê Nacional Pró-Formação [sic] do Educador, na "I Conferência Brasileira de Educação", em São Paulo, e com o descontentamento geral em relação à 'Proposta Valnir Chagas' (lei 5692/71), que determinou a criação das licenciaturas curtas na reforma anterior (LINARDI, 2006, p. 15).

A discussão emergente dessa movimentação possibilitou uma série de reflexões sobre a prática incorporada nos cursos de licenciatura e, principalmente, sobre as relações entre teoria acadêmica e prática profissional do licenciando (GOMES, 2016). Segundo Pereira (2000), a partir de 1990, foram tomadas iniciativas, em especial por parte das próprias instituições de nível superior, de fóruns permanentes de discussão para a constituição de debates e reflexões frente às problemáticas que envolviam os cursos de licenciatura.

Nessa mesma época, em relação aos cursos de Matemática, surgiram discussões sobre os objetivos formativos dos cursos de licenciatura e bacharelado:

> [...] existe a publicação, por um grupo de professores da Unesp de Rio Claro, de dois artigos – "As Diretrizes para a Licenciatura em Matemática" e "Novas Diretrizes para a Licenciatura em Matemática" (CARRERA DE SOUZA et al., 1991, 1995) – em que, discutem a distinção entre licenciatura e bacharelado, propõem uma caracterização do formando a ser obtida por meio da licenciatura, fornecem diretrizes para integração das formações profissional e acadêmica e caracterizam a Educação Matemática como prática científica de um objeto formal: as falas matemáticas (LINARDI, 2006, p. 16).

Ainda na década de 90, mais exatamente no ano de 1996, depois de anos de tramitação, foi promulgada a Lei de Diretrizes e Bases (LDB) da Educação Básica (BRASIL, 1996). Essas diretrizes passaram a fundamentar o currículo do Ensino Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio, instaurando a necessidade de elementos sociais formativos que envolvessem o trabalho, a relação social entre sujeitos, os valores e os aspectos éticos da formação do cidadão. Nessa questão, as diretrizes levantaram a importância de se repensar na formação do professor e deram direcionamento a documentos importantes que estavam por surgir, tal como as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) nos anos 2000.

Com base no breve delineamento histórico apresentado nesta seção, o quadro da Figura 1 apresenta uma síntese desta trajetória e, no subcapítulo a seguir, expande-se um pouco a discussão sobre o surgimento das Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN), focando, especificamente, nas DCN para cursos de licenciatura e Licenciatura em Matemática (BRASIL, 2002a, 2002b, 2015a).

Figura 1 – Síntese da trajetória histórica dos cursos de licenciatura no Brasil

Período	Descrição
Anos 30	- Primeiros cursos de formação inicial de professores de Matemática. - Conhecimentos específicos dos cursos: Geometria, Análise Matemática, Física, Cálculo, Mecânica, História das Matemáticas. - Conhecimentos didático-pedagógicos dos cursos: habilitação para atuar no secundário da Educação Básica (GOMES, 2016). - Estruturação de cursos na sistemática “3+1” que significa 3 (Bacharelado) + 1 (Especialização pedagógica): 3 anos de conhecimento especializado e 1 ano de conhecimento didático (CURY, 2001).
Anos 30 aos anos 60	- Conjunto de reformas setoriais. - Surgimento dos institutos centrais de formação para atuação no Ensino Básico. - Cursos ainda no modelo do esquema “3+1” (LINARDI, 2006).
Anos 60 aos anos 70	- Idealização dos chamados cursos de Licenciatura. - Objetivo dos cursos no molde licenciatura: formar professores para atuarem na Educação Básica. - Docentes dos cursos de Licenciatura em Matemática: da área de conhecimentos específicos, os chamados profissionais com sólido conhecimento nas áreas duras (físicos, matemáticos, engenheiros, etc.); da área de conhecimento didático, profissionais da didática geral para ensino na Educação Básica. - Formulação das chamadas Licenciaturas Curtas e Licenciaturas Plenas.
Anos 80	- Investigações sobre o ensino da Matemática que possibilitaram reflexões em torno da formação de professores de Matemática para atuar no ensino básico (MARTINS-SALANDIM, 2012). - Críticas as chamadas Licenciaturas Curtas. - Debates iniciais que permitiram a reflexão sobre a prática docente no ensino básico. - Primeiras discussões na Educação Matemática sobre o distanciamento entre teoria e prática vivenciada por licenciandos em Matemática.
Anos 90	- Iniciativas por parte de instituições de nível Superior com a criação de fóruns permanentes de discussão sobre os cursos de formação docente (LINARDI, 2006). - Promulgação das Leis de Diretrizes e Base da Educação Brasileira (LDBEN) (BRASIL, 1996). - Discussões sobre a distinção entre Licenciatura e Bacharelado.
Anos 2000	- Surgimento das Diretrizes Curriculares Nacionais para cursos de Bacharelado e Licenciatura. - Regulamentação dos cursos de Licenciatura e Bacharelado: Projetos Pedagógicos de Curso. - Diretrizes Curriculares Nacionais específicas. - Normatizações sobre a formação de professores para a Educação Básica no Brasil.

Fonte: a pesquisa.

2.2 A FORMAÇÃO INICIAL DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA E AS DIRETRIZES CURRICULARES DOS CURSOS DE MATEMÁTICA

O início dos anos 2000 ficou marcado pelo surgimento das DCN dos cursos de Bacharelado e Licenciatura no Brasil. Essas diretrizes serviram como uma forma de orientar as intuições de Ensino Superior sobre as estruturas curriculares de formação a serem adotadas para a construção do perfil profissional dos acadêmicos dos referidos cursos. Ainda nesse mesmo período, foi publicado o parecer nº. 9 de 2001 (BRASIL, 2002a), dispondo de normatizar, junto das diretrizes para as licenciaturas, a reorganização dos cursos de licenciatura com enfoque à formação de professores para a Educação Básica.

Apesar da imensa lacuna que há entre os documentos oficiais e a realidade concreta (GOMES, 2016), as DCN específicas possibilitaram uma margem para o reconhecimento, normatização, valorização e entendimento das profissões que, em potencial, passavam despercebidas na ordem pragmática dos fatores formativos. Em especial, sobre os cursos de Matemática Bacharelado e Licenciatura, o parecer 1.302 do MEC/CNE de 2001[2] indica diretrizes para a compreensão das diferentes visões acadêmicas que consolidam a formação dos bacharéis e licenciados, bem como os diferentes contextos os quais se inserem os conteúdos matemáticos na dimensão das suas atuações.

Na dimensão da formação de professores, Gomes (2016) menciona importantes contribuições que vieram em conjunto a essas DCN específicas, como: as inovações na formação de professores, em especial, sobre a abertura de um caráter democrático na elaboração dos currículos de graduações; o reconhecimento da docência como uma profissão; a autonomia do percurso da formação curricular docente de licenciaturas e bacharelados, devido a exigência de Projetos Político de Curso (PPC) específicos para diferentes graduações; e a ampliação da dimensão prática da formação, na concepção de que há competências específicas a serem desenvolvidas para a docência.

Em 2002 é publicado o parecer nº. 9, aprovado em 8 de maio de 2001, que dispõe de diretrizes para a formação de professores da Educação Básica. O documento considera os desafios educacionais que foram se mostrando ao longo das décadas anteriores, apontando para a necessidade de uma mobilização para a implementação de políticas educacionais que estivessem orientadas sob pesquisas e estudos que visassem a melhoria da Educação Básica (BRASIL, 2002a).

Essa proposta buscou se constituir a partir de uma harmonia entre: a formação de professores; os princípios da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional/LDBEN; as normas instituídas nas DCN para a educação Infantil, para o Ensino Fundamental, Ensino Médio e suas modalidades (Ensino Técnico, Educação de Jovens e Adultos (EJA), Ensino Profissionalizante, etc.);as recomendações constantes dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) para Educação Básica, instituídos pelo Ministério da Educação (MEC) (BRASIL, 2002a).

[2] A seção seguinte deste capítulo apresentará com maior profundidade esse parecer.

O referido documento destaca, entre as inúmeras dificuldades educacionais, "[...] o preparo inadequado dos professores cuja formação de modo geral, manteve predominantemente um formato tradicional, que não contempla muitas das características consideradas, na atualidade, como inerentes à atividade docente [...]" (BRASIL, 2002a, p. 4), das quais se destacam:

> [...] orientar e mediar o ensino para a aprendizagem dos alunos; comprometer-se com o sucesso da aprendizagem dos alunos; assumir e saber lidar com a diversidade existente entre os alunos; incentivar atividades de enriquecimento cultural; desenvolver práticas investigativas; elaborar e executar projetos para desenvolver conteúdos curriculares; utilizar novas metodologias, estratégias e materiais de apoio; desenvolver hábitos de colaboração e trabalho em equipe (BRASIL, 2002a, p. 4).

Considerando tais problemáticas, o documento encaminha para uma visão de melhoria da qualificação profissional dos professores, cujas políticas formativas devem visar:

> [...] fomentar e fortalecer processos de mudança no interior das instituições formadoras; fortalecer e aprimorar a capacidade acadêmica e profissional dos docentes formadores; atualizar e aperfeiçoar os formatos de preparação e os currículos vivenciados, considerando as mudanças em curso na organização pedagógica e curricular da educação básica; dar relevo à docência como base da formação, relacionando teoria e prática; promover a atualização de recursos bibliográficos e tecnológicos em todas as instituições ou cursos de formação (BRASIL, 2002a, p. 5).

O documento traz à discussão a questão de que as licenciaturas surgem naturalmente na área especifica do bacharelado, como um complemento diplomático formativo para aqueles "já capacitados" em conhecimento específico (BRASIL, 2002a). Nesse sentido, segundo o documento, parece que o profissional em formação de bacharelado ganha valor único e superior nas estruturas universitárias; já a formação daquele que é acadêmico de um curso de licenciatura, acaba sendo vista como um "resíduo inferior" dos cursos de bacharelado (BRASIL, 2002a).

A reflexão em torno dessa visão seria decorrente das antigas Licenciaturas Curtas e da percepção que se possuía sobre a complementação pedagógica, o que, devido as estruturas curriculares adotadas, levava a uma simplificação do domínio do conteúdo e da qualificação profissional do futuro professor (BRASIL, 2002a). Outro aspecto, segundo o documento, se referia à ausência de projetos institucionais que tivessem como foco "[...] os problemas e as especificidades das diferentes etapas e modalidades da Educação Básica, estabelecendo o equilíbrio entre o domínio dos conteúdos curriculares e a sua adequação à situação pedagógica, continuam sendo questões a serem enfrentadas" (BRASIL, 2002a, p. 17).

No mesmo ano em que foi publicado o parecer nº. 9, foi publicado, também, o parecer nº. 28, de 2 de outubro de 2001, responsável por estabelecer a duração e a carga horária dos cursos de Formação de Professores da Educação Básica, em nível superior, curso de licenciatura, de graduação plena (BRASIL, 2002c).

Uma das demandas da formação de professores apontadas pelo parecer nº. 9 se refere às questões do distanciamento entre prática e teoria. É apresentada uma necessidade de perceber a prática enquanto um componente curricular, como uma dimensão do conhecimento teórico que está presente nos cursos de formação e que se mostra necessário na ação das atividades docentes (BRASIL, 2002a). Nessa estrutura, é destinada a obrigatoriedade de, no mínimo, 400 horas como prática em componente curricular, a fim de se estimular reflexões sobre a abordagem do ensino para a prática docente.

O parecer aponta, ainda, que a prática deve ser vista como algo necessário na formação do professor, estruturando-se como um contato da docência para a formação da experiência e da identidade do futuro docente, sendo atividade reflexiva e flexível para dar conta de articular a atividade acadêmica à profissional (BRASIL, 2002c). Assim, o referido documento atribui, ainda, a obrigatoriedade de mais 400 horas para práticas de ensino integradas como um componente curricular supervisionado:

> [...] entendido como o tempo de aprendizagem que, através de um período de permanência, alguém se demora em algum lugar ou ofício para aprender a prática do mesmo e depois poder exercer uma profissão ou ofício. Assim o estágio curricular supervisionado supõe uma relação pedagógica entre alguém que já é um profissional reconhecido em um ambiente institucional de trabalho e um aluno estagiário. Por isso é que este momento se chama estágio curricular supervisionado.
> [...] pode-se dizer que o estágio curricular supervisionado pretende oferecer ao futuro licenciado um conhecimento do real em situação de trabalho, isto é diretamente em unidades escolares dos sistemas de ensino. É também um momento para se verificar e provar (em si e no outro) a realização das competências exigidas na prática profissional e exigíveis dos formandos, especialmente quanto à regência. Mas é também um momento para se acompanhar alguns aspectos da vida escolar que não acontecem de forma igualmente distribuída pelo semestre, concentrando-se mais em alguns aspectos que importa vivenciar (BRASIL, 2002c, p. 10).

O documento indica, também, um mínimo de 2800 horas para os cursos de formação de professores, considerando:

> [...] 2000 horas de trabalho para execução de atividades científico-acadêmicas somadas às 400 horas da prática como componente curricular e às 400 horas de estágio curricular supervisionado são o campo da duração formativa em cujo terreno se plantará a organização do projeto pedagógico planejado para um total mínimo de 2800 horas. Este total não poderá ser realizado em tempo inferior a 3 anos de formação para todos os cursos de licenciatura inclusive o curso normal superior (BRASIL, 2002c, p.13).

Em 2007, um novo parecer sobre a carga horária dos cursos de licenciatura foi emitido. O parecer nº. 9, de 5 de dezembro de 2007, revogava a estrutura horária instituída em 2002, alterando a forma como eram dispostas as 2800 horas dos cursos de licenciatura: pelo menos 300 horas de estágio supervisionado e o restante, 2500 horas, dedicado às demais atividades que envolvem a formação de professores, respeitando o parecer nº. 9 de 2002 (BRASIL, 2007).

Essas modificações e adequações foram de suma importância ao que tange a formação de professores de Matemática no Brasil. Porém, pode-se dizer que a ideia inicial da maior valoração do conteúdo matemático, do que o conhecimento para ensino desse conteúdo (CURY, 2001), ainda pode persistir em algumas realidades de ensino. Entretanto, pensa-se que novas atualizações legais, como no caso da resolução 2 de 1º de julho de 2015 – que dispõe de alterações nas DCN para cursos de licenciatura, pedagogia e pós-graduação –, oportunizem caminhos para reformulação dos valores e visões que se dá à Matemática na formação do profissional que a lecionará na Educação Básica, de modo a possibilitar um novo pensamento sobre o vínculo entre conteúdo matemático, prática e atuação profissional do futuro docente.

A nova reformulação das DCN para licenciaturas indica um conjunto de elementos que devem ser contemplados na formação dos licenciandos, buscando proporcionar um processo educacional que localize as necessidades das demandas sociais, culturais e históricas, transpondo-as dentro de uma sólida formação didática, específica e pedagógica (BRASIL, 2015a).

Pode-se dizer que a resolução nº. 2 de 2015 apresenta uma argumentação mais aprofundada sobre as competências e habilidades que se objetiva que o licenciando desenvolva, comparando-a ao parecer nº. 9 de 2001. Segundo a resolução de 2015, as instituições que formam professores precisaram conduzir os licenciados a um perfil que abranja:

> [...] à integração e interdisciplinaridade curricular, dando significado e relevância aos conhecimentos e vivência da realidade social e cultural, consoantes às exigências da educação básica e da educação superior para o exercício da cidadania e qualificação para o trabalho;
> [...] à construção do conhecimento, valorizando a pesquisa e a extensão como princípios pedagógicos essenciais ao exercício e aprimoramento do profissional do magistério e ao aperfeiçoamento da prática educativa;
> [...] o acesso às fontes nacionais e internacionais de pesquisa, ao material de apoio pedagógico de qualidade, ao tempo de estudo e produção acadêmica-profissional, viabilizando os programas de fomento à pesquisa sobre a educação básica;
> [...] às dinâmicas pedagógicas que contribuam para o exercício profissional e o desenvolvimento do profissional do magistério por meio de visão ampla do processo formativo, seus diferentes ritmos, tempos e espaços, em face das dimensões psicossociais, histórico-culturais, afetivas, relacionais e interativas que permeiam a ação pedagógica, possibilitando as condições para o exercício do pensamento crítico, a resolução de problemas, o trabalho coletivo e interdisciplinar, a criatividade, a inovação, a liderança e a autonomia;
> [...] à elaboração de processos de formação do docente em consonância com as mudanças educacionais e sociais, acompanhando as transformações gnosiológicas e epistemológicas do conhecimento;

> [...] o uso competente das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) para o aprimoramento da prática pedagógica e a ampliação da formação cultural dos (das) professores (as) e estudantes;
> [...] à promoção de espaços para a reflexão crítica sobre as diferentes linguagens e seus processos de construção, disseminação e uso, incorporando-os ao processo pedagógico, com a intenção de possibilitar o desenvolvimento da criticidade e da criatividade;
> [...] à consolidação da educação inclusiva através do respeito às diferenças, reconhecendo e valorizando a diversidade étnico-racial, de gênero, sexual, religiosa, de faixa geracional, entre outras;
> [...] à aprendizagem e ao desenvolvimento de todos (as) os (as) estudantes durante o percurso educacional por meio de currículo e atualização da prática docente que favoreçam a formação e estimulem o aprimoramento pedagógico das instituições (BRASIL, 2015a, p. 8).

Além dos diversos aspectos que discorrem sobre o perfil a ser construído no licenciando, e dos conhecimentos transversais a serem trabalhados na licenciatura, a resolução propõe uma nova estruturação curricular nos cursos de formação de professores. Destaca, então, uma carga horária mínima de 3200 horas, distribuídas em quatros anos de formação (oito semestres), que compreendem:

> [...] 400 (quatrocentas) horas de prática como componente curricular, distribuídas ao longo do processo formativo;
> [...] 400 (quatrocentas) horas dedicadas ao estágio supervisionado, na área de formação e atuação na educação básica, contemplando também outras áreas específicas, se for o caso, conforme o projeto de curso da instituição;
> [...] pelo menos 2.200 (duas mil e duzentas) horas dedicadas às atividades formativas estruturadas pelos núcleos definidos nos incisos I e II do artigo 12 desta Resolução, conforme o projeto de curso da instituição (BRASIL, 2015a, p. 6).

As 200 horas restantes se referem a atividades teóricas-práticas de aprofundamento em áreas específicas, que envolvam o interesse dos estudantes dentro de seu núcleo formativo, contempladas por iniciação científica, iniciação à docência, extensão, monitoria e outras “extensões” que estejam aliadas ao Projeto Pedagógico de Curso (PPC) dos cursos da instituição (BRASIL, 2015a). Define-se, ainda segundo a referida resolução, que os componentes pedagógicos dos cursos de formação de professores não devem ser inferiores a quinta parte da carga horária total de, no mínimo, 640 horas destinadas à formação pedagógica, envolvendo: os fundamentos que baseiam a educação; a formação na área de políticas públicas e gestão da educação; os fundamentos e metodologias que permeiam o ensino; os direitos humanos, das diversidades étnico-racial, de gênero, de sexualidade, de religião, de crença e de faixa geracional; da Língua Brasileira de Sinais (Libras) e da Educação Especial; e dos direitos educacionais de adolescentes e jovens em cumprimento de medidas socioeducativas (BRASIL, 2015a).

De modo geral, as DCN para licenciaturas de 2002 até as DCN para licenciaturas de 2015 tiveram mudanças que se referem a uma ampliação da perspectiva da formação do licenciando e da construção significativa de seu perfil, além do aumento da carga horária dos cursos e da especificação mais aprofundada de uma multiculturalidade de conhecimentos para a formação docente. Pode-se destacar, ainda, que a parte diversificada do currículo (200 horas), àquela que se refere a permitir o licenciando escolher e tomar decisões em parte de sua formação (BRASIL, 2015a), parece estar mais fortificada na versão das DCN para licenciaturas de 2015, pois, agora, é necessário que haja, por parte das instituições de Ensino Superior, o compromisso de articular um projeto pedagógico que contemple essa parte formativa individual do aluno de licenciatura. Já as questões como a obrigatoriedade da prática de ensino enquanto componente curricular, da prática de estágio supervisionado, de conhecimentos específicos e pedagógicos, parecem se manter numa mesma perspectiva. O quadro da Figura 2, em síntese, apresenta as percepções mencionadas.

Figura 2 – Síntese das modificações das DCN desde 2001

Descritor	Diretrizes Curriculares Nacionais para licenciatura até 2015	Diretrizes Curriculares Nacionais para licenciatura depois de 2015
Motivações para a reforma	Estabelecer um cenário educacional que, por meio de pesquisas, mobilização social e mobilização por políticas públicas, visa articular uma formação de professores cada vez mais próxima da realidade escolar, objetivando melhorar o preparo e a formação de professores para a Educação Básica.	Caminhar no desenvolvimento de um profissional capaz de perceber um ambiente escolar que promova o uso das tecnologias, dos diferentes conhecimentos das ciências e pesquisas, das multiculturalidades relacionadas as questões de valores e dos direitos humanos.
Do total de carga horária	2800 horas	3200 horas
Da estruturação da carga horária total dos cursos de licenciatura	Ano 2002	Ano 2015
	1. 400 horas prática enquanto componente curricular; 2. 400 horas como estágio supervisionado curricular; 3. 200 horas como currículo diversificado; 4. 1800 horas como componentes formativos pedagógicos e específicos de conhecimento.	1. 400 horas prática enquanto componente curricular; 2. 400 horas como estágio supervisionado curricular; 3. 200 horas como currículo diversificado; 4. 2000 horas como componentes formativos pedagógicos e específicos de conhecimento.
	Em 2007	
	1. Estágio supervisionado é reduzido para 300 horas; 2. as demais, 2500 horas, são destinadas as atividades acadêmicas e profissionais pertinentes.	
Prática enquanto componente curricular e estágio supervisionado	Obrigatório: concepção da redução do distanciamento entre prática e teoria para a profissionalização.	Obrigatório: concepção da redução do distanciamento entre prática e teoria para o ensino e aprendizagem.
Parte diversificada do Currículo	Obrigatório: monitorias, congressos, atividades vinculadas à pesquisa e atividades diversas.	Obrigatório: monitorias, congressos, atividades vinculadas à pesquisa e atividades diversas vinculadas aos projetos institucionais das instituições de Nível Superior.
Temáticas dos conhecimentos transversais à	Infere-se sobre tecnologias, valores pautados na LDBEN,	Infere-se sobre tecnologias, valores pautados na LDBEN, conhecimentos

formação do professor	conhecimentos específicos e pedagógicos.	específicos e pedagógicos, ampliando sobre a necessidade da constituição de uma sociedade mais igualitária nos aspectos da sexualidade, gênero e religião, entendimento da educação inclusiva.
Tempo instituído para implementação	Três anos a contar do ano de 2002 (BRASIL, 2002c); dois anos a contar do ano de 2007 (BRASIL, 2007).	Dois anos a contar do ano de 2015; prorrogado por mais 1 ano a contar de 2017 (BRASIL, 2017).

Fonte: Brasil (2002a, 2002c, 2007, 2015a, 2017)

Ao longo dessa reflexão, foi possível perceber que ocorre uma tentativa de ampliar e relacionar, cada vez mais, a formação de professores com a atuação e a prática docente na Educação Básica. Se por um lado destaca-se na história, inicialmente, “[...] a excessiva valorização dos conteúdos matemáticos em seus cursos de origem, aliada, em geral, a uma concepção absolutista” (CURY, 2001, p.14), atualmente pode-se dizer que há uma concepção que possibilita as instituições de Ensino Superior, e os professores que lecionam nas mesmas, pensarem sobre como os atributos da docência devem ser desenvolvidos na licenciatura ou pelos licenciandos, mesmo que, segundo Gomes (2016), pareça haver um distanciamento entre o que está contido nos documentos oficiais e a efetividade desses na prática.

Levando a discussão para os cursos de formação de professores de Matemática, as DCN específicas dos cursos de Licenciatura em Matemática (BRASIL, 2002b) destacam que os profissionais que exercem à docência têm como orientação instigar seus alunos a desenvolverem competências e habilidades para atuarem e refletirem no campo político, crítico, cultural e profissional, para que sejam sujeitos conhecedores das multidimensionalidades que envolvem e envolverão sua participação na sociedade. Para tanto, é preciso que o professor tenha conhecimentos e condições para construir e indagar o campo multifacetado que se constrói na contemporaneidade, bem como habilidades para promover a construção e a produção de um horizonte educacional que vise a estruturação pessoal e social de seus alunos. Além disso, é necessário que o docente compreenda os aspectos que envolvem sua profissão e formação, para que possa desempenhar com efetividade as suas atividades como educador. Nesse sentido, é necessário que se pense num currículo que proporcione a ele conhecimentos aliados ao cotidiano e a formação profissional do docente.

Essa formação profissional incorpora diferentes aspectos pedagógicos e curriculares, gerais e específicos, que buscam construir, no futuro docente, uma gama de saberes pertinentes as suas futuras ou atuais experiências profissionais. Além disso, a formação de professores deve, também, envolver outros aspectos de caráter cultural e social que levem o docente em formação a construir uma concepção de mundo e docência, as quais devem visar pela plena formação dos sujeitos que ele formará ao longo da Educação Básica (BRASIL, 2015a).

Ao se tomar as Leis de Diretrizes e Bases (LDB) (BRASIL, 1996) como referência, pode-se destacar orientações, mesmo que indiretamente, de alguns dos deveres que a formação de professores, ao se mencionar sobre o caráter pedagógico geral, cultural e social, busca priorizar. Mostra-se, por exemplo, importante que os cursos de formação de professores, no conjunto de suas atribuições gerais, ofertem ao futuro docente possibilidades de entender, no âmbito de sua atuação, as questões que envolvem a construção da cidadania do aluno na Educação Básica. De modo geral, essas questões envolvem: o desenvolvimento da capacidade de aprender – tendo por meio básico a leitura, a escrita e o cálculo – e executar o aprendizado no âmbito de seu cotidiano; a consolidação dos conhecimentos adquiridos, de modo que se promova a progressão continua dos estudos; a preparação para o trabalho e para a construção da cidadania, objetivando, principalmente, o desenvolvimento da autonomia do sujeito como ser pensante; a compreensão das questões sociais, políticas, tecnológicas, culturais e de valores em que se fundamenta a sociedade; a tonificação dos vínculos familiares e dos laços sociais, destacando a importância dos aspectos da tolerância em que se forma a vida social (BRASIL, 1996).

Com tal perspectiva, assume-se a necessidade de que os cursos de licenciatura oportunizem a construção de conhecimentos vinculados diretamente à ação docente: se não há formação docente que coloque em pauta as discussões que envolvem a formação do aluno que os futuros professores formarão, de fato, torna-se complexo atingir o campo que ideias da cidadania e criticidade que a referida lei apresenta.

Em relação às questões de caráter pedagógico e curricular específicas da formação do professor, voltando-se para a formação do professor de Matemática, o parecer 1.302 do MEC/CNE de 2001, que dispõe das Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática Bacharelado e Licenciatura (BRASIL, 2002b), apresenta uma orientação para os cursos de formação de professores de Matemática.

No que se refere aos aspectos profissionais e pedagógicos específicos, o documento indica que o perfil construído pelo egresso, ao longo do curso de Licenciatura em Matemática, deve consolidar a:

> [...] visão de seu papel social de educador e capacidade de se inserir em diversas realidades com sensibilidade para interpretar as ações dos educandos;
> [...] visão da contribuição que a aprendizagem da Matemática pode oferecer à formação dos indivíduos para o exercício de sua cidadania;
> [...] visão de que o conhecimento matemático pode e deve ser acessível a todos, e consciência de seu papel na superação dos preconceitos, traduzidos pela angústia,

> inércia ou rejeição, que muitas vezes ainda estão presentes no ensino-aprendizagem da disciplina (BRASIL, 2002b, p. 3).

Para as questões curriculares específicas, o referido documento indica que as estruturas curriculares dos cursos de Licenciatura em Matemática devem partir de dois princípios: dos conhecimentos representativos prévios que os licenciandos possuem acerca dos conceitos matemáticos que devem ser desenvolvidos na sua formação; e da construção de uma ideia global de conteúdos matemáticos que sejam significativos para o aluno da licenciatura na sua atuação. Além disso, menciona-se, também, que as estruturas desses cursos devem, ao menos, abranger as seguintes áreas do conhecimento matemático: Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra Linear, Fundamentos de Análise, Fundamentos de Álgebra, Fundamentos de Geometria e Geometria Analítica. Ainda, os cursos de Licenciatura em Matemática têm de trabalhar questões que envolvam as problematizações e aplicações das teorizações matemáticas, dos conteúdos da Ciência da Educação, da História e Filosofia das Ciências e da Matemática e, principalmente, dos conteúdos que envolvem as áreas da Geometria, Álgebra e Análise na Educação Básica.

Direcionando o olhar para os aspectos que o documento coloca como preceitos mínimos que os cursos de Licenciatura em Matemática devem oportunizar, pode-se interpretar um conjunto de ideias e ideais que buscam articular os conhecimentos matemáticos da formação do licenciando diretamente com seu futuro ou atual campo profissional. Entende-se, ainda, que essa relação deve não só estar relacionada aos conteúdos matemáticos trabalhados no contexto da Educação Básica e da licenciatura, mas também deve estar ligada aos significados da contextualização do conhecimento matemático. Se por um lado, tal como na Educação Básica, o campo de contextualização do conhecimento é tido como as aplicações dos conceitos matemáticos no cotidiano e na construção da criticidade e cidadania dos alunos, por outro, esse campo de contextualização dos conhecimentos matemáticos também deve ser tomado na dimensão da formação de professores. Ou seja, em um cenário da utilização desses conhecimentos para o exercício profissional do licenciando no âmbito da docência nos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio.

Essa interpretação leva a concepção de que os conhecimentos das áreas de formação específica dos cursos de Formação de Professores devem estar transversalmente contextualizados a prática docente. Isso inclui, no caso das Licenciaturas em Matemática, tanto o conhecimento matemático na perspectiva do ensino quanto o conhecimento matemático na perspectiva do científico, incorporando, assim, a área de Análise Matemática.

Por fim, após a reflexão histórica sobre como foram estruturados os cursos de licenciatura, a partir de perspectivas de pesquisas e das DCN, pode-se indicar a importância que as leis e resoluções tiveram em fomentar um ambiente para pensar sobre a formação de professores e sobre o que lhes é ensinado, nas perspectivas do conhecimento, do pedagógico e da experiência. Nesse sentido, e tomando um direcionamento na perspectiva da formação de professores, o próximo capítulo irá articular sobre investigações que possibilitem olhar, agora, especialmente para o contexto da Análise Matemática na formação de professores de Matemática.

3 O PENSAR SOBRE A ANÁLISE MATEMÁTICA PARA LICENCIATURA

Busca-se, neste capítulo, apresentar uma revisão de literatura sobre investigações que envolveram a Análise Matemática em cursos de Licenciatura, tendo foco ou parte dele na Formação de Professores de Matemática. A busca tomou como período do ano de 2000 ao ano de 2016, e foi realizada no Banco de Teses e Dissertações e Portal de Periódicos da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), *Scientific Electronic Library Online* (Scielo), Google Acadêmico, Banco Digital de Teses e Dissertações (BDTD), e nos repositórios da Universidade Estadual Paulista (UNESP), Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP) e Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG). Além disso, tomou-se como referência a procura por investigações em andamento dos grupos de trabalho: Educação Matemática no Nível Superior e a Formação de Professores que Ensinam Matemática da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM); Grupo de Pesquisa em Processo de Formação e Trabalho Docente dos Professores de Matemática (GFP) da UNESP e o Grupo de Estudos e Pesquisa sobre a Formação de Professores que Ensinam Matemática (GEPEFOPEM) da Universidade Estadual de Londrina (UEL).

Nessa busca, encontraram-se 13 trabalhos vinculados a área da Análise Matemática, sendo uma tese, oito dissertações e quatro artigos. Desses 13 trabalhos, somente seis possuíam uma temática que relacionava Análise Matemática no contexto de cursos de Licenciatura em Matemática: Reis (2001), Batarce (2003), Moreira, Cury e Vianna (2005), Bolognezi (2006), Otero-Garcia (2011), Martines (2012) e Otero-Garcia, Baroni e Martines (2013). Esses trabalhos buscaram investigar aspectos históricos, matemáticos e didáticos sobre o componente curricular de Análise Matemática na Educação de Nível Superior, abordando, também, a Formação de Professores de Matemática.

Considerado os trabalhos selecionados, apresenta-se, no quadro da Figura 3, uma síntese sobre a temática dessas investigações e, logo em seguida, uma discussão sobre as mesmas.

Figura 3 – Pesquisas utilizadas no capítulo sobre a Análise Matemática para Licenciatura

Pesquisadores	Temática Investigativa	Tipo
Reis (2001)	Tensão entre intuição e rigor dos componentes de Cálculo e Análise Matemática.	Tese
Batarce (2003)	Formalismo matemático na Análise Matemática de cursos de licenciatura.	Dissertação
Moreira, Cury e Vianna (2005)	A Análise Matemática enquanto componente curricular da licenciatura: uma perspectiva de professores que lecionam Análise.	Artigo
Bolognezi (2006)	A Análise Matemática na perspectiva de licenciandos, professores que lecionam Análise e professores do Ensino Médio.	Dissertação

Otero-Garcia, Baroni e Martines (2013)	Uma trajetória da Análise Matemática em dois cursos de licenciatura (OTERO-GARCIA, 2011); a Análise Matemática na perspectiva de professores que lecionam Análise (MARTINES, 2012).	Artigo oriundo de dissertações

Fonte: a pesquisa.

A pesquisa de Reis (2001) procurou entender como se comportava a tensão entre intuição e rigor existente no ensino dos componentes de Cálculo e Análise Matemática, analisando as questões epistemológicas e históricas do conhecimento disseminado em livros didáticos que envolvem os conteúdos matemáticos tratados nesses componentes. Além disso, levou em conta apontamentos obtidos por meio de entrevistas semiestruturadas realizadas com professores pesquisadores que, segundo o autor, se destacam na área de Análise Matemática e Cálculo, tais como: “Ávila, Djairo e Elon” (REIS, 2001, p.87).

No contexto de sua investigação, e dando foco à discussão relacionada à formação inicial do professor de Matemática, o autor busca discorrer sobre as implicações da dicotômica relação entre rigor e intuição na formação do professor de Matemática. Esse autor entende que, muitas vezes, o licenciando em Matemática não compreende como importante o componente no conjunto de sua formação, devido ao excesso de rigor matemático que, de certo modo, não prioriza a instrução docente para a atuação do professor nos níveis de ensino da Educação Básica. O autor entende, ainda, que os professores universitários que atuam em cursos de licenciatura – devido à sua formação ligada, diversas vezes, a cursos de Matemática Pura ou Aplicada – enfatizam uma reprodução de conhecimento técnico-formal nesses componentes o que, em potencial, pode levar a priorização de noções matemáticas procedimentais que acabam não estabelecendo vínculo direto para o futuro ambiente de atuação do licenciando.

Segundo o autor, a Análise Matemática é indispensável na formação docente, pois é nela que se estabelecem ideias vinculadas a demonstrações formais do pensamento matemático, principalmente no que diz respeito ao Cálculo. Porém, ainda segundo esse autor, se mostra necessário que haja um rompimento nos ideais do formalismo matemático, para que se pense em construir, ao longo da formação docente, profissionais capazes de atuar com flexibilidade e multiplicidade no âmbito do conhecimento matemático, pedagógico e curricular. Reis (2001) destaca que a ideia da flexibilidade e multiplicidade do conhecimento do professor deve ser compreendida como a habilidade de conhecimento que o mesmo adquire para modificar o significado associado aos conceitos matemáticos traçados para o ensino. É necessário, na perspectiva do autor, que o professor tenha condições e habilidades para ajudar o aluno a desenvolver a compreensão das ideias matemáticas.

No que se refere à ideia da quebra do chamado “formalismo matemático” que o autor indica, entende-se que para tornar flexível o conhecimento do professor em formação, na perspectiva da Análise Matemática, é necessário abordar uma metodologia de ensino que coloque o conhecimento dessa área da Matemática no contexto da prática do licenciando enquanto futuro professor da Educação Básica. Nesse sentido, defende-se, concordando com Reis (2001), que se deva manter a essência do “rigor” matemático atrelado a essa componente curricular. Porém, considerando a formação de professores de Matemática, é necessário mostrar as articulações que levam esse formalismo a alicerçar o conhecimento do licenciando para seu futuro ambiente de atuação: a sala de aula da Educação Básica.

Outra questão elencada na investigação de Reis (2001) indica que a Análise Matemática pressupõe uma forma de habituar o licenciando com o método de dedução, cuja conclusão parte de hipóteses matemáticas que são intencionalmente exploradas e demonstradas. O autor destaca a valoração que deve ser atribuída ao conhecimento Matemático apresentado, o qual não deve estar ligado, por exemplo, somente a procedimentos matemáticos ou métodos de demonstração rígidos, mas, também, as questões que envolvem as relações de seu ensino na prática de sala de aula do professor da Educação Básica. Essa ideia se direciona para um questionamento: que tipo de Análise Matemática deve ser ensinada para o licenciando, considerando uma perspectiva que vise uma formação de professores de Matemática?

Para tal questionamento, o autor assume, a partir dos dados obtidos das entrevistas realizadas, que há a necessidade de uma apresentação “diferenciada” da Análise que é assumida em cursos de Bacharelado em Matemática. Para Licenciatura em Matemática, o autor aponta para a importância de se considerar os objetivos profissionais e formativos necessários para que o futuro professor atue na Educação Básica. Entende-se, nesse sentido, concordando com o autor, que essa “diferenciação” para Licenciatura não se encontra numa visão de Análise Matemática de condição inferior em relação ao Bacharelado, mas sim ao olhar de uma construção de articulações que contextualizem os conhecimentos nela apresentados com a prática docente e com a formação profissional do futuro professor.

Batarce (2003), num ponto de vista da História da Matemática, aponta que o formalismo matemático existente no componente de Análise Matemática, para um curso de Licenciatura em Matemática, deixa, em alguns momentos, de fazer sentido devido a não utilização do âmbito histórico para a formação de concepções necessárias para que o licenciando entenda os significados da matemática formal que lhe é apresentada. Nesse sentido, o autor defende a importância da História da Matemática num contexto em que é necessário que o licenciando compreenda os elementos matemáticos e educacionais que basearão sua futura atuação como docente, principalmente no que diz respeito à Análise Matemática. O autor afirma que o eixo de sustentação do componente, Conjunto dos Números Reais, é de extrema importância para a formação do docente, considerando que o estudo desse conjunto é formalizado e ensinado ao longo de todo o Ensino Fundamental e Ensino Médio.

Segundo o autor, no âmbito da Educação Matemática, o problema central no ensino de Matemática baseado em formalismos estaria em limitar-se exclusiva e excessivamente aos significados formais tidos como os únicos possíveis ou certos para a Matemática. Como consequência, essa "limitação" entra em confronto com as questões que envolvem as práticas de ensino da Matemática. Esse tipo de abordagem desconsidera qualquer outra concepção Matemática que não se encontre nas relações rígidas entre os conhecimentos matemáticos (BATARCE, 2003). Apesar disso, para Batarce (2003), se a Educação Matemática está sendo concebida numa perspectiva formalista, então, "[...] o que ela deve sustentar é que esta é uma possibilidade entre outras e que, caso seja a escolhida, seus fundamentos e as justificativas de seu uso devem ser explicitadas ao máximo possível" (BATARCE, 2003, p. 19).

De acordo com o autor, em termos da História da Matemática, é notável que o ensino de Matemática pode acabar sendo baseado em conhecimentos tidos como verdades primordiais da Matemática que se resumem a "fatos" (BATARCE, 2003). Os "fatos" matemáticos, no âmbito da história, acabam construindo um laço lógico de imposição no ensino. Se colocam em um nível de pensamento tido como "verdadeiro e único" (BATARCE, 2003), podendo levar a quem os ensina interpretar uma dualidade de métodos de ensino: uma que assume a história como base intervencionista e necessária para a construção do conhecimento e do pensamento matemático, trazendo riqueza ao ensino desses conhecimentos matemáticos (BATARCE, 2003); outra que, por assumir os fatos matemáticos como verdade única, pode acabar obstruindo a construção do conhecimento e assumindo-o como algo já pronto e estável.

Ao tratar da construção de conhecimentos educacionais na Análise Matemática, os "fatos" são constituídos como notórios articuladores em um ensino de nível e rigor de formalização e demonstração competente da Matemática. Por fim, nesse sentido, o autor toma como importante, no ponto de vista do conteúdo matemático e da sua construção epistemológica, uma interpretação de significados que podem levar o futuro professor a desenvolver um pensamento pluralizado sobre o ensino dos mesmos.

Entende-se, com base na fala do autor, que ao se tomar a percepção da Análise Matemática enquanto conhecimento formal e a rigor, em um curso de Licenciatura, deve-se ter em vista um ambiente de ensino de sala de aula que retome a crítica, reflexão e pensamento sobre a Matemática, para que se possibilitem momentos de expressão aos licenciandos, os quais venham a potencializar seu entendimento sobre o conhecimento matemático. Nesse contexto, toma-se o ideário de que é necessário que o futuro professor tenha domínio dos conhecimentos matemáticos que estão dispostos na matemática de nível superior, os quais podem estar aliados à prática docente do futuro professor (GODINO, 2009). Além disso, considerando a ideia da matemática baseada em “fatos” (BATARCE, 2003), defende-se que no contexto da Análise Matemática os conhecimentos não devem ser tomados como verdades absolutas ou únicas possíveis, mas que devem estar vinculados a proposta de indicar caminhos para que o licenciando consiga internalizar e construir suas próprias interpretações sobre esses conhecimentos.

Moreira, Cury e Vianna (2005) abordaram a Análise Matemática no viés da formação de professores e direcionaram sua investigação para um questionamento: por que Análise Real[3] na Licenciatura?

Essa investigação foi composta da análise de respostas de um questionário feito a 31 matemáticos, professores que lecionavam Análise, sobre a ementa, bibliografia e o papel do componente de Análise Real de cursos de Licenciatura em Matemática, buscando compreender, com vistas à atuação do futuro professor, a importância da formação matemática e docente que emerge desse componente curricular.

Ao longo das discussões, os autores apontam que a visão entre conhecimento matemático e didático apresentada pelos matemáticos, muitas vezes também professores, é separativa, pois os mesmos entendem que um componente como a Análise Real deve abordar, nos aspectos lógicos-formais-dedutivos, formulações conceituais que visem uma estrutura matemática complexa, havendo a consolidação de um saber matemático suficiente para que os licenciandos sejam capazes de atuar como professores em escolas da Educação Básica. Os autores, ao discorrer sobre isso, entendem que tal concepção pode ser consequência da corrente acadêmica que entende que os conhecimentos didáticos para o exercício da profissão, e da própria formação docente do licenciando, ocorrem de forma exterior às disciplinas que tem foco na Matemática ou, ainda, provém do próprio ponto de vista do professor que leciona o componente. Entende-se que a corrente de formação que os autores mencionam se refere às ideias das Licenciaturas no esquema “3 +1”, já destacadas anteriormente.

[3] O termo Análise Real era bastante utilizado para especificar o tratamento dessa área da Matemática enquanto formalização a rigor do conjunto dos Números Reais. Com a evolução dos assuntos matemáticos emergentes na atualidade, e por se notar que a áreas poderia abordar muito mais do que apresentavam, passou-se a chamar então de Análise Matemática (MARTINES, 2012).

Os autores ponderam que, se porventura, as disciplinas que integram conhecimento didático e matemático não dão conta de disponibilizar a conexão entre esses conhecimentos, surge, então, a necessidade de que o próprio licenciando faça a articulação entre os conhecimentos que são abordados nos cursos de Licenciatura e ao seu futuro ambiente de prática docente. Tal perspectiva, segundo os autores, pode ser uma tarefa complexa demais para se exigir de um profissional que está se formando e iniciando as suas primeiras experiências docentes.

A partir da análise constituída das entrevistas, Moreira, Cury e Vianna (2005) mostram que as opiniões dos entrevistados sobre a importância da Análise Matemática para Licenciatura estão em torno de três categorias, as quais são apresentadas a seguir.

> Categoria 1: A disciplina deve ser obrigatória no curso de licenciatura porque se constitui em ocasião privilegiada para o aluno tomar contato com o que significa matemática e com as formas como os matemáticos pensam. Desenvolve o raciocínio lógico e a capacidade de "pensar matematicamente", proporcionando, também, maior maturidade intelectual ao aluno. O trabalho na disciplina abrange métodos, técnicas, estruturas, concepções e valores fundamentais da matemática, constituindo-se, assim, em uma introdução ao que se poderia chamar de "cultura matemática" (MOREIRA; CURY; VIANNA; p. 20-21).

Sobre a categoria 1, os pesquisadores sinalizam que, no ideal de uma parcela dos matemáticos, o professor de Matemática em formação inicial deveria ter uma formação matemática que o preparasse para notar o mundo no modo como os matemáticos o concebem. Tal perspectiva abrangeria a visão que entende a necessidade de que o professor da Educação Básica tenha um nível de abstração matemática mais aprofundada e mais elevada. Porém, os autores questionam: se o aprofundamento que é dado está na perspectiva da ação docente desse profissional; se está na imersão do envolvimento do pensamento matemático que ele deve desenvolver em seus alunos; se ultrapassa os limites procedimentais que muitas vezes é conduzido em disciplinas de Matemática dos cursos de Licenciatura partindo para a ideia do "pensar matematicamente" (MOREIRA; CURY; VIANNA, 2005).

Para Moreira, Cury e Vianna (2005) "pensar matematicamente", no contexto da Educação Básica, pode tanto ser entendido no pensamento específico de uma área quanto ao modo de "ver" do professor que articula seus argumentos em um cenário que leva em conta "o mundo dos matemáticos". Caso fosse essa a situação, o pensamento do aluno da escola estaria condicionado a "modos de ver o mundo matemático", o que não é o objetivo perfil de se desenvolver no aluno na Educação Básica. Nesse viés,

> [...] a profissão do professor de matemática da escola básica não se identifica, nem mesmo parcialmente, com a profissão do matemático. Os saberes profissionais, as condições de trabalho, as necessidades relativas à qualificação profissional, os resultados do trabalho profissional, tudo concorre muito mais para diferenciar do que para identificar as duas profissões. Por que, então [...] a formação matemática do

> professor da escola básica deveria se constituir a partir de valores, concepções e práticas específicas de uma “cultura matemática” a qual se tem relacionado historicamente com as práticas, valores e concepções da cultura escolar quase sempre através da emissão de prescrições? (MOREIRA; CURY; VIANNA, 2005, p. 31).

Parece que, nessa categoria, se mostra uma atraente configuração na perspectiva que envolve a “[...] tão criticada prática pedagógica que, no limite, reduz a educação matemática escolar à memorização e uso mecânico de fórmulas, aos cálculos sem muito sentido e à apreensão passiva de conceitos e resultados sem significados” (MOREIRA; CURY; VIANNA, 2005, p. 32).

Além desses aspectos, os autores ressaltam que a formação do professor do ensino básico deve levar em conta que existem indicações, segundo as próprias DCN específicas (BRASIL, 2002b), de que as percepções dos matemáticos em relação a alguns conhecimentos acabam se mostrando inadequadas para a Educação Básica. Podem mostra-se, também, conflitantes com a visão que valoriza os aspectos cognitivos ou didático-pedagógicos; visão essa que é fundamental na prática educativa escolar.

Sobre a categoria 2, Moreira, Cury e Vianna (2005) colocam:

> Categoria 2: A disciplina proporciona uma compreensão sólida e profunda dos conceitos básicos da matemática escolar, explica os “porquês” e dá mais segurança ao futuro professor da escola. Proporciona a construção de uma visão integrada e logicamente consistente da matemática elementar, em substituição a uma visão que a concebe como um amontoado desconexo de fórmulas e regras (MOREIRA; CURY; VIANNA, 2005, p. 22).

Os autores colocam que o ideal da “sólida” estrutura matemática para o conhecimento do professor provém desde os pensamentos mais antigos, sendo tomada como uma ideia natural a ser seguida. Por esse motivo, os cursos de Licenciatura, ainda nos anos 2000, seguiam a estrutura curricular do “3+1” (3/4 de bacharelado + 1/4 didática = licenciatura). Nessa perspectiva, os autores levantam questionamentos em torno da matemática avançada apresentada nos cursos de Licenciatura, tal como é feito na Análise Matemática:

> Em que medida e em que aspectos, a promoção de uma percepção “avançada” da matemática elementar na licenciatura pode ser tomada, concretamente, como um aprofundamento do conhecimento matemático visando a prática docente escolar? Por exemplo, com relação aos Números Reais, em que medida e em que aspectos específicos, a percepção desse conjunto numérico como um conjunto de objetos onde são satisfeitos os axiomas de corpo ordenado completo poderia fornecer uma visão sólida ou profunda para a educação escolar, explicar os porquês e dar mais segurança ao professor da escola básica? Se um aluno da escola pergunta o porquê da comutatividade do produto de Números Reais, por exemplo, seria uma explicação adequada ao processo de educação escolar dizer a ele que isso é um dos axiomas a que os reais devem satisfazer? (MOREIRA; CURY; VIANNA, 2005, p. 36).

Um questionamento que se percebeu interessante na investigação dos autores, que se entende haver relação com esta pesquisa, diz respeito à relação entre o conhecimento matemático e a prática docente pensados no âmbito da Análise Matemática para licenciatura:

> Não seria possível pensar em uma organização e sistematização do conhecimento matemático orientada para a prática pedagógica na educação escolar básica, ou seja, referenciada nas questões da prática do professor da escola e não necessariamente nas da prática do matemático? (MOREIRA; CURY; VIANNA, 2005, p. 37).

Esse questionamento possui relação com essa investigação, pois se entende que o conhecimento matemático para prática do professor deva estar interligado intrinsecamente com a sua atuação profissional no ambiente escolar. Nesse sentido, considera-se importante que a Matemática institucional dos cursos de Licenciatura, mesmo que em sua estrutura de rigor e formalidade, tenha o objetivo claro de estar voltada para o contexto de formação de professores de Matemática. Como já destacado, isso não significa reduzir o rigor matemático que envolve os conhecimentos, nem retirar conhecimentos que possam ser considerados fundamentais para o embasamento teórico e matemático do conhecimento do professor, mas estabelecer um direcionamento no ensino desses “formalismos” que contemple, além do aprofundamento matemático, um viés para a significação desses elementos para a prática em sala de aula.

Em relação à categoria 3, os autores apontam:

> Categoria 3: A disciplina constitui, para o aluno, um espaço de percepção da matemática como um instrumento que permite um entendimento profundo de certos fenômenos naturais e que tem aplicações em outras ciências (MOREIRA; CURY; VIANNA, 2005, p. 24).

Moreira, Cury e Vianna (2005) destacam que essa categoria se voltou ao questionamento da aplicação da matemática como um conjunto de conhecimentos utilizados para se entender fenômenos da natureza ou, ainda, algumas situações do cotidiano que, sem dúvida, se constituem um elemento fundamental para a formação do professor que leciona na Educação Básica. Os investigadores indicam que, de fato, é inquestionável esse contexto no âmbito de um curso de Licenciatura, porém,

> [...] de que modo a disciplina Análise Real poderia acrescentar, à formação do futuro professor da escola básica, elementos diretamente relacionados com aplicações a outras ciências? Não seria mais adequado redimensionar o trabalho nas disciplinas de Cálculo, Equações Diferenciais, Física, etc. — associando, talvez, uma abordagem que contemple discussões mais refinadas sobre o uso de modelos, por exemplo —, de modo a promover o desenvolvimento de uma percepção ampla e elaborada dessa dimensão “aplicada” do conhecimento matemático? (MOREIRA; CURY; VIANNA, 2005, p. 39).

Por fim, a partir das reflexões e dos estudos realizados, os autores sugerem que, sobre os conhecimentos profissionais e a prática dos professores de matemática da escola, o conhecimento matemático, na sistematização lógico-formal-dedutiva e no âmbito das formulações conceituais como é apresentado na Análise Matemática, está longe de dar conta das questões colocadas para o professor em formação inicial nas atividades da prática pedagógica para o qual se forma. Além disso, concebem que, apesar de ainda ser uma noção que carece de fundamentação empírica e/ou teórica, uma crença bastante geral é a de que esses conhecimentos, concebidos como um corpo que se situa estritamente no interior do campo da Matemática, possam não ser realmente necessários à formação do professor de Matemática, por não se mostrarem possibilidades de articulações entre ambos.

De acordo com os autores, para a superação dessa problemática, seria necessário trazer uma abordagem que supere a visão bifurcada que há entre matemática formal e prática escolar, a fim de que se proporcione ao profissional docente a possibilidade de relacionar e conectar seus aprendizados à sua profissão. Entende-se, nesse sentido, que o fundo principal para essa questão é aquele em que se atrela o conjunto de competências e habilidades designadas para a formação de professores no Brasil, principalmente ao se mencionar sobre a relação entre teoria e prática profissional. Tal como é destacado nas DCN, deve-se proporcionar ao licenciando a construção do conhecimento enquanto valoração essencial para o exercício da prática educativa (BRASIL, 2015a), não como uma questão separada em partes distintas, mas como uma dinamização entre os conhecimentos matemáticos e didáticos a serem despertados no futuro professor.

Bolognezi (2006) dedicou sua investigação a verificar que tipos de contribuições traz a disciplina de Análise Matemática para a formação do professor que irá atuar no Ensino Médio. Para tanto, a autora realizou uma entrevista semiestruturada com 22 sujeitos de um curso de Matemática, entre professores e alunos, e seis professores que atuam no Ensino Médio da rede pública de ensino. Além disso, comparou ementas da disciplina de distintos cursos de Licenciatura em Matemática, buscando um entendimento sobre sua importância na formação de professores.

Segundo a autora, o componente de Análise Matemática é tido pelos estudantes e professores da Educação Básica como uma das disciplinas mais importantes nos quesitos matemáticos presentes nos cursos de Licenciatura em Matemática. Segundo os dados da investigadora, isso se deve a exigência de que o sujeito tenha um bom nível de aprendizado em Matemática para que possa elevar seu entendimento a uma matemática de alto rigor. Por conta disso, a autora discorre que o ensino dessa disciplina se assemelha muito à perspectiva dos cursos de Bacharelado em Matemática, dispensando, em parte, o objetivo pedagógico do curso de licenciatura: formar professores para atuar na rede básica de ensino. Ainda, segundo os dados da autora, o professor de Análise propõe atividades e exercícios que, muitas vezes, são resolvidos pelo próprio professor, por conta do licenciando ainda não ter domínio do conteúdo ou pela falta de tempo em aula para certos esclarecimentos aos acadêmicos. Isso parece colocá-los como sujeitos ouvintes, que estão aprendendo uma matemática que, de fato, não prioriza o desenvolvimento de suas competências e habilidades para ensinar Matemática (BOLOGNEZI, 2006).

Os dados da autora apontam que, apesar do reconhecimento de licenciandos e professores em relação à aprendizagem de conhecimento matemático da disciplina, esses sentem uma espécie de mistificação da importância da Análise Matemática na formação de professores de Matemática. Essa percepção se fortifica quando a investigação parte para os professores da rede pública de ensino.

Ao questionar os professores que atuam no Ensino Médio, sobre os conhecimentos que a disciplina de Análise Matemática ofereceu a sua prática docente, as respostas convergiram para o pensamento: “não se sabe ao certo quais são”. Para a autora, isso ocorre devido a não contextualização dos objetos matemáticos em demonstrações, teoremas e proposições para a prática docente, o que inibe o licenciando de reconhecer ou compreender as ligações do conhecimento da disciplina com seu futuro ambiente de atuação.

Com base na fala da autora, entende-se que o objetivo dessa dissertação, no critério de buscar articulações entre os conhecimentos matemáticos da Análise e do Ensino Médio, possa apresentar uma potencial contextualização para a prática docente. Isso, de certa maneira, segundo os dados da autora, pode trazer uma interpretação que evidencie um ensino de Análise articulado à prática docente, o que, nesse sentido, traria luz à possível utilização dos conhecimentos da Análise na prática docente do Ensino Médio.

Assim como Reis (2001) e Moreira, Cury e Vianna (2005), a autora entende que o conhecimento apresentado no curso de Licenciatura em Matemática, mais especificamente na disciplina de Análise Matemática, deve estar atrelado aos conhecimentos didáticos que auxiliem o licenciando em seu futuro ambiente de trabalho, objetivando, principalmente, os aspectos que possibilitem a significação do conhecimento matemático. Isto é, oportunizar que signifiquem os conhecimentos institucionais para produzirem conhecimentos pessoais para sua prática em sala de aula (GODINO, 2009).

Por fim, Bolognezi (2006) pondera que o componente de Análise Matemática, tendo em vista a perspectiva dos acadêmicos de um curso de Licenciatura em Matemática e professores que já lecionam na Educação Básica, pode estar apresentando uma perspectiva que tem contribuído pouco para o curso de Licenciatura em Matemática, no que se refere ao desenvolvimento de habilidades para acrescentar ao desempenho do licenciando como professor do Ensino Médio. Outrossim, segundo a autora, pode-se destacar que isso tem peso principal na forma em como os conhecimentos matemáticos da Análise são apresentados (em relação ao alto rigor matemático) e, nesse sentido, talvez seja o momento de iniciar uma reflexão sobre o perfil que os cursos de formação de professores devem levar seus acadêmicos a constituírem.

Ao se mencionar sobre como os conhecimentos são apresentados na Análise Matemática, concorda-se em parte com a autora. Entende-se que tratamentos com demonstrações em alto rigor matemático possam trazer complicações sobre o entendimento do papel desse componente para os licenciandos durante a graduação. Porém, tem-se em vista que esse "não entendimento" não está ligado diretamente ao rigor do ensino do conteúdo matemático, mas as eventuais "faltas" de contextualização que podem existir sobre esse componente para a prática do professor da Educação Básica.

Por fim, Otero-Garcia, Baroni e Martines (2013) apresentam um artigo com duas investigações oriundas de duas dissertações que objetivaram discutir as problemáticas que envolvem o componente de Análise Matemática em cursos de formação de professores de Matemática. A primeira apresenta uma visão de como se estruturaram os objetivos, ementas e bibliografias de dois cursos de Licenciatura em Matemática; a segunda procura compreender o papel do componente nos cursos de Licenciatura segundo coordenadores de cursos e professores que lecionam a disciplina.

Na primeira investigação, objetivaram verificar as possíveis preocupações do componente com a formação de professores. Os autores destacam que os objetivos do componente curricular, nas instituições investigadas, ainda não eram claros em 2013, e atentam que em momento algum se percebeu menções, nos programas das disciplinas, que pudessem esclarecer sobre como se concebia essa disciplina para a formação de professores de matemática, ou mesmo sobre sua importância na atuação do futuro docente. Os conteúdos matemáticos apresentados nas ementas indicavam uma forte relação com as mesmas disciplinas que estão presentes no bacharelado, estabelecendo níveis altos de rigorosidade nos procedimentos e demonstrações matemáticas atreladas ao Cálculo (OTERO-GARCIA; BARONI; MARTINES, 2013). Pode-se inferir que a utilidade do componente de Análise Matemática serve como uma "formalização para demonstração" dos conteúdos matemáticos tratados pelo Cálculo Diferencial e Integral (REIS, 2001).

Segundo Otero-Garcia, Baroni e Martines (2013), os cursos de Licenciatura, desde 2001, com o parecer 1.302 – que regulamenta a estrutura dos cursos de licenciatura e bacharelado em Matemática – do Conselho Nacional de Educação (BRASIL, 2002b), objetivavam reestruturações, observando os aspectos pedagógicos para a formação docente. Apesar disso, nos cursos investigados, segundo os autores, pouco se observou mudanças na disciplina de Análise para atender a demanda profissional dos licenciandos. Algumas modificações observadas pelos autores dizem respeito à adoção bibliográfica do livro de Ávila (2006), que apresenta uma proposta de “Análise Matemática para licenciatura”. Fora isso, afirmam que, apesar da renovação de algumas edições, os cursos seguem uma mesma linha de autores bibliográficos utilizados desde a década de 70, como: “Bartle, Rudin, Ávila, Elon e Djairo” (OTERO-GARCIA; BARONI; MARTINES, 2013, p. 12).

A segunda investigação, que se refere à uma entrevista realizada com professores e coordenadores de curso, permitiu que os autores separassem as perspectivas que conectam a Análise Matemática na Licenciatura, na visão dos entrevistados, em três categorias conforme a análise metodológica proposta:

1. O papel da disciplina é fundamentar o conhecimento matemático do futuro professor. A Análise não é uma disciplina de aplicação direta na prática docente;
2. O papel da disciplina é consolidar e formalizar conteúdos, bem como propiciar cultura e bagagem matemática;
3. O papel da disciplina de Análise no curso de Licenciatura é fundamentar o conhecimento sobre o conjunto dos Números Reais.

A primeira categoria destacada pelos autores apresenta, fortemente, que a disciplina de Análise não é um componente que serve para aplicação prática na atuação do professor de Matemática do Ensino Fundamental e/ou do Ensino Médio. Aponta que, segundo a fala dos professores e coordenadores entrevistados, apesar de não haver uma relação direta com o que o futuro docente irá ensinar, o papel da disciplina é fundamentar o conhecimento matemático para que o licenciando tenha condições de saber, com profundidade, o que está ensinando. Além disso, os depoimentos indicam que, por mais que o licenciando não veja conexão da disciplina com sua prática docente, ela existe e não deixa de existir, principalmente no que concerne aos conjuntos numéricos (OTERO-GARCIA; BARONI; MARTINES, 2013).

Assumindo a perspectiva de Shulman, sobre conhecimento matemático e prática docente, mais especificamente em referência ao conhecimento pedagógico do conteúdo – que entende que o ensino eficaz ocorre quando a matemática se apresenta de forma compreensível ao aluno, com o uso de relações, analogias, situações-problema, etc., fazendo-se necessário que o docente tenha uma aprendizagem multifacetada do mesmo objeto matemático –, os autores questionam: se existe, de fato, uma articulação entre os conhecimentos matemáticos tratados pela disciplina de Análise e a prática docente, qual a razão de não apresentar essa linha de pensamento aos licenciandos? (OTERO-GARCIA; BARONI; MARTINES, 2013) Por qual motivo não mostrar essas articulações? Considerando que, assim como assumido por Moreira, Cury e Vianna (2005), essa tarefa pode se tornar complexa para que o licenciando a desenvolva por conta própria.

A segunda categoria destacada pelos autores une um conjunto de argumentações dos entrevistados que indica:

> [...] que a disciplina de análise tem o papel de consolidar e formalizar conhecimentos que foram abordados de forma difusa no decorrer da formação em várias disciplinas. Essa categoria tem uma relação com a primeira, no entanto, nesse momento destaca-se um papel mais internalista da análise, que se justifica dentro da própria matemática, pois ao envolver ideias centrais da matemática – como número real, infinito, continuidade, limite e funções – a disciplina de análise parece desempenhar esse papel unificador no curso de formação (OTERO-GARCIA; BARONI; MARTINES, 2013, p. 709).

Além disso, de acordo com os autores, essa categoria também articula pensamentos de bagagem cultural e matemática que se dissemina ao consolidar e formalizar os conhecimentos matemáticos, mostrando ao licenciando um método próprio que conduz à Ciência Matemática. Nesse sentido, argumentam que, de certa forma, isso é diferente de priorizar as características pedagógicas, já que prioriza os mesmos aspectos matemáticos que são ensinados a um matemático, divergindo da atuação do futuro professor de Matemática. Ou seja, enfatizam, assim como Moreira, Cury e Vianna (2003) e Reis (2001), que a profissão do matemático é diferente da profissão do professor de Matemática, uma vez que a Matemática apresentada na Licenciatura deve estar aliada à atuação docente no Ensino Fundamental e Ensino Médio.

A terceira categoria das análises indica, especificamente, que o papel da disciplina de Análise é fundamentar o conhecimento matemático tratado no Conjunto dos Números Reais. Segundo os autores, essa percepção ocorre pelos investigados entenderem que as demonstrações axiomáticas e proposicionais encontradas, ao longo dos estudos no componente, mostram um aprofundamento necessário para que o futuro professor consiga compreender e articular esse estudo na sua atuação como docente. Afinal, o conjunto dos Números Reais é estruturado ao longo do currículo da Educação Básica. Tal argumento, segundo os autores, foi bastante utilizado pelos entrevistados para justificar uma articulação da matemática ensinada na disciplina de Análise com a prática docente do licenciando, colocando como principal ponto a necessidade do futuro professor conhecer, fundamentalmente, a formação desse conhecimento matemático.

Otero-Garcia, Baroni e Martines (2013) concluem que existem divergências entre as informações da investigação, as quais levam a entender que ainda há certa cristalização da disciplina como um modelo exclusivo de conhecimento matemático puro. Apesar disso, os autores não excluem a ideia de que a disciplina, apesar do seu papel na formação de professores ainda parecer estar nublado, está caminhando para um possível viés que contemple, cada vez mais, a formação do professor de matemática.

Neste capítulo, se apontou para pesquisas que discutiram sobre a Análise Matemática, bem como sobre seu rigor e formalismo nos cursos de Licenciatura em Matemática. Destacam-se alguns apontamentos percebidos na constituição desse capítulo, como: o de Reis (2001) e Moreira, Cury e Vianna (2005), sobre a forma como o excesso de rigor e formalismo matemático pode dificultar na significação da importância do conhecimento matemático, no caso da Análise Matemática, para a prática docente de professor de Matemática da Educação Básica; o de Batarce (2003), ao indicar a importância da História da Matemática como possibilidade para construir um laço lógico na construção do conhecimento matemático trabalhado em nível de alto rigor; o de Bolognezi (2006), ao indicar que licenciandos não compreendem o papel da Análise em sua formação para atuarem como professores ou mesmo os professores em exercício de sua função no nível de Ensino Médio indicarem que não percebem a utilidade dos conhecimentos de Análise em sua atuação; os de Otero-Garcia, Baroni e Martines (2013), que apontam para as poucas mudanças institucionais no componente curricular de Análise e sobre a concepção de professores que lecionam Análise que, de certa maneira, não apresentaram objetivamente a importância da Análise Matemática para formação do professor de Matemática que atua na Educação Básica.

Entende-se que os elementos que compõem e motivam a realização da presente investigação incorporam aspectos dos trabalhos já realizados, como no caso:

- da perspectiva de que o formalismo pode dificultar na significação para prática (MOREIRA; CURY; VIANNA, 2005) o que, no entanto, entende-se que o conhecimento matemático também é necessário para alicerçar a prática do professor da Educação Básica, principalmente se tratando de ensino da Matemática;
- da noção de que a cristalização do ensino de uma área da Matemática, no caso da Licenciatura, pode implicar em uma visão de ensino que não contempla diretamente a formação do professor de Matemática (OTERO-GARCIA; BARONI; MARTINES, 2013), mas que, dependendo de como as relações e conexões do conhecimento são realizadas com o contexto da formação docente, essas podem possibilitar uma margem de entendimento dos objetos matemáticos para prática na Educação Básica;

- o entendimento de que a História da Matemática pode permear uma rede de significações que justificam o aprendizado dos conhecimentos matemáticos (BATARCE, 2003), mesmo que, de certo modo, essa possa enrijecer uma metodologia a “fatos”.

Pode-se dizer que o trabalho que se apresenta nesta dissertação caminha para a tentativa de encontrar elementos sobre que espécies de significações e potencialidades podem emergir da Análise Matemática para formação de professores de Matemática, a partir da perspectiva institucional do conhecimento matemático como fundo para viabilizar os Conhecimentos Didático-Matemáticos (CDM) (GODINO, 2009; GODINO et al., 2017). Nesse quesito, esta investigação se diferencia daquelas já realizadas sobre o assunto, por buscar elementos dos conhecimentos da Análise Matemática que venham a corroborar, na dimensão epistêmica do conhecimento matemático, com questões para a prática do professor de Matemática do Ensino Médio.

Com base na perspectiva destacada, apresenta-se, no próximo capítulo, o Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática, base teórica desta investigação. Essa noção fundamenta a ferramenta teórica que é utilizada para as análises e articulações entre os conhecimentos matemáticos da Análise Matemática e os do Ensino Médio. Além disso, essa fundamentação teórica traz destaque sobre formação do conhecimento de professores de Matemática para a atuação docente que, aqui, é entendida como Conhecimentos Didático-Matemáticos.

4 ASPECTOS DO ENFOQUE ONTOSSEMIÓTICO DO CONHECIMENTO E DA INSTRUÇÃO MATEMÁTICA

Este capítulo apresenta aspectos da base teórica que compõem o Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática, particularmente as questões que envolvem os significados de prática matemática, objetos matemáticos e idoneidade epistêmica, de modo a constituir um referencial que permita conduzir as análises que serão apresentadas nesta investigação.

O Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (EOS) (GODINO, 2009, 2011; GODINO; BATANERO, 1994; GODINO; BATANERO; FONT, 2008, 2011), surge como um marco teórico no início dos anos 90, a partir de estudos da Didática da Matemática. Sua proposta consiste em articular diferentes concepções teóricas e pontos de vista, na busca de distintas potencialidades para qualificar e ampliar os conhecimentos teóricos tratados na Educação Matemática.

É adotada uma perspectiva global que leva em conta a interação de diferentes perspectivas teóricas: epistemológica, baseada nos pressupostos antropológicos e socioculturais; cognitiva, sobre as representações semióticas; instrucional, sobre as relações socioconstrutivistas; sistêmico-ecológicas, que se relaciona com os demais modelos no fundo biológico, material e sociocultural, dando espaço para a atividade de estudo e comunicação matemática (GODINO, 2009).

Segundo Godino (2009, 2011), o EOS deve ser visto como uma ferramenta de análise sobre o ensino e aprendizagem em Matemática, podendo ser utilizado para analisar, refletir e orientar as propostas educativas em seus diferentes contextos, a fim de que se possa repensar sobre suas diferentes manifestações na Educação Matemática.

O ponto inicial do enfoque, segundo Godino, Batanero e Font (2008), consiste na construção de uma ontologia de objetos matemáticos que considera a Matemática como um triplo aspecto baseado em uma atividade de resolução de problemas socialmente compartilhada, linguagem simbólica e como um sistema conceitual logicamente organizado. Esse triplo aspecto da Matemática integra práticas matemáticas em uma linguagem que permita a múltipla comunicação entre os indivíduos de uma determinada comunidade[4], na busca pela interação e o compartilhamento de ideias para a construção e produção de conhecimento matemático.

[4] As comunidades de práticas, segundo Godino, Batanero e Font (2009), incluem as perceptivas culturais de diferentes grupos e seus contextos socioculturais, assumindo, portanto, uma relatividade socioepistêmica dos sistemas de práticas, dos objetos presentes e dos significados que circulam essas comunidades.

As práticas, com base no triplo aspecto mencionado, se relacionam por um sistema de conceitos organizados que permitem a avaliação sobre como os conhecimentos estão sendo produzidos, interpretados e significados pelos sujeitos nas atividades matemáticas que ocorrem dentro das instituições escolares.

A prática matemática é entendida como sendo toda expressão ou atitude realizada pelo indivíduo para resolver problemas matemáticos, comunicar e validar uma solução para o âmbito institucional ou mesmo generalizá-la em outros contextos e problemas (GODINO; BATANERO, 1994). Além disso, as práticas matemáticas são colocadas na perspectiva, segundo Godino et al. (2017), wittgensteinsriana, concebendo que as mesmas se realizam num fundo ecológico (material, biológico e social) que determinam a relatividade institucional, pessoal e contextual dos jogos de linguagem e formas de vida.

Sobre o âmbito da relatividade institucional, Godino, Batanero e Font (2008) apontam que é aquilo que é constituído por sujeitos envolvidos numa mesma classe de situações, cujo compromisso mútuo está envolvido numa mesma problemática e leva a realização de práticas sociais que, muitas vezes, possuem características particulares condicionadas aos meios, instrumentos, regras e modos de funcionamento das instituições escolares.

Na perspectiva das práticas matemáticas – que em conjunto formam um sistema de práticas operativas e discursivas – envolvidas em um problema em potencial, Godino (2009) considera a necessidade de levantar outros dois aspectos que surgem desse sistema: *objeto matemático*, no que diz respeito aos assuntos matemáticos abordados no sistema de práticas; e significado, dos discernimentos pessoais dos sujeitos sobre os objetos matemáticos.

Godino (2009) explica que, em decorrência de reflexões de concepções teóricas epistemológicas que motivam algumas das discussões levantadas no EOS – tais como a Teoria Antropológica do Didático (Chevallard, 1985)[5], Teoria dos Campos Conceituais (Vergnaud, 1990), Teoria das Situações Didáticas (Brousseau, 1978), etc. – surgem questionamentos de natureza epistemológica e cognitiva. Da epistemológica, o que são objetos matemáticos; e da cognitiva**,** quais significados ou representações dos objetos matemáticos podem emergir de situações-problema para o sujeito.

Sobre o que é objeto matemático, Godino, Batanero e Font (2008) assumem como sendo qualquer coisa ou entidade a que nos referimos, seja real, imaginária ou de outra natureza, que agem de alguma maneira no sistema de práticas matemáticas. Quanto aos

---

[5] As indicações referenciadas que começam por letra maiúscula seguidas por letra minúscula dentro de parênteses, se referem aos nomes dos pesquisadores que baseiam os aspectos teóricos utilizadas no capítulo, sendo citados por outros autores e, assim, não fazem parte das referências deste trabalho dissertativo.

significados ou representações que podem emergir desses objetos, entendem em duas perspectivas: uma pessoal, que se refere ao sistema de práticas que é interpretado e concebido por uma pessoa (significado pessoal); e outra institucional, que se refere ao sistema de práticas compartilhadas no âmbito institucional (significado institucional), que servem "[...] para resolver um tipo de situação-problema que requer encontrar um representante de um conjunto de dados" (GODINO; BATANERO; FONT, 2008, p. 12), os quais amparam sua solução e resolução.

Para que haja uma interpretação satisfatória dos objetos matemáticos, considerando uma organização que permita desenvolver os plenos conhecimentos para a resolução de situações-problema, são atribuídos significados epistêmicos e cognitivos, tais como: as relações não ostensivas do conhecimento (conceitos, proposições, teoremas, etc.) e ostensivas (gráficos, símbolos, tabelas, etc.), que promovam o contexto de socialização e o desenvolvimento das práticas matemáticas (GODINO; BATANERO; FONT, 2008). Para tanto, o EOS considera a articulação de uma tipologia de objetos primários que, por sua vez, buscam ampliar as ideias de conceito e de procedimentos tratados na conduta das significações pessoais e institucionais do conhecimento. São propostas as seguintes tipologias:

> [...] **linguagem** (termos, expressões, notações, gráficos, ...) em seus diversos registros (escrito, oral, gestual...); **situações-problemas** (aplicações extra matemáticas, tarefas, exercícios, ...); **conceitos-definição** (introduzidos mediante definições ou descrições: reta, ponto, número, média, função, ...); **proposições** (enunciados sobre os conceitos...); **procedimentos** (algoritmos, operações, técnicas de cálculo, ...); **argumentos** (enunciados usados para validar ou explicar as proposições e procedimentos, dedutivo ou de outro tipo, ...) (GODINO; BATANERO; FONT, 2008, p. 7, grifo nosso).

Para Godino, Batanero e Font (2008), considerar uma tipologia de objetos como questão primária é algo relativo, tendo em vista que se tratam de entidades funcionais e conexas aos marcos institucionais e contextos de uso que participam. Há, ainda, o caráter recursivo "[...] no sentido de cada objeto, dependendo do nível de análise, pode estar composto por entidades dos demais tipos (um argumento, por exemplo, pode colocar em jogo conceitos, proposições, procedimentos, etc.)" (GODINO; BATANERO; FONT, 2008, p.14).

Sobre os significados, Godino, Batanero e Font (2008) apresentam uma relação dos tipos de significados institucionais e pessoais tratados pelo EOS, conforme é apresentado no quadro da Figura 4.

Figura 4 – Significados institucionais e pessoais segundo o EOS

Significados Institucionais	
Tipo	**O que articula**
Referencial	É o sistema de práticas que serve como referencial matemático institucional, orientando a prática docente e os significados que se pretende que o aluno desenvolva. Nas instituições de ensino, vincula-se ao significado holístico dos objetos matemáticos tratados, apresentando a necessidade de se realizar um estudo histórico e epistemológico sobre a origem e evolução do objeto matemático, tendo a perspectiva dos diferentes contextos em que esse pode se manifestar.
Pretendido	Sistema de práticas atribuídas e organizadas para a objetividade do processo de estudo, ou seja, se refere aos objetivos que se têm no planejamento para ensino dos objetos matemáticos de referência.
Implementado	É a parte do sistema de práticas que comporta as ações e os objetivos pretendidos efetivamente para serem atribuídos e executados pelo professor em suas práticas docentes.
Avaliado	Sistema de práticas utilizadas pelo professor para avaliar o processo de ensino e aprendizagem do aluno, tendo como base aquilo que foi tomado como referência na pretensão e implementação das ações de ensino.
Significados Pessoais	
Tipo	**O que articula**
Global	Diz respeito à totalidade de práticas que o sujeito é capaz de manifestar, potencialmente, em função de suas relações e significações do e com o objeto matemático. Ou seja, àquilo que ele é capaz de produzir, conduzir, refletir, estruturar e construir a partir das suas interpretações com os objetos matemáticos.
Declarado	Refere-se ao conjunto de práticas que são efetivamente expressas por meio dos métodos avaliativos utilizados pelo professor para avaliar a aprendizagem do aluno e, nesse sentido, comporta os elementos considerados “certos” ou “errados” do ponto de vista institucional do objeto matemático.
Atingido	Corresponde às práticas que se manifestam em consonância com a pauta institucional estabelecida, e que leva em conta tanto as significações prévias do aluno sobre o objeto matemático de estudo, quanto aqueles que são pretendidos para o alcance ao final do processo de ensino e aprendizagem.

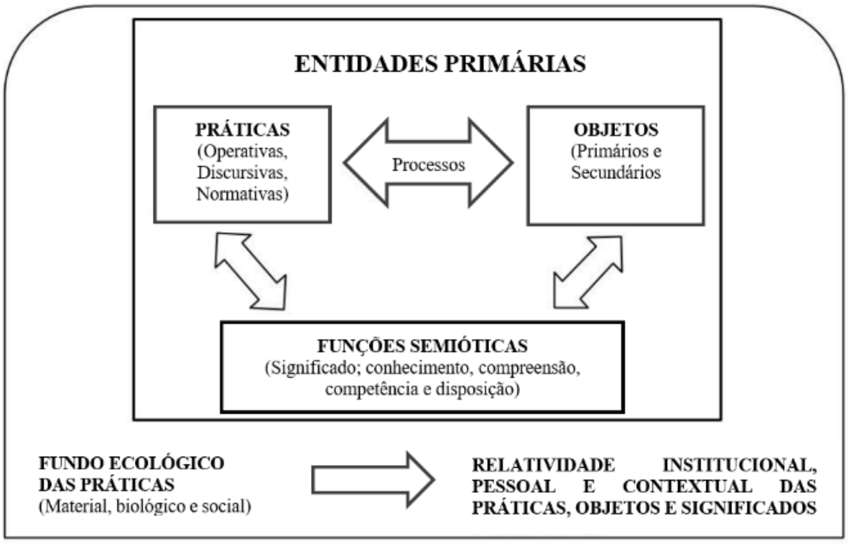
Fonte: Godino, Batanero e Font (2008).

Outro elemento que está nas bases do EOS, diz respeito à noção de função semiótica. Essa noção é entendida como a correspondência entre um objeto que antecede (expressão e significante) e sucede (conteúdo e significado) o que é estabelecido por um sujeito segundo suas percepções de correspondência (GODINO et al., 2017). Essa noção pode ser concebida como uma interpretação dos signos Peirceanos: *representamen*, *objeto e interpretante* (GODINO et al., 2017).

Segundo Godino et al. (2017), *representamen* adota o significado entendido na perspectiva Peirceriana que, segundo o autor, se refere ao efeito que a representação de “coisa” ou “objeto” tem sobre o pensamento humano; é a maneira que essa “coisa” ou “objeto” é representado. No caso particular da Matemática, é o signo (visual, linguagem simbólica ou natural) que representa os “objetos” matemáticos. Sobre o *objeto*, o autor aponta que é aquilo efetivamente institucionalizado como regra, norma, hábito a ser seguido e interpretado, e que pode ser entendido como os objetos matemáticos na sua essência enquanto definição ou conceito. Por fim, ainda segundo o autor, o *interpretante* corresponde à relação estabelecida pelo sujeito entre o *representamen* e o *objeto* como ato institucional e interpretativo que envolve as significações institucionais e pessoais.

O conjunto dos elementos de práticas, objetos, significados e processo (conjunto sequencial de práticas baseadas no objeto) junto da noção de função semiótica, configuram entidades primárias que servem como objetos de modelização epistemológica, cognitiva e ontológica que fundam as bases teóricas do EOS. A Figura 5 destaca a relação entre tais noções.

Figura 5 – Entidades primárias que compõem o Enfoque Ontossemiótico



Fonte: Godino et al. (2017).

Para o autor, no EOS, toda entidade que participa de um processo semiótico, de interpretação ou jogo de linguagem, é tido como objeto, podendo assim desempenhar papel de significante, significado ou interpretante[6]. Além disso, os sistemas de práticas operativas e discursivas constituem objetos e podem ser componentes de função semiótica, onde se concebe a ideia da palavra "significado" (GODINO et al., 2017). Ainda,

> [...] a generalidade com que se concebe a noção de objeto e significado pode ser de pouca utilidade para se analisar os fenômenos cognitivos, epistemológicos e semióticos que nos interessam. Essa é a razão a qual se concebe fazer um esforço para elaborar um sistema detalhado de categorias de objetos, tendo em conta suas diversas naturezas e funções que desempenham, os quais nos levam a falar sobre Ontossemiótica e não somente de semiótica (GODINO et al., 2017, p. 6, tradução nossa).[7]

[6] Como exemplo dessa noção, podemos atribuir: significante, sendo os respaldos institucionais dos objetos matemáticos; significado, como o que é interpretado pelo sujeito na perspectiva pessoal; interpretante, relação que se dá no processo da pessoa entre o significado institucional e o significado pessoal.

[7] La generalidad con la que se concibe la nocion de objeto y significado puede ser de poca utilidad para analizar los fenomenos cognitivos, epistemologicos y semioticos que nos interesan. Esta es la razon por la cual se hace un esfuerzo por elaborar un sistema detallado de categorias de objetos, teniendo en cuenta su diversa naturaleza y la funcion que desempenan, lo cual nos lleva a hablar de ontosemiotica, y no solo de semiotica.

As entidades primárias mencionadas na Figura 5 explicitam os fundamentos epistêmicos e cognitivos necessários para elaborar ferramentas que possibilitam realizar uma análise didática integral**,** as quais servem fundamentalmente para a projeção, implementação e avaliação dos processos de estudo matemático (GODINO, 2017). Nesse intuito, o EOS concebe um conjunto de cinco fundamentos (Figura 6) que constituem ferramentas de análise didático-matemático para os processos de estudo.

Figura 6 – Conjunto de fundamentos teóricos do Enfoque Ontossemiótico

Fundamento	O que articula
1. Sistema de práticas	Abrange as perspectivas operativas, discursivas e normativas, assumindo uma concepção pragmática e antropológica matemática, no posto de vista institucional e pessoal. Adota a resolução de problemas como elemento central na construção e produção do conhecimento matemático.
2. Configurações de objetos e processos matemáticos	Assume a noção da perspectiva interacionista entre objetos matemáticos e os processos que intervêm das práticas. Compreende os diversos campos de expressão e linguagem entendidos como instrumentos para a atividade matemática e de suas representações semióticas.
3. Configuração e trajetória didática	Constitui as interlocuções e situações que integram o sistema de interações entre docente e discente, objetivando a identificação e descrição dessas relações no processo de ensino e aprendizagem dos estudantes.
4. Dimensão normativa	Sistemas de hábitos, regras e normas que circulam dentro das práticas matemáticas e didáticas, considerando a noção de contrato didático e normas sociomatemáticas. Tem em vista os diversos processos que caracterizam o processo de estudo matemático e a explicação dos fenômenos didáticos.
5. Idoneidade didática	Critérios gerais no processo de adequação e pertinência das ações educativas, dos conhecimentos propostos, dos recursos e do processo de estudo matemático. É composta por um sistema de indicadores empíricos para cada uma das dimensões que a constitui, servindo de norteador para a análise e reflexão sistemática de critérios no processo de estudo, objetivando uma melhora progressiva nos processos de ensino e aprendizagem.

Fonte: Godino, Batanero e Font (2008, 2011); Godino et al. (2017).

Os fundamentos apresentados articulam-se buscando a potencialização de como o ensino e a aprendizagem em Matemática podem ser interpretados, verificados e sistematizados. Nesse sentido, os quatro fundamentos do EOS, destacados de um a quatro no quadro da Figura 6, estabelecem ferramentas para uma análise didático-explicativa que serve para descrever como o processo dos sistemas e as relações com os objetos funcionam (GODINO, 2009, 2011).

Sobre o quinto fundamento, que se refere à Idoneidade Didática, o mesmo se constituí numa relação harmônica entre idoneidades parciais[8] que a compõe, oferecendo componentes e indicadores empíricos que possibilitam investigar elementos que direcionam para uma intervenção eficaz em sala de aula (GODINO, 2011) e nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática.

[8] Essas idoneidades parciais também podem ser chamadas de dimensões, e são compostas por: epistêmica, afetiva, ecológica, mediacional, interacional e emocional (GODINO, 2009; 2011). Na seção 4.1 descreve-se sobre o significado de cada uma.

Tendo se apresentado os aspectos globais que compõem o EOS, a seção seguinte tratará de abordar os elementos teóricos do enfoque que condizem com os objetivos traçados para esta investigação: a dimensão epistêmica da Idoneidade Didática.

4.1 A IDONEIDADE DIDÁTICA NA ANÁLISE DE PROCESSOS DE ESTUDOS MATEMÁTICOS: FERRAMENTA DE ANÁLISE DIDÁTICA NA DIMENSÃO EPISTÊMICA

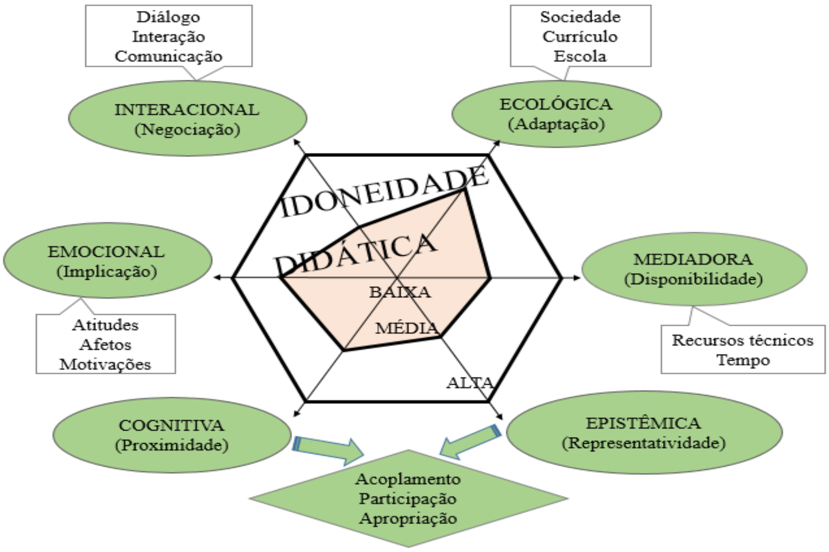
A Idoneidade Didática é um fundamento do EOS que constitui uma ferramenta própria para análise, reflexão e orientação do trabalho docente frente aos objetos matemáticos e às relações de contexto para a prática matemática, objetivando, assim, a intervenção eficaz na sala de aula (GODINO, 2011). Nesse sentido, para Godino (2009), esse nível refere-se a um processo de instrução matemática que integra, harmonicamente, a articulação de seis dimensões:

- **epistêmica**: se refere ao grau de representatividade dos significados institucionais pretendidos e implementados em relação a seu significado de referência para o ensino e aprendizagem;
- **cognitiva**: expressa o grau de significados pretendidos e implementados para as significações pessoais dos indivíduos dentro dos processos de ensino e aprendizagem;
- **interacional**: expressa o grau de entendimentos, num processo de ensino e aprendizagem, que permitem identificar as disparidades e conflitos, epistêmicos ou cognitivos, que se apresentam nos significados atribuídos aos objetos matemáticos;
- **mediacional**: representa o grau de adequação dos recursos tecnológicos e metodológicos que são utilizados no desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem;
- **emocional**: relaciona-se com o grau dos fatores de interesse, motivação, etc., que interferem ou auxiliam no processo de ensino e aprendizagem;
- **ecológica**: grau do processo de estudo que se adéqua ao processo educativo da comunidade escolar e social condicionado, ao contexto em que se desenvolve determinado processo.

A integração e articulação dessas dimensões no processo de ensino e aprendizagem buscam colocar em pauta elementos que sirvam de estudo no conhecimento matemático e seu envolvimento nas práticas matemáticas que emergem em decorrência de sua utilização.

Apresenta-se, na Figura 7, uma representação da relação entre as dimensões da Idoneidade Didática num processo de estudo pretendido.

Figura 7 – Idoneidade Didática e suas dimensões



Fonte: traduzido de Godino, Batanero e Font (2008).

Segundo Godino, Batanero e Font (2008), o hexágono regular supõe um grau máximo de idoneidade estabelecido para as dimensões. Já o irregular inscrito, conforme esses autores, corresponde às idoneidades efetivamente alcançadas – que podem ter grau de idoneidade baixo, médio e alto ao se verificar o alcance do estudo em cada idoneidade parcial investigada. A representação geométrica dos hexágonos em conjunto apresenta a realização de um processo de estudo implementado que é verificado, para cada dimensão, por meio dos respectivos indicadores e componentes empíricos dessas ferramentas.

Cada dimensão da Idoneidade Didática contempla uma idoneidade parcial que, em conjunto, serve para estudar uma questão pontual, como um plano de aula, ou questões mais globais, como o currículo de estudo de uma instituição (GODINO; BATANERO; FONT, 2008). Conforme Godino (2011), essa flexibilidade, entre questões pontuais e globais, permite que cada idoneidade parcial seja verificada e analisada em separado, possibilitando a particularização da análise no processo de estudo abordado.

Com foco específico a Idoneidade Epistêmica, o quadro da Figura 8 apresenta o que, na presente investigação, se denomina como Ferramenta de Análise Didática: Dimensão Epistêmica. Essa ferramenta, com base no fundo teórico apresentado, permite, por meio dos componentes e indicadores empíricos pertinentes, analisar os elementos epistêmicos de um dado processo de estudo.

Figura 8 – Componentes e indicadores que orientam a análise didática sob a noção da Dimensão Epistêmica

Componentes	Indicadores
Situações-problema	- Apresenta-se uma mostra representativa e articulada de situações de contextualização, exercícios e aplicações. - Propõem-se situações de generalização de problemas (problematização).
Linguagem	- Uso de diferentes modos de expressão matemática (verbal, gráfica, simbólica, etc.), tratamento e conversões entre as mesmas. - Nível de linguagem adequado aos educandos a quem se dirigem. - Propõem-se situações de expressão e interpretação matemática.
Regras (Definições, proposições, procedimentos)	- As definições e procedimentos são claros e corretos, e estão adaptados ao nível educativo a que se dirigem. - Apresentam-se os enunciados e procedimentos fundamentais do tema para o nível educativo dado.
Argumentos	- Promovem-se situações com as quais o educando tenha que argumentar e justificar o pensamento matemático. - As explicações, comprovações e demonstrações são adequadas ao nível a que se dirigem.
Relações	- Os objetos matemáticos (problemas, definições, proposições, etc.) se relacionam e se conectam entre si. - Identificam-se as articulações dos diversos significados dos objetos que intervêm nas práticas matemáticas.

Fonte: Godino (2011).

A partir da perspectiva da ferramenta epistêmica apresentada, a qual se constitui como elemento importante para compor as análises que propõem atender o objetivo desta pesquisa, deve-se apresentar o olhar com o qual as referidas análises são constituídas. Para discorrer e discutir sobre esse olhar, a seção a seguir trata da perspectiva do EOS no contexto da Formação de Professores de Matemática (GODINO, 2009; PINO-FAN; GODINO, 2014; GODINO, et al., 2017), a qual se considera na prospecção da Idoneidade Didática e é denominada, segundo Godino (2009), por Conhecimentos Didático-Matemáticos.

4.2 A PERPESCTIVA DOS CONHECIMENTOS MATEMÁTICOS NA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA: CONHECIMENTOS DIDÁTICO-MATEMÁTICOS

Numa perspectiva de formação de professores, segundo Godino et al. (2017), o eixo central do EOS consiste numa modelização dos conhecimentos matemáticos pelas facetas epistêmica (institucional) e cognitiva (pessoal), que se baseiam em uma aproximação antropológica em que a Matemática é entendida como atividade humana e ontossemiótica (em que as noções de objeto e significado são o foco).

Essa modelização comporta categorias primárias do conhecimento do professor (Shulman, 1986; Hill; Ball; Schilling, 2008), e as amplia para a noção teórica do EOS, relacionando, assim, os fundos: ecológico, mediacional, interacional, epistêmico, cognitivo e afetivo nas intervenções dos processos de ensino e aprendizagem (GODINO, 2009; SOARES, 2016; SOARES; KAIBER, 2016).

Essa modelização do conhecimento, em especial sobre os conhecimentos dos professores de Matemática, considera que o professor deve conhecer a matemática do mesmo nível educativo a qual ensina, mas que também deve ter condições de articular esses conhecimentos com seus correspondentes dos níveis de ensino posteriores (GODINO, et al., 2017). No caso da Educação Básica brasileira e considerando a formação de professores de Matemática, isso poderia ser entendido como: o professor de Matemática precisa se apropriar dos conhecimentos matemáticos envolvidos no nível do Ensino Fundamental e do Ensino Médio e, também, se apropriar dos conhecimentos correspondentes aos níveis posteriores que, no caso, podem tanto se referir aos conhecimentos de Ensino Superior quanto a articulação desses conhecimentos com outros contextos e áreas do ensino.

Para Godino et al. (2017), os conhecimentos do professor de Matemática se constituem numa relação de conhecimento do conteúdo matemático *per se*[9] (Scheiner, 2015), e são atribuídos os significados de conhecimento comum do conteúdo, que se referem aos conhecimentos do conteúdo a qual o professor ensina no nível em que atua, e conhecimento ampliado do conteúdo, relativo aos conhecimentos dos níveis posteriores/superiores. Ambas as noções estão incorporadas na perspectiva epistêmica dos CDM dos professores de Matemática, sendo concebidas a partir da ideia de conhecimento especializado do conteúdo. Essa ideia compõe a diversidade de significados dos objetos matemáticos e componentes (situações-problema, linguagem, regras, argumentos e relações) necessários nos processos de estudos Matemáticos.

Na perspectiva de uma avaliação epistêmica sobre os conhecimentos institucionais, tomando por base o que é apontado no EOS sobre os conhecimentos do professor de Matemática (GODINO, 2009), concebe-se que os conhecimentos, provenientes dos componentes curriculares que estruturam os cursos de Licenciatura, incorporam uma sequência de elementos didáticos que podem, e deveriam, segundo as DCN (BRASIL, 2002a), entrelaçar-se no contexto de práticas do conhecimento do professor. Pode-se inferir que esses conhecimentos comuns do conteúdo se referem aos elementos matemáticos mínimos que o professor precisa dominar e articular para saber o que ensinar na Educação Básica (NAPAR; KAIBER, 2017). Já sobre os conhecimentos ampliados do conteúdo, dá-se a interpretação de que sejam aqueles conhecimentos matemáticos que estão dispostos nos níveis posteriores, bem como a outros contextos de ensino, os quais sustentam a construção dos

[9] Uma interpretação literal desse termo pode ser compreendida como “por si mesmo”. Com base no contexto apresentado por Godino et al. (2017), interpreta-se como ideias do conhecimento do conteúdo matemático que se estabelecem dentro do próprio contexto em que se inserem as práticas desses conhecimentos matemáticos, sendo eles conhecimentos comuns ou ampliados do conteúdo.

objetos matemáticos para ensino no domínio conceitual dos professores de Matemática, suscitando uma ideia que se entende estar vinculada ao “saber” como ensinar.

Tomando as DCN específicas dos cursos de Licenciatura em Matemática (BRASIL, 2002b), tem-se a visão de que as áreas de conhecimento matemático (Cálculo, Álgebra, Geometria e Análise) devem estar articuladas com o contexto de ensino das práticas dos professores de Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio, indicando elementos de sua necessidade para a problematização e aplicação dos conceitos apresentados para o futuro professor.

A perspectiva mencionada conduz a ideia do conhecimento ampliado do conteúdo, atribuindo os elementos de nível superior que devem estruturar uma visão matemática “avançada” sobre os objetos que o professor ensina. Mais que isso, devem possibilitar aos professores uma articulação entre problematizações e teorizações matemáticas que se vinculam e alicerçam o saber matemático para seu futuro campo de atuação profissional. E nesses aspectos, tem-se a visão de que:

> [...] os conhecimentos puramente matemáticos não são suficientes para que o professor organize, implemente e avalie os processos de ensino e aprendizagem. Os fatores que influenciam nesses ditos processos são complexos, e é necessário ter, também, um conhecimento mais profundo da matemática e seu ensino, diferente daquilo que adquirem os estudantes [...] (GODINO et al., 2017, p. 2).[10]

A articulação entre os conhecimentos comuns e ampliados do conteúdo, conforme Godino et al. (2017), fazem parte da constituição de conhecimentos necessários para o professor de Matemática, os quais, dentro da perspectiva epistêmica dos CDM, são chamados de conhecimentos especializados do conteúdo.

A discussão levantada sobre os conhecimentos na perspectiva epistêmica dos CDM de professores de Matemática direciona aos elementos vinculados a já destacada Dimensão Epistêmica da Idoneidade Didática. Porém, deve-se colocar que os Conhecimentos Didático-Matemáticos se constituem com um olhar a todas as facetas que englobam o EOS: Epistêmica, Ecológica, Mediacional, Interacional, Cognitiva e Afetiva (GODINO, 2009; SOARES, 2016; SOARES, KAIBER, 2016). O quadro da Figura 9 destaca uma síntese dessas facetas na perspectiva dos CDM (comuns e ampliados), em que: a primeira coluna indica o nome da faceta (GODINO; PINO-FAN, 2014; GODINO et al., 2017); a segunda coluna indica o significado teórico da faceta (GODINO et al., 2017); e a terceira coluna indica uma

[10] [...] los conocimientos puramente matemáticos no son suficientes para que el profesor organice, implemente y evalúe los procesos de enseñanza y aprendizaje. Los factores que influyen en dichos procesos son complejos, y es necesario tener también, un conocimiento más profundo de la matemática y su enseñanza, diferente del que adquieren los estudiantes [...].

possível relação entre os contextos referentes aos CDM e outras teorias que tratam da formação de professores de modo geral e/ou com olhar a Matemática (SOARES, 2016).

Figura 9 – Síntese das Facetas teóricas que compreendem o Conhecimento Didático-Matemático

Faceta	O que articula	Possíveis relações
Faceta Epistêmica	Refere-se ao Conhecimento Didático-Matemático sobre o próprio conteúdo; sobre a forma particular em que o professor de Matemática compreende e conhece a Matemática.	Conhecimento do Conteúdo (Shulman, 1986). Conhecimento do Conteúdo Matemático (Ball, Hill e Schilling, 2008). Saber disciplinar (Tardif, 2012).
Faceta Cognitiva	Refere-se ao conhecimento de como os professores de Matemática aprendem, racionalizam e entendem matemática no processo de sua aprendizagem e ensino.	Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (Shulman, 1986). Conhecimento do Conteúdo e do Aluno (KCS) (Ball, Hill e Schilling, 2008). Saberes da Ciência da Educação e Saberes Pedagógicos (Tardif, 2012).
Faceta Afetiva	Infere sobre os aspectos afetivos, emocionais, de atitudes e crenças sobre os objetos matemáticos no processo de ensino e aprendizagem.	
Faceta Interacional	Refere-se sobre o conhecimento do professor no ensino da Matemática: na organização de tarefas e atividades que visem reduzir as dificuldades de seus alunos sobre os objetos matemáticos e sobre o contexto escolar; sobre as interações que se estabelecem em sala de aula (professor e aluno).	Conhecimento do aluno e suas peculiaridades (Shulman, 1986). Conhecimento do Conteúdo e do Ensino (KCT) (Ball, Hill e Schilling, 2008).
Faceta Mediacional	É o conhecimento do professor sobre os recursos tecnológicos, materiais e temporais, apropriados para potencializar a aprendizagem de seus alunos.	
Faceta Ecológica	Conhecimento do professor sobre o conteúdo matemático com outras disciplinas e componentes curriculares, socioprofissionais, políticos e econômicos que conduzem os processos de instrução Matemática.	Conhecimento Curricular e Conhecimento dos objetivos, das finalidades e dos Valores Educativos (Shulman, 1986). Conhecimento Curricular (Ball, Hill e Schilling, 2008). Saberes Experienciais (Tardif, 2012).

Fonte: Godino e Pino-Fan (2014); Soares (2016); Godino et al. (2017).

Segundo Godino et al. (2017), todas essas facetas formam parte do conhecimento especializado do professor de Matemática na medida em que se põe em jogo objetos matemáticos na perspectiva comum ou ampliada do conhecimento. Como, por exemplo,

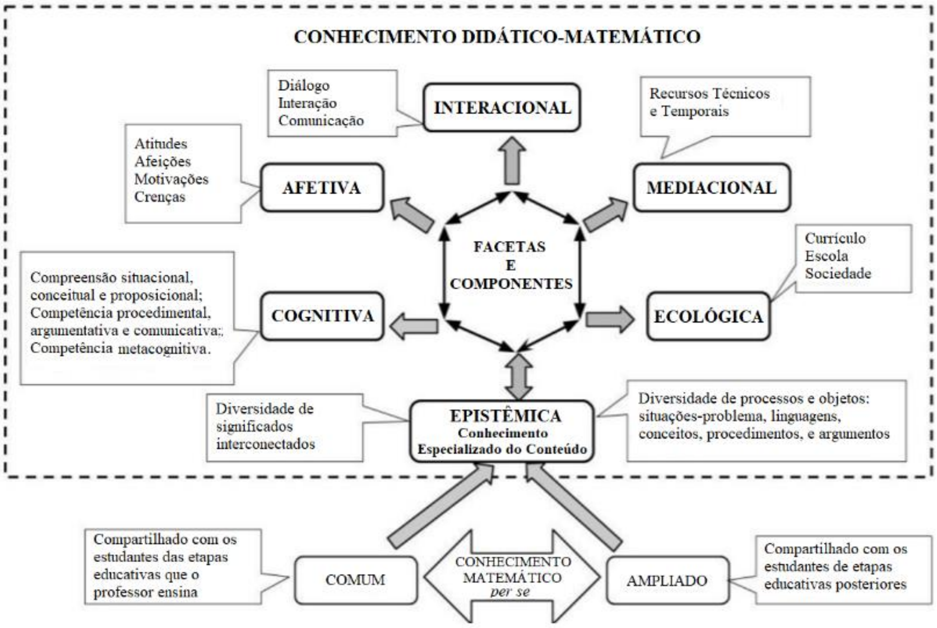
> [...] dada uma tarefa matemática determinada, o professor deve ser capaz de mobilizar a diversidade de significados que se colocam nos objetos matemáticos (Faceta Epistêmica) e também deve poder resolver a tarefa utilizando distintos procedimentos, mostrar diversas justificativas e explicações, variando-as para adaptar os conhecimentos a seus alunos (Faceta Interacional e Cognitiva) [...] (GODINO, et al., 2017, p.7, tradução nossa)[11].

As noções teóricas sobre o conhecimento do professor, na perspectiva do EOS, se articulam numa conjuntura de conhecimentos necessários para ensino que, de certa maneira, podem articular-se com ideias de outras perspectivas teóricas, tal como é indicado por Soares

[11] [...] dada una tarea matemática determinada, el profesor debe ser capaz de movilizar la diversidad de significados que se ponen en juego (faceta epistémica) y también debe poder resolver la tarea utilizando distintos procedimientos, mostrar diversas justificaciones y explicaciones, o bien variarla para adaptarla a los conocimientos de los alumnos (facetas instruccional y cognitiva) [...].

e Kaiber (2016). Porém, nesta investigação, aponta-se para o conhecimento do professor indicado na modelização de conhecimentos abordados por Godino et al. (2017) e, nesse sentido, buscando elucidar aspectos desse constructo, apresenta-se, na Figura 10 uma esquematização que representa o Conhecimento Didático-Matemático, na perspectiva do EOS.

Figura 10 – Esquematização do Conhecimento Didático Matemático



Fonte: Godino et al. (2017).

Na Faceta Epistêmica, foco dessa investigação, Godino et al. (2017) apontam que a proposta é levar em conta a diversidade de significados parciais dos objetos matemáticos e a interconexão nos conhecimentos dos professores de Matemática, conduzindo a sua descrição e buscando o reconhecimento das configurações semióticas correspondentes.

Particularmente, nesta investigação, os potenciais CDM de professores de Matemática serão utilizados na noção epistêmica e serão entendidos como as possibilidades das conexões matemáticas que os conhecimentos da Análise Matemática alicerçam no conhecimento matemático específico do professor (**conhecimento comum do conteúdo)**. Além disso, considera-se que é necessário, além do conhecimento matemático, que o professor tenha domínio sobre as conexões que se estabelecem institucionalmente nos diferentes níveis de ensino, principalmente no que diz respeito às relações que permitam ao professor vislumbrar, significar e relacionar (intramatemanticamente e extramateticamente)[12] esses elementos na

[12] Conforme Godino, Batanero e Font (2008), as relações são chamadas intramatemáticas quando há relação do objeto matemático dentro do próprio contexto matemático, seja com outros objetos, teoremas, definições, procedimentos, axiomas ou conceitos. Ainda segundo os autores, extramatemático é a relação que se transcende

sua prática docente e profissional na Educação Básica (**conhecimento ampliado do conteúdo**).

Destacaram-se, até o momento, elementos:

- que justificam e orientam a realização desta investigação, conforme as argumentações tecidas no capítulo 1;
- que interpõem uma interpretação sobre o percurso curricular das licenciaturas e dos documentos institucionais (pareceres, diretrizes e resoluções);
- que apresentam pesquisas já realizadas sobre a Análise Matemática para Licenciatura, como é apresentado no capítulo 3;
- sobre os aspectos teóricos que alicerçam as análises conduzidas nesse estudo, como foi descrito no capítulo 4.

Nesse sentido, o capítulo a seguir aborda o caminho metodológico adotado nesta investigação, indicando sobre a utilização dos referenciais teóricos, instrumentos e as ações realizadas.

---

o contexto matemático e relaciona o objeto matemático dentro de outros contextos, sejam eles, por exemplo, questões do mundo cotidiano ou relações em outros níveis de ensino.

5 ASPECTOS METODOLÓGICOS

Apresentam-se, neste capítulo, os aspectos que organizaram e orientaram a presente investigação. Para tanto, tomou-se como base o objetivo geral deste estudo que é **investigar articulações entre conhecimentos matemáticos institucionais da Análise Matemática para Licenciatura em Matemática e do Ensino Médio que apresentem potencialidades para alicerçar o conhecimento do professor de Matemática para atuar no Ensino Médio.**

No que segue, a próxima seção apresenta uma caracterização da investigação, definindo o cenário investigativo e as etapas metodológicas que incluem os procedimentos, instrumentos e protocolos utilizados considerando os objetivos estabelecidos.

5.1 CARACTERIZAÇÃO DA INVESTIGAÇÃO

Entende-se que os elementos que nortearam esta investigação estão atrelados aos pressupostos da pesquisa qualitativa, tal como são colocados por Bogdan e Biklen (1994) corroborados por Lüdke e André (2013). Segundo os autores, a investigação qualitativa apresenta cinco características que a identifica:

- a fonte dos dados é o ambiente natural e o pesquisador é seu principal instrumento;
- os dados são recolhidos, analisados e organizados com base em palavras e imagens que buscam significar os dados do investigador;
- há uma preocupação maior do investigador com o processo da investigação do que com o produto que emerge da mesma;
- considera as convicções dos participantes da pesquisa e, também, suas próprias, desde que se tenha em vista os objetivos declarados na investigação;
- o investigador atribui suas percepções hipotéticas à investigação, a fim de confirmá-las ou não. Porém, a inexistência das hipóteses não implica na desqualificação da investigação qualitativa.

A partir dessas características gerais para pesquisas de natureza qualitativa, entende-se pertinente apontar aspectos mais específicos que definem esta investigação. Tomando como referência Gil (2011), essa investigação assume um caráter de pesquisa exploratória e pesquisa explicativa, incorporando elementos de dois delineamentos investigativos: a pesquisa bibliográfica e a pesquisa documental.

Segundo Gil (2011), pesquisas exploratórias têm o como foco desenvolver, esclarecer e modificar conceitos e ideias, tendo em vista uma formulação de problemas precisos ou hipóteses pesquisáveis. Geralmente envolvem um levantamento bibliográfico e documental, entrevistas não padronizadas ou estudos de caso, e acabam por não utilizar, costumeiramente, técnicas quantitativas de coletas de dados ou técnicas padronizadas de análise (GIL, 2011).

Já no que refere às pesquisas explicativas, o autor aponta que o foco reside em identificar os fatores que determinam ou que contribuem para a ocorrência de fatos, explicitando e justificando os elementos que envolvem a razão e o porquê das coisas, constituindo-se como um tipo de complexo investigativo que se baseia na explicação dos elementos que as envolvem (GIL, 2011).

As pesquisas de natureza qualitativa, no contexto explicativo e exploratório, possuem delineamentos, no que se refere aos instrumentos e procedimentos utilizados para a coleta de dados (GIL, 2011). Nesse intuito, entende-se que a investigação incorpora elementos dos delineamentos de estudo da pesquisa bibliográfica e da pesquisa documental (GIL, 2011).

Segundo Gil (2011), uma pesquisa bibliográfica constitui-se a partir de materiais bibliográficos já elaborados, como livros e artigos científicos. Apesar de todos os delineamentos de pesquisas envolverem um momento investigativo que faça vínculo com esse tipo de investigação, há pesquisas que se desenvolvem exclusivamente a partir desses materiais e, assim, são definidas como pesquisas bibliográficas (GIL, 2011). Segundo o autor, esse tipo de investigação proporciona o benefício de delimitação direta dos fenômenos a serem discutidos e analisados na pesquisa.

Sobre as investigações em delineamento de pesquisa documental, as mesmas seguem um mesmo parâmetro adotado pelas investigações de delineamento bibliográfico, porém, referem-se à constituição de análises sobre documentos e materiais que ainda não possuem um tratamento analítico ou que podem ser reelaborados com os objetivos da investigação (GIL, 2011). Sua principal característica se fundamenta na análise de materiais que, inicialmente, se constituíram em grande número e que foram apontados para um olhar de análise, como, por exemplo: documentos oficiais, reportagens, cartas, contratos, etc. (GIL, 2011).

Assim, tomando como referência Gil (2011), entende-se que a pesquisa aqui desenvolvida possui características que abordam elementos de ambos os delineamentos, no que diz respeito à utilização e análise sobre materiais como livros, artigos, documentos oficiais que não recebem, normalmente, tratamento analítico (GIL, 2011). Nesse sentido, considera-se que a investigação aqui apresentada se constitui em **uma pesquisa de natureza qualitativa que incorpora elementos do nível exploratório e explicativo, sob um delineamento de pesquisa bibliográfica e documental.** Ainda, como já destacado, a investigação é entendida sobre dois aspectos fundamentais: exploratório, pelo motivo de que foram utilizados instrumentos e métodos investigativos para atender os objetivos estabelecidos na pesquisa; e explicativo, pois se objetivou, a partir a construção das análises dos dados, explicar, explicitar e justificar as relações que são atribuídas entre os objetos matemáticos institucionais da Análise Matemática para Licenciatura e Ensino Médio.

No que segue, coloca-se em destaque o caminho metodológico que compõe esta investigação.

5.2 ETAPAS E PROCEDIMENTOS DA INVESTIGAÇÃO

Apresentam-se, aqui, as três etapas que organizaram as atividades desta pesquisa, as quais se referem à: (1) constituição do referencial teórico, (2) delimitação do *corpus*[13] investigativo e (3) constituição de instrumentos para coleta de dados.

Por se constituir em uma investigação sob um delineamento de pesquisa bibliográfica e documental, os instrumentos de coletas de dados adquirem grande relevância. Assim, foram constituídos os protocolos de análise a seguir:

- Protocolo de análise das DCN para licenciaturas (apêndice A);
- Protocolo de análise das DCN específicas para Licenciatura em Matemática (apêndice B);
- Protocolo de análise dos Programas de Ensino dos Componentes Curriculares de Análise Matemática dos cursos de Licenciatura em Matemática (apêndice C);
- Protocolo de análise das Orientações Curriculares Nacionais do Ensino Médio (apêndice D);
- Dimensão Epistêmica da Idoneidade Didática do EOS Ferramenta de Análise Didática: Dimensão Epistêmica (apêndice E).

Estes instrumentos serão apresentados e descritos posteriormente. Para que se tenha uma visão geral das etapas a partir das quais a investigação foi conduzida, apresenta-se, no quadro da Figura 11, uma síntese das mesmas.

Figura 11 – Síntese do caminho investigativo

Etapas	Descritores	Referências/Instrumentos
1º – Constituição do referencial teórico	Pesquisas sobre a Análise Matemática no contexto da formação de professores de Matemática.	Reis (2001), Batarce (2003), Moreira, Cury e Vianna (2005), Bolognezi (2006), Otero-Garcia (2011), Martines (2012) e Otero-Garcia, Baroni e Martines (2013).

[13] A noção de *corpus* é entendida, aqui, na perspectiva da Análise Textual Discursiva segundo Moraes (2003). Para o autor, *corpus* é entendido como o conjunto de documentos que delimita o uso de materiais utilizados na investigação, podendo ser tanto os textos produzidos essencialmente para a pesquisa, quanto aos documentos já existentes previamente.

	Pesquisas sobre o percurso histórico das licenciaturas no Brasil.	Pereira (2000), Cury (2001), Linardi (2006), Martins-Salandim (2012) e Gomes (2016).
	Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) para cursos de licenciatura e Diretrizes Curriculares Nacionais específicas para cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática.	Brasil (2002a, 2002b, 2002c, 2007, 2015, 2017).
	Aspectos que compõem o Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e a Instrução Matemática (EOS).	Godino e Batanero (1994), Godino, Batanero e Font (2008, 2011, 2012), Godino (2009), Godino e Pino-Fan (2014) e Soares (2016).
2º – Delimitação do *Corpus* investigativo/Instrumentos constituídos para a investigação	Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) para cursos de Licenciatura.	Brasil (2002a, 2002c, 2007, 2015, 2017) – Apêndice A.
	Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) específicas para cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática.	Brasil (2002b) – Apêndice B.
	Programas de Ensino dos cursos de Licenciatura em Matemática das instituições.	Apêndice C.
	Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (OCNEM).	Brasil (2006) – Apêndice D.
	Referenciais institucionais dos objetos matemáticos da Análise Matemática para Licenciatura em Matemática.	Ávila (2006).
	Referenciais institucionais dos objetos matemáticos do Ensino Médio.	Dante (2013a, 2013b, 2013c) e Souza (2013a, 2013b, 2013c).
3º – Análise dos dados sob a ótica da Ferramenta de Análise Didática	Análise e articulação dos objetos Matemáticos sob a ótica da Ferramenta de Análise Didática: Dimensão Epistêmica.	Dante (2013a, 2013b, 2013c), Souza (2013a, 2013b, 2013c) Ávila (2006) – Apêndice E.

Fonte: o autor.

Com referência ao quadro da Figura 11, a primeira etapa é constituída dos elementos que englobam o referencial teórico desta investigação. Tomou-se como passo inicial buscar por investigações já realizadas sobre a temática da Análise Matemática para Licenciatura (REIS, 2001; BATARCE, 2003; MOREIRA, CURY E VIANNA, 2005; BOLOGNEZI, 2006; OTERO-GARCIA, 2011; MARTINES, 2012; OTERO-GARCIA; BARONI; MARTINES, 2013), buscando um direcionamento que pudesse apontar justificativas e consolidar um conhecimento sobre o que apontam as investigações sobre a referida temática. Em um segundo momento, considerou-se elementos que indicam a trajetória dos cursos de Licenciatura em Matemática no Brasil, a fim de se explanar um entendimento sobre as investigações (PEREIRA, 2000; CURY, 2001, LINARDI, 2006; MARTINS-SALANDIM, 2012; GOMES, 2016) e os documentos oficiais (BRASIL, 2002a, 2002b; 2002c; 2007; 2015a; 2017) que pudessem apresentar um direcionamento sobre como a formação inicial de professores foi – e é vista – no âmbito da profissionalização docente.

Além das questões mencionadas, essa etapa aponta para a escolha do referencial teórico que veio a fundamentar a análise produzida nesta investigação: Enfoque

Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (EOS) (GODINO; BATANERO, 1994; GODINO; BATANERO; FONT, 2008, 2011, 2012; GODINO, 2011, 2009; GODINO et al., 2017). Esse enfoque teórico foi escolhido tendo em vista a possibilidade de olhar para os processos de estudos matemáticos em dimensões que envolvem a prática escolar e uma perspectiva que categoriza a formação do conhecimento necessário para a atuação de professores de Matemática: Conhecimentos Didático-Matemáticos (CDM) (GODINO, 2009; GODINO, PINO-FAN, 2014; SOARES, 2016; SOARES; KAIBER, 2016; GODINO, et al., 2017).

Sobre a segunda etapa, aponta-se para os seguintes elementos que configuram o *corpus* da investigação:

- as Diretrizes Curriculares Nacionais para cursos de Licenciatura;
- as Diretrizes Curriculares Nacionais específicas para cursos de Licenciatura em Matemática;
- programas de Ensino de cursos de Licenciatura em Matemática das instituições de Ensino Superior de Porto Alegre e Região Metropolitana;
- as Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio;
- referências matemáticas institucionais: livros do Ensino Médio e livros para Análise Matemática para cursos de Licenciatura.

As Diretrizes Curriculares Nacionais para cursos de Licenciatura foram utilizadas para constituir parte do desenvolvimento do capítulo 2 desta investigação, para buscar evidências de como se estabeleceram as primeiras normatizações para os cursos de Licenciatura e, também, como se modificaram ao longo dos anos. Para tal, constituiu-se o Protocolo de análise das DCN para licenciaturas (apêndice A) para fundamentar as argumentações que são utilizadas em parte do capítulo 2. Tal protocolo teve foco nos seguintes elementos:

- questões que motivaram a reforma;
- sobre a carga horária estipulada e a sua estruturação;
- sobre a prática enquanto componente curricular e sobre os componentes curriculares de estágio supervisionado;
- sobre a parte diversificada do currículo, aquela em que o acadêmico pode optar sobre elementos de sua formação (monitorias, atividades de pesquisa, etc.);
- sobre as temáticas e elementos transversais que devem ser constituídos no professor.

As informações que constam nesse protocolo foram extraídas das Diretrizes Curriculares Nacionais para licenciatura, resoluções e pareceres publicados sobre o assunto entre os anos de 2002 e 2015. Incluem, portanto:

- a Resolução nº. 9 de 8 de maio de 2001, publicada em 18 de janeiro de 2002, Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica, em nível superior, curso de licenciatura, de graduação plena;
- a Resolução 28º de 8 de maio de 2001, publicada em 18 de janeiro de 2002, que dá nova redação ao Parecer CNE/CP 21/2001, que estabelece a duração e a carga horária dos cursos de Formação de Professores da Educação Básica, em nível superior, curso de licenciatura, de graduação plena;
- o Parecer nº. 9 de 5 de dezembro de 2007 (não consta resultado de publicação em diário oficial) que se refere à reorganização da carga horária mínima dos cursos de Formação de Professores, em nível superior, para a Educação Básica e Educação Profissional no nível da Educação Básica;
- a Resolução nº. 2 de 1 de julho de 2015, que define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação inicial em nível superior (cursos de licenciatura, cursos de formação pedagógica para graduados e cursos de segunda licenciatura) e para a formação continuada;
- a Resolução nº. 1 de 10 de maio de 2017, que dispõe as Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação inicial em nível superior (cursos de licenciatura, cursos de formação pedagógica para graduados e curso de segunda licenciatura) e para a formação continuada.

Sobre as Diretrizes Curriculares Nacionais para cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática, as mesmas foram utilizadas com objetivo de entender as questões que envolvem a formação do perfil profissional e das habilidades e competências estipuladas para os professores em formação Matemática. Além disso, buscou-se saber, também, sobre as áreas de conhecimento Matemático e os elementos didáticos que devem ser abordados e envolvidos ao longo do curso de formação de professores de Matemática. Com base nessa perspectiva, constituiu-se o Protocolo de Análise das DCN específicas para Licenciatura em Matemática (apêndice B), o qual buscou identificar:

- o perfil do egresso;
- competências e habilidades a serem desenvolvidas no licenciando; e
- as áreas do conhecimento matemático para formação inicial do professor.

Os Programas de Ensino foram utilizados para investigar sobre os conhecimentos matemáticos previstos para ensino nos componentes de Análise Matemática de um conjunto de Instituições que mantém cursos de Licenciatura em Matemática em Porto Alegre e Região Metropolitana. O principal objetivo foi determinar quais conhecimentos matemáticos estão sendo, de fato, abordados nesses currículos, os livros de referência bibliográfica e os objetivos dos componentes. Optou-se por buscar os materiais disponibilizados em modo público e *online*, com o objetivo de se obter um mesmo tipo de documento institucional de Instituições Públicas e Privadas[14].

Dessa investigação preliminar, se obteve as ementas de cursos de Licenciatura em Matemática de cinco Instituições, entre públicas e privadas. Dos documentos obtidos, se teve uma análise com base nos seguintes aspectos:

- elementos que descrevem a ementa diretamente;
- objetivo do componente curricular;
- a carga horária destinada aos componentes;
- os conteúdos abordados;
- os recursos que são utilizados para metodologia de ensino nesses componentes;
- as referências bibliográficas indicadas.

Essa análise foi constituída por meio do Protocolo de análise dos Programas de Ensino dos Componentes Curriculares de Análise Matemática dos cursos de Licenciatura em Matemática (apêndice C).

A partir de uma primeira análise dos dados obtidos com a aplicação desse protocolo, foram estabelecidos quais objetos matemáticos seriam analisados na perspectiva da Análise Matemática: Lógica Matemática e Conjunto dos Números Reais parte I (ÁVILA, 2006).

Além disso, foi possível determinar o referencial institucional matemático da Análise Matemática que é usado nesta investigação: “Análise Matemática para licenciatura” de Ávila (2006). Justifica-se o uso dessa bibliografia pelo fato de que a mesma está indicada, em variadas versões, como referência bibliográfica em todos os Programas de Ensino analisados e, por conta das disponibilidades materiais, tomou-se a versão destacada.

[14] Apesar das Instituições Públicas, por força da lei nº. 13.168 de 6 de outubro de 2015, terem o dever de oferecer seus documentos institucionais em domínio público, as Instituições Privadas não estão sob domínio da mesma lei. Nesse sentido, com base nas tentativas se de obter os documentos presencialmente nas instituições, houve a dificuldade de se obter certos documentos institucionais, como o Plano de Ensino, por conta de o solicitante ser exterior à instituição. Com tais elementos, considera-se esse aspecto como justificativa para a utilização dos Programas de Ensino, também conhecidos como ementas, e não dos Planos de Ensino, uma vez que, na busca pelos documentos das Instituições Privadas de Ensino Superior da região, foram os únicos documentos encontrados em modo público e *online*.

Com o Protocolo de análise das DCN específicas para Licenciatura em Matemática (apêndice B) e o Protocolo de análise dos Programas de Ensino dos Componentes Curriculares de Análise Matemática dos cursos de Licenciatura em Matemática (apêndice C), objetivou-se atender ao objetivo específico: **investigar os objetos matemáticos institucionais da Análise Matemática, previstos para desenvolvimento em cursos de Licenciatura em Matemática, a partir de uma análise dos componentes curriculares de Análise Matemática de cursos de universidades de Porto Alegre e Região Metropolitana.**

Ainda, nessa etapa, tomou-se a atenção para os objetos matemáticos que são destacados nas Orientações Curriculares Nacionais do Ensino Médio (OCNEM) (BRASIL, 2006). O documento estabelece os objetos matemáticos orientados para ensino no Ensino Médio e os compartimenta em blocos de conhecimento: Números e Operações, Geometria, Análise de Dados e Probabilidade. Com base no documento referido, criou-se o Protocolo de análise das OCNEM (apêndice D) que permitiu verificar os objetos matemáticos que são previstos para ensino no Ensino Médio, relacionando-se, portanto, ao objetivo específico: **identificar objetos matemáticos institucionais pertinentes ao Ensino Médio, a partir das Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio.** Isso permitiu, de certo modo, potencializar a escolha dos objetos matemáticos da Análise Matemática tomados para análise.

Além dos elementos destacados, aponta-se para a parte do *corpus* utilizada, também, como referencial institucional dos objetos matemáticos do Ensino Médio. Para essa parte, tomou-se como referência a coleção de livros mais indicados, em primeiro e segundo lugar, no Plano Nacional do Livro Didático de 2015 (PNLD) (BRASIL, 2015), os quais compreendem, respectivamente: a coleção de livros “Matemática: Contexto e Aplicações” de Luiz Roberto Dante (2013a, 2013b, 2013c) e a coleção de livros “Novo Olhar: Matemática” de Joamir Souza (2013a, 2013b, 2013c).

Por fim, na terceira etapa, com base nos referenciais teóricos utilizados e nos objetos matemáticos delineados para a análise no estudo, constitui-se a análise dos objetos matemáticos da Análise Matemática (ÁVILA, 2006) segundo a ótica da Ferramenta de Análise Didática: Dimensão Epistêmica (apêndice E). Essa análise foi estruturada a partir de uma articulação com os objetos matemáticos institucionais do Ensino Médio (BRASIL, 2006; DANTE, 2013a, 2013b, 2013c; SOUZA, 2013a; 2013b; 2013c). Esses elementos de análise têm como direcionamento atender ao objetivo específico: **analisar os objetos matemáticos institucionais da Análise Matemática para licenciatura que, potencialmente, podem ser vinculados com objetos matemáticos do Ensino Médio.**

Assim, tendo por base as análises mencionadas e os referenciais teóricos adotados, passou-se a refletir e discutir sobre os conhecimentos da Análise Matemática na formação do professor de Matemática como um conjunto de elementos que, potencialmente, sirvam para o contexto de atuação docente do professor de Matemática do Ensino Médio. Encontrou-se, assim, no âmbito do que Godino (2009) estabelece como Conhecimento Didático-Matemático, uma fundamentação nos elementos teóricos que compõem o EOS, para discutir sobre o conhecimento do professor de Matemática na perspectiva do ensino, da prática e da Matemática. Esse contexto teórico orienta, portanto, a análise dos dados da investigação para indicar os potenciais aspectos que são percebidos, aqui, na atuação do professor de Matemática, os quais explicitam o alcance, ou não, do objetivo especifico de **investigar e apresentar possíveis articulações que, em potencial, possibilitem emergir Conhecimentos Didático-Matemáticos que permitam ao futuro professor de Matemática vincular a Análise Matemática para licenciatura com o contexto da atuação docente no Ensino Médio.**

6 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DE DADOS

Este capítulo apresenta a análise e discussão dos dados advindos das fontes que constituíram o *corpus* de análise dos dados e está estruturado em torno de três tópicos:

- análise dos componentes de Análise Matemática dos cinco cursos de Licenciatura em Matemática de Instituições de Nível Superior de Porto Alegre e região metropolitana de Porto Alegre;
- análise das Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio e de coleções de livros didáticos do Ensino Médio indicados pelo Plano Nacional do Livros Didático de 2014;
- análise dos objetos matemáticos da Análise Matemática (ÁVILA, 2006), sob a ótica da Ferramenta de Análise Didática: Dimensão Epistêmica, que é apresentada em articulação com os objetos matemáticos do Ensino Médio.

Em um primeiro momento, lança-se um olhar para os Programas de Ensino dos componentes de Análise Matemática dos cinco cursos de Licenciatura de universidades públicas e privadas de Porto Alegre e da região metropolitana de Porto Alegre, buscando captar elementos que permitiram perceber como a Análise Matemática é tomada no currículo.

Num segundo momento, toma-se como referência as Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (OCNEM) (BRASIL, 2006) para conduzir uma reflexão sobre os objetos matemáticos designados para ensino no Ensino Médio. A escolha do referido documento justifica-se por conta de que o mesmo apresentar orientações curriculares sobre os objetos matemáticos que devem ser conduzidos no nível de ensino destacado. Entende-se que essas diretrizes podem apresentar o estabelecimento das primeiras relações entre os conhecimentos matemáticos do Ensino Médio e os conhecimentos matemáticos da Análise Matemática para Licenciatura.

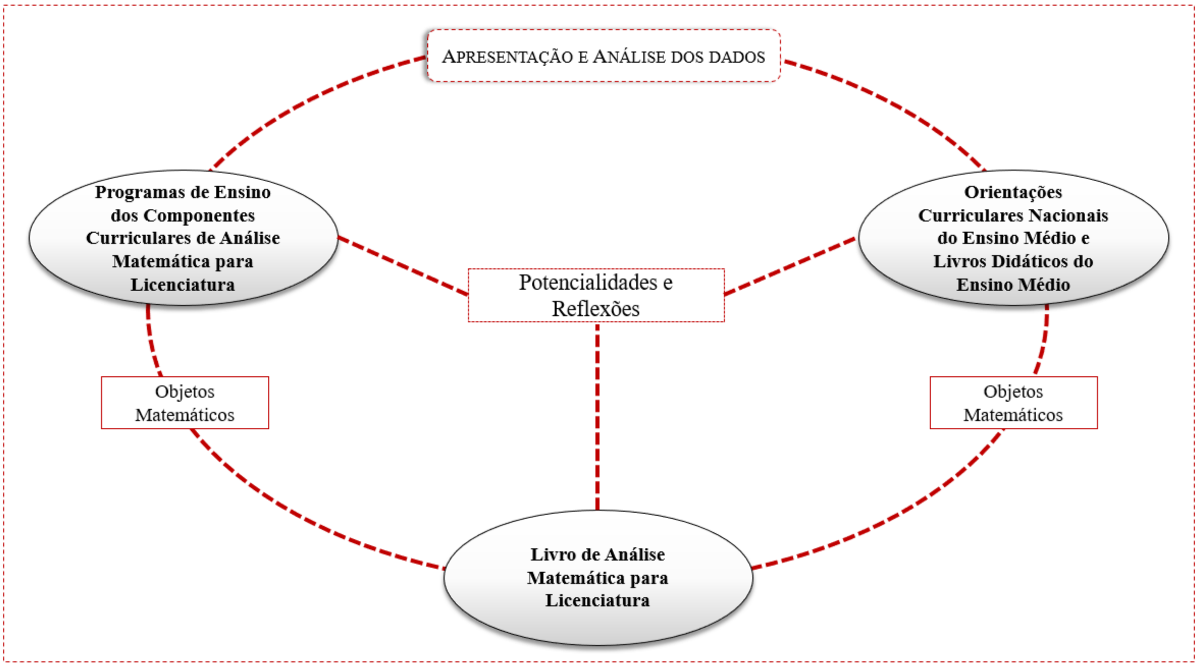
Com base nas OCNEM, referente aos objetos matemáticos a serem trabalhados nesse nível de ensino, apresenta-se, ainda, uma análise de duas coleções de livros didáticos do Ensino Médio, os quais são tomados como base institucional para as reflexões e articulações em torno dos conhecimentos da Análise Matemática. Essa análise é realizada a partir das duas coleções de livros didáticos mais distribuídos no componente curricular de Matemática, conforme o Plano Nacional do Livro Didático de 2015 (PNLD) (BRASIL, 2014).

Por fim, num terceiro momento, aplica-se a Ferramenta de Análise Didática: Dimensão Epistêmica (FADDE) do EOS (GODINO, 2011) nos objetos de estudo da Análise

Matemática que foram delimitados para análise, tomando como referência matemática o livro de Ensino Superior de Ávila (2006).

A partir dos resultados da aplicação da ferramenta, constitui-se uma análise que compõe uma articulação e reflexão conjunta com os conteúdos matemáticos dos livros didáticos do Ensino Médio. A Figura 12 apresenta uma esquematização das análises que serão apresentadas neste capítulo.

Figura 12 – Representação da esquematização para a análise de dados.



Fonte: o autor.

Os dados e análises que serão levantados neste capítulo buscam subsidiar argumentos que conduzam atender o objetivo de **investigar e apresentar possíveis articulações que, em potencial, possibilitem emergir Conhecimentos Didático-Matemáticos que permitam ao futuro professor de Matemática vincular a Análise Matemática para licenciatura com o contexto da atuação docente no Ensino Médio.**

As seções a seguir apresentam a análise de dados constituída.

6.1 ANÁLISE DOS COMPONENTES CURRICULARES DE MATEMÁTICA DE CINCO CURSOS DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA.

Com o objetivo de delinear os conteúdos matemáticos que são abordados nos componentes curriculares de Análise Matemática em cursos de Licenciatura em Matemática, traça-se, a partir dos Programas de Ensino de cinco cursos de Licenciatura de Porto Alegre e região metropolitana de Porto Alegre, um panorama desses objetos matemáticos. São tomadas como parte da análise, também, a carga horária destinada aos conhecimentos que são declarados para serem desenvolvidos nos cursos, bem como os objetivos apresentados nesses documentos, a fim de tecer-se uma análise sobre o que está contido nos mesmos.

O foco da análise, aqui, é indicar quais conteúdos serão analisados na perspectiva do enfoque teórico (EOS) que baseia esta investigação. Tem-se em vista que os conteúdos tomados para a análise devem possuir, na base matemática, o maior vínculo preliminar possível com os conteúdos matemáticos que o futuro professor, ou professor em atuação, ensinará na Educação Básica, conforme as DCN específicas para os cursos de Licenciatura em Matemática (BRASIL, 2002b).

Em um primeiro momento, com o objetivo de identificar os conteúdos matemáticos da Análise Matemática que são trabalhados nos componentes de Análise Matemática dos cursos de Licenciatura, tomam-se os conhecimentos institucionais de maior presença nos componentes curriculares de Análise Matemática. A partir do delineamento desses conteúdos, selecionaram-se os que potencialmente poderiam ter relação com o Ensino Médio e, assim, destacaram-se aqueles que foram submetidos à análise epistêmica em busca das possíveis relações. Como respaldo para essa conexão inicial, se utiliza das orientações oficiais relacionadas aos conteúdos matemáticos do Ensino Médio: Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (OCNEM) (BRASIL, 2006).

O quadro da Figura 13 destaca os componentes curriculares relacionados à Análise Matemática, identificados a partir das ementas dos cursos de Licenciatura de referência, e a carga horária destinada aos mesmos em cada um dos mesmos. A fim de manter a confidencialidade das instituições as quais se extraiu as informações, se denominará os cursos pelas letras de “A” a “E” do alfabeto.

Figura 13 – Componentes curriculares de Análise Matemática que compõem os cursos de Licenciatura

Cursos de Licenciatura	Número de componentes	Nome dos Componentes	Carga Horária
A	2	Análise Matemática I/Análise Matemática II	68 h + 68 h = 136h
B	1	Introdução a Análise Matemática	60 h
C	2	Análise Real I/Análise Real II	60 h + 60 h = 120h
D	2	Análise I/Análise II	80 h + 80 h = 160h
E	1	Análise Matemática	72 h

Fonte: a pesquisa.

Todos os cursos analisados contemplam componentes curriculares que são desenvolvidos no campo da Análise Matemática. Destacam-se as denominações que, apesar de semelhantes, diferenciam-se de curso para curso. Entretanto, é possível perceber que a fundamentação de conhecimentos matemáticos mínimos são os mesmos, mudando somente no aprofundamento ou na extensão que se abrangem os conteúdos matemáticos.

Sobre a carga horária dedicada à área da Análise Matemática, verificou-se que três dos cinco cursos apresentam dois componentes curriculares de estudo, com cargas horárias variáveis, como pode ser visto no quadro da Figura 13. Os dados apontam que os cursos com dois componentes curriculares dedicados à Análise (cursos A, C e D) têm desde 120 horas até 160 horas, o que indica, nesse caso, uma diferença, considerada significativa, de até 40 horas entre os outros dois cursos.

Já os cursos B e E apresentam menor carga horária específica dedicada à Análise, 60 e 72 horas, o que leva a uma diferença de até 100 horas do curso com menor carga horária para o de maior carga horária. Apesar da diferença, considera-se que isso não se constitua necessariamente como negativa, pois se entende que os estudos que tratam o conjunto de conhecimentos da Análise possam ser abordados, também, em outros componentes que compõem esses cursos de Licenciatura, como no caso dos componentes de Cálculo Diferencial e Integral (REIS, 2001) e das disciplinas que realizam tratamento de demonstrações e provas (ÁVILA, 2006). Porém, para argumentar com maior efetividade sobre essa questão, seria necessário analisar os cursos de Licenciatura integralmente e transversalmente, o que vai além do objetivo desta investigação.

Uma questão que é importante, e foi observada na análise dos documentos, se refere às ementas que apresentam elementos dos objetivos estabelecidos pelos cursos sobre os componentes curriculares. O quadro da Figura 14 destaca os objetivos dos documentos analisados[15].

Figura 14 – Objetivos dos componentes curriculares investigados

Cursos	Componentes	Ementa	Objetivos
A	Análise Matemática I	-Fundamentação do cálculo a uma variável na busca da compreensão de conjuntos e sequências numéricas, bem como limite de funções.	Desenvolver a formalização e interpretação de conjuntos numéricos, sequências e funções reais de uma variável sob o enfoque da Análise Matemática, tratando das transformações e tratamentos entre as diferentes linguagens: algébrica, numérica e geométrica.
	Análise Matemática II	-Fundamentação do cálculo a uma variável na busca da compreensão da continuidade, da derivada e das integrais impróprias, bem como o estabelecimento de relações entre os conceitos estudados.	Formalizar registros de representação conceitual de continuidade e derivada de uma função real e de integrais impróprias, tratando das transformações e tratamento entre as diferentes linguagens: algébrica, numérica e geométrica.
B	Introdução a Análise Matemática	-Construção do Conjunto dos Números Reais como um corpo ordenado completo, a partir do estudo de conjuntos finitos,	Conceituar precisamente os elementos que fundamentam a Análise Matemática, usando uma linguagem correta e adequada, encadeando

[15] Para tecer a argumentação da análise que sucede essa parte investigativa, utiliza-se, como base de orientação, o protocolo D desta investigação.

		infinitos, enumeráveis e não enumeráveis. -Formalização do conceito de limite de sequências e demonstração de suas propriedades. Análise da convergência de séries infinitas.	logicamente as proposições. Além disso, analisar propriedades e relacionar tópicos estudados com os conteúdos do Ensino Fundamental e Médio.
C	Análise Real I	-Números Reais: conjuntos infinitos, enumeráveis e não enumeráveis, supremo. -Sequências infinitas: limite, Teorema de Bolzano-Weierstrass, critério de Cauchy. -Séries Numéricas: convergências.	Estudar a formalização dos fundamentos do Cálculo Diferencial e Integral pela dedução rigorosa de seus teoremas basiliares a partir de uma lista de axiomas dos números reais. A ênfase não está na novidade dos resultados estudados, mas na clara demonstração dos mesmos.
	Análise Real II	-Continuidade: limites, descontinuidades, Teorema do Valor Intermediário. -Diferenciabilidade: derivada, máximos e mínimos, Teorema do Valor Médio. -Sequências e séries de funções: convergências e séries de potências.	
D	Análise I	-Conjuntos e funções. -Conjuntos finitos, enumeráveis e não-enumeráveis. -Números Reais. Sequências e séries de números reais. -Topologia da reta.	O objetivo geral é estudar com uma abordagem mais rigorosa e formal os conceitos apresentados na ementa, com ênfase na precisão e nas técnicas de demonstração.
	Análise II	-Limites de Funções. Funções Contínuas. Derivadas. Integral de Riemann. Sequências e Séries de Funções.	
E	Análise Matemática	-O corpo ordenado dos números reais e Sequências e Séries Infinitas.	Familiarizar-se com demonstrações, percebendo a construção histórica dos Números Reais na visão da Matemática pura.

Fonte: a pesquisa.

No curso A, percebeu-se, pelo objetivo da ementa, que os componentes curriculares de Análise I e II focam em abordar os conhecimentos que envolvem Conjuntos Numéricos, Sequências, Funções Reais, Derivadas e Integrais Impróprias. Além disso, destacam a relação entre conversões de diferentes registros de representação do objeto matemático (GODINO, 2011) e no tratamento de definições e proposições que envolvem a formalização dos elementos matemáticos.

O objetivo que é estabelecido para esses componentes mostra-se pertinente ao principal foco da Análise Matemática que, segundo Reis (2001), é abordar os objetos do Cálculo com o objetivo de formalizá-los a partir de definições, proposições e demonstrações. Porém, mesmo tendo foco concreto e pertinente a perspectiva da Análise Matemática, o objetivo não apresenta elementos que indiquem a relação que há entre os conhecimentos ali apresentados e a formação dos licenciandos. Tem-se em vista, a perspectiva de que poderiam ser estabelecidos objetivos que envolvessem o contexto profissional de professores de Matemática, de modo a estar consoante ao objetivo formativo institucional do egresso, conforme é apresentado pelas DCN específicas para Licenciaturas em Matemática (BRASIL, 2002b).

De certa maneira, parece que o pensamento atribuído para esse componente, no caso do curso A, está vinculado aos modos de ser ver o mundo pela visão do matemático (MOREIRA; CURY; VIANNA, 2005), o que, em hipótese, pode acabar, mais uma vez, distanciando o perfil profissional que se deseja formar nos licenciandos. Já na parte legal, as DCN específicas para Licenciatura apontam para a necessidade de que um curso formativo de professores de Matemática que possibilite formar um profissional capaz de compreender a Matemática flexivelmente para que tenha condições de mostrar aos seus educandos a noção de que a Matemática pode ser retórica e transversal ao contexto de suas aplicações (BRASIL, 2002b).

O curso B apontou como objetivo tratar de conceituar, precisamente, os elementos que fundamentam a Análise, encadeando-os em linguagem lógica e formal. Percebeu-se que esse curso apresenta um enfoque sobre a análise de propriedades e a relação de tópicos abordados com os conteúdos do Ensino Fundamental e Ensino Médio. Entende-se, assim, que o documento institucionaliza a decisão de que o componente deve articular os tópicos estudados na Análise com os elementos do contexto de atuação do futuro professor. Mostra-se, nesse sentido, uma consonância com os elementos trazidos pelas DCN específicas para os cursos de Licenciatura em Matemática (BRASIL, 2002b), ao se mencionar sobre a necessidade de que o acadêmico desenvolva a visão da aprendizagem do curso de nível superior com a prática docente.

Entende-se que o objetivo desse componente pode possibilitar uma perspectiva que busque introduzir elementos do contexto docente na aprendizagem do licenciando, possibilitando, potencialmente, uma significação pessoal para o acadêmico, como uma configuração de seus Conhecimentos Didático-Matemáticos (CDM) (GODINO et al., 2017). Porém, essa parte da análise faz emergir um questionamento sobre o que é apresentado no documento e o que é efetivamente executado em sala de aula: como são conduzidas as práticas de ensino de Análise Matemática no componente curricular desse curso? Será que permitem ao licenciando realmente relacionar o contexto da Análise Matemática à sua atuação docente?

Sobre o curso C, destaca-se um objetivo que direciona o foco do componente curricular não a “novidade” de conteúdos matemáticos, mas, sim, a demonstrações matemáticas que possibilitem verificar a efetividade de teoremas, axiomas e proposições. Outrossim, um aspecto que é contemplado no objetivo dos componentes desse curso diz respeito à participação dos alunos na resolução de exercícios e problemas, com o foco de consolidar atitudes de participação crítica e autocrítica por parte do futuro professor. De certa forma, esse objetivo indica uma preocupação com os elementos de ensino que formam as visões do professor de Matemática sobre a Matemática e as práticas em sala de aula.

Pode-se inferir que mencionar sobre a autocrítica do licenciando se refira à percepção de desenvolver, no futuro professor, a capacidade de enfocar suas práticas matemáticas com condições de revê-las ou pensar sobre como vê-las. Entende-se que essa seja uma postura importante a ser desenvolvida pelos futuros professores de Matemática, pois se percebe um caminho para a constituição de um perfil profissional que abarca as reflexões e o autoconhecimento do professor. Nesse contexto, destaca-se aqui, portanto, a noção da Idoneidade Didática do EOS.

Segundo Godino (2009), a Idoneidade Didática se constituí uma ferramenta capaz de orientar as reflexões sobre os processos de estudos matemáticos para a intervenção eficaz em sala de aula. Defende-se, nesse sentido, que as ferramentas que emergem da Idoneidade Didática conduzem a possibilidade de levar o professor de Matemática, e os futuros professores, a refletirem nos posicionamentos (epistêmicos, cognitivos, afetivos, interacionais e mediacionais) que se moldam e se constituem na sala de aula. Essa reflexão toma caráter essencial na construção da autocrítica, crítica e, principalmente, na participação de professores e futuros professores sobre sua prática em sala de aula, bem como em relação as modificações educacionais institucionais necessárias para a qualificação do ensino.

Considerando a perspectiva da Análise Matemática e do objetivo do componente curricular no curso C, podem-se criar e estabelecer metas de um perfil participativo e crítico no futuro professor que, possivelmente, com base em Bolognezi (2006), ofereçam significações e conhecimentos sobre a Análise Matemática na prática docente, constituindo, assim, uma forma diferente de se estruturar e pensar sobre o componente de Análise.

Sobre os cursos D e E, destacam-se algumas palavras presentes: rigorosa, formal e Matemática pura.

O curso D aponta no objetivo do componente que seu foco é trabalhar com demonstrações rigorosas dos conceitos apresentados na ementa, se referindo, basicamente, aos objetos matemáticos do Cálculo.

Avaliou-se que o objetivo do componente, nesse curso, está bastante atrelado à significação de que “[...] o papel da disciplina é consolidar e formalizar conteúdos, bem como propiciar cultura e bagagem matemática” **(**OTERO-GARCIA; BARONI; MARTINES, 2013, p. 708)**.** Otero-Garcia, Baroni e Martines (2013) apontam que a formalização rigorosa, quando não vinculada à prática docente na Educação Básica, pode acabar fazendo alusão a uma matemática “não articulável”, que desconsidera a necessidade do perfil profissional dos futuros professores. Nesse contexto, o objetivo direciona que a formação do professor nesse componente está em conhecer, rigorosamente, como os objetos matemáticos são constituídos, e não em como eles são podem ser constituídos no ensino da Matemática ou, ainda, como esses podem ser vistos em outros níveis de ensino.

Pelo exposto, pode-se inferir que nos cursos D e E a Análise Matemática tem foco principal em fundamentar o conhecimento matemático do professor, indicando o que Otero-Garcia, Baroni e Martines (2013) chamam de “cristalização da disciplina”, no que se refere a visão formativa dos licenciandos. Nesse caso, o objetivo apresenta como principal teor a abordagem formal e rigorosa que é entendida na Matemática Pura, o que deixa de lado, em parte, o objetivo de se possibilitar o licenciando a constituir um perfil para a atuação na Educação Básica (BRASIL, 2002b).

Por fim, destaca-se, como último elemento desse trecho da análise, o objetivo do curso E, que indica a formulação de elementos que levem o licenciando a perceber a construção histórica dos Números Reais. Pode-se inferir, a partir dessas palavras, a relevância dos conceitos históricos que, apesar de poderem ser abordados nos componentes dos outros cursos, foram indicados explicitamente nesse componente. Segundo Batarce (2003), na perspectiva da História da Matemática, é importante que hajam elementos históricos que objetivem formar um conjunto de pensamentos matemáticos para permitir que o aluno possa interpretar como os conhecimentos matemáticos foram se estruturando com o passar do tempo. Esses elementos históricos podem ofertar um ponto de vista epistemológico junto à história e, desse modo, potencialmente, apontar interpretações sobre as bases matemáticas que fundam os objetos aprendidos.

Destaca-se como importante, em relação à Análise enquanto componente, que se incorpore a ideia de se estabelecer relações entre o contexto da Análise Matemática e a Educação Básica (curso B) em um cenário de postura crítica que vise a autocrítica e a reflexão (curso C) e o contexto dos elementos históricos (curso E). Entretanto, deve-se ter em vista que constar nos documentos institucionais e obrigatórios não implica que tais práticas sejam realmente executadas, principalmente quando, concordando com o pensamento de Cury

(2001), pode haver um distanciamento entre o que está previsto nos documentos institucionais e o que realmente é desenvolvido na sala de aula. Além disso, pode-se inferir, ainda, que no caso dos componentes curriculares dos cursos A e D, mesmo não havendo uma declaração de aspectos que ultrapassem um limite da matemática a rigor, potencialmente, o professor que ensina Análise pode incorporar posturas que reflitam essas ideias em suas práticas na sala de aula.

Seguindo com a análise dos documentos, traçou-se um panorama geral dos conteúdos que estavam descritos nas ementas das disciplinas de Análise dos cursos. De modo geral, atentou-se para os objetos matemáticos que englobam o estudo de cada um dos componentes, com base no protocolo do apêndice C desta investigação. No quadro da Figura 15, apresentam-se os conteúdos indicados nesses documentos, apontando, a partir de uma perspectiva global[16], os conteúdos matemáticos envolvidos.

Figura 15 – Panorama dos conteúdos matemáticos abordados nos componentes de Análise Matemática nos cursos de Licenciatura

Blocos de Conteúdo	Conteúdos Matemáticos	Cursos
1	Noções de Lógica Matemática: tratamento de métodos de demonstrações para pensamento matemático	A, B, C, D, E
2	Conjuntos dos Números Reais.	A, B, C, D, E
3	Conjuntos infinitos e finitos, enumeráveis e não enumeráveis.	A, B, C, D, E
4	Sequências e Séries numéricas.	A, B, C, D, E
5	Topologia da reta.	A, C, D
6	Limite de funções.	A, C, D
7	Funções contínuas.	A, C, D
8	Derivada: definições e formalização de conceitos.	A, C, D
9	Comportamento gráfico de funções reais de variável real.	A
10	Integração de Riemann	A, C, D
11	Integrais impróprias: condições de existência.	A, C, D
12	Séries e Sequencias de Funções	C, D

Fonte: a pesquisa.

Destaca-se que os blocos de conteúdo de um a quatro são abordados por todos os componentes dos cursos analisados. No que se refere à carga horária, há a possibilidade de que o conjunto desses conhecimentos sejam abordados com profundidades distintas dos demais, principalmente nos cursos B e E, por possuírem uma carga horária menor e que é dedicada, exclusivamente, para a temática dos conteúdos mencionados no quadro da Figura 15. Porém, entende-se que seria necessário, para a confirmação dessa conjectura, uma análise utilizando os planos de ensino das disciplinas. Entretanto, a tentativa de localizar esses documentos nas intuições, como já destacado na metodologia, foi falha, o que não permitiu

[16] Essa perspectiva global é entendida como o tópico que abarca os conteúdos matemáticos da área de conhecimento que consta nos documentos. A lista completa, tal qual está prevista nos documentos, é apresentada no apêndice C desta investigação.

uma explanação maior sobre esses conteúdos na perspectiva institucional, sendo tomado como referência, então, somente os elementos perceptíveis nas ementas.

É possível verificar, pelo quadro da Figura 15, quais blocos de conteúdo são abordados em todos os cursos de Licenciatura: (1) Noções de Lógica Matemática: tratamento de métodos de demonstração para o pensamento matemático; (2) Conjunto dos Números Reais; (3) Conjuntos infinitos e finitos, enumeráveis e não enumeráveis; (4) Sequências e Séries Numéricas.

A partir da verificação de que os quatro primeiros blocos de conteúdo são pertinentes a todos os cursos de Licenciatura, tomou-se a decisão de escolher os blocos (1), (2) e (3) para serem analisados sob a ótica epistêmica do EOS. Além disso, busca-se respaldo, tomando como referencial as Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (OCNEM) (BRASIL, 2006), nos blocos de conhecimentos que devem ser ofertados ao Ensino Médio para identificar uma conexão preliminar entre os objetos destacados para a análise. Esse respaldo é apresentado na seção 6.2 deste capítulo.

Outro aspecto que está presente nas ementas diz respeito às bibliografias indicadas para estudo e leitura[17]. Em todos os cursos analisados, como bibliografia básica são indicados os livros como “Curso de Análise”, do autor Elon Lages Lima, nas mais variadas edições (1995; 2000; 2008; 2009) e “Análise Matemática para licenciatura” em diversas edições do autor Geraldo Ávila (2006; 2009; 2011). Além desses livros, são indicados livros de Cálculo, como Anton (2007), Swokowski (2000) e Stewart (2014) entre outros, como referência complementar.

A presença do livro “Análise Matemática para licenciatura” em todos os cursos de Licenciatura, cujas ementas das disciplinas de Análise foram analisadas, fortalece a decisão da utilização desse livro como respaldo institucional dos objetos matemáticos que serão analisados nos próximos tópicos desse capítulo. Entende-se, ainda, que é importante a adoção, não só nos cursos em foco, mas também em cursos de Licenciatura em Matemática de modo geral, de livros que possuam um direcionamento para a formação de professores, pois esses podem trazer elementos que caminhem para a importância de se estudar Análise Matemática num curso de Licenciatura (REIS, 2001; BATARCE, 2003).

Tendo por respaldo essas indicações, tomou-se a decisão de usar o livro “Análise Matemática para licenciatura” na 3º edição (ÁVILA, 2006), como documento para ser analisado, buscando identificar os objetos de estudo da Análise Matemática. Em

[17] Esses elementos foram extraídos dos Programas de Ensino que são apresentados no apêndice C.

correspondência conceitual aos blocos de conteúdo escolhidos para análise, definem-se os seguintes capítulos do livro que foram utilizados: "Preliminares de Lógica" e "Conjunto dos Números Reais parte I".

Com as reflexões construídas até aqui, a seção a seguir busca apresentar elementos dos objetos matemáticos, segundo as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006), com o objetivo de trazer elementos matemáticos para conduzir a reflexão e articulação da análise epistêmica dos objetos matemáticos da Análise Matemática com os do Ensino Médio. Apresenta-se, ainda, uma análise em torno dos livros didáticos do Ensino Médio que são utilizados como referenciais institucionais dos objetos matemáticos desse nível de ensino.

6.2 SOBRE OS OBJETOS MATEMÁTICOS DO ENSINO MÉDIO

A escolha do material das Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (OCNEM) (BRASIL, 2006) se justifica pelo fato de ser um documento que trata, especificamente, das orientações oficiais sobre como os objetos de conhecimento matemático podem ser abordados pelo professor de Matemática no Ensino Médio. A análise desse documento, com olhar aos objetos matemáticos, permitiu identificar os conteúdos do conhecimento matemático a serem trabalhados no Ensino Médio. O objetivo desta análise esteve em identificar, de modo preliminar, os objetos matemáticos do Ensino Médio que, potencialmente, poderiam estar articulados com os objetos matemáticos da Análise Matemática, para que se pudesse orientar as articulações na análise epistêmica.

As OCNEM organizam os conhecimentos matemáticos em quatro blocos: Números e Operações; Funções; Geometria; Análise de Dados e Probabilidade (BRASIL, 2006).

Números e Operações se referem ao tratamento de situações que envolvem operações elementares e complexas que tomam o estudo do Conjunto dos Números Reais como base teórica para a contextualização de conhecimentos que podem ser utilizados no cotidiano do aluno (BRASIL, 2006). Destacam-se situações como: operações matemáticas que envolvem o uso do sistema monetário, da análise e do estudo de medidas, das propriedades que podem ser analisadas em termômetros, em relação ao clima do tempo apresentado em jornais, nas horas dos relógios e assim por diante.

É apontado como importante que a formulação dos objetos matemáticos a serem trabalhados em sala de aula visem a constituição de um cenário educativo que abra espaço para o aluno aprender a resolver questões e conflitos em situações-problema. Por outro lado, o documento destacado não só aponta para questões que devem estar vinculadas ao cotidiano do aluno ou a situações que busquem uma "aplicação" do conhecimento matemático, como também apresenta a necessidade que se desenvolva no Ensino Médio uma matemática a rigor.

> As propriedades relativas às operações com Números Reais devem ser trabalhadas de modo **que permitam ao aluno a compreensão das estruturas dos algoritmos, prevenindo recorrentes erros na resolução de problemas que envolvam manipulações algébricas.** Por exemplo, os alunos devem entender o que acontece com uma desigualdade quando ambos os lados são multiplicados por um mesmo número negativo, ou por que o quadrado de um número nem sempre é maior que o próprio número, ou como resolver inequações que envolvam quocientes.
> [...]
> Mesmo que **as operações e os algoritmos já tenham sido estudados no ensino fundamental, é importante retomar esses pontos, aproveitando a maior maturidade dos alunos para entender os pontos delicados dos argumentos que explicam essas operações e algoritmos** (BRASIL, 2006, p.71, grifo nosso).

Os destaques em negrito no excerto indicam uma preocupação em que o aluno desenvolva, no Ensino Médio, a habilidade no tratamento de estruturas algébricas enquanto procedimentos necessários na resolução de problemas aplicados ou abstratos. Percebe-se, nesse sentido, um entrelaçamento sob a perspectiva que Ávila (2006) aponta ser necessário na Análise Matemática: o tratamento com demonstrações, definições e proposições. Isso, de certa forma, remete a um duplo aspecto para o Ensino Médio, envolvendo: as aplicações matemáticas no contexto da prática dos alunos desse nível de ensino e a outras áreas do conhecimento (extramatemático), e a necessidade de que o aluno conheça, também, tratamentos de estruturas matemáticas formais que se mostram e se relacionam no estudo da Matemática (intramatemático).

Ainda na perspectiva das OCNEM (BRASIL, 2006), os Números Reais devem incorporar estudos sobre os conceitos de infinito e finito, principalmente ao se considerar a necessidade de os alunos avaliarem e perceberem a noção de "quantificação" dos elementos pertencentes aos subconjuntos contidos no conjunto dos Reais (BRASIL, 2006), perfazendo as noções de ordenamento de elementos e a enumerabilidade desses conjuntos. Por esse viés, indica-se como um dos tópicos de análise os conhecimentos ligados ao estudo dos Números Reais e dos conjuntos finitos, infinitos enumeráveis e não enumeráveis.

O documento destaca, também, a necessidade de que uma diversidade de aspectos sobre a lógica que envolve as operações no Ensino Médio. Por exemplo, ao se trabalhar uma desigualdade nos Números Reais, é necessário que o aluno compreenda, conceitualmente, as noções de distância e as propriedades que envolvem a multiplicação dessa desigualdade por um número negativo (BRASIL, 2006). É importante, nesse sentido, que o professor tenha condições de apresentar uma relação lógica que retome a importância de se conhecer o uso desse tipo de operação no Ensino Médio (BRASIL, 2006). Compreende-se como necessário que o professor entenda os esquemas e bases conceituais matemáticas que envolvem esses procedimentos matemáticos e, nesse sentido, destaca-se, como exemplo, os estudos sobre desigualdade triangular que são abordados na Análise Matemática.

As orientações estabelecidas pelas OCNEM (BRASIL, 2006) indicam a necessidade de que o professor do Ensino Médio aborde, no bloco de funções, a contextualização que aproxime o conteúdo matemático que ele ensina aos alunos, relacionado a outras áreas do conhecimento e da cidadania do aluno. Essas contextualizações incorporam desde elementos que relacionam grandezas no estudo da Matemática Financeira ou uma representação que apresente a perda de peso de um sujeito em função da quantia de exercícios físicos que realiza, a questões mais complexas, como a ideia da velocidade e amplitude de um pêndulo que se movimenta em ausência gravitacional (BRASIL, 2006). Nesse sentido, conforme as OCNEM (BRASL, 2006), se mostra necessário que o professor, nesse tipo de situação, esteja atento a uma formulação de ideias que possibilitem avançar a compreensão dos alunos sobre o estudo, analisando e identificando os elementos que podem se mostrar de forma equivocada no processo de ensino e aprendizagem do aluno. Além disso, é importante que o professor de Matemática tenha um domínio conceitual bastante elevado sobre funções, sendo capaz de apresentar provas matemáticas e relações que possam se estabelecer intra e extramatematicamente nas possibilidades do ensino desse assunto. Assim, considera-se importante que o professor domine não só os conhecimentos matemáticos que envolvem a base para o estudo de funções, mas também questões que viabilizem estabelecer logicamente e matematicamente relações com as outras áreas de ensino.

No bloco de funções, percebe-se como indissociável relacionar os conhecimentos com os conteúdos matemáticos da Análise, não só na Lógica Matemática ou no Conjunto dos Números Reais, mas no conjunto de conhecimentos que estão presentes para ensino na Análise Matemática. Essa percepção está vinculada aos argumentos de Reis (2001), Ávila (2006) e Otero-Garcia (2011) que apontam em suas pesquisas que o principal objetivo da Análise Matemática é fundamentar o Cálculo Diferencial e Integral e formalizar as ideias que envolvem o conjunto dos Números Reais. Reis (2001) destaca que o Cálculo, por si só, é fundado na ideia de se estudar os diferentes contextos e procedimentos matemáticos em que o conceito de função é relacionado, como por exemplo: a relação entre grandezas do crescimento e decrescimento de uma população de bactérias; o estudo de diferentes tipologias de funções, como a linear, a quadrática, trigonométrica, entre outras; ideias sobre a diferenciabilidade e integração de uma função; entre outros.

Nessa mesma perspectiva, entende-se a necessidade dos elementos que se pautam no uso da Lógica, como, por exemplo, a necessidade da verificação de processos matemáticos de demonstração ou mesmo a necessidade do uso de argumentos que provem, justifiquem ou contraprovem o caminho de um dado pensamento contido na fundamentação dos estudos dos Números Reais e de Conjuntos incorporados ao contexto dos alunos.

O bloco da Análise de Dados e Probabilidade apresenta uma aproximação bastante relevante acerca dessa interpretação. No documento, destaca-se que uma das razões de se estudar esse bloco está no uso da probabilidade associada aos fenômenos aleatórios que incluem a dedução e explicação lógica das coisas, estimulando raciocínio combinatório, probabilístico e estatístico (BRASIL, 2006). Nessa unidade, pode-se inferir, também, a necessidade de que o professor estabeleça condições que possibilitem ao aluno o desenvolvimento da capacidade de observar, formular e refutar hipóteses, compreendendo e justificando os elementos que são necessários para comprová-las e prová-las em sua veracidade ou falsidade.

A Lógica Matemática é necessária e está envolvida em todos os blocos de conhecimento. Por exemplo, no bloco de Geometria, as OCNEM (BRASIL, 2006) destacam a importância de que o aluno interprete as relações de geometria a partir da compreensão de uma lógica que parta da construção geométrica. Envolvem-se aí, por exemplo, a ideia de demonstração dos objetos matemáticos, deixando de lado um foco baseado no uso de “formulários e regras” e passando a manusear o fundo matemático que as compõem, pela intuição e análise geométrica (BRASIL, 2006). Além disso, sobre o bloco de Funções pode se apresentar, por exemplo, a lógica na relação de dependência entre variáveis e na interpretação de problemas que envolvam esse assunto. Nesse sentido, tem-se o entendimento de que a Lógica Matemática, quando tratada para constituição do pensar matematicamente, está atrelada ao conjunto de todos os blocos que as OCNEM (BRASIL, 2006) abordam e, assim, justifica-se a análise epistêmica dos objetos matemáticos que a envolvem na Análise Matemática.

A partir dos argumentos levantados, retoma-se a ideia do conjunto dos elementos matemáticos e serem analisados com respaldo institucional do livro Análise Matemática para licenciatura: **Lógica Matemática**, que se refere ao capítulo um do livro apontado, sendo denominado como Preliminares de Lógica; **Conjunto dos Números Reais parte I** (assim denominado no livro), que se refere ao capítulo dois, o qual, além disto, inclui a noção de Conjuntos infinitos e finitos, enumeráveis e não enumeráveis (ÁVILA, 2006).

A reflexão em torno dos objetos matemáticos orientados para ensino no Ensino Médio apresentou a necessidade de se considerar um referencial institucional desses objetos matemáticos, para serem utilizados na articulação da análise epistêmica dos objetos matemáticos da Análise Matemática. Nesse sentido, estabeleceram-se um conjunto de livros didáticos do Ensino Médio, os quais se apresenta uma análise, no que segue, conforme o Plano Nacional do Livro Didático de 2015 (BRASIL, 2014).

6.2.1 Coleções de livros do Ensino Médio usados como referencial institucional

Considerando a decisão de olhar para os livros didáticos, aqui tomados como referência para o destaque dos objetos institucionais do Ensino Médio, encontrou-se a necessidade de estabelecer um critério de seleção para os mesmos. Assim, o critério definido para tal foi a distribuição desses livros, sendo as duas coleções de livros didáticos mais escolhidas, segundo o guia de coleções mais distribuídas no componente curricular de Matemática, com base no Plano Nacional do Livro Didático de 2015 (BRASIL, 2015b).

Segundo o referido documento, os conjuntos de livros foram: "Matemática: Contexto e Aplicações" nos volumes 1, 2 e 3 (DANTE, 2013a, 2013b, 2013c) e a coleção "Novo olhar: Matemática" para o 1º, 2º e 3º anos do Ensino Médio (SOUZA, 2013a, 2013b, 2013c). Destacado esses materiais, apresenta-se, no que segue, uma análise dessas coleções de livros didáticos.

Os livros "Matemática: Contexto e Aplicações", em seus volumes 1, 2 e 3, apresentam um conjunto de conhecimentos matemáticos adequados ao nível de ensino do Ensino Médio, com articulações apropriadas entre os diferentes contextos matemáticos. Incorpora um conjunto de relações extramatemáticas numa sistematização avançada dos objetos matemáticos ali tratados (BRASIL, 2014). Porém, entende-se que as situações iniciais abordadas nos livros não são levadas adiante ao longo das unidades[18], fazendo com que a problematização fique somente no início de cada repartição de estudo.

Os referidos livros constituem-se em unidades de conhecimento, as quais são separadas em capítulos para uma abordagem específica dos objetos matemáticos que se objetiva tratar. Denotam-se as seguintes unidades nos livros:

- para o volume 1 (1º ano): Números e funções, Função afim e função quadrática, Função exponencial e função logarítmica, Sequências e Trigonometria;

[18] O apêndice F desta dissertação apresenta o protocolo utilizado para essa análise.

- para o volume 2 (2º ano): Trigonometria, Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares, Geometria Plana e Espacial e Análise Combinatória e Probabilidade;
- para o volume 3 (3º ano): Matemática Financeira e Estatística, Geometria analítica: ponto, reta e circunferência, Cônicas e Números Complexos, e Polinômios e Equações Algébricas.

De modo bastante organizado, o livro de volume 1 destaca os seguintes elementos de estudo: dos Conjunto Numéricos (Naturais, Inteiros, Racionais, Irracionais e Reais) e suas propriedades, envolvendo as relações de pertinência e inclusão e operações diversas; abarca o estudo de funções, explorando as propriedades, definições e tipos (linear, quadrática, exponencial modular, etc.), apresentando ideias vinculadas ao objetos matemáticos de Séries e Sequências e Conjuntos Numéricos; apresenta ideias de Séries e Sequências (Progressões Aritméticas e Geométricas) estabelecendo suas propriedades e definições; apresenta as ideias de Trigonometria mostrando definições de seno, cosseno e tangente junto da noção de semelhança de triângulos por meio do Teorema de Tales.

Percebeu-se que o volume 1 da referida coleção apresenta inúmeras relações intramatemáticas, porém, são dadas poucas relações extramatemáticas que sirvam de aplicação do conteúdo no cotidiano do aluno do Ensino Médio, o que, de certo modo, pode dificultar nas significações que o aluno poderá dar aos conteúdos em sua cidadania. Além disso, sentiu-se falta, também, de elementos que pudessem ser trabalhados enquanto problemas para a generalização dos diversos conteúdos que são apresentados, considerando que somente no início dos capítulos se traz uma breve contextualização do conteúdo.

Outro elemento a qual sentiu-se a necessidade de ser ampliado na abordagem do livro diz respeito ao uso das tecnologias digitais. Apesar do livro trazer ao fim de alguns capítulos o uso do GeoGebra, entende-se que poderiam ser apresentados outros elementos que vinculassem os objetos dos capítulos com tecnologias para a exploração educacional, tal como recursos de *smartphones*, câmeras de vídeo, etc.

Destaca-se, das relações intramatemáticas, algumas das noções que foram trazidas na unidade de Números e Funções. A ideia de funções é intrinsecamente apresentada em consonância a noção de Conjuntos Numéricos, tal como a representação de funções a partir de uma relação entre um conjunto domínio e um conjunto contradomínio. Outra relação intramatemática se refere as ideias que vinculam a noção de funções à percepção de uma sequência gerada a partir de um dado modelo matemático e, também, da ideia de função na aplicação da Matemática Financeira, enquanto crescimento de juros ou decaimento de rendimentos de uma determinada aplicação financeira. Essa mesma questão pode ser considerada, também, extramatemática, já que a Matemática Financeira, conforme as OCNEM (2006), estão presentes no dia a dia do cidadão, quando o mesmo vai realizar compras de eletrodomésticos ou aplicações em fundos financeiros, os quais, minimamente, ele precisa ter noção dos benefícios e malefícios que dada situação pode trazer as suas finanças.

Das relações extramatemáticas conduzida no livro, pode-se apontar para a apresentação de elementos matemáticos que relacionam, por exemplo, a Trigonometria à medição de altura de um prédio a partir de uma distância e uma angulação referente. De certo modo, esse volume destaca a aplicação de funções, como na taxa de produção de uma indústria a partir dos investimentos que são realizados na mesma. Esse tipo de associação pode trazer referentes que vinculam esse conhecimento matemático à interpretação de informações que são apresentadas em jornais físico e televisivos, importantes para a constituição da informação que o aluno obtém no dia a dia.

No volume 2 do livro, nota-se que algumas abordagens são aprofundadas em relação ao volume 1. O segundo livro aborda os conteúdos voltados para o estudo: da Trigonometria em triângulos quaisquer, bem como os conceitos envolvidos para estudo desse assunto (arcos, seno, cosseno, tangente, etc.) e o estudo de funções trigonométricas em sua representação no plano cartesiano e modificações (deslocamento, mudança e argumento, etc.); do conjunto de conhecimentos que envolvem a noção de matrizes, definições, propriedades (adição, subtração, multiplicação, etc.) e, também, a representação e relação com sistemas lineares; das relações entre polígonos envolvendo o estudo de área, perímetro, ângulos e diagonais de variadas regiões delimitadas por quadrados, círculos, trapézios, etc., bem como o estudo de geometria espacial e de posição (Analítica); por fim os estudos que envolvem os conhecimentos de Análise combinatória, no estudo de probabilidades, abordando conceitos, definições e aplicações.

A unidade de Trigonometria, por exemplo, faz abordagens extramatemáticas que relacionam as ideias da lei dos senos e cossenos como, por exemplo, às questões de construção de prédios, descobrimento da altura de um objeto que não se pode medir usualmente com réguas ou trenas, a aplicação de funções trigonométricas em estudos do som e onda, como na Física, em aparatos da saúde ou no caso de máquinas de ressonância magnética.

Em destaque intramatemático dessa unidade, percebe-se que a todo momento são necessárias a utilização de conhecimentos que são abordados na unidade de Trigonometria da unidade anterior ou mesmo com conceitos básicos da Trigonometria, como, por exemplo, a ideia de uma função tangente a partir da relação entre as funções seno e cosseno, das propriedades de arcos e ângulos, como relação de medida para estabelecer a amplitude de um dado intervalo de função trigonométrica, e assim por diante.

Na unidade de Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares, percebe-se a aplicação de matrizes nas ideias que envolvem a Computação Gráfica, a codificação de informações bancárias e a organização de informações a partir de "tabelas". Entende-se que essas aplicações podem trazer alguma interpretação do uso de matrizes para os alunos do Ensino Médio. Porém, percebe-se uma predominância de questões que envolvem o estudo de matrizes dentro da própria matemática, como no caso dos Sistemas Lineares relacionados ao estudo de matrizes, ou as representações gráficas dentro do conjunto de funções. Nesse sentido, percebe-se que boa parte dos conhecimentos dessa unidade estão relacionados com os próprios objetos matemáticos de estudo. Porém, deixam de lado, de certa forma, as relações extramatemáticas ao cotidiano do aluno.

A unidade de Geometria Plana e Espacial se configura como a unidade com maior número de relações de aplicação do conhecimento matemático e possibilidade de significação do conhecimento para o aluno do Ensino Médio. Basicamente, ao longo da especificação dos tipos de regiões geométricas e dos sólidos geométricos, todos são relacionados às questões do cotidiano como, por exemplo, a aproximação de ideias entre: a superfície de uma moeda e círculos; superfície de um dos lados de uma caixa retangular a um retângulo; tijolos usados para constituir uma rua e paralelepípedos; entre um chapéu de festa e um cone, etc.

Além dessas relações destacadas, se estabelecem relações intramatemáticas envolvendo, por exemplo, o cálculo de distâncias entre pontos de uma figura num dado plano; a formação de figuras a partir das distâncias entre pontos de um dado plano; as posições relativas entre um vértice de uma figura e a projeção ortogonal em relação a um dos eixos do plano cartesiano e assim por diante. São apresentados, também, algumas relações com ideias que são bastante conhecidas em estudos de nível superior da Matemática, tal como o princípio de Cavalieri e as seções cônicas de corpos redondos (noção de elipses, hipérboles, suas propriedades e definições).

Por fim, a última unidade deste volume, Análise Combinatória e Probabilidade, apresenta aplicações ao cotidiano como, por exemplo, as probabilidades de se acertar um determinado número na loteria, as possibilidades de combinação entre lanches de um restaurante ou mesmo o cálculo da probabilidade de precipitação da chuva em uma região. Dentro dessa mesma unidade se mostram diversas potencialidades intramatemáticas, as quais compreendem, por exemplo: a análise de eventos e a representação dos mesmos a partir de funções que os representam; a representação de combinações a partir de esquemas simbólicos matemáticos (arvores de possibilidades e decisões) que são utilizadas na maioria das seções como questões de relação conceitual; etc. Apesar dos aspectos positivos mencionados, de modo geral, sentiu-se falta de demonstrações ou justificativas que encaminhassem para a dedução das propriedades e dos conceitos matemáticos envolvidos, principalmente, no tratamento da Análise Combinatória e de noções de Probabilidade.

O último volume da coleção de livros está articulado em unidades que buscam: apresentar e trabalhar ideias que envolvem os conceitos e a aplicação da Matemática Financeira e das ideias de Estatística; aprofundamento às ideias de Geometria Analítica envolvendo definições, proposições e conceito históricos relacionados à temática; um aprofundamento das ideias de cônicas junto das propriedades e conceitos que envolvem os Números Complexos; e a unidade que trata de Polinômios e Equações Algébricas, de funções polinomiais, de operações com polinômios, valores raiz, relações de Girard, etc.

A unidade de Matemática Financeira e Estatística apresenta aplicações dos conhecimentos matemáticos ao sistema financeiro do país, tal como em investimentos, pesquisa e representação de dados por meio de gráficos e tipos de medidas que podem ser realizadas. Um dos exemplos extramatemáticos que se percebeu interessante diz respeito à pesquisa de intenção de votos aos candidatos à presidência do país, apontando como são realizadas as pesquisas e como os conceitos estatísticos são utilizados. Apesar dessas questões extramatemáticas, sentiu-se falta de atividades em que o aluno pudesse realizar, em prática, os conhecimentos que são abordados. De certo modo, essa unidade não apresenta muitas questões intramatemáticas com outros objetos de estudo do livro ou da própria coleção de livros o que, de certa maneira, "isola" essa unidade das demais que estão estruturadas nessa linha de livros.

A segunda unidade, Geometria Analítica: ponto, reta e circunferência, retoma os conceitos já apresentados no volume 2 sobre Geometria Analítica, mas toma um aprofundamento aos tópicos específicos do conteúdo, como: a distância entre ponto, reta e plano; posição entre objetos dispostos num plano cartesiano e a apresentação da equação geral da reta e circunferência. Se estabelecem, nesse sentido, diversas relações intramatemáticas, principalmente com o estudo da geometria. Entretanto, em relação às noções extramatemáticas, percebeu-se que não são abordados elementos de aplicação ao cotidiano do aluno do Ensino Médio e, portanto, a unidade se atém às questões abstratas da Matemática. Além disso, sentiu-se falta de que os modelos matemáticos fossem provados ou demonstrados em algumas situações para dedução genérica dos modelos em resolução de problemas.

A terceira unidade apresenta as ideias de seção cônicas numa relação intrínseca com os Números Complexos. Um dos exemplos que chama a atenção se refere à aplicação da ideia de cônicas para compartilhar secções espaciais de uma determinada galáxia e, partir da daí, surgem tratamentos matemáticos que remetem aos Números Complexos. Percebe-se, então, uma forte relação intramatemática e extramatemática desenvolvida para a introdução e aplicação do objeto tratado.

Diferente das demais unidades, essa unidade foca em apresentar demonstrações dos modelos matemáticos que são utilizados para resolver problemas e atividades que exigem os conhecimentos dos objetos abordados. Além disso, ao longo de todo o capítulo são abordadas situações em que o aluno tem que expressar seu pensamento a partir de ideias matemáticas bem estruturadas, o que configura um forte aspecto abordado nesse capítulo. Um exemplo para tal referência se refere ao momento em que se apresentam as aplicações dos Números Complexos e a Geometria com base nas fórmulas de Moivre sobre radiação e potenciação na enésima potência.

Por fim, a última unidade inicia tomando aspectos históricos sobre o assunto, ideias de Gauss, Girar e Cardamo, e segue as utilizando ao longo de todo o capítulo. Apresenta formas de encontrar as raízes de um polinômio e a identificar os mesmo em meio a um conjunto de problemas envolvendo raízes reais ou complexas. Percebeu-se que não há muitas relações extramatemáticas nesse capítulo, entretanto, entende-se que o conteúdo é um conhecimento de tarefa complexa para uma relação usual com o cotidiano de um aluno do Ensino Médio. Essa questão, segundo Silva (2009), pode ser superada nos currículos de Matemática a partir de elementos que apresentem os aspectos históricos, considerando, com a dimensão cultural e social da Matemática, a possibilidade de acrescentar um viés estratégico para o ensino que não esteja só nas aplicações matemáticas, mas também como sua importância criativa na história humana.

Destaca-se que as relações matemáticas estão de acordo com o nível ao qual se dirigem e exibem demonstrações de modelos matemáticos que ali se apresentam. Entretanto, sentiu-se falta de que fossem apresentados softwares ou recursos tecnológicos para trabalhar as situações, de modo a trazer os conceitos matemáticos para um olhar mais contemporâneo e atualizado a sala de aula.

Apresentando-se a análise da coleção de livros “Matemática: Contexto e Aplicações” nos volumes 1, 2 e 3, segue-se para a análise da segunda coleção de livros designada.

A coleção de livros “Novo olhar: Matemática” assume um caráter de diferentes adequações do conhecimento matemático. Incorporam elementos que atribuem, no contexto geral, o uso de tecnologias e ferramentas que podem ser utilizadas como “facilitadoras” da aprendizagem (BRASIL, 2014). Os livros constituem-se a partir de unidades[19], que englobam diversos conhecimentos matemáticos de um mesmo assunto, separando-se em capítulos para abordar esses conhecimentos de forma mais direcionada.

Foram percebidas as seguintes unidades de conhecimento matemático nos livros:

- para o 1º ano, Conjuntos; Funções; Progressões e Trigonometria;
- para o 2º ano, Trigonometria; Matemática Financeira e Estatística; Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares; Geometria e Análise Combinatória e Probabilidade;
- para o 3º ano, Estatística, Geometria, Geometria Analítica, Números Complexos e Polinômios e Equações Polinomiais.

Sinteticamente, o livro do 1º ano destaca: o estudo sobre as operações e relações entre conjuntos quaisquer e conjuntos numéricos; o estudo do conceito de funções, suas propriedades, as representações e características de funções de diversos tipos (linear, quadrática, exponencial, logarítmica e raiz); as relações entre elementos de uma sequência, definições de Progressão Geométrica e Aritmética e suas propriedades; e relações trigonométricas envolvendo a noção de seno, cosseno e tangente.

Percebeu-se, na análise do livro do 1º ano, que se mostram diferentes possibilidades intramatemáticas e extramatemáticas entre os objetos matemáticos para o aluno do Ensino Médio.

Como possibilidade intramatemática, destaca-se a unidade de Conjuntos, pois suas propriedades (relações de inclusão, diferença entre conjuntos, intervalos numéricos, etc.), são utilizados ao longo de todas as demais unidades com a ideia de conduzir uma relação entre os conteúdos já estudados pelo aluno e o que está por ser ensinado. Por exemplo, destacam-se: o uso das noções de conjuntos para abordar as representações de funções por diagramas, destacando elementos que envolvem as ideias do domínio, contradomínio e imagem de uma função; o uso da representação de conjuntos para simbolizar uma sequência de termos de uma Progressão Geométrica; a representação de conjuntos para simbolizar um conjunto de valores a partir da aplicação das relações entre seno, cosseno e tangente.

A unidade de Funções também se destaca enquanto suas relações intramatemáticas. Basicamente, todo o estudo de Funções é incorporado na unidade de Progressões, envolvendo, principalmente, as abordagens que dizem respeito a soma de termos de uma

[19] O apêndice F desta dissertação apresenta uma análise mais detalhada sobre as unidades e conteúdos matemáticos dessa coleção de livros.

Progressão Geométrica (PG) infinita decrescente e a representação gráfica de certas PG enquanto pontos do gráfico de uma função exponencial. Aproveitando o destaque na unidade de Progressões, deve-se mencionar que são conduzidas relações com objetos matemáticos em outros níveis de ensino. Por exemplo, no caso das somas dos infinitos termos de uma PG, o livro aborda a ideia de limite da soma e convergência para apresentar ideias ao aluno que conduzam a significação da complexidade do termo “soma de infinitos termos”.

Entende-se, nesta investigação, como um ponto positivo as ideias matemáticas que são abordadas estabelecendo esse vínculo, porém, como contraponto, segundo o guia do PNLD de 2015 (BRASIL, 2014), isso pode se configurar um limitador nas possibilidades de o aluno realizar conexões matemáticas de modo mais autônomo. Deve-se destacar que o desenvolvimento de uma autonomia pode exigir um nível de maturação do aluno que, muitas vezes, pode não estar de acordo com a maturação matemática que se possui no Ensino Médio. Entretanto, é necessário que o professor conduza a prática matemática nessa abordagem com olhar ao contexto extramatemático, possibilitando, assim, outras interpretações aos alunos.

De modo geral, no contexto extramatemático, todas as unidades desse livro satisfazem as seguintes condições: apresentam um contexto de problema inicial para o assunto abordado; apresentam situações-problema ao longo das unidades em atividades e como próprio contexto de aplicação do conhecimento matemático do aluno; conduzem ideias matemáticas que estão vinculadas ao contexto de um aluno do Ensino Médio, aquele em que se entende que o aluno possa articular com situações de seu cotidiano, como compras no mercado, cálculo de salário, cálculo de tempo necessário para que determinado alimento fique cozido e etc. Por fim, o livro representa um conjunto de questões que, entende-se, estão de acordo com as orientações das Diretrizes Nacionais do Ensino Médio (BRASIL, 2006).

Na análise do livro para o 2º ano, nota-se as seguintes unidades de conhecimento matemático: Trigonometria, Matemática Financeira e Estatística, Matrizes, determinantes e Sistemas Lineares, Geometria e Análise Combinatória e Probabilidade.

Percebeu-se, na primeira unidade (Trigonometria), relações matemáticas que se estabelecem com a unidade de Trigonometria do livro do 1º ano. Essa unidade retoma todas as propriedades de Trigonometria e aborda a temática de funções trigonométricas, trazendo aplicações dessas funções no contexto da Física, ao se estudar ondas, e da saúde, ao se verificar batimentos cardíacos, por exemplo. Sentiu-se falta, apesar da relação com os conteúdos matemáticos do 1º ano, de um vínculo dessa unidade com as demais unidades que são abordadas no livro, uma vez que não se mostram articulações evidentes.

A unidade de Matemática Financeira e Estatística está repleta de um conjunto de elementos que, entende-se, estão inclusos no cotidiano da maioria dos alunos do Ensino Médio: porcentagem, juros, sistema de descontos, gráficos e tabelas. A porcentagem e os juros, tal como é descrito por Souza (2013b), estão inseridos na maioria das práticas que envolvem transações financeiras entre os sujeitos e as instituições (bancos, comércio no âmbito de pessoa jurídica, como o comércio de alimentos, carros, roupas e outros) ou entre sujeitos e sujeitos (comércio informal de alimentos, roupas, produtos de limpeza ou higiene, etc.).

Na situação mencionada, entende-se que essa abordagem do livro traz um olhar para a cidadania e para a constituição da autonomia do aluno do Ensino Médio. Para tanto, percebe-se necessário que o professor de Matemática tenha a visão de enriquecer esse contexto com atividades que relacionem esses conhecimentos matemáticos à prática e atuação do aluno como sujeito pensante. Por exemplo, é possível que o professor medie uma aula que vise o cálculo de diferentes tipos de impostos, os quais incidem nos produtos e serviços oferecidos na indústria ou mesmo atividades que levem a necessidade de interpretar gráficos e tabelas que envolvem o clima. Entende-se, nesse sentido, que essa percepção pode potencializar o entendimento do aluno sobre a razão pela qual é importante e necessário aprender Matemática.

A unidade de Matrizes, determinantes e Sistemas Lineares é a que mais sente-se falta de aplicações para o cotidiano do aluno. De modo geral, o livro estabelece relações matemáticas entre a organização de matrizes e informações de estatística e/ou probabilidade, entretanto, estrutura poucas atividades que tragam uma aproximação desse conteúdo matemático com a realidade em que se insere a vida escolar. Mesmo no objeto matemático que trata dos sistemas lineares, apesar das relações intramatemáticas que o livro faz com a representação de funções lineares, são propostas poucas atividades na unidade que organizem uma contextualização desse conhecimento como algo “palpável” para o aluno. Nesse intuito, as chamadas “limitações” para a autonomia do aluno, tal como citado no PNLD 2015 (BRASIL, 2014), ficam evidentes.

Sobre a unidade de Geometria, apesar de, em um primeiro momento, a unidade estabelecer conexões com a ideia da “presença dos elementos geométricos no mundo físico”, como na delimitação de terrenos e a topografia (SOUZA, 2013b), entende-se que poderiam ser exploradas mais situações que envolvessem aspectos geométricos ao longo da unidade. Por exemplo, relacionando-se ideias de escala de um cômodo a ser construído numa casa ou da quantia de materiais necessários para cobrir um terreno com areia.

Ainda nessa unidade, sentiu-se falta de elementos da Geometria que fossem abordados nas demais. Essa perspectiva decorre do fato de que a Geometria, numa abordagem analítica e conforme as OCNEM (BRASIL, 2006), pode envolver a maioria dos contextos matemáticos do Ensino Médio. Entende-se, então, que o professor de Matemática deve ter a visão de que a Geometria pode ser aplicada em diversas outras áreas da Matemática (BRASIL, 2002b), principalmente naquelas em que é primordial que o aluno configure significações para sua construção enquanto cidadão.

Por fim, na última unidade desse livro, Análise Combinatória e Probabilidade, percebeu-se uma sequência de referências a ideias matemáticas em um contexto de aplicação, como: a quantia de possibilidades de combinações entre alimentos ou roupas, a combinação de sistemas alfanuméricos para estabelecimento de maior segurança da informação ou características de um objeto, a probabilidade de prospecção de chuva, a ocasião probabilística em que um evento pode ocorrer novamente, etc. Percebeu-se que há uma reflexão matemática bastante aprofundada nos objetos matemáticos abordados, a qual é composta por demonstração de proposições e teoremas.

Tem-se em vista que, apesar desses elementos de uma matemática a rigor não estarem de acordo com as orientações das OCNEM (BRASIL, 2006), os mesmos podem servir como objeto de maturação matemática para o pensamento matemático do aluno. Entretanto, entende-se necessário, nessa ocasião, que o professor de Matemática do Ensino Médio tenha uma apropriação dessas demonstrações em um nível maior de rigor matemático, para que tenha a habilidade de adequá-las quando necessário ou mesmo conduzir um processo de mediação para a aprendizagem do aluno.

Sobre o livro do 3º ano, destacam-se as seguintes unidades: Estatística, Geometria, Geometria Analítica, Números Complexos e Polinômios e Equações Polinomiais.

A unidade de Estatística apresenta ao longo de todo o capítulo questões que estão relacionadas à vida cotidiana. Por exemplo, sobre gráficos de rendimentos de uma pessoa que investe seu dinheiro na poupança, o crescimento e decrescimento do *status* financeiro de uma microempresa ou sobre dados que apresentam o desmatamento da Amazônia. Aponta-se nessa unidade uma forte relação do assunto com o cotidiano do aluno, dando priorização, apesar das questões formais do conhecimento matemático que são apresentadas (tendência de medida central, distribuição de frequência, etc.), ao uso de atividades que problematizam o mundo exterior, não se atendo à problemática única das definições e proposições que envolvem o assunto. De certo modo, há um balanceamento bastante íntimo entre as relações intra e extra matemáticas que se apresentam nessa unidade.

Sobre a unidade de Geometria, são abordadas diversas configurações para introduzir e continuar a abordagem do conteúdo matemático, as quais tomam por base as figuras que estão presentes no mundo físico, como caixas de leite, que podem ser relacionadas a paralelepípedos e retângulos (abordando as faces) e bolas de futebol, que podem ser relacionadas a ideia de esfera e círculo (considerando sua representação a partir da interseção ou corte por um plano horizontal, por exemplo). Apesar da grande gama de relações matemáticas com o mundo exterior, sentiu-se falta, com exceção das relações com a Geometria Analítica, das relações intramatemáticas dessa unidade com as demais, com outros ou com os próprios objetos matemáticos que pudessem estar atrelados a esse estudo. Por exemplo, destaca-se uma relação entre Matemática Financeira e noção de Conjuntos com o assunto abordado.

A unidade de Geometria Analítica apresenta, principalmente, noções do conteúdo matemático que estuda a topologia da reta e as abordagens, no plano cartesiano, de geometria articuladas à unidade anterior. Estrutura uma visão que, excluindo a ideia de localização de sujeitos com o uso das noções da Geografia, pouco, ou quase não, vincula o conhecimento às relações do mundo físico ou mesmo outras áreas de conhecimento. Nesse caso, tem-se em vista que o professor de Matemática do Ensino Médio teria que conduzir suas práticas buscando recursos que complementem as ideias apresentadas nessa unidade, focando numa esquematização de ensino que incorpore uma realidade para essas aplicações e para o próprio aluno. Mas, nesse caso, é necessário que o professor de Matemática tenha domínio conceitual muito bem apropriado para tais abordagens, adequando, então, quando possível, as práticas matemáticas a um contexto eficaz sobre as relações extramatemáticas.

A unidade de Números Complexos apresenta noções históricas vinculadas ao descobrimento, ou surgimento, dos Números Complexos na Matemática. Porém, sentiu-se falta de que essa abordagem fosse levada ao longo do capítulo em todas as situações de atividades propostas.

Para ilustrar as situações matemáticas enquanto objetos de aplicação do conhecimento, o livro destaca o uso dos Números Complexos na Física Elétrica, relacionando aos conceitos da Física e de Trigonometria. Nesse sentido, sentiu-se falta, também, de elementos que aproximassem esse contexto à realidade do aluno do Ensino Médio. Com essa percepção, a unidade propõe uma série de articulações com a área da Física e relações com os objetos matemáticos que levam em conta as situações intramatemáticas, mas que conduzem a poucas situações de aplicações “reais” do conhecimento para o aluno. Essa perspectiva conduz a necessidade de que o professor de Matemática traga atividades que complementem as que foram apresentadas no livro, mas entende-se que alguns conhecimentos matemáticos são de difícil articulação a uma “realidade mundana” dos contextos sociais e, por isso, acabam ficando vinculados somente a ideias de uma “abstração” do conhecimento matemático.

Por outro lado, os vínculos com a parte abstrata do conhecimento matemático não se constituem como aspecto negativo. Numa perspectiva de Educação Crítica, como destacado por Silva (2009), é necessário considerar elementos de uma dimensão em que o conteúdo matemático esteja submetido a uma transformação organizacional, em torno de procedimentos, práticas e ferramentas que são utilizadas tanto pelo aluno dentro do contexto da própria Matemática quanto no contexto da sua dimensão social. Muitos dos elementos dessa necessidade se justificam pelo árduo trabalho que os professores de Matemática acabam confrontando ao ter de trabalhar com a contextualização de certos conteúdo. Porém, segundo Silva (2009), essa noção de prática Matemática não deve ser vista só para conteúdos matemáticos de difícil contextualização, mas a todos os conteúdos que circulam o currículo de Matemática do aluno do Ensino Médio.

Por último, destaca-se a unidade de Polinômios e Equações e Polinomiais. De modo geral, percebeu-se que essa unidade se focou no tratamento de definições e situações matemáticas buscando apontar para a pesquisa das soluções que satisfazem as equações dadas. Essa unidade destaca-se como uma “unidade” em relação aos demais livros, pois, excluindo o vínculo indicado sobre equações polinomiais e soluções do tipo número complexo, não se percebe vínculo extramatemático e intramatemático com os objetos matemáticos das outras unidades. Os vínculos percebidos dizem respeito a uma relação intramatemática, mas dentro da mesma unidade de ensino.

Pondera-se que a problemática da última unidade não é algo elementar de se abordar. O próprio conteúdo matemático destacado nesta unidade se estabelece como uma conjuntura de elementos abstratos, de difíceis aplicações a um contexto do aluno do Ensino Médio, ou mesmo a contextos outros níveis de ensino. Entende-se, nesse sentido, que as relações estabelecidas nessa unidade serviram como fundamentação teórica para a execução de métodos matemáticos que compreendem a ideia de “uma aplicação da matemática na própria matemática”, o que potencialmente sinaliza a dificuldade para contextualização “fora da matemática”.

Com um objetivo de síntese da análise apresentada sobre as duas coleções de livros, o quadro da Figura 16 apresenta esse apontamento.

Figura 16 – Síntese global da análise dos livros didáticos do Ensino Médio

Coleção de Livros	Análise geral/Descrição geral
Matemática: Contexto e Aplicações	- Apresenta um conjunto de situações que podem ser notadas, em separado, como possibilidades de ensino da Matemática de modo abstrato quanto aplicado, envolvendo exemplos e atividades que trabalham diretamente conceitos que podem ser entendidos como extramatemáticos ou intramatemáticos. - Aborda os conhecimentos matemáticos em diferentes contextos históricos e áreas do conhecimento, tratando de questões que podem ser aproximadas do cotidiano do aluno do Ensino Médio, como nas relações entre: a Geometria Analítica e a codificação de informações; aplicações das noções de probabilidade lógica e disseminação de informação; noções de progressões e o trabalho funções; etc. - Trabalha em um nível de linguagem que pode ser considerado adequado para alunos do Ensino Médio, porém, às vezes se mostra complexo demais para os mesmos, apontando aí, então, a necessidade da figura do professor. Além disso, traz menções e algumas provas matemáticas. Entretanto, sentiu-se falta de atividades ou exercícios que mostrassem a necessidade do aluno trabalhar com a escrita matemática ou demonstrações do gênero.
Novo Olhar: Matemática	- Apresenta um conjunto bastante articulado de situações (intramatemáticos) que relacionam os objetos matemáticos dentro da própria matemática como: relações entre a Matemática Financeira e o estudo de Funções; estudo de Funções e a Geometria Analítica; estudos da Lógica Matemática com operações numéricas, teoremas geométricos, etc. - Trata de assuntos (extramatemáticos) que vinculam os objetos matemáticos às práticas do cotidiano do aluno do Ensino Médio, como em aplicações financeiras ou cálculo de áreas para cômodos de uma casa, e relações com outras áreas de conhecimentos, como na população de bactérias, combinação genética, probabilidade de desastres naturais, etc. - Estrutura elementos em linguagem natural, acessíveis tanto para o aluno quanto para o professor, perfazendo conjecturas importantes no âmbito dos elementos abstratos e aplicados da Matemática. Além disso, trabalha com a ideia de demonstrações e provas matemáticas, solicitando a quem lê a necessidade de interpretação e compreensão mínima sobre métodos lógicos para essas demonstrações ou provas matemáticas.

Fonte: o autor.

Tendo se apresentado a análise do conjunto de livros didáticos, segue-se para análise epistêmica dos objetos matemáticos da Análise Matemática (2006), a qual busca articular e relacionar os conhecimentos do Ensino Médio com a referida análise no livro do Ensino Superior.

6.3 ANÁLISE DOS OBJETOS MATEMÁTICOS DO LIVRO ANÁLISE MATEMÁTICA PARA LICENCIATURA

A seguir, apresenta-se a análise dos objetos matemáticos da Análise Matemática que foram mencionados (Preliminares de Lógica e Conjunto dos Números Reais parte I) (ÁVILA, 2006). Em específico sobre as análises, leva-se em conta o objetivo de buscar elementos que, em potencial, articulem os conhecimentos matemáticos da Análise Matemática (ÁVILA, 2006) com os objetos matemáticos do Ensino Médio (DANTE, 2013a, 2013b, 2013c; SOUZA, 2013a, 2013b, 2013c), cujo objetivo é buscar as possíveis significações que possibilitem o professor de Matemática do Ensino Médio alicerçar seu Conhecimento Didático-Matemático (GODINO, 2009; SOARES, 2016; SOARES; KAIBER, 2016; GODINO et al., 2017).

6.3.1 Análise do capítulo de Preliminares de Lógica sob a perspectiva da Ferramenta de Análise Didática: Dimensão Epistêmica

Segundo Ávila (2006), as disciplinas de introdução à Análise, que, geralmente, integram cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática, consistem na apresentação rigorosa de elementos do Cálculo. É um componente curricular que oportuniza, no caso da formação inicial do professor de Matemática que leciona na Educação Básica, o desenvolvimento de habilidades com o tratamento de definições, teoremas e proposições que permeiam a lógica conceitual da Matemática. De modo geral, o capítulo busca tratar de objetos matemáticos que sirvam para relembrar dos métodos de demonstração, aqueles que, comumente, são apresentados ao se estudar alguns tópicos de Álgebra e Geometria Euclidiana, tais como: indução finita, demonstração direta, por contradição e por redução ao absurdo.

Inicialmente, definem-se as ideias de proposições e teoremas, além dos conceitos de demonstração direta, por absurdo e por indução. Chega-se, por fim, aos aspetos da história da Matemática, em que o autor apresenta trechos históricos sobre a Geometria dedutiva, Geometria Euclidiana e não-Euclidiana, para, de certo modo, como apresentado no excerto a seguir, destacar a importância que os métodos de demonstração têm no contexto da construção histórica dos conhecimentos matemáticos.

> A matemática dedutiva, tal qual a conhecemos hoje, tem sua origem com Tales de Mileto, no século VI a.C. Até esse tempo a Matemática grega era herdeira direta daquela que se desenvolveu na Babilônia e no Egito. Os conhecimentos matemáticos de então, tanto nessas regiões do Oriente Médio, como na Índia e na China, eram de natureza empírica. Mas a partir de Tales a Matemática grega vai assumindo o aspecto de corpo de proposições logicamente ordenadas: cada proposição é demonstrada a partir de proposições anteriores, estas de outras precedentes, e assim por diante, um processo que não teria fim. Mas os gregos logo perceberam isso e viram que era necessário parar o processo em certas proposições iniciais, consideradas evidentes por si mesmas; a partir destas, todas as outras foram chamadas [...] indiferentemente, de “postulados” ou “axiomas” (ÁVILA, 2006, p. 19).

Entende-se que tais complementos históricos sejam um aspecto positivo, já que, concordando com o pensamento de Fiorentini (2005), a promoção de situações em que o licenciando possa conhecer significados conceituais e históricos do conhecimento, em que os objetos matemáticos estão envolvidos, pode propiciar a ele competências para a compreensão dos elementos que envolvem esses objetos no processo de ensino e aprendizagem. Não só, trazem uma justificativa do surgimento desses objetos, possibilitando ao futuro professor uma significação complementar sobre os conhecimentos que o mesmo aprende e sobre as bases que fundamentam historicamente esse contexto (FIORENTINI, 2005).

Ao tratar de uma demonstração, pelo método de indução, sobre o Binômio de Newton, tal como se apresenta no quadro da Figura 17, é proposta uma nota para refletir sobre o método de ensino desse conceito pelo professor do Ensino Médio.

Figura 17 – Exemplo de Demonstração do Binômio de Newton

1.8. Exemplo – Binômio de Newton. Vamos usar indução para provar a conhecida fórmula do binômio, onde *n* é um número inteiro positivo:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3$$
$$+\ \dots + \frac{n(n-1)(n-2)(n-r+1)}{r!}a^{n-r}b^r + \ \dots\ + b^n. \qquad (1.5)$$

Começamos induzindo os chamados *coeficientes binomiais*

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-r+1)}{r!}, \qquad r = 1, 2, \dots, n.$$

Multiplicando o numerador e o denominador dessa expressão por $(n-r)!$, obtemos

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

É muito conveniente estender o significado desse coeficiente binominal aos casos em que $r = 0$ e $r = 1$, pondo, simplesmente,

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

Em termos dos coeficientes binominais, (1.5) assume a forma

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{n}b^n = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^{n-j}b^j \qquad (1.6)$$

Temos aqui uma proposição, que será denotada *P(n)*. Queremos provar que ela implica em *P(n+1)*. Para isso, começamos multiplicando (1.6) por $(a+b)$.

$$(a+b)^n = (a+b)\left[\binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ \dots\ + \binom{n}{n}b^n\right]$$
$$= \binom{n}{0}a^{n+1} + \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right]a^n.b + \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right]a^n.b + \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\right]a^{n-1}b^2 + \ \dots$$
$$+\left[\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}\right]ab^n + \binom{n}{n}b^n \qquad (1.7)$$

Por outro lado,

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} + \frac{n(n-1)\dots(n-k)}{(k+1)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}\left(1 + \frac{n-k}{k+1}\right) = \frac{n(n-1)n(n-1)\dots(n-k+1)}{(k+1)!}$$

Isto é,

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Daqui e do fato de ser

$$\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0} = 1\ e\ \binom{n}{n} = \binom{n+1}{k+1} = 1$$

Vemos que (1.7) se escreve

$$(a+b)^{n+1} = \binom{n+1}{0}a^{n+1} + \binom{n+1}{1}a^nb + \ \dots\ + \binom{n+}{n+1}b^{n+1},$$

Que é precisamente *P(n+1)*, o que completa a demonstração de que *P(n)*⇒ *P(n+1)*. Como P(1) é verdadeira,

por simples inspeção, concluímos que *P(n)* é verdadeira para todo n ≥ 1.

Fonte: Ávila (2006, p. 14-16).

Nessa nota, Ávila (2006) aponta que é necessário que o professor conheça a respeito dos princípios bases que fundamentam a estrutura dessa demonstração. Porém, afirma que para uma transposição adequada desse saber para o Ensino Médio, é importante um tipo de abordagem que não vise unicamente a definição, mas, também, a construção de uma ideia para o aluno com base na reflexão de outros conhecimentos matemáticos (ÁVILA, 2006). O autor indica, por exemplo, que se pode levar o aluno do Ensino Médio a desenvolver procedimentos em binômios do tipo $(a+b)^n$, iniciando por n = 2, utilizando do recurso de expansão dos termos, ou seja, dos recursos da propriedade distributiva. O quadro da Figura 18 apresenta a ideia abordada por Ávila (2006), sistematizada pelo autor desta investigação.

Figura 18 – Expansão do polinômio para n=2, n=3, n=4

	Seja $\boldsymbol{n = 2}$.	$\boldsymbol{(a+b)^n}$
(1)	Expansão da base da potência em função do valor atribuído a n.	$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$
(2)	Aplicação da propriedade distributiva na base expandida.	$(a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2$
(3)	União dos termos semelhantes do resultado da distributiva.	$a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$
(4)	Resultante dos procedimentos anteriores.	$a^2 + 2ab + b^2$
	Seja $\boldsymbol{n = 3}$.	$\boldsymbol{(a+b)^n}$
(1)	Expansão da base da potência em função do valor atribuído à n.	$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b)$
(2)	Aplicação da propriedade distributiva na base expandida.	$(a+b)(a+b)(a+b) =$ $(a^3 + a^2b) + (a^2b + ab^2) + (ba^2 + ab^2) + (b^2a + b^3)$
(3)	União dos termos semelhantes do resultado da distributiva.	$(a^3 + a^2b) + (a^2b + ab^2) + (ba^2 + ab^2) + (b^2a + b^3) =$ $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
(4)	Resultante dos procedimentos anteriores.	$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
	Seja $\boldsymbol{n = 4}$.	$\boldsymbol{(a+b)^n}$
(1)	Expansão da base da potência em função do valor atribuído à n.	$(a+b)^4 = (a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$
(2)	Para facilitar o cálculo algébrico, toma-se $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$\underline{[\boldsymbol{(a+b)(a+b)(a+b)}]}\ (a+b) = \underline{[\boldsymbol{(a+b)^3}]}\ (a+b) =$ $\underline{\boldsymbol{(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)}}\ (a+b)$
(3)	Aplica-se a distributiva	$(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)(a+b) =$ $(a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3) + (a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4)$
(4)	União dos termos semelhantes do resultado da distributiva.	$(a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3) + (a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4) =$ $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
(5)	Resultante dos procedimentos anteriores.	$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
	⋮	⋮

Fonte: o autor.

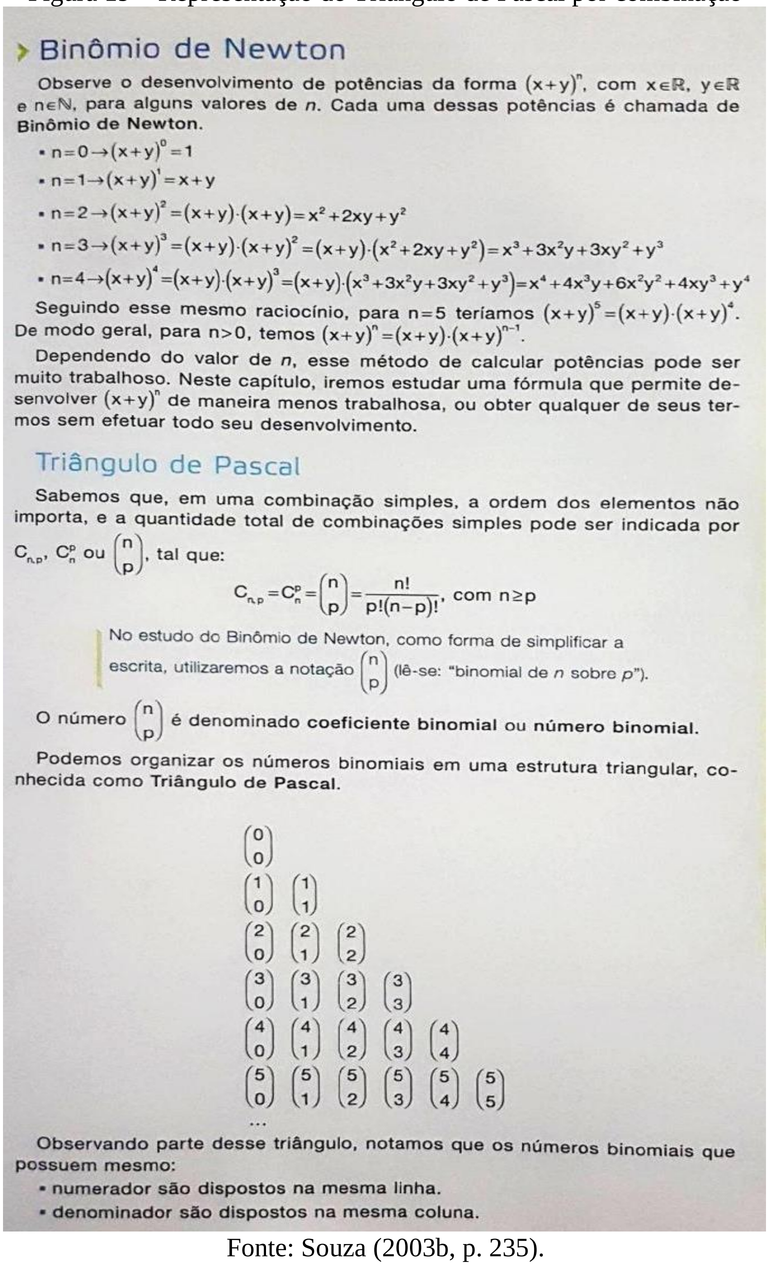
Basicamente, cada expansão do tipo $(a+b)^n$ começa com o termo $a^n b^0$, seguido por $a^{n-1}b^1$, $a^{n-2}b^2$, ... , terminando em $a^{n-j}b^j$ para os quais os valores de j passam de zero até $j=n$. Segundo Ávila (2006), é interessante deixar que o aluno do Ensino Médio perceba e encontre por si só uma interpretação que possibilite uma generalização desses procedimentos, a fim de que consiga estabelecer uma relação entre os termos que sucedem continuamente, pelo método da indução, até o modelo matemático Binômio de Newton.

Entende-se que tal questão presume uma ideia que, muitas vezes, pode estar vinculada a como são abordados os procedimentos necessários para se encontrar a “solução” de uma determinada situação e que podem acabar fugindo um pouco da abordagem conceitual que se mostra necessária nesse nível de ensino (BRASIL, 2006). Aponta-se que além de “deixar o aluno realizar os procedimentos por si só”, é necessário trazer elementos de reflexão sobre como esse conhecimento matemático é constituído, não trazendo uma abordagem que reduz a matemática a uma simples mecânica de procedimentos (MOREIRA; CURY; VIANNA, 2005). Para isso, entende-se que seria necessário apresentar elementos ao futuro professor que tragam uma possibilidade de apresentar uma discussão conceitual em cima dos procedimentos que seriam executados pelos alunos do Ensino Médio. Com isso, sente-se falta de que a abordagem dada ao referido conteúdo estivesse vinculada a mais elementos para o conhecimento comum do conteúdo para o professor.

Um detalhe importante ao se considerar a conjuntura de Ávila (2006) sobre o Ensino Médio, é que ao se tomar a ideia $(a+b)^n$ como uma expansão de termos, o autor destaca que os coeficientes numéricos dos termos não são contemplados e, nesse caso, entende-se necessária uma forma de apresentar uma relação dos coeficientes numéricos com os coeficientes binomiais. Por exemplo, toma-se a ideia de $(a+b)^n$ com n igual 2, gerando os termos $a^2, a^{2-1}\, b^1, a^{2-2}\, b^2$. A representação do binômio $(a+b)^2$, considerando somente os termos gerais do binômio sem os coeficiente numéricos, tomaria a forma $(a+b)^2 = a^2 + a^{2-1}\, b^1 + a^{2-2}\, b^2 = a^2 + ab + b^2$, implicando numa condição falsa ao se verificar o produto $(a+b)^2$ pela expansão da base e aplicação da propriedade distributiva: $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$. Nesse caso, sente-se a falta de elementos que pudessem indicar ao professor do Ensino Médio uma possibilidade de tornar essa “generalização” verdadeira para os termos gerados a partir do desenvolvimento de um binômio do tipo $(a+b)^n$ para qualquer n pertencente aos Naturais, de modo a estruturar noções, para o conhecimento comum do conteúdo, que pudessem ser articuladas à percepção da prática do professor. Para tal, entende-se que seria necessário, na seção do referente livro, apresentar, também, uma forma de encontrar os coeficientes numéricos desses termos.

Buscando satisfazer o problema mencionado, sugere-se uma abordagem que considerasse a relação entre as constantes dos termos de um binômio expandido com o Triângulo de Pascal. Souza (2013b), após apresentar o Binômio de Newton em sua forma generalizada, conduz uma relação entre os coeficientes binomiais a partir de uma Análise Combinatória (Combinação Simples) que pode ser representada por meio do Triangulo de Pascal (Figura 19).

Figura 19 – Representação do Triângulo de Pascal por combinação



Binômio de Newton

Observe o desenvolvimento de potências da forma $(x+y)^n$, com $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, para alguns valores de *n*. Cada uma dessas potências é chamada de **Binômio de Newton**.

- $n=0 \rightarrow (x+y)^0 = 1$
- $n=1 \rightarrow (x+y)^1 = x+y$
- $n=2 \rightarrow (x+y)^2 = (x+y)\cdot(x+y) = x^2+2xy+y^2$
- $n=3 \rightarrow (x+y)^3 = (x+y)\cdot(x+y)^2 = (x+y)\cdot(x^2+2xy+y^2) = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$
- $n=4 \rightarrow (x+y)^4 = (x+y)\cdot(x+y)^3 = (x+y)\cdot(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3) = x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$

Seguindo esse mesmo raciocínio, para $n=5$ teríamos $(x+y)^5 = (x+y)\cdot(x+y)^4$. De modo geral, para $n>0$, temos $(x+y)^n = (x+y)\cdot(x+y)^{n-1}$.

Dependendo do valor de *n*, esse método de calcular potências pode ser muito trabalhoso. Neste capítulo, iremos estudar uma fórmula que permite desenvolver $(x+y)^n$ de maneira menos trabalhosa, ou obter qualquer de seus termos sem efetuar todo seu desenvolvimento.

Triângulo de Pascal

Sabemos que, em uma combinação simples, a ordem dos elementos não importa, e a quantidade total de combinações simples pode ser indicada por $C_{n,p}$, C_n^p ou $\binom{n}{p}$, tal que:

$$C_{n,p} = C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}, \text{ com } n \geq p$$

No estudo do Binômio de Newton, como forma de simplificar a escrita, utilizaremos a notação $\binom{n}{p}$ (lê-se: "binomial de *n* sobre *p*").

O número $\binom{n}{p}$ é denominado **coeficiente binomial** ou **número binomial**.

Podemos organizar os números binomiais em uma estrutura triangular, conhecida como **Triângulo de Pascal**.

$$\begin{array}{cccccc}
\binom{0}{0} & & & & & \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} \\
\dots & & & & &
\end{array}$$

Observando parte desse triângulo, notamos que os números binomiais que possuem mesmo:

- numerador são dispostos na mesma linha.
- denominador são dispostos na mesma coluna.

Fonte: Souza (2003b, p. 235).

Essa noção poderia ser trabalhada de modo a mostrar, aos alunos do Ensino Médio, um método de relacionar os coeficientes, ou constantes, binomiais a partir de uma representação matricial do Triângulo de Pascoal (Figura 19): o grau do binômio, começando por 0, indica a linha em que se encontra o coeficiente no Triângulo de Pascal; enquanto isso, o expoente t em b, na ordem de $a^n b^0, a^{n-1} b^1, a^{n-2} b^2, \dots, a^{n-t} b^t$, indica a coluna de seu coeficiente. O quadro da Figura 20 apresenta uma relação das expansões de binômios de grau 0 a 4, assumindo um coeficiente k_i tal que k é coeficiente do Triângulo de Pascal com i variando de 0 até $i = t$.

Figura 20 – Correspondência numérica das combinações do Triângulo de Pascal

Binômio do tipo $(a+b)^n$ com os coeficientes representados por k_i;	**Combinações**	**Coeficiente gerado da combinação**
$(a+b)^0 = 1$	$\binom{0}{0}$	1
$(a+b)^1 = k_0 a + k_1 b$	$\binom{1}{0}\binom{1}{1}$	1 1
$(a+b)^2 = k_0 a^2 + k_1 ab + k_2 b^2$	$\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2}$	1 2 1
$(a+b)^3 = k_0 a^3 + k_1 a^2 b + k_2 ab^2 + k_3 b^3$	$\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3}$	1 3 3 1
$(a+b)^4 = k_0 a^4 + k_1 a^3 b + k_2 a^2 b^2 + k_3 ab^3 + k_4 b^4$	$\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4}$	1 4 6 4 1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Representação Matricial	***Binômios com os respectivos coeficientes***
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{pmatrix}$	$(a+b)^0 = 1$ $(a+b)^1 = 1a + 1b = a + b$ $(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2 =$ $(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + 1b^3$ $(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + 1b^4$ $\vdots$

Fonte: o autor.

Entende-se que essa abordagem apresentada no livro de Análise busca, de certa maneira, contribuir para a contextualização – aqui entendida como o cenário no qual o licenciando põe em seus conhecimentos em prática docente – de aprendizagem do licenciando em Matemática. Compreende-se que a mesma estabelece relações didáticas que, em potencial, podem contribuir para as interpretações sobre o conhecimento necessário para que o professor ensine (conhecimento comum do conteúdo) e, articulada ao referido objeto de estudo da Análise Matemática, acaba contribuindo para a constituição de seu conhecimento sobre a prática no Ensino Médio em relação a um "pensar" do nível posterior (conhecimento ampliado do conteúdo). Entretanto, nessa situação em específico, sentiu-se a necessidade de complementar o objeto de estudo da Análise Matemática com o Ensino Médio, considerando que existia essa possibilidade, a fim de ampliar a virtude de uma metodologia que pudesse ser utilizada pelo professor do Ensino Médio, dando, na combinação de conhecimento comum e ampliado, contribuições aos seus Conhecimentos Didático-Matemáticos (GODINO et al., 2017).

O aspecto mencionado leva a destacar a necessidade de contemplar uma formação de conhecimentos que estejam articulados ao conjunto de competências profissionais que devem ser desenvolvidas no professor de Matemática, para os quais tenha-se tanto o olhar da Matemática quanto o pedagógico (REIS, 2001). De certo modo, ao se realizar esse tipo de abordagem, pode-se considerar uma relação que possibilite contextualizar esse conhecimento à prática do professor, a qual, entende-se, esteja no vínculo de dar sentido pedagógico desse conhecimento matemático para a atuação do professor de Matemática.

No que se refere à demonstração por redução ao absurdo, o capítulo destaca uma aplicação intramatemática em um conhecimento que, com a devida transposição por parte do professor de Matemática, pode ser abordado nos estudos de geometria do Ensino Médio, tomando como referência atividades propostas por Dante (2014).

Em destaque ao que se está mencionado, apresenta-se uma atividade de Ávila (2006) que consiste na prova de duas proposições:

1. A: Em um plano é dada uma reta r e um ponto P que não pertence à r.
2. B: No plano dado não existe mais que uma reta s perpendicular à r, tal que P pertence à s.

Para provar essas proposições, utiliza-se a seguinte argumentação, com base na geometria axiomática:

> A negação de B é que existe mais que uma perpendicular; ora para afirmar isto, basta supor que existem duas, assim:
> $\tilde{B}$: No plano dado existem duas retas distintas, *s* e *t*, perpendiculares a r, tais que P pertence a s e P pertence a *t*.
> [...] com efeito, sejam S e T os pontos de intersecção de *s* e *t* com a reta *r*, sendo que esses pontos são distintos, ou *s* e *t* não seriam distintas. Ora, os ângulos em S e T são todos retos; mas isto é absurdo, senão a soma dos ângulos do triângulo PST seria maior do que 180º. Concluímos, pois, que a proposição B é verdadeira (ÁVILA, 2006, p. 9).

Essas relações do conhecimento matemático que se estabelecem intramatematicamente pertencem ao conjunto de conhecimentos especializados necessários para que o professor possa ensinar. O conhecimento aprofundado (conhecimento ampliado do conteúdo) desses objetos matemáticos mencionados pode indicar ao professor uma margem de fundamentação de seu conhecimento matemático, atrelando-se às questões potencialmente didáticas e que se apresentam no ideário do que é necessário para ensinar (GODINO, 2009). Tal noção se pauta no que é atribuído por Godino et al. (2017), sobre a formação do conhecimento do professor, o qual aponta a menção da necessidade de que o professor tenha um conhecimento aprimorado sobre o que ensina (conhecimento comum do conteúdo) e ampliado nas relações que se vinculam com a prática docente e com seus próprios conhecimentos ao longo de sua formação inicial (GODINO, 2009).

Além dos argumentos mencionados, mesmo que não seja o foco da Análise Matemática, e nem do capítulo analisado, a exploração de reflexões desse tipo, como a do exemplo do Binômio de Newton e da própria Geometria, pode direcionar o licenciando a interpretações da utilização desse conhecimento em suas práticas docentes. Moreira, Cury e Vianna (2005) destacam que a formação do professor de Matemática da escola de Educação Básica deve se constituir a partir de valores, concepções e práticas específicas de uma “cultura matemática” que contribua com a formação de competências e habilidades do futuro professor. Nesse sentido, as reflexões em torno das propostas do componente na formação de professores devem estar vinculadas à visão de possibilitar ao profissional um conhecimento matemático que seja acessível e que possa ser, quando possível, transposto à prática e exercício docente (BRASIL, 2002a).

Como exemplo do que está sendo destacado, há atividades que podem ser trabalhadas no Ensino Médio, utilizando da demonstração por absurdo, e que, executadas em conjunto com elementos das preliminares de lógica da Análise Matemática, poderiam ofertar potenciais significações para o conhecimento ampliado do professor de Matemática.

Apresenta-se um segundo exemplo, que foi constituído pelo autor desta investigação, que potencialmente pode ser articulado na noção mencionada sobre as relações desses objetos no nível do Ensino Médio:

1. A: Toda árvore é uma planta.
2. B: A laranjeira é uma planta.

Uma atividade assim parece ser elementar, entretanto, refletir sobre um possível questionamento de uma argumentação pensada pela demonstração de absurdo – que consiste em manter A como verdadeira e negar B, supondo que B seja falsa – parece ser bastante válida no contexto do Ensino Médio e para a própria reflexão do professor.

Por demonstração em redução ao absurdo seria considerado: $A \rightarrow \tilde{B}$? Ou, ainda, “A laranjeira não é uma planta?”. Como resposta ao exemplo da atividade pode-se concluir: ora, a laranjeira não ser uma planta é um absurdo! Tendo em vista que a laranjeira é uma árvore e toda arvore é uma planta (A). Logo, a laranjeira só pode ser uma planta (B).

Além das situações de contextualização do conhecimento, percebe-se a riqueza de atividades que exigem uma reflexão e análise, potencialmente profunda, sobre os aspectos que envolvem o tratamento do uso das hipóteses e da demonstração para justificar a tese. Nesse intuito, vê-se como interessante a possibilidade que essas atividades coloquem o licenciando numa posição de reflexão sobre os conceitos matemáticos envolvidos e, inclusive, sobre as estratégias do pensamento matemático que esse poderá utilizar ao ensinar matemática na Educação Básica. Como exemplo, apresenta-se, a seguir, um excerto de atividade do que foi considerada uma situação-problema ao longo da análise.

> 4. Prove que a soma de dois números pares quaisquer é sempre um número par (ÁVILA, 2006, p. 9).

Para se provar a questão quatro do excerto acima utiliza-se de uma demonstração por prova direta:

Figura 21 – Prova sobre a soma de números pares quaisquer

	Forma geral.	Resolução
(1)	A forma geral de um número que se configura número par.	$2k$, com $k \in \mathbb{Z}$
(2)	Sendo x e y pares, substitui-se x e y pela configuração de um número par qualquer.	$x = 2n$ e $y = 2m$ com $n, m \in \mathbb{Z}$
	$x + y$ é do $2k$ tipo par?	$x + y = (2n) + (2m)$
(3)	Evidência dos fatores semelhantes.	$2(n + m) = 2k$
(4)	Multiplica-se ambos os lados por $\frac{1}{2}$	$(n + m) = k$

Fonte: o autor.

A prova matemática do quadro da Figura 21 consiste em evidenciar o fator 2 no membro esquerdo da igualdade. Como o fator 2 pode ser evidenciado, isso permite inferir que 2 é fator comum da soma $x + y$ (3). Considerando a forma geral de um número par, se 2 é fator de um número ou, ainda, se 2 divide um número (4), então esse número é par.

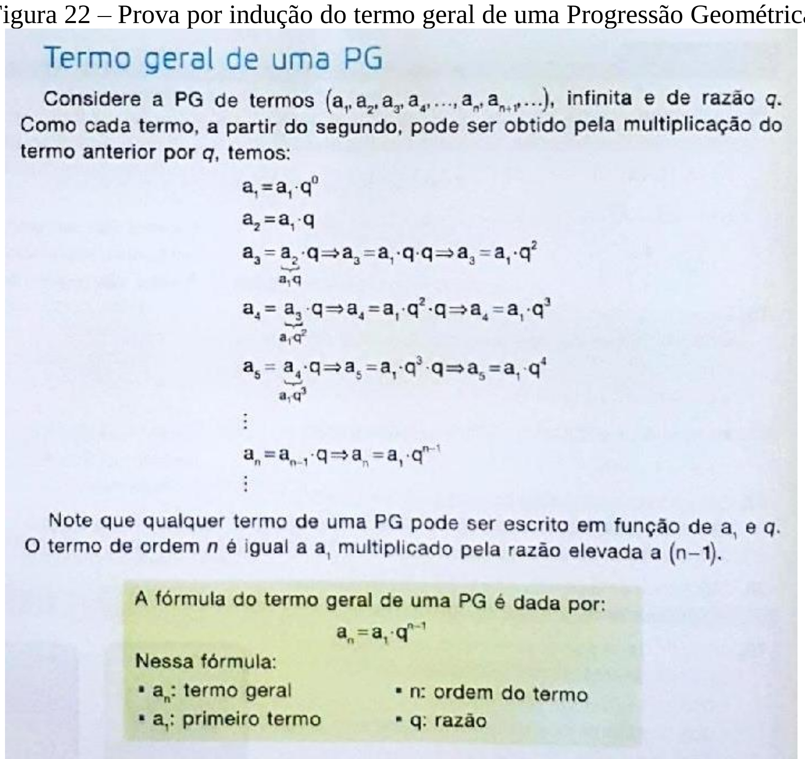
Tal prova é relativamente simples comparada a outros tipos de provas utilizadas no livro. Porém, entende-se que por ser inicialmente elementar, possa ser utilizada em níveis de ensino como o Ensino Médio, por apontar situações onde a sentença “a soma de dois pares é sempre um par” pode não ser suficiente para dar conta de garantir a efetividade dessa ideia para qualquer número par (ÁVILA, 2006). Sendo assim, pode se tornar interessante utilizar dessa prova para garantir que essa sentença é válida, principalmente ao se tomar como referência o nível do Ensino Médio.

É importante que o aluno tenha um mínimo aprofundamento matemático de noções mais elementares que aprendeu no nível do Ensino Fundamental ou mesmo questões que comprovem ideias matemáticas que muitas vezes são apresentadas com exemplos que carecem de generalização (BRASIL, 2006). Por exemplo, pode-se solicitar ao aluno, ao se estudar conjuntos, uma representação simbólica que possa ser utilizada para representar um conjunto da soma de números pares quaisquer.

Na perspectiva levantada, percebe-se importante que o professor de Matemática tenha condições de conduzir atividades que incluam a noção utilizada nessa prova e, para tanto, é importante que o mesmo tenha domínio do teor matemático que envolve esses tipos de questões. Esse domínio deve consistir tanto na abordagem sobre o conhecimento que o professor está ou estará ensinando, quanto as relações potenciais de aprofundamento no nível superior (GODINO et al., 2017), como é no caso da Análise Matemática.

Além de uma prova por demonstração direta, há outras demonstrações que podem ser utilizadas no Ensino Médio, enquanto método para generalização de um determinado conceito matemático. Destaca-se o que é apresentado por Souza (2013a), que aponta a técnica da indução como recurso que pode ser aplicado pelo professor do Ensino Médio para provar fórmulas utilizadas, como por exemplo, na dedução do termo geral de Progressões Geométricas (PG) e Progressões Aritméticas (PA). A Figura 22 destaca os procedimentos de indução apresentados pelo autor para encontrar o termo geral de uma PG.

Figura 22 – Prova por indução do termo geral de uma Progressão Geométrica



Termo geral de uma PG

Considere a PG de termos $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots)$, infinita e de razão q. Como cada termo, a partir do segundo, pode ser obtido pela multiplicação do termo anterior por q, temos:

$$a_1 = a_1 \cdot q^0$$
$$a_2 = a_1 \cdot q$$
$$a_3 = \underbrace{a_2}_{a_1 q} \cdot q \Rightarrow a_3 = a_1 \cdot q \cdot q \Rightarrow a_3 = a_1 \cdot q^2$$
$$a_4 = \underbrace{a_3}_{a_1 q^2} \cdot q \Rightarrow a_4 = a_1 \cdot q^2 \cdot q \Rightarrow a_4 = a_1 \cdot q^3$$
$$a_5 = \underbrace{a_4}_{a_1 q^3} \cdot q \Rightarrow a_5 = a_1 \cdot q^3 \cdot q \Rightarrow a_5 = a_1 \cdot q^4$$
$$\vdots$$
$$a_n = a_{n-1} \cdot q \Rightarrow a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$
$$\vdots$$

Note que qualquer termo de uma PG pode ser escrito em função de a_1 e q. O termo de ordem n é igual a a_1 multiplicado pela razão elevada a $(n-1)$.

A fórmula do termo geral de uma PG é dada por:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Nessa fórmula:

- a_n: termo geral
- a_1: primeiro termo
- n: ordem do termo
- q: razão

Fonte: Souza (2013a, p. 238).

Nesse caso, tem-se a percepção de que o domínio sobre a ideia desse método de prova, por parte do professor, necessita ser superior ao nível a qual ensina (GODINO, 2009) e, portanto, entende-se apropriado o estudo e aprofundamento desse conceito. A Figura 22 destaca um dos tipos de procedimentos que podem ser de propriedade do professor de Matemática que leciona no Ensino Médio.

Continuando com a ideia de técnica de demonstração por indução, aponta-se para a ideia das demonstrações por indução finita que são apresentadas por Ávila (2006). Toma-se a seguinte atividade para esse feito

> 2. Use o princípio da indução para provar que $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1) = n^2, n = 1, 2, 3, \ldots$ (ÁVILA, 2006, p.17).

Para provar essa questão, é necessário considerar os procedimentos que são adotados para resolver uma situação que envolva os princípios da indução finita, que consiste em mostrar que:

1. A sentença é válida para o primeiro termo.
2. Mostrar que se a sentença é válida para todo termo *k*, então *k+1* é verdadeira.

Considerando a noção da demonstração por indução finita, prova-se a questão indicada na Figura 23.

Figura 23 – Prova por indução finita sobre a questão 2 da página 17

	Forma geral.	$S(n) = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1) = n^2$
(1)	Teste para $n = 1$.	$S(1) = (2.1 - 1) =_? 1^2$
(2)	Resolvendo as operações em ambos os lados da potencial igualdade.	$S(1) = (1) =_? 1$
(3)	É válida para $S(1)$.	$S(1) = 1$
	Seja $S(k)$.	$S(k) = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2$
(4)	$S(k + 1)$ é válida?	$S(k + 1) = \underline{\mathbf{1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1)}} + (2.(k + 1) - 1) =_? (k + 1)^2$
(5)	Substituindo a partição $S(k)$ por k^2 (**linha sublinhada em (4)**).	$S(k + 1) = \underline{(\mathbf{k})^2} + (2.(k + 1) - 1) =_? (k + 1)^2$
(6)	Resolvendo as operações do lado esquerdo da potencial igualdade.	$S(k + 1) = k^2 + 2k + 1 =_? (k + 1)^2$
(7)	Expandindo a potência do lado direito da potencial igualdade.	$S(k + 1) = k^2 + 2k + 1 =_? (k + 1)(k + 1)$
(8)	Resolvendo a distributiva e a união de termos semelhantes do lado direito da potencial igualdade.	$S(k + 1) = k^2 + 2k + 1 = k^2 + 2k + 1$
(9)	Confirma-se a potencial igualdade como igualdade. Implicando na validade para $S(k + 1)$.	$S(k + 1) = k^2 + 2k + 1$

Fonte: o autor.

As demonstrações por indução finita, como se sugere no caso da Figura 23, são entendidas, também, como importantes no domínio conceitual de professores de Matemática, pois considera-se que possibilitam uma visão em torno do conhecimento ampliado do conteúdo (GODINO, et al. 2017) para que o professor de Matemática do Ensino Médio tenha condições de conduzir, no nível de maturação matemática de seus alunos, validações matemáticas que tomam como referência a matemática a rigor.

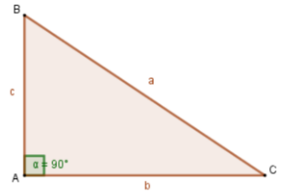
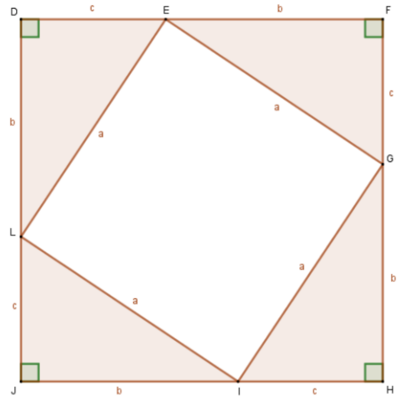
A partir da conjuntura de reflexões apresentadas até o momento, entende-se que esse capítulo atinge uma **idoneidade alta em situações-problema.**

No contexto abordado pela Análise Matemática (ÁVILA, 2006) percebe-se a predominância dos aspectos e elementos da linguagem descrita em sua forma natural e algébrica. Suscitar uma matemática expressa em linguagem natural não é trivial. Exige uma alta compreensão dos conceitos dos objetos matemáticos envolvidos e bom domínio da transformação da linguagem algébrica, aritmética ou visual para a natural (GODINO; BATANERO; FONT, 2008). Os tratamentos e conversões tratadas no capítulo giram em torno da demonstração em linguagem algébrica e em linguagem natural, com o objetivo, entendido devido à análise, de levar o licenciando a uma espécie de amadurecimento na demonstração de conceitos e proposições matemáticas.

Como já comentado, o capítulo apresenta pequenas notas históricas, as quais buscam, de certo modo, justificar a utilização da demonstração na história da Matemática ao comentar sobre Matemática na Geometria dedutiva. Por conta disso, sente-se falta de demonstrações que envolvessem representações geométricas.

Como exemplo ao que foi mencionado, apresenta-se uma das demonstrações do Teorema de Pitágoras que, pode-se dizer, é frequente no Ensino Médio. Partindo do aspecto geométrico (Figura 24) viabiliza uma dedução para a demonstração algébrica do referido teorema.

Figura 24 – Uma representação geométrica para demonstração do Teorema de Pitágoras

Representação de um triângulo retângulo qualquer	Representação de um quadrado a partir da medida da hipotenusa do triângulo retângulo acima
	

Fonte: o autor.

Sobre a demonstração, no contexto do Ensino Médio, consideraremos o triângulo retângulo *ABC*. Com a medida do lado *a* do triângulo (hipotenusa), pode-se construir um quadrado *LEGI* de lado também a. A partir de cada lado *a* do quadrado *LEGI*, dispõe-se dos triângulos *LDE*, *EFG*, *GKI* e *IJL* congruentes ao triângulo *ABC*. Desse modo, obtém-se um quadrado *DFHJ*, cujos lados são compostos da soma dos catetos de cada triângulo, no caso $(b + c)$. A fim de obter-se a área do *DFHJ*, pode-se utilizar de duas expressões: a primeira se remete à soma da área do quadrado *LEGI* com a área dos quatro triângulos congruentes, logo se tem área de *DFHJ* = $a^2 + 4\frac{b.c}{2}$; a segunda diz respeito a multiplicar o lado $(b + c)$ por $(b + c)$, implicando na área de *DFHJ* $= (b + c)(b + c)$. Como ambas as expressões representam a área do quadrado *DFHJ*, pode-se considerar a igualdade, como é apresenta na forma geral da Figura 25.

Figura 25 – Resolução da expressão $a^2 + 4\frac{bc}{2} = (b + c)(b + c)$

	Forma Geral.	$a^2 + 4\dfrac{bc}{2} = (b + c)(b + c)$
(1)	Uso da distributiva, ao lado direito, e simplificação da fração, ao lado esquerdo.	$a^2 + 4\dfrac{bc}{2} = (b + c)(b + c)$
(2)	Subtrai-se $2bc$ de ambos os lados da equação.	$a^2 + 2bc = b^2 + 2bc + c^2$
(3)	Encontra-se o Teorema de Pitágoras, como se queria demonstrar.	$a^2 = b^2 + c^2$

Fonte: o autor.

Entende-se, no âmbito da Análise Matemática para a formação do professor de Matemática, que se mostra necessário que sejam apresentadas o máximo possível de tratamentos e conversões dos objetos matemáticos que podem ser envolvidos. Com base em Godino, Batanero e Font (2008) e Godino et al. (2017), essas representações envolvem uma atividade matemática em noção simbólica que permite, na noção de semiótica (Duval, 1999), uma apropriação e maior domínio sobre os objetos matemáticos e os signos que conduzem a sua representação que estão sendo trabalhados. Além disso, a representação desse conjunto de elementos institucionais em diferentes linguagens potencializa a possibilidade de uma significação pessoal que sucede a interpretação e manifestação, por parte do sujeito, do objeto matemático (GODINO; BATANERO; FONT, 2008).

Supõe-se que a conversão das diferentes linguagens ao longo das potenciais representações semióticas possibilita a ampliação do modo representativo que o professor detém em seu conhecimento para ensino do conteúdo (conhecimento comum do conteúdo) (GODINO; PINO-FAN, 2014). Igualmente, sobre as potenciais formas de como essa noção pode encaminhar diferentes visões de compreensão sobre o mesmo objeto matemático, possibilitando, assim, um aprofundamento desse conhecimento (conhecimento ampliado do conteúdo) para uma potencial modelização do Conhecimento Didático-Matemático (GODINO, 2009). Com base nessa percepção, entende-se que a não utilização de demonstrações que partissem de representações geométricas, quando as mesmas foram consideradas possíveis, acabam por não contemplar a visão destacada e, portanto, considera-se uma **idoneidade média em linguagem.**

Considerado o rigor nas estruturas de demonstração e a apresentação coerente dos objetos matemáticos, o capítulo de lógica apresenta definições, proposições e procedimentos básicos para a compreensão do licenciando, destacando os elementos mais importantes desse assunto. Cabe lembrar que as preliminares de Lógica visam auxiliar o licenciando em suas provas e demonstrações matemáticas, mas esse tema não é, por base, ensinado ao licenciando em Análise Matemática, pois é tratado, inicialmente, em outros componentes que objetivem a finalidade de demonstrações. Nesse caso, entende-se que o capítulo atinja a **idoneidade alta em regras.**

De modo geral, o capítulo em análise está repleto de argumentos que buscam qualificar as demonstrações num alto nível de explicações e provas matemáticas. Cabe relatar que as atividades propostas, com poucas exceções, exigem do licenciando uma argumentação matemática coerente e bem organizada, baseada em demonstrações, definições ou teoremas que antes foram provados. A articulação com a utilização de diferentes argumentos, dispostos em linguagem simbólica e natural, como se apresenta no capítulo, podem potencializar as habilidades do futuro professor na explanação e justifica de ideias que cabem ser explicadas, muitas vezes, dentro de uma sala de aula.

De certo modo, esse pensamento vai ao encontro à proposta levantada no parecer nº. 9 do MEC/CNE (BRASIL, 2002b), quando é mencionado que se objetiva que o licenciando tenha condições de refletir sobre suas práticas docentes, sabendo transpor e compor falas que busquem justificar os conhecimentos matemáticos para a construção de um ambiente de debate e reflexão acerca dos aspectos que contemplam a Matemática. Além disso, a coerência Lógica e Matemática é necessária para que o licenciando possa compreender elementos mais abstratos, principalmente nas demonstrações que precisa conhecer, não só uma boa representação do objeto matemático de referência, mas também o saber matemático envolvido na raiz desse conhecimento. Com tal reflexão, entende-se que o estudo pretendido apresenta **idoneidade alta em argumentos.**

Relações entre o objeto matemático apresentado no componente de Análise Matemática e o objeto matemático tratado no Ensino Médio, em potencial, podem trazer significados ao processo de aprendizagem do professor em formação inicial, pois, de certa maneira, pode viabilizar o sentido e a utilidade do conhecimento no campo de atuação do licenciando. Isso, de certa forma, possibilita uma potencial integração entre conhecimento matemático e conhecimento para o didático, o que se mostra necessário nas práticas dos professores da Educação Básica (MOREIRA; CURY; VIANNA, 2005). Compreende-se que tal perspectiva seja necessária na estrutura do ensino de Análise e nas referenciais institucionais dos conhecimentos dessa área, pois deixar que o aluno de licenciatura faça uma articulação individual entre o que aprende ali e a sua prática profissional pode se tornar complexo demais para dar conta por si mesmo (MOREIRA; CURY; VIANNA, 2005). Além disso, tem-se em vista que mesmo que haja a necessidade de estruturar uma “cultura” de sólida base matemática, tal como se apresenta na Análise Matemática, é necessário, ao visar um curso de Licenciatura, que se dê importância, em igual tamanho, às relações pedagógicas que formam o professor de Matemática (OTERO-GARCIA; BARONI; MARTINES, 2013).

A eficácia na formação profissional do professor está numa articulação, com base nas DCN específicas para Licenciatura em Matemática (BRASIL, 2002b), entre conhecimento matemático, pedagógico e didático. Essa noção vai ao encontro de que o conhecimento do professor deva estar interligado nas diferentes dimensões do saber (epistêmico, cognitivo, ecológico, mediacional, interacional e emocional) (GODINO et al., 2017) que permeiam o ensino da Matemática e a prática docente escolar. Com base em Godino (2009), pressupõe-se que há a necessidade de uma integração do saber sobre o que se irá ensinar, a partir do estudo, reflexão e conhecimento do conteúdo matemático sobre o domínio ampliado e comum do professor, constituindo assim seu potencial Conhecimento Didático-Matemático.

Foi verificada, no capítulo de preliminares de Lógica, uma quantia significativa de relações entre os teoremas, definições, proposições e corolários apresentados, as quais são utilizadas em suas complexas formas algébricas ou em linguagem natural. Entretanto, o capítulo apresenta somente uma relação, que se refere à demonstração formal do Binômio de Newton, entre a Análise Matemática e outro nível de ensino. Entende-se que a ausência de relações evidentes para a atuação docente do licenciando pode levar ao discurso de que o componente de Análise Matemática não contribui para a formação de professores de Matemática, conforme suscitado na investigação de Bolognezi (2006).

Deve-se destacar que a busca por relações que realmente contextualizem o conhecimento do licenciando em sua atuação não é elementar quando se trata de Análise Matemática. Todavia, ao longo dessa análise, foi possível estabelecer relações as quais foram possíveis por meio de um olhar crítico lançado aos materiais institucionais analisados. Fiorentini (2005) entende que, às vezes é necessário deixar, no contexto de uma licenciatura, as relações puramente matemáticas do conhecimento um pouco de lado, dando espaço para lançar mão de atividades que visem à prática docente do licenciando, pois,

> [...] de um lado, pode haver perda em relação à sistematização e formalização rigorosa dos conhecimentos matemáticos a serem aprendidos, de outro, o futuro professor viverá um ambiente rico em produção e negociação de significados, aproximando-se, assim, do movimento de elaboração/construção do saber (FIORENTINI, 2005, p. 112)

Concorda-se em parte com o pensamento de Fiorentini (2005), pois se entende que não deva haver, necessariamente, uma perda da elaboração e riqueza matemática que a Análise Matemática oportuniza e, sim, a complementação de recursos e relações que venham a contribuir para a significação desse componente curricular na formação inicial do professor de Matemática. Compreende-se como necessário que se deva criar meios de que o professor forme diferentes visões da Matemática, compreendo-a, por exemplo, como elemento de alto rigor, objeto necessário para a cidadania e como questão importante para a formação das práticas sociais que envolvem a necessidade de seu ensino (BRASIL, 2002b). Com tal pensamento, entende-se que o estudo atinja uma **idoneidade média em relações.**

A análise, construída e discutida a partir de fundamentos que constituem a idoneidade epistêmica, apresenta os conceitos matemáticos, dispostos na Análise Matemática, tratados pela Lógica Matemática (ÁVILA, 2006). Com tal análise, apresenta-se uma síntese da mesma no quadro da Figura 26.

Figura 26 – Análise Epistêmica do capítulo de Preliminares de Lógica (Ávila, 2006)

Componentes	Indicadores	Grau de Idoneidade
Situações-problema	*Apresenta uma conjuntura de elementos matemáticos que, em geral, são ensinados a licenciandos na área de Álgebra dos cursos de Licenciatura, trazendo contextualizações e o contexto histórico matemático. *Apresenta atividades e exercícios que podem ser considerados problemas intramatemáticos, uma vez que exigem interpretação, compreensão e articulação entre os diferentes conhecimentos matemáticos tratados.	ALTA
Linguagem	*Apresenta linguagem matemática na forma algébrica, aritmética e natural, buscando apresentar elementos que expliquem e justifiquem os pensamentos levantados acerca da temática. *Apresenta linguagem clara e estruturada para o nível de educandos à qual se direciona o estudo, mesmo tendo forte rigor matemático envolvido na linguagem utilizada. *Apresenta um conjunto de articulações que exigem interpretação e atenção aos objetos matemáticos, principalmente aos que estão descritos como linguagem natural. *Entende-se que seria possível apresentar mais demonstrações com os métodos apresentados (direta, por indução, contraposição e por absurdo) utilizando de recursos geométricos.	MÉDIA
Regras (Definições, proposições, procedimentos)	*Apresenta métodos de demonstração de teoremas de forma clara, adequada e estruturada, bem como os procedimentos utilizados para prova ou demonstração dos teoremas levantados como exemplos. *Apresenta a estrutura formal dos elementos matemáticos e, também, os procedimentos fundamentais para o entendimento inicial acerca das preliminares de lógica, pensamentos que são importantes para o desenrolar dos demais objetos matemáticos tratados ao longo do livro.	ALTA
Argumentos	*Apresenta bons argumentos com evidente sustentação matemática e lógica. *Apresenta situações de atividades que exigem domínio da linguagem matemática e natural para justificar, demonstrar, provar ou explicar os pensamentos para os acadêmicos e, também, dá indícios de proposições, teoremas ou elementos matemáticos que podem auxiliar na demonstração dos exercícios ou problemas propostos. *Apresenta exemplos de demonstração ou justificativa do pensamento matemático, utilizado no componente de Análise, que podem ser trabalhados no Ensino Médio.	ALTA
Relações	*Apresenta relações entre proposições e teoremas apresentados, principalmente no que diz respeito à resolução de problemas e exercícios apresentados ao longo do capítulo. *Apresenta uma demonstração formal do Binômio de Newton, buscando mostrar ao licenciando uma possível articulação entre o objeto matemático tratado pela demonstração rígida e o mesmo objeto quando tratado pelo professor no Ensino Médio, destacando as diferenças, na visão do autor, entre as formas com o qual devem ser demonstradas ou apresentadas. *Apresenta poucas estruturas de fácil compreensão ao licenciando que façam articulações diretas entre objetos matemáticos do Ensino Médio e Fundamental, uma vez que métodos de demonstração são importantes para apresentar aos educandos o pensamento matemático dentro do processo de aprendizagem. *Os objetos matemáticos (problemas, definições, proposições, etc.) se relacionam e se conectam entre si. *Identifica-se a articulação dos diversos significados dos objetos que intervêm nas práticas matemáticas.	MÉDIA

Fonte: o autor.

6.3.2 Análise do capítulo sobre Conjunto dos Números Reais parte I sob a perspectiva da Ferramenta de Análise Didática: Dimensão Epistêmica

A seção apresentada no livro de Análise busca trazer noções iniciais que permeiam a formação do conjunto dos Números Reais, abordando conceitos que envolvem os Números Racionais e Irracionais, enumerabilidade de conjuntos e ideias de conjuntos infinitos e finitos.

Inicialmente a seção declara brevemente quem são os Números Naturais (números que surgem naturalmente através da contagem) e Números Inteiros (Números Naturais e seus simétricos em relação ao zero). Tão logo, segue para os Números Racionais usando das noções que são utilizadas para encontrar a representação decimal de um racional em forma de fração, de modo que, segundo Ávila (2006, p. 24),

> Se o denominador da fração em forma irredutível só contiver os fatores primos de 10 (2 e/ou 5), a decimal resultante será sempre finita; e é assim porque podemos introduzir fatores 2 e 5 no denominador em número suficiente para fazer esse denominador uma potência de 10.
> Exemplo:
>
> $$\frac{3}{5} = \frac{3\,.\,2}{5\,.\,2} = \frac{6}{10} = 0{,}6;$$
>
> $$\frac{41}{20} = \frac{41}{2^2\,.\,5} = \frac{41\,.\,5}{2^2.\,5\,.5} = \frac{41\,.\,5}{2^2.\,5^2} = \frac{205}{100} = 2{,}05;$$

Já sobre as frações que geram representações decimais infinitas, é destacado que quando o denominador de uma fração irredutível contiver fatores diferentes de 2 e 5, então a representação dessa fração é infinita. Por exemplo, seja $\frac{1}{18}$, temos que $\frac{1}{18} = \frac{1}{2\,.3^2}$, como o denominador possui um fator 3 que é diferente de 2 e 5, logo sua representação é infinita ($\frac{1}{2\,.3^2} = 0{,}0555$ ...). Além disso, é apresentada, também, uma menção a repetição das casas decimais do quociente gerado a partir da divisão do numerador de uma fração irredutível pelo denominador. Por fim, a ideia do autor conclui que sejam os números p e q (com q diferente de zero) inteiros quaisquer na forma $\frac{p}{q}$, essa fração ou seu cociente será um Número Racional.

Entende-se que esse contexto dado pelo livro aponta para uma abordagem que está diretamente vinculada às ideias que são estabelecidas no Ensino Médio, as quais, potencialmente, dão indicações de onde o licenciando poderá utilizar esse conceito em sua prática enquanto professor de Matemática. Como prova a essa menção, traz-se um excerto de Dante (2013) que mostra, de modo direto, os mesmos conhecimentos que são apresentados por Ávila (2006) no tratamento da representação fracionária para a decimal (Figura 27).

Figura 27 – Método de conversão de fração irredutível para decimal

Representação decimal dos números racionais

Dado um número racional $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$, sua representação decimal é obtida dividindo-se *a* por *b*, podendo resultar em:

- decimais exatos, finitos, quando o denominador contiver apenas os fatores primos de 10 (2 e/ou 5). Exemplos:

a) $\frac{1}{2} = \frac{1 \times 5}{2 \times 5} = \frac{5}{10} = 0{,}5$

b) $\frac{1}{4} = \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1 \times 5^2}{2^2 \times 5^2} = \frac{25}{100} = 0{,}25$

c) $\frac{3}{5} = \frac{3 \times 2}{5 \times 2} = \frac{6}{10} = 0{,}6$

d) $\frac{13}{20} = \frac{13}{2^2 \times 5} = \frac{13 \times 5}{2^2 \times 5^2} = \frac{65}{100} = 0{,}65$

- decimais periódicos ou dízimas periódicas, infinitas, quando o denominador da fração na forma irredutível contiver algum fator primo diferente de 2 e 5. Exemplos:

a) $\frac{2}{3} = 0{,}666...$ (o período é 6) e representamos assim: $\frac{2}{3} = 0{,}\bar{6}$;

b) $\frac{1}{11} = 0{,}0909090... = 0{,}\overline{09}$ (o período é 09).

Fique atento!
A representação decimal tem um grande valor prático comparado com a representação em forma de fração. Foi o matemático holandês do século XVI Simon Stevin (1548-1620) quem a sistematizou em seu livro *A dízima*, publicado em 1585.

Fonte: Dante (2013a, p. 18).

Esse conhecimento se configura, no entendimento desta análise, como uma noção do conhecimento especializado que, apesar de estar articulado em contexto de diferentes níveis de ensino (Superior e Médio), possui um ponto de encontro convergente no conhecimento comum do conteúdo necessário para o professor de Matemática. Essa afirmação se justifica por ter sido possível destacar uma relação idêntica entre os métodos que são apresentados no livro de nível Superior e no livro de Ensino Médio. Desse modo, entende-se esse elemento como um ponto de contextualização do conhecimento para o professor enquanto conhecimento especializado tido como referência para ensino na educação do Ensino Médio. Esse destaca se consolida como uma evidência de relação entre os objetos matemáticos nos diferentes níveis de ensino.

Essa articulação pode ser entendida como uma reflexão em torno do conhecimento comum, por envolver elementos dispostos diretamente à prática do professor de Matemática, e enquanto conhecimento ampliado, por estar sendo abordado em nível de aprofundamento do conhecimento necessário para ensino (GODINO et al., 2017). Como destacado, esse objeto matemático potencialmente se mostra como uma articulação entre as relações do Conhecimento Didático-Matemático do professor, se constituindo, ainda, como uma interpretação em torno das relações intramatemáticas para o docente.

Com base em Godino, Batanero e Font (2008) e Godino (2011), no âmbito do contexto do aluno da Educação Básica, as relações extramatemáticas podem ser entendidas como as relações que transcendem o contexto matemático, relacionando os objetos ali dispostos com situações de diferentes contextos, áreas de conhecimento ou níveis de ensino. No que se refere ao contexto de relações extramatemáticas para o professor de Matemática, considera-se que os diferentes contextos em que se torna possível notar os objetos matemáticos devam estar além dos elementos que podem ser percebidos pelo aluno do Ensino Médio, por exemplo.

Entende-se que a noção destacada, para o professor de Matemática, deva contemplar, ainda, a ideia de conduzir um cenário de ensino e contextualização do objeto matemático que esteja articulado às questões profissionais da prática docente, as quais podem ser entendidas dentro das aplicações em outros níveis de ensino, tal como é apontado por Godino, Batanero, Font (2008) e Godino (2011). Além disso, tem-se em vista que a articulação direta entre os objetos matemáticos dos diferentes níveis de ensino (intramatemáticas) se configura como uma possibilidade do docente vislumbrar, como já mencionado, a utilização desses conhecimentos em sua atuação profissional, indo ao encontro da necessidade de potenciais vínculos entre pedagógico, teórico e didático (MOREIRA; CURY; VIANNA, 2005; BRASIL, 2015).

Em relação aos Números Irracionais, segundo conjunto que compõem os Números Reais, é apresentada uma ideia global dos números que, em sua representação decimal, não possuem uma "repetição", comumente chamado de período, na ordem das casas numéricas. Para tanto, é iniciada uma abordagem a partir de Números Irracionais que são facilmente identificados, tal como o número π[20] (3,141592...) (razão entre o comprimento de uma circunferência pelo raio, chamado de Número pi), e (2,7182818...) (número de Euler), $sen(1)$ (0,8414709...), dentre outros os quais não possuem um período de repetição, como por exemplo: (0,42857142...).

Ao longo dessa abordagem, Ávila (2006) chama a atenção para um cuidado necessário que o professor de Matemática deve ter ao trabalhar os Números Irracionais no Ensino Fundamental, no que se refere à apresentação de somente alguns Números Irracionais, tal como π e algumas raízes de números primos. O autor destaca que, muitas vezes, o aluno é "informado" pelo professor de que a representação decimal desses números possui infinitas casas não periódicas, e isso pode levar o aluno do Ensino Fundamental a interpretar que o conjunto dos Irracionais é um conjunto limitado e no máximo enumerável[21]. Isso acarreta em uma falsidade, considerando que o referido conjunto é um conjunto não-enumerável e infinito (ÁVILA, 2006).

[20] Segundo Marchiori (2013), os números π, e e $sen(1)$ pertencem a uma classe de números que se chama Números Transcendentes. Com base nesse autor, Números Transcendentes são número Reais ou Complexos que não podem ser considerados solução de uma equação polinomial composta por coeficientes inteiros e não-nulos.
[21] Um conjunto enumerável, segundo Ávila (2006), se refere à relação de equivalência e correspondência que se pode estabelecer entre o referido conjunto e o conjunto dos Números Naturais. Esse assunto será abordado adiante nas análises.

Como possibilidade ao contexto apresentado, entende-se que uma possível estratégia para o professor solucionar o obstáculo conceitual sobre a infinidade dos irracionais esteja na discussão das possibilidades de não se apresentar unicamente o π, ϕ (razão ou proporção áurea entre medidas)[22] ou algumas raízes de primos como Números Irracionais, trazendo outros números irracionais em relação àqueles que são geralmente utilizados nas práticas docentes da Educação Básica.

Entende-se aí, a necessidade da preocupação conceitual do ensino sobre os elementos desse conjunto na prática do professor, o que potencialmente pode levar o profissional a uma reflexão desses elementos para sua prática e para o cotidiano escolar. Deve-se destacar, entretanto, que, por parte do profissional da educação, é importante haver o cuidado com as “provas” matemáticas que envolvem a natureza desse objeto, pois uma discussão em torno da enumerabilidade desse conjunto pode não estar de acordo com o nível do aluno do Ensino Fundamental ou mesmo do Ensino Médio (NAPAR; KAIBER, 2017). Nesse caso, “cabe ao professor buscar métodos de formar uma interpretação adequada ao conceito global, considerando o nível de ‘maturação matemática’ que seus alunos se encontram para que, assim, realize uma transposição didática adequada” (NAPAR; KAIBER, 2017, p. 10).

No contexto de uma transposição didática por parte do professor, cabe apontar que, de certa maneira, transpor o conhecimento a rigor, tal como se prevê para ensino na Análise Matemática, não é uma tarefa fácil de se fazer. Segundo Reis (2001), há a necessidade de se ter um domínio vasto sobre essa área da Matemática, a fim de se conduzir e oportunizar significações e relações diferentes das que geralmente são dadas a esse campo. Ainda, no caso de um professor que iniciará sua carreira profissional, isso pode acabar se tornando mais complexo ainda (MOREIRA; CURY; VIANNA, 2005). Nesse caso, compreende-se como necessário um ensino de Análise que possibilite, com base em Godino (2009), aos alunos de licenciatura significarem os objetos institucionais ali apresentados para produzirem conhecimento pessoal à prática docente em sala de aula.

Ainda sobre Números Irracionais, a seção do livro propõe uma demonstração que consiste em provar que $\sqrt{2}$ é irracional. Essa demonstração é tomada por redução ao absurdo supondo, por hipótese, que $\sqrt{2}$ é racional. Nesse caso, para ser demonstrado podem ser adotados os procedimentos a seguir (Figura 28):

---

[22] O número π é geralmente utilizado em atividades práticas em que o professor de Matemática solicita ao aluno calcular a razão do arco em 360º de uma circunferência pelo raio. Já o número ϕ, segundo Dante (2013a), também conhecido como número de ouro, se refere à razão proporcional entre segmentos.

Figura 28 – Demonstração de que √2 é irracional por redução ao absurdo

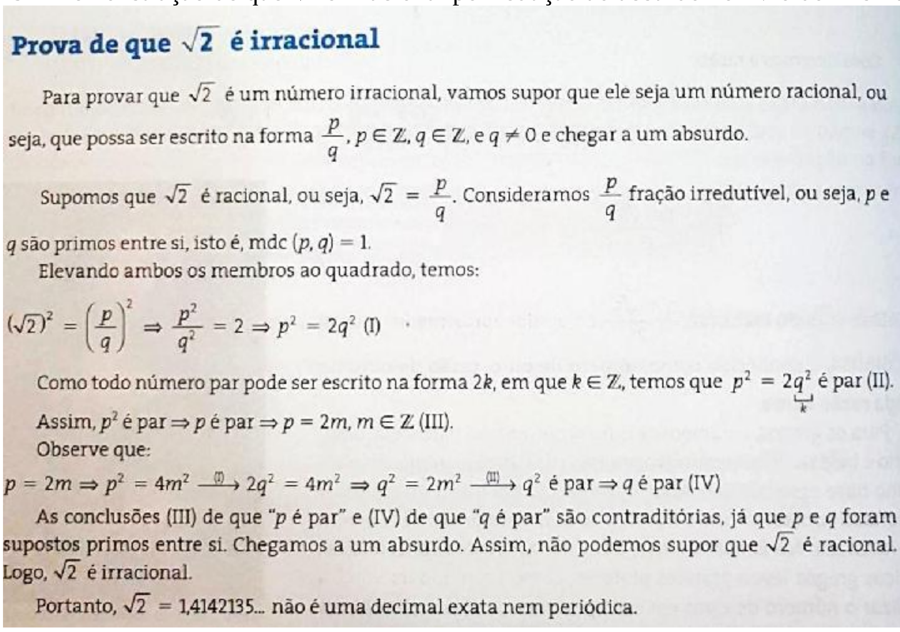
	Considerando a forma geral de um Número Racional representado como fração irredutível, com p e $q \neq 0 \in \mathbb{Z}$	$\frac{p}{q} = \sqrt{2}$
(1)	Aplicando a operação inversa a radiciação quadrada.	$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = (\sqrt{2})^2$
(2)	Aplicando a potência quadrada.	$\frac{p^2}{q^2} = 2$
(3)	Multiplicação de ambos os lados por q^2.	$p^2 = 2q^2$
(4)	Implicação: p^2 é par, pois $2\|p^2$ e, ainda, p, por consequência, também é par. Logo, considerando a forma geral de um par qualquer, pode se usar a forma $p = 2k$ com $k \in \mathbb{Z}$.	$(2k)^2 = 2q^2$

Fonte: Ávila (2006).

Com base na expressão $(2k)^2 = 2q^2$ da linha (4), pode-se concluir que 2 divide $(2k)^2$ e que 2 divide $2q^2$, o que é num absurdo, pois por hipótese $\frac{p}{q}$ é um racional irredutível. Logo, se conclui que $\sqrt{2}$ não é racional, o que implica em que seja um irracional.

O interessante dessa demonstração é que a mesma serve como base para, por exemplo, mostrar que toda raiz de número primo é irracional, utilizando, por fundamento, a hipótese de que essas são frações irredutíveis. Entende-se que esse conhecimento seja necessário ao domínio conceitual matemático do professor de Matemática, para que o mesmo possa conduzir seu conhecimento especializado necessário nas argumentações, provas e demonstrações que podem ser utilizadas pelo professor para conduzir as aulas de Matemática (GODINO et al. 2017). Essa configuração do conhecimento pode se constituir, com base em Godino et al. (2017), como conhecimento ampliado do conteúdo, acerca do estudo de nível avançado aos conceitos que são apresentados na Educação Básica, e enquanto conhecimento comum do conteúdo, devido a possibilidade de execução direta para a docência no Ensino Médio. Essa noção potencializa uma articulação entre as relações da Análise Matemática e do referido nível de ensino da Educação Básica, bem como a possível contextualização desse conhecimento para a prática do professor, assim constituindo uma potencial referência para alicerçar o Conhecimento Didático-Matemático do professor de Matemática. Como noção ao destaque de conhecimento comum do conteúdo, aponta-se para a prova de que $\sqrt{2}$ é irracional a partir da perspectiva de Dante (2013a) (Figura 29).

Figura 29 – Demonstração de que √2 é irracional por redução ao absurdo no livro do Ensino Médio



Prova de que $\sqrt{2}$ é irracional

Para provar que $\sqrt{2}$ é um número irracional, vamos supor que ele seja um número racional, ou seja, que possa ser escrito na forma $\frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}$, e $q \neq 0$ e chegar a um absurdo.

Supomos que $\sqrt{2}$ é racional, ou seja, $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Consideramos $\frac{p}{q}$ fração irredutível, ou seja, p e q são primos entre si, isto é, mdc $(p, q) = 1$.

Elevando ambos os membros ao quadrado, temos:

$$(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2 \text{ (I)}$$

Como todo número par pode ser escrito na forma $2k$, em que $k \in \mathbb{Z}$, temos que $p^2 = 2\underbrace{q^2}_{k}$ é par (II).

Assim, p^2 é par $\Rightarrow p$ é par $\Rightarrow p = 2m$, $m \in \mathbb{Z}$ (III).

Observe que:

$$p = 2m \Rightarrow p^2 = 4m^2 \xrightarrow{\text{(I)}} 2q^2 = 4m^2 \Rightarrow q^2 = 2m^2 \xrightarrow{\text{(II)}} q^2 \text{ é par} \Rightarrow q \text{ é par (IV)}$$

As conclusões (III) de que "p é par" e (IV) de que "q é par" são contraditórias, já que p e q foram supostos primos entre si. Chegamos a um absurdo. Assim, não podemos supor que $\sqrt{2}$ é racional. Logo, $\sqrt{2}$ é irracional.

Portanto, $\sqrt{2} = 1{,}4142135...$ não é uma decimal exata nem periódica.

Fonte: Dante (2013a, p. 22).

No que segue dos elementos indicados na seção do livro, para dar início à ideia de conjuntos finitos, infinitos e enumeráveis, são abordadas, brevemente, a ideia global de noções sobre conjuntos, utilizando questões elementares como a de pertencimento ou não de um elemento x a um conjunto A, da relação de contido ou não entre dois conjuntos A e B, união e interseção entre esses conjuntos. É justificado por Ávila (2006) que a abordagem apresentada é tomada somente para ser utilizada pelo estudo que está sendo proposto na seção, e em uma nota o autor apresenta uma crítica a cerca de como a noção de conjuntos é conduzida no Ensino Médio:

> Ainda é mais ou menos comum em livros de Ensino Médio um tratamento excessivamente longo de conjuntos. Parece que os autores desses livros não se dão conta de que o tratamento de conjuntos que fazem nada tem de substância matemática. Nada mais são do que linguagem e notação, que são ferramentas auxiliares; portanto, só devem ser introduzidas quando necessárias são objetivos do estudo que se pretenda fazer (ÁVILA, 2006, p. 29).

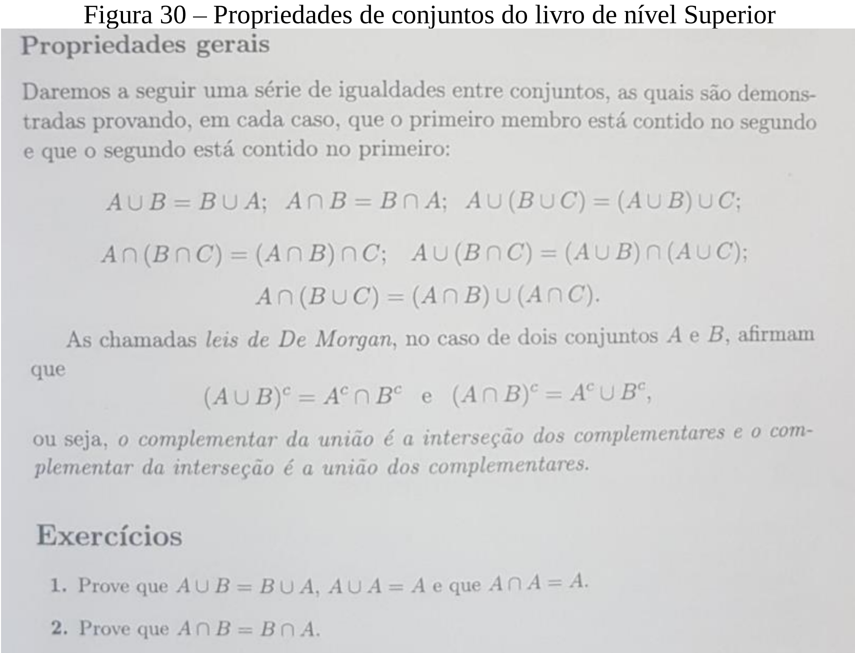
Sobre o excerto destacado do autor, concordando em parte com o mesmo, entende-se que em alguns momentos possa haver um conjunto de elementos de contexto, por parte de livros didáticos da Educação Básica, que podem acabar trazendo um excesso de elementos que, por vezes, pode não ser "adequado" à abordagem inicial de determinados objetos matemáticos. É importante destacar que no contexto atual da Educação Básica, mais especificamente do Ensino Médio, a figura do professor, enquanto profissional que transpõe o conhecimento científico matemático para o aluno do Ensino Médio, se mostra necessária como alicerce para o potencial caminho de aprendizagem do aluno (BRASIL, 2006). Nesse sentido, deve-se destacar que por mais excessivos que sejam os elementos de apresentação do conteúdo que os livros didáticos tenham em seu teor, isso pode se configurar como algo positivo para o professor de Matemática, no sentido de que ele pode explorar as diferentes interpretações extra e intramatemáticas que envolvem a representação institucional daquele objeto. Tal perspectiva leva a ideia de se entender que, por mais "excessivos" que sejam os conhecimentos abordados nos livros didáticos, cabe ao professor, em sala de aula, manejar esse recurso enquanto objeto de exploração e acréscimo de contexto.

No caso específico das noções de conjuntos, sobre o excerto de Ávila (2006), entende-se que a ideia de Conjuntos Numéricos, no que se refere ao Ensino Médio, está sim articulada como noção de "substancial matemático", configurando-se como um conhecimento capaz de trazer raciocínio e contextualização para o cotidiano do aluno do Ensino Médio. Tal como trazem as OCNEM (BRASIL, 2006), é necessário que o professor de Matemática do Ensino Médio tenha condições de apresentar ao aluno um viés da matemática que se articule ao cenário do aluno e as aplicações no mundo exterior. Ainda, de acordo com o referido documento, o estudo de Conjuntos Numéricos, além de trazer elementos de aplicação ao cotidiano do aluno, deve trazer e apresentar possibilidades de utilização da Matemática enquanto ferramenta de uso lógico, cognitivo e abstrato, servindo como base aos demais conhecimentos matemáticos que serão ensinados aos alunos. Além disso, com base nas DCN específicas para Licenciatura em Matemática (BRASIL, 2002b), o professor de Matemática deve oportunizar ao aluno da Educação Básica uma forma de pensar matemática a partir da relação lógica entre os diferentes pontos de vistas das ciências e da própria Matemática.

Os livros do Ensino Médio Souza (2013a) e Dante (2013a) abordam, nesse sentido, um conjunto as diferentes perspectivas da ideia de conjuntos (definições, propriedades e operações) a partir de aplicações à Geografia, à História, às Ciências e da própria Lógica enquanto matemática aplicável a contextos. Apesar de haver um "excessivo" tratamento com a noção de conjuntos, tal como é indicado por Ávila (2006), entende-se que isso traz a possibilidade de o professor explorar outros caminhos de interpretação e ensino da Matemática com seus alunos. Nesse sentido, concordando ao que Godino et al. (2017) entende necessário na formação do Conhecimento Didático-Matemático na perspectiva epistêmica, aponta-se que tal ideia potencializa a forma como o professor compreende e interpreta o objeto matemático no âmbito do compartilhamento de seu conhecimento com o nível em que ensina o referido objeto matemático. Com base nesse argumento, pode-se inferir que o "excesso" de tratamento sobre a ideia de conjuntos que são abordados por livros didáticos, apontado por Ávila (2006) como um ponto negativo, quando conduzido adequadamente pelo professor de Matemática do Ensino Médio pode potencializar a ideias utilizadas para seu ensino, trazendo, assim, a possibilidade de trazer riqueza as compreensões que se tem sobre esse objeto matemático.

Ao apresentar as propriedades gerais sobre conjuntos (diferença ou complementar, união, interseção e relações de pertencimento), o livro do ensino Superior apresenta a ideia de pertencimento de elementos a conjuntos, complementar e a relação de contido ou igual de forma descritiva e explicativa. Já as propriedades, como a interseção e união entre conjuntos, associativa e comutativa, são introduzidas a partir de exercícios, que também podem ser entendidos como situações-problemas (GODINO; BATANERO; FONT, 2008), os quais são solicitados demonstrações ou provas matemáticas, tal como se apresenta na Figura 30.

Figura 30 – Propriedades de conjuntos do livro de nível Superior



Propriedades gerais

Daremos a seguir uma série de igualdades entre conjuntos, as quais são demonstradas provando, em cada caso, que o primeiro membro está contido no segundo e que o segundo está contido no primeiro:

$$A \cup B = B \cup A; \quad A \cap B = B \cap A; \quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C;$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C; \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

As chamadas *leis de De Morgan*, no caso de dois conjuntos A e B, afirmam que

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad \text{e} \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c,$$

ou seja, *o complementar da união é a interseção dos complementares e o complementar da interseção é a união dos complementares.*

Exercícios

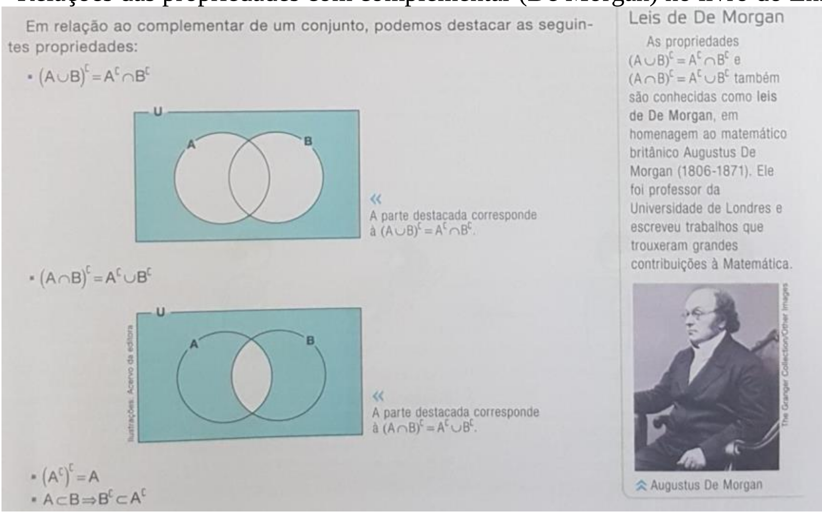
1. Prove que $A \cup B = B \cup A$, $A \cup A = A$ e que $A \cap A = A$.
2. Prove que $A \cap B = B \cap A$.

Fonte: Ávila (2006, p.30).

Entende-se, nesse sentido, que o objeto matemático apresentado no livro de Análise possibilita uma base sobre conhecimento específico do professor sobre o conteúdo, atribuindo um contexto de demonstrações que, indiretamente, oferece sustentação matemática para esse conhecimento. O contexto apresentado no livro tem inferência direta entre os objetos matemáticos de outros níveis de ensino e, a partir disso, entende-se que potencialmente sirva de contexto para uso no conhecimento comum sobre o referido conteúdo matemático. Além disso, o referido objeto toma aprofundamentos matemáticos que se dispõem a investigar, por meio de provas matemáticas, as noções desse conhecimento a um alto rigor necessário para constituir ideias iniciais de outros objetos matemáticos, os quais possibilitam aprofundar o conhecimento especializado do professor sobre o assunto. A articulação dessas percepções possibilita, então, a constituição de um potencial Conhecimento Didático-Matemático necessário para o professor de Matemática (GODINO et al., 2017).

Sobre esse conteúdo matemático, se percebeu relações de mesma natureza matemática com outros objetos matemáticos apresentados na seção, bem como a noção de conjuntos apresentada nos livros de Ensino Médio (DANTE, 2013a; SOUZA, 2013a). Destaca-se, como exemplo, a ideia das propriedades de complementar, com base nas relações De Morgan (Figura 31).

Figura 31 – Relações das propriedades com complementar (De Morgan) no livro do Ensino Médio



Em relação ao complementar de um conjunto, podemos destacar as seguintes propriedades:

- $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

A parte destacada corresponde à $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$.

- $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

A parte destacada corresponde à $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$.

- $(A^C)^C = A$
- $A \subset B \Rightarrow B^C \subset A^C$

Leis de De Morgan

As propriedades $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ e $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$ também são conhecidas como **leis de De Morgan**, em homenagem ao matemático britânico Augustus De Morgan (1806-1871). Ele foi professor da Universidade de Londres e escreveu trabalhos que trouxeram grandes contribuições à Matemática.

Augustus De Morgan

Fonte: Souza (2013a, p.19).

Apesar dessas relações entre os elementos matemáticos, os quais se considera, com apoio em Godino (2009) e Godino et al. (2017), plenamente necessários nos processos de estudo da Matemática para a formação de professores de Matemática, sentiu-se falta da oferta de um maior contexto ao estudo dessas relações com o contexto da prática docente do professor de Matemática na Educação Básica. De certa maneira, nas questões que se referem a possibilidade de que o futuro professor reflita sobre a necessidade e a importância desses conhecimentos aliados à prática docente (BOLOGNEZI, 2006; OTERO-GARCIA; BARONI; MARTINES, 2013).

Entendeu-se possível, por exemplo, que fossem abordadas questões que envolvem o estudo de lógica e representação de conjuntos, dando indicações de como esse conhecimento poderia ser abordado no Ensino Médio e no cotidiano da prática do professor. Como exemplo ao que se está destacando, aponta-se uma amostra de atividade baseada em algumas possibilidades apontadas por Souza (2013a):

Seja U um conjunto universal em $\mathbb{N}$ para o qual: A é conjunto de elementos x e y, e B um conjunto de elementos k. No conjunto A, x representa os números divisíveis por 5 e y os números divisíveis por 10; no B, k representa o Máximo Divisor Comum (MDC) entre x e y. Determinar o complementar de A intersecção com C, ou seja, $(A \cap B)^C$.

Considerando os elementos mínimos de A, temos que $x = 5$ e $y = 10$ (menores naturais compatíveis com a definição do problema); não há elementos máximos, considerando que existem infinitos números divisíveis por 5 e por 10. Considerando k em relação aos elementos mínimos, temos que $k = 5$, pois MDC (5,10) = 5; já sobre o MDC em relação aos valores máximos, como em A os máximos não estão definidos, portanto, não é possível determinar o MDC dos mesmos, entretanto, é possível afirmar que todo MDC dos múltiplos infinitos de 5 e 10 serão divisíveis por 5. Com base nesse argumento, podemos dizer que os elementos da intersecção entre A e B são os valores $t = 5n$, tal que n pertence aos Naturais. Sobre a interseção, pode-se dizer, em relação ao conjunto Universo, que o complementar são todos os elementos naturais z, tal que $z \neq 5n$.

Além da abordagem global sobre conjuntos, é apresentada uma ideia global, a partir de conjuntos infinitos e finitos. Basicamente, segundo Ávila (2006), na perspectiva do Teorema de Cantor, um conjunto é finito quando existir uma cardinalidade k pertencente aos Naturais, tal que os números de elementos de um conjunto A sejam equivalentes a essa cardinalidade k; já um conjunto infinito é quando o mesmo não for finito. Em outras palavras, um conjunto é finito quando existe um número limitado de elementos que são pertencentes a esse, os quais se pode estabelecer uma "contagem" que permita vincular a quantia de elementos a um número natural. Já um conjunto infinito, é quando há uma generalidade de elementos que não permite vincular o número de elementos a um dado número cardinal dos naturais.

Entende-se que a ideia de finito e infinito, muitas vezes, é trabalhada de forma geral no Ensino Fundamental e Médio, sem um conteúdo matemático específico no qual essas abordagens são feitas. Geralmente, as primeiras noções de finito e infinito são conduzidas no Ensino Fundamental, por exemplo, ao se apresentar aos alunos o conjunto dos Números Naturais. Entende-se que a abordagem desse conhecimento perpassa diferentes conhecimentos matemáticos, não tendo um foco específico no trabalho na Educação Básica. Porém, percebe-se que o entendimento conceitual da noção do infinito é necessária por parte do professor de Matemática para explicar sentenças que são apresentadas aos alunos de forma absoluta, sem discussões que podem emergir e enriquecer o diálogo matemático entre professor e aluno.

Com referência em Souza (2013a, 2013b) e Dante (2013a, 2013b), pode-se destacar, por exemplo, a necessidade desse conceito de infinitésimo ao se trabalhar a ideia:

- das infinitas somas parciais dos termos de uma Progressão Geométrica infinita;

- de não existência da tangente de múltiplos de $\frac{\pi}{2}$, que, considerando a noção de limites, trata-se de um limite divergente que tende ao infinito;
- de não existência do logaritmo natural de 0, que ao se avaliar o gráfico da função percebe-se que o mesmo tende ao infinito negativo ao se aproximar de 0;
- da relação de inclusão e união de conjuntos infinitos a partir de conjuntos infinitos, como no caso dos Números Reais, formado a partir dos Naturais, Inteiros, Racionais e Irracionais;
- da noção funcional entre conjuntos, como no caso do estudo de Funções, ao se abordar a ideia das assíntotas ou tendência da função ao infinito.

Com base nesses argumentos, sentiu-se falta, portanto, tal como foi destacado, de que fosse apresentada uma noção de onde o professor de Matemática da Educação Básica poderia contextualizar esse conhecimento em sua atuação docente. Entende-se que esse conhecimento de infinito e finito seja necessário na base conceitual do conhecimento comum e ampliado do professor, para que o mesmo tenha condições de analisar didaticamente potenciais explicações para o aluno do Ensino Médio. Porém, considera-se que essa abordagem poderia estar mais articulada como um potencial conhecimento comum do conteúdo, já que está entrelaçada com objetos matemáticos que são de ensino nas práticas docente na Educação Básica, se mostrando importante na constituição do Conhecimento Didático-Matemático do professor de Matemática (GODINO, 2009; GODINO et al., 2017).

Além dos conceitos matemáticos abordados, ao fim das sessões, são apresentadas notas históricas e complementares, as quais destacam uma prospecção a partir dos elementos históricos que envolvem os conceitos tratados na seção. Entende-se que esses elementos possibilitam uma visão de como os referidos conhecimentos vieram sendo abordados e construídos ao longo das discussões matemáticas que emergem no tempo histórico de constituição da Matemática.

Defende-se, concordando com Batarce (2003), que os elementos históricos devem ser abordados com o intuito de enriquecer os conhecimentos matemáticos, trazendo um “caminho” inicial de como as ideias matemáticas foram surgindo e como as mesmas vieram influenciando esses conceitos ao longo do tempo. Essa questão remete a pensar sobre como os elementos matemáticos devem ser apresentados: enquanto objetos de “fatos” únicos e absolutos ou como propostas de possibilitar uma matemática potencialmente justificada a partir da história (BATARCE, 2003). Ainda, enriquecer o contexto histórico pode servir como uma reflexão para que o futuro professor constitua um conjunto de conhecimentos que podem ser utilizados para contemplar a possibilidade de trazer significação sobre a importância desses conhecimentos na construção epistemológico-matemático (REIS, 2001; BATARCE, 2003), e para beneficiar suas futuras práticas docentes, trazendo justificativas de argumentação histórica para suas aulas (MOREIRA; CURY; VIANNA, 2005).

Destaca-se no excerto, a seguir, uma das notas que são apresentadas na seção.

> Bernhard Bolzano foi quem primeiro falou livremente de conjuntos infinitos. Ele escreveu um livro sobre os paradoxos do infinito, publicado, postumamente em 1859, no qual aborda várias questões de natureza filosófica e matemática acerca dos conjuntos infinitos. Richard Dedekind foi mais longe que Bolzano, utilizando a noção de conjunto na construção dos Números Reais. Mas foi Georg Cantor quem mais avançou no estudo dos conjuntos. Logo no início de um de seus trabalhos sobre os números transfinitos ele define conjunto com as seguintes palavras: por conjunto entenderemos qualquer coleção numa totalidade M de objetos distintos, produto de nossa intuição ou pensamento (ÁVILA, 2006, p. 39).

Com base nas argumentações, aponta-se que o objeto de estudo alcançou uma **idoneidade média em situações-problema**. Além disso, se pode verificar nesse mesmo discurso, as conexões do conhecimento apresentado no componente curricular de Análise Matemática com os Ensinos Fundamental e Médio. Percebeu-se a existência de relações intramatemáticas entre os objetos de estudo da Análise Matemática, justificando, assim, uma **idoneidade alta em relações**.

Notou-se, ao longo a análise da seção, que a mesma possui uma variada quantidade de problemas (ou exercícios, seguindo como são denominados no livro) que requerem e exigem de quem os resolve o trato com demonstrações e provas matemáticas. O termo utilizado ao longo da seção que descreve tal regularidade é o “prove”. Além disso, em todas as atividades são solicitadas a utilização de argumentos de prova que, potencialmente, podem perpassar formas de representação e resolução algébrica, aritmética, geométrica e linguagem natural. Além disso, destaca-se que as diversas conversões de linguagem que se apresentam são solicitas por meio da resolução das dos problemas, principalmente entre a linguagem natural e algébrica. Nesta seção, entretanto, diferentemente da anterior, foi possível perceber o tratamento e conversação com situações que envolveram a linguagem geométrica e aritmética, as quais se sentiu falta ao longo do capítulo anterior.

Em relação a um exemplo de atividade de resolução aritmética, destaca-se o seguinte problema:

> Prove que a dízima periódica $0{,}21507507...$ é igual a $\frac{21507-21}{99900} = \frac{21486}{99900} = \frac{3581}{16650}$ (ÁVILA, 2006, p. 31).

Para essa questão, adota-se uma perspectiva de resolvê-la a partir do método numérico, o qual, também, pode ser utilizado para questões semelhantes no nível do Ensino

Médio, tal como se mostra nos livros didáticos analisados. A referida questão é resolvida no quadro da Figura 32.

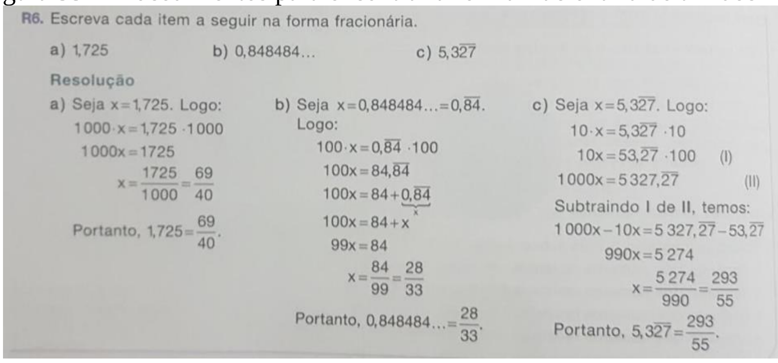
Figura 32 – Prova de que 0,21507507... equivale a $\frac{3581}{16650}$

	Tomando um número y tal que $y = 0{,}21507507\ldots$	$y = 0{,}21507507\ldots$
(1)	Multiplicando ambos os lados por 100 com o objetivo de deixar somente o valor referência do período (507) representado como número decimal.	$100y = 21{,}507507\ldots$
(2)	Separando a parte inteira da decimal no membro direito da igualdade.	$100y = 21 + 0{,}507507\ldots$
(3)	Tomando como referência o $k = 0{,}507507507\ldots$ com o objetivo de encontrar a fração geratriz do referido valor.	$k = 0{,}507507507\ldots$
(4)	Multiplica-se a igualdade por 1000 para tomar uma parte referência do período (507) para encontrar a fração geratriz.	$1000k = 507{,}507507507\ldots$
(5)	Realizando a subtração da linha (4) em relação a (3).	$1000k - k = 507{,}507507507\ldots - 0{,}507507507\ldots$
(6)	Realizando a subtração e multiplicando ambos os lados da igualdade por 999.	$k = 0{,}507507507\ldots = \frac{507}{999}$
(7)	Substituindo a fração encontrada para $k = 0{,}507507507\ldots$ da linha (6) na equação da linha (2).	$100y = 21 + \frac{507}{999}$
(8)	Colocando o membro direito da igualdade sobre o mesmo denominador.	$100y = \frac{21 \times 999 + 507}{999}$
(9)	Resolvendo a equação no membro direito e multiplicando ambos os lados por $\frac{1}{100}$.	$y = \frac{21{,}486}{99900}$
(10)	Pela sexta classe de equivalência da fração encontrada.	$y = \frac{21{,}486}{99900} = \frac{3581}{16650}$

Fonte: o autor.

Esse tipo de problema exige do licenciando habilidades com uma prova matemática que trabalha com diferentes operações aritméticas. Entende-se que tal problema possibilite uma reflexão em torno de diferentes procedimentos aritméticos que requerem, em potencial, questões que envolvem tanto as relações do conhecimento ampliado do conteúdo, por se tratar de uma abordagem que possibilita uma reflexão em torno dos objetos matemáticos da Análise Matemática em relação aos Números Racionais, quanto do conhecimento comum do conteúdo, por envolver noções que são ensinadas no Ensino Médio, com base em Souza (2013a). Nesse sentido, percebe-se uma possibilidade de interação articulada no tratamento com a linguagem aritmética que é trabalhada, tanto na Análise Matemática quanto no Ensino Médio, com referência a mesma natureza de objeto matemático. Com base na Figura 33, apresenta-se o que se está destacando.

Figura 33 – Procedimentos para encontrar a forma fracionária de um decimal



R6. Escreva cada item a seguir na forma fracionária.

a) 1,725 b) 0,848484... c) $5,3\overline{27}$

Resolução

a) Seja $x = 1,725$. Logo:
$1000 \cdot x = 1,725 \cdot 1000$
$1000x = 1725$
$x = \frac{1725}{1000} = \frac{69}{40}$
Portanto, $1,725 = \frac{69}{40}$.

b) Seja $x = 0,848484... = 0,\overline{84}$.
Logo:
$100 \cdot x = 0,\overline{84} \cdot 100$
$100x = 84,\overline{84}$
$100x = 84 + 0,\overline{84}$
$100x = 84 + x$
$99x = 84$
$x = \frac{84}{99} = \frac{28}{33}$
Portanto, $0,848484... = \frac{28}{33}$.

c) Seja $x = 5,3\overline{27}$. Logo:
$10 \cdot x = 5,3\overline{27} \cdot 10$
$10x = 53,\overline{27} \cdot 100$ (I)
$1000x = 5\,327,\overline{27}$ (II)
Subtraindo I de II, temos:
$1\,000x - 10x = 5\,327,\overline{27} - 53,\overline{27}$
$990x = 5\,274$
$x = \frac{5\,274}{990} = \frac{293}{55}$
Portanto, $5,3\overline{27} = \frac{293}{55}$.

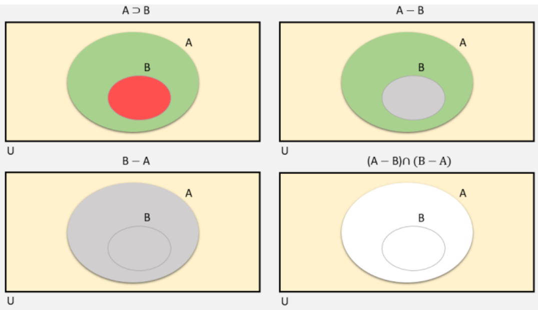
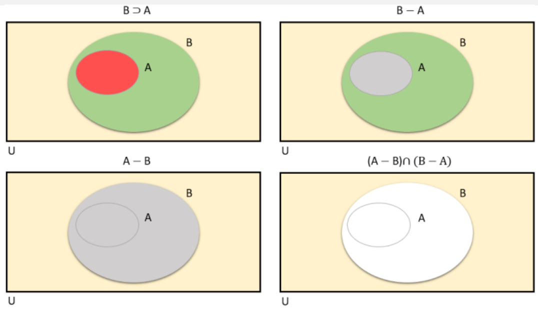
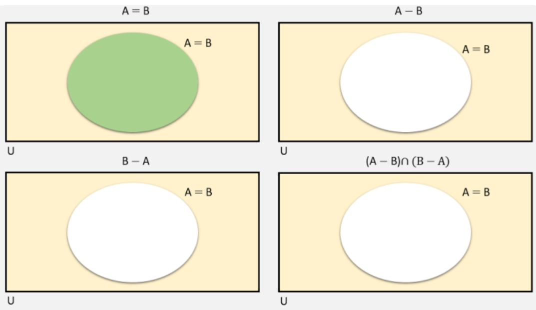
Fonte: Souza (2013a).

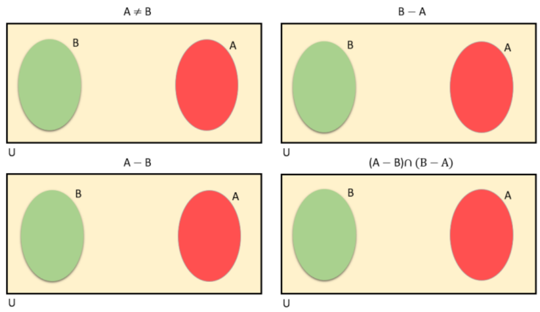
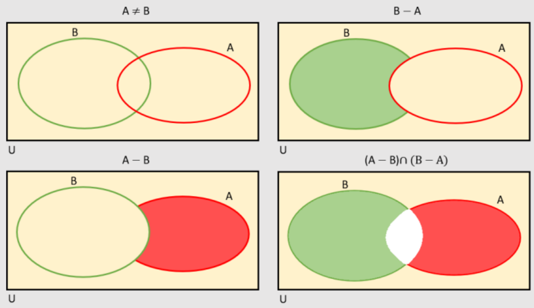
Tendo se apresentado um exemplo de atividade por meio de resolução numérica, destaca-se uma que aborda a conversão da linguagem algébrica para a geométrica, conforme Ávila (2006, p.32):

> 11. Prove que $(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$. Faça um diagrama ilustrativo.

Para provar essa questão (Figura 34) se utilizará de diagramas representativos, tal como é solicitado pelo problema.

Figura 34 – Prova de que $(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$

	Considerando um conjunto Universo U contendo os conjuntos A e B.	Para essa prova devemos considerar os casos em que: $A \supset B, B \supset A, A = B, A \neq B, A \neq B \; \forall \, x \in A \; ou \; B$.
(1)	A contém B. A região em verde representa os elementos de A. A região em vermelho representa os elementos de B. A região em cinza representa os elementos retirados em função da operação diferença. A região em branco representa a intersecção vazia.	
(2)	B contém A. A região em verde representa os elementos de B. A região em vermelho representa os elementos de A. A região em cinza representa os elementos retirados em função da operação diferença. A região em branco representa a intersecção vazia.	
(3)	A igual a B. A região em verde representa os elementos de $A \; e \; B$, pois $A = B$. A região em branco representa a intersecção vazia.	

(4)	A disjunto de B para todos os elementos dos conjuntos. A região em verde representa os elementos de B. A região em vermelho representa os elementos de A. * No caso dessa representação, não é possível representar geometricamente as diferenças e intersecção, pois os conjuntos são disjuntos. Com isso, tanto as diferenças aplicadas quanto a intersecção representam conjuntos vazios.	
(5)	A disjunto de B. O traçado em verde representa os elementos de B. O traçado em vermelho representa os elementos de A. A região em verde representa os elementos da diferença entre B e A. A região em vermelho representa os elementos da diferença entre A e B. A região em branco representa a intersecção vazia.	

Fonte: o autor.

As provas apresentadas se constituem a partir de elementos de representação geométrica que podem ser utilizadas para elucidar potenciais dúvidas sobre a resolução por meio de um método algébrico. Com base em Souza (2013a) e Dante (2013a), essas representações podem, quando utilizadas pelo aluno do Ensino Médio, apresentar formas de que o aluno reflita sobre as situações para sua resolução. Entende-se necessário, entretanto, que os elementos matemáticos sejam abordados a partir de todos os potenciais casos que podem emergir ao se utilizar de tal método para prova. Sentiu-se falta, nas atividades estruturadas no livro de Análise, que fossem indicados os casos em que se mostre necessário verificar as ilustrações para confirmar a sentença algébrica, pois o futuro professor precisará ter domínio e entendimento do por que isso é importante para seu conhecimento especializado sobre o conteúdo (GODINO, 2009), conduzindo argumentos para provar esses elementos, geometricamente, aos alunos do Ensino Médio.

Entende-se que questões como essa, considerando a indexação do conhecimento comum do conteúdo, possibilitem ao professor em formação articular potenciais e diferentes representações que envolvam provas matemáticas, as quais podem ser úteis na prática, enquanto conhecimento comum do conteúdo, e no ensino desse objeto matemático no nível de Ensino Médio.

Tais questões exigem que o futuro professor pense, estude e organize o conjunto de conhecimento que possui em prol de resolver tais problemas, considerando estratégias que melhor se adequem para resolvê-los (NAPAR; KAIBER, 2017). Além disso, indicam um caráter de generalização, por apresentarem uma condição que não é resolvida por um algoritmo de caso particular, mas por uma prova que requer argumentação, podendo ser construída a partir de diferentes linguagens as quais possam sustentar a prova matemática solicitada.

Nessa perspectiva, entende-se a importância de que o futuro professor compreenda um aprofundamento teórico que esteja em nível de rigor matemático mais elevado (GODINO et al., 2017). Aponta-se a ideia de que a base de conhecimento do futuro professor deve ser mais aberta nesse sentido, abrangendo elementos de diferentes níveis de ensino e aprendizagem que o levem a desenvolver a habilidade de refletir sobre os objetos matemáticos que ensina, sabendo analisar, cuidadosamente, as justificativas matemáticas que esse solicitará e apresentará aos seus alunos. Isso, potencialmente, é possibilitado através de atividades como a apresentada (GODINO, 2009; PINO-FAN; GODINO, 2014; GODINO et al., 2017). Tão logo, conclui-se que a seção atinge uma **idoneidade alta em linguagem e argumentos**.

Por fim, a seção apresenta definições, proposições e procedimentos que estão adequados ao nível das abordagens do estudo, apresentando elementos de forma clara e objetiva aos referenciais necessários para sua abordagem. Além disso, apresenta os tópicos essenciais necessários para o referido estudo, com questões bem definidas e estruturadas. Entende-se que, no quesito nível Superior, apresenta inúmeras estruturas em diferentes linguagens, as quais servem para apresentar ou representar elementos necessários para a abordagem do estudo dos Números Reais, tais como as definições e conceitos que envolvem os conjuntos enumeráveis, infinitos e finitos. O tratamento com as demonstrações apresentadas está adequado e, portanto, entende-se que condiz à abordagem necessária para as temáticas a que se propõe.

Além do mencionado, a seção também apresenta um aprofundamento de conceitos, os quais, com base em Dante (2013a), são apresentados no Ensino Médio. Essa relação destaca uma articulação com conhecimentos de natureza matemática formal, possibilitando ao futuro professor avaliar as abordagens dos livros didáticos do Ensino Médio de forma crítica e propiciando uma imersão sobre a discussão de como os objetos matemáticos podem ser apresentados no nível da prática docente. A partir desses elementos destacados, aponta-se que a seção atingiu uma **alta idoneidade em regras**.

Com base na justificativa de todos os componentes a serem investigados, conforme a Idoneidade Epistêmica do EOS, apresenta-se, no quadro da Figura 35, uma síntese da referente análise.

Figura 35 – Análise Epistêmica do capítulo dos Números Reais Parte I (Ávila, 2006)

Componentes	Indicadores	Grau de Idoneidade
Situações-problema	- Apresenta elementos de contextualização intramatemáticos, os quais, por exemplo, envolvem a utilização dos Números Irracionais e Racionais, relações entre conjuntos e suas representações, e noções de enumerabilidade, infinito e finito no conjunto dos Números Reais. - Propõe situações de generalização de conceitos e proposições, por meio de prova ou demonstração matemática, tal como a prova de que $\sqrt{2}$ é irracional, as relações de Morgan $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ e $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ e a demonstração de enumerabilidade do Conjunto dos Números Racionais, de um subconjunto particular ao caso geral da prova matemática. - Apresenta um conjunto de exercícios com indicações de resolução, os quais se entendem serem possíveis situações-problema. - Apresenta notas históricas e complementares que trazem problematização ao estudo da teoria dos conjuntos, tal como os paradoxos e teoremas de Cantor, paradoxo de Russel e de Richard.	ALTA
Linguagem	- Apresenta diferentes elementos de linguagem envolvendo as expressões em linguagem natural, algébrica e aritmética, apresentando tratamento nas situações apresentadas e, quando possível, conversão entre as linguagens descritas, principalmente entre a natural e algébrica. - O nível de linguagem é adequado aos estudantes ao qual está direcionado, apresentando ideias intuitivas sobre os conhecimentos que estão sendo descritos. - Propõe situações em que se mostra necessária a interpretação sobre os conceitos apresentados em relação aos objetos matemáticos.	ALTA
Regras (Definições, proposições, procedimentos)	- As definições, as proposições e os procedimentos são apresentados de forma descritiva e clara, trazendo elementos que se mostram importantes para o referido estudo. - Apresenta os elementos essenciais para o estudo proposto dentro das definições, das proposições e dos procedimentos que são trabalhados na temática proposta.	ALTA
Argumentos	- Os problemas e exercícios trabalhados ao longo da seção exigem, de quem lê, habilidades com demonstração e provas matemáticas. Além disso, na maioria das atividades, é exigida uma argumentação para justificativa dos procedimentos adotados. - As demonstrações, os argumentos e os elementos de prova matemática estão adequados ao nível a que se dirigem (Nível Superior), abordando, ainda, argumentos que são utilizados no nível de ensino da Educação Básica. Por exemplo, sobre a identificação de um Número Racional ou Irracional.	ALTA
Relações	- A maior parte da seção apresenta relações entre as definições, as proposições e os teoremas que são apresentados, principalmente no que diz respeito à ideia de enumerabilidade, infinidade e limitação de conjuntos. - São apresentados elementos que podem ser articulados com elementos de níveis de ensino menor (Médio e Fundamental) tal como a noção de conjuntos e da constituição da identificação de Números Racionais e Irracionais. Porém, sente-se a falta de uma articulação ou argumentação que potencialmente trouxesse uma discussão desses conhecimentos para a prática profissional dos licenciandos.	MÉDIA

Fonte: o autor.

No subcapítulo que segue, se conduzem apontamentos, análises e reflexões até aqui apresentados, os quais são retomados a partir dos objetivos estabelecidos, buscando uma síntese e reflexão sobre os achados da investigação.

6.4 SÍNTESE E REFLEXÕES SOBRE AS ANÁLISES

A investigação aqui apresentada teve como objetivo geral **investigar articulações entre conhecimentos matemáticos institucionais da Análise Matemática para Licenciatura em Matemática e do Ensino Médio que apresentem potencialidades para alicerçar o conhecimento do professor de Matemática para atuar no Ensino Médio**. Para tal, foram estabelecidos objetivos específicos em torno dos quais, no que segue, se encaminham reflexões finais sobre o trabalho produzido.

A primeira questão a ser discutida refere-se ao objetivo de **investigar os objetos matemáticos institucionais da Análise Matemática, previstos para desenvolvimento em cursos de Licenciatura em Matemática, a partir de uma análise dos componentes curriculares de Análise Matemática de cursos de universidades de Porto Alegre e Região Metropolitana.**

Os documentos analisados para atingir esse objetivo, os chamados Programas de Ensino, apresentaram um conjunto de elementos os quais permitiram determinar os objetos matemáticos que estavam previstos para ensino nos cursos de Licenciatura, como: a formalização de conceitos que são trazidos a partir dos Números Reais (conjuntos enumeráveis, infinitos, finitos), a noção de limites, derivadas, integrais, sequências e topologia da reta.

Nesses documentos, foi possível analisar, também, os aspectos que envolvem o contexto desses componentes dentro de sua organização curricular nos cursos, tais como: os objetivos, as metodologias e recursos adotados, a carga horária e as bibliografias indicadas. Destaca-se, aí, uma reflexão em torno dos objetivos que os programas desses componentes apresentaram.

Foi possível identificar, em relação aos objetivos, que parte dos programas analisados não deixam claro objetivos que apresentem uma relação do componente curricular com a formação profissional dos professores de Matemática da Educação Básica. Os cursos A, D e E mostraram objetivos que, no entendimento desta investigação, estão voltados, essencialmente, as relações formais e teóricas do conhecimento matemático que é apresentado na Análise Matemática. Entende-se, na perspectiva institucional, que essa questão pode potencializar a ideia de que a importância do componente curricular, enquanto objeto de estudo da Matemática e dos cursos de Licenciatura, é formalizar conceitos previamente ensinados no Cálculo, bem como o tratamento com demonstrações, provas e teoremas, tal como apontado por Moreira, Cury, Vianna (2005). Entretanto, enquanto componente constituinte dos cursos de Licenciatura em Matemática, e considerando a formação profissional dos futuros docentes, entende-se que o objetivo desse componente deva ir além, mostrando-se como parte fundamental de base matemática e pedagógica para a atuação docente na Educação Básica.

Bolognezi (2006) e Otero-Garcia, Baroni e Martines (2013), destacam que a visão de licenciandos, professores de Ensino Médio e professores que ensinam Análise pode estar em torno da concepção de que a Análise Matemática serve como base fundamental para o tratamento de demonstrações de proposições e teoremas do Cálculo e do Conjunto dos Números Reais (OTERO-GARCIA; BARONI; MARTINES, 2013). Ou, ainda, de que a Análise Matemática, principalmente sobre as respostas de licenciandos, não tem serventia à atuação docente na Educação Básica, por envolver demonstrações, definições e proposições que não são utilizadas diretamente nesse nível de ensino (BOLOGNEZI, 2006).

Já sobre os cursos B e C, os mesmos apresentaram objetivos que se entende estarem mais próximos de uma articulação com a formação docente. No caso do curso B, por exemplo, destaca-se que o objetivo apresenta que, além do enfoque matemático, também haja relações dos objetos matemáticos da Análise Matemática com objetos matemáticos previstos para ensino da Educação Básica. Outrossim, percebe-se que essa relação com os tópicos no nível de prática docente do futuro professor de Matemática pode fortalecer uma ideia da importância desse componente na formação docente. Essa interpretação potencializa a percepção do que Godino (2009) aponta como importante na formação do conhecimento do professor de Matemática, trazendo luz à abordagem sobre os Conhecimentos Didático-Matemáticos (GODINO, 2009).

Já o curso C, apesar de destacar um enfoque matemático, apresenta uma ideia de objetivo que busca a reflexão, crítica e autocrítica do futuro professor. Tal visão, considerando as DCN específicas para Licenciatura (BRASIL, 2002b), é importante na construção do futuro docente para que o mesmo tenha condição de refletir sobre a importância da Matemática na vida escolar e nas reflexões de como o ensino de Matemática pode ser conduzido. Além do mais, essa questão se mostra pertinente ao desenvolvimento das competências e habilidades que envolvem a formação continua do professor de Matemática, por se mostrar elemento necessário para que o futuro professor tenha condições de desenvolver e perceber sua autonomia docente enquanto profissional da Educação (BRASIL, 2002b). Destaca-se, ainda, que essa autonomia de reflexão para prática possa ser oportunizada a partir de ferramentas de estudo que possibilitem ao professor orientar-se e refletir em suas próprias organizações metodológicas. Para essa questão, destaca-se, aqui, a noção teórica da Idoneidade Didática no âmbito do EOS.

A Idoneidade Didática se constitui como uma ferramenta de estudo capaz de orientar reflexões para uma intervenção eficaz em sala de aula (GODINO, 2009), possibilitando, nesse sentido, uma forma de pensar sobre os processos de estudos matemáticos relacionados ao ensino e aprendizagem. Essas intervenções podem decorrer desde reflexões sobre uma análise do currículo que está sendo executado em sala de aula e livros didáticos que estão sendo utilizados como recursos didáticos, como a projetos de ensino pensados a partir dos elementos epistêmicos, cognitivos, afetivos, interacionais e mediacionais que os constituem. Com base nisso, entende-se que essa noção teórica tenha um potencial encaixe a percepção mencionada no objetivo dos programas do curso C, oferecendo um recurso teórico que pode vir a possibilitar a autorreflexão por parte do futuro docente.

Outrossim, pode-se destacar, ainda, a importância que tem o referido enfoque teórico em análises de materiais que são comumente utilizados por professores de Matemática. Nesta investigação, por exemplo, a ferramenta teórica da Idoneidade Didática foi de extrema significância, pois foi a partir dela que se constituíram as análises epistêmicas, de modo organizado e criterioso, entendidas como mínimas para o desenvolvimento efetivo dos processos de ensino e aprendizagem da Matemática.

De modo geral, foi possível verificar, ao longo das análises dos documentos institucionais dos componentes curriculares de Análise dos cinco cursos de Licenciatura em Matemática, que há visões diferenciadas sobre como a Análise deve contribuir para a formação do professor de Matemática. Enquanto os objetivos de parte dos componentes destacam a formalização dos conceitos matemáticos, outros mencionam sobre a articulação desses conteúdos com a prática do professor de Matemática da Educação Básica e, ainda, sobre a construção de um ambiente que incorpore ações de reflexão, crítica e autocrítica para os licenciandos.

Deve-se apontar, considerando a fala de Cury (2005), que pode haver um distanciamento entre o que é indicado nos documentos institucionais e a efetividade desses na execução da prática em sala de aula. Nesse sentido, questiona-se, aqui, se efetivamente há uma aproximação entre o que esses componentes de Análise sugerem por “relações com a prática docente na Educação Básica” (curso B) ou mesmo, da Análise Matemática enquanto componente curricular que constrói um ambiente para crítica, autocrítica e reflexão sobre as práticas dos futuros professores (curso C). Além disso, considerando essas questões de fato ocorrem, de que modo essas aulas são conduzidas? Elas trazem consigo potencialidades para que o futuro professor consiga significá-las, de alguma forma, em sua formação?

Esse questionamento decorre não só dos objetivos estabelecidos por esses componentes, mas, também, pelas indicações metodológicas de como esses componentes são conduzidos. Percebeu-se na análise que, basicamente, todos os componentes curriculares referentes a Análise Matemática indicam ideias de aulas expositivas que permitem debates e reflexões aos alunos. Pensa-se, nesse sentido, se essa condução metodológica é suficiente para dar conta dos objetivos formativos indicados no curso B, sobre a relação entre Análise e Educação Básica, e no curso C, sobre as questões da crítica, autocrítica e reflexão. Também, se esses objetivos pretendidos e implementados (GODINO, 2011) para o ensino de Análise nessas instituições estão sendo, de fato, alcançados no processo de estudo da Análise.

Apesar do que está se destacando, de certa forma, se há proposta em realizar o que é apontado nos referidos documentos, portanto, há possibilidade de que isso seja, de fato, posto na formação acadêmica proporcionada pelos cursos mencionados.

Para atender o objetivo de **identificar objetos matemáticos institucionais pertinentes ao Ensino Médio, a partir das Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio,** tomaram-se as Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (OCNEM) (BRASIL, 2006), as quais possibilitaram investigar, de modo geral, os objetos matemáticos que estão previstos para ensino no Ensino Médio. A partir desse documento, constatou-se a separação dos conhecimentos matemáticos em quatro blocos: Números e Operações; Funções; Geometria; Análise de Dados e Probabilidade.

As orientações curriculares apontaram elementos de contexto, aplicação e tratamento que devem ser dados aos objetos matemáticos no Ensino Médio, tal como as relações intramatemáticas, que são aquelas estabelecidas entre objetos matemáticos, e extratemáticas, aquelas que são estabelecidas entre a Matemática teórica (conceitos, proposições, teoremas, etc.) e suas aplicações na vivência do aluno do Ensino Médio e das outras áreas de conhecimento. A análise desse documento teve como objetivo identificar os objetos matemáticos abordados nesse nível de ensino para, de modo preliminar, verificar as potenciais relações que poderiam se estabelecer entre os objetos matemáticos do Ensino Médio e os da Análise Matemática.

Foi possível perceber, nessa análise, a existência de conhecimentos matemáticos que, enquanto formulação da natureza matemática, se relacionavam com objetos matemáticos da Análise Matemática. Destacam-se, por exemplo, o tratamento da noção de conjuntos, Números Reais e seus subconjuntos, as ideias de tratamento com métodos de prova ou demonstração matemática e as ideias de lógica. Além desse vínculo, o documento aponta questões relacionadas ao ensino da Matemática, as quais entende-se estarem de acordo com parte da visão que se apresentou nos objetivos dos Programas de Ensino analisados. No que se refere, por exemplo, a visão de se abordar os conhecimentos matemáticos com tratamento em demonstrações e provas matemáticas.

O documento permitiu interpretar que o contexto matemático para o aluno do Ensino Médio deve estar atrelado a suas práticas do cotidiano, as práticas da sociedade e as formas de aplicações do conhecimento matemático. Porém, o documento indica, também, a necessidade de que o aluno do Ensino Médio tenha contato com a matemática relacionada dentro da própria matemática, ou seja, com a conexão entre conhecimentos matemáticos que podem e devem ser aplicados dentro do cenário da própria Matemática (o trato com relações entre objetos matemáticos, demonstrações, definições e teoremas). Nesse sentido, destaca-se a necessidade de que o professor do Ensino Médio consiga conduzir práticas que possibilitem essas relações, tendo o domínio com elementos que envolvam o tratamento, por exemplo, com provas e demonstrações (BRASIL, 2006) necessárias para justificar o pensamento matemático conduzido para resolver um determinado problema. Essa questão implica na importância de que o professor do Ensino Médio tenha um domínio avançado sobre os elementos matemáticos que conduz na Educação Básica, e que sua percepção conceitual sobre os objetos matemáticos e os argumentos utilizados esteja fortemente embasada (BRASIL, 2006). Essa noção se encontra de acordo com a visão de Godino (2009) e Godino et al. (2017), sobre a formação dos Conhecimentos Didático-Matemáticos, no entendimento de que é necessário que, além do professor ter o domínio sobre o conhecimento que está ensinado, ele deva ter uma ampliação do conhecimento matemático para a prática docente, sabendo lidar com a Matemática em diferentes contextos e níveis de ensino. Nesse sentido, percebe-se a importância que os conhecimentos da Análise, no seu contexto lógico-formal-dedutivo (MOREIRA; CURY; VIANNA, 2005), podem possibilitar à formação do professor de Matemática.

De modo geral, em todos os blocos destacados pelas OCNEM (BRASIL, 2006) foi possível perceber que esses possuem, em suas descrições, potenciais elementos para que fossem relacionados aos objetos matemáticos da Análise Matemática (àqueles encontrados nos Programas de Ensino). A partir dessa análise e interpretação, tomou-se como importante a análise de livros didáticos do Ensino Médio, os quais serviram, especificamente, como referencial institucional para os objetos matemáticos do referido nível de ensino e, também, para as articulações entre os conhecimentos matemáticos da Análise Matemática e do Ensino Médio.

Da análise desses livros, percebeu-se a possibilidade, no conjunto dos diferentes objetos matemáticos relacionados a aspectos extra e intramatemáticos, de se apontar potenciais relações e articulações com os objetos matemáticos da Análise Matemática, tendo em vista a diversificação de abordagens que são trazidas por esses recursos. Entende-se que os livros didáticos do Ensino Médio se configuraram como bons referenciais, tanto para a prática do professor no referido nível de ensino, quanto para as potenciais articulações que foram realizadas entre os objetos matemáticos dos diferentes níveis de ensino (Análise Matemática no superior e Ensino Médio para a básica). Esses materiais permitiram perceber, desde elementos vinculados a formulação da cidadania e do cotidiano do aluno do Ensino Médio a questões matematicamente estruturadas, como o desenvolvimento de cultura e bagagem de natureza propriamente matemática.

Sobre os objetivos de **analisar os objetos matemáticos institucionais da Análise Matemática para Licenciatura que, potencialmente, podem ser vinculados com objetos matemáticos do Ensino Médio** e **investigar e apresentar possíveis articulações que, em potencial, possibilitem emergir Conhecimentos Didático-Matemáticos que permitam o futuro professor de Matemática vincular a Análise Matemática para Licenciatura com o contexto da atuação docente no Ensino Médio,** defende-se, nesta dissertação, a visão de que a Análise Matemática, enquanto área de conhecimento matemático que formaliza, à rigor, estudos do Cálculo e do Conjunto dos Números Reais, se constitui como parte importante no processo de formação do professor de Matemática que atua não só no Ensino Médio, mas na Educação Básica como um todo. Essa percepção decorre da ideia de que, como é apontado por Godino et al. (2017), é necessário que o conjunto de conhecimentos do professor esteja articulado, na perspectiva epistêmica, entre as composições de conhecimentos que o professor deve internalizar e saber conduzir na prática sobre o nível de ensino em que atua (conhecimento comum do conteúdo) e conhecimentos que o professor deve ter sobre níveis de ensino que estão acima daquele que o mesmo ensina e relacionados a outros contextos (conhecimento ampliado do conteúdo).

Ao longo das reflexões em torno do EOS, percebeu-se a necessidade de assumir um contexto de conhecimentos matemáticos diferenciado para os futuros professores em relação ao contexto dos alunos do Ensino Médio. Considerou-se o entendimento de que, para um aluno do Ensino Médio, o contexto de aplicação do conhecimento matemático encontra-se, na maior parte do tempo, nas questões da prática de seu cotidiano e da aplicabilidade para sua vida social e outras áreas do conhecimento, como, por exemplo, na ideia de investimentos financeiros, pagamento de contas, raciocínio lógico, posicionamento frente à economia, frente ao trabalho e ao exercício de sua cidadania, etc. (BRASIL, 2006). Além disso, entendeu-se, assim como apontam as OCNEM (BRASIL, 2006), a necessidade que o aluno tenha noções da utilizar do conhecimento matemático dentro da própria Matemática, aplicando seus conhecimentos a outros objetos necessários para o desenvolvimento de sua maturação com o tratamento em Matemática.

Já para o professor de Matemática, concordando as DCN específicas para Licenciatura em Matemática (BRASIL, 2002b), o contexto dos conhecimentos matemáticos foi entendido na atividade de vincular esses conhecimentos ao contexto da prática docente e aos conhecimentos que devem ser ensinados pelo professor na Educação Básica. Para esse contexto, tomou-se, então, a noção dos potenciais Conhecimentos Didático-Matemáticos, na perspectiva epistêmica, dos professores de Matemática.

Os potenciais Conhecimentos Didático-Matemáticos (CDM) para a prática do professor foram assumidos na noção de que os conhecimentos provenientes da Análise Matemática devem ser entendidos em uma perspectiva conjunta de conhecimento comum e conhecimento ampliado do conteúdo. No que se refere a isso, o conhecimento comum do conteúdo foi entendido como as potencialidades das conexões matemáticas que os conhecimentos desse componente viabilizam para alicerçar o conhecimento matemático específico do futuro professor. Já o conhecimento ampliado do conteúdo, foi interpretado sobre a necessidade de que o professor tenha domínio sobre conexões que podem se estabelecer, institucionalmente, nos diferentes níveis de ensino (Fundamental, Médio e Superior) com os conhecimentos matemáticos que o mesmo aprende na Licenciatura e executa em sua prática docente na Educação Básica. Essa percepção de potencial CDM orientou as análises epistêmicas permitindo, no sentido do conhecimento matemático relacionado ao contexto da prática docente, estabelecer relações e conexões da Análise Matemática com o Ensino Médio.

As análises epistêmicas foram desenvolvidas a partir do referencial institucional (livro didático de nível Superior) de Ávila (2006), as quais, ao longo da análise, buscou-se apresentar elementos de articulação com objetos matemáticos do Ensino Médio que foram tomados a partir dos referenciais institucionais (coleção de livros didáticos do nível Médio) de Souza (2013a, 2013b, 2013c) e Dante (2013a, 2013b, 2013c). Nessas análises, foi possível perceber que existem relações e articulações que podem ser feitas entre os objetos matemáticos e que, ainda, dependendo da forma com o qual são conduzidas, podem apresentar elementos importantes para a constituição dos CDM de professores de Matemática.

Destacaram-se elementos da Análise Matemática que abordam o tratamento com demonstrações e provas matemáticas que são necessárias para que o futuro professor possa trazer e conduzir atividades para o Ensino Médio, de modo que ele possa permitir seus alunos a pensarem matemática a partir da reflexão, argumentação e lógica. Evidenciou-se, também, elementos relacionados a estruturas e noções de conjuntos, principalmente no que se refere as operações com conjuntos e as noções de infinito e finito, pois entende-se que o professor de Matemática deva ser capaz de mostrar aos seus alunos uma Matemática que não seja reduzida a verdades assumidas como únicas, mas como ideia que podem, e devem, ser apresentadas e construídas junto aos alunos da Educação Básica.

As análises evidenciaram, também, as possibilidades de se apresentar ao licenciando a necessidade de que as provas e demonstrações matemáticas que irá conduzir no Ensino Médio, ou mesmo Ensino Fundamental, sejam articuladas em diferentes objetos matemáticos, variando entre as linguagens (natural, algébrica e geométrica) e as formas como são apresentadas. As provas e demonstrações conduzidas na Análise Matemática mostram a necessidade de que o futuro professor interprete e execute, principalmente, justificativas em linguagem natural. Não só, há a necessidade de que ele faça conversões para essa ou dessa linguagem para que consiga representar ou apresentar as resoluções dos problemas matemáticos que estão presentes naquele contexto. No entendimento dessa investigação, e com respaldo em Godino (2009), o tratamento dessas diferentes linguagens abrem espaço para a reflexão sobre como o futuro professor está percebendo e contextualizando seus conhecimentos nos quesitos que vigorizam uma Matemática à rigor, viabilizando para o mesmo como está pensando e compreendendo Matemática.

Além das ideias relacionadas a lógica e ao tratamento com provas e demonstrações, o conceito de Números Reais (Racionais + Irracionais) se mostrou como potencialidade para a atuação do professor de Matemática, por trazer ideias vinculadas a propriedades (operações, não enumerabilidade e infinidade) que, muitas vezes, são apresentadas ao longo do Ensino Fundamental e Médio como verdade inquestionáveis que acabam não sendo explicadas pelo professor. Ao estudar a fundo esses elementos na perspectiva da Análise Matemática, o professor tem a chance de construir justificativas plausíveis a seus alunos que estimulem seus alunos a compreenderem que, por exemplo, o conjunto dos Números Irracionais é infinito e não se reduz unicamente a números como π ou representações decimais não periódicas.

Esses elementos estão presentes na natureza matemática que viabiliza um alicerce de conhecimento ampliado para o domínio conceitual do professor de Matemática, dando, assim, uma base sólida para a formação de seu “pensar matematicamente”. Pensa-se que essas relações vão além de um respaldo matemático para significação da importância de se estudar esses objetos da Análise Matemática, mas, também, configuram um fundo didático que constitui Conhecimentos Didático-Matemáticos para reflexões da prática matemática e do próprio entendimento das habilidades e competências matemáticas necessárias ao professor para ensinar (GODINO et al., 2017).

Aponta-se, ainda, que as potenciais relações indicadas e a análise constituída não se referem a críticas aos referenciais institucionais utilizados pelos programadas de ensino, mas a uma forma de estruturar uma visão diferente de Análise Matemática, a qual venha a contribuir, a partir das competências e habilidades instituídas para egressos de cursos de Licenciatura em Matemática (BRASIL, 2002b), para as reflexões profissionais do futuro docente. Embora nem sempre as relações entre os conhecimentos matemáticos sejam triviais, a visão que se destaca está na convergência e relação entre a apresentação de uma matemática a rigor, a qual não se considera dispensável na formação do professor de Matemática, e aos elementos formativos necessários para a prática docente. Para tanto, entende-se necessário que o ensino de Análise esteja articulado à visão de formar professores de Matemática para atuarem na Educação Básica e, assim, é importante pensar e repensar em métodos de ver os conhecimentos ali empregados com a prática docente de futuros professores.

Na literatura (REIS, 2001; MORERIA; CURY; VIANNA, 2005; BOLOGNEZI, 2006; OTERO-GARCIA; BARONI; MARTINES, 2013) há a problematização sobre a real importância da Análise Matemática nas Licenciaturas em Matemática, uma vez que o alto rigor em demonstrações, proposições e teoremas pode acabar fugindo do foco de formar um profissional para atuar na Educação Básica (BRASIL, 2002b). Entende-se que essa questão do rigor, de certo modo, apresenta-se como um elemento que dificulta a compreensão do aluno de licenciatura, pelo fato de que, com base em Moreira, Cury e Vianna (2005), parece que a exigência do rigor matemático é o único elemento plausível ao se ensinar Análise Matemática. Entretanto, considera-se que ao se propor um curso de Licenciatura em Matemática, deve-se pensar numa Análise Matemática “diferenciada”. Mas o que seria esse diferencial? Entende-se que a diferenciação da Análise Matemática entre Bacharelado e Licenciatura não está numa relação de inferioridade (um ensino mais fraco para Licenciatura), mas está numa relação de acréscimo.

Segundo as DCN específicas para cursos de Bacharelado e Licenciatura em Matemática (BRASIL, 2002b), de modo geral, o perfil a ser formado no licenciado em Matemática está na ideia de que a formação do mesmo deve ser direcionada à formação docente para a atuação na Educação Básica. Para tal, entende-se necessário que se tenha a visão de constituir, minimamente, um perfil no egresso que busque a interação entre pesquisa, matemática e o ensino das mesmas, para que o professor tenha condições de buscar conhecimento nos referentes (pesquisas, livros, artigos, etc.) que o possibilitem aperfeiçoar suas práticas e ampliar seus conhecimentos. Nesse sentido, pode-se destacar a ideia de que haja um balanceamento entre pesquisa, matemática e ensino, que devem estar articulados entre si, a fim de formar um profissional capaz de atuar com autonomia, reflexão e cooperação (BRASIL, 2002b). Para esse balanceamento, entende-se que não se deva retirar a possibilidade de futuros professores aprenderem e conhecerem as diferentes visões, teóricas e práticas que incorporam os estudos da Matemática, pois tais questões podem ser, e compreende-se serem, importantes para o seu desenvolvimento profissional. Portanto, no que se refere a Análise Matemática, é necessário que haja tanto a percepção da Matemática à rigor quanto à ideia de que a Matemática deve estar envolvida nas competências e habilidades necessárias para que o professor de Matemática atue na sala de aula da Educação Básica.

Tendo-se destacado os elementos finais de reflexões e discussão em torno dos resultados da investigação, a seção seguinte, que se configura como a final desta dissertação, traz elementos que buscam se consolidar como o fechamento desta pesquisa.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

As reflexões finais produzidas sobre a investigação apontaram como resultados que parte dos componentes curriculares de Análise investigados têm como objetivo um enfoque matemático-formal que, no âmbito institucional, não destacam uma visão de Análise articulada à formação do professor de Matemática. Por outro lado, parte dos componentes apresentam, em seus objetivos de formação, uma potencial preocupação com uma Análise Matemática que olhe para aspectos da atuação docente na Educação Básica ou para a oportunidade do licenciando constituir um perfil crítico, reflexivo e autocrítico sobre a Matemática. Além disso, notou-se que há a tentativa, das instituições, de conduzir conhecimentos da formação de professores na Análise Matemática, utilizando da adoção de livros, como o chamado "Análise Matemática para Licenciatura", que buscam articular tais ideais.

Outro aspecto que os resultados apontaram, indica que existem potenciais relações entre os objetos matemáticos da Análise Matemática e os do Ensino Médio, as quais podem ser constituídas a partir de materiais didáticos do nível Superior e do Médio. Porém, considera-se que essas potenciais relações dependem do modo como o professor de Análise as percebe e busca trazê-las para a sala de aula, tratando de contemplar os objetivos determinados pela instituição em que leciona e, ao mesmo tempo, os objetivos esperados ao longo da formação de professores, conforme orientado pelas DCN.

Destaca-se que a investigação, alicerçada nas pesquisas produzidas sobre a Análise para cursos de Licenciatura, encaminhou para o entendimento de que a Análise Matemática, no âmbito da formação de professores, é constituída de elementos matemáticos de "alto rigor", abordando o trato com demonstrações, justificativas e provas matemáticas que são necessárias para compreender as estruturas dos objetos matemáticos, com o que se concorda. Entende-se, ainda, que essa é uma das áreas da Matemática em que o licenciando tem a possibilidade de conhecer a visão na qual a essência científica do conhecimento matemático se mostra. Porém, considera-se a necessidade de que esse rigor esteja atrelado, também, às questões da prática docente e ao cotidiano da sala de aula do professor de Matemática. Isso é entendido já que, considerando o objetivo de formar professores para atuarem na Educação Básica, compreende-se como primordial a aproximação daquilo que o futuro professor aprende na academia e o que ensina em seu contexto docente.

Uma das possibilidades que se vê nisso, a partir de uma noção epistêmica, está na articulação, por parte de referentes institucionais e dos professores de Análise, dos objetos matemáticos destacados no nível Superior com os objetos matemáticos de ensino do nível da Educação Básica, mesmo que nem sempre isso seja trivial. De certo modo, percebeu-se, ao longo dessa investigação, que essa noção se mostra importante e pertinente como uma forma de possibilitar ao futuro professor, e ao professor de Matemática, atribuir significações pessoais sobre como os conhecimentos do componente de Análise podem ser relevantes na constituição dos saberes de sua formação. Entende-se que essa questão possibilita compor um cenário que articula uma percepção de conhecimento especializado do conteúdo (comum e ampliado) para a formação e a constituição do Conhecimento Didático-Matemático dos futuros professores. Portanto, defende-se como necessário um ensino de Análise Matemática que incorpore elementos da prática do professor de Matemática, trazendo uma visão sobre a lógica e justificativa da formalização e da constituição dos objetos matemáticos a partir do pensar, ensinar e aprender matemática. Ainda, nota-se que essas relações podem levar a contextualização do conhecimento matemático para futuros professores dando, assim, possibilidades para que possam entender o papel da Análise Matemática em suas formações.

Esta investigação mostrou, ainda, que a literatura destaca uma preocupação sobre a real importância do componente curricular na Formação de Professores de Matemática, atentando para questões que, muitas vezes, acabam distanciando os conhecimentos da Análise com os conhecimentos a serem incorporados na prática do professor. Notou-se, também, que mesmo depois de inúmeras mudanças nos documentos oficiais, as quais objetivaram uma aproximação mais articulada entre conhecimento teórico e conhecimento para a prática, ainda são necessárias discussões sobre o distanciamento os conhecimentos que formam o professor para a atuação na Educação Básica.

Além das questões mencionadas, percebeu-se a importância que o Enfoque Ontossemiótico teve para a constituição e orientação das análises, levando em conta que foi com base nesse respaldo teórico que foi possível lançar um olhar ao modo como os objetos matemáticos são apresentados nos referentes institucionais analisados. Esse enfoque teórico permitiu perceber a relevância de se atentar na configuração de como os processos matemáticos são organizados e conduzidos na Matemática, na ótica daquilo que é socialmente compartilhado e percebido institucionalmente. Além disso, pode-se constatar que a Ferramenta de Análise Didática: Dimensão Epistêmica se constituí não só como um recurso para possibilitar a intervenção eficaz em sala de aula, tal como é mencionado pelos autores do EOS, mas também como uma ferramenta para se pensar, avaliar, repensar e qualificar os processos de estudo da Matemática que envolvem o ensino e aprendizagem.

A partir dessas considerações, entende-se que essa dissertação caminhou para, não só a discussão das possibilidades de articulação entre o que o professor aprende em Matemática no nível da academia e o que ele ensina no nível da Educação Básica, mas também para visão de se considerar um ensino de Análise que objetive a articulação dessa relação no contexto dos cursos de Licenciatura em Matemática.

Notou-se, também, que o contexto dos conhecimentos matemáticos pode ser percebido a partir de um conjunto de componentes da Dimensão Epistêmica (situações-problema, linguagem, regras, argumentos e relações), os quais se considera essenciais para que haja a possibilidade de alunos desenvolverem competências e habilidades no processo de aprendizagem em Matemática articuladas à visão de saber o que e como ensinar.

Por fim, pontualmente, destacam-se questões que foram percebidas como potenciais investigações futuras, as quais, possivelmente, se aproximam dos seguintes questionamentos:

- Como poderiam ser conduzidas propostas metodológicas, no ensino de Análise Matemática, levando em conta a constituição do conhecimento matemático, dos Conhecimentos Didático-Matemáticos, da crítica, autocrítica, reflexão e participação no ensino e na intervenção em sala de aula por parte dos futuros professores?
- São realizadas articulações entre a Análise Matemática e a atuação docente na Educação Básica para a formação de Conhecimentos Didático-Matemáticos de professores de Matemática? Se sim, como elas ocorrem? Caso não, como desenvolver um ensino de Análise Matemática, buscando a constituição dos Conhecimentos Didático-Matemáticos de professores de Matemática em formação inicial?

REFERÊNCIAS

ÁVILA, G. S. S. **Análise Matemática:** para licenciatura. São Paulo: Blucher, 2006.

BATARCE, M. S. **Um contexto histórico para análise matemática para uma educação matemática. 2003. 52f**. 2003. Tese de Doutorado. Dissertação (Mestrado)–Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, UNESP, Rio Claro.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Portugal: Porto Editora. 1994.

BOLOGNEZI, R. A. L. **A Disciplina de Análise Matemática na Formação de Professores de Matemática para o Ensino Médio.** 2006. 109 f. 2006. Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba. Disponível em: <http://www.biblioteca.pucpr.br/tede//tde_busca/arquivo.php?codArquivo=550>. Acesso em: 01 ago. 2016.

BRASIL. Lei nº. 9394/96 – **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/LEIS/l9394.htm>. Acesso em: 25 jun. 2017.

________(a). Ministério da Educação/Conselho Nacional de Educação. Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica, em nível superior, curso de licenciatura, de graduação plena. **Parecer nº. 9 de 8 de maio de 2001**. Relator Raquel Figueiredo Alessandri Teixeira. Despacho do Ministro em 17 de janeiro de 2002, publicado no Diário Oficial da União de 18 de janeiro de 2002, Seção 1, p. 31. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/009.pdf>. Acesso em: 25 jun. 2017.

________(b). Ministério da Educação/Conselho Nacional de Educação. Das Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura. **Parecer nº. 1.302, de 6 de novembro de 2001**. Relator Francisco César de Sá Barreto. Despacho do Ministro em 4 mar. de 2002, publicado no Diário Oficial da União de 5 mar. de 2002, Seção 1, p. 15. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES13022.pdf>. Acesso em: 25 jun. 2016.

________(c). Ministério da Educação/Conselho Nacional de Educação. Dá nova redação ao Parecer CNE/CP 21/2001, que estabelece a duração e a carga horária dos cursos de Formação de Professores da Educação Básica, em nível superior, curso de licenciatura, de graduação plena. **Parecer nº. 2 de 10 de outubro de 2001**. Relator Raquel Figueiredo Alessandri Teixeira. Despacho do Ministro em 17 de janeiro de 2002, publicado no Diário Oficial da União de 18 de janeiro de 2002, Seção 1, p. 31. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/028.pdf>. Acesso em: 25 jun. 2017.

__________. Ministério da Educação. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**. DF: Ministério da Educação, Secretária de Educação Básica, 2006. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/028.pdf>. Acesso em: 25 jun. 2017.

__________. Ministério da Educação/Conselho Nacional de Educação. Reorganização da carga horária mínima dos cursos de Formação de Professores, em nível superior, para a

Educação Básica e Educação Profissional no nível da Educação Básica. **Parecer nº. 9 de 5 de dezembro de 2007**. Relator Clélia Brandão Alvarenga Craveiro e Maria Beatriz Luce. Despacho do Ministro em 17 de janeiro de 2007, publicado no Diário Oficial da União de 18 de janeiro de 2007. Não consta. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/028.pdf>. Acesso em: 25 jul. 2017.

_________. Ministério da Educação. **Guia de livros didáticos:** Plano Nacional do Livro Didático 2015**:** matemática – Ensino Médio / Ministério da Educação – Secretária de Educação Básica (SEB), Brasília, DF: Ministério da Educação, Secretária de Educação Básica, 2014. Disponível em: <http://www.fnde.gov.br/centrais-de-conteudos/publicacoes/category/125-guias?download=9007:pnld-2015-matematica>. Acesso em: 05 jul. 2016.

_______(a). Ministério da Educação/Conselho Nacional de Educação. Define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação inicial em nível superior (cursos de licenciatura, cursos de formação pedagógica para graduados e cursos de segunda licenciatura) e para a formação continuada. **Parecer nº. 2 de 1 de julho de 2015**. Relator Gilberto Gonçalves Garcia. Despacho do Ministro em 24 jun. de 2015, publicado no Diário Oficial da União de 25 jun. de 2015. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=17719-res-cne-cp-002-03072015&category_slug=julho-2015-pdf&Itemid=30192>. Acesso em: 14 set. 2017.

_______(b). Ministério da Educação. **Coleções mais distribuídas por componente curricular:** Plano Nacional do Livro Didático 2015 – Ensino Médio / Ministério da Educação – Secretária de Educação Básica (SEB), Brasília, DF: Ministério da Educação, Secretária de Educação Básica, 2015. Disponível em: <http://www.fnde.gov.br/centrais-de-conteudos/publicacoes/category/35-dados-estatisticos?download=9374:pnld-2015-colecoes-mais-distribuidas-por-componente-curricular-ensino-medio>. Acesso em: 05 jul. 2016.

________. Ministério da Educação/Conselho Nacional de Educação/Secretaria Executiva. Alterar o prazo, previsto no Art. 22, da Resolução CNE/CP nº. 2, de 1º de julho de 2015. **Resolução nº. 1 de 9 agosto de 2017**. Relator Eduardo Deschamps. Despacho do Ministro em 9 de agosto de 2017, publicado no Diário Oficial da União de 10 de agosto de 2017. Seção 1, p. 26. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=70141-rcp001-17-pdf&category_slug=agosto-2017-pdf&Itemid=30192>. Acesso em: 4 set. 2016.

CURY, H. N. (Org.) A formação dos formadores de professores de matemática: quem somos, o que fazemos, o que poderemos fazer? In: ________. **Formação de professores de matemática**: uma visão multifacetada. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2001. p. 11-28.

DANTE, L. R. **Matemática:** Contextos & Aplicações. Vol.1 São Paulo: Ática, 2013a. p. 344.

DANTE, L. R. **Matemática:** Contextos & Aplicações. Vol.2 São Paulo: Ática, 2013b. p. 216.

DANTE, L. R. **Matemática:** Contextos & Aplicações. Vol.3 São Paulo: Ática, 2013c. p. 320.

FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia**: saberes necessários à prática da autonomia. 36º ed. São Paulo: Paz e Terra, 1996 (Coleção Leitura).

FIORENTINI, D. A formação matemática e didático-pedagógica nas disciplinas da Licenciatura em Matemática. **Revista de Educação PUC-Campinas-ISSN 2318-0870**, n. 18, 2005. Disponível em: <http://periodicos.puc-campinas.edu.br/seer/index.php/reveducacao/article/view/266/249>. Acesso em: 10 mai. 2017.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6º ed. Editora: Atlas S.A, 2011.

GODINO, J. D. **Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas.** UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20, p. 13-31, 2009.

GODINO, J. D. Indicadores de la idoneidade didáctica de processos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. In: XIII CIAEM – IACME. **Anais**. Recife, 2011. Disponível em: <http://www.ugr.es/~jgodino/eos/jdgodino_indicadores_idoneidad.pdf>. Acesso em: 26 jun. 2016.

GODINO, J. D.; BATANERO, C. Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. 14 (3): p.325-355, 1994.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. Um enfoque onto-semiótico do conhecimento e a instrução matemática. **ACTA SCIENTIAE: Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, Canoas, v. 10, n. 1, p. 7-37, jul. 2008. Disponível em: <http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_portugues.pdf>. Acesso em: 7 fev. 2017.

GODINO, J. D.; PINO-FAN, L. Del conocimiento matemático para la enseñanza al conocimiento didáctico-matemático. **Investigación en Educación Matemática XVIII**, v. 591, 2014. Disponível em: <http://docente.ulagos.cl/luispino/wp-content/uploads/2014/09/Godino-Pino-Fan-2014_Del-MKT-al-CDM.pdf>. Acesso em: 9 set. 2017.

GODINO, J. D.; GIACOMONE, B.; BATANERO, C.; FONT, V. Enfoque ontossemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. **Bolema**, v. 31, n. 57, p. 90-113, 2017. Disponível em: <http://funes.uniandes.edu.co/8936/1/Bolema.pdf>. Acesso em: 10 out. 2017.

GOMES, M. L. M. Os 80 Anos do Primeiro Curso de Matemática Brasileiro: sentidos possíveis de uma comemoração acerca da formação de professores no Brasil/The Eightieth Anniversary of the First Mathematics Undergraduate Course in Brazil: possible meaning for a celebration about teacher's education. **Bolema**, v. 30, n. 55, p. 424, 2016. Disponível em: <https://search.proquest.com/openview/5e632da2409382154c7ebe6e8b594ae2/1?pq-origsite=gscholar&cbl=2030146>. Acesso em: 15 jan. 2018.

HURTADO, J. C. T. **Investigación cualitativa:** Comprender y actuar. Ed. La Muralla. AS. 2006.

LINARDI, P. R. Rastros da formação matemática na prática profissional do professor de matemática. 2006. iv, 279 f. Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2006. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/102167>. Acesso em: 26 dez. 2017.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação:** abordagens qualitativas. 2 ed. São Paulo: EPU. p. 289. 2013.

MARCHIORI, R. M. **Números transcendentes e de Liouville. 2013. 36 f**. 2016. Tese de Doutorado. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática)–IGCE, Universidade Estadual Paulista–UNESP, Rio Claro, 2013. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/119885/Julimar_Carlos.pdf?sequence=1>. Acesso em: 26 abr. 2018.

MARTINES, P. T. **O papel da disciplina de análise segundo professores e coordenadores.** 2012. 117 f. Dissertação (mestrado). Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas**.** Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/91033>. Acesso em: 1 ago. 2016.

MARTINS-SALANDIM, M. E. **A interiorização dos cursos de Matemática no estado de São Paulo:** um exame da década de 1960. 2012. 379 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2012.

MOREIRA, P. C.; CURY, H. N.; VIANNA, C. R. Por que análise real na licenciatura. **Zetetiké, Campinas**, v. 13, n. 23, p. 11-42, 2005. Disponível em: <https://www.researchgate.net/profile/Plinio_Moreira/publication/228618120_Por_que_anlise_real_na_licenciatura/links/00b7d5149fdcaa877e000000.pdf>. Acesso em: 1 ago. 2016

NAPAR, P. C. P.; KAIBER, C. T. Educação no Ensino Superior. In: Congresso Internacional de Ensino da Matemática, VII., 2017, Canoas. **A Análise Matemática no contexto da formação inicial de professores de Matemática: Uma análise epistêmica dos Números Racionais e Irracionais**. [S.l.]: ULBRA, 2017. p. 1-13. Disponível em: <http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vii/paper/viewFile/8785/4272>. Acesso em: 31 out. 2017.

OTERO-GARCIA, S. C. **Uma trajetória da disciplina de análise e um estado do conhecimento sobre seu ensino.** 2011. 2 v. (529 f.). Dissertação - (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2011. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/91029>. Acesso em: 8 mar. 2017.

OTERO-GARCIA, S. C.; BARONI, R. L. S.; MARTINES, P. T. Uma trajetória da disciplina de Análise e o seu papel para a formação do professor de matemática. **Educação Matemática Pesquisa.** v. 15, n. 3, 2013. Disponível em: <http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/16756>. Acesso em: 28 jun. 2016.

PEREIRA, J. E. D. **Formação de professores: pesquisas, representações e poder**. Autêntica Editora, 2000.

PINO-FAN, L. R.; GODINO, J. D. Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. **Paradigma**, v. 36, n. 1, p. 87-109, 2015.

REIS, F. S. **A Tensão entre Rigor e Intuição no Ensino de Cálculo e Análise: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos.** 2001. 302f. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2001. Disponível em: <http://www.reveduc.ufscar.br/index.php/reveduc/article/view/243/152>. Acesso em: 28 jun. 2016.

SILVA, M. A. da. **Currículos de Matemática no Ensino Médio: em busca de critérios para escolha e organização de conteúdo.** 2009. Tese de Doutorado. Tese (Doutorado em Educação Matemática) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo-PUC/SP–São Paulo.

SOARES, M. E. S. **Conhecimentos Didático-Matemáticos mobilizados por professores dos anos iniciais:** Uma análise sob a Perspectiva do Enfoque Ontossemiótico. 2016. 230 p. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – PPGECIM, ULBRA, Canoas, 2016.

SOARES, M. E. S.; KAIBER, C. T. Conhecimentos e Saberes do Professor que Ensina Matemática. In: JUSTO, J. C. R.; FARIAS, M. E. (Org.). **Temas Contemporâneos em Educação Matemática e Educação em Ciências.** Canoas: Ed. ULBRA, 2016, p. 133-162.

SOUZA, J. R. **Novo Olhar:** Matemática. Vol.1. São Paulo: FTD, 2013a. p. 320.

SOUZA, J. R. **Novo Olhar:** Matemática. Vol.2. São Paulo: FTD, 2013b. p. 320.

SOUZA, J. R. **Novo Olhar:** Matemática. Vol.3. São Paulo: FTD, 2013c. p. 320.

APÊNDICES

APÊNDICE A – PROTOCOLO DE ANÁLISE DAS DIRETRIZES CURRICULARES NACIONAIS PARA LICENCIATURA

Descritor	Diretrizes Curriculares Nacionais para licenciatura até 2015	Diretrizes Curriculares Nacionais para licenciatura depois de 2015
Objetos motivacionais	Estabelecer um cenário educacional que, por meio de pesquisas, mobilização social, mobilização por políticas públicas visa articular uma formação de professores cada vez mais próxima da realidade escolar, objetivando melhorar o preparo e a formação de professores com olhar a Educação Básica.	Caminhar no desenvolvimento de um profissional capaz de perceber um ambiente escolar que deva promover o uso das tecnologias, dos diferentes conhecimentos das ciências e pesquisas, das multiculturalidades relacionadas as questões de valores e dos direitos humanos.
Do total de carga horária	2800 horas	3200 horas
Da estruturação da carga horária total dos cursos de licenciatura	Ano 2002	Ano 2015
	1. 400 horas prática enquanto componente curricular. 2. 400 horas como estágio supervisionado curricular 3. 200 horas como currículo diversificado; 4. 1800 horas como componentes formativos pedagógicos e específicos de conhecimento.	1. 400 horas prática enquanto componente curricular. 2. 400 horas como estágio supervisionado curricular 3. 200 horas como currículo diversificado; 4. 2000 horas como componentes formativos pedagógicos e específicos de conhecimento.
	Ano 2007	
	1. estágio supervisionado é reduzido para 300 horas; 2. as demais 2500 horas são destinadas as atividades acadêmicas e profissionais pertinentes.	
Prática enquanto componente curricular	Obrigatório: Concepção da redução do distanciamento entre prática e teoria para a profissionalização	Obrigatório: Concepção da redução do distanciamento entre prática e teoria para o ensino e aprendizagem
Estágio Supervisionado	Obrigatório: Concepção da redução do distanciamento entre prática e teoria. É o componente que encaminha o acadêmico para experimentação em seu futuro ambiente de atuação, escolas, com o objetivo de que consiga colocar em prática, a partir da organização de materiais pedagógicos e do conhecimento e com auxílio de profissionais mais experientes, no caso professores universitários. Constitui-se a partir do trabalho pedagógico, entre professor universitário, acadêmico e professor titular da turma que é cedida ao estagiário, e orientação para a experimentação profissional do licenciando.	Obrigatório: Concepção da redução do distanciamento entre prática e teoria. É o componente que encaminha o acadêmico para experimentação em seu futuro ambiente de atuação, escolas, com o objetivo de que consiga colocar em prática, a partir da organização de materiais pedagógicos e do conhecimento e com auxílio de profissionais mais experientes, no caso professores universitários. Constitui-se a partir do trabalho pedagógico, entre professor universitário, acadêmico e professor titular da turma que é cedida ao estagiário, e orientação para a experimentação profissional do licenciando.
Parte diversificada do Currículo	Obrigatório: monitorias, congressos, atividades vinculadas a pesquisa e atividades diversas e extensão. É entendia como a parte do currículo em que o acadêmico precisa vivenciar experiências diferentes para compor seu	Obrigatório: monitorias, congressos, atividades vinculadas a pesquisa e atividades diversas e extensão. É entendia como a parte do currículo em que o acadêmico precisa vivenciar experiências diferentes para compor seu

	currículo acadêmico. Podiam ser, ou não, ofertas pelas instituições de Nível Superior.	currículo acadêmico. Torna-se obrigatório que as instituições de Nível Superior ofereçam, atribuindo vinculo efetivo das extensões aos Projetos Pedagógicos institucionais, como o Projeto Político de Curso (PPC).
Temáticas dos conhecimentos transversais a formação do professor	Infere-se sobre tecnologias, valores pautados nas Leis de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN), conhecimentos específicos e pedagógicos a fim de oportunizar, com base na em elementos da lei, como por exemplo: **Art. 3º.** O ensino será ministrado com base nos seguintes princípios: **I -** igualdade de condições para o acesso e permanência na escola; **II -** liberdade de aprender, ensinar, pesquisar e divulgar a cultura, o pensamento, a arte e o saber; **III -** pluralismo de ideias e de concepções pedagógicas; **IV -** respeito à liberdade e apreço à tolerância; **V -** coexistência de instituições públicas e privadas de ensino; **VI -** gratuidade do ensino público em estabelecimentos oficiais; **VII -** valorização do profissional da educação escolar; **VIII -** gestão democrática do ensino público, na forma desta Lei e da legislação dos sistemas de ensino; **IX -** garantia de padrão de qualidade; **X -** valorização da experiência extraescolar; **XI -** vinculação entre a educação escolar, o trabalho e as práticas sociais. **Art. 32º.** O ensino fundamental, com duração mínima de oito anos, obrigatório e gratuito na escola pública, terá por objetivo a formação básica do cidadão, mediante: **I -** o desenvolvimento da capacidade de aprender, tendo como meios básicos o pleno domínio da leitura, da escrita e do cálculo; **II -** a compreensão do ambiente natural e social, do sistema político, da tecnologia, das artes e dos valores em que se fundamenta a sociedade; **III -** o desenvolvimento da capacidade de aprendizagem, tendo em vista a aquisição de conhecimentos e habilidades e a formação de atitudes e valores; **IV -** o fortalecimento dos vínculos de família, dos laços de solidariedade humana e de tolerância recíproca em que	Infere-se sobre tecnologias, valores pautados na LDBEN, conhecimentos específicos e pedagógicos, frisando sobre a necessidade da constituição de uma sociedade mais igualitária nos aspectos da sexualidade, gênero, religião, do entendimento da educação inclusiva.

	se assenta a vida social. **Art. 35º.** O ensino médio, etapa final da educação básica, com duração mínima de três anos, terá como finalidades: **I -** a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos; **II -** a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar com flexibilidade a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores; **III -** o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico; **IV -** a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina. **Art. 36º.** O currículo do ensino médio observará o disposto na Seção I deste Capítulo e as seguintes diretrizes: **I -** destacará a educação tecnológica básica, a compreensão do significado da ciência, das letras e das artes; o processo histórico de transformação da sociedade e da cultura; a língua portuguesa como instrumento de comunicação, acesso ao conhecimento e exercício da cidadania; **Art. 37º.** A educação de jovens e adultos será destinada àqueles que não tiveram acesso ou continuidade de estudos no ensino fundamental e médio na idade própria. **§ 1º.** Os sistemas de ensino assegurarão gratuitamente aos jovens e aos adultos, que não puderam efetuar os estudos na idade regular, oportunidades educacionais apropriadas, consideradas as características do alunado, seus interesses, condições de vida e de trabalho, mediante cursos e exames. **§ 2º.** O Poder Público viabilizará e estimulará o acesso e a permanência do trabalhador na escola, mediante ações integradas e complementares entre si. **Art. 38º.** Os sistemas de ensino manterão cursos e exames supletivos, que compreenderão a base nacional comum do currículo, habilitando ao prosseguimento de estudos em caráter regular.	

	Art. 39º. A educação profissional, integrada às diferentes formas de educação, ao trabalho, à ciência e à tecnologia, conduz ao permanente desenvolvimento de aptidões para a vida produtiva. **Art. 40º.** A educação profissional será desenvolvida em articulação com o ensino regular ou por diferentes estratégias de educação continuada, em instituições especializadas ou no ambiente de trabalho. **Art. 41º.** O conhecimento adquirido na educação profissional, inclusive no trabalho, poderá ser objeto de avaliação, reconhecimento e certificação para prosseguimento ou conclusão de estudos. **Parágrafo único**. Os diplomas de cursos de educação profissional de nível médio, quando registrados, terão validade nacional. **Art. 42º.** As escolas técnicas e profissionais, além dos seus cursos regulares, oferecerão cursos especiais, abertos à comunidade, condicionada a matrícula à capacidade de aproveitamento e não necessariamente ao nível de escolaridade.	
Tempo instituído para implementação	3 anos a contar do ano de 2002 2 anos a contar do ano de 2007	2 anos a contar do ano de 2015 Prorrogado por mais 1 ano a contar de 2017

APÊNDICE B – PROTOCOLO DE ANÁLISE DAS DIRETRIZES CURRICULARES NACIONAIS ESPECÍFICAS PARA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Descritor	O que articula
Perfil do egresso	-Visão de seu papel social de educador e capacidade de se inserir em diversas realidades com sensibilidade para interpretar as ações dos educandos. -Visão da contribuição que a aprendizagem da Matemática pode oferecer à formação dos indivíduos para o exercício de sua cidadania. -Visão de que o conhecimento matemático pode e deve ser acessível a todos, e consciência de seu papel na superação dos preconceitos, traduzidos pela angústia, inércia ou rejeição, que muitas vezes ainda estão presentes no ensino-aprendizagem da disciplina.
Competências e Habilidades	-Elaborar propostas de ensino-aprendizagem de Matemática para a educação básica. -Analisar, selecionar e produzir materiais didáticos. -Analisar criticamente propostas curriculares de Matemática para a educação básica. -Desenvolver estratégias de ensino que favoreçam a criatividade, a autonomia e a flexibilidade do pensamento matemático dos educandos, buscando trabalhar com mais ênfase nos conceitos do que nas técnicas, fórmulas e algoritmos. -Perceber a prática docente de Matemática como um processo dinâmico, carregado de incertezas e conflitos, um espaço de criação e reflexão, onde novos conhecimentos são gerados e modificados continuamente. -Contribuir para a realização de projetos coletivos dentro da Escola Básica.
Áreas do conhecimento matemático para formação inicial do professor	-Cálculo Diferencial e Integral. -Álgebra Linear. -Fundamentos de Análise. -Fundamentos de Álgebra. -Fundamentos de Geometria. -Geometria Analítica. Deve-se incluir ainda: -Conteúdos matemáticos presentes na Educação Básica nas áreas de Álgebra, Geometria e Análise. -Conteúdos de áreas afins à Matemática, que são fontes originadoras de problemas e campos de aplicação de suas teorias. -Conteúdos da Ciência da Educação, da História e Filosofia das Ciências e da Matemática.

APÊNDICE C – PROTOCOLO DE ANÁLISE DOS PROGRAMAS DE ENSINO DOS COMPONENTES CURRICULARES DE ANÁLISE MATEMÁTICA DOS CURSOS DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Descritores	O que articula		
Tipo de instituição	Privada		Privada
Curso	A		B
Nome dos componentes	Análise Matemática I	Análise Matemática II	Introdução a Análise Matemática
Ementas	Fundamentação do cálculo a uma variável na busca da compreensão de conjuntos e sequências numéricas, bem como limite de funções.	Fundamentação do cálculo a uma variável na busca da compreensão da continuidade, da derivada e das integrais impróprias, bem como o estabelecimento de relações entre os conceitos estudados.	-Construção do conjunto dos números reais como um corpo ordenado completo, a partir do estudo de conjuntos finitos, infinitos, enumeráveis e não enumeráveis. -Formalização do conceito de limite de sequências e demonstração de suas propriedades. Análise da convergência de séries infinitas. -Noções de topologia na reta.
Objetivos	Formalizar registros de representação conceitual de conjuntos numéricos, sequências reais de uma variável real sob o enfoque da Análise Matemática: -Formalizar registros de representação conceitual de conjuntos numéricos, sequências reais e limites de funções reais. -Utilizar o raciocínio dedutivo e técnicas de demonstração para justificar as relações entre os entes abordados. -Conversão entre os registros: algébrico, geométrico e linguagem corrente.	Formalizar funções reais de uma variável sob o enfoque da Análise Matemática: -Formalizar registros de representação conceitual de continuidade e derivada de uma função real e de integrais impróprias. - Utilizar o raciocínio dedutivo e técnicas de demonstração para justificar as relações entre os entes abordados. - Conversão entre os registros: algébrico, geométrico e linguagem corrente. -Administrar e avaliar situações-problema ajustadas a aplicação dos conteúdos da Análise Matemática ao comportamento gráfico de funções reais de variável real	-Conceituar precisamente os elementos que fundamentam a Análise Matemática, usando uma linguagem correta e adequada, encadeando logicamente as proposições. -Analisar propriedades e relacionar tópicos estudados com os conteúdos do ensino Fundamental e Médio.
Conteúdos	**-Pensamento matemático para demonstração.** **-Conjuntos Numéricos:** Naturais, Inteiros, Racionais e Reais; finitos e infinitos, enumeráveis e não enumeráveis. **-Sequências Numéricas Reais:** classificação e	**-Funções continuas:** propriedades, teorema do valor intermediário e aplicações. **-Derivada:** definição e propriedades, derivadas laterais, máximos e mínimos locais, Teorema do Valor Médio e consequências,	**-Conjuntos:** finitos e infinitos; conjuntos enumeráveis e não enumeráveis. **-Números Reais:** intervalos; valor absoluto; corpo arquimediano; supremo e ínfimo; incompleteza de Q; não enumerabilidade de R.

	propriedades. **-Topologia da reta:** ponto de acumulação, ponto isolado, conjunto discreto, fecho de um conjunto. **-Limite de funções:** propriedades, limites laterais, limites no infinito, limites infinitos e expressões indeterminadas.	funções côncavas e convexas; Regra de L'Hopital. **-Comportamento gráfico de funções reais de variável real.** **-Integrais impróprias:** condições de existência.	**-Sequências de Números Reais**: limites de sequências; sequências monótonas; subsequências; Teorema de Bolzano-Weierstrass; sequências de Cauchy. **-Séries em R:** séries reais; séries convergentes ou não; critérios de convergência. **-Topologia na Reta:** Conjunto aberto; conjunto fechado. Pontos de aderência e de acumulação. Conjunto compacto.
Metodologia adotada e recursos	-Aulas expositivas dialogadas. -Discussões para que os acadêmicos esclareçam dúvidas. -Atividades de pesquisa bibliográfica. -Resoluções de problemas envolvendo questões da Análise Matemática.		
Carga horária dos componentes	68 horas = 68 horas teóricas	68 horas = 68 horas teóricas	60 horas
Bibliografias indicadas (básicas)	-ÁVILA, Geraldo. **Análise Matemática para licenciatura.** São Paulo: Edgard Blucher Ltda. 2011. -LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise**. V:1. Rio de Janeiro: IMPA/CNPq.1995. -STEWART, James. **Cálculo.**V:1. São Paulo: Pioneira Thompson Learning. 2014.	-ÁVILA, Geraldo. **Análise Matemática para licenciatura.** São Paulo: Edgard Blucher Ltda. 2011. -LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise**. V:1. Rio de Janeiro: IMPA/CNPq.1995. -STEWART, James. **Cálculo.**V:1. São Paulo: Pioneira Thompson Learning. 2014.	-ÁVILA, Geraldo. **Análise matemática para a licenciatura.** 3. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2006. 260 p. -LIMA, Elon Lages. **Análise real.** 10. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2010. v.1. 189 p.
Descritores	**O que articula**		
Tipo de instituição	Pública		
Curso	C		D
Nome dos componentes	Análise Real I	Análise Real II	Análise I
Ementas	-Números Reais: conjuntos infinitos, enumeráveis e não enumeráveis, supremo. -Sequências infinitas: limite, Teorema de Bolzano-Weierstrass, critério de Cauchy. -Séries Numéricas: convergências.	-Continuidade: limites, descontinuidades, Teorema do Valor Intermediário. -Diferenciabilidade: derivada, máximos e mínimos, Teorema do Valor Médio. -Sequências e séries de funções: convergências e séries de potências.	-Conjuntos e funções. -Conjuntos finitos, enumeráveis e não-enumeráveis. -Números Reais. Sequências e séries de números reais. -Topologia da reta
Objetivos	O objetivo da disciplina é a formalização dos fundamentos do Cálculo Diferencial e Integral pela dedução rigorosa de seus teoremas basiliares a partir de uma lista de axiomas dos	O objetivo da disciplina é a formalização dos fundamentos do Cálculo Diferencial e Integral pela dedução rigorosa de seus teoremas basiliares a partir de uma lista de axiomas dos	O objetivo geral da disciplina é estudar com uma abordagem mais rigorosa e formal os conceitos apresentados na ementa, com ênfase na precisão e nas técnicas de demonstração.

	Números Reais. Assim, a ênfase não está tanto na novidade dos resultados estudados, mas, sim, na clara demonstração dos mesmos. Além disso, com a participação dos alunos resolução de exercícios em público, pretende-se desenvolver e consolidar atitudes de participação, comprometimentos, organização flexibilidade, crítica e autocrítica por parte do futuro professor.	Números Reais. Assim, a ênfase não está tanto na novidade dos resultados estudados, mas, sim, na clara demonstração dos mesmos. Além disso, com a participação dos alunos resolução de exercícios em público, pretende-se desenvolver e consolidar atitudes de participação, comprometimentos, organização flexibilidade, crítica e autocrítica por parte do futuro professor.	
Conteúdos	**-Números Reais e Cardinalidade (finitos, infinitos, enumeráveis e não enumeráveis):** O pensamento matemático e lógico formal; Números Naturais; Cardinalidade; Números Reais; Sequências Reais. **- Sequências e Séries Numéricas Infinitas:** Sequências e convergências; operações com limites; Teorema de Bolzano-Weierstrass; Sequências diversgentes; **Topologia da reta:** Sequências de Cauchy; Série de termos e testes de convergência.	**-Continuidade e derivada de funções Reais:** Funções Reais de uma variável Real; Continuidade de funções Reais, Teorema do Valor Intermediário, máximos e mínimos. **-Derivabilidade de funções reais:** crescimento e decrescimento de derivadas; máximos e mínimos, Teorema do Valor Médio. **-Teorema Fundamental do Cálculo.** **-Limites de funções.** **-Noções de Integral de Riemann.**	**-Lógica Matemática:** Elementos de Demonstração **-Conjuntos e Funções:** Conjuntos; Operações entre conjuntos; Funções; Composição de funções; Famílias; conjuntos finitos, enumeráveis e não-enumeráveis A Noção de **Função Contínua:** Boa ordenação; conjuntos finitos e infinitos; conjuntos enumeráveis e conjuntos não-enumeráveis. **-Números reais:** Corpos; Corpos ordenados; Números reais. **-Sequências e séries de Números Reais:** Sequências; Limite de uma sequência; Propriedades aritméticas dos limites; Subsequências; Sequências de Cauchy; Limites infinitos; Séries numéricas. **-Topologia da reta:** Conjuntos abertos; Conjuntos fechados; Pontos de acumulação; conjuntos compactos.
Metodologia adotada e recursos	-Aulas expositivas e dialogadas, propondo situações que trabalhem as questões de escrita e fala futuros professores. -Resoluções de problema envolvendo a Análise Matemática.	-Aulas expositivas e dialogadas, propondo situações que trabalhem as questões de escrita e fala futuros professores. -Resoluções de problema envolvendo a Análise Matemática.	Não consta
Carga horária dos componentes	60 horas	60 horas	80 horas = 66 horas teóricas + 24 horas práticas
Bibliografias indicadas	-ÁVILA, Geraldo. **Análise matemática para a licenciatura.** 3. ed. São Paulo: Edgard Blücher,	-ÁVILA, Geraldo. **Análise matemática para a licenciatura.** 3. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2006.	-ÁVILA, Geraldo. **Análise matemática para licenciatura**. 3ª ed. São Paulo: Editora Edgard

	2006. 260 p. -LIMA, Elon Lages. **Análise real.** 10. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2010. v.1. 189 p.	260 p. -LIMA, Elon Lages. **Análise real.** 10. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2010. v.1. 189 p.	Blücher, 2009. -LIMA, Elon Lages. **Curso de análise**. Vol.1. Projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA 2000. -ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. **Cálculo**. Vol. 2. 8ª ed. São Paulo: Bookman, 2007.
Descritores	**O que articula**		
Tipo de instituição	Pública	Particular	-
Curso	D	E	-
Nome dos componentes	Análise II	Análise Matemática	-
Ementas	Limites de Funções. Funções Contínuas. Derivadas. Integral de Riemann. Sequências e Séries de Funções.	O corpo ordenado dos números reais e Sequências e Séries Infinitas.	-
Objetivos	O objetivo geral da disciplina é estudar com uma abordagem mais rigorosa e formal os conceitos apresentados na ementa, com ênfase na precisão e nas técnicas de demonstração.	Familiarizar-se com demonstrações. Perceber a construção histórica dos Números Reais do ponto de vista da Matemática pura: -Realizar demonstrações diretas por absurdo e por indução. -Enunciar e demonstrar teoremas. -Perceber a evolução histórica dos tópicos da ementa.	-
Conteúdos	**-Limites de Funções:** Definição e Propriedades do Limite; Limites Laterais; Limites no Infinito; Limites Infinitos; Expressões; Indeterminadas; Valores de Aderência de uma Função; Funções Contínuas; A Noção de Função Contínua; Descontinuidades; Funções Contínuas em Intervalos; Funções Contínuas em Conjuntos Compactos; Continuidade. **-Derivadas:** Definição e Propriedades da Derivada num Ponto; Funções Deriváveis num Intervalo; Fórmula de Taylor; Série de Taylor; Funções Analíticas. **-Integral de Riemann:** Integral Superior e Integral Inferior; Funções Integráveis; O Teorema Fundamental do Cálculo; Fórmulas Clássicas do Cálculo Integral; A Integral	**-Noções de Lógica.** **-Números Reais:** propriedades, conjuntos; grandezas incomensuráveis; Supremo e ínfimo de um conjunto; Desigualdade Triangular e Intervalos. **-Sequências Infinitas**: Sequências monótonas; Intervalos encaixados; Séries infinitas; Testes de convergência.	-

	como Limite de Somas Caracterização das Funções Integráveis Logaritmos e Exponenciais; **-Sequências e Séries de Funções:** Convergência; Simples e Convergência Uniforme; Propriedades da Convergência Uniforme; Séries de Potências; Funções Analíticas; Equicontinuidades.		
Metodologia adotada e recursos	Não consta	Aulas com ênfase na abordagem interdisciplinar e na visão crítico reflexiva. Leituras orientadas (artigos), nos assuntos relacionados com a disciplina, permitindo aos alunos a discussão de problemas atuais, na perspectiva dos conhecimentos teóricos da disciplina. Explorar a História da Matemática.	-
Carga horária dos componentes	80 horas = 66 horas teóricas e 24 horas práticas.	72 horas	-
Bibliografias indicadas	-ÁVILA, Geraldo. **Análise matemática para licenciatura**. 3ª ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 2009. -LIMA, Elon Lages. **Curso de análise**. Vol.1. Projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA 2000. -ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. **Cálculo**. Vol. 2. 8ª ed. São Paulo: Bookman, 2007.	-ÁVILA, Geraldo. **Análise Matemática para Licenciatura**. São Paulo: Edgard Blücher Ltda, 2001. -ÁVILA, Geraldo. **Introdução à análise matemática.** 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher Ltda, 1999. -FOSSA, John A; **Introdução às técnicas de demonstração na matemática.** 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.	-

APÊNDICE D – PROTOCOLO DE ANÁLISE DAS ORIENTAÇÕES CURRICULARES NACIONAIS PARA O ENSINO MÉDIO

Blocos de Conhecimento	O descreve o documento
Números e Operações	-Deve-se proporcionar aos alunos uma diversidade de situações, de forma a capacitá-los a resolver problemas do quotidiano, tais como: operar com números inteiros e decimais finitos; operar com frações, em especial com porcentagens; fazer cálculo mental e saber estimar ordem de grandezas de números; usar calculadora e números em notação científica; resolver problemas de proporcionalidade direta e inversa; interpretar gráficos, tabelas e dados numéricos veiculados nas diferentes mídias; ler faturas de contas de consumo de água, luz e telefone; interpretar informação dada em artefatos tecnológicos (termômetro, relógio, velocímetro). -É preciso proporcionar aos alunos uma diversidade de problemas geradores da necessidade de ampliação dos campos numéricos e suas operações, dos números naturais para contar aos números reais para medir. -Os números irracionais devem ser entendidos como uma necessidade matemática que resolve a relação de medidas entre dois segmentos incomensuráveis, sendo apropriado tomar o caso dos segmentos lado e diagonal de um quadrado como ponto de partida. Alguns números irracionais devem ser colocados em destaque: as raízes quadradas de números naturais que não são quadrados perfeitos e o número pi, por exemplo. É pertinente, nesse nível de escolaridade, caracterizar os números racionais/irracionais por meio de suas expansões decimais e localizar alguns desses números na reta numérica. -As propriedades relativas às operações com números reais devem ser trabalhadas de modo que permitam ao aluno a compreensão das estruturas dos algoritmos, prevenindo recorrentes erros na resolução de problemas que envolvam manipulações algébricas. -É recomendável que o professor retome, nesse momento, as “regras de sinais” para multiplicação de números inteiros acompanhadas de justificativas; as definições de multiplicação e divisão de frações; as explicações que fundamentam os algoritmos da multiplicação e da divisão de números inteiros e decimais.
Funções	-Pode ser iniciado com uma exploração qualitativa das relações entre duas grandezas em diferentes situações: idade e altura; área do círculo e raio; tempo e distância percorrida; tempo e crescimento populacional; tempo e amplitude de movimento de um pêndulo, entre outras. -É conveniente solicitar aos alunos que expressem em linguagem natural uma função dada de forma algébrica [...] isso pode permite um conjunto de conhecimentos interdisciplinares na área de Física para o aluno, como, por exemplo, no estudo da cinemática. -É importante destacar a modificações que sofrem a representação gráfica das funções, quando alteramos se altera seus parâmetros. -Considera-se a necessidade da abordagem dos diferentes tipos de função: modelos linear, quadrático, exponencial e trigonométricos. É recomendável que esses conhecimentos sejam relacionados em diferentes objetos do conhecimento, como: queda livre de um corpo, movimento uniforme e uniformemente acelerado, crescimento de uma colônia de bactérias, quantidade de medicamento na corrente sanguínea, rendimentos financeiros, consumo doméstico de energia elétrica, etc. -Sempre que possível, os gráficos das funções devem ser traçados a partir de um entendimento global da relação de crescimento/decrescimento entre as variáveis. A elaboração de um gráfico por meio da simples transcrição de dados tomados em uma tabela numérica não permite avançar na compreensão do comportamento das funções. -O professor deve estar atento ao fato de que os alunos identificam sistematicamente, de forma equivocada, crescimento com proporcionalidade direta e decrescimento com proporcionalidade inversa, e aqui é interessante trazer situações do quotidiano para ilustrar diferentes tipos de crescimento/decrescimento de grandezas em relação. -O estudo da função quadrática pode ser motivado via problemas de aplicação, em que é preciso encontrar um certo ponto de máximo (clássicos problemas de determinação de área máxima). O estudo dessa função (posição do gráfico, coordenadas do ponto de máximo/mínimo, zeros da função) deve ser realizado de forma que o aluno consiga estabelecer as relações entre o “aspecto” do gráfico e os

	coeficientes de sua expressão algébrica, evitando-se a memorização de regras. -O estudo das funções trigonométricas, destaca-se um trabalho com a Trigonometria, o qual deve anteceder a abordagem das funções seno, cosseno e tangente, priorizando as relações métricas no triângulo retângulo e as leis do seno e do cosseno como ferramentas essenciais a serem adquiridas pelos alunos no ensino médio. -A apresentação das leis dos senos e dos cossenos podem ser motivadas com questões relativas à determinação das medidas de elementos de um triângulo. Por exemplo: conhecendo-se a medida de dois lados de um triângulo e a medida do ângulo formado por esses lados, sabe-se que esse triângulo é único e, portanto, é possível calcular a medida dos demais elementos do triângulo. Também é recomendável o estudo da razão trigonométrica tangente pela sua importância na resolução de diversos tipos de problemas. Problemas de cálculos de distâncias inacessíveis são interessantes aplicações da Trigonometria, e esse é um assunto que merece ser priorizado na escola. Por exemplo, como calcular a largura de um rio? Que referências (árvore, pedra) são necessárias para que se possa fazer esse cálculo em diferentes condições com régua e transferidor ou com calculadora? -É necessário dar atenção à transição do seno e do cosseno no triângulo retângulo (em que a medida do ângulo é dada em graus), para o seno e o cosseno, definidos como as coordenadas de um ponto que percorre um arco do círculo de raio unitário com medida em radianos. - Os alunos devem ter a oportunidade de traçar gráficos referentes às funções trigonométricas, aqui se entendendo que, quando se escreve f (x) = seno (x), usualmente a variável x corresponde à medida de arco de círculo tomada em radianos. As funções trigonométricas seno e cosseno também devem ser associadas aos fenômenos que apresentam comportamento periódico. -As funções polinomiais podem ter gráficos esboçados por meio de uma análise qualitativa da posição de um ponto (x, x_n) em relação à reta $y = x$, para isso comparando-se x e x_n nos casos 0 <x <1 ou x>. 1 e usando-se simetria em relação ao eixo x ou em relação à origem para completar o gráfico. -Essas funções polinomiais mais gerais de grau superior a 2 podem ilustrar as dificuldades que se apresentam nos traçados de gráficos, quando não se conhecem os “zeros” da função. Casos em que a função polinomial se decompõe em um produto de funções polinomiais de grau 1 merecem ser trabalhados. Esses casos evidenciam a propriedade notável de que, uma vez se tendo identificado que o número c é um dos zeros da função polinomial $P(x) = y$, esta pode ser expressa como o produto do fator (x - c) por outro polinômio de grau menor, por meio da divisão de P por (x - c). -É importante discutir as características que relacionam funções lineares e exponenciai, pois enquanto o primeiro garante um crescimento à taxa constante, o segundo apresenta uma taxa de variação que depende do valor da função em cada instante. Dentre as aplicações da Matemática, tem-se o tópico de Matemática Financeira como um assunto a ser tratado quando do estudo da função exponencial juros e correção monetária fazem uso desse modelo. Nos problemas de aplicação em geral, é preciso resolver uma equação exponencial, e isso pede o uso da função inversa -O trabalho de resolver equações exponenciais é pertinente quando associado a algum problema de aplicação em outras áreas de conhecimento, como Química, Biologia, Matemática Financeira, etc. Procedimentos de resolução de equações sem que haja um propósito maior devem ser evitados. Não se recomenda neste nível de ensino um estudo exaustivo dos logaritmos. -As progressões aritmética e geométrica podem ser definidas como, respectivamente, funções afim e exponencial, em que o domínio é o conjunto dos números naturais. Não devem ser tratadas como um tópico independente, em que o aluno não as reconhece como funções já estudadas. Devem-se evita as exaustivas coletâneas de cálculos que fazem simples uso de fórmula (“determine a soma...”, “calcule o quinto termo...”).
Geometria	-Deve possibilitar aos alunos o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas práticos do quotidiano, como, por exemplo, orientar-se no espaço, ler mapas, estimar e comparar distâncias percorridas, reconhecer propriedades de formas geométricas básicas, saber usar diferentes unidades de medida. Também é um estudo em que os alunos podem ter uma oportunidade especial, com certeza não a única, de apreciar a faceta da Matemática que trata de teoremas e argumentações dedutivas. Esse estudo apresenta dois aspectos: a geometria que leva à Trigonometria e a geometria para o cálculo de comprimentos, áreas e

	volumes. -As diferentes figuras planas e espaciais, presentes na natureza ou no campo Euclidiano, deve ser aprofundado e sistematizado nesta etapa de escolarização. Alguns conceitos estudados no Ensino Fundamental devem ser consolidados, como, por exemplo, as ideias de congruência, semelhança e proporcionalidade, o Teorema de Tales e suas aplicações, as relações métricas e trigonométricas nos triângulos (retângulos e quaisquer) e o Teorema de Pitágoras. Durante o ensino médio, o trabalho do aluno em outras disciplinas, como a Física e a Química, por exemplo, pode servir como motivação para a consolidação da ideia de grandezas, particularmente aquelas formadas por relações entre outras grandezas (densidade, aceleração, etc.). -Em relação às grandezas geométricas, as atividades propostas deverão proporcionar a consolidação dos conceitos aprendidos nas etapas anteriores, como área, perímetro e volumes. Nessa fase, o aluno já apresenta as condições necessárias para a compreensão de certas demonstrações que resultem em algumas fórmulas, por exemplo, a área do círculo. -Quanto ao trabalho com comprimentos, áreas e volumes, considera-se importante que o aluno consiga perceber os processos que levam ao estabelecimento das fórmulas, evitando-se a sua simples apresentação. Um conteúdo a ser trabalhado com cuidado são as fórmulas de comprimento e de área do círculo: se π representa a razão constante entre comprimento e diâmetro do círculo, deve-se explicar como esse número π aparece na fórmula da área do círculo; ou se π é introduzido via a área do círculo, deve-se explicar como aparece na expressão de seu comprimento. O Princípio de Cavalieri deve ser tomado como ponto de partida para o estudo de volumes de sólidos (cilindro, prisma, pirâmide, cone e esfera), permitindo ao aluno compreender o significado das fórmulas. -No trabalho com as áreas das superfícies de sólidos, é importante recuperar os procedimentos para determinar a medida da área de alguns polígonos, facilitando a compreensão das áreas das superfícies de prismas e pirâmides. As expressões que permitem determinar a medida da área das superfícies do cilindro e do cone podem ser estabelecidas facilmente a partir de suas planificações. A geometria analítica tem origem em uma ideia muito simples, introduzida por Descartes no século XVII, mas extremamente original: a criação de um sistema de coordenadas que identifica um ponto P do plano com um par de números reais (x, y). Partindo-se disso, podemos caracterizá-la como: a) o estudo das propriedades geométricas de uma figura com base em uma equação (nesse caso, são as figuras geométricas que estão sob o olhar da álgebra); b) o estudo dos pares ordenados de números (x, y) que são soluções de uma equação, por meio das propriedades de uma figura geométrica (nesse caso, é a álgebra que está sob o olhar da geometria). Esses dois aspectos merecem ser trabalhados na escola. O trabalho com a geometria analítica permite a articulação entre geometria e álgebra. Para que essa articulação seja significativa para o aluno, o professor deve trabalhar as duas vias: o entendimento de figuras geométricas, via equações, e o entendimento de equações, via figuras geométricas. A simples apresentação de equações sem explicações fundadas em raciocínios lógicos deve ser abandonada pelo professor. -O entendimento do significado de uma equação e de seu conjunto de soluções não é imediato, e isso é natural, pois esse significado não é explícito quando simplesmente se escreve uma equação. Entendido o significado de uma equação, deve-se iniciar o estudo das equações da reta e do círculo. Essas equações devem ser deduzidas, e não simplesmente apresentadas aos alunos, para que, então, se tornem significativas, em especial quanto ao sentido geométrico de seus parâmetros. As relações entre os coeficientes de pares de retas paralelas ou coeficientes de pares de retas perpendiculares devem ser construídas pelos alunos. Posições relativas de retas e círculos devem ser interpretadas sob o ponto de vista algébrico, o que significa discutir a resolução de sistemas de equações. -É desejável que o professor de Matemática aborde com seus alunos o conceito de vetor, tanto do ponto de vista geométrico (coleção dos segmentos orientados de mesmo comprimento, direção e sentido) quanto algébrico (caracterizado pelas suas coordenadas). Em particular, é importante relacionar as operações executadas com as coordenadas (soma, multiplicação por escalar) com seu significado geométrico.
Análise de Dados e Probabilidade	-Uma das razões de se abordar a análise de dados e probabilidade reside na importância das ideias de incerteza e de probabilidade, associadas aos chamados fenômenos aleatórios, presentes de forma essencial nos mundos natural e social. O estudo desse bloco de conteúdo possibilita aos alunos ampliarem e formalizarem seus conhecimentos sobre o raciocínio

	combinatório, probabilístico e estatístico. -Para dar aos alunos uma visão apropriada da importância dos modelos probabilísticos no mundo de hoje, é importante que os alunos tenham oportunidade de ver esses modelos em ação. Por exemplo, é possível simular o que ocorre em certa pesquisa de opinião estimando, com base em uma amostra, a fração de balas de determinada cor em uma caixa. -Durante o Ensino Médio, os alunos precisam adquirir entendimento sobre o propósito e a lógica das investigações estatísticas, bem como sobre o processo de investigação. Deve-se possibilitar aos estudantes o entendimento intuitivo e formal das principais ideias matemáticas implícitas em representações estatísticas, procedimentos ou conceitos. Isso inclui entender a relação entre síntese estatística, representação gráfica e dados primitivos. Por exemplo, os estudantes precisam ser capazes de explicar como o ponto médio é influenciado por valores extremos num intervalo de dados, e o que acontece com o ponto médio e a mediana em relação a esses valores. -Os alunos devem exercitar a crítica na discussão de resultados de investigações estatísticas ou na avaliação de argumentos probabilísticos que se dizem baseados em alguma informação. A construção de argumentos racionais baseados em informações e observações, veiculando resultados convincentes, exige o apropriado uso de terminologia estatística e probabilística. É também com a aquisição de conhecimento em estatística que os alunos se capacitam para questionar a validade das interpretações de dados e das representações gráficas, veiculadas em diferentes mídias, ou para questionar as generalizações feitas com base em um único estudo ou em uma pequena amostra. -O estudo da combinatória e da probabilidade é essencial nesse bloco de conteúdo, pois os alunos precisam adquirir conhecimentos sobre o levantamento de possibilidades e a medida da chance de cada uma delas. A combinatória não tem apenas a função de auxiliar o cálculo das probabilidades, mas tem inter-relação estreita entre as ideias de experimento composto a partir de um espaço amostral discreto e as operações combinatórias. Por exemplo, ao extrair aleatoriamente três bolas de uma urna com quatro possibilidades, esse experimento aleatório tem três fases, que podem ser interpretadas significativamente no espaço amostral das variações. -A utilização do diagrama de árvores é importante para clarear a conexão entre os experimentos compostos e a combinatória, pois permite que visualizemos a estrutura dos múltiplos passos do experimento. -Os alunos precisam entender conceitos e palavras relacionadas à chance, incerteza e probabilidade, que aparecem na nossa vida diariamente, particularmente na mídia. Outras ideias importantes incluem a compreensão de que a probabilidade é uma medida de incerteza, que os modelos são úteis para simular eventos, para estimar probabilidades, e que algumas vezes nossas intuições são incorretas e podem nos levar a uma conclusão equivocada no que se refere à probabilidade e à chance. -Nas situações e nas experiências aleatórias, os estudantes precisam aprender a descrevê-las em termos de eventualidades, associá-las a um conjunto de eventos elementares e representá-las de forma esquemática. Os alunos necessitam também dominar a linguagem de eventos, levantar hipóteses, associar a estatística dos resultados observados e as frequências dos eventos correspondentes, e utilizar a estatística de tais frequências para estimar a probabilidade de um evento dado.

APÊNDICE E – FERRAMENTA DE ANÁLISE DIDÁTICA: DIMENSÃO EPISTÊMICA

Componentes	Indicadores
Situações-problema	- Apresenta-se uma mostra representativa e articulada de situações de contextualização, exercícios e aplicações. - Propõem-se situações de generalização de problemas (problematização).
Linguagem	- Usa de diferentes modos de expressão matemática (verbal, gráfica, simbólica...), tratamento e conversões entre as mesmas. - Nível de linguagem adequado aos educandos a que se dirige. - Propõe-se situações de expressão e interpretação matemática.
Regras (Definições, proposições, procedimentos)	- As definições e procedimentos são claros e corretos e estão adaptados ao nível educativo a que se dirigem. - Apresentam-se os enunciados e procedimentos fundamentais do tema para o nível educativo dado.
Argumentos	- Promovem-se situações as quais o educando tenha que argumentar e justificar o pensamento matemático. -As explicações, comprovações e demonstrações são adequadas ao nível a que se dirigem.
Relações	- Os objetos matemáticos (problemas, definições, proposições, etc.) se relacionam e se conectam entre si. - Identifica-se a articulação dos diversos significados dos objetos que intervêm nas práticas matemáticas.

APÊNDICE F – UNIDADES DE CONTEÚDO DOS LIVROS DIDÁTICOS: ANÁLISE E DESCRIÇÃO DAS UNIDADES DA COLEÇÃO “MATEMÁTICA: CONTEXTO E APLICAÇÕES”

Livro	Unidades de Conteúdos Matemáticos	Descrição/Análise
Matemática: Contexto e Aplicações Volume 1	**Números e funções**	-É apresentada uma abordagem sobre grandezas numéricas utilizadas no dia a dia do aluno, tal como: calendário, dimensões de objeto, temperatura, etc. -São estruturadas relações entre conjuntos numéricos (Naturais, Inteiros, Irracionais, Racionais e Reais), abordando ideias de pertinência entre elementos e conjuntos, operações entre conjuntos (união, interseção, diferença, relações de inclusão, etc.), conjunto universo, conjunto vazio e unitário. -São destacadas problematizações em torno de aplicações que em situações-problema, mas sente-se falta de situações que envolvam o cotidiano do aluno. -Apresenta uma abordagem e problematização do uso de funções relacionando esse conceito com a ideia da noção de conjuntos. - Apresenta relações com o contexto de aplicação do conteúdo matemático, tal como a velocidade de um carro em função do tempo. -São estruturados elementos que englobam as propriedades (injeção, bijeção, crescente, etc.), caracterização (função afim, função quadrática, função exponencial) e representação de funções (representação de relação entre conjuntos domínio, imagem e contradomínio por diagrama; representação gráfica de funções no plano cartesiano). -Estrutura ideias de Geometria Analítica com funções, como por exemplo, a relação de distância entre dois pontos em um plano cartesiano. -Apresenta, principalmente, problematizações intramatemáticas (relação do conceito de funções com sequências e séries e ideias da matemática financeira). -Apresenta noções extramatemáticas (de aplicação do conhecimento a ideias do mundo físico, como modelagem e relações financeiras).
	Função afim e função quadrática	-Apresenta problematizações do uso de funções afim e quadráticas no cotidiano do aluno, tal como o crescimento ou decrescimento do preço de um produto em função do imposto. -Apresenta um breve contexto histórico sobre o surgimento do conceito de funções na história da Matemática. -Apresenta propriedades das funções lineares e das funções quadráticas (deslocamento, restrições de imagem, domínio e contradomínio, etc.). -Estrutura ideias de como constituir modelos matemáticos utilizados a partir de situações-problema. -Apresenta conexões intramatemáticas entre funções afim, quadráticas e sequências numéricas. -Apresenta exemplos com uso de tecnologias digitais, tal como computador e softwares como GeoGebra, que podem ser utilizadas para estudar o assunto.
	Função exponencial e função logarítmica	-Apresenta problematizações do uso de funções exponenciais e logarítmicas com aplicações a outras áreas do conhecimento, como na biologia e geografia. -Apresenta propriedades das funções exponenciais e logarítmicas (funções inversas, restrições, comportamento, etc.). -Apresenta aplicações intramatemáticas (sobre o uso de séries e sequências) e extramatemáticas (como colônia de bactérias e propriedades químicas).

		-Apresenta exemplos com uso de tecnologias digitais que podem ser utilizadas para estudar o assunto, tal como computador e softwares como GeoGebra.
	Sequências e Trigonometria	- Apresenta um breve contexto histórico sobre o uso de sequências na história da Matemática e suas interpretações acerca da natureza (relações nas pétalas de flores, frutos como abacaxi, etc.). - Aponta abordagens iniciais que tratam de sequências de modo geral no cotidiano. Por exemplo, uma sequência de números pares, de meses do ano, dias da semana, etc. -Apresenta a ideias de Progressão Aritmética (PA) e Progressão Geométrica (PG) no contexto formal matemático, apontando propriedades (razão entre termos de uma PA ou PG, relações com sequências infinitesimais, etc.) e definições (sobre o que são PA e PG, sobre o que determina se elas são decrescentes ou crescentes, etc.). -Apresenta relações intramatemáticas iniciais com o uso de funções e relações triangulares, por exemplo. Apresenta aplicações extramatemáticas, como, por exemplo, a reprodução de coelhos num ambiente selvagem. -Mostra os conceitos relacionados a soma dos termos de uma PG ou PA, inclusive, apresentando vínculos matemáticos com a ideia de Limite de uma soma, bem como, por exemplo, sobre técnicas de demonstração, pela ideia de limite da soma, por indução para provar a soma dos termos infinitos de uma PG.
Matemática: Contexto e Aplicações Volume 2	**Trigonometria**	-Apresenta uma revisão sobre o uso das relações trigonométricas utilizando de exercícios e problemas envolvendo o assunto. -Aprofunda as ideias de conceitos trigonométricos básicos utilizando de um pequeno contexto histórico e curiosidades sobre a utilização de ângulos em aplicações Físicas e geográficas, tal como o cálculo da distância entre duas estrelas. -Apresenta uma ideia de relações Físicas com comportamento de funções trigonométricas, tal como o movimento do pêndulo de um relógio. -Trabalha situações que envolvem a representação gráfica de funções trigonométrica numa relação com os ângulos do círculo trigonométrico. -Apresenta propriedades das funções trigonométricas (variações no argumento, na função e deslocamento nos eixos, etc.). -Elenca os elementos das transformações trigonométricas e identidades trigonométricas a partir de formulas já definidas. Por exemplo, $\text{sen}(a+b) = sen(a)\cos(b) + sen(b)\cos(a)$.
	Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares	-Apresenta uma breve contextualização histórica sobre o surgimento do conteúdo de matrizes na matemática. -Indica as propriedades (adição, subtração, multiplicação, etc.) das matrizes e sistemas lineares, bem como as tipologias que compõem os diferentes tipos de matrizes (quadradas, inversas, transpostas, etc.). -Apresenta relações sobre o uso de matrizes como “tabelas” para o dia a dia do aluno. Destaca o uso de matrizes como codificação de informações e pixel digital. -Estrutura relações intramatemáticas entre matrizes e sistemas lineares, principalmente na investigação sobre as soluções de uma dada incógnita. -Faz menção a ideias da álgebra matricial como elementos de aplicação da computação gráfica. -Explora a temática de sistemas lineares apontando-os como uma relação entre incógnitas de uma situação problema aplicada, como, por exemplo, uma pessoa que compra diferentes produtos com diferentes valores e busca estabelecer uma relação entre as quantidades desses produtos. -Estrutura relações intramatemáticas entre ideias da geometria

		espacial e das representações gráficas das matrizes.
	Geometria plana e espacial	-Apresenta uma breve contextualização histórica sobre as primeiras que envolveram dobraduras e os sólidos de Platão. -Estrutura relações entre as figuras geométricas planas e objetos do cotidiano dos alunos do Ensino Médio. Por exemplo, as relações entre objetos circulares e círculos ou noção de circunferência, ou delimitações territoriais com base na ideia de figuras planas ou espaciais. -Apresenta poucas relações extramatemáticas no contexto do Ensino Médio, atendo-se mais a demonstração do cálculo de áreas, perímetro e volume (ao abordar sobre algumas questões da Geometria Espacial). -Apresenta propriedades de conceitos relacionados a geometria de posição, tal como conceitos da distância entre dois pontos, de um ponto a uma reta, entre retas paralelas, etc.
	Análise Combinatória e Probabilidade	-Apresenta ideias de combinação a partir de curiosidades relacionadas a biologia celular, como a probabilidade de se ter uma determina cor na pigmentação dos olhos, ou de estratégias em jogos de tabuleiro, como jogos de xadrez. -Apresenta ideias vinculadas ao princípio da contagem com intuito de estabelecer noções intuitivas de possibilidades de combinação. -Apresenta formas de se estabelecer combinações entre objetos do mundo físico, ou mesmo objetos abstratos, usando as ideias de combinação e arranjo. -Apresenta breves provas para se encontrar as formulas de combinação necessárias para o referente estudo. -Destaca teoremas de aplicação da combinação a expansão de polinômios, apresentando, por exemplo, a ideia do Binômio de Newton. -Relaciona o estudo da probabilidade com elementos que estão vinculados a estudos da natureza, saúde entre outros. Por exemplo, a probabilidade de um raio cair duas vezes no mesmo lugar. -Estrutura relações entre estatística e probabilidade, apresentando, por exemplo, as chances de um jogador do "bixo" ganhar uma aposta.
Matemática: Contexto e Aplicações Volume 3	**Matemática Financeira e Estatística**	- Contextualiza a ideia inicial do objeto matemático de estudo com a ideia de compra, saldo devedor, desconto, etc. -Apresenta relações matemático formais sobre a estatística, como distribuição de frequência, medidas de tendência central e dispersão. -Apresenta aplicações desse conteúdo matemático a questões que não estão diretamente ligadas ao cotidiano do aluno enquanto sujeito, mas o contexto de sua formação como cidadão. Como por exemplo, a explicação de uma representação gráfica sobre a eleição de candidatos. -Apresenta ideias que relacionam estatística a ideias do mundo cotidiano como aplicações financeiras, por exemplo.
	Geometria analítica: ponto, reta e circunferência.	- Apresenta um breve contexto histórico sobre a Geometria analítica no surgimento do estudo sobre o plano cartesiano. -Retoma conceitos já apresentados no livro do volume 2, sobre distância entre pontos, reta e plano, etc. -Apresenta formulações sobre o estudo do modelo matemático da circunferência, e relações entre reta e inclinações das mesmas (ângulos). -Apresenta modelos matemáticos que estruturam: formulação fundamental da reta, do círculo e de projeções ortogonais, perpendiculares, etc. -Apresenta um conjunto bastante articulado de relações intramatemáticas entre a ideias apresentadas com matrizes e sistemas lineares. -Apresenta uma contextualização vinculada a localização espacial de sujeitos sobre planos ordenados, mas não realizada problematizações

		ao longo da seção. -Apresenta ideias relacionadas principalmente ao estudo de topologia da reta: distância entre pontos, ponto médio, alinhamento entre três pontos, equação da reta, ângulo entre ponto e reta, etc. -Apresenta ideias da parte da Geometria que envolve cônicas, apontando para o estudo sobre secções que formam hipérboles, parábolas e elipses.
	Cônicas e Números Complexos	- Apresenta relações entre o estudo das cônicas com Números Complexos, apresentando o surgimento desses elementos na história e retomando as ideias de cônicas com o objetivo de explorar mais tema -Apresenta uma ideia histórica inicial para justificar de onde surgem os conhecimentos dos Números Complexos, porém, não mantém essa estrutura ao longo de toda a unidade de estudo. -Apresenta relações intramatemáticas com outros objetos, representação gráfica, estudo da Geometria. Porém, sente-se falta de relações extramatemáticas que conduzam o aluno a compreender u uso desse conhecimento em seu ambiente escolar ou cotidiano. -Apresenta definições para operar Números Complexos (adição, subtração, conjugado, etc.).
	Polinômios e equações algébricas	-Para justificar o ensino sobre o assunto são tomados aspectos históricos que compõem esse assunto, como: como as ideias de Gauss, Girard e Cardamo. - Apresenta definições para a igualdade de equações polinomiais, bem como os métodos de operações de polinômios. - Dispõe somente de situações-problema que foram consideradas intramatemáticas ao longo de toda a unidade. -Apresenta demonstrações, como por exemplo, as demonstrações que provam as relações de Girard. Além de métodos de estudo das raízes de um polinômio. -Percebeu-se somente um vínculo existe com as demais unidades que se refere ao estudo de polinômios com raízes complexas.

APÊNDICE G – UNIDADES DE CONTEÚDO DOS LIVROS DIDÁTICOS: ANÁLISE E DESCRIÇÃO DAS UNIDADES DA COLEÇÃO “NOVO OLHAR: MATEMÁTICA”

Livro	Unidades de Conteúdos Matemáticos	Descrição/Análise
Novo Olhar: Matemática 1	**Conjuntos**	-São estruturadas relações entre conjuntos quaisquer, abordando ideias de pertinência entre elementos e conjuntos, operações entre conjuntos (união, interseção, diferença, relações de inclusão, etc.), conjunto universo, conjunto vazio e unitário. -Apresenta os conteúdos que envolvem o estudo dos conjuntos dos números Naturais, Inteiros, Irracionais, Racionais e Reais. -São destacadas problematizações em torno de aplicações que vinculam o conhecimento matemático a situações do cotidiano do aluno. Por exemplo: estabelecer as relações entre forma e cor de objetos contidos numa piscina de bolinhas.
	Funções	-Apresenta uma abordagem e problematização do uso de funções relacionando esse conceito com outras áreas de conhecimento. Por exemplo, uma colônia de bactérias que cresce em função do tempo. -São estruturados elementos que englobam as propriedades (injeção, bijeção, crescente, etc.), caracterização (função afim, função quadrática, função exponencial) e representação de funções (representação de relação entre conjuntos domínio, imagem e contradomínio por diagrama; representação gráfica de funções no plano cartesiano). -Apresenta problematizações extramatemáticas (de aplicação ao cotidiano do aluno, ou mesmo de aplicações fora do ambiente escolar) quanto intramatemáticas (relações entre os objetos matemáticos, como por exemplo, a relação funcional entre dois conjuntos). -Instiga a relação de funções com modelos matemáticos que representam situações do mundo físico.
	Progressões	-Coloca, inicialmente, abordagens que tratam de sequências de modo geral no cotidiano. Por exemplo, uma sequência de meninos ou meninas, de forma padrão, numa fila do lanche escolar. -Apresenta a ideias de Progressão Aritmética (PA) e Progressão Geométrica (PG) no contexto formal matemático, apontando propriedades (razão entre termos de uma PA ou PG, relações com sequências infinitesimais, etc.) e definições (sobre o que são PA e PG, sobre o que determina se elas são decrescentes ou crescentes, etc.). - Apresenta aplicações extramatemáticas, como, por exemplo, a produção de mel de uma abelha relacionado a quantia de pólen que a mesma coleta, quanto intramatemáticas (relações entre PG e funções exponenciais; relações entre PA e funções quadráticas, etc.) -Mostra os conceitos relacionados a soma dos termos de uma PG ou PA, inclusive, apresentando vínculos matemáticos com a ideia de Séries Convergentes e Divergentes, bem como, por exemplo, sobre técnicas de demonstração, pela ideia de limite da soma, por indução para provar a soma dos termos infinitos de uma PG.
	Trigonometria no Triângulo	- Apresenta as relações do cotidiano que se aplicam as noções de Trigonometria, como no cálculo da altura de um prédio a partir de seno, cosseno e/ou tangente. -Apresenta ideias que vinculam a Trigonometria no triângulo ao Teorema de Tales e Pitágoras, constituindo, no caso, relações intramatemáticas. - Apresenta reflexões que envolvem o uso de Tecnologias e Softwares para o estudo e modelagem de grandezas que podem se apresentar a partir dos estudos trigonométricos. Por exemplo, o uso da tecnologia do telescópio e cálculos trigonométricos para medir a distância entre a

		terra e uma estrela.
Novo Olhar: Matemática 2	**Trigonometria**	-Apresenta uma problematização inicial sobre o uso da Trigonometria, em especial, no círculo trigonométrico, sobre o vínculo entre seno, cosseno e tangente de angulações e o comportamento de funções trigonométricas no mundo físico. -Trabalha situações que envolvem a representação gráfica de funções trigonométrica numa relação com os ângulos do círculo trigonométrico. -Apresenta questões que vinculam o estudo da Trigonometria a outras áreas do conhecimento, como: Física (estudo de ondas), Saúde (sistema respiratório), Astronomia (estudo da distância entre estrelas), etc. -Elenca os elementos das transformações trigonométricas e suas aproximações no estudo algébrico de funções. Por exemplo, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.
	Matemática Financeira e Estatística	-Aborda a Matemática Financeira destacando a importância conhece-la no uso do dia a dia do aluno, como por exemplo, no cálculo de juros, no cálculo de dívidas, na formulação de planilhas de custo e gasto, etc. -Concebe uma estruturação a partir das problematizações do cotidiano apontando, principalmente, para a organização de compras no supermercado e rendimentos de um dado investimento. -Apresenta a necessidade do uso de Tecnologias como a calculadora para auxiliar no trabalho com valores numéricos considerados “difíceis” para se fazer cálculo mental. Apesar disso, estimula situações em que se mostra necessário que o aluno realize cálculo mental e busque relações conceituais entre as abordagens matemáticas. -Apresenta relações intramatemáticas com a Matemática Financeira e Estatística na representação gráfica por meio de funções. -Busca introduzir elementos característicos da leitura de gráficos, tabelas e quadros apresentando como objetivo a necessidade de que o aluno saiba interpretar dados estatísticos para compreender as questões do mundo a sua volta.
	Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares	-Apresenta uma breve contextualização histórica sobre o surgimento do conteúdo de matrizes na matemática. -Indica as propriedades (adição, subtração, multiplicação, etc.) das matrizes e sistemas lineares, bem como as tipologias que compõem os diferentes tipos de matrizes (quadradas, inversas, transpostas, etc.). -Apresenta relações sobre o uso de matrizes como “tabelas” para o dia a dia do aluno, sem destacar outras possibilidades de seu uso. -Estrutura relações intramatemáticas entre matrizes e sistemas lineares, principalmente na investigação sobre as soluções de uma dada incógnita. -Explora a temática de sistemas lineares apontando-os em uma relação entre incógnitas de uma situação-problema. Por exemplo, uma pessoa que compra diferentes produtos com diferentes valores e busca estabelecer uma relação entre as quantidades desses produtos. -Estrutura relações intramatemáticas entre funções lineares e sistemas lineares, a fim de qualificar a interpretação gráfica sobre estudo das soluções de um sistema de equações.
	Geometria	-Apresenta uma breve contextualização histórica sobre o uso da geometria no cálculo de distâncias e delimitação de terrenos pelos povos antigos, tal como os egípcios. -Estrutura relações entre as figuras geométricas planas e objetos do cotidiano dos alunos do Ensino Médio. Por exemplo, as relações entre círculo e moedas, entre segmentos de retas e delimitação de terrenos geográficos. -Apresenta relações extramatemáticas no contexto do Ensino Médio, atendo-se mais a demonstração do cálculo de áreas, perímetro e volume (ao abordar sobre algumas questões da Geometria Espacial).

	Análise Combinatória e Probabilidade	-Apresenta ideias de combinação a partir da combinação de elementos que se entende estarem pertinentes ao contexto do aluno do Ensino Médio, como, por exemplo: combinação entre blusas e calças, entre sucos e sanduíches, entre diagramas de letras e números para codificação de dados, etc. -Apresenta formas de se estabelecer combinações entre objetos do mundo físico, ou mesmo objetos abstratos, usando as ideias de combinação e arranjo. -Apresentação relações no contexto tecnológico e informatizado da matemática, sugerindo softwares que permitem estudar casos de combinação e probabilidade. -Destaca teoremas de aplicação da combinação a expansão de polinômios. - Apresenta demonstrações e provas matemáticas que conduzem a identificação de elementos de uma matemática a rigor. Por exemplo, fazendo demonstrações das propriedades de combinação. -Relaciona o estudo da probabilidade com elementos que estão vinculados a estudos da natureza, saúde entre outros. Por exemplo, a probabilidade de um raio cair duas vezes no mesmo lugar. -Estrutura relações entre estatística e probabilidade, apresentando, por exemplo, as chances de um candidato ganhar a eleição.
Novo Olhar: Matemática 3	**Estatística**	- Contextualiza os objetos matemáticos inicialmente a partir de questões que emergem da interpretação de gráficos de rendimentos de empresas, da informação sobre a conservação do meio ambiente, sobre o número de moradores, segundo um grupo de características, etc. -Apresenta relações matemático formais sobre a estatística, como distribuição de frequência, medidas de tendência central e dispersão. -Apresenta aplicações desse conteúdo matemático a questões que não estão diretamente ligadas ao cotidiano do aluno enquanto sujeito, mas o contexto de sua formação como cidadão. -Estruturam-se questões que relacionam os conhecimentos matemáticos sobre estática no ano anterior como, por exemplo, o uso da probabilidade em informações de tabelas estatísticas. -É repleto de relações extramatemáticas com uma percepção do mundo físico e de seus acontecimentos.
	Geometria	- Apresenta um contexto relações da Geometria Plana e Espacial Euclidiana e, alguns momentos, não Euclidiana com o mundo físico, como a analogia entre caixas de leite e paralelepípedos, entre esfera e bola de futebol, entre esculturas de artes e a composição por diversas figuras geométricas as compõem, etc. -Apresenta problematizações, ao longo da unidade, extramatemáticas que conduzem ideias em outras áreas de estudo, como na fotografia, geografia, ciências biológicas e outros. -Apresenta proposições, teoremas e definições sobre os objetos matemáticos Euclidianos Planos e Espaciais como: definição de reta, ponto e plano, retas paralelas e paramétricas, prismas, pirâmides, tronco de pirâmides cilindros, etc. -No geral, apresenta relações intramatemáticas com a unidade de Geometria Analítica, principalmente no estudo sobre a representação de corpos redondos no espaço.
	Geometria Analítica	-Apresenta uma contextualização vinculada a localização espacial de sujeitos sobre planos ordenados, mas não realizada problematizações ao longo da seção. -Apresenta ideias relacionadas principalmente ao estudo de topologia da reta: distância entre pontos, ponto médio, alinhamento entre três pontos, equação da reta, ângulo entre ponto e reta, etc. -Sentiu-se falta, excluindo a relação que evidentemente há com a unidade de Geometria, de suas articulações nas demais unidades de conteúdo matemático.
		-Apresenta uma ideia histórica inicial para justificar de onde surgem os

	Números Complexos	conhecimentos dos Números Complexos, porém, não mantém essa estrutura ao longo de toda a unidade de estudo. -Apresenta relações intramatemáticas com outros objetos, representação gráfica, estudo da geometria e da Trigonometria. Porém, sente-se falta de relações extramatemáticas que conduzam o aluno a compreender u uso desse conhecimento em seu ambiente escolar ou cotidiano. -Apresenta, por fim, uma relação desse estudo com a Física elétrica, porém, entende-se que essa abordagem pode estar longe da realidade do aluno.
	Polinômios e Equações polinomiais	-Para justificar o ensino sobre o assunto são tomados aspectos históricos que compõe esse assunto, como: como as ideias de Gauss, Girard e Cardamo. - Dispõe somente de situações-problema que foram consideradas intramatemáticas ao longo de toda a unidade. -Apresenta demonstrações como, por exemplo, as que provam as relações de Girard. Além de métodos de estudo das raízes de um polimômio. -Percebeu-se somente um vínculo existe com as demais unidades que se refere ao estudo de polinômios com raízes complexas.