

UNIVERSIDADE LUTERANA DO BRASIL  
PRÓ-REITORIA ACADÊMICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA



DANIELLE DOS SANTOS RODRIGUES

CONTRIBUIÇÕES DA UTILIZAÇÃO DE UMA UNIDADE DE ENSINO E  
APRENDIZAGEM (UEA) PARA O ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL

CANOAS  
2018

UNIVERSIDADE LUTERANA DO BRASIL  
PRÓ-REITORIA ACADÊMICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA



DANIELLE DOS SANTOS RODRIGUES

CONTRIBUIÇÕES DA UTILIZAÇÃO DE UMA UNIDADE DE ENSINO E  
APRENDIZAGEM (UEA) PARA O ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação  
em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade  
Luterana do Brasil para obtenção do título de Mestre em  
Ensino de Ciências e Matemática.

Orientadora: Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Carmen Teresa Kaiber

CANOAS  
2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação – CIP

R696c Rodrigues, Danielle dos Santos.  
Contribuições da utilização de uma unidade de ensino e aprendizagem (UEA)  
para o ensino de geometria espacial / Danielle dos Santos Rodrigues. - 2018.  
154 f. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Luterana do Brasil, Programa de Pós-  
Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Canoas, 2018.  
Orientadora: Profa. Dra. Carmen Teresa Kaiber.

1. Educação. 2. Ensino de geometria espacial. 3. Tecnologia digital. 4. Modelo  
de Van Hiele. 5. GeoGebra. 6. Objeto educacional. I. Kaiber, Carmen Teresa.  
II. Título.

CDU: 372.851.4

DANIELLE DOS SANTOS RODRIGUES

CONTRIBUIÇÕES DA UTILIZAÇÃO DE UMA UNIDADE DE ENSINO E  
APRENDIZAGEM (UEA) PARA O ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL

Orientadora: Profa<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Carmen Teresa Kaiber

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Área de Concentração: Ensino e Aprendizagem em Ensino de Ciências e Matemática.

BANCA EXAMINADORA:

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Eleni Bisognin – Universidade Franciscana (UFN)

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Marlise Geller – Universidade Luterana do Brasil (ULBRA)

Prof. Dr. Arno Bayer – Universidade Luterana do Brasil (ULBRA)

Aprovada em 24 de abril de 2018.

### **DEDICATÓRIA**

Dedico este trabalho, primeiramente a Deus, visto que, busco fazer tudo para a Glória dEle. Aos meus pais, José e Vera, que de maneira inexplicável fizeram de tudo para que eu alcançasse esta conquista, assim como minha irmã Greyce que traçou comigo esta caminhada.

## AGRADECIMENTOS

O Mestrado me proporcionou apreender o verdadeiro significado da palavra GRATIDÃO. Logo, aproveito este espaço para demonstrar minha GRATIDÃO a todos que fizeram parte dessa conquista.

À Deus, pela sabedoria e pela oportunidade de concluir o Mestrado.

Aos meus pais, que se dedicaram tanto quanto eu para a conclusão desse trabalho, sempre com muito incentivo e paciência.

À minha irmã, por ser a minha melhor parte e por ser a minha inspiração em organização e trabalho.

A minha orientadora, professora Carmen Teresa Kaiber, pela dedicação no seu trabalho, pela paciência e sabedoria em cada orientação, pelas conversas e conselhos, o que possibilitou a realização desse trabalho.

À banca examinadora, professores Dr<sup>a</sup>. Eleni Bisognin, Dr<sup>a</sup>. Marlise Geller e Dr. Arno Bayer por terem contribuído com sugestões relevantes para o aprimoramento desse trabalho.

Ao meu amigo, Jonata Santos, que sempre esteve pronto a ajudar e esclarecer às dúvidas do Pós, sem dispensar uma palavra de apoio e de incentivo.

Aos colegas do PPGEICIM pelos conhecimentos compartilhados, especialmente, pelas amizades construídas.

Agradeço, em especial, aos meus amigos Valmir Ninow, Alex Silva, Priscila Scoot Hood companheiros de pesquisa, que sempre me auxiliaram nos momentos mais difíceis da caminhada com sugestões preciosas, contribuindo para essa investigação. As minhas amigas Camila Bandeira, Isadora Lemos, Lívia Paim, Caroline Medeiros pelas conversas, experiências compartilhadas, visto que, contribuíram em muito para a minha formação. Por fim, mas não menos importante, a CEIA - Carolina Rodrigues, Marcos Klaus e Alexandre Menezes - sem sombra de dúvida, o segundo ano do Mestrado foi muito mais prazeroso, com o companheirismo e a amizade de vocês.

Aos professores do PPGECIM, pelos conhecimentos compartilhados, os quais contribuíram para o enriquecimento intelectual e científico.

À professora, Tania Elisa Seibert, sem o seu incentivo e apoio ao longo da graduação nada disso seria possível, obrigada por fazer a diferença na vida dos seus alunos, “amo muito tudo isso”.

A direção do Colégio Estadual Marechal Rondon e a Professora Ana Motta por permitirem a realização dessa pesquisa, junto à turma 301A.

Aos alunos, da turma 301A, que contribuíram de forma expressiva para a realização dessa investigação, além de proporcionarem momentos de estudo e reflexão.

Agradeço, também, a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela oportunidade de desenvolver este trabalho como bolsista no Programa de Pós-Graduação de Ensino de Ciências e Matemática.

## RESUMO

A pesquisa aqui apresentada tem por objetivo investigar as possíveis contribuições do uso de uma Unidade de Ensino e Aprendizagem (UEA), no desenvolvimento de conceitos da Geometria Espacial de um grupo de estudantes do terceiro ano do Ensino Médio de uma escola do município de Canoas/RS. A investigação, teve como base o desenvolvimento e aplicação do que se denominou de Unidade de Ensino e Aprendizagem (UEA). Essa unidade foi organizada, em três temáticas: Geometria de Posição; Noções Primitivas e Conhecimentos Básicos; Poliedros: Pirâmide e Prisma. A Unidade de Ensino e Aprendizagem foi aplicada junto a um grupo de 40 estudantes de uma turma terceiro ano do Ensino Médio diurno, em doze encontros de cinquenta minutos cada. A investigação, inserida em uma perspectiva qualitativa, contou com um conjunto de instrumentos de coleta de dados os quais foram sendo aplicados ao longo do trabalho visando captar elementos da aprendizagem e desenvolvimento dos estudantes no que se refere aos conhecimentos geométricos. Teoricamente a investigação tomou como referência aportes e pesquisas que discutem o ensino e a aprendizagem da Geometria, particularmente os relacionados à utilização de recursos das tecnologias digitais. Ainda, no que se refere, especificamente, ao trabalho com a Geometria, o modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele foi tomado como referência para a constituição da UEA, assim como para a análise dos dados advindos da aplicação da mesma. A partir da aplicação da unidade, os resultados oriundos do processo investigativo apontam que o recurso a tecnologia, particularmente a utilização do *software* GeoGebra, potencializou o trabalho dos estudantes com a Geometria, uma vez que possibilitou a visualização, construção e movimentação de diferentes objetos geométricos permitindo aos estudantes identificar propriedades, analisar, conjecturar e propor soluções. A análise produzida a partir dos constructos do modelo de Van Hiele permitiu perceber um avanço dos estudantes do nível de visualização (nível 1) para o nível de análise (nível 2), bem como indícios da transição desse nível para o de dedução informal (nível 3). Dificuldades enfrentadas ao longo da aplicação da UEA, como a não possibilidade de utilização do livro didático e a redução da carga horária para a aplicação, revelou com maior intensidade o grande potencial para a utilização de ferramentas de tecnologias digitais no estudo da Geometria. Os desafios e experiências vivenciadas ao longo da aplicação da UEA, bem como dos resultados obtidos, levou ao desenvolvimento de um objeto educacional que se denominou de GEOE (Geometria Espacial) o qual, entende-se, pode se constituir em material de apoio para professores e estudantes.

**Palavras-Chave:** Geometria Espacial. Modelo de Van Hiele. Tecnologias Digitais. GeoGebra. Objetos Educacionais.



## ABSTRACT

The research presented here aims to investigate the possible contributions of the use of a Teaching and Learning Unit (UEA), using digital technologies, in the development of concepts of Space Geometry of a group of students of the third year of High School of a school in the municipality of Canoas - RS. The research, was based on the development and application of what was denominated Unit of Education and Learning (UEA). This unit was organized in three themes: Position Geometry; Primitive Notions and Basic Knowledge; Polyhedra: Pyramid and Prism. The Teaching and Learning Unit was applied to a group of 40 students from a third grade class of daytime classes in twelve meetings of fifty minutes each. The research, inserted in a qualitative perspective, had a set of data collection instruments that were applied throughout the work in order to capture elements of students' learning and development in terms of geometric knowledge. Theoretically the research has taken as a reference contributions and researches that discuss the teaching and learning of Geometry, particularly those related to the use of resources of the digital technologies. Still, as far as Geometry is concerned, the development model of Van Hiele's geometric thinking was taken as a reference for the constitution of the UEA, as well as for the analysis of the data coming from the application of the same. From the application of the unit, results from the investigative process point out that the use of technology, particularly the use of GeoGebra software, strengthened students' work with Geometry, since it allowed the visualization, construction and movement of different geometric objects allowing students to identify properties, analyze, conjecture and propose solutions. The analysis produced from the constructs of the Van Hiele model allowed to perceive an advance of the students from the level of visualization (level 1) to the level of analysis (level 2), as well as indications of the transition from that level to that of informal deduction (level 3). Difficulties encountered during the application of UEA, such as the lack of use of the textbook and the reduction of the workload for the application, revealed with greater intensity the great potential for the use of tools of digital technologies in the study of Geometry. The challenges and experiences experienced during the application of the UEA, as well as the results obtained, led to the development of an educational object called GEOE (Spatial Geometry) which, it is understood, may constitute support material for teachers and students.

**Key words:** Spatial Geometry. Van Hiele Model. Digital Technologies. GeoGebra. Educational Objects.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Característica das principais escolas de Matemática da Grécia.....	24
Figura 2 - Evolução do pensamento geométrico .....	27
Figura 3 - Competências e Habilidades propostas nas Unidades Temáticas a serem desenvolvidos no Ensino Médio.....	32
Figura 4 - Unidades Curriculares de Ensino - Geometria .....	34
Figura 5 - Unidades Curriculares de Ensino – Grandezas e Medidas .....	36
Figura 6 - Habilidades a serem desenvolvidas nos níveis do modelo de Van Hiele .....	40
Figura 7 - Geometria Espacial na perspectiva dos níveis de compreensão do modelo de van Hiele .....	43
Figura 8 - Constituição da UEA .....	44
Figura 9 - Janela de visualização 3D do software GeoGebra.....	52
Figura 10 - Janela 3D: Planos Paralelos e Perpendiculares.....	52
Figura 11 - Representação de um cubo na janela 3D do software GeoGebra.....	53
Figura 12 - Cubo em diferentes perspectivas .....	53
Figura 13 - Síntese do processo de investigação .....	58
Figura 14 - Cronograma de Planejamento da UEA .....	61
Figura 15 - Conjunto de atividades do Instrumento de Investigação Intermediário .....	63
Figura 16 – Curso Superior pretendido pelos estudantes .....	65
Figura 17 - Dados coletados no Instrumento de Investigação Inicial.....	66
Figura 18 - Critério para análise do Instrumento de Investigação Inicial .....	67
Figura 19 - Instrumento Inicial: questão 1.....	68
Figura 20 - Avaliação dos estudantes para realização da questão 1 .....	69
Figura 21 - Resolução da atividade do estudante G15 .....	69
Figura 22 - Resolução da atividade do estudante G4 .....	70
Figura 23 - Avaliação dos estudantes para realização da questão 2 .....	71
Figura 24 - Avaliação dos estudantes para a realização da questão 3 .....	72
Figura 25 - Avaliação dos estudantes para realização da questão 4.....	72
Figura 26 - Instrumento Inicial: questões 5 e 6 .....	73
Figura 27 - Avaliação dos estudantes para realização da questão 5 .....	73
Figura 28 - Avaliação dos estudantes para realização da questão 6.....	74
Figura 29 - Instrumento Inicial: questão 7.....	74
Figura 30 - Avaliação dos estudantes para realização da questão 7 .....	75

Figura 31 - Instrumento Inicial: questão 8.....	76
Figura 32 - Avaliação dos estudantes para realização da questão 8.....	76
Figura 33 - Habilidades identificadas nas atividades do Instrumento de Investigação Inicial.....	77
Figura 34 - Representação de algumas relações geométricas de posição no GeoGebra.....	81
Figura 35 - Representação de conceitos primitivos de Geometria no GeoGebra.....	81
Figura 36 - Atividade I no LABIN.....	83
Figura 37 - Sólido construído por um grupo de estudantes.....	84
Figura 38 - Atividade realizada pelo estudante G3.....	85
Figura 39 - Atividade realizada pelo estudante G16.....	85
Figura 40 - Construções de objetos geométricos realizados no software pelos estudantes.....	86
Figura 41 - Resolução da questão 7 do Trabalho em Grupo.....	87
Figura 42 - Resolução da questão 8 do Trabalho em Grupo.....	88
Figura 43 - Síntese das análises do Instrumento de Investigação Intermediário.....	89
Figura 44 - Instrumento Final: questão 1.....	91
Figura 45 - Instrumento Final: questão 2.....	92
Figura 46 - Instrumento Final: questões 3 e 4.....	93
Figura 47 - Instrumento Final: questão 5.....	94
Figura 48 - Instrumento Final: questão 6.....	95
Figura 49 - Habilidades identificadas nas atividades do Instrumento de Investigação Final.....	95
Figura 50 - Desempenho da turma a partir dos Instrumentos Inicial e Final.....	96
Figura 51 - Desempenho da turma de acordo com os níveis do Modelo de Van Hiele.....	97
Figura 52 - Processo de desenvolvimento do OE - GEOE.....	102
Figura 53 - Página inicial do site Wix.com.....	103
Figura 54 - Escolha do template para a construção do objeto educacional.....	103
Figura 55 - Interface dos conteúdos abordados no GEOE.....	105
Figura 56 - Atividade construída no JCLIC.....	106
Figura 57 - Home do GEOE.....	107
Figura 58 - Geometria de Posição do GEOE.....	108
Figura 59 - Noções Primitivas e Conceitos Geométricos.....	109
Figura 60 - Poliedros.....	110
Figura 61 - Corpos Redondos.....	111
Figura 62 - Avaliação do GEOE.....	112
Figura 63 - Contato.....	112

## **LISTA DE TABELAS**

Tabela 1 - Dados referentes a idade dos estudantes .....	64
Tabela 2 - Desempenho da turma no Instrumento Inicial .....	67
Tabela 3 - Desempenho da turma no Instrumento Final .....	90

## Sumário

<b>INTRODUÇÃO</b> .....	15
<b>1 JUSTIFICATIVA E OBJETIVOS</b> .....	18
<b>2 PRESSUPOSTOS TEÓRICOS EM TORNO DA GEOMETRIA</b> .....	23
2.1 ASPECTOS HISTÓRICOS DO DESENVOLVIMENTO DOS CONHECIMENTOS GEOMÉTRICOS.....	23
2.2 O ENSINO DA GEOMETRIA E A INFLUÊNCIA DO MOVIMENTO MATEMÁTICA MODERNA (MMM).....	28
2.3 A GEOMETRIA NO ENSINO MÉDIO .....	30
2.4 MODELO DE DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO DE VAN HIELE.....	37
<b>2.4.1 Modelo de Van Hiele e o desenvolvimento da Geometria Espacial</b> .....	43
<b>3 TECNOLOGIAS NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA</b> .....	46
3.1 GEOMETRIA DINÂMICA .....	49
<b>3.1.1 Software GeoGebra</b> .....	51
<b>3.1.2 Visualização</b> .....	54
<b>4 ASPECTOS METODOLÓGICOS</b> .....	56
4.1 LOCUS DA INVESTIGAÇÃO E PARTICIPANTES .....	59
4.2 PLANEJAMENTOS DA UNIDADE DE ENSINO E APRENDIZAGEM (UEA) .....	60
4.3 INSTRUMENTOS DE INVESTIGAÇÃO .....	62
<b>5 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS</b> .....	64
5.1 OS PARTICIPANTES DA PESQUISA .....	64
5.2 ANÁLISE DO INSTRUMENTO DE INVESTIGAÇÃO INICIAL.....	66
5.3 APLICAÇÃO E ANÁLISE DA UNIDADE DE ENSINO E APRENDIZAGEM (UEA) .....	77
<b>5.3.1 Contato com software GeoGebra</b> .....	79
<b>5.3.2 Geometria de Posição</b> .....	80
<b>5.3.3 Noções Primitivas e Conhecimentos Básicos</b> .....	82
<b>5.3.4 Poliedros: Prismas e Pirâmides</b> .....	86
5.4 ANÁLISE DO INSTRUMENTO DE INVESTIGAÇÃO FINAL.....	90

<b>6 DESENVOLVIMENTO DO OBJETO EDUCACIONAL – GEOE.....</b>	<b>100</b>
6.1 OBJETO EDUCACIONAL (OE) .....	100
6.2 CONSTRUÇÃO DO OBJETO EDUCACIONAL GEOE.....	102
<b>6.1.1 Ferramenta para construção do GEOE – Plataforma Wix.Com.....</b>	<b>102</b>
6.3 OBJETO EDUCACIONAL – GEOE.....	104
<b>6.3.1 Ferramentas Incorporadas ao Objeto Educacional – GEOE.....</b>	<b>104</b>
6.4 INTERFACE DO OBJETO EDUCACIONAL GEOE .....	107
<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>113</b>
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>116</b>
<b>ANEXOS .....</b>	<b>123</b>
<b>APÊNDICES.....</b>	<b>126</b>
APÊNDICE A - TERMO DE CONSENTIMENTO.....	127
APÊNDICE B – TERMO DE ASSENTIMENTO.....	130
APÊNDICE C – MATERIAL SOBRE GEOMETRIA DE POSIÇÃO .....	132
APÊNDICE D – MATERIAL SOBRE NOÇÕES PRIMITIVAS E CONHECIMENTOS BÁSICOS .....	134
APÊNDICE F – MATERIAL SOBRE PIRÂMIDE .....	135
APÊNDICE G – MATERIAL SOBRE PRISMA .....	136
APÊNDICE H – MATERIAL SOBRE CORPOS REDONDOS.....	137
APÊNDICE I – INSTRUMENTO QUESTIONÁRIO PERFIL DA TURMA.....	139
APÊNDICE J – INSTRUMENTO DE INVESTIGAÇÃO INICIAL .....	143
APÊNDICE K – INSTRUMENTO DE INVESTIGAÇÃO FINAL.....	146
APÊNDICE L – ATIVIDADE DE FAMILIARIZAÇÃO .....	148
APÊNDICE M – ATIVIDADE 1 NO <i>SOFTWARE</i> GEOGEBRA.....	149
APÊNDICE N – MATERIAL SOBRE POLIEDROS .....	150
APÊNDICE O – LISTA DE ATIVIDADES.....	152
APÊNDICE P – ATIVIDADE 2 NO <i>SOFTWARE</i> GEOGEBRA .....	153
APÊNDICE Q - TRABALHO EM GRUPO.....	154

## INTRODUÇÃO

Os Parâmetros Curriculares Nacionais-PCN (BRASIL, 1998) apontam para a importância dos conceitos Geométricos constituírem o currículo de Matemática, uma vez que o desenvolvimento do pensamento geométrico propicia ao estudante um tipo de pensamento que lhe permite compreender, de forma organizada, o mundo em que vive. Os PCN apontam, ainda, o estudo da Geometria como um campo fértil para trabalhar situações-problema (BRASIL, 1998), além de proporcionar a organização do pensamento e do raciocínio dedutivo (BRASIL, 1997), propiciando o desenvolvimento cognitivo (BRASIL, 2002).

Apesar da importância destacada da Geometria na Educação Básica, pesquisas como as de Pavanello (1989,1993), Lorenzato (1995, 2006), Pereira (2001) e Barbosa (2011) apontam para quase a ausência do processo de ensino e aprendizagem da Geometria em sala de aula. Os autores discutem sobre a questão, especialmente buscando identificar as causas que têm levado a presença limitada da Geometria nas salas de aula na Educação Básica. Tais causas estão relacionadas, de acordo com os autores, com a influência do chamado Movimento Matemática Moderna<sup>1</sup> e do entendimento de que os próprios professores de Matemática têm dificuldades sobre o tema.

De acordo com Barbosa (2011), o professor, muitas vezes, não trabalha Geometria em sala de aula porque possui dificuldades com o conteúdo, posto que, talvez, não tenha se apropriado do mesmo, adequadamente, durante a sua formação. Lorenzato (1995, p.4) já afirmava existir um círculo vicioso “[...] a geração que não estudou Geometria, não sabe como ensiná-la”.

Por outro lado, há um movimento crescente de se investigar, discutir e refletir sobre a Geometria a ser trabalhada na escola, e como o seu ensino pode ser conduzido (ANDRADE, 2004). Sobre a questão, a pesquisa de Andrade (2004) apontou duas tendências no trabalho com a Geometria, a Geometria Experimental e a Geometria em Ambientes Computacionais. Sobre a Geometria em ambientes computacionais pesquisas como as de Fainguelernt (1999), Andrade (2004), Gobbi (2013), Souza (2014) e Alba (2015) tem destacado as potencialidades do uso de tecnologias nos processos educacionais, especialmente no que se refere a *softwares* de Geometria Dinâmica no processo de ensino e aprendizagem da Geometria, destacando que o uso dessas ferramentas tecnológicas pode transformar a cultura das aulas de Matemática.

---

<sup>1</sup> Uma discussão sobre o Movimento Matemática Moderna será apresentada ao longo do texto.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) também destacam as potencialidades do uso de computadores, considerando ser o mesmo um instrumento que proporciona muitas possibilidades no que se refere ao ensino e aprendizagem de Matemática, indicando a utilização de *softwares* como uma forma de auxiliar o estudante no desenvolvimento do raciocínio geométrico.

Concorda-se com Valente (1999), quando afirma que o chamado ensino tradicional não vem produzindo resultados satisfatórios, principalmente por não adequar métodos de ensino à realidade do cotidiano do aluno e, nesse contexto, considera-se que o recurso à tecnologia pode criar possibilidades para o trabalho com a Matemática, particularmente com a Geometria, que não se apresenta em outros ambientes. Todas essas questões que têm alimentado pesquisas e discussões sobre o ensino e aprendizagem da Geometria na Educação Básica, foram, ao longo do tempo, despertando reflexões na autora da presente dissertação, as quais se materializaram em indagações e interesse sobre questões referente ao ensino e aprendizagem da Geometria na Educação Básica, bem como as potencialidades do uso das tecnologias em sala de aula. Nesse contexto, a presente pesquisa tem por objetivo **investigar as possíveis contribuições do uso de uma Unidade de Ensino e Aprendizagem (UEA), no desenvolvimento de conceitos de Geometria Espacial junto à um grupo de estudantes do terceiro ano do Ensino Médio.**

Assim, o presente texto dissertativo está organizado em seis capítulos. No primeiro, apresenta-se a justificativa para realização da pesquisa e os objetivos que a norteiam.

No segundo capítulo, são apresentados os aspectos teóricos em torno da Geometria, os quais envolvem questões históricas, o Movimento Matemática Moderna e sua influência no ensino da Geometria, bem como, a Geometria no Ensino Médio e o modelo de desenvolvimento do pensamento Geométrico de Van Hiele. Para embasar as reflexões, buscou-se respaldo em Pavanello (1989, 1993), Lorenzato (1995, 2006), nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL 1997, 1998, 2002), Faiguelernt (1999), Almouloud (1999), Fontes e Fontes (2010), Barbosa (2011) e Santos e Nacarato (2014), no que se refere ao modelo de Van Hiele, a pesquisa encontrou em Hoffer (1981), Van Hiele (1986), Crowley (1994), Hamazaki (2004), Villiers (2010) e Nasser e Sant'Anna (2010), amparo para a constituição das análises.

O terceiro capítulo é dedicado a uma reflexão sobre o uso das Tecnologias Digitais na Educação Matemática. Assim apresentam-se pesquisas e resultados já alcançados quanto ao uso de tecnologias em sala de aula, a importância da visualização para compreensão dos conceitos geométricos, bem como as potencialidades do uso de *softwares* de Geometria Dinâmica, com destaque para o *software* GeoGebra 3D. Esse capítulo se ampara em Borba (1999), Valente (1999), Perrenoud (2000), Villareal (2005), Kaiber e Conceição (2007), Maltempi (2008),



Borba e Penteado (2010), Kaiber, Vecchia, Scapin (2010), Gravina e Basso (2012), Borba, Scucuglia, Gadanidis (2014), Penalta (2015) e Kenski (2015).

Já o quarto capítulo apresenta os aspectos metodológicos que conduziram a pesquisa, que se insere em uma perspectiva qualitativa com respaldo em Bogdan e Binklen (1994) e Ludke e André (2013). Nesse capítulo é apresentado, também, a organização do trabalho junto aos estudantes e aprimorado ao longo da investigação.

No quinto capítulo é apresentada a investigação realizada junto aos estudantes, assim como, dados, análises e reflexões em torno dos caminhos percorridos e do desempenho dos estudantes na aplicação da Unidade de Ensino e Aprendizagem (UEA).

O sexto capítulo apresenta o objeto educacional GEOE, o qual emergiu do processo investigativo.

A dissertação é encerrada com as Considerações Finais, que buscam englobar os aspectos mais significativos em relação à pesquisa realizada trazendo uma reflexão sobre todo o trabalho desenvolvido, além de propostas para a ampliação do mesmo e perspectivas para pesquisas futuras.

## 1 JUSTIFICATIVA E OBJETIVOS

A presente investigação surge de uma inquietação da pesquisadora em tentar compreender aspectos de apropriação dos conhecimentos geométricos, como se desenvolve o pensamento geométrico espacial de estudantes no Ensino Médio, como a Geometria Espacial tem sido levada às escolas e particularmente como a tecnologia pode contribuir para o desenvolvimento da mesma.

O valor do conhecimento geométrico é ressaltado nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1997; 2002), pois além de desenvolver a capacidade de raciocínio, se mostra como elemento importante no auxílio à solução de problemas matemáticos e de outras áreas, além de possibilitar o estudante compreender, descrever e representar de forma organizada, o mundo em que vive.

Segundo Pires (2008), o ensino da Geometria no Brasil, passou por distintas fases, nas últimas décadas. Até os anos 60, se baseava na axiomática da Geometria Euclidiana, entre 1970 e 1980, recebeu a influência do Movimento Matemática Moderna (MMM), entre 1980 e 1994, são elaboradas as diretrizes que buscavam contrapor o Movimento Matemática Moderna, lideradas pelas Secretárias Estaduais e Municipais de Educação e, a partir de 1995, o currículo é norteado pelo projeto Nacional de Reforma, cujo o documento base se constitui nos Parâmetros Curriculares Nacionais.

De acordo com a autora, o ensino da Geometria, que até os anos 60 recebia destaque, fica em segundo plano na fase do Movimento Matemática Moderna. O Movimento que teve início na Europa, encontrou amplo desenvolvimento nos Estados Unidos e chegou ao Brasil na década de 1960, onde ganhou muitos adeptos. O MMM alcançou diversas regiões do país, formando grupo de professores que defendiam o fim da complexidade e da abstração da Geometria e a modernização da Matemática (SILVA, 2008).

Pesquisas como Pavanello (1989, 1993); Lorenzato (1995, 2006) indicam que o MMM, no Brasil, gerou um impacto negativo na Matemática, afetando não só o ensino da Geometria na escola básica, mas também a formação de professores. Para Fontes e Fontes (2010), as ações advindas do Movimento Matemática Moderna levaram a um abandono do ensino da Geometria nas escolas e uma desmotivação por parte dos professores nessa área da Matemática, prejudicando o desenvolvimento dos estudantes. Os autores argumentam que, sem os conhecimentos geométricos os estudantes terão dificuldade em relacionar outros conceitos matemáticos, gerando lacunas na sua aprendizagem, com o que se concorda.

Sobre a questão, Fainguelernt (1999) já apontava que as lacunas mencionadas quanto ao desenvolvimento dos conceitos geométricos ocorrem, até mesmo, pela dificuldade de compreensão desses conteúdos por parte dos professores que ensinam Geometria, devido a falhas na sua formação.

Nessa mesma linha de pensamento, Barbosa (2011) destaca que o abandono da abordagem aos conteúdos de Geometria, possibilitou formar professores que, de modo consequente, apresentam dificuldades em ensiná-la. Santos e Nacarato (2014) apontam, ainda, que as dificuldades encontradas pelos professores, frente a este ensino, estão vinculadas, muitas vezes, há sentimento de insegurança, impotência e de desconhecimento.

Sobre a questão, Pavanello (1989, 1993) e Lorenzato (1995, 2006) destacam que veem dificuldades em os professores ensinarem algo que não vivenciaram, adequadamente, durante sua formação. Para os autores houve um empobrecimento na abordagem dos conteúdos de Geometria, que passaram a ser desenvolvidos de maneira intuitiva e experimental.

Contudo, os conhecimentos geométricos, de acordo com os PCN (BRASIL, 1997), constituem parte importante do currículo de Matemática, pois

[...] por meio deles, o aluno desenvolve um tipo de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula a criança a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades e vice-versa (BRASIL, 1997, p.56).

O ensino da Geometria recebe destaque também, nas Orientações Curriculares do Ensino Médio – PCNEM (BRASIL, 2006):

O estudo da Geometria deve possibilitar aos alunos o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas práticos do cotidiano, como, por exemplo, orientar-se no espaço, ler mapas, estimar e comparar distâncias percorridas, reconhecer propriedades de formas geométricas básicas, saber usar diferentes unidades de medida. Também é um estudo em que os alunos podem ter uma oportunidade especial, com certeza não a única, de apreciar a faceta da Matemática que trata de teoremas e argumentações dedutivas. Esse estudo apresenta dois aspectos – a geometria que leva à trigonometria e a geometria para o cálculo de comprimentos, áreas e volumes. (BRASIL, 2006, p.75)

Alinhado, com o que os PCN estabelecem, Fainguelernt (1999) pondera que,

O estudo da Geometria é de fundamental importância para se desenvolver o pensamento espacial e o raciocínio ativado pela visualização, necessitando recorrer à intuição, à percepção e à representação, que são habilidades essenciais para leitura do mundo e para que a visão da Matemática não fique distorcida. Essas razões são suficientes para que o ensino da Geometria não seja desenvolvido através de automatismo, memorização e técnicas operatórias, nem baseado em um processo de formalização com crescente nível de rigor, abstração e generalização. (FAINGUELERNT, 1999, p.53).

Todavia, pesquisas na área como Lorenzato (2006), Nasser e Sant’Anna (2010), apontam, existir uma divergência entre o ensino preconizado nos PCN e o ensinado nas escolas, visto que, em muitas escolas, a Geometria é pouco trabalhada e destacam a frágil posição que a mesma tem ocupado na Educação Básica. Quanto a isso, Pirola (1995) já apontava que pesquisadores em todo mundo demonstravam preocupação com os rumos do ensino da Geometria e as pesquisas buscavam responder ao “o que” ensinar de Geometria e “como” fazê-lo.

Nos últimos anos, o uso das tecnologias digitais na Educação tem influenciado tantas pesquisas relativas ao desenvolvimento do pensamento geométrico dos estudantes, como a postura e ação dos professores. Kaiber, Vecchia e Scapin (2010) apontam que a exploração de recursos computacionais se faz necessária para que a educação cumpra seu papel, em um contexto que a tecnologia se mostra cada vez mais presente. Os autores se mostram favoráveis a utilização destes recursos por proporcionarem aos estudantes interação com um espaço de aprendizagem diferenciado, com acesso a diferentes mídias como *softwares*, vídeos, objetos de aprendizagem, *chats*, entre outros. Tal entendimento encontra respaldo em Perrenoud (2000), o qual acredita, que a escola não pode ignorar a inserção das tecnologias, posto que, as mesmas transformam a maneira de trabalhar, pensar e decidir.

Sobre o uso de tecnologias digitais e, particularmente, no que se refere aos chamados *softwares* de geometria dinâmica, Zulato (2002) e Ferreira (2008) já destacavam, que o uso de tais ferramentas fomenta o espírito de investigação, possibilitando aos estudantes explorar e manipular os objetos indicados, além de ser um ambiente dinâmico, que favorece situações de aprendizagem. Lorenzato (2008), afirma que “palavras não alcançam o mesmo efeito que os objetos ou imagens, estáticos ou em movimento conseguem, palavras auxiliam, mas não são suficientes para ensinar” (LORENZATO, 2008, p.17).

Os argumentos apresentados buscam apontar a relevância do desenvolvimento do pensamento geométrico e a sua importância na Educação Básica, bem como o uso tecnologias digitais como recurso em sala de aula. Essas reflexões levaram a questão de pesquisa que move essa investigação: **Como o uso de tecnologias digitais nas aulas de Matemática, pode contribuir para o ensino e aprendizagem da Geometria Espacial no Ensino Médio?**

Essa questão emerge não só do estudo de investigações da área, mas também de inquietações da pesquisadora ao longo da sua trajetória enquanto aluna da Educação Básica e

acadêmica de Matemática, e orientam o que se estabelece como as motivações pessoais para o desenvolvimento dessa investigação<sup>2</sup>.

Ao longo da Educação Básica sempre apresentei encantamento pela Matemática, não manifestando grandes dificuldades de compreensão e aprendizado. Após, a conclusão do Ensino Médio, em 2007, prestei vestibular para o curso de Engenharia Química, o qual cursei por quatro semestres, priorizando sempre que possível disciplinas voltadas a Matemática. Por questões financeiras esse curso foi trancado no segundo semestre de 2009 e no final do ano de 2009, prestei a prova do ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio), na busca de uma bolsa de estudos em uma Universidade. Já, em 2010 com o desempenho no ENEM consegui uma bolsa de estudo no curso de Matemática Licenciatura na Ulbra por meio do PROUNI, iniciando um período de grandes conquistas pessoais. Na graduação, foram vivenciadas oportunidades incríveis de aprendizado, as quais contribuíram para a minha formação profissional e mesmo pessoal, com destaque para os estágios obrigatórios, as oficinas, as monitorias de Cálculo, bem como a participação no projeto PIBID (Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência), onde foram desenvolvidos trabalhos interdisciplinares com alunos da rede municipal de Canoas.

Ao longo da minha graduação, ao estudar Cálculo, Álgebra, Geometria e Análise. Foram as disciplinas de Geometria que mais me chamaram a atenção, pois foi quando percebi o pouco de geometria que sabia ou havia estudado. Em 2015, no ano de conclusão do curso de Licenciatura prestei a prova de seleção de bolsas do Mestrado no Programa de Pós Graduação de Ensino de Ciências e Matemática (PPGECIM), sendo contemplada com uma bolsa taxa da CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) para cursar o Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática, sob orientação da Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup> Carmen Teresa Kaiber. Já quando tomei a decisão de cursar o Mestrado, refletindo sobre o que desenvolveria na minha dissertação, a questão da Geometria, o pouco que havia estudado ao longo da minha vida estudantil e as dificuldades encontradas ao cursar as disciplinas, me indicaram o que estudar.

Assim, em 2016, agora no mestrado, ao cursar disciplinas e em conversas com a orientadora se fortaleceu o desejo de trabalhar com a Geometria. O trabalho de investigação seria a oportunidade de me aprofundar nas questões que envolvem a Geometria, seu ensino e aprendizagem na Educação Básica, o que permitiria discutir e refletir sobre as questões da Geometria na Educação Básica.

---

<sup>2</sup> Trajetória pessoal será redigida em primeira pessoa.

Neste contexto, buscando contribuir para identificar elementos os quais envolvam questões relacionadas ao ensino e aprendizagem da Geometria, para que possam elucidar os aspectos foram traçados os objetivos.

- **Objetivo Geral**

Investigar as possíveis contribuições do uso de uma Unidade de Ensino e Aprendizagem (UEA), no desenvolvimento de conceitos de Geometria Espacial de um grupo de estudantes do terceiro ano do Ensino Médio.

- **Objetivos Específicos**

Para alcançar o objetivo geral foram traçados os seguintes objetivos específicos:

- investigar o nível de conhecimentos geométricos de um grupo de estudantes do Ensino Médio, previamente ao trabalho com a Geometria Espacial.
- investigar a implementação<sup>3</sup> de uma Unidade de Ensino e Aprendizagem (UEA), com recurso às tecnologias digitais, para o desenvolvimento dos conhecimentos geométricos espaciais.

---

<sup>3</sup> Refere-se a elaborar, aplicar e analisar uma Unidade de Ensino e Aprendizagem (UEA).

## 2 PRESSUPOSTOS TEÓRICOS EM TORNO DA GEOMETRIA

O presente capítulo traz, inicialmente, reflexões sobre a Geometria e seu ensino, abordando aspectos históricos, passando pelo período referente ao Movimento Matemática Moderna (MMM) no Brasil, chegando à situação atual do Ensino da Geometria no Ensino Médio. Em seguida, faz-se referência aos documentos oficiais quanto à Geometria na Educação Básica.

### 2.1 ASPECTOS HISTÓRICOS DO DESENVOLVIMENTO DOS CONHECIMENTOS GEOMÉTRICOS

A Geometria nasceu no antigo Egito, no contexto da demarcação de terras, quando, então, surgiram as primeiras relações métricas e trigonométricas (EVES, 1992). De acordo com o autor, a Geometria chega à Grécia, pelo trabalho do filósofo Tales de Mileto, considerado um dos sete sábios da antiguidade, por ter sido o precursor do uso do raciocínio lógico para descrever fatos geométricos.

Eves (1992) aponta que o auge do desenvolvimento da Geometria pela civilização grega ocorreu com os três geômetras gregos mais importantes da Antiguidade: Euclides (300 a.C), que escreveu vários tratados de geometria, sendo o mais expressivo “Os Elementos”, que reunia conhecimentos geométricos e matemáticos, da época; Arquimedes (287 a.C), considerado o maior matemático da Antiguidade, o qual se destacava pela originalidade de seus trabalhos chegando até os nossos dias; Apolônio (225 a.C), conhecido como “o grande geômetra”, e que teve como principal obra “Secções Cônicas”.

Cajori (2007) aponta que, quase tudo o que se sabe sobre a Matemática dos antigos egípcios se baseia em dois grandes papiros: o Papiro Ahmes e o Papiro de Moscou. De acordo com o autor, o primeiro foi escrito por volta de 1650 a.C. e tem aproximadamente 5,5 m de comprimento e 32 cm de largura, sendo considerado o mais antigo manual de matemática conhecido, colocando nos em contato com o pensamento matemático egípcio de três ou quatro mil anos atrás. Foi comprado em 1858 por um antiquário escocês chamado Henry Rhind, por isso é conhecido, também, como Papiro de Rhind.

Segundo Bicudo (2011), o papiro Ahmes (ou Rhind) descreve os métodos de multiplicação e divisão dos egípcios, o uso que faziam das frações unitárias, o emprego da regra da falsa posição, a solução para o problema da determinação da área de um círculo e muitas aplicações da Matemática a problemas práticos.

Já, o Papiro de Moscou ou Golonishev é uma estreita tira de 5,5 m de comprimento por 8 cm de largura, com 25 problemas que, atualmente, encontra-se em Moscou, tendo sido datado, aproximadamente, como do no ano de 1850 a.C. O problema mais interessante do papiro de Moscou é o de número 14 que mostra o problema do volume de um tronco de uma pirâmide de base quadrada (EVES, 1992). Para o autor, a Matemática egípcia foi um dos pilares da Matemática grega, a qual foi a base para a Matemática moderna.

Os autores destacados são unânimes em apontar a importância dos gregos para o desenvolvimento da Matemática e, particularmente, da Geometria. Assim, buscou-se colocar em evidência, no quadro da Figura 1, as principais escolas de Matemática da Grécia, apontando características e principais contribuições para a Geometria, tomando como referência Cajori (2007) e Pavanello (1989).

Figura 1 - Característica das principais escolas de Matemática da Grécia

<b>GEOMETRIA GREGA</b>	<u>Escola Jônica</u> Fundador Tales de Mileto (640-546 a.C.)	O Sumário Eudemiano <sup>4</sup> aponta “Tales como o inventor dos teoremas de igualdade dos ângulos opostos pelo vértice, da igualdade dos ângulos da base de um triângulo isósceles, da bissecção de um círculo por seu diâmetro, e o da congruência de dois triângulos que possuam um lado igual e dois ângulos adjacentes a esse lado também iguais” (CAJORI, 2007).
	<u>Escola Pitagórica</u> Fundador Pitágoras (580–500 a.C.)	Pitágoras estudou matemática no Egito e fundou a sua própria escola no sul da Itália. A Matemática foi o principal estudo da escola pitagórica, elevando a Matemática ao estado de uma Ciência. Os pitagóricos eram como uma entidade única, tinham como principal característica o anonimato, tanto nas descobertas, como nas doutrinas que as envolviam, e principalmente relacionado aos seus membros, sem possibilidade de creditar a algum dos seus componentes uma descoberta particular. O Sumário Eudemiano diz que “Pitágoras transformou o estudo de geometria em uma forma de educação literal, pois examinou seus princípios a fundo, e investigou de um modo integral e intelectual os seus teoremas” (CAJORI, 2007, pg.47).
	<u>Escola Sofista</u> (Meados de 480 a.C.)	Sofistas ou “homens-sábios” eram professores que vinham de todos os lugares por onde as doutrinas pitagóricas haviam alcançado, e ensinavam geometria, astronomia e filosofia. Diferentemente dos pitagóricos eles cobravam por suas aulas. As contribuições à matemática, foram feitas em razão de inúmeras tentativas na solução de três famosos problemas: a trisseção de um ângulo; a duplicação do cubo, isto é, achar um cubo cujo o volume é o dobro do de um cubo dado; e a quadratura do círculo, isto é, achar um quadrado ou uma outra figura de lados retos, cuja área fosse exatamente igual de um círculo dado.

<sup>4</sup> O Sumário Eudemiano era o nome dado aos registros feitos por Proclo, amigo e conhecedor dos escritos de Eudemo, aluno de Aristóteles, que escreveu a história completa da Geometria e Astronomia grega. O Sumário Eudemiano são os relatos mais confiáveis que se tem desta época (CAJORI, 2007).



<b>GEOMETRIA GREGA</b>	<u>Escola Platônica</u> Fundador Platão (431–404 a.C.)	A filosofia natural de Platão é parcialmente baseada na visão dos pitagóricos. E como eles, a escola Platônica buscava a chave do universo na geometria e na aritmética. Platão considerava o conhecimento geométrico importantíssimo, tanto que, na entrada da escola, havia uma frase, informando “Que não entre aqui, aquele que não souber geometria”. Não havendo, conhecimento matemático suficiente, não havia elo para a filosofia da escola, logo, não seria bem-vindo por Platão como membro. Para Platão, a explicação de tudo, como tudo existia, estava nos cinco sólidos perfeitos: o cubo (terra), o tetraedro (fogo), o octaedro (ar), o icosaedro (água) e o dodecaedro (elemento que permearia todo o Universo). A escola Platônica se destaca pelo grande número de matemáticos formados, que contribuíram com valiosos avanços em lógica e métodos de resolução geométricos. Uma das maiores descobertas de Platão e da sua escola, foi a utilização da análise como método de prova e, como um verdadeiro filósofo, Platão transformou a lógica instintiva em um consciente e legítimo método.
	<u>Escola de Alexandria</u> Fundador Euclides (300 a.C.)	Alexandria é uma cidade do Egito, que foi criada após a batalha de Queroneia <sup>5</sup> . Em pouco tempo Alexandria se transforma em um centro rico e influente, escolhido por Ptolomeu (general de Alexandre), para a criação da Universidade de Alexandria, chamando a atenção de vários sábios. A cidade transforma-se no maior centro intelectual do mundo antigo, assim permanecendo por quase dez séculos. Euclides é convidado para fundar, junto à Universidade, a escola de Matemática de Alexandria. A escola tinha como objetivo desenvolver estudos e pesquisas voltados para o conjunto dos 13 livros de Euclides, denominado “Os Elementos”, desenvolvidos por Euclides e aperfeiçoadas na escola de Alexandria.

Fonte: adaptado de Cajori (2007).

Cajori (2007) aponta que no período que sucedeu a morte de Euclides a escola de Matemática de Alexandria, apesar de continuar com os estudos, não voltou a se destacar. Porém, de acordo com Eves (1992), a Geometria Grega volta a ter destaque com Arquimedes (287 a.C.), o qual produziu cerca de dez tratados matemáticos que sobrevivem até os dias atuais, sendo três de geometria plana e dois sobre geometria espacial. De acordo com o autor, estudiosos acreditam que Arquimedes estudou em Alexandria, pelo profundo conhecimento do trabalho matemático apresentado. Cerca de quarenta anos depois de Arquimedes, brilhou Apolônio, que segundo Cajori (2007), estudou em Alexandria com os sucessores de Euclides, onde desenvolveu a obra *Secções Cônicas*, recebendo o título de “o grande geômetra”.

Conforme já destacado anteriormente, Eves (1992) salienta que os três geômetras gregos mais importantes da antiguidade foram Euclides (300 a.C.), Arquimedes (287 a.C.) e Apolônio (225 a.C.). O autor afirma, ainda, que não é exagero admitir que as descobertas realizadas em Geometria, até os dias de hoje, têm origem nos trabalhos destes geômetras.

<sup>5</sup> Batalha de Queroneia ocorreu no final do século IV, quando os estados Gregos enfraquecidos pelos distúrbios internos e pela rivalidade existente entre eles, acabam sendo conquistados por Felipe da Macedônia, um tempo após, as tropas macedônias vencerem as atenienses, assume o trono, Alexandre filho de Felipe, cujo tinha objetivo de estender o domínio de terras, por onde passavam, iam surgindo novas cidades e uma delas foi Alexandria, no Egito (PAVANELLO, 1989).

Segundo Eves (1992), após a morte dos grandes geômetras, a época de ouro da geometria grega chegou ao fim, período este, que coincidiu com a invasão das tropas romanas na Grécia, em 146 a.C. De acordo com o autor, esta época ficou conhecida como improdutiva na ciência matemática, posto que os avanços alcançados por Euclides, Arquimedes e Apolônio, foram negligenciados pelos romanos.

O Império Romano só começa a perder forças na metade do século V, com a chegada dos bárbaros do Ocidente e, por consequência, inicia-se um colapso no mercado de escravos, afetando a economia romana, e inaugurando o período denominado Idade Média europeia, período este que se estende até o século XI (EVES, 1992).

Eves (1992) enfatiza que durante este período, a civilização na Europa ocidental chegou a níveis baixíssimos de conhecimento, o ensino quase deixou de existir, e o saber grego por pouco não desapareceu. Durante este período estéril do ensino os povos do Oriente, especialmente hindus e árabes, tornaram-se os maiores fornecedores de saber para a Matemática. Embora os hindus se sobressaíssem na computação e na Álgebra, em Geometria não produziram nada de relevante (EVES, 1992).

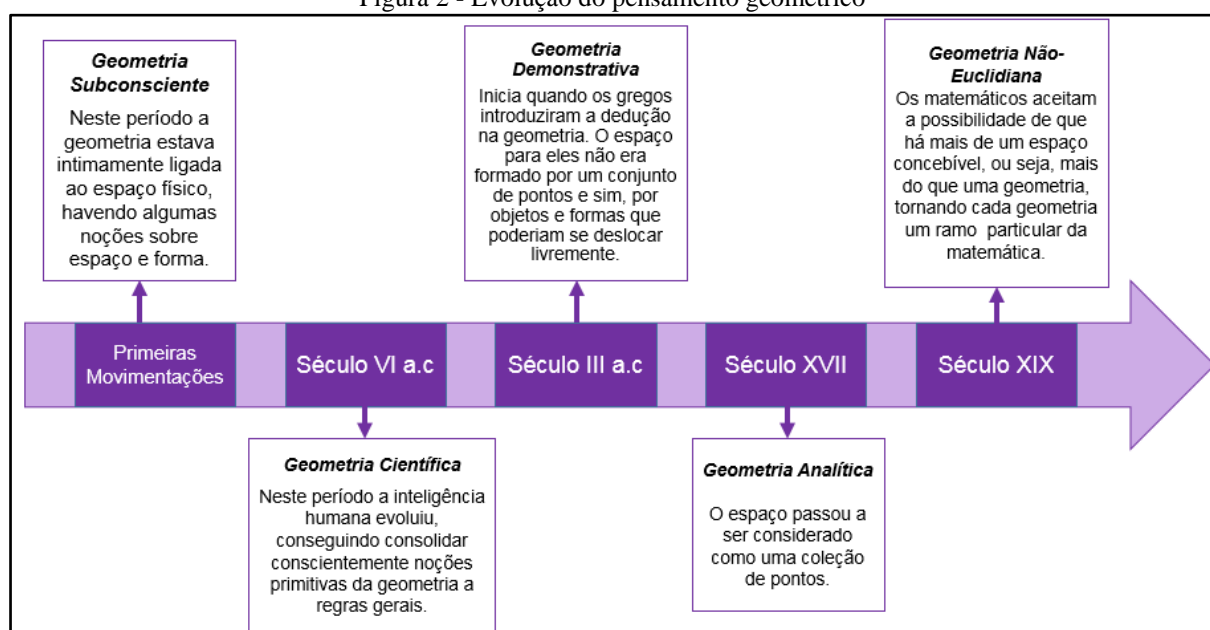
Já os árabes, ao se apropriarem do saber grego e hindu, contribuíram com muitos estudos nas áreas de astronomia, medicina e matemática. Eves (1992) salienta que, se não fosse o trabalho dos árabes em traduzir os estudos para o latim, parte da história teria se perdido ao longo da Idade Média. É na parte final do século XI que os clássicos gregos da ciência e da matemática voltam à Europa, no entanto, de acordo com o autor, até o século XIV o conhecimento matemático foi improdutivo. É no século XV, que o conhecimento volta a difundir-se em uma velocidade sem precedentes por toda a Europa, dando início ao período do Renascimento (EVES, 1992). Neste período, também, iniciava-se um novo ramo da geometria, a teoria geométrica subjacente à perspectiva, ganhando espaço no século XVIII como a geometria projetista, teoria esta desenvolvida por um grupo de matemáticos franceses cujo motivador foi Gérard Desargues, engenheiro e arquiteto. Segundo Eves (1992), o desenvolvimento da geometria projetista foi influenciado pela necessidade dos artistas e arquitetos do Renascimento em compreender a construção das projeções que eram feitas em seus quadros e telas, entretanto, este trabalho foi ignorado pelos matemáticos da época. No mesmo período, Descartes e Pierre de Fermat concebem a geometria analítica, tal como a conhecemos até hoje, incluindo o desenvolvimento do simbolismo algébrico (CAJORI, 2007).

A partir deste período, inicia-se um período altamente produtivo quanto ao desenvolvimento da matemática e, sem dúvida, o mais notável foi a invenção do cálculo no fim do século XVII, por Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Von Leibniz. A aplicabilidade dessa

descoberta mostrou-se eficaz para desfazer inúmeros problemas no campo da geometria, posto que, parte da geometria foi estudada através do Cálculo, dando início a Geometria Diferencial (EVES, 1992).

Eves (1992) destaca que os avanços não pararam, Carl Friedrich Gauss (1777-1855) introduziu o método de estudar a geometria diferencial de curvas e superfícies por meio de representações paramétricas desses objetos e, Bernhard Riemann desenvolveu aplicações significativas na teoria da relatividade e em outras partes da física moderna, refletindo as tendências da matemática dos tempos atuais focada na maior generalização possível. Já no século XIX, os matemáticos aceitam que haveria mais do que um espaço concebível, um lugar onde as figuras poderiam ser comparadas entre si sendo que, neste momento, a geometria passa a ser considerada como o estudo das propriedades das transformações dos espaços, dando início as tentativas de deduzir os postulados do livro Elementos de Euclides, aceitando a possibilidade de que haja mais de uma Geometria, ou seja, mais de um espaço concebível, originando as Geometrias não Euclidianas. Diante do exposto, apresenta-se na Figura 2, uma síntese da evolução do pensamento geométrico, tomando como referência Eves (1992).

Figura 2 - Evolução do pensamento geométrico



Fonte: Eves (1992).

Essa breve retomada do desenvolvimento histórico da Geometria teve por objetivo sintetizar e salientar os avanços ocorridos na Geometria ao longo dos séculos, bem como, o progresso do pensamento geométrico na humanidade, posto que, na antiguidade não se imaginava em espaço físico e hoje se reconhece que haja mais de um espaço concebível.

No que segue, será destacado o movimento que influenciou o ensino da Geometria no mundo e no Brasil, o Movimento Matemática Moderna (MMM).

## 2.2 O ENSINO DA GEOMETRIA E A INFLUÊNCIA DO MOVIMENTO MATEMÁTICA MODERNA (MMM)

O ensino da Geometria passou por distintas fases nas últimas décadas. Pires (2008), destaca três marcos curriculares, no Brasil, que influenciaram o ensino da Geometria: primeiro, o Movimento Matemática Moderna (1965 a 1980), seguido pelas diretrizes que buscavam contrapor-se ao Movimento Matemática Moderna, liderada por Secretarias Estaduais e Municipais de Ensino (1980 a 1994) e o projeto nacional de reforma curricular, que se refere aos Parâmetros Curriculares Nacionais (a partir de 1995). Pode-se dizer que, atualmente, com a constituição da Base Nacional Comum Curricular (BNCC)<sup>6</sup>, se está entrando em uma nova fase da organização curricular no Brasil, porém, entende-se que é muito cedo, ainda, para se afirmar algo sobre possíveis alterações no que se refere a Geometria e seu ensino e aprendizagem, decorrente da implantação da BNCC.

No âmbito do ensino da Geometria, Eves (1992) e Fainguelernt (1999) apontam que esse conhecimento, que se desenvolveu durante séculos e passou por diferentes culturas, deve se fazer presente em todo o currículo de Matemática na Educação Básica. Contudo, Pavanello (1989,1992), Lorenzato (2006), Barbosa (2011) ponderam que a Geometria não tem recebido o destaque adequado no currículo Matemático, em parte, como consequência do Movimento Matemática Moderna (MMM).

O Movimento Matemática Moderna surge no século XIX, na Europa, em função de vários fatores, dentre eles, as mudanças ocorridas na economia, os avanços tecnológicos e a expansão da indústria, objetivando a formação técnica e humanista, eliminando assim, o alto nível de abstração e complexidade da “velha matemática” e, assim, modernizá-la (BURIGO, 1990). De acordo com a autora,

de um modo geral, é possível dizer que "moderno" significava "eficaz", de "boa qualidade", opondo-se a "tradicional" em vários momentos. Enfim, era uma expressão carregada de valorização positiva, numa época em que o progresso técnico ele mesmo era depositário, no modo do pensar dominante, das expectativas de resolução dos principais problemas econômicos e sociais e de conquista do bem-estar material para o conjunto da sociedade (BURIGO, 1990, p.259).

---

<sup>6</sup> A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento que visa nortear o que é ensinado nas escolas do Brasil inteiro, englobando todas as fases da educação básica, desde a Educação Infantil até o final do Ensino Médio.

Clara e Pinto (2005) apontam que a proposta de modernização para o ensino da Matemática, têm início no IV Congresso Internacional de Matemática realizado em Roma, em 1908, quando foi criada a Comissão Internacional do Ensino de Matemática – *Internationale Mathematische Unterrichtskommission* (IMUK) que, a partir de 1954, passou a ser denominada ICMI – *International Commission on Mathematical Instruction*. O Brasil passa a participar da comissão do IMUK quatro anos depois, em 1912, no V Congresso Internacional de Matemática. Segundo Schubring (2004), o congresso realizado em Roma, visava analisar métodos e instruções matemáticas adotadas em diversos países, considerados desenvolvidos e, assim, organizar e desenvolver um documento comparativo destes métodos. As autoras destacam que neste período, a IMUK realizou várias reuniões para discutir a proposta aprovada no IV Congresso, perdurando até 1914, sendo que após um período de pausa os encontros e discussões foram retomados em 1920 (CLARA; PINTO, 2005).

No Brasil, as discussões apontadas na IMUK se refletiram na proposta apresentada em 1928, pelo Professor Euclides Roxo, visando a unificação das matemáticas, tornando a Álgebra, Geometria e Aritmética em uma só disciplina, denominada Matemática.

Outra iniciativa de modernização da matemática escolar, ocorreu em meados de 1930, com a formação do grupo *Bourbaki*. O *Bourbaki* era um grupo de matemáticos, na sua maioria franceses, que usavam o codinome *Nicolas Bourbaki*, para publicação de trabalhos, com objetivo de apresentar uma Matemática avançada, mais contextualizada, menos complexa, mais acessível a todos os alunos, propondo uma renovação da “matemática velha” (CLARA; PINTO, 2005).

As propostas do grupo *Bourbaki* foram de grande impacto e importância, posto que, os trabalhos produzidos pelo grupo se tornaram referência na elaboração da proposta do Movimento Matemática Moderna (MMM), a partir do final da década de 1950 na Europa. No Brasil, o MMM começa a tomar forma no início da década de 60, sob a influência das ideias modernizadoras que circulavam na Europa e nos Estados Unidos. O movimento se intensifica no Brasil, influenciando assim, o surgimento de grupos de professores que apoiavam o movimento pelo país.

Segundo Fiorentini (1995), em 1961 é criado em São Paulo o Grupo de Estudos sobre o Ensino da Matemática (GEEM) e no Paraná o Núcleo de Estudo e Difusão do Ensino da Matemática (NEDEM), com o objetivo inicial de discutir as questões que envolveram o Movimento. Os dois grupos GEEM e NEDEM, foram fundados no início da década de 1960 e tiveram grande influência na disseminação do MMM em seus estados.

No Rio Grande do Sul, as primeiras iniciativas de formação de professores relacionadas ao movimento foram realizadas antes mesmo da criação de um grupo de estudo. Porém, em 1970, foi constituído o GEEMPA - Grupo de Estudos sobre o Ensino de Matemática de Porto Alegre, potencializando as iniciativas do movimento no Rio Grande do Sul. O GEEMPA atuou intensamente na formação de professores do primeiro e segundo grau, com apoio da Secretária de Educação (BÚRIGO; FISCHER; SANTOS, 2008). Pereira (2010) salienta que os estudos e discussões realizadas pelo GEEMPA ganharam circulação nacional em 1973. De acordo com o autor, a Revista de Ensino elaborada pelo grupo de pesquisa, foi referência para professores que desejavam experimentar inovações didático-metodológicas, baseadas no MMM (PEREIRA, 2010).

No período do movimento houveram publicações de coleções de livros didáticos com base na Matemática Moderna, tendo em vista democratizar as ideias modernizadoras advindas do movimento, bem como a formação de muito professores de Matemática (MIORIM, 1998).

De acordo com Clara e Pinto (2005), o Movimento Matemática Moderna ocorrido no Brasil, está entre os momentos mais importantes da história na Educação do país. Porém, Pires (2000) destaca, que os professores não estavam preparados para as propostas de trabalho do movimento, o que fragilizou o ensino da Geometria.

Pavanello (1993), pondera que a Geometria assumiu uma posição secundária no ensino após o MMM, perdendo seu caráter intuitivo e pautando-se no formalismo. Para Lorenzato (1995), o Movimento gerou o abandono parcial ou total do ensino da Geometria, criando lacunas no seu ensino. Alinhado ao ponto de vista dos autores, Soares (2001) aponta que o MMM levou a reestruturação do ensino da Geometria, incluindo concepções distintas da euclidiana no currículo Matemático.

### 2.3 A GEOMETRIA NO ENSINO MÉDIO

Tendo como principal objetivo investigar o desenvolvimento dos conhecimentos geométricos junto a estudantes do terceiro ano do Ensino Médio, considerando a utilização de materiais e atividades organizadas e estruturadas para tal, percebeu-se à necessidade de se refletir em torno do “que” ensinar em Geometria e “como” ensinar.

Nesse contexto, buscou-se embasamento no que preconizam os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 1997), bem como os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio PCN+ (BRASIL, 2002), a Matriz Curricular do Exame Nacional de Ensino

Médio ENEM<sup>7</sup> (BRASIL, 2016). Embora a matriz do ENEM não se constitua em documento que oriente formalmente o currículo, é muito presente na escola, atualmente, pois estabelece as competências e habilidades exigidas no Exame Nacional do Ensino Médio, o qual é tomado como referência para acesso em Instituições de Ensino Superior, tanto pelo PROUNI<sup>8</sup> (com a nota), como pelas próprias avaliações de acesso das instituições, o que levou a considerá-la nesta investigação. Ainda, se julgou pertinente lançar um olhar para Base Nacional Comum Curricular BNCC<sup>9</sup> (BRASIL, 2016).

A Geometria é parte integrante dos currículos de Ensino Fundamental e Ensino Médio e, conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997), se constitui em área de grande importância no currículo de Matemática. O documento enfatiza que a exploração de noções geométricas na sala de aula pode contribuir para a aprendizagem de números e medidas, pois a partir da Geometria o aluno pode ser estimulado a perceber semelhanças e diferenças e identificar regularidades. Os PCN, salientam, também, que a capacidade de se deslocar mentalmente e de perceber o espaço de diferentes maneiras são necessárias para a coordenação espacial dos estudantes (BRASIL, 1997).

Ainda, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997) os alunos da Educação Básica, devem saber utilizar corretamente instrumentos de medição, além de fazer e validar conjecturas, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades, que ajudem a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo. Assim, a Geometria desenvolvida ao longo do Ensino Fundamental pode, e deve ser ampliada e aprofundada no Ensino Médio, uma vez que, “[...] o Ensino Médio, etapa final da Educação Básica, tem como finalidade, a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental” (BRASIL, 2011, p.169).

Considerando que os conhecimentos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática, o PCN+ (BRASIL, 2002) busca, por meio de unidades temáticas, apresentar do ensino da Geometria no Ensino Médio, propondo competências e habilidades para serem alcançadas, visando, sempre, a construção do pensamento geométrico.

---

<sup>7</sup> O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) é uma prova elaborada pelo Ministério da Educação para verificar o domínio de competências e habilidades dos estudantes que concluíram o Ensino Médio. O Enem é composto por quatro provas de múltipla escolha, com 45 questões cada, e uma redação.

<sup>8</sup> PROUNI é a sigla para Programa Universidade para Todos. Esse é um programa que promove a acessibilidade à educação para quem tem renda baixa. Por meio dele, é possível conseguir bolsas integrais ou parciais em Universidades ou Faculdades particulares cadastradas no programa em todo o país, com a nota do estudante no exame.

<sup>9</sup> Apesar da BNCC do Ensino Médio não ter sido ainda implantada no país buscou-se lançar um olhar no documento disponibilizado em 2016 para o ensino de Matemática, mais especificamente, para o que está sendo proposta em relação a Geometria no Ensino Médio.

Assim, para o desenvolvimento da Geometria no Ensino Médio, são apontadas quatro unidades temáticas: geometrias plana, espacial, métrica e analítica, as quais buscam consolidar as competências, bem como desenvolver a compreensão e ampliar a percepção de espaço, habilidade esta essencial para a compreensão da Geometria Espacial além de permitir perceber as relações de semelhanças e diferenças das representações planas e espaciais. As unidades temáticas mencionadas, constantes no documento PCN+ (BRASIL, 2002), bem como as habilidades a serem desenvolvidas, são apresentadas no quadro da Figura 3.

Figura 3 - Competências e Habilidades propostas nas Unidades Temáticas a serem desenvolvidos no Ensino Médio

Unidade Temática	Habilidades a serem desenvolvidas
Geometria Plana	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Representações de figuras.</li> <li>• Identificar dados e relações geométricas relevantes na resolução de situações-problema.</li> <li>• Analisar e interpretar diferentes representações de figuras planas, como desenhos, mapas, plantas de edifícios etc.</li> <li>• Usar formas geométricas planas para representar ou visualizar partes do mundo real.</li> <li>• Utilizar as propriedades geométricas relativas aos conceitos de congruência e semelhança de figuras.</li> <li>• Fazer uso de escalas em representações planas.</li> </ul>
Geometria Espacial	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Elementos dos poliedros, sua classificação e representação; sólidos redondos; propriedades relativas à posição: intersecção, paralelismo e perpendicularismo; inscrição e circunscrição de sólidos.</li> <li>• Usar formas geométricas espaciais para representar ou visualizar partes do mundo real, como peças mecânicas, embalagens e construções.</li> <li>• Interpretar e associar objetos sólidos a suas diferentes representações bidimensionais, como projeções, planificações, cortes e desenhos.</li> <li>• Utilizar o conhecimento geométrico para leitura, compreensão e ação sobre a realidade.</li> <li>• Compreender o significado de postulados ou axiomas e teoremas e reconhecer o valor de demonstrações para perceber a Matemática como ciência com forma específica para validar resultados.</li> </ul>
Métrica	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Áreas e volumes; estimativa, valor exato e aproximado.</li> <li>• Identificar e fazer uso de diferentes formas para realizar medidas e cálculos.</li> <li>• Utilizar propriedades geométricas para medir, quantificar e fazer estimativas de comprimentos, áreas e volumes em situações reais relativos, por exemplo, de recipientes, refrigeradores, veículos de carga, móveis, cômodos, espaços públicos.</li> <li>• Efetuar medições, reconhecendo, em cada situação, a necessária precisão de dados ou de resultados e estimando margens de erro.</li> </ul>
Geometria Analítica	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Representações no plano cartesiano e equações; intersecção e posições relativas de figuras.</li> <li>• Interpretar e fazer uso de modelos para a resolução de problemas geométricos.</li> <li>• Reconhecer que uma mesma situação pode ser tratada com diferentes instrumentais matemáticos, de acordo com suas características.</li> <li>• Associar situações e problemas geométricos a suas correspondentes formas algébricas e representações gráficas e vice-versa.</li> <li>• Construir uma visão sistemática das diferentes linguagens e campos de estudo da Matemática, estabelecendo conexões entre eles.</li> </ul>

Fonte: PCN+ (BRASIL, 2002).



Observa-se que os eixos temáticos Geometria Plana e Geometria Espacial são voltados para identificação dos objetos geométricos (reconhecimento de elementos, representação e característica dos objetos geométricos) e, por meio da visualização e das propriedades dos objetos, o estudante pode validar, conjecturar relações e estratégias que ajudem a estruturar o desenvolvimento do pensamento geométrico. Já as habilidades voltadas a diferentes técnicas de cálculo dos objetos geométricos espaciais, bem como para relações métricas, estão destacadas na unidade Métrica. A Geometria Analítica não será aqui discutida em função de não se constituir no foco dessa investigação.

Já, a matriz curricular do ENEM (BRASIL, 2016) no que se refere a Geometria, apresentam as exigências, aptidões e conhecimentos necessários para os estudantes ao final do Ensino Médio, referindo-se à competência de: **Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela** (BRASIL, 2016).

Estabelecida a competência, a mesma é desdobrada em habilidades a serem desenvolvidas e apresentadas no momento da realização da prova sendo elas:

- Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.
- Identificar características de figuras planas e espaciais.
- Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.
- Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano. Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela (BRASIL, 2016).

Entende-se que tais habilidades devem ser trabalhadas e desenvolvidas no Ensino Médio, como uma continuidade e aprofundamento dos estudos realizados no Ensino Fundamental, propiciando ao estudante o desenvolvimento de noção de espaço e direção, bem como, organização do pensamento e raciocínio dedutivo.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) destaca, também, que no Ensino Médio se deve retomar, ampliar e sistematizar os conhecimentos geométricos estudados anteriormente, de modo a possibilitar aos estudantes a compreensão da estrutura lógica da geometria euclidiana (BRASIL, 2016). Desse modo, é possível perceber que a base nacional faz referência ao que já estava estabelecido nos Parâmetros Curriculares Nacionais e na matriz de referência do Exame Nacional do Ensino Médio.

Na BNCC, a Matemática está organizada em cinco unidades de conhecimento: Geometria, Grandezas e Medidas, Estatística e Probabilidade, Números e Operações, Álgebra e Funções. As unidades de conhecimento, no Ensino Médio, são organizadas em objetivos de aprendizagem e o desenvolvimento dos componentes, em cada uma delas, recebe uma ênfase diferente, dependendo do avanço na etapa, buscando garantir que os estudantes desenvolvam raciocínios cada vez mais sofisticados, em Matemática, ao longo dos anos de escolarização (BRASIL,2016).

Ainda sobre a BNCC, aponta-se que as tratativas sobre a mesma tiveram início em 2010, com discussões sobre o currículo que perpassava os ambientes educacionais. O Ministério da Educação, em parceria com o CONSED<sup>10</sup> e a UNDIME<sup>11</sup>, tendo as estratégias definidas, nomeou uma comissão de professores e especialistas para elaborar um documento preliminar com o objetivo de oferecer contribuições para o currículo realizado em sala de aula. Em relação à Geometria, a BNCC (BRASIL, 2016) define como um dos objetivos proporcionar ao estudante estratégias que possibilitem, elaborar problemas e deduzir expressões de cálculo aplicando-os, preferencialmente, em situações cotidianas, ratificando, em partes, o que os PCN já apontavam.

Nos quadros das Figuras 4 e 5, são apresentadas as Unidades Curriculares de Ensino apontadas pela BNCC para o Ensino Médio, as quais, se entende, dizem respeito ao ensino de Geometria. No quadro da Figura 4, em cada unidade, é destacado a que Geometria se referem: Analítica, Plana e Espacial.

Figura 4 - Unidades Curriculares de Ensino - Geometria

Unidades	1º ano	2º ano	3º ano
Unidade Curricular I (Geometria Analítica)	(EM11MT01) <sup>12</sup> Compreender o conceito de vetor, tanto do ponto de vista geométrico, quanto do ponto de vista algébrico, caracterizado por suas coordenadas.		

<sup>10</sup> O Conselho Nacional de Secretários de Educação – CONSED, fundado em 25 de setembro de 1986, é uma associação de direito privado, sem fins lucrativos, que congrega, por intermédio de seus titulares, as Secretarias de Educação dos Estados e do Distrito Federal.

<sup>11</sup> A União Nacional dos Dirigentes Municipais de Educação (UNDIME) é uma associação civil sem fins lucrativos, fundada em 1986 e com sede em Brasília/ DF.

<sup>12</sup> A BNCC utiliza-se de siglas para referenciar as unidades curriculares em cada ano do Ensino Médio, por exemplo, EM11MT01 (EM: Ensino Médio, 11: Unidade Curricular I, MT: Matemática, 01: 1º ano do Ensino Médio).

Unidades	1º ano	2º ano	3º ano
Unidade Curricular II (Geometria Plana)	(EM12MT01) Compreender o teorema de Tales e aplicá-lo em demonstrações e na resolução de problemas, incluindo a divisão de segmento de partes proporcionais.	(EM12MT02) Resolver e elaborar problemas utilizando a semelhança de triângulos e o teorema de Pitágoras.	(EM12MT03) Utilizar a noção de semelhança para compreender as razões trigonométricas no triângulo retângulo, suas relações em qualquer triângulo.
Unidade Curricular III (Geometria Espacial EM13MT01 e Geometria Plana)	(EM13MT01) <b>Estabelecer relações entre vistas ortogonais e representações em perspectiva de figuras geométricas espaciais e de objetos do mundo físico.</b>	(EM13MT02) Estabelecer relações entre as transformações isométricas e vetores no contexto do plano cartesiano.	(EM13MT03) Compreender mediatriz, bissetriz e circunferência como lugares geométricos, utilizando essa ideia para a construção de outras figuras geométricas planas, com o uso de régua e compasso e de <i>software</i> de geometria dinâmica.
Unidade Curricular IV (Geometria Analítica)	(EM13MT01) Resolver e elaborar problemas que envolvam o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos quaisquer no plano cartesiano, incluindo o estudo de pontos e segmentos notáveis do triângulo, entre outros.		
Unidade Curricular V (Geometria Plana EM15MT01 e Geometria Analítica)	(EM15MT01) Compreender a estrutura lógica da geometria euclidiana e demonstrar alguns teoremas como soma dos ângulos internos de polígonos, teorema de Pitágoras, casos de semelhança e de congruência de triângulos.	(EM15MT02) Estabelecer relação entre a representação geométrica de uma reta no plano cartesiano e os coeficientes de sua representação algébrica, inclusive, no contexto da função afim.	(EM15MT03) Estabelecer relação entre a representação geométrica de circunferências e os coeficientes de sua representação algébrica.

Fonte: BNCC (BASIL, 2016).

Na Unidade Curricular de Ensino - Geometria, destacada no quadro da Figura 4, se pode observar a ênfase dada ao ensino de conceitos das Geometrias Plana e Analítica ao longo do Ensino Médio. Sobre a Geometria Espacial é apresentado na Unidade Curricular III (EM13MT01), a importância dos estudantes compreenderem a relação das vistas ortogonais e das representações em perspectiva de relações espaciais, para que possam identificar objetos geométricos no mundo físico.

Já, os conceitos relacionados a Geometria Espacial recebem destaque na unidade de ensino - Grandezas e Medidas (quadro da Figura 4). Este destaque refere-se ao que se chama de “métrica”, ou seja, está voltada a procedimentos e resolução de problemas envolvendo medidas de área e perímetros de figuras planas e medidas de volumes e áreas de sólidos geométricos espaciais. Além disso, as unidades curriculares reforçam a necessidade do

estudante fazer relações com situações reais do seu cotidiano, corroborando com o que os PCN preconizam, objetivando que o estudante desenvolva um tipo de pensamento, o qual possibilite compreender, descrever e representar o mundo onde vive de forma organizada (BRASIL, 1997). No quadro da Figura 5 é destacado, em negrito, referências feitas a Geometria Espacial.

Figura 5 - Unidades Curriculares de Ensino – Grandezas e Medidas

Unidades	1º ano	2º ano	3º ano
Unidade Curricular I	(EM11MT01) Reconhecer grandezas formadas pela relação entre duas outras grandezas – velocidade, densidade e energia, entre outras – e aplicar esse conhecimento em situações que envolvam proporcionalidade entre outras áreas como Física, Química, Biologia e Geografia.		
Unidade Curricular II	(EM12MT01) Resolver e elaborar problemas envolvendo medidas de áreas e de perímetros de figuras planas, incluindo o círculo e suas partes deduzindo expressões de cálculo, aplicando-as, preferencialmente, em situação cotidianas.	<b>(EM12MT02) Resolver e elaborar problemas envolvendo medidas do volume e de área de superfície de cilindros e prismas retos, deduzindo expressões de cálculo, aplicando-as, preferencialmente, em situação cotidianas.</b>	
Unidade Curricular III		<b>(EM13MT02) Definir e aplicar o Princípio de Cavalieri e utilizá-lo para compreender e estabelecer as expressões para o cálculo de medidas de volume de cilindros, prismas, pirâmides e cones e aplicar na resolução de problemas.</b>	
Unidade Curricular IV		<b>(EM13MT01) Resolver e elaborar problemas envolvendo medidas de área de superfície e cilindros, prismas, pirâmides e cones, preferencialmente, fazendo uso de situações cotidianas.</b>	

Unidades	1º ano	2º ano	3º ano
Unidade Curricular V			(EM15MT03) Resolver e elaborar problemas envolvendo medidas de área da superfície e de volume de cilindros, prismas, pirâmides, cone e esferas.

Fonte: BNCC (BRASIL, 2016).

Pelo disposto na Unidade Grandezas e Medidas como já apontado, é possível perceber a ênfase, no que se refere às medidas, bem como, a constituição dos sólidos geométricos, destaque este, evidenciado nas descrições das unidades. Assim, ressalta-se que tanto os Parâmetros Curriculares, como a Matriz Curricular do ENEM e a Base Nacional Comum Curricular preconizam o desenvolvimento e a importância do pensamento geométrico na Educação Básica, o que remete a importância de se investigar modos e trajetórias para o seu ensino. Porém, entende-se que tais modos e trajetórias necessitam de embasamento teórico que os norteiam. Nesse sentido encontra-se no modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele possibilidades de articulação do que ensinar e como ensinar em Geometria motivo pelo qual se passa a destacar aspectos desse modelo.

#### 2.4 MODELO DE DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMETRICO DE VAN HIELE

O modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele, teve origem nas respectivas teses de doutorado de Dina van Hiele-Geldof e de seu marido, Pierre van Hiele, na Universidade de Utrecht, Holanda, em 1957. Porém, quem desenvolveu e disseminou a teoria em publicações posteriores foi Pierre, pois Dina faleceu logo, após concluir a tese (VILLIERS, 2010).

De acordo com Hamazaki (2004), o casal Van Hiele traçou um modelo baseado na valorização da aprendizagem da Geometria numa evolução gradual, global e construtiva. Segundo a autora, a evolução é considerada gradual, pois, os Van Hiele ponderam que linguagem geométrica, raciocínio e intuição são adquiridos de forma gradativa; é global uma vez que propriedades e figuras se inter-relacionam, presumindo vários níveis que conduzem a significados distintos; é construtiva por subentenderem que o próprio aluno tem que construir os seus conceitos.

O modelo difundiu-se por vários países e muitos estudos já foram publicados apresentando resultados positivos em relação a utilização do modelo como orientador do ensino e aprendizagem da Geometria Plana (LOPES e NASSER, 1996; BENTO, 2010; ALBA, 2015).

Segundo Villiers (2010), Pierre buscava, em sua pesquisa, compreender o porquê da dificuldade dos alunos em aprender Geometria. Já a tese de Dina, por sua vez, versava sobre um experimento educacional, que propunha uma ordenação do conteúdo de Geometria e atividades a serem trabalhadas proporcionando assim, o aprendizado dos alunos. Assim a principal característica da teoria é a distinção de diferentes níveis de pensamentos com relação ao desenvolvimento da compreensão dos alunos acerca da Geometria. O modelo prevê também fases sequenciais de aprendizagem e características as quais orientam tomadas de decisões no processo de ensino (VILLIERS, 2010).

O autor destaca, ainda, que a falha na compreensão dos conceitos geométricos ocorre pelo fato do currículo proposto estar em um nível mais alto do que o dos estudantes, ou seja, eles não conseguem entender o que é explicado pelos professores e os professores, não conseguem compreender o porquê dos alunos não apreenderem (VILLIERS, 2010).

O modelo elaborado pelos Van Hiele está estruturado em cinco níveis de compreensão, descrevendo características do processo de pensamento, oportunizando avaliar e identificar, por meio desses níveis e das habilidades descritas em cada um, o nível de desenvolvimento do pensamento geométrico e a aprendizagem adquirida pelo estudante.

Segundo Lopes e Nasser (1996), a ideia preliminar desse modelo é que os alunos progredam a partir de uma sequência de níveis de compreensão de conceitos, no qual cada nível caracteriza-se por relações entre objetos de estudo e linguagem própria.

Porém, o modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele vai além da descrição de níveis, abrangendo uma descrição das características do modelo e fases de aprendizagem. Todos esses elementos do modelo passam a ser descritos no que segue. No que se refere aos níveis, o modelo estabelece cinco de compreensão: visualização, análise, dedução informal, dedução formal e rigor.

Sendo que suas características gerais podem ser descritas da seguinte maneira, de acordo com Crowley<sup>13</sup> (1994).

---

<sup>13</sup> Na literatura encontram-se diferentes maneiras de enumerar os níveis do modelo, 0-4 ou 1-5. Será utilizado aqui, o modelo adotado por Crowley (1994), a qual refere-se ao nível de Visualização, como nível 1, e termina com o nível de Rigor, nível 5.

- **Nível 1 – Visualização/ Reconhecimento:** Percepção de espaço como algo que existe no entorno; conceitos geométricos vistos como entidades totais, e não como entidades que têm componentes ou atributos; identificação de formas específicas e sua reprodução; aprendizagem de um vocabulário básico.
- **Nível 2 – Análise:** A partir da observação e experimentação, os alunos começam a perceber as características das figuras geométricas e a identificar suas propriedades; reconhecem as figuras por suas partes. Todavia, neste nível, os estudantes ainda não conseguem explicar as relações entre propriedades, e fazer a inclusão de classes.
- **Nível 3 – Dedução Informal:** Conseguem fazer inter-relações de propriedades entre diferentes figuras; são capazes de deduzir propriedades e reconhecer classes de figuras; fazem inclusão de classes, compreendem o significado das definições; acompanham uma prova informal, mas não tem condições de fazê-la.
- **Nível 4 – Dedução Formal:** Conseguem deduzir informações a partir de informações dadas; fazem provas formais; tem domínio do processo dedutivo; fazem inter-relações entre axiomas, postulados, definições, teoremas e demonstrações; é capaz de construir demonstrações de diferentes formas.
- **Nível 5 – Rigor:** Conseguem compreender e utilizar diferentes sistemas axiomáticos, assim como, compreender as Geometrias não-euclidianas.

De acordo com Villiers (2010), a transição do nível 1 para o nível 2 envolve uma reorganização do pensamento geométrico, não tanto abstrato, mas sim simbólico, visto que, no nível de análise, o estudante deve possuir domínio de uma linguagem padronizada, além de reconhecer as propriedades existentes nos objetos geométricos. Entretanto, de acordo com o autor, a reestruturação, não é demonstrada apenas pela aquisição de uma linguagem, mas sim pelo reconhecimento das relações entre os novos conceitos e os conceitos já existentes, isto é, a transição do nível de visualização para o nível de análise é muito mais do que a verbalização do conhecimento intuitivo, é um refinamento dos conceitos e reestruturação do conhecimento.

Van Hiele (1986) salienta que, para que estudante alcance o nível de Dedução Informal (nível 3 do modelo), a rede de relações do nível anterior (nível 2 – Análise) devem ter sido estabelecidas de maneira significativa. Assim, o estudante conseguirá fazer relações entre as propriedades, compará-las, associá-las, distingui-las, chegando a visualizar as inclusões de classe existentes entre os objetos geométricos, além de ser capaz de identificar determinadas propriedades em algumas demonstrações, conseguindo assim, acompanhá-las.

O nível de Dedução Informal é apontado por Van Hiele (1986) como o momento propício para o desenvolvimento do raciocínio lógico, contanto que tenham ocorrido as redes de relações eficazes nos níveis anteriores, isto é, para cada nível indicado deveriam ter sido realizados situações que propiciassem o aluno alcançar as habilidades estabelecidas pelo modelo, para que assim, ocorresse o progresso sem lacunas.

De acordo com Villiers (2010), o pensamento geométrico constituído pelo estudante ao chegar no nível de Dedução Formal, quarto nível do modelo, propicia a ele a construir e realizar provas relacionadas a níveis anteriores, além de comparar diferentes formas de demonstração e distinguir suas características. Quanto ao nível de rigor, o autor pondera, ser o ápice do modelo, proporcionado pelas relações realizadas nos níveis anteriores, quando realizadas por completo, com transições sem falhas, atingindo assim, um domínio de conhecimento e de raciocínio elevado, possibilitando a construção de demonstrações formais, além de fazer comparações axiomáticas.

Ainda, quanto aos níveis do modelo, Hoffer (1981) aponta habilidades a serem desenvolvidas nos diferentes níveis, as quais, segundo o autor seriam, “[...] habilidades que poderiam ser esperadas dos alunos em diferentes níveis de seu desenvolvimento em Geometria” (HOFFER, 1981, p.9). As distintas habilidades destacadas pelo autor são: visual, verbal, desenho ou gráfica, lógica e aplicação, conforme apresentado no quadro da Figura 6.

Figura 6 - Habilidades a serem desenvolvidas nos níveis do modelo de Van Hiele

<b>Tipo de Habilidade</b>	<b>Descrição</b>
Habilidade Visual	Reconhecer figuras geométricas em um desenho; reconhecer informações encontradas em uma figura; perceber uma figura como parte da outra; identificar propriedades de uma figura; reconhecer inter-relações e propriedades entre figuras distintas; a partir de uma figura deduzir outras informações.
Habilidade Verbal	Associar o nome correto a figura indicada; detalhar formalmente as diversas propriedades de uma figura; indicar corretamente as definições; elaborar expressões apresentando inter-relação entre as figuras; consegue perceber a diferença entre definições, teoremas e axiomas.
Habilidades Desenho ou Gráfica	Consegue criar esquemas de figuras e identificar corretamente as partes dadas; consegue indicar o desenho a partir das propriedades apresentadas; a partir de uma figura, é capaz de construir outras figuras pertinente a primeira
Habilidade Lógica	Entender as diferenças e semelhanças que existem entre as figuras; perceber a preservação da forma de uma figura independente da sua posição; perceber que existem diferentes tipos de classificação de figuras; verificar que é possível distinguir uma figura pelas suas propriedades; determinar se uma classe de figuras está contida em outra por meio de suas propriedades.
Habilidades Aplicação	Reconhecer, nos elementos do meio ambiente, formas geométricas; nos elementos do meio ambiente perceber propriedades geométricas; compreender o conceito de um modelo matemático que retrata relações entre objetos; a partir de informações concedidas ou adquiridas consegue inferir propriedades aos objetos e solucionar problemas.

Fonte: adaptado de Hoffer (1981).



À medida que se conhecem as relações entre o tipo de conhecimento e o tipo de habilidades necessárias para a assimilação de cada um desses tipos de conhecimento, o professor passa a ter ferramentas para a compreensão dos processos que os alunos utilizam para a efetiva compreensão e resolução dos problemas apresentados ao longo do trabalho com a Geometria (NASSER, 1997).

Além de fornecer a compreensão daquilo que há de específico no modelo de pensamento geométrico, de acordo com Crowley (1994), os Van Hiele identificaram propriedades sequencial, avanço, intrínseco e extrínseco, linguística e combinação inadequada, as quais caracterizam o modelo e que podem orientar a tomada de decisões dos docentes quanto ao ensino. As características de tais propriedades passam a ser apresentadas:

- **Sequencial:** para haver a progressão de nível, é necessário que tenha ocorrido compreensão dos conceitos trabalhados no nível anterior ( $n-1$ ), para que este aluno possua habilidades necessárias para avançar de nível ( $n$ ).
- **Avanço:** a progressão (ou não) de um nível para o outro depende mais do conteúdo e dos métodos de instrução recebidos, do que a maturidade do aluno. Muitas vezes não há compreensão por parte do aluno, porque o assunto ou é reduzido a um nível inferior, prejudicando entendimentos futuros, ou apontado em um nível extremo, onde não há compreensão do que foi proposto.
- **Intrínseco e Extrínseco:** os objetos inerentes de um nível, torna-se objetos de ensino no nível seguinte. Os objetos implícitos em um nível tornam-se explícitos no nível seguinte e sucessivamente.
- **Linguística:** cada nível possui suas habilidades e seus próprios símbolos linguísticos, ou seja, o que é considerado “correto” em um determinado nível, pode ser modificado em outro nível.
- **Combinação Inadequada:** se o aluno estiver em um determinado nível e a proposta do professor para a turma estiver em outro nível, o aprendizado e o progresso desejado podem não ocorrer.

Os Van Hiele afirmavam que o progresso ao longo dos níveis depende mais da instrução recebida do que a idade do estudante (CROWLEY, 1994). De acordo com a autora, os autores acreditavam que o processo de desenvolvimento do pensamento geométrico, poderia ser acelerado com o auxílio do docente e para tal, descreveram fases de aprendizagem que deveriam ser tomadas pelo professor em sala de aula proporcionando, assim, o avanço de nível dos estudantes. O processo, propõem fases de aprendizagem que, aliado a escolha do conteúdo, de

materiais e exercícios adequados, proporcionariam situações que favorecem o avanço de nível dos estudantes (CROWLEY, 1994).

- **Fase 1 – Informação:** Interação entre o professor e aluno sobre o material a ser estudado, esta interação visa identificar os conhecimentos prévios dos estudantes, sobre assunto a ser abordado.
- **Fase 2 – Orientação Dirigida:** Os estudantes exploram o assunto a ser estudado, através de materiais selecionados pelo professor, as atividades devem proporcionar respostas específicas e objetivas.
- **Fase 3 – Explicação:** O papel do professor é de observador e mediador da interação entre os estudantes, uma vez que, é através da troca de experiências entre os estudantes, que o professor poderá averiguar o conhecimento adquirido pelos estudantes.
- **Fase 4 – Orientação Livre:** O professor elabora tarefas constituídas de várias etapas, possibilitando diversas respostas, a fim de que o estudante ganhe experiência e autonomia.
- **Fase 5 – Integração:** O professor auxilia no processo de síntese, fornecendo experiências e observações globais, sem apresentar novas ou discordantes ideias.

O trabalho desenvolvido em cada nível deve percorrer todas as cinco fases de aprendizagem para que, no término da quinta fase, possibilite ao estudante alcançar um novo nível de pensamento. Segundo Crowley (1994) o antigo nível de raciocínio é substituído por um novo nível, e assim o estudante está apto a vivenciar as fases de aprendizagem no próximo nível.

Nasser e Sant’Anna (2010), destacam que as fases de aprendizagem descritas no modelo podem ocorrer simultaneamente ou em diferentes ordens, no entanto, a última fase de aprendizagem só deve se dar após as anteriores terem sido desenvolvidas, pois as anteriores fornecem a estrutura necessária para que a aprendizagem ocorra.

Embora o modelo de Van Hiele tenha sido concebido e pesquisado no âmbito da Geometria Plana, a presente pesquisa será desenvolvida com estudantes do Ensino Médio, os quais, teoricamente<sup>14</sup>, já passaram pelo processo de aprendizagem da Geometria Plana. Buscou-se, assim, estender as ideias e noções do modelo de Van Hiele para o desenvolvimento da Geometria Espacial.

---

<sup>14</sup> Embora na BNCC seja proposta o estudo de aspectos da Geometria Plana, de acordo com os PCN (BRASIL, 1997, 1998, 2002), a Geometria Plana era predominantemente desenvolvida no Ensino Fundamental.

### 2.4.1 Modelo de Van Hiele e o desenvolvimento da Geometria Espacial

O modelo de Van Hiele está voltado para o desenvolvimento do pensamento geométrico considerando a Geometria Plana, no entanto, buscou-se lançar um olhar, a partir do modelo para a Geometria Espacial. Logo, o que se apresenta nessa pesquisa é uma tentativa de estabelecer ou apontar características dos níveis do pensamento geométrico a serem desenvolvidos no âmbito do pensamento geométrico espacial. Já as propriedades e fases de aprendizagem do modelo, foram tomadas tais como estão postas no modelo de van Hiele pois, entende-se, que são orientações que podem ser utilizadas para o ensino de qualquer conteúdo.

No que segue, apresenta-se no quadro da Figura 7, os níveis preconizados pelo modelo de van Hiele, tendo como referência a Geometria Espacial a ser trabalhada no Ensino Médio.

Figura 7 - Geometria Espacial na perspectiva dos níveis de compreensão do modelo de van Hiele

<b>Nível/Descritor</b>	<b>Pensamento Geométrico Espacial/Habilidades</b>
<p><b>Visualização</b></p> <p>Percepção de espaço como algo que existe no entorno; conceitos geométricos vistos como entidades totais, e não como entidades que têm componentes ou atributos; identificação de formas específicas e sua reprodução; aprendizagem de um vocabulário básico.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Identifica figuras geométricas espaciais em objetos ou construções do seu entorno e em representações.</li> <li>• Identifica figuras geométricas no espaço e planificadas.</li> <li>• Constrói sólidos geométricos em cartolina, canudinhos, ou outros materiais.</li> <li>• Descreve figuras geométricas utilizando linguagem não padronizada (um cubo parece uma caixa), por exemplo.</li> </ul>
<p><b>Análise</b></p> <p>A partir da observação e experimentação, os alunos começam a perceber as características das figuras geométricas e a identificar as propriedades; reconhecem as figuras por suas partes. Todavia, neste nível, os estudantes ainda não conseguem explicar as relações entre propriedades, e fazer a inclusão de classes.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Identifica, classifica e compara os sólidos segundo suas características e propriedades.</li> <li>• Identifica e desenha um sólido no espaço, a partir de uma descrição oral ou escrita de suas propriedades.</li> <li>• Identifica o sólido de diferentes vistas.</li> <li>• Faz deduções superficiais a partir de exemplos.</li> <li>• Utiliza vocabulários e símbolos apropriados.</li> <li>• Resolve problemas geométricos que requeiram o conhecimento das propriedades dos sólidos no espaço e das relações geométricas.</li> </ul>
<p><b>Dedução Informal</b></p> <p>Consegue fazer inter-relações de propriedades entre diferentes figuras; são capazes de deduzir propriedades e reconhecer classes de figuras; fazem inclusão de classes, compreendem o significado das definições; acompanham uma prova informal, mas não tem condições de fazê-la.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Demonstra compreensão do significado do conceito, definições, propriedades, características de cada figura geométrica espacial.</li> <li>• Desenvolve e usa definições para descrever os sólidos.</li> <li>• Faz inclusão de Classes.</li> <li>• Apresenta argumentos informais, a partir de construções de sólidos ou desenhos.</li> <li>• Resolve problemas considerando as propriedades e inter-relações entre as figuras.</li> <li>• Identifica informações implícitas em determinado sólido espacial ou em alguma informação.</li> </ul>

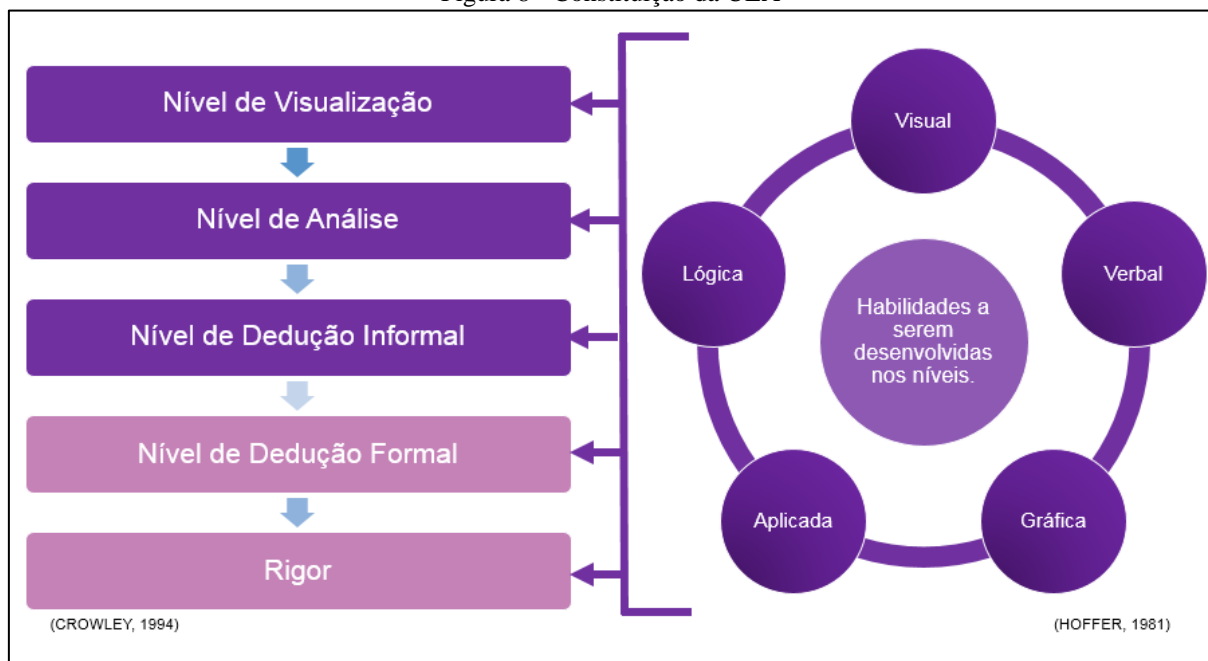
<p><b>Dedução Formal</b> Consegue deduzir informações a partir de informações dadas; fazem provas formais; tem domínio do processo dedutivo; fazem inter-relações entre axiomas, postulados, definições, teoremas e demonstrações; é capaz de construir demonstrações de diferentes formas.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Identifica o que é dado e o que deve ser provado em uma situação ou problema.</li> <li>• Prova as relações desenvolvidas no nível anterior (Dedução Informal).</li> <li>• Utiliza diferentes técnicas de demonstração.</li> <li>• Compara diferentes demonstrações utilizando argumentação de uma para realizar outra.</li> </ul>
<p><b>Rigor</b> Consegue compreender e utilizar diferentes sistemas axiomáticos, assim como, compreender a Geometria não-euclidiana.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Faz provas formais.</li> <li>• Comparação de sistemas baseados em diferentes axiomas.</li> <li>• Neste nível as geometrias não-euclidianas são compreendidas.</li> </ul>

Fonte: Rodrigues; Kaiber (2016).

Com bases nas características e habilidades indicadas nos níveis do modelo adaptado, foram desenvolvidas as atividades para a Unidade de Ensino e Aprendizagem proposta nessa pesquisa. Tais características e habilidades também foram utilizadas para a elaboração dos instrumentos de pesquisa, bem como, referência para as análises.

Assim, o quadro da Figura 8 coloca em destaque os aspectos utilizados como referência para a constituição da UEA. São destacados os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele, bem como as habilidades a serem desenvolvidas nos níveis segundo Hoffer (1981).

Figura 8 - Constituição da UEA



Fonte: a autora.

Destaca-se que a UEA não foi além do nível de dedução informal do modelo, mas as habilidades propostas por Hoffer (1981) foram destacadas sempre que possível. No âmbito do

modelo de Van Hiele além dos níveis, as fases de aprendizagem foram também apresentadas no planejamento do trabalho desenvolvido junto aos estudantes.

No que segue, são destacados aspectos referentes a utilização de Tecnologias Digitais na Educação Matemática, uma vez que a UEA foi fortemente estruturada para o uso das tecnologias digitais.

### 3 TECNOLOGIAS NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

As tecnologias digitais vêm sendo utilizada em diferentes contextos e momentos na Educação e na Educação Matemática, em especial tem recebido grande destaque (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2014). De acordo com Borba, Scucuglia e Gadandis (2014), os avanços tecnológicos na Educação Matemática podem ser classificados em quatro fases:

- Primeira fase: é caracterizada principalmente pelo uso do *software* LOGO, no ano de 1980. Este *software* possibilitava ao estudante fazer movimentos que propiciavam a construção de objetos geométricos como retas, ângulos, polígonos, entre outros. Estes movimentos eram possíveis, por meio da interação do estudante com a tartaruga virtual, que era o cursor da tela do computador (SOUZA, 2016).
- Segunda fase: com início nos anos 90, foi marcada pela popularização dos computadores e a produção de diversificados *softwares* de representação. Foi nessa fase que surgiram as possibilidades de inserção de laboratórios de informática nas escolas (SOUZA, 2016).
- A terceira fase: de acordo Borba, Scucuglia e Gadandis (2014), essa fase se inicia com a chegada e difusão social de internet banda larga no Brasil, por volta de 1999. O surgimento dos termos “Tecnologias da Informação” (TI) e “Tecnologias da Informação e Comunicação” (TIC) marcam essa fase, além da emersão da internet no campo da Educação (SOUZA, 2016).
- Quarta fase: essa fase teve início em meados de 2004, com o surgimento da internet rápida, e desde então, os tipos de recursos têm sido aprimorados. Nesta fase, iniciou-se o uso do termo “Tecnologias Digitais”, a qual abrange diversas tecnologias, como, *softwares*, vídeos, objetos de aprendizagem, celulares, tablets (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2014).

Segundo Souza (2016), os aspectos descritos acima são permeados de questionamentos, inquietações e diversas possibilidades no campo da educação, tornando-se um campo fértil para investigações e explorações na área de ensino de matemática. Kaiber e Conceição (2007), Gravina e Basso (2012) já destacavam a importância destas investigações na Educação Matemática, uma vez que, o uso das tecnologias no ensino, de acordo com os autores, influencia a forma de ver, utilizar e produzir a Matemática, principalmente em sala de aula.

No que se refere à tecnologia, os PCN (BRASIL, 1998) já apontavam que um dos objetivos de seu uso em sala de aula é para que os estudantes saibam utilizar diferentes fontes

de informação e recursos tecnológicos para adquirir conhecimentos. Sobre a questão o documento destaca que:

As tecnologias, em suas diferentes formas e usos, constituem um dos principais agentes de transformação da sociedade, pelas modificações que exercem nos meios de produção e por suas consequências no cotidiano das pessoas.[...] Além disso, tudo indica que pode ser um grande aliado do desenvolvimento cognitivo dos alunos (BRASIL,1998,p.43-4).

No âmbito da Matemática, os PCN+ (BRASIL, 2002) indicam que o computador pode ser um aliado para o desenvolvimento cognitivo dos estudantes, pois permite desenvolver um trabalho que favorece diferentes ritmos de aprendizagem e possibilita ao estudante aprender com os seus erros. Nesse sentido, transforma-se em um poderoso recurso de suporte a aprendizagem, com inúmeras possibilidades pedagógicas a serem desenvolvidas. Nesse sentido, concorda-se com o que é destacado por Kenski (2015),

Por meio das tecnologias digitais é possível processar e representar qualquer tipo de informação. Nos ambientes digitais reúnem-se a computação (a informática e suas aplicações), as comunicações (transmissão e recepção de dados, imagens, sons etc.) e os mais diversos tipos, formas e suportes em que estão disponíveis os conteúdos (livros, filmes, fotos, músicas e textos). É possível articular telefones celulares, computadores, televisores, satélites etc. E, por eles, fazer circular as mais diferencia das formas de informação (KENSKI, 2015, p.23).

Segundo Borba e Penteadó (2010), o tema informática e educação tem sido um debate recorrente entre professores e pesquisadores, nas últimas duas décadas, no Brasil. No entanto, muitas vezes, os avanços tecnológicos não têm chegado até às escolas, às salas de aulas e aos estudantes. De acordo com Borba e Villareal (2005), o que dificulta esse progresso é a falta de infraestrutura apropriada, nas escolas, para o trabalho em sala de aula com os estudantes.

Apesar dos documentos oficiais apontarem para a importância do uso de tecnologias nas salas de aula, o próprio documento indica que nem todas as escolas têm acesso às tecnologias. No entanto, prevêem que em um curto prazo, as tecnologias digitais alcancem mais estabelecimentos de ensino e, para isso, ações governamentais têm sido realizadas para acelerar esta inserção.

Em nível nacional, segundo Borba e Penteadó (2010) uma das primeiras ações no sentido de estimular e promover a implementação do uso da informática nas escolas brasileiras ocorreu em 1981, quando surgiram projetos como Educom, Formar e PRONINFE. Tais projetos tinham como objetivo:

- Educom (COMputadores na EDUcação): seu objetivo era criar convênios com Universidades para desenvolver pesquisas na área de informática educativa nos níveis de Ensino Fundamental e Médio.

- Projeto Formar: foi uma iniciativa dentro do Educom, tinha como objetivo formar recursos humanos para o trabalho na área da informática, depois de capacitados, deveriam trabalhar junto a sua região e assim, multiplicar o conhecimento e sucessivamente.
- PRONINFE (Programa Nacional de Informática na Educação): lançado pelo MEC deu continuidade às iniciativas anteriores, contribuindo especialmente para a criação de laboratórios e centros para a capacitação de professores (BORBA; PENTEADO, 2010).

De acordo com os autores, as experiências com os referidos projetos deram base para o desenvolvimento do programa de governo PROINFO - Programa Nacional de Informática na Educação, lançado em 1997. O PROINFO teve como objetivo estimular e dar suporte a introdução de tecnologia digitais nas escolas de nível Fundamental e Médio de todo o país, equipando muitas escolas com computadores e capacitando professores, todavia, ainda há muito o que fazer (BORBA; PENTEADO, 2010).

Chinellato (2014), atribui ao escasso uso das tecnologias nas escolas, a falta de tempo dos professores para o preparo e elaboração das aulas. Como já destacado por Maltempo (2008), toda inserção de tecnologia no ambiente de ensino e aprendizagem requer um repensar da prática docente, uma vez que a mesma, transforma a relação ensino e aprendizagem.

Frota e Borges (2004), Perralta (2015), Kenski (2015) por sua vez, destacam que a falta de formação adequada dos professores tem prejudicado o avanço das tecnologias nas escolas. Os autores consideram que para que haja a inserção das tecnologias em sala de aula, deve haver formação de professores eficaz, para que possam incorporar as tecnologias em sua prática com segurança e propriedade. Também destacam a viabilização das condições necessárias, pelo sistema educacional, para que as tecnologias possam ser inseridas nas escolas fazendo parte da prática pedagógica dos professores.

Valente (1999), já destacava nos anos 90, que só há inserção tecnológica quando o professor consegue intercalar de forma apropriada e segura práticas do ensino tal como está posto, com o auxílio de ferramentas digitais, proporcionando assim, condições para construção do conhecimento, com o que se concorda. Corroborando com o autor, Lorente (2009) afirma que as tecnologias podem e devem fazer parte da vida escolar dos estudantes, mas, para isso, os professores precisam estar preparados para utilizar as ferramentas adequadamente, confirmando o que Gravina e Basso (2012) apontam quando afirmam que,



às tecnologias digitais se tornam realmente interessantes quando elas nos ajudam a mudar a dinâmica da sala de aula na direção de valorizar o desenvolvimento de habilidades cognitivas com a concomitante aprendizagem da Matemática (GRAVINA e BASSO, 2012, p. 54).

Diante desses desafios, pesquisas vêm sendo realizadas com o objetivo de investigar maneiras de auxiliar a inserção das tecnologias digitais em sala de aula. Santos (2006), Almeida (2010), Gobbi (2012), Souza (2014), Silva (2015) fazem parte de um grupo de pesquisadores que buscam investigar as potencialidades e fragilidades do uso das tecnologias digitais na Educação Matemática. Especificamente, os autores mencionados investigaram as potencialidades e desvantagens do uso de tecnologias digitais no ensino de conceitos geométricos em sala de aula. Os resultados apresentados destacam como características positivas o interesse e participação dos estudantes, além dos avanços na aprendizagem, entretanto, quanto aos pontos negativos, há unanimidade em destacar os problemas enfrentados em relação ao funcionamento dos computadores, além do número limitado de computadores para a turma e problemas com conectividade.

Quanto ao desenvolvimento de conceitos geométricos, o uso das tecnologias tem ganhado espaço entre os professores, particularmente no que se refere a chamada geometria dinâmica. Segundo Borba e Penteadó (2012, p.242), “[...] os *softwares* de Geometria Dinâmica constituem um ambiente que favorece as atividades investigativas na sala de aula. Em especial, esses ambientes servem de base para várias pesquisas sobre demonstração em Geometria”.

De fato, atualmente, a utilização de *softwares* que exploram a imagem e o movimento, elementos de destaque na Geometria, tem sido foco de investigações e interesse na Educação Matemática motivo pelo qual, no que segue se apresentam aspectos referente a *softwares* de Geometria Dinâmica e suas potencialidades.

### 3.1 GEOMETRIA DINÂMICA

O termo “geometria dinâmica” foi originalmente usado por Nick Jackiw e Steve Rasmussen, de forma genérica, apenas com a intenção de ressaltar a diferença entre *softwares* de Geometria Dinâmica e outros *softwares* de Geometria. Os que são de Geometria Dinâmica possuem um recurso que possibilita a transformação contínua, em tempo real, ocasionada pelo “arrastar” (ZULATO, 2002).

Os *softwares* de geometria dinâmica, segundo Giraldo, Caetano, Mattos (2012),

permitem a construção de objetos geométricos de acordo com as propriedades ou relações estabelecidas. Estes podem então ser manipulados dinamicamente, de tal maneira que as propriedades e relações sejam preservadas. Esse modo particular de construção geométrica apresenta características especiais, que podem ter consequências importantes para a aprendizagem (GIRALDO; CAETANO; MATTOS, 2012, p.168)

Zulato (2002), Fernandes (2008) já destacavam as potencialidades dos chamados *softwares* de geometria dinâmica, posto que, os mesmos apresentam recursos com os quais os alunos podem realizar construções geométricas, que são feitas usualmente com régua e compasso. Porém, com o recurso do movimento o trabalho com tais tecnologias abre possibilidades de lançar diferentes olhares para o mesmo objeto, experimentar, lançar hipóteses e testá-las, conjecturar, enfim manipular os objetos buscando extrair características, propriedades e relações. Além disso, é possível realizar construções que com uma mídia tradicional, por vezes, seria complexo.

Segundo Pinto (2016), os *softwares* de geometria dinâmica permitem potencializar a aprendizagem, pois por meio das construções geométricas, os estudantes conseguem materializar visualmente os conceitos. Nessa mesma linha de pensamento Fainguelernt (1999) já afirmava que a utilização do computador propicia ao estudante simulações de situações, construções de procedimentos, além de possibilitar análise dos erros, corrigi-los, consertá-los, refaze-los, além de fazer adequações.

Assim, o número de estudos e pesquisas interessadas no uso de tecnologias para o ensino da Geometria tem aumentando, bem como a variedade de *softwares* para o seu ensino, como por exemplo, *software GeoGebra* (GOBBI, 2012; SOUZA, 2014; ALBA, 2015), *software Wingeom* (SANTOS, 2006; MARQUES, 2010), *software Cabri 3D* (COZZOLINO, 2008; ALMEIDA, 2010; MARIN, 2013), entre outros.

Zulato (2002), Hendres e Kaiber (2005), Lopes (2008), Giraldo, Caetano, Mattos (2012), Ramos (2014) apontam como principal fator para o crescimento de pesquisas voltadas ao uso de tecnologias, no ensino de Geometria, as ferramentas disponibilizadas pelos *softwares* de Geometria Dinâmica, visto que, proporcionam exploração e construção de conceitos, desenvolvimento de habilidades cognitivas, como estratégias de solução de problemas, criatividade, manipulação de informações em ambientes diversificados e situações que permitem os alunos conjecturar, comprovar suas hipóteses, chegando a sínteses e conclusões, tornando-se uma ferramenta em potencial para o ensino.

Souza (2004), destaca que a utilização de computadores, bem como as demais ferramentas computacionais, servem de mediação cognitiva o que, segundo o autor, oportuniza uma mudança nos mecanismos internos utilizados pelo estudante, potencializando suas atividades intelectuais. Assim, de acordo com o autor, a cognição externa é bem-vinda, desde que auxilie o processo interno do estudante.

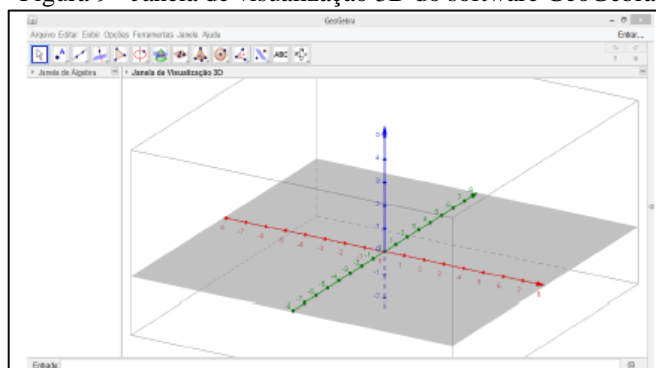
Com o objetivo de dispor aos estudantes, a possibilidade de construir objetos geométricos que proporcione diferentes representações para um mesmo objeto, possibilitando modificar e transformar o mesmo, possibilitando, também, que o estudante consiga acompanhar visualmente as alterações realizadas, o *software* GeoGebra foi escolhido para o desenvolvimento dessa investigação. Busca-se, assim, buscando promover um ambiente de estudo propício a indagações, questionamentos na busca da construção dos conhecimentos geométricos, contribuindo assim, para a aprendizagem dos estudantes.

### 3.1.1 Software GeoGebra

O GeoGebra é um *software* de Geometria Dinâmica, livre e gratuito, que pode ser utilizado em todos os níveis de ensino. Alia dinamicamente, Geometria, Álgebra e Cálculo oferecendo esses recursos em um ambiente totalmente conectado (HOHENWARTER e LAVICZA, 2007). O *software* foi criado por Markus Hohenwarter para ser utilizado em ambiente de sala de aula, sendo que uma característica importante do *software* é que ele oferece várias representações simultâneas de cada objeto: indica as expressões na janela de Álgebra corresponde ao objeto na janela de visualização, o que fornece uma visão mais profunda da relação entre Geometria e Álgebra.

Em agosto de 2013, foi disponibilizada a versão do GeoGebra para testes, que incluía a Janela de Visualização 3D e, em setembro de 2014, foi lançada a versão final do GeoGebra 5.0 que incluía diversas modificações, dentre elas: a adaptação de recursos para visualização 3D (Figura 9), pontos, vetores, linhas, segmentos, raios, polígonos e círculos, além de novos tipos de objetos, como superfícies, planos, pirâmides, prismas, esferas, cilindros e cones (GARCIA, et al, 2015).

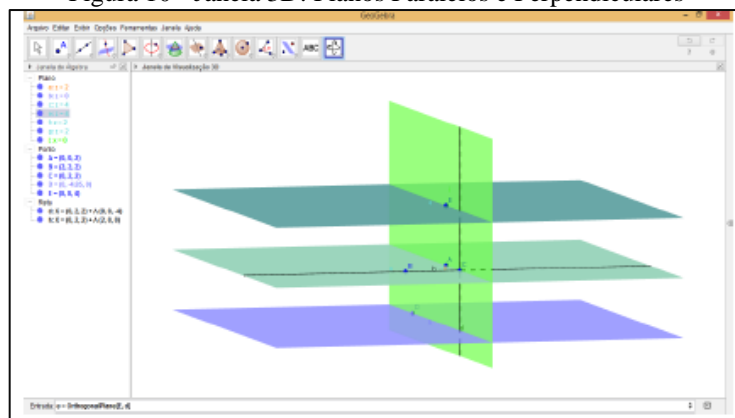
Figura 9 - Janela de visualização 3D do software GeoGebra



Fonte: a autora.

Considerando que, uma das dificuldades enfrentadas no ensino da Geometria é a visualização tridimensional dos sólidos geométricos, o *software* disponibiliza uma tela de trabalho para análise dos objetos em 2D e 3D, em linguagem clássica da Geometria. O *software* possui recursos para construção de figuras a partir das propriedades que as definem. Na janela de visualização 3D, pode-se rotacionar a construção realizada pelas coordenadas e assim, gerar melhores visualizações para o objeto, favorecendo o desenvolvimento do pensamento geométrico, inclusive a noção espacial (ZOTTO, 2013), conforme exemplificado na Figura 10.

Figura 10 - Janela 3D: Planos Paralelos e Perpendiculares



Fonte: a autora.

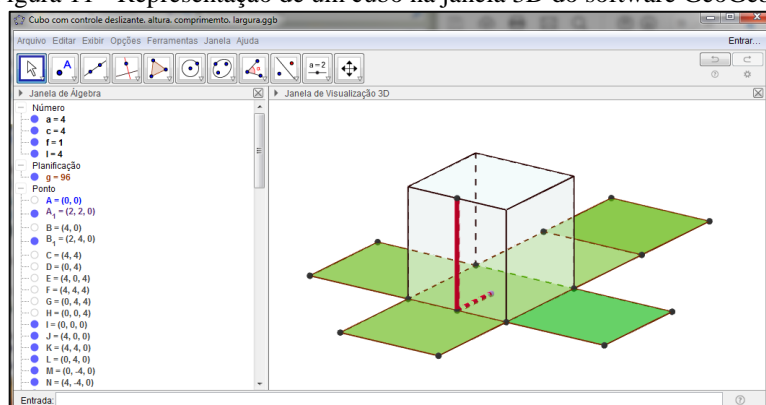
De acordo com Souza (2014), a utilização do *software* GeoGebra oferece recursos capazes de explorar conceitos matemáticos bem como despertar a capacidade criativa e o engajamento dos alunos na troca de ideias acerca dos conceitos em discussão. Sobre o GeoGebra, Fanti (2010) pondera que:

[...] é uma importante ferramenta para despertar o interesse pela busca do conhecimento matemático principalmente com os alunos do ensino fundamental e médio. Possibilita trabalhar de forma dinâmica em todos os níveis da educação básica permitindo a abordagem de diversos conteúdos especialmente os relacionados ao estudo da geometria (FANTI, 2010, p.01).

Visto que o GeoGebra, é um programa bastante intuitivo e autoexplicativo, Oliveira (2015) destaca que o mesmo é adequado a usuários com conhecimento avançado ou não de informática, sendo que o conhecimento matemático é o ponto fundamental para a sua utilização.

O quadro da Figura 11, destaca a representação de um cubo na janela 3D do *software*, possibilitando assim, que o estudante visualize e identifique as características e propriedades do objeto geométrico indicado.

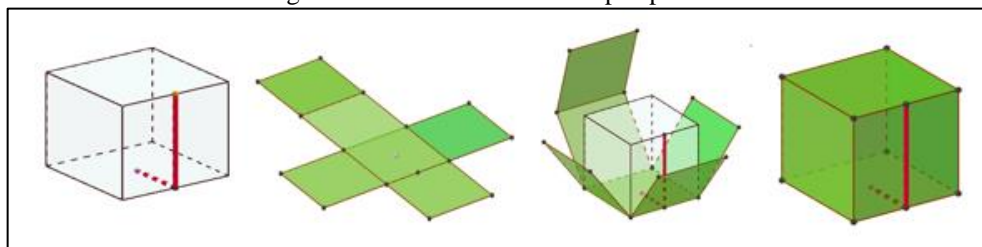
Figura 11 - Representação de um cubo na janela 3D do software GeoGebra



Fonte: a autora.

Com o auxílio do *software* os estudantes podem analisar, explorar, verificar características e propriedades dos objetos construídos em diferentes perspectivas, proporcionando a compreensão de conceitos trabalhados em sala de aula. Assim, no quadro da Figura 12, é apresentado um cubo em diferentes perspectivas, construídos na janela 3D do *software* GeoGebra, oportunizando com que o estudante trabalhe conceitos de construção, planificação, classificação, reconhecimento de elementos e propriedades, entre outros.

Figura 12 - Cubo em diferentes perspectivas



Fonte: a autora.

O *Software* GeoGebra se caracteriza pela facilidade em construir os mais variados objetos geométricos, planos ou espaciais, bem como proporciona visualizações destas construções, que não seria possível com outros recursos.

### 3.1.2 Visualização

Visualização geralmente se refere à habilidade de perceber, representar, transformar, descobrir, gerar, comunicar, documentar e refletir sobre as informações visuais (FAINGUERNT, 1999). À vista disso, a visualização é um elemento de grande relevância para a construção do conhecimento matemático, uma vez que, “a compreensão de conceitos matemáticos requer múltiplas representações, representações estas que podem transformar o entendimento deles” (BORBA, 2011, p.3).

Assim, também, a visualização na Geometria é de grande relevância para a aprendizagem, uma vez que, não havendo esta habilidade de criação mental, há dificuldades para construção de objetos geométricos, assim como justificar ou validar resultados obtidos (SANTOS, 2006). Salienta-se que só a visualização não proporciona o conhecimento geométrico, já que, há pessoas que possuem a habilidade de conceber a imagem mentalmente e que não necessariamente possuem domínio dos conhecimentos geométricos. Entretanto, destaca-se a importância de se desenvolver uma educação visual adequada, posto que, para o desenvolvimento do pensamento geométrico é de fundamental importância (FAINGUERNT, 1999).

Segundo Duval (1995), o aprendizado de Geometria envolve três tipos de processos cognitivos que estão intimamente interligados: processo de visualização, processo de construção através de ferramentas, processo de raciocínio. De acordo com o autor, esses processos podem ser realizados independentemente um do outro, logo, a visualização se apresenta como parte necessária e importante para o desenvolvimento da aprendizagem dos conceitos geométricos.

Na teoria de Van Hiele (1986), a visualização também recebe destaque, o reconhecimento visual é o primeiro nível do pensamento geométrico. A visualização e representação mental dos objetos geométricos, bem como a análise e a organização das propriedades geométricas relativas aos conceitos geométricos, de acordo com Van Hiele (1986), são passos preparatórios para o entendimento e formalização do conceito. Borba e Villarreal (2005), Barbosa (2009), Borba (2011) afirmam que a visualização condiciona o pensamento matemático, influenciando diretamente na produção do conhecimento. Neste sentido, a visualização possibilita o desenvolvimento de ideias para que o conceito seja compreendido e investigado.

Faingernt (1999) já destacava, que a visualização é importante porque, além de ampliar a visão intuitiva e global, facilita a compreensão de outras áreas da matemática, o qual concorda-se com a autora. Contudo, pesar de parecer que os educadores reconheçam o potencial

da visualização para a aprendizagem, Moraes (2016) pondera que muitas vezes este trabalho não tem sido realizado em sala de aula. Nesse contexto Dreyfus (1991), na década de 90, já apontava que a exploração de aspectos visuais não estava ocorrendo efetivamente na sala de aula, quer porque os professores não atribuíam o seu devido valor, quer porque o desenvolvimento do raciocínio visual fosse difícil, exigindo assim, um trabalho específico pelo docente com sua turma. Para o autor é imprescindível o uso de ferramentas que auxiliem no desenvolvimento do raciocínio visual.

Deste modo, destaca-se o uso de ferramentas digitais, para auxiliar no processo de visualização com respeito a representações espaciais, propiciando o desenvolvimento do pensamento geométrico. Assim concorda-se com Santos (2006) quando destaca que as tecnologias digitais possibilitam uma abordagem dinâmica para a investigação matemática, em particular para a Geometria, proporcionando a visualização de objetos geométricos, já que, as imagens fornecidas na tela do computador, por exemplo, podem ser exploradas sob diferentes aspectos, enfatizando à intuição, à percepção e o raciocínio, competências essenciais para a compreensão dos conceitos geométricos.

Neste sentido, pesquisas como Alba (2015), Moreira (2015), Marquetti (2015), Borsoi (2016), Costa (2016) tem apontado o uso de ferramentas digitais como suporte para o desenvolvimento do pensamento geométrico, assim como, para ampliação do processo visual dos estudantes. Portanto, no âmbito da presente investigação, a qual tem por objetivo propiciar o desenvolvimento do pensamento geométrico espacial de um grupo de estudantes, optou-se pelo *software* de Geometria Dinâmica GeoGebra, por ser uma ferramenta em potencial, que possibilita a ampliação da capacidade de visualização dos sólidos geométricos em diferentes perspectivas, auxiliando a compreensão e aprendizagem dos estudantes dos conceitos estudados.

#### 4 ASPECTOS METODOLOGICOS

A pesquisa aqui apresentada teve por objetivo investigar as possíveis contribuições do uso de uma Unidade de Ensino e Aprendizagem (UEA), no desenvolvimento de conceitos da Geometria Espacial por um grupo de estudantes de um terceiro ano do Ensino Médio. A investigação se desenvolveu junto a uma turma de estudantes do Ensino Médio de uma Escola Estadual do Município de Canoas/ RS.

A investigação seguiu os pressupostos da pesquisa qualitativa que, de acordo com Lüdke e André (2013), permite ao investigador perceber a realidade pesquisada, enquanto envolve-se ativamente com o processo de investigação. A escolha por uma abordagem qualitativa se justifica, visto que o trabalho possui características tais como as apresentadas por Bogdan e Biklen (1994), as quais, entende-se, estarem relacionadas com o modelo de investigação desenvolvida. Conforme descrito por Bogdan e Biklen (1994), há cinco aspectos essenciais em uma pesquisa qualitativa, os quais, também caracterizam o trabalho aqui realizado, a saber:

- a pesquisa qualitativa tem o ambiente natural como fonte direta de dados e o pesquisador como seu principal instrumento, o que se constitui na primeira característica da pesquisa realizada;
- a predominância de dados descritivos é outro aspecto que caracteriza as investigações qualitativas, sendo que, nesta investigação, os dados emergem das observações e registros realizados em diários de campo, das conversas entre professor/estudante e estudante/estudante, entre outros de mesma natureza. Dessa forma, na investigação realizada, tanto o ambiente de sala de aula, como o laboratório de informática caracterizaram-se como o ambiente natural para o estudantes;
- na pesquisa qualitativa o processo deve ser mais importante que o produto. Nesse sentido, na investigação realizada, é analisado o desenvolvimento das atividades, os procedimentos e os conhecimentos de domínio dos estudantes, assim como as atitudes e interações ocorridas durante as aulas;
- o quarto aspecto aponta para o significado que as pessoas atribuem às coisas, o que foi valorizado pela atenção dada aos relatos dos estudantes em seus diários de campo pessoais – cadernos -, os quais registram os pensamentos, descobertas e dúvidas sobre o trabalho desenvolvido;



- por fim, no quinto aspecto, os autores salientam que, na pesquisa qualitativa, a análise dos dados tende a seguir um processo indutivo, o que é característica da análise produzida.

Considerando a orientação metodológica adotada, a investigação foi estruturada em três etapas, as quais foram antecedidas por uma revisão bibliográfica sobre: a Geometria Espacial no que se refere a aspectos históricos, ensino e aprendizagem no Ensino Médio; as Tecnologias, abordando a Geometria, com foco na Geometria Espacial e no uso do *software* de Geometria Dinâmica, GeoGebra; e o modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele.

Assim, na primeira etapa do processo de investigação, desenvolveu-se uma Unidade de Ensino e Aprendizagem - UEA, com objetivo de investigar as contribuições da sua aplicação no desenvolvimento de conceitos geométricos espaciais de um grupo de estudantes do terceiro ano do Ensino Médio, com recurso às tecnologias digitais. A UEA foi constituída por um conjunto de atividades a serem desenvolvidos em sala de aula, atividades essas, que foram organizadas de acordo com o planejamento curricular da turma, obedecendo os objetivos estabelecidos em cada conteúdo. A unidade foi organizada em três eixos: Geometria de Posição, abrangendo relações de posição entre retas, planos e planos e retas; Noções primitivas e Conhecimentos Básicos, retomando conceitos trabalhados ao longo da Educação Básica, como elementos, classificação, nomenclatura de figura e sólidos geométricos; e Poliedros, o qual trabalhou-se apenas com os Prismas e Pirâmides.

Buscou-se, nessa etapa, também, elaborar os instrumentos de investigação a serem aplicados, sendo os mesmos denominados de: Questionário Perfil da Turma, Instrumento de Investigação Inicial, Instrumento de Investigação Intermediário, constituído por um conjunto de exercícios e atividades a serem desenvolvido pelos estudantes e o Instrumento de Investigação Final.

Na segunda etapa, ocorreu a aplicação da UEA junto a turma participante da pesquisa, juntamente com os diferentes instrumentos de investigação. Já na terceira etapa, ocorreu a organização e análise dos dados.

Em relação à coleta dos dados, recorreu-se às seguintes ações: observações e registros em diário feitos pela professora/pesquisadora no decorrer das aulas; arquivos de dados produzidos pelos estudantes durante as aulas no laboratório de informática e anotações feitas pelos estudantes no caderno, nas folhas de atividades, os quais serão detalhados posteriormente. As análises preliminares realizadas durante o desenvolvimento da investigação, já permitiam perceber a existência de lacunas no desenvolvimento dos conceitos geométricos dos estudantes. O esquema da Figura 13 destaca uma síntese do processo de investigação.

Figura 13 - Síntese do processo de investigação



Fonte: a autora.

Considera-se pertinente destacar que um dos desafios enfrentados na aplicação da investigação junto a turma, foi a ausência do livro didático, o que, em um primeiro momento interferiu no andamento do trabalho em sala de aula. Os conteúdos de Geometria Espacial nos planos de estudos da escola estão previstos para serem desenvolvidos no segundo ano do Ensino Médio. Em função de problemas ocorridos, a turma do terceiro ano de 2017 não tinha, no ano anterior, trabalhado com os conteúdos de Geometria Espacial, razão pela qual esses conteúdos estavam sendo desenvolvidos em 2017. Ocorre que os livros didáticos disponíveis para o terceiro ano não tinham os conteúdos de Geometria Espacial, constantes no livro do segundo ano. Assim, o trabalho a ser desenvolvido na UEA, que contava como o apoio do livro didático, teve que ser reorganizado e foram produzidos um conjunto de materiais didáticos (Apêndices C, D, E, F, G) para o trabalho em sala de aula.

Porém, o que inicialmente se apresentou como um problema, ao longo da investigação foi se materializando como uma possibilidade de produção de materiais os quais viessem a ser utilizados pelos estudantes em sala de aula, ou mesmo em outros espaços. Assim, diante dos desafios e experiências vivenciadas ao longo da aplicação da UEA, a pesquisadora buscou desenvolver um objeto educacional com o objetivo que o mesmo viesse a se constituir em material de apoio para os professores trabalharem em sala de aula, assim como, os estudantes utilizarem fora do ambiente escola. Dessa maneira, elaborou-se o objeto educacional GEOE (Geometria Espacial) que, embora não tendo sido aplicado junto a turma participante da investigação, emergiu desta. O GEOE, que será descrito em capítulo posterior, será

disponibilizado as escolas estaduais do município de Canoas, e ao público em geral, a partir de um endereço eletrônico a ser disponibilizado.

#### 4.1 LOCUS DA INVESTIGAÇÃO E PARTICIPANTES

Como já apontado a investigação foi desenvolvida junto a um grupo de estudantes do terceiro ano do Ensino Médio da Escola Estadual Marechal Rondon<sup>15</sup>, localizado no município de Canoas, Rio Grande do Sul, no primeiro semestre do ano de 2017.

O município de Canoas pertence a região metropolitana do Estado e possui uma área territorial de 131.097 km<sup>2</sup>, com uma população estimada de 343.853 pessoas (IBGE, 2017).

Com relação a rede de ensino, Canoas possui, atualmente, o segundo maior polo de ensino do Rio Grande do Sul, conta com 60 instituições públicas, sendo 42 municipais e 18 estaduais (CANOAS, 2017).

A pesquisa foi realizada no Colégio Estadual Marechal Rondon, pertencente à rede Estadual de Educação, que faz parte da 27<sup>a</sup> Coordenadoria Regional de Educação do estado do Rio Grande do Sul. O Colégio foi criado em 05 de maio de 1956 e conta, atualmente, com 20 salas de aula que atendem, em média, 1600 alunos distribuídos nos níveis de Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio, nos turnos manhã, tarde e noite. Para atender a todos os alunos a escola conta com um corpo docente formado por 86 professores e 17 funcionários. O Colégio dispõe de auditório, sala de educação artística, sala de dança, ginásio de esportes coberto, laboratórios de matemática, informática, ciências e biologia, biblioteca e refeitório.

A escolha dessa escola para o desenvolvimento do estudo, relaciona-se ao fato da escola ter boa infraestrutura para um trabalho com recurso à tecnologia. A escola dispunha de um laboratório de informática (LABIN) com 20 computadores, com um projetor fixo, rede de *internet*, além de um quadro branco.

Participaram da investigação 40 estudantes de uma turma do terceiro ano do Ensino Médio, cuja a carga horária de Matemática é de quatro períodos semanais. O estudo se limitou ao período previsto ao Plano de Estudos da professora titular para o conteúdo de Geometria Espacial.

Assim, a pesquisa ocorreu no período de 03 a 20 de abril de 2017, totalizando doze encontros com duração de cinquenta minutos cada. Destaca-se aqui, que o desenvolvimento da investigação se constitui em um grande desafio. Muito da ideia inicial que impulsionou a investigação, teve de ser redimensionada em função, principalmente do tempo. A ideia inicial

---

<sup>15</sup> Pesquisa aprovada no Comitê de Ética em outubro de 2016, número 59898416.9.0000.5349

de envolver a tecnologia na aprendizagem dos estudantes previa 20h aula. Além disso, as alterações no horário da turma, fizeram com que o planejamento inicial fosse alterado, pois no início do trabalho os períodos eram seguidos dois a dois, e após a alteração os quatro períodos ficaram isolados. A impossibilidade de utilizar o livro didático também influenciou no desenvolvimento do trabalho como já destacado.

No que segue apresenta-se a UEA constituída para o desenvolvimento da Geometria Espacial na turma participante da investigação.

#### 4.2 PLANEJAMENTOS DA UNIDADE DE ENSINO E APRENDIZAGEM (UEA)

A Unidade de Ensino e Aprendizagem (UEA) de Geometria Espacial se constituiu em um elemento base para a investigação realizada nessa pesquisa.

Para a construção da UEA, buscou-se respaldo nos documentos oficiais com relação ao que está previsto para o ensino da Geometria de maneira geral no Ensino Médio e, mais especificadamente, em relação a Geometria Espacial, assim como no Plano de Ensino (Anexo B) da escola e, no modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de van Hiele, enquanto respaldo teórico, bem como estudos referentes a utilização de tecnologias digitais. A UEA, foi elaborada com o objetivo de propiciar aos estudantes participantes da investigação o desenvolvimento do pensamento geométrico espacial e, para tal, o conjunto de atividades que constituíam a UEA, buscava possibilitar aos estudantes o desenvolvimento das habilidades descritas em cada nível do modelo, assim como, gerenciar o trabalho em sala de aula, de acordo com as fases de aprendizagem.

Para dinamizar as aulas, em função do tempo, foram construídos materiais em *PowerPoint*, para serem trabalhados em sala de aula, introduzindo conceitos, definições e atividades. Foram desenvolvidos materiais sobre Geometria de Posição (Apêndice C), Noções Primitivas e Conhecimentos Básicos (Apêndice D), Poliedros - Prisma e Pirâmide (Apêndice E, F, G).

As aulas foram ministradas no laboratório de Matemática, por ser um lugar amplo e por dispor de materiais concretos que poderiam auxiliar no desenvolvimento das aulas, e no laboratório de Informática (LABIN) onde os alunos tinham acesso ao *software* GeoGebra.

Assim, a Unidade de Ensino e Aprendizagem (UEA) foi planejada considerando o tempo disponível para aplicação da pesquisa, conforme apresentado no quadro da Figura 14. Os instrumentos de investigação apresentados no quadro serão descritos em seguida.

Figura 14 - Cronograma de Planejamento da UEA

Semana	Nº de períodos	Temática	Atividade	Descrição
03/04 a 07/04	1	Termo de autorização para participação da pesquisa.	Termos de Assentimento e Consentimento (Apêndice A, B)	Foram entregues os termos de Assentimento e Consentimento para que os estudantes e responsáveis autorizassem a participação e publicação de dados oriundos da investigação.
		Perfil da turma investigada.	Questionário Perfil (Apêndice I)	O questionário era composto por doze questões com objetivo de levantar o perfil dos estudantes participantes da pesquisa.
	1	Conhecimentos prévios de Geometria.	Instrumento de Investigação Inicial (Apêndice J)	Conjunto de atividades que buscava identificar o nível de conhecimento geométrico da turma investigada.
		Geometria Espacial	Material de estudo (Apêndice N)	Material foi constituído para tirar possíveis dúvidas do conceito Poliedros: Prisma e Pirâmide.
	2	<i>Software</i> GeoGebra.	Apresentação do <i>software</i> GeoGebra.	Apresentação do <i>software</i> GeoGebra, reconhecendo ferramentas e janelas, disponibilizadas no <i>software</i> .
			Atividade de familiarização com o <i>software</i> . (Apêndice L)	Atividades exploratória para reconhecer comandos e funcionamento do <i>software</i> .
10/04 a 14/04	1	Geometria de Posição	Material Didático (Apêndice C)	A turma foi separada em grupos, para que os estudantes pudessem argumentar sobre o material disponibilizado.
	4	Noções Primitivas e Conhecimentos Básicos	Construção no <i>Software</i> GeoGebra (Apêndice M)	A professora/ pesquisadora apresentou sólidos geométricos, para que os estudantes pudessem manusear e assim, analisar e identificar os elementos, após deveriam construir os mesmos, no <i>software</i> GeoGebra.
			Material Didático (Apêndice D)	Foi desenvolvido um material para que os estudantes individualmente completassem, a partir dos conceitos trabalhos em sala de aula, introduzindo o conteúdo a ser abordado consecutivamente.
			Lista de Atividades (Apêndice O)	Foi aplicada uma lista de atividades para avaliar o conhecimento adquirido pelos estudantes até o momento na investigação.
17/04 a 19/04	2	Poliedros	Construção no <i>Software</i> GeoGebra (Apêndice P)	Construção de um prisma e uma pirâmide no <i>software</i> GeoGebra, indicando os elementos de cada sólido geométrico.
			Trabalho em Grupo (Apêndice Q)	A turma foi separada em grupos para realizar questões-problema, contidos em provas do ENEM de anos anteriores, que envolvessem conhecimentos geométricos.
20/04	1	Conhecimento dos estudantes.	Instrumento de Investigação Final (Apêndice K)	Conjunto de seis atividades objetivando averiguar o conhecimento adquirido pela turma após a aplicação da UEA.

Fonte: a autora.

Destaca-se que a versão do planejamento aqui apresentado é uma segunda versão, adequada as condições de trabalho apresentadas no início da investigação. A seguir são apresentados e descritos os instrumentos de investigação.

#### 4.3 INSTRUMENTOS DE INVESTIGAÇÃO

Para a realização da investigação, foram elaborados instrumentos de investigação os quais proporcionassem dados para análise. A investigação ocorreu sob a observação participativa da professora/ pesquisadora, com registros em diários durante o processo de investigação e contou, também, com a análise da produção dos estudantes.

Assim, foram constituídos os seguintes instrumentos, os quais serão detalhados ao longo da apresentação da pesquisa.

- Questionário Perfil da Turma (Apêndice I);
- Instrumento de Investigação Inicial (Apêndice J);
- Instrumentos de Investigação Intermediário – análise de um conjunto de atividades realizada pelos estudantes (Apêndices M, O, P, Q);
- Instrumento de Investigação Final (Apêndice K).

Inicialmente, foi elaborado um instrumento denominado Questionário Perfil da Turma (Apêndice I), com o objetivo de delinear o perfil do grupo de alunos. O questionário contemplava questões como, idade, se trabalha, como, onde e com qual frequência utiliza-se de ferramentas digitais, se sente dificuldade nos conceitos matemáticos e de Geometria, entre outras. Juntamente, foi aplicado o Instrumento de Investigação Inicial (Apêndice J), o qual era composto por um conjunto de atividades elaboradas com base nos planos de estudo da escola (Anexo B), bem como o que o PCN+ (BRASIL, 2002) preconiza, a respeito dos conteúdos de Geometria Espacial.

O Instrumento tinha como objetivo investigar o nível de conhecimento dos estudantes no que se refere à:

- identificar elementos dos poliedros, sua classificação e representação; sólidos redondos; propriedades relativas à posição: intersecção, paralelismo e perpendicularismo;
- interpretar e associar objetos geométricos e suas diferentes representações bidimensionais, como projeções, planificações, cortes e desenhos;
- utilizar o conhecimento geométrico para leitura, compreensão e ação sobre a realidade.

Ao longo do desenvolvimento da investigação aplicaram-se, também, os instrumentos de investigação denominados Instrumentos de Investigação Intermediários com o objetivo de acompanhar o trabalho dos estudantes, aprendizagem, saberes, dificuldades, dúvidas, entre outros. O quadro da Figura 15, destaca os Instrumentos Intermediários, bem como os objetivos e a descrição de sua aplicação.

Figura 15 - Conjunto de atividades do Instrumento de Investigação Intermediário

<b>Temáticas</b>	<b>Atividade</b>	<b>Objetivos de aprendizagem</b>	<b>Descrição da atividade.</b>
Geometria de Posição	Material Didático (Apêndice C)	Retomar as ideias de relações de posição entre retas, planos e reta e plano.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Os estudantes separados em grupos deveriam trabalhar com o texto disponibilizado pela professora/pesquisadora respondendo o solicitado.</li> <li>• Foram disponibilizados objetos de aprendizagem para exploração das relações de posição.</li> </ul>
Noções Primitivas e Conhecimentos Básicos	Construção de Sólidos no <i>software</i> GeoGebra (Apêndice M)	Compreender o conceito de poliedros; identificar, nomenclatura, classificar em convexo e não convexo	<ul style="list-style-type: none"> <li>• A turma separada em grupos observou e destacou características dos materiais concretos, disponibilizados pela professora/pesquisadora.</li> <li>• Com auxílio do <i>software</i> GeoGebra os estudantes deveriam construir diferentes poliedros, indicando a sua nomenclatura e a sua classificação em convexo ou não convexo.</li> </ul>
	Material Didático (Apêndice D)	Aprofundar conceitos trabalhados em aula.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Cada estudante recebeu uma cópia do material, para que pudesse realizar as atividades solicitadas e assim, organizar o material para seus estudos.</li> </ul>
	Lista de Atividades (Apêndice O)	Aprofundar os conceitos trabalhados em aula.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Os estudantes receberam uma lista de atividades envolvendo os conceitos estudados anteriormente.</li> </ul>
Poliedros	Construção de Sólidos no <i>software</i> GeoGebra (Apêndice P)	Identificar elementos de um prisma e de uma pirâmide, bem como nomenclatura e características dos sólidos	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Com o auxílio do <i>software</i> GeoGebra, os estudantes deveriam construir uma pirâmide e um prisma destacando os elementos e características solicitadas.</li> </ul>
	Trabalho em Grupo (Apêndice Q)	Resolver problemas envolvendo medidas do volume e de área de prismas e pirâmides.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• A turma foi separada em pequenos grupos para a realização da atividade proposta. O trabalho em grupo visou a troca de ideias e debates entre os estudantes.</li> </ul>

Fonte: a autora.

Já, ao final da investigação, aplicou-se o instrumento de Investigação Final (Apêndice K), o qual, buscou investigar os avanços dos estudantes frente ao trabalho desenvolvido. No que segue são apresentados e analisados os dados advindos da investigação realizada.

## 5 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

Apresentam-se aqui dados e análises advindas da investigação realizada. Inicialmente destaca-se um perfil dos participantes da investigação, seguido de análise do instrumento de avaliação inicial. Por fim, apresenta-se o desenvolvimento e análise da UEA e o instrumento de avaliação final.

### 5.1 OS PARTICIPANTES DA PESQUISA

Buscando traçar um perfil da turma de estudantes participantes da investigação, foi possível identificar que 60% da turma era composta por estudantes do gênero feminino (24 estudantes) e 40% do gênero masculino (16 estudantes). No que se refere à idade, o grupo de estudantes tinha entre 15 e 18 anos, sendo que 85% dos estudantes, tinha entre 16 e 17 anos, conforme apresentado na Tabela 1.

Tabela 1 - Dados referentes a idade dos estudantes

<b>Idade (anos)</b>	<b>Número de estudantes</b>	<b>Percentual de estudantes (%)</b>
15	1	2,5
16	15	37,5
17	19	47,5
18	5	12,5
Total	40	100

Fonte: a pesquisa.

Foi possível identificar que um quarto dos participantes da pesquisa (10 estudantes) trabalhavam em turno oposto ao da escola (entre 4h e 6h diárias) e que 42,5% (17 estudantes), cursavam cursos preparatórios para o vestibular ou ENEM (4h diárias). Diante deste resultado, buscou-se verificar o percentual de estudantes que possuíam o hábito de estudar em casa, e cerca de 65% dos estudantes (26 estudantes), afirmaram dedicar até uma hora do dia para estudar os conteúdos ministrados nas aulas. Esses dados evidenciaram, que nem todos os estudantes têm tempo livre para se dedicar aos estudos ministrados em sala de aula.

Outro questionamento que foi realizado no instrumento inicial, se refere a participação dos estudantes, concluintes do Ensino Médio, no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM/2017) ou em alguma prova de vestibular no final do ano de 2017. Quanto ao ENEM, 95% da turma (38 estudantes) afirmou que realizará a avaliação, no que se refere ao vestibular, este percentual diminuiu consideravelmente, apenas 60% dos estudantes (24 estudantes), pretende



fazer um curso superior. O quadro da Figura 16, apresenta os cursos superiores indicado pelos estudantes que responderam que prestarão vestibular no fim do ano. Destaca-se aqui, que só indicaram o curso superior desejado, os estudantes que indicaram que irão prestar o vestibular. Os estudantes que apenas indicaram a realização do ENEM não apontaram um curso de interesse.

Figura 16 – Curso Superior pretendido pelos estudantes

<b>Curso Superior</b>	<b>Frequência</b>
Arquitetura	1
Biologia (Licenciatura)	1
Direito	3
Educação Física	2
Biologia Marinha	1
Engenharia Química	1
Engenharia da Computação	1
Engenharia Mecânica	2
Estética	1
Física (Licenciatura)	1
Fisioterapia	3
Medicina	1
Piloto	1
Psicologia	2
Odontologia	1
Relações Públicas	2

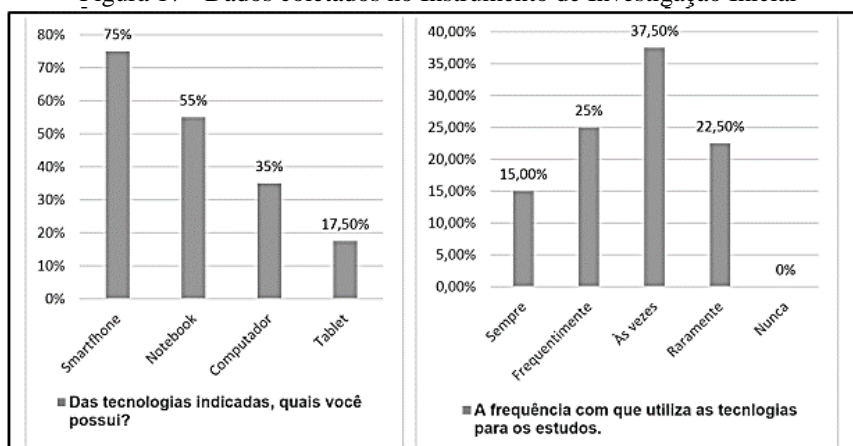
Fonte: a pesquisa.

Assim, com base na análise das respostas dos estudantes, foi possível perceber que as áreas de interesse que se sobressaem são Ciências e Exatas (5 estudantes), envolvendo os cursos de Licenciaturas e Biologia Marinha, Tecnológica (5 estudantes), abrangendo as Engenharias e Arquitetura e a área da Saúde (7 estudantes), Ciências Humana (5 estudantes) e outros cursos (2 estudantes).

Quando questionados pelo interesse em Matemática, 25% da turma (10 estudantes) apresentou grande dificuldade com relação a disciplina; cerca de 15% dos estudantes (6 estudantes) declaram gostar e não possuir dificuldades de aprendizagem, os demais estudantes, apontam a existência das dificuldades, no entanto, conseguem superá-las com o estudo.

Outra questão abordada, foi referente ao uso de tecnologias, em seus estudos. Buscou-se identificar quais aparelhos tecnológicos os estudantes possuíam, além da frequência com que se utilizavam dos mesmos. Os dados referentes a essas questões são apresentados nos gráficos da Figura 17.

Figura 17 - Dados coletados no Instrumento de Investigação Inicial



Fonte: a pesquisa.

Assim, os dados apontam que a maior parte da turma possui smartphone ou notebook, alguns estudantes indicaram ainda, possuir computador ou tablet, o que aponta que possuem acesso às tecnologias digitais. Observou-se, ainda que 100% dos estudantes possuíam acesso à internet na residência. Porém, mesmo com acesso, 22% dos estudantes apontam que raramente utilizam as tecnologias digitais para seus estudos e somente 15% declara utilizar sempre. Outro aspecto que foi possível identificar é que 17,5% (7 estudantes) estavam repetindo o 3º ano do Ensino Médio.

Ao longo do texto, para identificação dos estudantes de modo particular será utilizado o código do tipo G seguido do número do estudante na chamada como por exemplo, G1, G8 ou G40. Para identificar duplas ou grupos, a identificação segue a mesma regra, por exemplo, G2-8 é uma dupla, já os estudantes G3-15-31-33 formam um grupo.

## 5.2 ANÁLISE DO INSTRUMENTO DE INVESTIGAÇÃO INICIAL

Buscou-se no início do trabalho identificar aspectos dos conhecimentos prévios dos estudantes participantes da pesquisa, visando dar suporte para o desenvolvimento do material didático a ser trabalhado em sala de aula. Para isto, aplicou-se o Instrumento de Investigação Inicial (Apêndice J), que tinha como objetivo identificar o domínio dos estudantes, conforme destacado pelos PCN+ (BRASIL, 2002), quanto:

- linguagem padrão;
- definições de objetos geométricos espaciais e planos, semelhanças e diferenças;
- relação de posição entre retas, planos e reta e plano;
- noções primitivas.

Quando apresentada a proposta aos estudantes, os mesmos prontamente se propuseram a realizar as atividades. Toda a turma conseguiu realizar e entregar o instrumento no final da aula.

Para análise das atividades propostas nos instrumentos de investigação, busca-se apoio em Alba (2015), que estabeleceu um critério para emitir um juízo de valor sobre o desempenho dos estudantes, com base no modelo de Van Hiele.

A autora considerou três categorias: insatisfatório, percentual de acertos menor que 50%, satisfatório, percentual de acertos entre 50% e 70% e muito satisfatório, percentual de acertos maior ou igual a 70%. Apresenta-se no quadro da Figura 18, o critério adotado para análise do Instrumento de Investigação Inicial e dos demais instrumentos.

Figura 18 - Critério para análise do Instrumento de Investigação Inicial

<b>Desempenho</b>	<b>Percentual de acertos</b>	<b>Descrição</b>
Muito Satisfatório	$\geq 70\%$	Serão considerados muito satisfatórios os desempenhos nas tarefas, ou conjuntos de tarefas, nas quais os estudantes, individualmente ou em grupos, atingirem um percentual de acertos igual ou superior a 70% da tarefa.
Satisfatório	$\geq 50\% \text{ e } < 70\%$	Serão considerados satisfatórios os desempenhos nas tarefas, ou conjuntos de tarefas, nas quais os estudantes, individualmente ou em grupos, atingirem um percentual de acertos igual ou superior a 50% e menor que 70% da tarefa.
Insatisfatório	$< 50\%$	Serão considerados insatisfatórios os desempenhos nas tarefas, ou conjuntos de tarefas, nas quais os estudantes, individualmente ou em grupos, atingirem um percentual de acertos inferior a 50%.
Não responderam		Percentual de alunos que não responderam ou não realizaram a tarefa.

Fonte: adaptado de Alba (2015).

No que segue, apresenta-se, na Tabela 2, uma síntese do desempenho dos estudantes diante da aplicação do Instrumento de Investigação Inicial.

Tabela 2 - Desempenho da turma no Instrumento Inicial

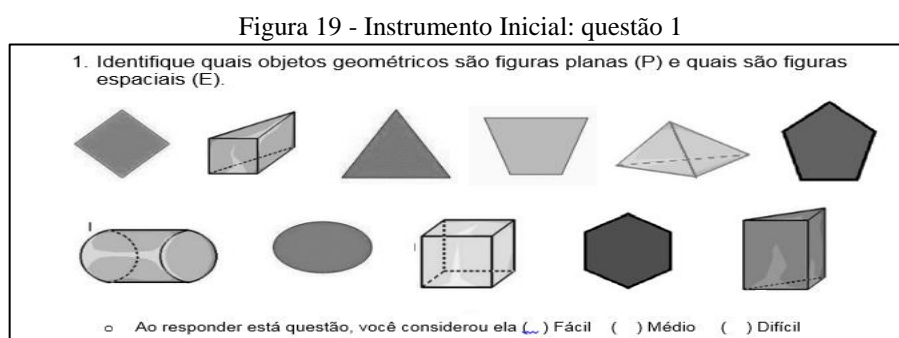
Questão	Nível do modelo	Desempenho da Turma (%)				Total
		Muito Satisfatório	Satisfatório	Insatisfatório	Não responderam	
1	1	100	0	0	0	100
2	1	62,5	22,5	15,0	0	100
3	2	82,5	14,0	0	3,5	100
4	2	27,5	31,0	18,5	23,0	100
5	3	35,0	0	46,5	18,5	100
6	3	53,0	0	37,5	9,5	100
7	2	25,0	57,5	12,5	5,0	100
8	3	10,0	32,5	37,5	20,0	100

Fonte: a pesquisa.

É possível observar que o desempenho da turma, em questões envolvendo o nível de Visualização (nível 1) do modelo foi de 92,5%, apresentando desempenho muito satisfatório. Considera-se esse resultado compatível com o nível de ensino dos estudantes do terceiro ano do Ensino Médio. Quanto às questões pertencentes ao nível de análise (nível 2), o desempenho foi em torno de 79% (média dos desempenhos satisfatório e muito satisfatório). Porém, no nível de dedução informal do modelo (nível 3), pode-se observar uma inconstância no desempenho da turma, posto que, em determinadas atividades apresentaram desempenho satisfatório, em outro desempenho insatisfatório, assim como cerca de 15,5% dos estudantes não responderam as atividades pertinentes a este.

A análise apresentada possibilitou observar o panorama do desempenho da turma em cada questão e, assim, propiciar o desenvolvimento de estratégias para auxiliar no ensino dos conteúdos a serem trabalhados com os estudantes. Com o objetivo de saber a opinião dos estudantes a respeito das atividades, foi proposta uma avaliação no final de cada questão do Instrumento de Investigação Inicial, para que o estudante classificasse a questão pelo grau de dificuldade enfrentado ao realiza-la (em fácil, médio ou difícil). Logo na análise das atividades, será destacada a opinião dos estudantes para a referida questão.

No quadro da Figura 19, apresenta-se a primeira atividade do Instrumento de Investigação Inicial, que tinha por objetivo verificar se os estudantes conseguiriam distinguir figuras geométricas planas de sólidos geométricos.

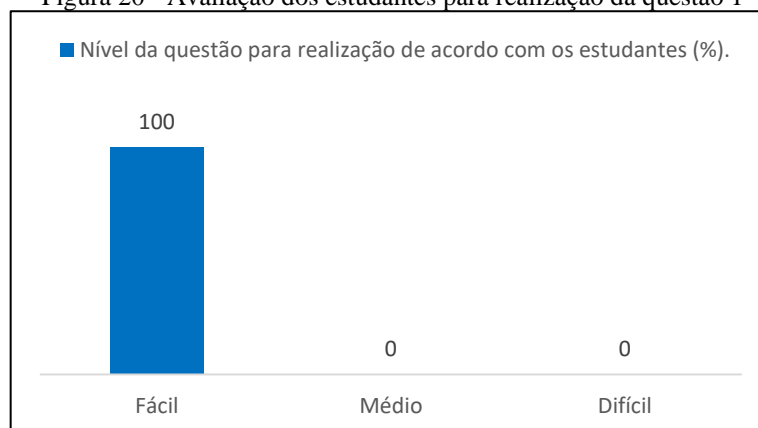


Fonte: a pesquisa.

O resultado apresentado na avaliação da atividade foi muito positivo, visto que 100% dos estudantes conseguiram realizar a questão corretamente, classificando os objetos geométricos sem grandes dificuldades. Este resultado aponta para o domínio dos conceitos de figura plana e objeto espacial pelos estudantes indicando compreensão no nível de visualização.

Confirmando o desempenho satisfatório dos estudantes em sua totalidade consideraram a questão fácil, conforme indicado no gráfico da Figura 20.

Figura 20 - Avaliação dos estudantes para realização da questão 1



Fonte: a pesquisa.

Na segunda questão, o objetivo era investigar o domínio da turma referente a nomenclatura padrão dos objetos geométricos. Do grupo investigado, 62,5% dos estudantes apresentaram desempenho muito satisfatório, entretanto, 22,5% dos estudantes (resultado satisfatório) conseguiram responder, corretamente, apenas a nomenclatura das figuras planas, conforme exemplo apresentado na Figura 21, referente ao aluno G15. É possível perceber que não houve dificuldades em indicar a nomenclatura das figuras planas, porém, há evidências do não domínio da linguagem padrão dos objetos geométricos espaciais.

Figura 21 - Resolução da atividade do estudante G15

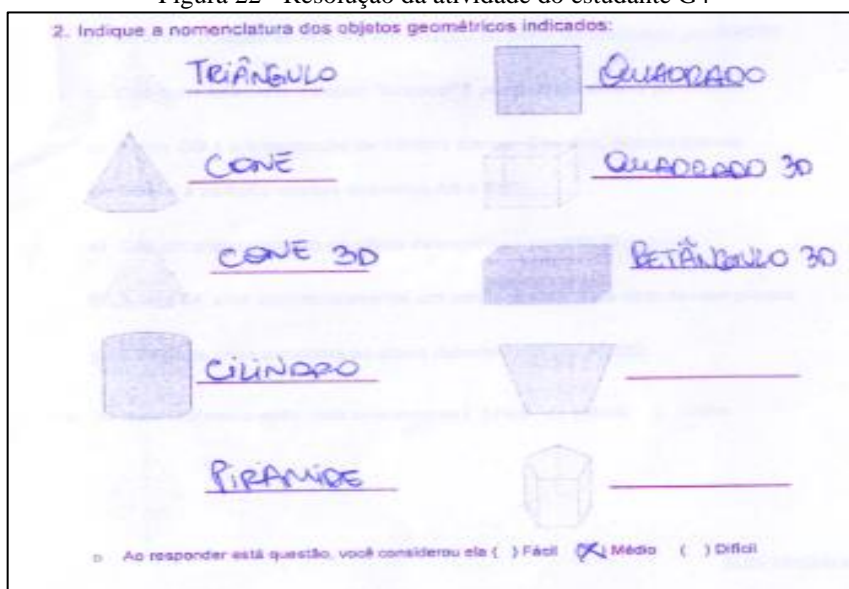


Fonte: a pesquisa.

Quanto, a nomenclatura padrão necessária para identificação dos objetos geométricos espaciais, Moraes (2014), salienta que ainda é comum identificar estudantes que apresentem

dificuldades em nomear sólidos geométricos, destacando que, isso ocorre muito em função do trabalho realizado em sala de aula. Na Figura 22, apresenta-se a produção do estudante G4, considerado insatisfatório.

Figura 22 - Resolução da atividade do estudante G4



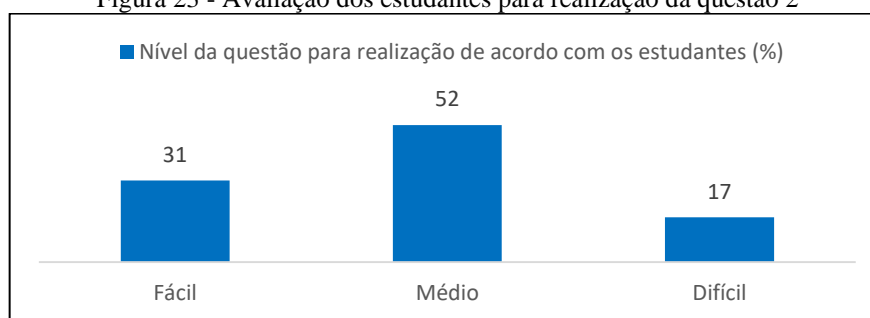
Fonte: a pesquisa.

As respostas indicadas pela estudante evidenciam a falta de domínio da linguagem padrão, visto que se refere à pirâmide como cone, ao cone, como cone 3D, ao cubo, como quadrado 3D e o paralelepípedo como retângulo 3D.

A atividade do estudante indica que o mesmo possui habilidade visual, no sentido de identificar as figuras espaciais, ao responder, por exemplo, ser um “quadrado 3D”. Entretanto, não possui habilidade verbal, já que não consegue indicar a nomenclatura padrão dos objetos geométricos. Considera-se este, um resultado muito aquém do desejado para estudantes que estão finalizando o Ensino Médio e ainda apresentam dificuldades no domínio da nomenclatura Matemática.

Apesar de ser uma atividade simples, os estudantes avaliaram a questão, como sendo de grau médio a difícil, conforme apresentado no gráfico da Figura 23.

Figura 23 - Avaliação dos estudantes para realização da questão 2



Fonte: a pesquisa.

Em relação a terceira e a quarta atividades do instrumento, buscava-se averiguar o conhecimento dos estudantes referente a Geometria de Posição, logo, apresentou-se na terceira questão, posições relativas entre retas e, na quarta, posições relativas entre dois planos. Ambas atividades exigiam domínio de linguagem padrão nas relações de posição apresentadas, além do conhecimento das mesmas. Apesar da semelhança entre as atividades, os estudantes demonstraram maior facilidade em responder a atividade que se referia as posições relativas entre retas e, grande dificuldade em realizar a questão referida a posições relativas entre planos.

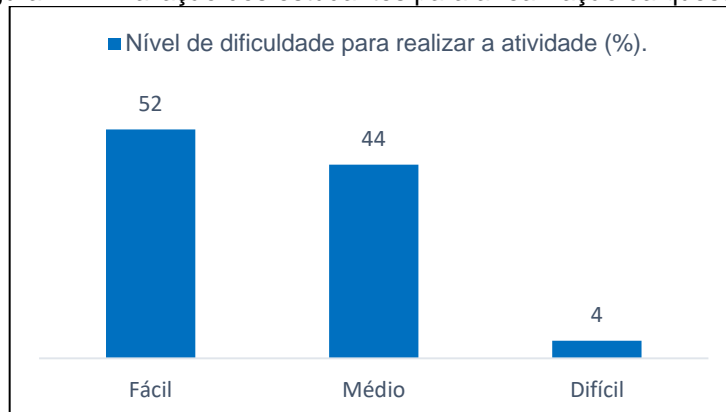
Assim, foi possível perceber que os estudantes possuíam conhecimento em relação a geometria de posição entre retas (questão 3, 96,5% de desempenho satisfatório), conteúdo abordado ao longo do Ensino Fundamental. Já quanto as relações entre planos, observou-se a dificuldade dos estudantes em indicar as posições, o que aponta que os objetos espaciais não são uma extensão dos objetos do plano. Para Van Hiele (1957), o progresso do pensamento geométrico não está relacionado apenas à maturidade ou à idade do sujeito, mas sim às atividades educativas e às situações didáticas organizadas pelo professor. Ou seja, se os conceitos são desenvolvidos considerando uma diversidade de abordagens pelo professor os estudantes poderão ter maior dificuldade em compreendê-lo.

Quanto à questão número 4, referente a identificação das relações de posição entre dois planos, os estudantes apresentaram bastante dificuldade em realizar a atividade. Sendo que, apenas 58,5% da turma conseguiu identificar as relações de posição e referencia-las com nomenclatura padrão, apresentando desempenho satisfatório (soma do desempenho muito satisfatório e satisfatório), 18,5% dos estudantes apresentaram desempenho insatisfatório e 23% não responderam à questão.

Apresentam-se nos gráficos das Figuras 24 e 25, a opinião dos estudantes ao avaliarem as dificuldades enfrentadas para a realização das atividades 3 e 4. Os gráficos apresentados, confirmam o desempenho da turma nas atividades. Na questão 3, os estudantes mostraram mais

facilidade para realizar a questão, avaliando a mesma, como uma atividade de nível fácil a médio para sua realização.

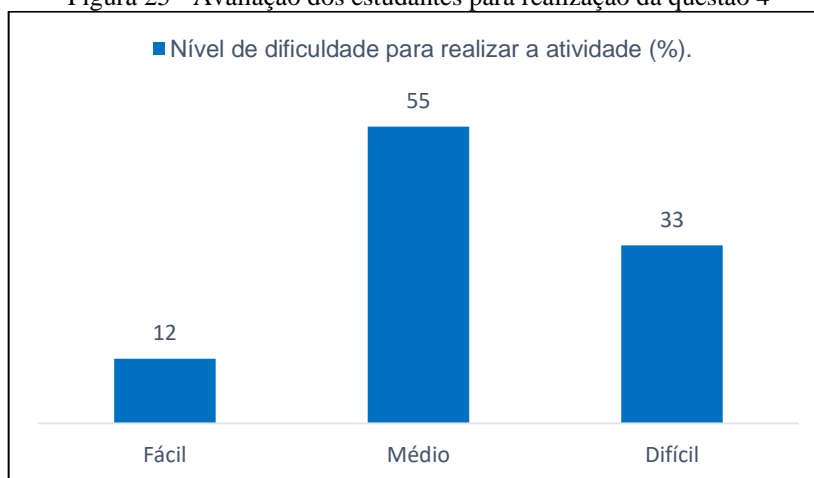
Figura 24 - Avaliação dos estudantes para a realização da questão 3



Fonte: a pesquisa.

Já, na questão 4, o qual os estudantes apresentaram maior dificuldade em resolvê-la, avaliaram a atividade de nível médio a difícil.

Figura 25 - Avaliação dos estudantes para realização da questão 4



Fonte: a pesquisa.

Na quinta e sexta questão (Figura 26), buscou-se identificar o conhecimento dos estudantes referente a relações primitivas em Geometria, bem como os primeiros axiomas. O resultado apontou que boa parte da turma possuía clareza (53% dos estudantes tiveram desempenho muito satisfatório) quanto a noções primitivas de ponto (questão 6). Contudo, quanto a questão 5, a turma demonstrou não possuir domínio desta noção primitiva, visto que, cerca de 69% dos estudantes não responderam à questão.



Figura 26 - Instrumento Inicial: questões 5 e 6

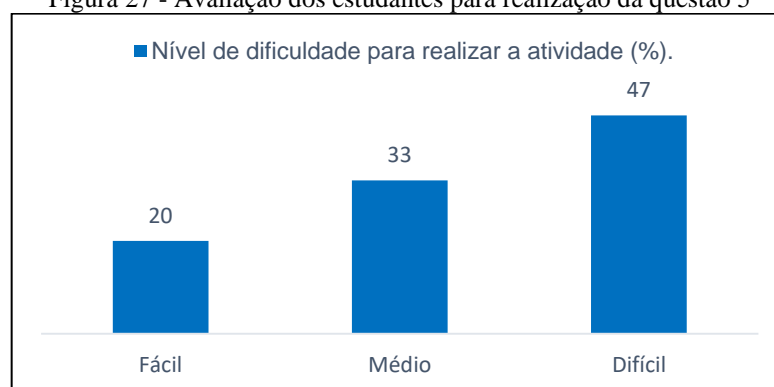
5. Quantas retas podemos traçar, a partir de um ponto em um plano?
6. Quantas retas podemos traçar, a partir de dois pontos em um plano?

Fonte: a pesquisa.

Buscava-se identificar nessas atividades conhecimentos e habilidades referentes ao nível de dedução informal (nível 3) do modelo de van Hiele, com a atribuição de significado a noções e relações primitivas. Todavia, percebe-se que os estudantes não possuem estas compreensões, mesmo que sejam conceitos básicos da Geometria, logo, não há avanço na construção do pensamento geométrico, posto que, subsistem lacunas na aprendizagem. Tal evidencia contraria o que os PCN+ (BRASIL, 2011) orientam, posto que, a Geometria deve ser abordada ao longo da Educação Básica, com finalidade de consolidação e aprofundamento dos conhecimentos adquiridos, tanto no Ensino Fundamental, como no Ensino Médio.

Quanto à avaliação dos estudantes frente às dificuldades na realização das atividades, os resultados foram coerentes com o desempenho apresentado pela turma. Na questão 5, 47% dos estudantes (Figura 27) avaliou a atividade como sendo de grau difícil, confirmando a dificuldade apresentada pela turma ao resolver a mesma.

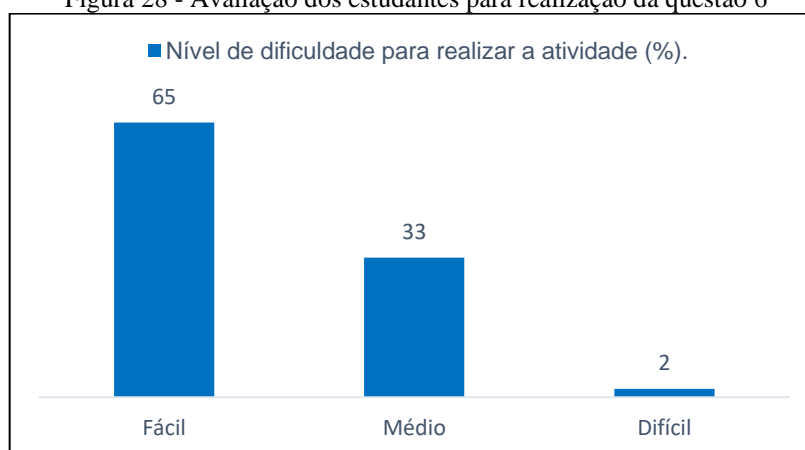
Figura 27 - Avaliação dos estudantes para realização da questão 5



Fonte: a pesquisa.

Já na questão 6, os estudantes em sua maioria acharam a atividade de nível fácil (Figura 28), confirmando o bom desempenho que apresentaram ao realizar a atividade.

Figura 28 - Avaliação dos estudantes para realização da questão 6



Fonte: a pesquisa.

No que se refere às atividades 7 e 8 do instrumento de investigação inicial, as mesmas tinham como objetivo analisar o domínio da turma quanto as relações geométricas entre retas e planos, assim como a percepção das relações existentes em diferentes figuras. Diante do exposto, apresentam-se as atividades e a avaliação dos estudantes referente as questões.

Em relação a atividade número 7 (Figura 29), os resultados foram positivos, uma vez que, boa parte da turma conseguiu realizar a atividade sem grandes dificuldades, demonstrando possuir nesta atividade habilidade visual, verbal e gráfica. Esta atividade foi classificada como nível de análise (nível 2) do modelo do pensamento geométrico de Van Hiele, por exigir do estudante, identificação das características a partir da observação da figura.

Figura 29 - Instrumento Inicial: questão 7

7. Na cadeira representada na figura, o encosto é perpendicular ao assento e este é paralelo no chão. Sendo assim, indique as afirmações corretas:

- Os planos EFNM e FGKN são paralelos.
- Os planos HIJG e EMNF são paralelos.
- Os planos FGKN e EMLH são paralelos.
- HG é um segmento de reta comum aos planos EFNM e EFGH.
- EF é um segmento de reta comum aos planos EFNM e EFGH.
- Os planos MNLK é perpendicular ao plano IJHG.
- EH é um segmento de reta paralelo ao segmento de reta NK.
- GK é um segmento de reta perpendicular ao plano IJKL.

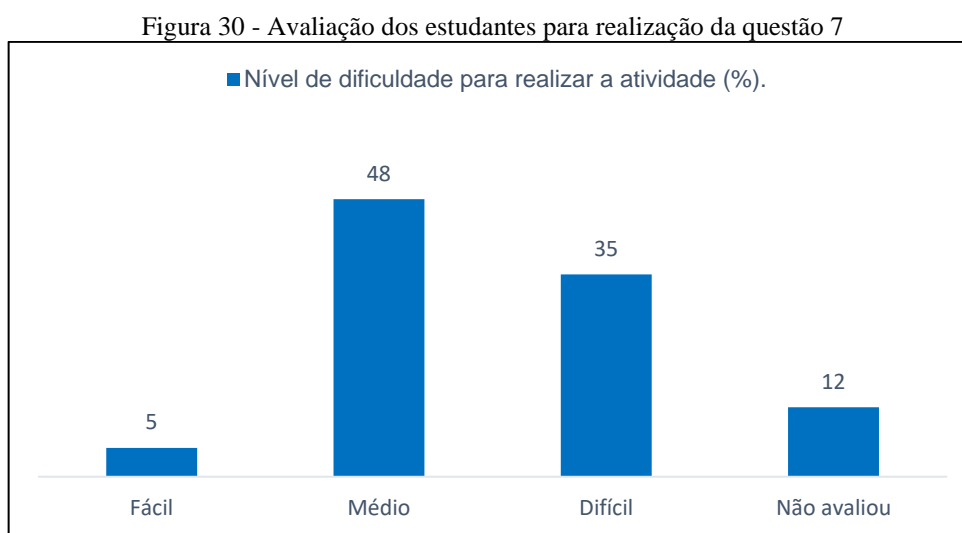
Ao responder está questão, você considerou ela ( ) Fácil ( ) Médio ( ) Difícil

Fonte: a pesquisa.

Entende-se desta atividade, a turma demonstrou possuir habilidades exigidas na competência proposta pelo ENEM (BRASIL, 2016), para Geometria, o qual indica que os

estudantes devem saber identificar características de figuras planas e espaciais, bem como utilizar o conhecimento geométrico já adquirido para realizar leitura e representação da realidade e agir sobre ela.

Apesar do bom desempenho apresentado pela turma, poucos estudantes consideraram a atividade de nível fácil, a maioria destacou ser uma questão de nível médio a difícil, conforme apresentado no quadro da Figura 30. Argumenta-se que essa postura dos estudantes dá indícios de que os mesmos têm entendimento sobre o que tem domínio com relação ao conteúdo estudado, considerando uma coerência entre o desempenho satisfatório e o entendimento de que a questão tinha grau de dificuldade médio.



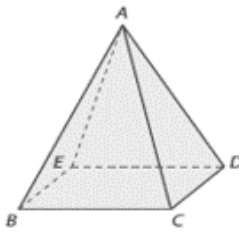
Fonte: a pesquisa.

Já em relação a questão 8 (Figura 31), apesar da atividade ser semelhante a anterior, destaca-se o baixo desempenho apresentado pela turma, sendo que quase 68% dos estudantes tiveram desempenho insatisfatório ou não realizaram a atividade. Essa atividade foi classificada como nível de dedução informal (nível 3) do modelo de pensamento geométrico de Van Hiele, por exigir do estudante, clareza dos conceitos abordados para que pudesse realizar a atividade com exatidão.

Apesar de semelhantes a atividade 8 envolvia ênfase maior na linguagem simbólica, enquanto que a atividade 7 se utilizava mais da linguagem natural. Ainda, a atividade 8 indicava uma pirâmide e posições de retas diferentes das paralelas e perpendiculares da atividade 7. Entende-se que estas questões podem ter influenciado no desempenho dos estudantes.

Figura 31 - Instrumento Inicial: questão 8

8. Observe a pirâmide de base quadrada e verifique se as retas indicadas em cada item são paralelas, concorrentes ou nenhuma das duas.



a)  $\overleftrightarrow{AC}$  e  $\overleftrightarrow{AD}$  :                      d)  $\overleftrightarrow{EC}$  e  $\overleftrightarrow{BD}$  :

b)  $\overleftrightarrow{AB}$  e  $\overleftrightarrow{ED}$  :                      e)  $\overleftrightarrow{BC}$  e  $\overleftrightarrow{AE}$  :

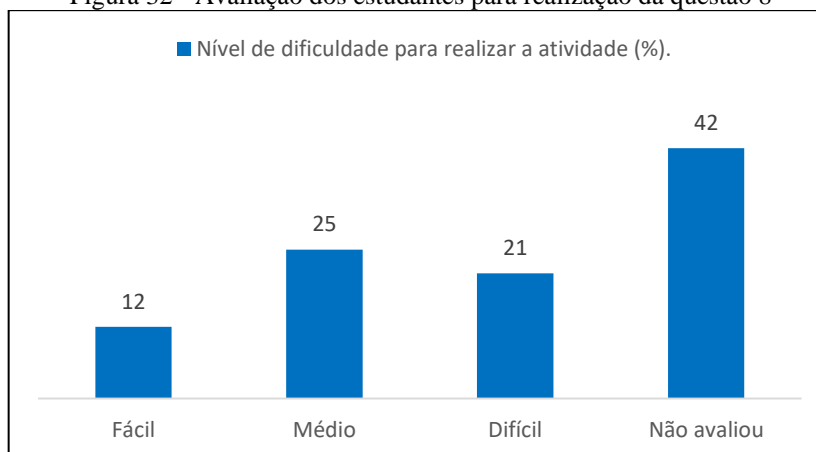
c)  $\overleftrightarrow{CD}$  e  $\overleftrightarrow{ED}$  :                      f)  $\overleftrightarrow{AE}$  e  $\overleftrightarrow{AC}$  :

Ao responder esta questão, você considerou ela ( ) Fácil ( ) Médio ( ) Difícil

Fonte: a pesquisa.

As dificuldades em resolver a questão se refletiram na avaliação do grau de dificuldade do mesmo, pois além de 42% não avaliarem a questão, 21% a consideraram difícil. Esses dados podem ser vistos no gráfico da Figura 32.

Figura 32 - Avaliação dos estudantes para realização da questão 8



Fonte: a pesquisa.

Entende-se que o conjunto de atividades analisadas permitiu perceber a segurança e conhecimento dos estudantes ao resolver atividades elementares, porém quando a questão exigia conhecimento mais profundo e estabelecimento de relações os estudantes demonstraram maior dificuldade.

Villiers (2010) salienta que muitas vezes a falha na compreensão dos conceitos geométricos ocorre em função do currículo proposto aos estudantes, visto que, se o estudante não possuir compreensão dos conceitos básicos, logo não ocorrerão avanços no conhecimento, dificultando a aprendizagem. Tal contexto, ficou evidenciado nas atividades propostas, quando

houve maior exigência do conhecimento matemático, os estudantes, tiveram dificuldade em realizar a atividade.

Com base nos resultados destacados e tomando como referência as habilidades apontadas por Hoffer (1981) foi possível avaliar as tarefas realizadas pelos estudantes, conforme destacado no quadro da Figura 33.

Figura 33 - Habilidades identificadas nas atividades do Instrumento de Investigação Inicial

Questão	Nível	Habilidade	Estudantes que tiveram Desempenho Satisfatório <sup>16</sup> (%)
1	Visualização	Visual	100
2		Visual, Verbal e Gráfica	85,0
3	Análise	Visual e Verbal	96,5
4		Visual e Verbal	58,5
5	Dedução	Verbal	35,0
6	Informal	Verbal	53,0
7	Análise	Visual, Verbal, Gráfica e Lógica	82,5
8	Dedução Informal	Visual, Verbal, Gráfica e Lógica	42,5

Fonte: a pesquisa.

Os dados do Instrumento Inicial apontam para um bom desempenho nas atividades que se enquadravam no primeiro nível do modelo (nível de visualização) desenvolvendo com êxito as habilidades esperadas nas atividades, o mesmo ocorrendo nas questões que se enquadravam ao nível de análise (segundo nível) do modelo. Já nas questões que exigiam conhecimento das habilidades relacionadas ao nível de dedução informal (terceiro nível), os estudantes apresentaram maior dificuldade de compreensão e resolução das atividades. Deste modo, a partir dos resultados analisados, se aperfeiçoou os materiais desenvolvidos para serem trabalhados em sala de aula com os estudantes, para assim, auxiliar nas dificuldades evidenciadas pela turma.

Logo serão apresentados os dados oriundos a aplicação da UEA na turma investigada.

### 5.3 APLICAÇÃO E ANÁLISE DA UNIDADE DE ENSINO E APRENDIZAGEM (UEA)

Neste subcapítulo, faz-se uma descrição e análise da aplicação da UEA. Será descrito o andamento das aulas, bem como a análise dos dados obtidos a partir de produções dos estudantes ao longo do desenvolvimento da UEA.

<sup>16</sup> Desempenho Satisfatório é a soma do desempenho muito satisfatório e satisfatório apresentado pela turma, considera-se um resultado compatível com o nível de ensino de estudantes do terceiro ano do Ensino Médio.

A análise do Instrumento de Investigação Inicial, aplicado no início da investigação, serviu de base para que a professora/pesquisadora percebesse aspectos do domínio de conhecimento e do nível de desenvolvimento do pensamento geométrico dos estudantes. Tomando como referência os resultados da aplicação desse instrumento bem como aspectos tomados a partir de pesquisas e do referencial teórico tomado, desenvolveu-se um material de estudo organizado em três eixos temáticos: Geometria de Posição, Noções Primitivas e Conhecimentos Básicos e Poliedros: Prisma e Pirâmide, sendo que, em cada eixo, foi elaborado uma sequência de materiais para serem trabalhado em sala de aula. Este material recebeu a designação Unidade de Ensino e Aprendizagem (UEA).

No eixo Geometria de Posição, abordaram-se as relações geométricas de posição, no plano e no espaço, entre retas, entre planos e entre retas e planos, buscando proporcionar ao estudante a compreensão destes conceitos. Em função do tempo disponibilizado para a investigação, foi desenvolvido um material (Apêndice C) para que os estudantes pudessem ter um material de referência para o desenvolvimento de conceitos, definições, exemplos, os quais servissem de referência para debates e questionamentos em sala de aula, bem como, atividades com material concreto e com o *software* GeoGebra.

O eixo Noções Primitivas e Conhecimentos Básicos, propôs aos estudantes, uma revisão dos conceitos básicos da Geometria Plana, apresentando também, os conceitos básicos da Geometria Espacial. Para tal, desenvolveu-se material a ser utilizado em aula (Apêndice D), bem como um material de estudo (Apêndice N). Foram desenvolvidas, também, atividades de construção no *software* de GeoGebra, além da aplicação de um conjunto de tarefas com os conceitos trabalhos em aula.

No eixo Poliedros: Prisma e Pirâmide trabalhou-se o conceito de Poliedro (classificação, elementos, propriedades), bem como, os conceitos de Prisma e Pirâmide. O material utilizado nas aulas (Apêndice E) buscava destacar diferenças e semelhanças dos tipos de poliedros, apresentados, assim como suas particularidades. Nesse eixo, trabalhou-se construção de sólidos no *software* GeoGebra em conjunto de atividades com os conceitos trabalhados em aula.

Os materiais utilizados em aula foram constituídos de atividades realizadas individualmente e em dupla, uma vez que, de acordo com Villareal (1999), ao trabalhar em dupla são elaborados diálogos que auxiliam na construção do conhecimento, bem como ocorre colaboração mútua. No entanto, como se trata de uma turma numerosa e o LABIN disponibilizava um número reduzido de computadores funcionando, julgou-se adequado trabalhar em pequenos grupos de estudantes (até quatro estudantes) para realização das atividades propostas.

Destaca-se que a UEA proposta à turma foi organizada visando proporcionar aos estudantes as cinco fases de aprendizagem descrita no modelo de Van Hiele – informação, orientação dirigida, explicação, orientação livre e integração. De acordo com Nasser e Santana (2010), só há avanço de um nível para outro, quando o aluno passa pelas cinco fases de aprendizagem do modelo, sendo que, muitas vezes, essas podem ocorrer simultaneamente.

No que segue, são apresentadas as descrições e análises dos dados referentes à Unidade de Ensino e Aprendizagem (UEA):

### **5.3.1 Contato com software GeoGebra**

Como o GeoGebra seria utilizado ao longo de todo o trabalho, julgou-se pertinente realizar o que se denominou de atividades de familiarização com o *software* GeoGebra. Tais atividades foram desenvolvidas em dois períodos no laboratório de informática da escola (LABIN).

Observou-se que os estudantes estavam bem animados e ansiosos frente a perspectiva da realização de atividades relacionadas à utilização de tecnologias, apesar de já terem utilizado o LABIN outras vezes, com relação ao uso de *softwares* na disciplina de Matemática, era a primeira vez.

No primeiro momento o *software* GeoGebra foi apresentado aos estudantes, quando foram destacadas janelas, ferramentas, funções, para que então, a turma realizasse a atividade de familiarização para reconhecimento do funcionamento, dos comandos e ferramentas do *software*. Os alunos criaram objetos de diferentes formas geométricas e já foram descobrindo comandos que nem tinham sido apresentados. Tal fato confirma o que Gravina e Basso (2012) já apontavam, quanto ao uso de tecnologias digitais em sala de aula: o seu uso só se torna interessante quando ajuda a mudar a dinâmica da sala de aula em direção de valorizar o desenvolvimento de habilidades cognitivas, característica esta, demonstrada pela turma já no primeiro contato com o *software* GeoGebra surpreendendo positivamente a professora/pesquisadora.

Ficou combinado com a turma que todas as produções realizadas no *software* seriam salvas com o nome dos estudantes do grupo e enviadas para um e-mail fornecido pela professora/pesquisadora. As aulas realizadas no LABIN transcorreram dentro do esperado, agitação normal dos estudantes por estarem fora da sala de aula e organizados em grupos.

Para a aplicação da UEA junto aos estudantes, a professora/ pesquisadora apresentou a direção da escola itens importantes para o desenvolvimento da investigação, como a instalação do *software* GeoGebra versão 5.0 e a disponibilidade do LABIN no período da aplicação da

pesquisa. Entretanto, o início do trabalho, apresentou alguns contratemplos, como a inoperância de seis dos vinte computadores existentes no laboratório de informática, e o fato de uma versão antiga do *software* ter sido instalado em alguns computadores. Como o trabalho realizado com a turma é voltado para a utilização da janela de visualização em 3D, ferramenta que está disponibilizada na versão 5.0 do *software* o início do trabalho não transcorreu como previsto. Contudo, os problemas foram controlados com auxílio de um aluno da turma que recuperou três dos seis computadores inoperantes e instalou a versão mais atual do *software* GeoGebra nos computadores que apresentaram a versão mais antiga do *software*.

As dificuldades iniciais encontradas foram já destacadas em pesquisas como Santos (2006), Almeida (2010), Gobbi (2012), Souza (2014), Silva (2015), os quais ressaltam como pontos negativos o uso de tecnologias em sala de aula, os problemas enfrentados em relação ao funcionamento dos computadores, além do número limitado de computadores para a turma e problemas com conectividade.

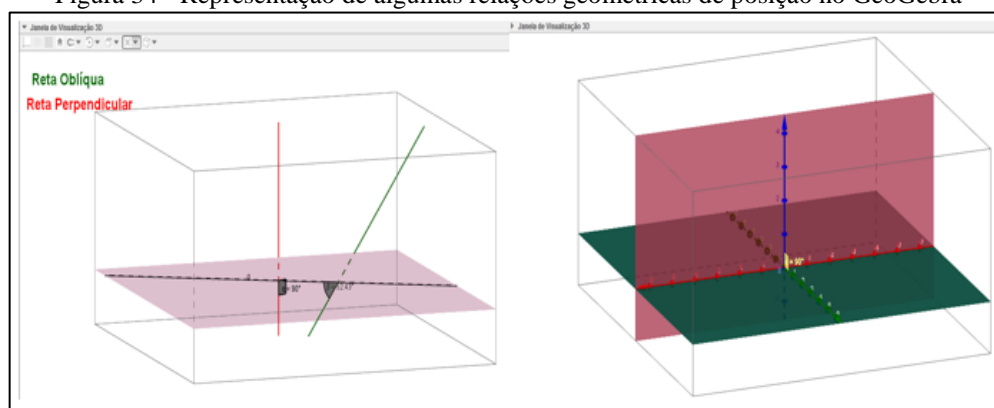
### **5.3.2 Geometria de Posição**

Com o intuito de introduzir a ideia de Geometria de Posição, buscaram-se alternativas para que essa abordagem não se restringissem as apresentadas nos livros didáticos. A aula dessa temática foi desenvolvida em um período, no laboratório de Matemática, a partir do material desenvolvido pela professora/pesquisadora. Buscou-se, sempre que possível, relacionar o conteúdo abordado em aula a materiais concretos, sendo que a utilização de tais materiais foi bem recebida pela turma. Os estudantes participavam e auxiliavam os colegas a realizar as atividades propostas.

Nessa temática, a professora/pesquisadora disponibilizou aos estudantes um conjunto de objetos de aprendizagem, para que pudessem visualizar, relacionar, modificar, alterar, comparar as relações geométricas de posição e, assim, conjecturar a respeito do conteúdo estudado, conforme destacado nas Figuras 34 e 35.



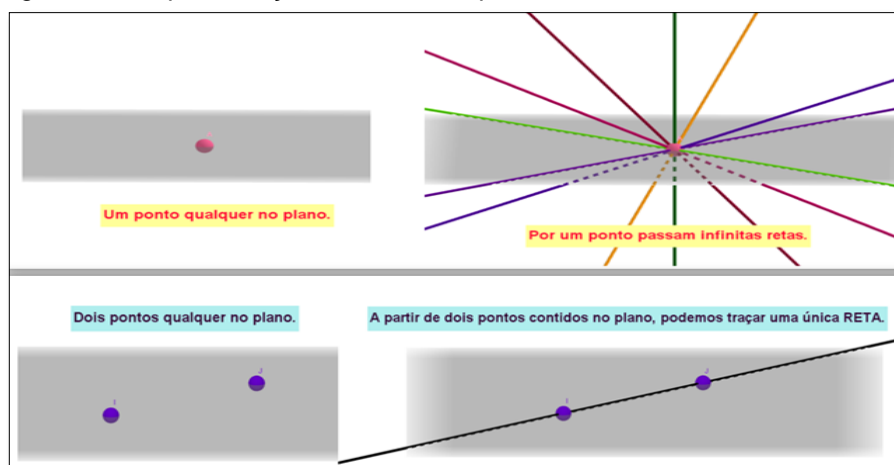
Figura 34 - Representação de algumas relações geométricas de posição no GeoGebra



Fonte: a pesquisa.

Os objetos de aprendizagem foram disponibilizados aos estudantes no eixo temático Geometria de Posição, e potencializando a aprendizagem dos mesmos.

Figura 35 - Representação de conceitos primitivos de Geometria no GeoGebra



Fonte: a pesquisa.

Buscou-se nessa atividade, proporcionar situações em que os estudantes pudessem visualizar as representações de posição, bem como fazer relações, identificar características e propriedades dos objetos estudados. Os resultados apresentados pela turma foram muito positivos, confirmando o que Giraldo, Caetano, Mattos (2012) destacam quanto ao uso de *software* de Geometria Dinâmica, uma vez que, tal utilização permite que os estudantes interajam com os objetos de forma dinâmica a partir das propriedades e relações estabelecidas, o que potencializa as aprendizagens por meio.

Os estudantes puderam por meio do trabalho com os objetos de aprendizagem, desenvolvidos pela professora/ pesquisadora, visualizar, interagir, explorar, conjecturar sobre os conceitos abordados e esclarecer questões que até então não haviam compreendido.

A investigação dedicada a este eixo foi organizado em dois períodos, por se tratar de conceitos, ao quais os estudantes indicaram possuir conhecimento. O trabalho focou nos conceitos em que os estudantes apresentaram maior dificuldade no instrumento de investigação inicial, como posições relativas entre planos.

### 5.3.3 Noções Primitivas e Conhecimentos Básicos

As aulas desse eixo foram desenvolvidas em quatro períodos, a partir do trabalho com material desenvolvido para o mesmo (Apêndice D), iniciou-se o estudo sobre Noções Primitivas e Conhecimentos Básicos apresentando um conjunto de figuras geométricas como quadrados, retângulos, triângulos, trapézios, círculos, cubo, paralelepípedo, pirâmide, prismas de bases diversas, esfera, cone e cilindro, entregue aos grupos, para que identificassem e destacassem possíveis semelhanças e diferenças.

Salienta-se que ao longo das atividades com a turma, buscava-se trabalhar as fases de aprendizagem conforme destacado por Crowley (1994): informação, orientação dirigida, explicação, orientação livre, integração, posto que, de acordo com a autora, o modelo de Van Hiele preconizava que o processo de desenvolvimento do pensamento geométrico do estudante poderia ser acelerado com o auxílio do docente. Após apresentar os objetos geométricos para a turma, solicitou que conversassem em grupo sobre o material apresentado, explorassem ao máximo, os detalhes e características. Diante disso, os grupos começaram a responder a atividade.

De acordo, com o grupo de estudantes G1-12-14-23-28 a semelhança identificada entre uma figura de um quadrado e de um cubo, refere-se à: *“as figuras são semelhantes por que de certo modo os dois tem formato de quadrado”*. Já com relação à diferença identificada pelo grupo, a afirmação foi no sentido da representação dos objetos *“um está desenhado no chão/ folha de papel e o outro está projetado no chão/ no espaço”*. As manifestações dos estudantes dão indícios de que possuem uma noção do que é plano e do que é espaço o que foi corroborado pela manifestação (acompanhada de gestos) *“o quadrado está no papel [passando a mão sobre o tampo da classe] e o cubo possui uma altura, um volume no espaço”*.

Já o grupo dos estudantes G21-29-31-36-40, ao se manifestar, indicaram as semelhanças como *“a semelhança é porque os dois tem quatro lados iguais”*, explicando, em seguida, que cada “face” do cubo é um quadrado. Com relação às diferenças, os estudantes destacaram que *“o quadrado é uma figura plana e o cubo uma figura espacial”*. Foi possível perceber que, embora nem sempre utilizem uma linguagem adequada, os estudantes desse grupo apresentam domínio dos conceitos do que é figura plana e figura espacial.

Após a atividade inicial passou-se a trabalhar com o material didático (Apêndice N), constituído por conceitos, propriedades, definições básicas e noções primitivas, bem como os elementos pertencentes aos poliedros. Destaca-se que, os materiais concretos disponibilizados no Laboratório de Matemática foram utilizados ao longo de todo o trabalho, assim como objetos de aprendizagem e atividades com o GeoGebra.

Articulado com o trabalho realizado a partir do material didático (Apêndice N) e a ação com os materiais concretos, desenvolveu-se uma atividade no LABIN, para que os estudantes pudessem construir sólidos geométricos com o auxílio do *software* GeoGebra podendo, assim, visualizar, mover e planificar as construções. A atividade tinha como objetivo identificar a apropriação de conceitos sobre poliedros. Destaca-se, na Figura 36, a atividade proposta aos estudantes.

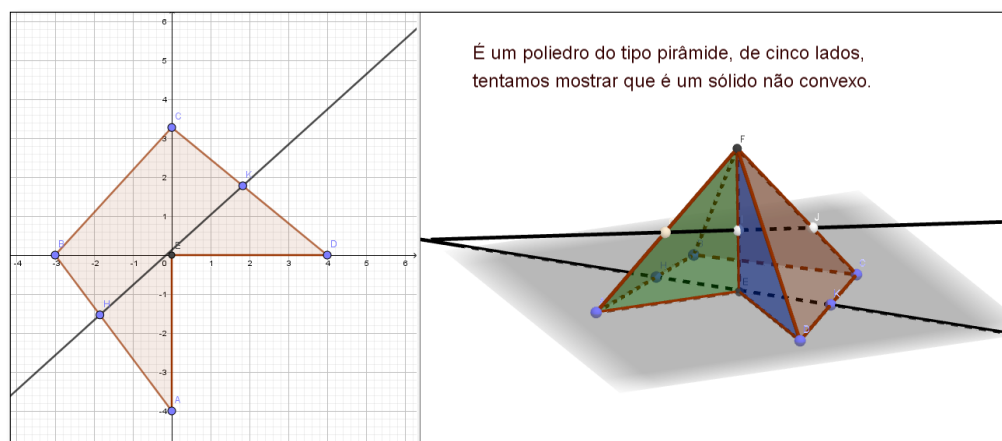
Figura 36 - Atividade I no LABIN

1. Com auxílio do *software* GeoGebra construa sólidos geométricos, e indique:
  - características observadas no sólido construído;
  - se é convexo ou não convexo;
  - sua nomenclatura, quando possível.Utilize-se das ferramentas disponibilizadas pelo *software* para representar seu objeto geométrico.

Fonte: a pesquisa.

Observou-se que, apesar das dificuldades enfrentadas por dois grupos, a turma se empenhou para realização a atividade. Foram feitas tanto construções simples, como mais elaboradas, no entanto, todos os grupos concluíram a atividade apontando características e a classificação dos sólidos. Destaca-se a resolução do grupo de estudante G32-39-40 (Figura 37), os quais realizaram a atividade demonstrando muita habilidade e criatividade no uso do *software*, assim como conhecimentos sobre o conceito envolvido.

Figura 37 - Sólido construído por um grupo de estudantes



Fonte: a pesquisa.

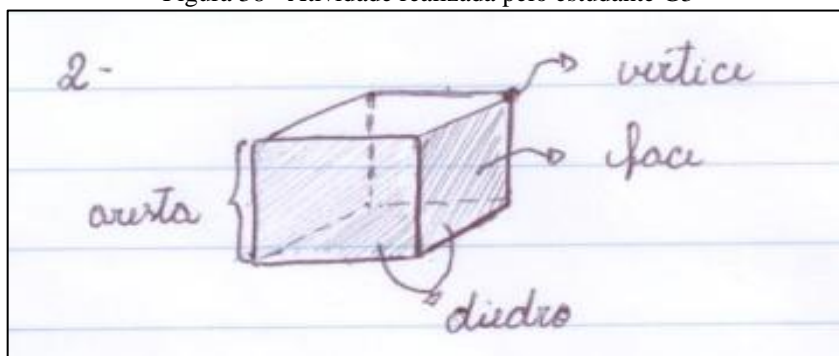
Os estudantes tiveram a oportunidade de utilizar o GeoGebra tal como apontado por Zulato (2002) e Fernandes (2008). De acordo com os autores as potencialidades do uso de *softwares* Geometria Dinâmica, ocorre por apresentar recursos com os quais os alunos podem realizar construções geométricas, que não são feitas usualmente com régua e compasso, mas que com o recurso do movimento abre possibilidades de lançar diferentes olhares para o mesmo objeto, experimentar, lançar hipóteses e testá-las, conjecturar, enfim manipular os objetos buscando extrair características, propriedades e relações.

É possível perceber, na Figura 37, que os estudantes fizeram representações de retas interceptando o sólido, buscando aplicar o que caracteriza um sólido não convexo, além de descreverem as características do objeto. Destaca-se que o poliedro representado pelos estudantes não é uma pirâmide, conforme indicado pelos estudantes, poliedro tipo “pirâmide”, posto que, por definição para ser pirâmide a base do poliedro deve ser convexa.

Além disso, foi aplicado aos estudantes, um conjunto de atividades para avaliar os conhecimentos desenvolvidos até o momento. Assim, apresenta-se uma das atividades propostas, que tinha por objetivo analisar o conhecimento dos estudantes, quanto à identificação dos elementos de um poliedro (cubo e paralelepípedo). Ressalta-se que os estudantes, em sua maioria, deram evidências de possuir habilidade visual e verbal conseguindo identificar e indicar os elementos que faziam parte do poliedro apresentado.

A Figura 38 destaca a solução da atividade apresentada pelo estudante G3, o qual apresentou em sua resposta elementos pertencentes ao poliedro, bem como apontou a existência o ângulo diedro, conceito até então não trabalhado em aula. Quando questionado sobre a questão declarou que havia realizado pesquisas, o que colocou em evidência seu interesse.

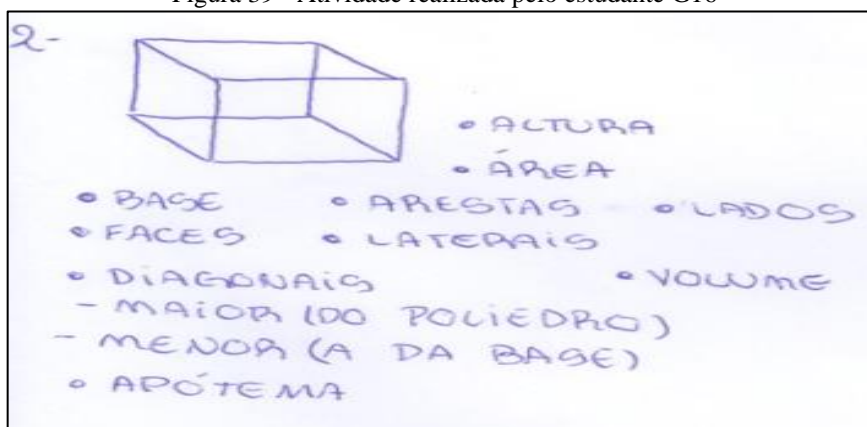
Figura 38 - Atividade realizada pelo estudante G3



Fonte: a pesquisa.

Já o estudante G16 apresentou, na resolução da atividade (Figura 39), vários elementos pertinentes a um poliedro, entretanto, observa-se que o estudante não possuía clareza dos conceitos, sendo que, não indicou, na figura, os elementos destacados. Além disso, apontou existir apótema no poliedro apresentado, o que não é verdadeiro, pois trata-se de um paralelepípedo. Quando questionado, foi possível perceber que o estudante apresentou todos os elementos estudados até então, sem associar ao poliedro indicado.

Figura 39 - Atividade realizada pelo estudante G16



Fonte: a pesquisa.

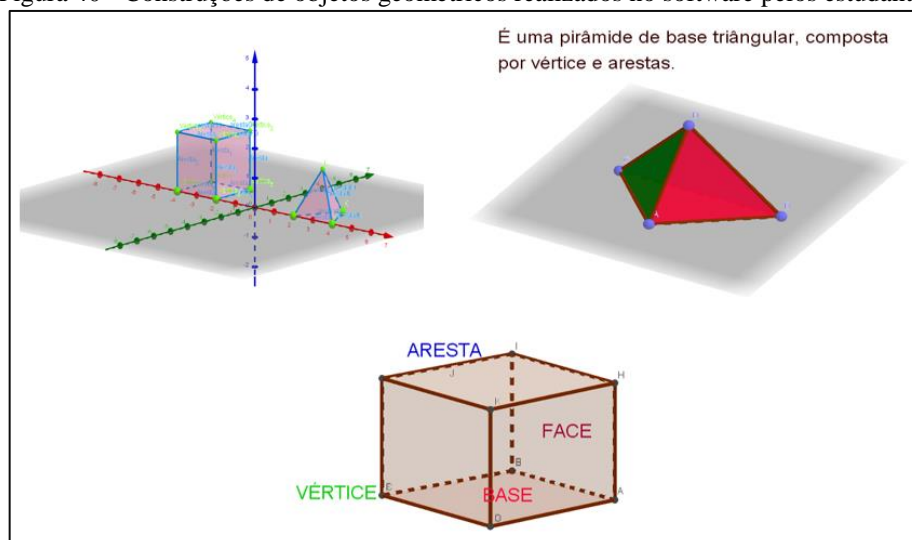
Sobre o conjunto de atividades propostas a turma nessa temática, é possível perceber que, de modo geral, os estudantes tiveram desempenho satisfatório, conseguindo realizar corretamente as atividades, mostrando possuir habilidade visual, verbal e gráfica, posto que, a turma apresentou conhecimento do nível de visualização (nível 1) do modelo de Van Hiele sem dificuldade. Já em relação ao nível de análise (nível 2), os estudantes apresentaram avanço no domínio da linguagem padrão, na identificação dos elementos dos poliedros, assim como, no nível de dedução informal (nível 3) a turma indicou avanços na apropriação dos conceitos e definições.

### 5.3.4 Poliedros: Prismas e Pirâmides

Com o intuito de trabalhar conceitos envolvendo Poliedros e, particularmente, Prisma e Pirâmide, optou-se por desenvolver as aulas no LABIN, para que os estudantes pudessem fazer construções e assim, conjecturar a partir da visualização das construções. As aulas dessa temática foram realizadas em dois períodos.

No primeiro momento, trabalhou-se com material elaborado para essa temática (Apêndice E, F, G). Após a introdução dos primeiros conceitos, solicitou-se que os estudantes, em grupo, construíssem os poliedros estudados, indicando seus elementos, nomenclatura, caracterizando o objeto construído. A turma prontamente aceitou o desafio e construíram diversos objetos geométricos, parte dos quais podem ser observados na Figura 40.

Figura 40 - Construções de objetos geométricos realizados no software pelos estudantes



Fonte: a pesquisa.

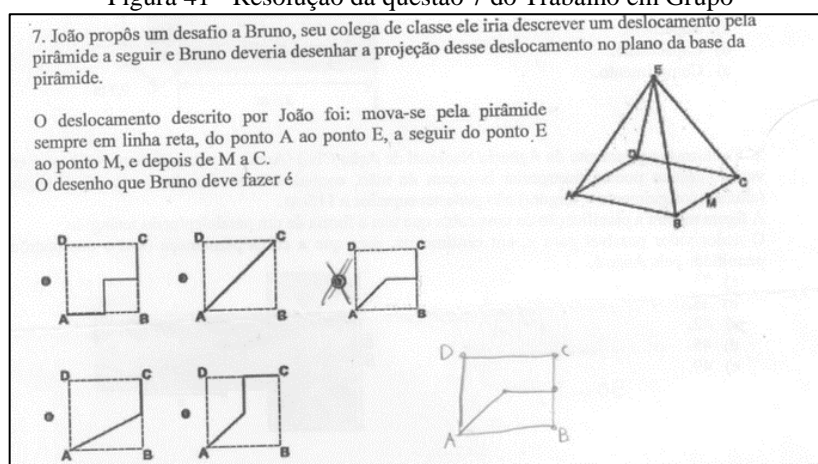
Estas construções referem-se a três grupos distintos que realizaram a atividade. Destaca-se a variedade de comandos utilizados no *software* GeoGebra para a realização da atividade, bem como as diferentes formas de apresentação da solução de uma mesma atividade. Segundo Souza (2014), um dos benefícios do *software* GeoGebra é o recurso de explorar os conceitos matemáticos, bem como despertar a capacidade criativa e o engajamento dos alunos na troca de ideias acerca dos conceitos em discussão, ademais possibilita ao estudante visualizar as modificações realizadas facilmente. Nesse sentido, concorda-se com Moraes (2016) quanto à importância da visualização na Geometria, pois, segundo o autor, a visualização é um processo importante no ensino e aprendizagem da Geometria e considerando que o pensamento visual é difícil de ser desenvolvido, o *software* torna-se uma ferramenta importante nesse desenvolvimento.

Ressalta-se que não há uma única maneira correta de representar os elementos dos objetos estudados, todavia, buscava-se verificar a compreensão dos estudantes para os conceitos trabalhados em aula, a partir de diferentes maneiras de representação (no caso a representação no *software*). Apesar de nem todos os estudantes concluírem a atividade, entende-se que a turma demonstrou ter domínio dos conceitos abordados nesse eixo.

O trabalho teve continuidade com a resolução de um conjunto de atividades envolvendo conceitos referentes a área e volume de sólidos geométricos. Para a constituição destas atividades, buscou-se questões que envolvessem tais conceitos em provas de anos anteriores do ENEM e, assim elaborou-se um “Trabalho em Grupo” (Apêndice Q). A atividade iniciou em aula e foi concluída em casa, sendo entregue na aula seguinte.

No primeiro momento, os estudantes demonstraram insegurança em realizar as atividades por considerarem as questões das provas do ENEM muito difíceis, porém, aos poucos, os estudantes foram percebendo que tinham condições de resolver a atividade. As questões propostas, em sua maioria, referiam-se ao cálculo de área e volume, porém, envolviam representações que exigiam visualização e interpretação, conforme destacado nas Figuras 41 e 42.

Figura 41 - Resolução da questão 7 do Trabalho em Grupo



Fonte: a pesquisa.

Estas atividades, destacam-se por demonstrarem o método utilizado pelos estudantes para a realização das atividades, posto que, os estudantes utilizaram o desenho para construir as hipóteses, suposições para a resolução das mesmas. Acredita-se que o trabalho com o *software* GeoGebra contribuiu para a construção das respostas desta maneira.

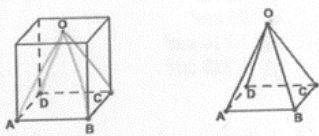
Figura 42 - Resolução da questão 8 do Trabalho em Grupo

8. Uma indústria fabrica brindes promocionais em forma de pirâmide. A pirâmide é obtida a partir de quatro cortes em um sólido que tem a forma de um cubo. No esquema, estão indicados o sólido original (cubo) e a pirâmide obtida a partir dele.

Os pontos A, B, C, D e O do cubo e da pirâmide são os mesmos. O ponto O é o centro na face superior do cubo. Os quatro cortes saem de O em direção às arestas AD, BC, AB e CD, nessa ordem. Após os cortes, são descartados quatro sólidos.

Os formatos dos sólidos descartados são.

a) Todos iguais  
 b) Todos diferentes  
 c) Três iguais e um diferente  
 d) Apenas dois iguais  
 e) Iguais dois a dois.



Fonte: a pesquisa.

Destaca-se o método adotado pelos estudantes para a realização das atividades. Em ambas atividades, os estudantes optaram por representar em figura informações contidas no enunciado, para então analisar e conjecturar sobre a questão, evidenciando possuir bem desenvolvida a habilidade visual, gráfica e lógica, indicada por Hoffer (1981). Observa-se o avanço no conhecimento dos estudantes, bem como os métodos utilizados para resolução da atividade e acredita-se que o trabalho realizado com o *software* GeoGebra contribuiu para este avanço. Borba e Villareal (2005) destacam que o uso de ferramentas digitais pode auxiliar na visualização da construção dos objetos, proporcionando que o estudante desenvolva o pensamento geométrico. Nesse sentido e considerando que a visualização na Geometria é de grande relevância para a aprendizagem, uma vez que, segundo Santos (2006) não havendo essa habilidade de criação mental a dificuldade para justificar ou validar resultados obtidos é grande. Considera-se que o trabalho com o *software* contribuiu significativamente para a apropriação dos conhecimentos pelos estudantes.

Neste contexto, verifica-se que o *software* contribuiu para o desenvolvimento da visualização dos estudantes, os quais responderam de maneira correta ambas as atividades. De acordo com o modelo de van Hiele, os estudantes encontram-se no nível de análise, visto que, conseguiram realizar problemas geométricos que requeriam o conhecimento das propriedades dos sólidos no espaço, além das relações geométricas.

Segundo os estudantes, a resolução do trabalho os deixou mais confiantes para realização da prova de Matemática do ENEM, a ser realizada no mês de Novembro do ano da aplicação da pesquisa.

Os resultados da aplicação dos Instrumentos Intermidiários foram muito positivos diante dos resultados apresentados pela turma no Instrumento Inicial. Avalia-se que o



desenvolvimento da UEA, juntamente com a interação com o *software*, propiciou aos estudantes desenvolvimento da habilidade visual, verbal, gráfica e lógica, bem como o avanço nos conhecimentos trabalhados. Corroborando com o que o PCN+ (BRASIL, 2012) apontam, entende-se que o uso do computador pode ser um aliado para o desenvolvimento cognitivo dos estudantes, pois permite desenvolver um trabalho que favorece diferentes ritmos de aprendizagem e possibilita o estudante aprender com os seus erros. Concorda-se com tal afirmação, posto que os estudantes, ao explorarem o *software* conseguiam conjecturar, fazer suposições, deduções, alterações oportunizando a aprendizagem.

Apresenta-se no quadro da Figura 43, uma síntese das análises realizadas nos eixos dos Instrumentos de Investigação Intermediários.

Figura 43 - Síntese das análises do Instrumento de Investigação Intermediário

<b>Eixos Temáticos</b>	<b>Análise/ Síntese</b>
Geometria de Posição	Buscou-se desenvolver atividades referidas ao nível de Visualização (nível 1) e Análise (nível 2) do modelo de van Hiele. Os estudantes apresentaram desempenho muito satisfatório, quanto a visualização e identificação das relações de posição entre retas e planos. Já em relação as atividades que exigiam maior conhecimento por parte dos estudantes, indicando nomenclatura e características das relações geométricas indicadas, o desempenho foi satisfatório.
Noções Primitivas e Conhecimentos Básicos	As atividades tinham objetivo de identificar o conhecimento e habilidades do nível de visualização, análise e dedução informal neste eixo. No nível de visualização (nível 1) do modelo de van Hiele, os estudantes apresentaram desempenho muito satisfatório, identificando os objetos geométricos indicados tanto no espaço como no plano. Já no nível de análise (nível 2) e dedução informal (nível 3) o desempenho apresentado pela turma foi satisfatório, uma vez, que os estudantes alcançaram os conhecimentos de cada nível em partes.
Poliedros: Prisma e Pirâmide	Buscou-se trabalhar habilidades dos níveis de análise (nível 2) e de dedução informal (nível 3) do modelo de van Hiele, em ambos os níveis os estudantes apresentaram desempenho satisfatório na realização das atividades.

Fonte: a pesquisa.

Diante do trabalho desenvolvido na UEA, optou-se por construir uma ferramenta de avaliação, denominado, Instrumento de Investigação Final, que abrangesse assuntos abordados ao longo da unidade de ensino, possibilitando uma análise dos possíveis avanços alcançados pelos estudantes participantes da investigação, em relação aos conceitos de Geometria Espacial.

#### 5.4 ANÁLISE DO INSTRUMENTO DE INVESTIGAÇÃO FINAL

O Instrumento de Investigação Final (Apêndice K) foi constituído com intuito de analisar os conhecimentos adquiridos, pelos estudantes, ao longo do desenvolvimento da Unidade de Ensino e Aprendizagem (UEA), identificando possíveis avanços.

A análise desse instrumento foi realizada utilizando-se o mesmo critério adotado na análise do instrumento inicial, sendo o mesmo composto por seis questões que visavam analisar o conhecimento dos estudantes sobre os temas trabalhados, aspectos da Geometria de Posição, Noções Primitivas e Conhecimentos Básicos, Poliedros: Prismas e Pirâmides. Assim, como na análise inicial, será apresentado o desempenho da turma ao realizar as atividades do Instrumento de Investigação Final (Tabela 3), bem como descrição e análise das respostas.

Tabela 3 - Desempenho da turma no Instrumento Final

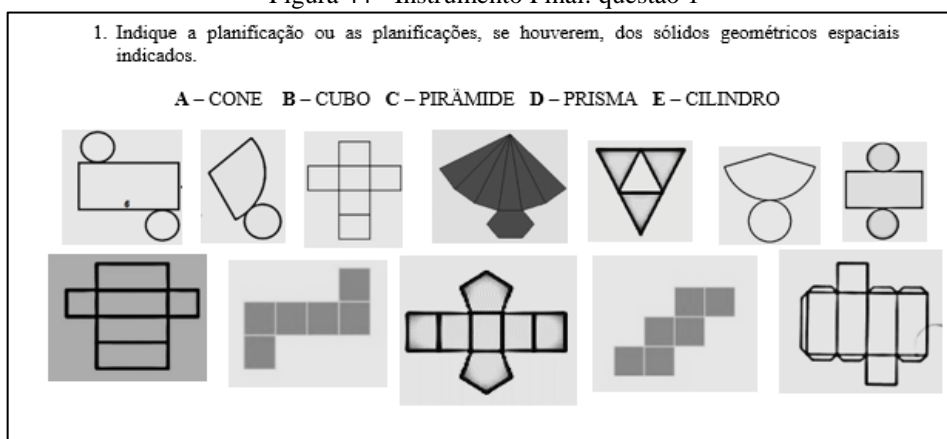
Desempenho da Turma (%)						
Questão	Nível do modelo	Muito Satisfatório	Satisfatório	Insatisfatório	Não responderam	Total
1	1	75,0	25,0	0	0	100
2	2	50,0	43,0	7,0	0	100
3	3	62,0	25,0	0	13,0	100
4	3	55,0	32,5	0	12,5	100
5	3	50,0	35,0	15,0	0	100
6	2	57,5	27,5	15,0	0	100

Fonte: a pesquisa.

Pelo critério de análise, pode-se observar que a turma apresentou desempenho que pode ser considerado muito bom. No mínimo a metade da turma apresentou desempenho muito satisfatório em todas as questões, inclusive nas questões, classificadas em nível 3 do modelo de Van Hiele, diferentemente, do resultado indicado na análise do instrumento Inicial, considerando o desempenho satisfatório (média do desempenho muito satisfatório e satisfatório) esse percentual sobe para 86,5%.

Apresenta-se, no que segue, uma análise das atividades individualmente. O quadro da Figura 44 indica a primeira questão do instrumento, a qual tinha como objetivo investigar os conhecimentos dos estudantes quanto à planificação dos sólidos espaciais, bem como a nomenclatura padrão destes.

Figura 44 - Instrumento Final: questão 1



Fonte: a pesquisa.

A análise das respostas evidenciou que os estudantes conseguiram identificar e associar os sólidos geométricos espaciais, a sua nomenclatura correspondente, não apresentando grandes dificuldades em identificar a planificação dos objetos geométricos. Destaca-se que, nesta atividade, 75% dos estudantes alcançaram desempenho muito satisfatório e, 25%, desempenho satisfatório. Comparando-se com o desempenho no teste inicial foi possível perceber um significativo avanço na apropriação da nomenclatura. Os estudantes conseguiram fazer avanços no conhecimento, quanto à identificação e uso da nomenclatura padrão, corroborando a ideia preliminar do modelo de van Hiele, o qual indica que os alunos só conseguem progredir a partir de uma sequência de atividades para desenvolver a compreensão dos conceitos (LOPES; NASSER, 1996).

Destaca-se, que nas soluções classificadas como satisfatória, houve estudantes que demonstraram dificuldades em identificar as diferentes planificações do cubo, reconhecendo apenas um dos tipos de planificação, assim como e também, não conseguiram relacionar o paralelepípedo ao conjunto dos Prismas. Como na atividade não havia a opção “paralelepípedo”, acreditavam que havia erro no enunciado da questão.


Com relação a segunda atividade (Figura 45), buscava-se analisar o conhecimento dos estudantes referente aos elementos pertencentes aos sólidos indicados – prisma e pirâmide. Na atividade foram apontadas opções, nem todas verdadeiras, para que os estudantes pudessem analisar e indicar os elementos correspondentes a cada figura.

Figura 45 - Instrumento Final: questão 2

2. Após analisar as figuras abaixo, verifique se há elementos que pertencem as mesmas, indicando, se for o caso, onde se localizam. Considere que os polígonos da base, nas figuras, são regulares.

Apótema da Base – Face Lateral – Base – Aresta Lateral – Geratriz – Altura – Apótema da Face

Vértice – Aresta da Base – Altura da Face – Apótema total – Altura total



Fonte: a pesquisa.

Nessa questão, que envolvia o nível de análise (nível 2) do modelo de van Hiele, considera-se que o desempenho da turma foi bom, visto que 93% dos estudantes alcançaram desempenho satisfatório (soma do desempenho muito satisfatório e satisfatório). Nessa atividade, percebeu-se, mais uma vez, o benefício do trabalho com o *software* de Geometria Dinâmica, uma vez que, no trabalho em aula, embora tivessem a disposição materiais concretos (sólidos geométricos) para observação e manuseio, apresentavam muitas dúvidas referentes à identificação dos elementos, principalmente os pertencentes à pirâmide. Porém, após o trabalho de construção, análise e identificação dos elementos dos poliedros no GeoGebra, foi possível perceber que as dúvidas diminuíram significativamente, o que foi comprovado pelo instrumento final.

Kaiber e Conceição (2007), Gravina e Basso (2012) já destacavam a importância da utilização das tecnologias no ensino, por proporcionarem verdadeiras e significativas aprendizagens matemáticas, afirmações que ratificam o que os Parâmetros Curriculares Nacionais PCN (BRASIL, 1998) indicam,

As tecnologias, em suas diferentes formas e usos, constituem um dos principais agentes de transformação da sociedade, pelas modificações que exercem nos meios de produção e por suas consequências no cotidiano das pessoas.[...] Além disso, tudo indica que pode ser um grande aliado do desenvolvimento cognitivo dos alunos (BRASIL,1998,p.43-44).

Entende-se que no trabalho desenvolvido foi possível perceber o que os autores apontam, o que pode levar ao que é preconizado pelos PCN.

Nas questões três e quatro, buscou-se investigar o que os estudantes compreenderam, assimilaram e aprenderam sobre Prisma e Pirâmide. Para isso foi solicitado que os estudantes se caracteriza, com suas palavras, Prisma e Pirâmide, conforme apresentado no quadro da Figura 46:

Figura 46 - Instrumento Final: questões 3 e 4

3. Com base no que já estudamos caracterize, com suas palavras Prisma.
4. Com base no que já estudamos caracterize, com suas palavras Pirâmide.

Fonte: a pesquisa.

Nesta análise, pode-se observar o avanço dos estudantes, uma vez que, conseguiram responder de forma correta e adequada as duas perguntas. Avalia-se que não ocorreram erros, apenas respostas incompletas, o que levou a avaliar a questão como desempenho muito satisfatório (resposta completa), desempenho satisfatório (resposta não completa).

Os estudantes em suas respostas conseguiram destacar características, elementos, classificação de maneira correta. O aluno G39, por exemplo, diz que o prisma é “*um poliedro com duas faces congruentes e paralelas e as demais faces são paralelogramos, por exemplo tijolos e prédios*”. Já o estudante G38 destaca os elementos característicos do prisma, “*prisma é composto por duas bases, que são faces paralelas, as faces laterais possuem formato de um retângulo, além de possuir altura, vértices e arestas*”. Aponta-se o desempenho positivo dos estudantes frente aos questionamentos, sendo que 62% dos estudantes alcançaram desempenho muito satisfatório. Tomando o modelo de van Hiele como referência, entende-se que grande parte da turma alcançou o nível de dedução informal (nível 3) do modelo, considerando que conseguiram discernir corretamente as características, propriedades e definição das figuras.

Referente à quarta atividade, os alunos demonstraram maior dificuldade em caracterizar a Pirâmide, contudo, alcançaram um bom resultado no critério de avaliação. A grande dificuldade apresentada pelos estudantes, foi indicar as propriedades, características, elementos com as próprias palavras. Ressalta-se que a maioria dos estudantes considerou Pirâmide como sendo um poliedro de base poligonal triangular.

Entretanto, destaca-se a aluna G9 diz “*a pirâmide é composta por uma base poligonal e por faces laterais triangulares, as quais são ligadas em um ponto fora do plano, denominado vértice*”, e a estudante G17 que caracterizou Pirâmide como “*figura tridimensional formada por um plano que é a base, com um ponto no espaço, que é o vértice, que é onde ocorre o encontro das faces laterais triangulares*”. Embora não se utilizando de linguagem adequada e mesmo correta, para caracterizar uma Pirâmide “*base poligonal e figura tridimensional formada por um plano, que é a base*” considera-se que os estudantes tem o entendimento do que seja este objeto. Ainda, o aluno G30 caracterizou os elementos deste sólido “*pirâmide é*

*compoto por uma base e um vértice, o número de faces laterais depende do polígono da base, a pirâmide possui, também, altura, apótema da pirâmide e apótema da base”.*

A quinta questão do Instrumento Final (Figura 47) foi elaborada com o objetivo de analisar o domínio dos estudantes referente a conceitos trabalhados em sala de aula considerando distintas formas de representação.

Figura 47 - Instrumento Final: questão 5

5. A partir das propriedades e definições apresentados nas alternativas, represente através de desenho (quando possível) os objetos geométricos indicados. Além disso, indique exemplos, de objetos ou construções que você conheça que possuem a mesma representação das apresentadas nas alternativas.
- a) São concorrentes e determinam quatro ângulos reto.
  - b) É um poliedro formado por todos os segmentos de reta cujas extremidades são o ponto fora do plano e os demais pontos formam um plano.
  - c) É um poliedro formado por todos os segmentos de reta paralelos a uma reta  $r$  tal que uma das extremidades é um ponto no plano  $V$  e a outra extremidade é um ponto no plano paralelo, ao plano  $V$ .

Fonte: a pesquisa.

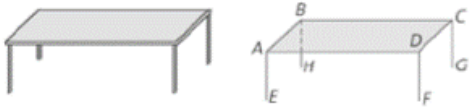
Apesar dos estudantes indagarem muito sobre a atividade, toda a turma completou o exercício, sendo que 85% apresentou desempenho satisfatório (soma do desempenho muito satisfatório e satisfatório), o que se considerou muito positivo. Tomando como referência o modelo de Van Hiele, entende-se que os estudantes se encontravam no nível de dedução informal, visto que, conseguiram identificar as propriedades dos objetos geométricos indicados, representando e descrevendo suas características.

Porém um grupo de estudantes não conseguiu alcançar desempenho satisfatório, apresentando erros os quais aqui destacados. Por exemplo, com relação à alternativa “a”, quatro estudantes identificaram a afirmação “são concorrentes e determinam quatro ângulos retos” como sendo um quadrado e até um cubo o que evidenciou a identificação de ângulos retos, no caso do quadrado e mesmo no cubo, se considerarmos as faces, não relacionando, porém, com a perpendicularidade.

A atividade 6 (Figura 48) conclui o Instrumento de Investigação Final e tem como objetivo, averiguar o domínio dos estudantes, referente a relações de posição entre retas, planos e retas e planos.

Figura 48 - Instrumento Final: questão 6

6. Observe a figura e sua representação matemática:



a) Qual é a posição da reta AB em relação ao plano determinado por ABCD?

b) Cite duas retas que estejam “furando” o plano determinado por ABCD.

c) A reta CD é a intersecção de infinitos planos. Cite dois desses planos.

d) Qual é a posição relativa das retas AB e BH?

e) Cite um plano paralelo ao plano determinado por ABCD.

f) A reta DF está simultaneamente em vários planos. Cite dois desses planos.

g) Cite duas retas paralelas ao plano determinado por ABCD.

Fonte: a pesquisa.

Esta atividade evidenciou o avanço dos estudantes quanto a aprendizagem dos conceitos de geometria de posição. Enquanto a análise do instrumento inicial indicou baixo desempenho nessa temática, o instrumento final revelou um desempenho muito satisfatório, sendo que os estudantes conseguiram identificar as relações de posição existentes em diferentes figuras.

No quadro da Figura 49, apresenta-se a análise realizada, indicando a questão, o nível do modelo de van Hiele no qual a atividade se enquadra, as habilidades necessárias para a realização da atividade e o percentual de estudantes que alcançaram estas habilidades, conseguindo um desempenho muito satisfatório.

Figura 49 - Habilidades identificadas nas atividades do Instrumento de Investigação Final

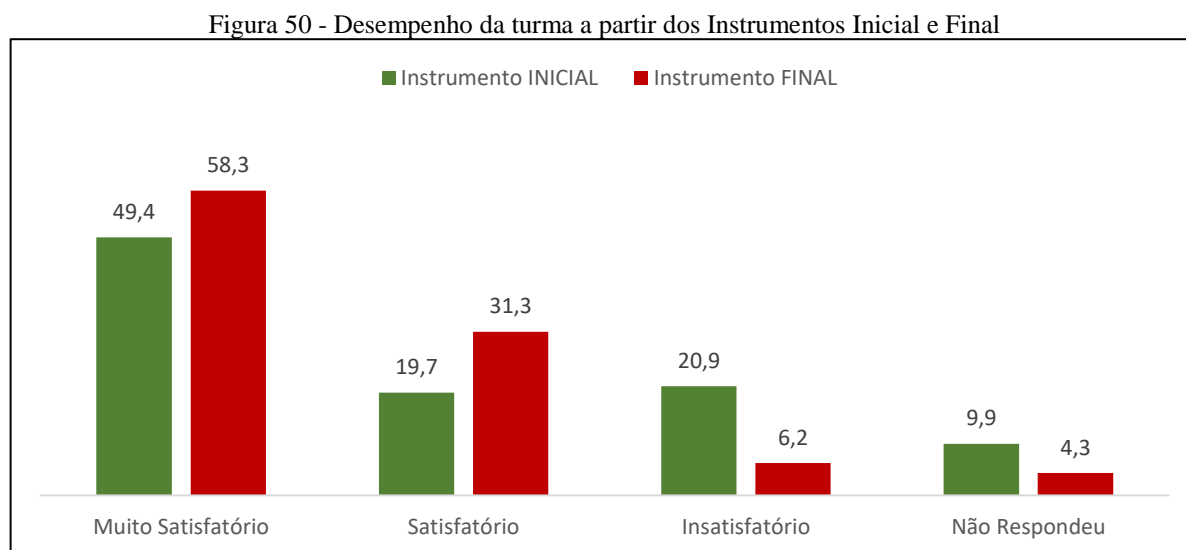
Questão	Nível	Habilidade	Estudantes que tiveram Desempenho Satisfatório <sup>17</sup> (%)
1	Visualização	Visual e Verbal	100
2	Análise	Visual, Verbal e Gráfica	93,0
3	Dedução	Verbal e Lógica	87,0
4		Verbal e Lógica	87,5
5		Verbal e Lógica	85,0
6	Análise	Visual, Verbal, Gráfica	85,0

Fonte: a pesquisa.

Por fim, buscando identificar as possíveis diferenças entre os desempenhos no início e ao final do trabalho, os quais permitissem identificar as possíveis contribuições do desenvolvimento da Unidade de Ensino e Aprendizagem, para a aprendizagem e

<sup>17</sup> Desempenho Satisfatório é a soma do desempenho muito satisfatório e satisfatório apresentado pela turma, considera-se um resultado compatível com o nível de ensino de estudantes do terceiro ano do Ensino Médio.

desenvolvimento do pensamento geométrico dos estudantes apresentam-se, no gráfico da Figura 50, uma média de desempenho da turma em relação aos instrumentos inicial e final.



Fonte: a pesquisa.

A partir do gráfico é possível perceber que o desempenho melhorou consideravelmente, chegando ao final com 89,6% de desempenho satisfatório no instrumento final. Já o desempenho insatisfatório chegou ao final com um percentual de apenas 6,2%.

Destaca-se que para o desenvolvimento da UEA, buscou-se articular recursos tecnológicos, nesse caso, o uso do *software* de geometria dinâmica GeoGebra, a ação e tarefas envolvendo também outros materiais, como materiais de estudo e materiais concreto. Considera-se que a utilização do *software* GeoGebra na UEA contribuiu significativamente para a apropriação dos conceitos estudados, considerando que o mesmo dispõe das janelas 2D, 3D e inúmeras ferramentas que possibilitam construções planas e espaciais com base em propriedades dos objetos bem como a possibilidade de movimentação que aumenta em muito as oportunidades de visualizar, observar características, conjecturar sobre propriedades. Assim, concorda-se com Borba (2011) quando afirma que a visualização é parte importante na aprendizagem, posto que, as variadas representações visuais podem proporcionar a apropriação de diferentes conceitos. Tal entendimento, já era defendido por Borba e Penteadó (2001) e Santos (2006), os quais apontam que no ensino da Geometria, não havendo a habilidade de criação mental, a dificuldade para justificar ou validar resultados obtidos é grande.

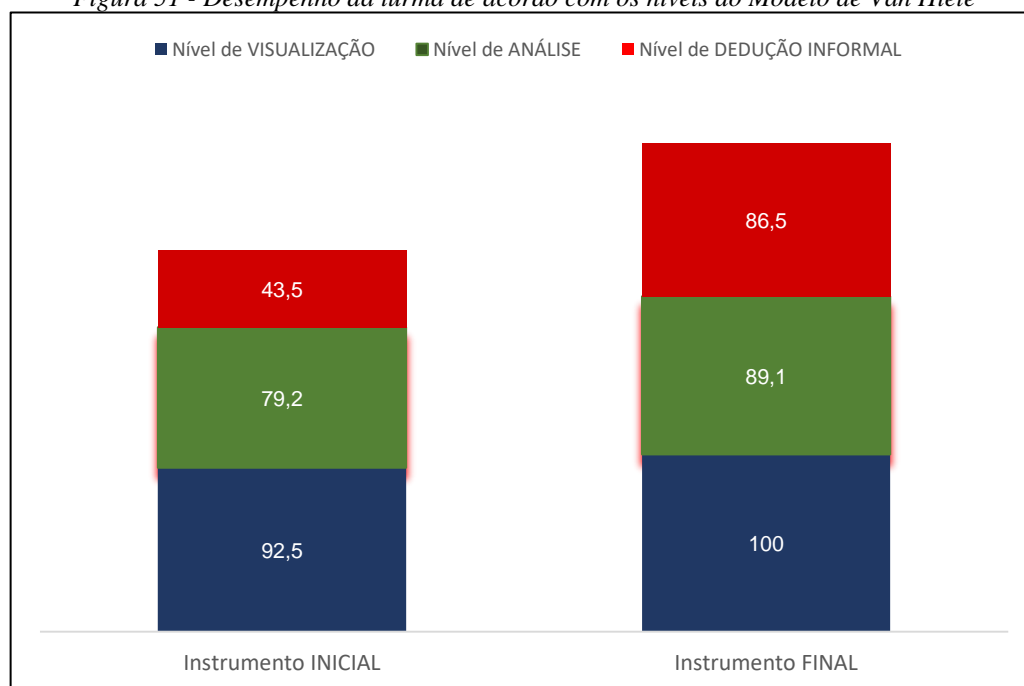
Quanto ao desenvolvimento do pensamento geométrico destes estudantes, com respaldo no modelo de van Hiele, agora aplicado à Geometria Espacial, observou-se, que os estudantes se articulavam muito bem no nível de visualização do modelo (nível 1). Percebeu-se, também,



o progresso no nível de análise (nível 2), o qual os estudantes demonstraram domínio da linguagem padrão, assim como facilidade em reconhecer características e propriedades dos objetos geométricos. Já, no nível de dedução informal (nível 3), os estudantes demonstraram apropriação das definições e conceitos dos sólidos geométricos. Villiers (2010) afirma que quanto à transição dos níveis do modelo, a transição do nível de visualização (nível 1) para o nível de análise (nível 2) envolve uma reorganização do pensamento geométrico, agora não tanto abstrato, mas sim simbólica, porquanto, no nível de análise, os estudantes possuem domínio de uma linguagem padronizada. Já a transição do nível de análise (nível 2) para o nível de dedução informal (nível 3) os estudantes conseguem fazer relações entre os novos conceitos e os já consolidados, além de reconhecer as propriedades existentes nos objetos geométricos. Logo, com base no modelo de Van Hiele percebeu-se o avanço da turma do nível de visualização (nível 1) para o nível de análise (nível 2), bem como indícios significativos da transição do nível de análise (nível 2) para o nível de dedução informal (nível 3). Nesse sentido, o objetivo principal da implantação da UEA foi alcançado, a unidade de ensino visava propor atividades que pudessem promover a construção dos conceitos abordados em aula, através de diferentes estratégias e atividades, logo o resultado foi expressivo.

Assim, apresenta-se no gráfico da Figura 51, uma análise do desempenho dos estudantes nos níveis de visualização, análise e dedução informal do modelo de Van Hiele, a partir dos instrumentos de investigação Inicial e Final.

*Figura 51 - Desempenho da turma de acordo com os níveis do Modelo de Van Hiele*



Fonte: a pesquisa.

A partir da análise dos dados, foi possível perceber que houve avanço no desempenho dos estudantes nos três níveis investigados, destacando-se o avanço ocorrido no nível de dedução informal, os mesmos alcançaram 86,5% de desempenho satisfatório nesse nível no instrumento final, o caracteriza um avanço satisfatório em relação ao trabalho realizado. Ao longo da aplicação da UEA, observou-se que os estudantes transitavam entre os níveis do modelo, quanto a isso, Nasser e Sant'Anna (2010) apontam, que os alunos podem, em determinado tópico, apresentar raciocínio compatível com níveis consecutivos, simultaneamente, o que indica que o estudante se encontra num período de transição de um nível inferior para outro mais elevado, no que se refere especificamente aquele tópico abordado.

No final da investigação, foi solicitado aos estudantes que respondessem um questionário para avaliar o desenvolvimento da pesquisa, composto pelas seguintes questões: *“Qual a sua opinião sobre o desenvolvimento da pesquisa? O software de Geometria Dinâmica auxiliou na sua aprendizagem?” e “Quanto ao uso de tecnologias em sala de aula, os alunos estão preparados, para esta nova metodologia de trabalho?”*

Na primeira questão, todos os estudantes relataram ter gostado do trabalho, que os ajudou a compreender melhor os conceitos Geometria Espacial. A respeito da questão, a aluna G16 declarou *“ter aproveitado ao máximo esta oportunidade de apreender com o software dinâmico, pois ajudou para visualizar o que estava construindo”*, o estudante G29 pondera ter gostado porque *“aprendi de um jeito mais dinâmico, ao utilizar o recurso tecnológico, o que ajudou muito na aprendizagem, principalmente porque era possível mudar as cores para melhor visualização”*

Todavia, houve alunos que expressaram ter gostado do trabalho, porém, demonstraram dificuldades ao utilizar as ferramentas do *software*, conforme destacado pelos alunos G2 *“as aulas foram muito boas, apesar do GeoGebra não ter me ajudado muito na construção das figuras”* e G19 *“as tecnologias ajudam nos nossos estudos, mas achei complicado mexer no GeoGebra”*.

Quanto a segunda questão, se os estudantes estariam preparados para a inserção de metodologias digitais, destaca-se a fala da aluna G21 *“Obviamente, se não conseguimos deixar ela de lado no nosso cotidiano, que utilizemos da mesma para aprender e não somente para lazer”*, e os estudantes, de modo geral, concordam que deve haver esta inclusão. Corroborando com a fala da estudante, o aluno G34 destaca que *“os jovens estão preparados para a inclusão das tecnologias em sala de aula, cada vez mais os jovens estão familiarizados com eletrônicos, e tem noção de que eles facilitariam muito mais no aprendizado”*, contudo, acreditam que os

estudantes não estão preparados para esta inserção, visto que, muitos perderiam o foco dos estudos, preocupando-se apenas com redes sociais.

A partir das respostas dos alunos e também do que expressaram ao longo dos encontros, foi possível perceber que gostaram do trabalho desenvolvido, bem como as aulas no Laboratório de Matemática e no Laboratório de Informática. Percebeu-se que os estudantes reconheciam que a investigação e o trabalho como um todo auxiliaria e contribuiria para a aprendizagem da turma.

Entretanto, ao longo do desenvolvimento da investigação constatou-se a importância do professor possuir diversificadas matérias e estratégias para o trabalho em sala de aula. A falta de material didático escrito, no caso o livro didático, permitiu perceber que a falta de tais material, particularmente no trabalho com a geometria, que envolve axiomas, definições e propriedades que precisam ser comunicadas com clareza e exatidão, pode prejudicar o trabalho, no mínimo no que se refere ao tempo. A falta desse material levou a professora/pesquisadora elaborar materiais para o trabalho com os estudantes buscando cumprir a falta do livro didático o que encaminhou o desenvolvimento de um material de apoio denominado objeto de aprendizagem GEOE, com objetivo de auxiliar o trabalho dos professores em sala de aula, assim como, o estudo dos alunos sobre conceitos geométricos espaciais. Assim, no próximo capítulo destaca-se o material produzido.

## 6 DESENVOLVIMENTO DO OBJETO EDUCACIONAL – GEOE

Neste capítulo, apresenta-se o material desenvolvido a partir da aplicação da Unidade de Ensino e Aprendizagem (UEA) na turma participante da investigação, posto que, ao longo da investigação emergiram desafios que, entende-se, influenciaram não só, mas também a visão e o entendimento da pesquisadora sobre todo o processo. Estes desafios referem-se à:

- Gerenciamento do tempo: a proposta de investigação quando apresentada à escola participante, visava uma aplicação de 20h aula. No entanto, no início dos trabalhos o plano de estudos sofreu alterações em função de demandas da escola, sendo estabelecido 12h aula para o desenvolvimento da Unidade de Ensino e Aprendizagem (UEA) junto aos estudantes. Ressalta-se que, neste período, ainda ocorreram mudanças no horário alterando a disposição dos períodos de aula: inicialmente, os períodos estavam dispostos, dois a dois, sem interrupção; posteriormente ficaram isolados e em dias diferentes.
- Outro grande desafio enfrentado foi a falta de material didático escrito para os estudantes. Não havia livro didático disponível para a turma, o que demandou a busca por estratégias para superar a falta desse material com o qual se estava contando.

Porém, como já salientado a falta de material didático e mesmo o tempo restrito para o trabalho levaram a pesquisadora buscar meios e estratégias para superar as dificuldades enfrentadas.

Neste contexto, surgiu o interesse em buscar informações sobre objetos educacionais (OE), suas potencialidades, possibilidades e maneiras de criá-los e utilizá-los. Assim surgiu o GEOE (Geometria Espacial).

O GEOE é um objeto educacional voltado para o estudo de conceitos geométricos, especificamente, para os conteúdos de Geometria Espacial, tendo como objetivo ser um material de fácil acesso e manuseio, dispondo apenas de uma rede de internet.

### 6.1 OBJETO EDUCACIONAL (OE)

O conceito de objeto educacional não é fácil nem consensual (TORRÃO, 2009). Segundo Aguiar e Flores (2014), a definição de objeto educacional surge da concepção do autor do objeto, de acordo com a sua utilidade e importância para o ensino e aprendizagem. Já Wiley (2000), destaca que um OE “[...] é qualquer recurso digital que pode ser reutilizado para apoiar a aprendizagem”, visto que, de acordo com o autor o OE, deve propiciar o processo de

aprendizagem. Corroborando com o autor, Tarouco et al. (2003) complementa afirmando que, um objeto educacional é qualquer recurso, suplementar ao processo de aprendizagem, organizado em pequenos conjuntos visando potencializar o processo de aprendizagem. Koohang e Harman (2007) ponderam, ainda, que estes OE não precisam ser exclusivamente digitais. Ainda, os objetos de aprendizagem são elaborados e organizados de forma variada de apresentação conceitual como textos, imagens, animações, simulações (AGUIAR; FLORES, 2014).

Concorda-se com Aguiar e Flores (2014) quando, afirmam que uma das vantagens do uso de OE é a possibilidade do estudante fazer tentativas para construir hipóteses e estratégias sobre determinado tema, podendo obter *feedback* do computador que o auxilia na correção das estratégias, tornando o professor mediador dos conhecimentos embutidos no OE.

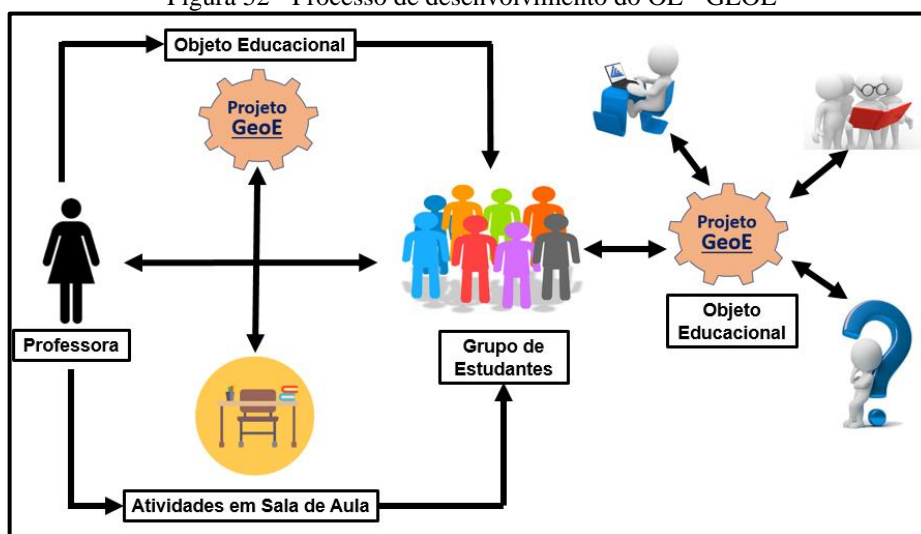
Bulegon e Mussoi (2014) apontam ainda, que os objetos educacionais são desenvolvidos com o propósito de ensino, aprendizagem e avaliação. Contudo, o que determinará este resultado é a metodologia adotada para o uso do mesmo, podendo ou não levar o aluno ao desenvolvimento do pensamento crítico, contribuindo assim, para a aprendizagem.

Por conta disso, o Ministério da Educação - MEC (BRASIL, 2007) orienta alguns objetivos a serem seguidos para o desenvolvimento e uso dos objetos educacionais, visando contribuir para o ensino. De acordo com o documento os OE devem ser focados na incorporação didática das novas tecnologias de informação e comunicação, no aprimoramento da educação presencial e/ ou a distância, além do incentivo à pesquisa e à construção de novos conhecimentos para melhoria da qualidade da educação.

Assim, entende-se que os OE são ferramentas de grande potencial, quando trabalhado em colaboração com os conceitos abordados em sala de aula. Porém, concorda-se com Wiley (2000) quando destaca que a utilização do OE na ausência de qualquer enfoque teórico poderá comprometer o processo de ensino e de aprendizagem.

Desse modo, buscou-se desenvolver o objeto educacional GEOE, em consonância com o material didático utilizado em aula. Assim, apresenta-se no quadro da Figura 52, o processo de desenvolvimento do GEOE propiciando assim, que os estudantes façam conjecturas, análises e questionamentos do assunto abordado.

Figura 52 - Processo de desenvolvimento do OE - GEOE



Fonte: a autora.

A proposta de trabalho indicada no quadro da Figura 52, tem como pressuposto incluir o OE-GEOE no dia-a-dia do estudante, seja em sala de aula com a mediação da professora, ou como complemento dos conceitos abordados em aula, bem como um material de apoio para que o estudante possa estudar fora do ambiente escolar, a qualquer instante ou lugar

## 6.2 CONSTRUÇÃO DO OBJETO EDUCACIONAL GEOE

Para a construção do objeto educacional GEOE, buscou-se ferramentas gratuitas e de fácil manuseio disponibilizadas na *Web*, encontrando-se a plataforma *WIX*<sup>18</sup> que, apesar de ser uma plataforma de construção de *sites*, será utilizada para a construção do GEOE. O GEOE foi constituído a partir de materiais didáticos em *Power Point*, vídeos, atividades com o *software* JClick e com o GeoGebra, tendo como objetivo contribuir para o desenvolvimento do pensamento geométrico dos estudantes, seja em sala de aula ou fora do ambiente escolar. Apresentam-se, no que segue, as ferramentas utilizadas para o desenvolvimento do objeto educacional GEOE.

### 6.1.1 Ferramenta para construção do GEOE – Plataforma Wix.Com

O Wix é uma plataforma online de criação de *sites* do tipo “arrastar e soltar” que oferece recursos em HTML5, o que permite ao usuário a edição sem precisar entender de programação ou afins, sendo possível criar *sites* com aparência profissional, independente do conhecimento de programação. Ao entrar no *site* (Figura 53) da plataforma, deve-se primeiramente realizar o *login* se já for registrado ou então fazer o registro para ter acesso à construção de *sites*.

<sup>18</sup> [http:// pt.wix.com](http://pt.wix.com)

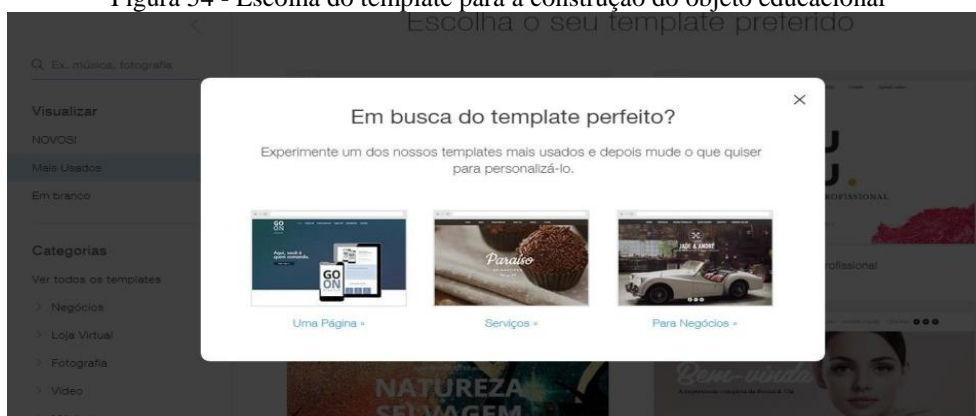
Figura 53 - Página inicial do site Wix.com



Fonte: Wix.com

Feita a identificação, o ambiente automaticamente redireciona o usuário para a página de templates (Figura 54), para que seja possível escolher o mais adequado, o que é realizado a partir das categorias indicadas no *menu* vertical. Escolhido o template, o usuário irá para a página de edição clicando no botão ‘Editar’. Neste momento a página de edição é carregada.

Figura 54 - Escolha do template para a construção do objeto educacional



Fonte: Site Wix.com

De acordo com Costa (2014), um dos grandes diferenciais da plataforma Wix, e que contribuiu para a escolha da mesma para a criação do GEOE, é que diferentemente da maioria das plataformas ela não exige que o aluno faça um *login* para ter acesso ao material, após a criação e publicação é gerado um endereço eletrônico, o qual o estudante pode acessar a página com facilidade. A plataforma oferece também, criação de *sites* para smartphones, blogs, além de hospedagem de aplicativos, como por exemplo redes sociais, que permitem integração com o *site* (BERTO, et al, 2013).

Após a escolha do template, o usuário pode personalizar o ambiente virtual, de acordo com sua preferência, com o auxílio dos quatro menus básicos. Através dos menus disponíveis, o autor consegue adicionar fotos, vídeos, aplicativos, *links*, abas etc., além de permitir

personalizar o *site* adicionando novas cores ou mudando-as, escolher tipos de fontes, *backgrounds* – imagens de fundo - etc. É possível, ainda, realizar tarefas básicas como refazer ou desfazer uma ação, copiar, colar etc (BERTO, et al, 2013). A plataforma possui ainda, uma ferramenta que permite ao usuário, pré-visualizar seu *site*, salvá-lo, publicá-lo e/ou mudá-lo da versão gratuita para a versão paga.

### 6.3 OBJETO EDUCACIONAL – GEOE

Diante do exposto, optou-se por desenvolver o objeto educacional na plataforma *WIX*. Além da facilidade para criação do OE, a plataforma gera um endereço eletrônico para o GEOE<sup>19</sup>, promovendo o acesso do estudante ao material em qualquer lugar que possua rede de *internet* disponível.

#### 6.3.1 Ferramentas Incorporadas ao Objeto Educacional – GEOE

O objeto educacional GEOE foi construído com objetivo de ser um meio alternativo de acesso dos estudantes aos conhecimentos da Geometria Espacial, o que levou a necessidade de agregar ao GEOE ferramentas que viabilizassem um trabalho diversificado. Neste caso, buscou-se integrar ao ambiente três ferramentas que após alguns testes, foram julgadas como adequadas.

##### 6.3.1.1 PowerPoint – Construção do Material Didático

O *PowerPoint* faz parte do pacote Microsoft Office juntamente com o Word, o Excel e outros programas, sendo ele é um dos programas mais populares criados pela Microsoft. O programa contempla a possibilidade de utilizar texto, imagens, música e animações. Tendo em conta as suas características, considerou-se uma boa opção para preparar uma aula, ou fazer uma apresentação. O *PowerPoint*, possui variedade de *design* para que o usuário possa escolher a que mais lhe agrada, além do que, dispõem de um variado rol de animações, configurações, esquemas, tabelas para a construção das apresentações. O *PowerPoint* foi utilizado no GEOE para que se constituísse em material teórico básico para estudo.

A escolha pelo uso do *PowerPoint* no GeoE, se justifica, pela necessidade da construção de um material didático com os conteúdos a serem trabalhados no objeto educacional, logo optou-se pelo uso do *PowerPoint*, visto que, o autor pode escolher o template que mais lhe agrada e criar um material diferenciado para trabalhar nas aulas.

---

<sup>19</sup> [https:// daniellesantosrodr1.wixsite.com/geoe](https://daniellesantosrodr1.wixsite.com/geoe)



Os conteúdos abordados no objeto educacional GEOE, foram organizados em módulos e construídos com base em pesquisas realizadas em diferentes livros didáticos disponibilizados para as escolas da rede Estadual do Município de Canoas, bem como em artigos de pesquisa sobre Geometria e a bibliografia básica usada em cursos de graduação em Matemática.

Assim, todo material foi desenvolvido no *PowerPoint*, conforme apresentado no quadro da Figura 55. Em cada apresentação buscou-se um *design* diferente, figuras, animações, exemplos, buscando constituir um material de fácil acesso aos estudantes. De acordo com Martinho e Pombo (2009) o uso de animações, projeções de imagens durante o ensino, pode influenciar positivamente a aprendizagem, aumentando atenção do estudante e o entusiasmo para o estudo.

Figura 55 - Interface dos conteúdos abordados no GEOE



Fonte: a pesquisa.

### 6.3.1.2 Aplicativo JClic – Construção de Jogos

O JClic é um software de autoria que segundo Groedert (2010) foi criado por Francesc Busquest em espanhol e catalão que pode ser usado nas diversas disciplinas do currículo escolar. Trata-se de uma ferramenta desenvolvida na plataforma Java, para criação, realização e avaliação de atividades educativas multimídia como quebra-cabeças, associações, enigmas, estudo de texto, palavras cruzadas, entre outros. O JClic é uma aplicação de *software* livre baseada em modelos abertos que funcionam em diversos ambientes operativos: Linux, Mac OS-X, Windows e Solaris (GROEDERT, 2010).

De acordo com Groedert (2010) o software JClic permite a realização de sete tipos de atividades básicas:

- Associações – pretendem que o usuário descubra as relações existentes entre dois conjuntos de informação.
- Jogos de memória – onde é necessário descobrir os elementos iguais ou relacionados entre si que estão escondidos.
- Explorador, Identificando células e Tela de informação – que partem de um único conjunto de informação.
- Atividades de resposta escrita – que são resolvidas escrevendo-se um texto (uma só palavra ou frases relativamente complexas).
- Texto: atividades de texto – são planejados exercícios baseados sempre nas palavras, frases, letras e parágrafos de um texto. Será necessário completar, entender, corrigir ou ordenar. Os textos podem conter também janela de imagem com conteúdo ativo.
- Caça-palavras e Palavras Cruzadas – são variantes interativas dos conhecidos passatempos com palavras escondidas.

A escolha pelo *software* JCLic para a construção das atividades, se justifica, pela simplicidade para a construção das atividades, não exigindo domínio de programação, pela variedade de atividades disponibilizadas pelo software e pela possibilidade de agrupar diferentes atividades em uma única pasta, estabelecendo assim, uma sequência de atividades de diferentes tipos. Conforme apresentado na Figura 56.

Figura 56 - Atividade construída no JCLIC



Fonte: a pesquisa.

Assim, foi elaborada uma sequência de atividades na seção da Geometria de Posição e na seção dos Poliedros para que os estudantes pudessem, de forma lúdica aplicar o que aprenderam sobre os conceitos abordados.

#### 6.4 INTERFACE DO OBJETO EDUCACIONAL GEOE

Com já destacado o GEOE foi desenvolvido em uma plataforma gratuita, que possui os direitos de hospedagem, logo é a própria página que disponibiliza o *link* de acesso à página elaborada. Este *link* é gerado de acordo com o cadastro do autor na plataforma, por isto, consta no *link* de acesso do OE-GEOE o nome da autora dessa investigação. O GEOE deve ser acessado pelo endereço <https://daniellesantosrodr1.wixsite.com/geoe>.

O GEOE está organizado em sete subseções Home; Geometria de Posição; Noções básicas e Conhecimentos Básicos; Poliedros, abrangendo Prisma e Pirâmide; Corpos Redondos; Avaliação do GEOE e Contato, que podem ser acessados a partir da página inicial Home. No que segue, a estrutura do objeto educacional passa a ser apresentada.

- Home – é a página inicial do GEOE (quadro da figura 57), onde consta a apresentação do OE-GEOE, bem como, o objetivo de sua construção. Na aba superior dessa página inicial são indicadas as temáticas abordadas facilitando a consulta e o direcionamento do estudante no material disponibilizado.

Figura 57 - Home do GEOE



Fonte: a pesquisa.

- Geometria de Posição – nesta subseção (Figura 58), busca-se disponibilizar materiais para o estudo e compreensão dos estudantes quanto aos conceitos de Geometria de Posição. Os estudantes terão acesso a um quadro resumo de conceitos primitivos como ponto, reta, plano e espaço, bem como, um vídeo explicativo referente a posições relativas entre retas, planos e retas

e planos. Disponibiliza-se, ainda, material didático, atividades no GeoGebra e jogos para que os estudantes possam conjecturar acerca dos conceitos abordados nesta subseção.

Figura 58 - Geometria de Posição do GEOE

**Geometria de Posição**

Quando nos referimos a Geometria de Posição, podemos pensar em posição de retas no plano, posição de retas no espaço ou posição de planos no espaço, entretanto, é necessário lembrar de algumas noções primitivas.

**PONTO, RETA e PLANO** são noções primitivas em Geometria, não sendo passíveis de definição e, por isso, vamos apenas estabelecer a noção do que sejam.

- **Ponto:** usualmente o representamos como um "pingo" ou uma "bolinha", mas é importante saber que isso é apenas uma representação. Nomeamos um ponto por uma letra maiúscula do alfabeto.
- **Retas:** são formadas por infinitos pontos alinhados, sendo objetos unidimensionais, ou seja, que possuem uma única dimensão e não fazem curvas, sendo infinita em ambos os sentidos. Podemos nomear uma reta por uma letra minúscula do alfabeto.
- **Plano:** é formado por infinitas retas sendo ilimitado não possuindo fronteiras. Nomeamos um plano por uma letra minúscula do alfabeto grego.

**ESPAÇO:** é o conjunto de infinitos pontos, retas e planos existentes. O espaço é o local onde toda a Geometria Espacial acontece e faz sentido, onde todos os sólidos e figuras geométricas podem ser construídos.

**test** Posição entre **DUAS RETAS:**

**RETAS CONCORRENTES:**

Dois retas  $r$  e  $s$ , são concorrentes apenas um ponto  $P$  comum.

**Teorema 2:** De duas retas,  $r$  e  $s$ , são concorrentes num ponto  $P$ , então elas determinam um único plano  $\alpha$ .

0:00 / 2:33

YouTube

**GEOGEBRA**



Fonte: a autora.

• Noções Primitivas e Conceitos Básicos – na Figura 59, destaca-se a página inicial da subseção que tem por objetivo propor uma revisão dos conceitos já introduzido no Ensino Fundamental para os estudantes, como conceito de poliedros e corpos redondos. Nesta subseção é indicado o vídeo “Geometria no Dia-a-Dia” para que os estudantes assistam e verifiquem o quanto a Geometria pode fazer parte da rotina deles, muitas vezes não sendo observada. Também foi elaborado um material didático para esclarecer possíveis dúvidas existentes e selecionadas atividades do GeoGebra, principalmente com foco na visualização dos sólidos geométricos.

Figura 59 - Noções Primitivas e Conceitos Geométricos

A Geometria Espacial se encarrega de estudar as figuras no espaço, ou seja, aquelas que são tridimensionais com três dimensões.

Vamos estudar os Poliedros e os Corpos Redondos.



Destaca-se que a atividade proposta no ícone GeoGebra, foi retirada do site [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org)

Fonte: a autora.

- Poliedros – apresenta-se nessa subseção definições e conceitos referentes ao estudo de Prismas e Pirâmides. Conforme destacado na Figura 60. Tem por objetivo propor situações aos estudantes para que possa conjecturar e se apropriar dos conceitos abordados, sendo para tal indicados materiais didáticos e atividades no GeoGebra para o trabalho com as propriedades estudadas. Um jogo de conhecimentos sobre os assuntos abordados na seção a finaliza.

Figura 60 – Poliedros

**Poliedros**

A palavra Poliedro vem do grego *polys* que significa "várias" (dando origem ao prefixo **POLI**) e *hédrai* que significa faces (dando origem ao sufixo **EDRO**).

Poliedro é um sólido com três dimensões, constituído por faces poligonais planas, arestas e vértices.

Dos sólidos que compõem os Poliedros, nesta seção, serão apresentados os **PRISMAS** e as **PIRÂMIDES**.

**PRISMA**

---

Prisma é um sólido geométrico convexo com duas bases congruentes e paralelas, além de possuir faces planas laterais (paralelogramos).

**PIRÂMIDE**

---

Pirâmide é um sólido geométrico convexo, formado por um conjunto de segmentos de retas com extremidade em um polígono (base) e em um ponto fora do plano que contém esse polígono (denominado vértice).

GEOGEBRA GEOGEBRA

Destacamos que as atividades propostas no nome **ClassOndra**, foram retiradas do site [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org)

Fonte: a autora.

- **Corpos Redondos** – nesta subseção (Figura 61), busca-se disponibilizar materiais que facilitem o estudo e compreensão dos estudantes quanto ao conceito de Corpos Redondos, conceito este não abordado na UEA, em função do tempo disponibilizado para a investigação. Nesta subseção os estudantes terão acesso a material didático, com conceitos, exemplos, assim como atividades no GeoGebra, para que possam explorar os conceitos estudados e, também, uma vídeo-aula com resolução de um exercício envolvendo as propriedades dos corpos redondos.

Figura 61 - Corpos Redondos

**Corpos Redondos**

Os corpos redondos são objetos geométricos que possuem superfícies curvas e quando colocados em um plano levemente inclinado rolam.

Estudaremos Cilindro, Cone e Esfera.

ULBRA  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE

Projeto GEOE

PPGECIM  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS

CORPOS REDONDOS

Profa. Denise Rodrigues

GEOGEBRA

GEOGEBRA

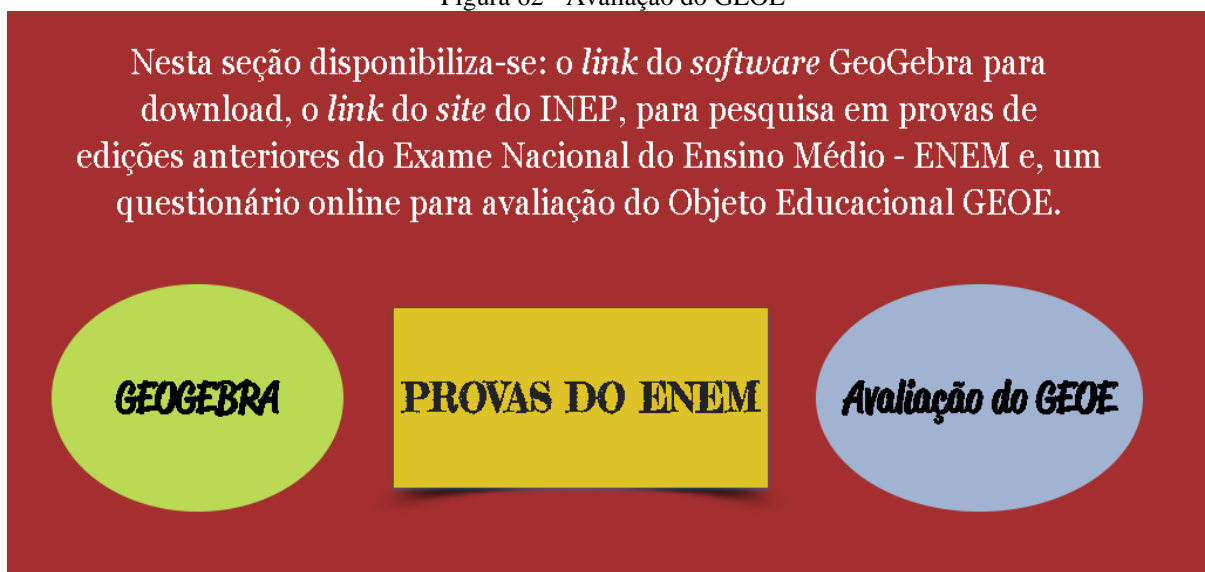
Destacase que a atividade proposta no ícone GeoGebra, foi retirada do site [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org)

Fonte: a autora.

- Seção Avaliação: esta seção foi organizada com objetivo de disponibilizar aos usuários pudessem avaliar e qualificar o GEOE, para tal, foi elaborado um questionário no Google Forms, com perguntas a respeito do GEOE, quanto a funcionalidade, potencialidades, assim como dificuldades enfrentadas no seu uso.

Nessa página, também, está disponibilizado *link* para acesso as provas do ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) e para *download* do *software* GeoGebra, conforme destacado na figura 62.

Figura 62 - Avaliação do GEOE



Fonte: a autora.

- A última seção do GEOE (Figura 63) é dedicado a um espaço para que os usuários possam entrar em contato, para tirar possíveis dúvidas, sugestões ou apontamentos.

Figura 63 – Contato

Para possíveis dúvidas ou sugestões entre em contato conosco.

Nome \*

E-mail \*

Assunto

Mensagem

Enviar

Fonte: a autora.

Destaca-se novamente que o GEOE não foi aplicado junto aos estudantes, mas sim, é fruto do trabalho de investigação realizado a partir da Unidade de Ensino organizada e aplicada ao longo da investigação. Ressalta-se que o GEOE se encontra em aprimoramento para a sua publicação.



## CONSIDERAÇÕES FINAIS

A realização do presente trabalho possibilitou investigar as possíveis contribuições do uso de uma Unidade de Ensino e Aprendizagem (UEA) com recurso às tecnologias digitais no desenvolvimento de conceitos da Geometria Espacial junto a estudantes do Ensino Médio.

Considerando os aportes teóricos articulados em torno da questão desenvolveu-se uma Unidade de Ensino e Aprendizagem (UEA), na qual foram construídos materiais de estudo, atividades individuais e em grupo para realização em sala de aula, bem como atividades de construção no *software* GeoGebra. Destaca-se que na constituição da UEA conjecturava-se o quanto esses elementos, aliados ao recurso às tecnologias digitais, poderiam contribuir para o desenvolvimento e aprofundamento dos conhecimentos geométricos dos estudantes.

Para o desenvolvimento da Unidade de Ensino e Aprendizagem, foram tomados como referência as Diretrizes Curriculares do Ensino Médio, Projeto Pedagógico e Planos de Ensino da Escola, bem como pesquisas as quais envolvessem o ensino e aprendizagem da Geometria Espacial, particularmente às relacionadas ao uso do *software* GeoGebra e ao modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de van Hiele.

A fim de investigar a potencialidade da aplicação da UEA na turma participante da pesquisa, buscou-se analisar dos conhecimentos prévios dos estudantes, antecedente ao desenvolvimento da unidade. Assim, foi elaborado um instrumento denominado Instrumento de Investigação Inicial, o qual indicou que os estudantes possuíam domínio dos conhecimentos e habilidades pertinentes ao nível de Visualização (nível 1) do modelo de van Hiele. Quanto ao nível de Análise (nível 2), observou-se que os estudantes, no que se refere a determinadas habilidades indicadas no nível, não as tinham completamente desenvolvidas. Em relação ao nível de Dedução Informal (nível 3), os estudantes apresentaram dificuldades na construção do significado dos conceitos, definições e propriedades.

A UEA foi organizada em três eixos: Geometria de Posição, Noções Básicas e Conhecimentos Básicos e Poliedros: Prisma e Pirâmide, o qual foram trabalhados com recurso as tecnologias digitais. Destaca-se que o desenvolvimento e aplicação da UEA evidenciou, como aspectos positivos, o envolvimento e comprometimento dos estudantes na realização das atividades propostas no *software* GeoGebra. Os estudantes mostraram habilidades no uso e na construção dos sólidos geométricos, utilizando-se de variadas ferramentas, muitas das quais os próprios estudantes foram “descobrir” ao longo do trabalho, o que superou as expectativas da professora/pesquisadora.

Ressalta-se, também, como ponto positivo a evolução do conhecimento dos estudantes ao longo do desenvolvimento da UEA. Os estudantes apresentaram bom desempenho tanto no nível de visualização, como no nível de análise e avanços significativos no nível de dedução informal do modelo de Van Hiele.

Porém, ao longo da investigação ocorreram desafios que dificultaram o desenvolvimento da UEA, como a falta de material didático, redução de carga horária para o desenvolvimento da investigação, bem como, computadores sem manutenção. Apesar de serem situações que interferiram no andamento da investigação, serviram de estímulo para a elaboração de materiais de estudo, bem como objetos educacionais.

A implementação da UEA indicou que a turma já apresentava conhecimento dos conceitos envolvidos no nível de visualização do modelo (nível 1), não apresentando dificuldades em realizar atividades deste nível. Quanto ao nível de análise (nível 2) a turma indicava possuir os conhecimentos referentes ao nível, todavia foi possível perceber que, após aplicação da unidade ocorreu um avanço de conhecimento no nível.

Já no nível de dedução informal do modelo (nível 3) foi onde ocorreu o maior avanço, visto que, a turma no início da investigação não possuía as habilidades necessárias para o trabalho neste nível. Porém, com o trabalho desenvolvido ao longo da investigação, foram desenvolvidos os conceitos geométricos pertinentes e desenvolvidas as habilidades referentes a esse nível.

A partir dos dados e das análises realizadas nesta investigação, considera-se que os resultados obtidos foram satisfatórios. Assim, entende-se que a investigação alcançou, em parte, os objetivos propostos, posto que, ao longo do trabalho, alterações no plano de estudos e mesmo em organização das aulas, levaram a um replanejamento que pode não ter permitido o desenvolvimento previsto inicialmente.

Cabe destacar que o *software* GeoGebra foi um importante elemento no desenvolvimento desta investigação, uma vez que viabilizou a construção e a visualização dos sólidos geométricos, propiciando aos estudantes um ambiente onde puderam analisar, discutir e conjecturar sobre os conceitos voltados a Geometria Espacial.

A realização da investigação possibilitou reflexões e considerações aos estudantes e a professora/pesquisadora, tanto em relação aos resultados obtidos na pesquisa, como também, referente à inserção do uso de tecnologias digitais em sala de aula. Concorda-se com Lorente (2009) de que, as tecnologias podem e devem fazer parte da vida escolar dos estudantes, visto que, de acordo com Santos e Osaka (2003) potencializam a construção dos conhecimentos, logo a aprendizagem.

Contudo, questiona-se como propiciar que esta ferramenta se torne um potente instrumento de ensino e aprendizagem, visto que, muitas vezes, tem sido apenas um instrumento de pesquisa e entretenimento nas escolas. Como organizar e proporcionar ambientes onde os estudantes possam ter contato com a tecnologia no sentido de proporcionar maiores e melhores aprendizagens?

Esses questionamentos e indagações, os quais emergiram ao longo da investigação, e dos desafios enfrentados, levaram a pesquisadora buscar meios e estratégias para superar as dificuldades enfrentadas e, assim, surgiu o objeto educacional GEOE (Geometria Espacial). A construção do GEOE foi motivada pela necessidade e importância da produção e disponibilização de recursos voltados para o ensino e aprendizagem.

Para o desenvolvimento do objeto educacional GEOE, a pesquisadora necessitou aprofundar e aprimorar seus conhecimentos em torno das tecnologias digitais, uma vez que todos os materiais de estudo, assim como as atividades produzidas a partir de *softwares* foram produzidos pela pesquisadora.

O GEOE foi constituído após aplicação desta investigação, logo, o mesmo não foi aplicado na turma participante da pesquisa, entretanto, o mesmo será disponibilizado para a escola na qual a pesquisa foi desenvolvida, assim como para as demais escolas do município de Canoas e para todos que se interessarem, já que, para o seu acesso é necessário apenas o endereço eletrônico.

Por fim, observa-se que a Geometria Espacial e a inserção das tecnologias digitais nas escolas são temas amplos e ainda muito ricos para pesquisas, tanto no que se refere aos processos de ensino e aprendizagem, como as dificuldades encontradas pelos alunos, as relações entre tecnologias digitais e Geometria Espacial, assim como o desenvolvimento do pensamento geométrico espacial. Essas reflexões que emergiram ao longo do trabalho já estão servindo de base para novas propostas de investigações.

## REFERÊNCIAS

ALMEIDA, T. C. S. **Sólidos arquimedianos e CABRI 3D: um estudo de truncaduras baseadas no renascimento.** Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da Didática da Matemática.** Curitiba: Editora UFPR, 2007.

ANDRADE, E. C. **Um Exame das Dificuldades do Ensino de Geometria no Modo Demonstrativo.** In: X ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – ENEM. Salvador: jul. 2010. Disponível em: <[http://www.lematec.net/CDS/ENEM10/artigos/CC/T12\\_CC490.pdf](http://www.lematec.net/CDS/ENEM10/artigos/CC/T12_CC490.pdf)> Acesso em: 20 out. 2016.

ANDRADE, J. A. A; NACARATO, A. M. Tendências Didático-Pedagógicas no Ensino de Geometria: um olhar sobre os trabalhos apresentados nos ENEMs. In: **Educação Matemática em Revista**, n. 17, ano 11, p. 61-70, 2004.

BARBOSA, C. P. **Desenvolvimento do Pensamento Geométrico nos anos iniciais do Ensino Fundamental: uma proposta de ensino para professores e formadores de professores.** 2011. 65p. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto) – Universidade Federal de Ouro Preto, Belo Horizonte, 2011.

BARSEGHIAN, T. **Three Trends That Define the Future of Teaching and Learning.** Disponível em <http://blogs.kqed.org/mindshift/2011/02/three-trends-thatdefine-thefuture-of-teaching-and-learning/> . Acesso em 22/10/2017.

BENTO, H. A. **O desenvolvimento do pensamento geométrico com a construção de figuras geométricas planas utilizando o software: GeoGebra.** 2010. 285p. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2010.

BERTO, F. L; RAIMUNDO, E. M; ROSA, A. G. C. **Projeto “Criando um site com Wix.** V Simpósio Hipertexto e Tecnologias na Educação. Universidade Federal de Pernambuco. ISSN 1984-1175.

BICUDO, I. **A História da Geometria euclidiana do antigo Egito às salas de aula.** In: Globo Ciência, São Paulo, 2011. Disponível em <<http://redeglobo.globo.com/globociencia/noticia/2011/12/historia-da-geometria-euclidiana-do-antigo-egito-salas-de-aula.html>>

BOGDAN, R; BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos.** Traduzido por: Maria João Alves, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Portugal, Porto Editora Ltda, 1994.

BORBA, M. C. Tecnologias informáticas na educação Matemática e reorganização do pensamento. In: BICUDO, M. A. V. (org.). **Pesquisa em educação Matemática: concepções e perspectivas.** São Paulo: UNESP, 1999. p. 285 – 295.

BORBA, M. C; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. V. **Humans-With-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization**. v. 39, New York: Springer, 2005.

BORBA, M. C; SCUCUGLIA, R. R. S.; GADANIDIS, G. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática: sala de aula e internet em movimento**. Belo Horizonte: Autêntica, 2014.

BOYER, Carl. **História da Matemática**. Trad. Elza E. Gomide. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática/Secretaria de Educação Fundamental**. – Brasília: MEC/SEF, 1997. 142p. Disponível em: < <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf> > Acesso em: 15/03/2016.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática (Ensino Médio)** – Brasília, 2011. Disponível em <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf>>. Acesso em 15/03/2016.

BRASIL. Secretaria da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática**. – Brasília, 1998. Disponível em <[http://portal.mec.gov.br/dmdocuments/saeb\\_matriz2.pdf](http://portal.mec.gov.br/dmdocuments/saeb_matriz2.pdf)>

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais + (PCN+) - Ciências da Natureza e suas Tecnologias**. Brasília: MEC, 2002.

BRASIL. Ministério da Educação Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Brasília: **Matriz de Referência ENEM**, 2016. Disponível em <[http://download.inep.gov.br/educacao\\_basica/enem/.../2016/matriz\\_referencia\\_enem.pdf](http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/.../2016/matriz_referencia_enem.pdf)> Acesso em 24/06/2017.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular** – Documento preliminar. MEC. Brasília, DF, 2016. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/#/site/inicio>>. Acesso em: 27/04/2017.

CAJORI, F. **Uma História da Matemática**. Ed. Ciência Moderna Ltda. Rio de Janeiro, 2007.

CANOAS. **Prefeitura Municipal**. Disponível em <http://www.canoas.rs.gov.br>. Acesso em 05.set.2017.

CLARAS, A. F; PINTO, N. B. **Movimento da Matemática Moderna e as Iniciativas de Formação Docente**.

COZZOLINO, A. M. **O Ensino da Perspectiva Usando o Cabri 3D: uma experiência com alunos do ensino médio**. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

COSTA, R. D. A. **O uso de um Ambiente Virtual de Aprendizagem no Ensino de Ciências: explorando ferramentas da web para a elaboração de uma sala de aula virtual.** 2014. 97p. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Luterana do Brasil, Canoas, 2014.

COSTA, A. P. **A construção do conceito de quadriláteros notáveis no 6º ano do Ensino Fundamental: um estudo sob a luz da Teoria Vanhieliana** 15/02/2016 242 f. Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica instituição de Ensino: Universidade Federal de Pernambuco, Recife Biblioteca depositária: Biblioteca Central da UFPE.

CROWLEY, M. L. **O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico.** In: LINDQUIST, Mary Montgomery; SHULTE, Albert P. (Org.) **Aprendendo e ensinando Geometria.** Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994. p.1-20.

ALBA, C. S. D. **Possibilidades de Utilização do Software GeoGebra no Desenvolvimento do Pensamento Geométrico de um grupo de alunos do sexto ano do Ensino Fundamental.** 2015. 183 p. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Luterana do Brasil, Canoas, 2015.

DREYFUS, T. H, Nurit. **Euclides deve permanecer e até ser ensinado.**In: LINDQUIST, Mary. SHULTE. Albert P. **Aprendendo e ensinando geometria.** Trad. Hygino H. Domingues, São Paulo: Atual, 1994.p. 50-71.

EVES, H. **História da Geometria.** In: **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula.** Vol. 3. São Paulo: Atual, 1992. Traduzido por Hygino H. Domingues.

FAINGUELERNT, E. K. **Educação Matemática: representação e construção em Geometria.** Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1999.

FANTI, E. L. C.. **Utilizando o software Geogebra no ensino de certos conteúdos matemáticos.** Disponível em <<http://www.mat.ufpb.br/bienalsbm/arquivos/Conferencias%20Apresentadas/C%203.pdf>>. Acesso em: 18/06/2016.

FERNANDES, G. G. **Avaliação ergonômica da interface humano computador de ambientes virtuais de aprendizagem.** 2008. 280 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Ceará. Faculdade de Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação Brasileira, Fortaleza-CE, 2008.

FONTES, M. M; FONTES, D. J. S. **Utilização do Software GeoGebra no Ensino de Geometria.** In: Encontro Nacional de Ensino De Matemática, X. **Anais...** Salvador – BA, 2010.

GARCIA, V. C. V; GRAVINA, M. A.; BÚRIGO, E. Z.; BASSO, M. V. A.; (Orgs). In: **Matemática, Mídias Digitais e Didática: tripé para formação do professor de Matemática.** Porto Alegre: Evangraf, 2015. p. 11 – 35.

GIRALDO, V; CAETANO, P.; MATTOS, F. **Recursos Computacionais no Ensino de Matemática.** Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção PROFMAT, 06).

GOEDERT, E.; VALASCO, A.S.; ALVIM, B. R. C.; CARVALHO, T. V. R.; Paraná. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência da Educação. **Diretoria de Tecnologias Educacionais**. P111 JClick, versão 0.1.22 : autoria de atividades educacionais, v.1 / Secretaria de Estado da Educação. Superintendência da Educação. Diretoria de Tecnologias Educacionais. – Curitiba : SEED – Pr., 2010. – V. 1 ; 57 p – ISBN978-85-8015-018-6

GRAVINA, M. A. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo**. Dissertação (Doutorado em Informática na Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2001.

GRAVINA, M. A; BASSO, M. V. A. **Matemática, Mídias Digitais e Didática: tripé para formação do professor de Matemática**. p.180, elaborado, Biblioteca Central da Universidade Federal do Rio grande do Sul. Porto Alegre: Evangraf, 2012.

GOBBI, J. A. **Do Livro didático ao software GeoGebra: A engenharia didática no estudo de figuras planas na 6º série/ 7º ano do Ensino Fundamental**. 2012. 135 p. Dissertação (Programa de Pós-Graduação, Pesquisa e Extensão Área de Ciências Tecnológicas) – Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, 2012.

GONCALVES, W. V. **O transitar entre a matemática do matemático, a matemática da escola e a matemática do GeoGebra: um estudo de como professores de matemática lidam com as possibilidades e limitações do geogebra'** 01/07/2016 240 f. Doutorado em EDUCAÇÃO PARA A CIÊNCIA Instituição de Ensino: Universidade Est.Paulista Júlio de Mesquita Filho/Bauru, Bauru Biblioteca Depositária: Divisão Técnica de Biblioteca e Documentação

HAMAZAKI, A. C. **O Ensino da Geometria por meio da metodologia Van Hiele: Uma Experiência**. Disponível em <<https://drb-assessoria.com.br/1ENSINODAGEOMETRIAVANHIELE.pdf>> Acesso em 20/11/2016.

HENDRES, C. A; KAIBER, C. T. **A Utilização da Informática como recurso didático nas aulas de Matemática**. In: Acta Scientiae Volume 7. n. 1. Editora Ulbra. Canoas. Jan./jun. 2005. Disponível em <<http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/viewFile/185/169>>. Acesso em 30/06/2016.

HOFFER, A. **Geometry is more than Proof. The Mathematics Teachers**, vol 74, n. 1, p. 11-18, 1981. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/27962295>> Acesso em 08/06/2016.

HOHENWARTER, M.; LAVICZA, Z. (2007). **Mathematics teacher development with ICT: Towards an International Geogebra** Institute. Paper presented at the Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics.

KAIBER, C. T.; VECCHIA, R. DALLA; SCAPIN, D. K. **A incorporação de calculadoras gráficas na estruturação de conceitos relacionados a coordenadas polares e equações paramétrica**. In: GROENWALD; C. L. O.; ROSA, M. (Eds.). Educação Matemática e Calculadoras – Teoria e Prática. p.15-43, 2010.

KAIBER, C. T; CONCEIÇÃO, C. P. **Software Educativo e o Ensino da Trigonometria**. In: LEIVAS, J. C. P. Educação Matemática em Revista – RS. p. 37-50, n. 8, ano. 8, 2007.

KAZANOWSKI, D. V. **Ensino De Geometria Nas Séries Iniciais Em Minas do Leão: Algumas Reflexões.** 2010. Disponível em: <[http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/29350/000776215.pdf?sequence=1&locale=pt\\_BR](http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/29350/000776215.pdf?sequence=1&locale=pt_BR)> Acesso em: 20 mar. 2014.

KENSKI, V. M.. **Tecnologias e Ensino Presencial e a Distância.** 9. ed. Campinas: Papirus, 2015.

LOPES, M. L; NASSER, L. **Geometria na Era da Imagem e do Movimento.** Rio de Janeiro: Instituto de Matemática/UFRJ, 1997.

LORENZATO, S. **Por que Não ensinar Geometria?** Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática. Blumenau, Ano III, nº 4, 1º semestre, 1995.

LORENZATO, S. **Para Aprender Matemática.** Campinas: Autores Associados, 2006. (Coleção Formação de Professores).

LUDKE, Menga.; ANDRÉ, Marli E.D.A. **Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas.** 2. Ed. Rio de Janeiro: Editora E.P.U., 2013.

MALTEMPI, M. V. **Prática pedagógica e as tecnologias de informação e comunicação (TIC).** In: PINHO, S. Z. (Org.). *Oficinas de Estudos Pedagógicos: reflexões sobre a prática do ensino superior.* São Paulo: Cultura Acadêmica, 2008. p. 157-169.

MARIN, G. B. **O Software Cabri 3D como ferramenta de auxílio ao ensino e visualização de seções planas no cubo para alunos do ensino médio.** 2013. p. 179. Dissertação (Programa de Pós-Graduação, Pesquisas e Extensão Área de Ciências Tecnológicas) – Centro Universitário Franciscano. Santa Maria, 2013.

MARTINHO, T; POMBO, L. **Potencialidades das TIC no ensino das Ciências Naturais-um estudo de caso.** REEC: Revista electrónica de enseñanza de las ciencias, Vigo, v. 8, n. 2, p.527-538, 2009.

MIORIM, M. A. **As influências do primeiro movimento de modernização do ensino de Matemática no Brasil.** In: ENCONTRO LUSO-BRASILEIRO DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA e SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, 2, 1997, Águas de Pedro. **Anais...** Rio Claro: Cruzeiro/ Comitê Brasileiro de História da Matemática, 1997. p.273-276.

NASSER, L; SANT'ANNA, N..F.P. **Geometria segundo a teoria de Van Hiele.** 2. ed. rev. Rio de Janeiro: IM/UFRJ, 2010.

PAVANELLO, R. M. **O Abandono do Ensino de Geometria: uma Visão Histórica.** 1989. 201 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - UNICAMP, Campinas, 1989. Disponível em: <<http://www.bibliotecadigital.unicamp.br/document/?down=vtls000045423>>. Acesso em: 21/04/2016.

PAVANELLO, R. M. **O abandono do ensino da Geometria no Brasil: causas e consequências.** REVISTA ZETETIKÉ, Campinas, SP. V. 01, p. 7-17, março, 1993



PEREIRA, M. R. O.; **A geometria escola: uma análise dos estudos sobre o abandono do seu ensino.** 2001. 84p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Programa de Pós-Graduação da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2001.

PERRENOUD, P. Dez novas competências para ensinar. trad. Patrícia Chittoni Ramos. Porto Alegre: Artmed, 2000.

PIRES, C. M. C. **Educação Matemática e sua influência no processo de organização e desenvolvimento curricular no Brasil.** Revista Bolema, Rio Claro, SP. Ano 21. Nº 29, p. 13 – 42, 2008.

PIROLA, N. A. **Soluções de problemas geométricos: dificuldades e perspectivas.** 2000, p.218. Tese de Doutorado em Educação – Universidade Estadual de Campinas. Campinas: 2000.

RIBEIRO, D. F. **Estudo de interface humano-máquina em dispositivos móveis.** Florianópolis, UFSC, 2007.

RODRIGUES, A. C. **O Modelo de Van Hiele de Desenvolvimento do Pensamento Geométrico.** 2007. 10p. TCC - Universidade Católica de Brasília, Brasília, 2007. Disponível em < <https://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/22007/AlessandraCoelhoRodrigues.pdf>>. Acesso em 05/08/2016.

SANTOS, C. S. **A produção Matemática e um ambiente virtual de aprendizagem: o caso da Geometria Euclidiana Espacial.** 2006, p. 145. Dissertação do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 2006.

SANTOS, C. A.; NACARATO, A. M. **Aprendizagem em Geometria na educação básica: A fotografia e a escrita em sala de aula.** ed. Autêntica. Coleção: Tendências em Educação Matemática, 2014.

SANTOS, E. O. DOS; OKADA, A. L. P. **A construção de ambientes virtuais de aprendizagem: por autorias plurais e gratuitas no ciberespaço.** ANPED, GT: Educação e Comunicação/n.16. *Anais...*, 2003.

SILVA, M. C. L. **Que Geometria Moderna para as Escolas do Brasil e de Portugal?.** In: Revista Diálogo Educacional, Curitiba, v.8, n.25, p.689-699, set/dez. 2008. Disponível em < [www2.pucpr.br/reol/index.php/dialogo?dd99=pdf&dd1=2441](http://www2.pucpr.br/reol/index.php/dialogo?dd99=pdf&dd1=2441)> Acesso em 10/04/2016.

SILVA, J. C. S. **As novas tecnologias no contexto escolar: uma abordagem sobre aplicações do GeoGebra em trigonometria.** 2015. p.85. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2015.

SOUZA, B. C. **A Teoria da Mediação Cognitiva: os impactos cognitivos da Hipercultura e da Mediação Digital.** 2004. 298p. Tese (Programa de Pós-Graduação em Psicologia) – Universidade Federal de Pernambuco, Pernambuco, 2004. Disponível em <<http://www.liber.ufpe.br/teses/arquivo/20040617095205.pdf>>. Acesso em 25/05/2016.

SOUZA, L. A. **Uma Proposta para o Ensino da Geometria Espacial usando o GeoGebra 3D.** 2014, 79p. Mestrado Profissionalizante (Programa de Pós-Graduação em Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Paraíba, 2014.

VALENTE, J. A. (org.) **O computador na sociedade do conhecimento**. Campinas, SP:UNICAMP/NIED, 1999. 156p.

VALENTE, J. A. **A Comunicação e a Educação baseada no uso das Tecnologias digitais de informação e comunicação**. Revista UNIFESO – Humanas e Sociais. Volume 1, nº1, 2014, pp.141-166.

VAN HIELE. **Structure and Insight – A theory of Mathematics**. Education, Orlando: Academic Press. 1986.

VILLIERS, M. **Algumas reflexões sobre a Teoria de Van Hiele**. Tradução de Celina A. A. P. In: Educação Matemática Pesquisa a partir da versão original apresentada no IV Congresso de professores de Matemática da Sociedade Croata de Matemática, Zagreb, 2010.

ZOTTO, N. D; MACHADO. G. M. Z; MELLO. K. B; SILVA. R. S. **GeoGebra 3D e quadro interativo: uma possibilidade para o ensino de Geometria Espacial no Ensino Médio**. Anais do VI CIEM – Canoas, Ulbra, 2013. Disponível em <<http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vi/paper/view/778/621>> Acessado em 21/03/2016.

ZULATO, R. B. A. **Professores de Matemática que utilizam softwares de Geometria Dinâmica: suas características e perspectivas**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2002.

## ANEXOS

### ANEXO A – AUTORIZAÇÃO DA ESCOLA



COLÉGIO ESTADUAL MERCHAL RONDON

*Canoas*, 14 de 09 de 2016

Ao Comitê de Ética em Pesquisa em Seres Humanos da ULBRA/RS

Prezados Senhores

Declaro que tenho conhecimento e autorizo a realização do projeto de pesquisa intitulado **"PENSAMENTO GEOMÉTRICO DE UM GRUPO DE ESTUDANTES DO 3º ANO DO ENSINO MÉDIO: DA GEOMETRIA PLANA À ESPACIAL"** proposto pela pesquisadora Danielle dos Santos Rodrigues.

O referido projeto será realizado (a) com um grupo de 35 estudantes do 3º ano do Ensino Médio do Colégio Estadual Marechal Rondon do município de Canoas, e só poderá ocorrer a partir da apresentação do Parecer do Colegiado de aprovação do Comitê de Ética em Seres Humanos da ULBRA/RS.



*Cristina Colares Pereira* Atenciosamente  
Cristina Colares Pereira  
Vice-Diretora  
D O 15/01/16 - P29

Carimbo com Nome, cargo e assinatura do responsável  
pelo local de realização da Pesquisa

## ANEXO B – PLANO DE AULA DA TURMA 301A – DISCIPLINA DE MATEMÁTICA



## Colégio Estadual Marechal Rondon

Plano de estudos 2º ANO do ENSINO MÉDIO - 2017  
 Área de Conhecimento: Matemática e Suas Tecnologias

### EMENTA

Ao conceber este plano de curso, partimos do pressuposto básico de que a aprendizagem é entendida como resultado da construção do conhecimento pelo aluno. De acordo com nossa proposta de condução do aprendizado, a construção do conhecimento matemático envolve valores humanos, tem relações com a tecnologia, com toda a vida social, cultural e com a interação social na produção coletiva. Acreditamos que esse direcionamento favorece a revisão de conteúdos e métodos da educação matemática. De tal forma, o aprendizado matemático foi aqui entendido e projetado como um processo que orienta e valoriza a interdisciplinaridade, a contextualização, a relação efetiva entre teoria e prática e, principalmente, a formação de pessoas capazes de exercer a cidadania.

### OBJETIVOS

Ler, interpretar e fazer uso das representações matemáticas. Identificar, ler, analisar, escrever e produzir adequadamente textos que façam uso da linguagem matemática. Ler e identificar problemas, bem como, selecionar e analisar as informações neles contidas. Definir estratégias para a busca de solução e posterior análise crítica dos resultados produzidos. Relacionar os conhecimentos e métodos matemáticos com outras áreas do conhecimento ligados às situações reais e utilizar esse conhecimento para analisar e intervir nessas situações. Fazer uso de recursos tecnológicos – a calculadora e computador – de forma que estes instrumentos se adaptem às situações problema.

### PROGRAMA

Trigonometria  
 Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares.  
 Geometria Plana e Espacial  
 Análise Combinatória

### METODOLOGIA

A disciplina será desenvolvida por meio de aulas teóricas, análise de textos, análise e resolução de problemas, discussões, levantamento bibliográfico, resolução de exercícios, trabalhos práticos e utilização do laboratório.

ATIVIDADES DISCENTES		
Conteúdos	Habilidades	Atividades Significativas
Trigonometria		
Trigonometria no Triângulo Retângulo	Reconhecer o triângulo retângulo.	Exercícios relacionando os ângulos complementares.
Seno, cosseno e tangente.	Dado um triângulo retângulo, ser capaz de identificar e calcular seno, cosseno e tangente de ângulo agudo.	Atividades envolvendo seno, cosseno e tangente.
Funções circulares	Capacidade de resolver problemas utilizando as funções seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante no ciclo trigonométrico.	Resolver problemas que envolvam as funções trigonométricas.
Relações entre funções	Compreender e aplicar todas as relações trigonométricas no ciclo trigonométrico.	Resolver problemas que envolvam as relações

ATIVIDADES DISCENTES		
Conteúdos	Habilidades	Atividades Significativas
Gráficos das funções trigonométricas	Construir e analisar os gráficos das funções seno, cosseno e tangente. Reconhecer os fenômenos periódicos.	trigonométricas no ciclo. Aula no laboratório de informática.
Matrizes, determinantes e sistemas lineares		
Representação de uma matriz e matrizes especiais.	Identificar matrizes.	Exercícios de matrizes.
Igualdade de matrizes	Resolver problemas de igualdade de matrizes, utilizando sistemas de 1º grau.	Resolver problemas envolvendo igualdade de matrizes.
Operações com matrizes	Capacidade de somar, subtrair e multiplicar matrizes.	Exercícios de aplicação das operações na resolução de problemas.
Matriz inversa	Verificar se a matriz é inversível, caso seja possível encontrar a matriz inversa.	Exercícios de matriz inversa.
Definição de determinantes e cálculo de determinante de 1º, 2º e 3º ordens.	Calcular determinantes utilizando as regras apropriadas.	Exercícios de determinantes.
Sistemas lineares. Discussão e resolução de sistemas.	Capacidade de resolver sistemas e de discuti-los.	Situações-problema envolvendo sistemas lineares.
Revisão de geometria plana.	Capacidade de calcular perímetro e área das principais figuras geométricas.	Resolução de problemas envolvendo figuras planas.
Geometria Espacial		
Poliedros	Aplicar a relação de Euler para Poliedros. Reconhecer Poliedros de Platão e regulares.	Construção de sólidos para melhor compreender os conceitos.
Prismas	Compreender conceitos, elementos e classificar os prismas. Calcular área e volume de prismas.	Exercícios de prismas.
Pirâmide	Compreender conceitos, elementos e classificar as pirâmides. Calcular área e volume de pirâmides.	Exercícios de pirâmides.
Cilindro	Compreender conceitos, elementos e classificar as cilindros. Calcular área e volume de cilindro.	Exercícios de cilindro.
Cone	Compreender conceitos, elementos e classificar as cones. Calcular área e volume de cone.	Exercícios de cone.
Esfera	Compreender conceitos, elementos e classificar a esfera. Calcular área e volume de esfera.	Exercícios de esfera.
Análise Combinatória		
Princípio Fundamental da Contagem	Aplicar o princípio fundamental da contagem nas situações problema.	Situação- problema de contagem.
Fatorial de um número	Resolver problemas envolvendo fatorial.	Exercícios de fatorial.
Permutação, arranjo e combinação.	Resolver situações-problema envolvendo permutação, arranjo e combinação.	Problemas de permutação, arranjo e combinação.

#### AVALIAÇÃO

A avaliação será contínua e levará em consideração todas as atividades desenvolvidas pelo aluno sob orientação do professor (em classe ou não), trabalhos, provas e participação nas aulas.

## APÊNDICES

## APÊNDICE A - TERMO DE CONSENTIMENTO

<b>TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO</b>
---------------------------------------------------

<b>1. IDENTIFICAÇÃO DO PROJETO DE PESQUISA: PROJETO DE MESTRADO</b>									
Título do Projeto: <i>Pensamento Geométrico de um grupo de estudantes do 3º ano do Ensino Médio: da Geometria Plana à Espacial</i>									
Área do Conhecimento: Matemática				Número de participantes: 40			Total: 40		
Curso: Mestrado de Ensino em Matemática				Unidade: Programa de Pós Graduação de Ensino de Ciências e Matemática (PPGECIM)					
Projeto Multicêntrico	Sim	Não X	Nacional X	Internacional	Cooperação Estrangeira	Sim	Não X		
Patrocinador da pesquisa: Pesquisadora									
Instituição onde será realizado: Colégio Estadual Marechal Rondon									
Nome dos pesquisadores e colaboradores: Danielle dos Santos Rodrigues									

Seu filho (**e/ou menor sob sua guarda**) está sendo convidado(a) para participar do projeto de pesquisa acima identificado. O documento abaixo contém todas as informações necessárias sobre a pesquisa que estamos fazendo. Sua autorização para que ele participe neste estudo será de muita importância para nós, mas se retirar sua autorização, a qualquer momento, isso não lhes causará nenhum prejuízo.

<b>2. IDENTIFICAÇÃO DO RESPONSÁVEL</b>		
Nome do Menor:	Data de Nasc:	Sexo:
Nome do Responsável:	Nacionalidade:	
E-mail:	Estado Civil:	Profissão:
RG:	CPF/ MF:	Telefone:
Endereço:		

<b>3. IDENTIFICAÇÃO DO PESQUISADOR RESPONSÁVEL</b>		
Nome: Danielle dos Santos Rodrigues	Telefone: (51) 9287-3158	
Profissão: Professora	Registro no Conselho Nº:	E-mail: danielle_santosrodrigues@hotmail.com
Endereço: Av. Farroupilha, 8001 – prédio 14, sala 338 bairro: São José – Canoas.		

Eu, responsável pelo menor acima identificado, após receber informações e esclarecimento sobre este projeto de pesquisa, autorizo, de livre e espontânea vontade, sua participação como voluntário(a) e estou ciente:

**1. Da justificativa e dos objetivos para realização desta pesquisa.**

Pesquisas na área da educação Matemática tem demonstrado a importância dos conceitos geométricos no currículo de Matemática, uma vez que, por meio deles, os estudantes conseguem demonstrar um pensamento especial que lhe permite compreender, descrever e representar de forma organizada, o mundo em que vive. Diante destes resultados a pesquisa tem como objetivo investigar as possíveis contribuições da utilização do *software* GeoGebra 3D na aprendizagem da Geometria Espacial junto a um grupo de estudantes do 3º ano do Ensino Médio.

## **2. Do objetivo da minha participação.**

A participação do seu filho (**e/ou menor sob sua guarda**) é de grande valia para esta investigação, uma vez que, a pesquisa visa analisar o conhecimento adquirido pelos estudantes do 3º ano do Ensino Médio ao longo da Educação Básica em relação ao conteúdo de Geometria na disciplina de Matemática.

## **3. Do procedimento para coleta de dados.**

A pesquisa será realizada em três fases: no primeiro momento será aplicado um instrumento de pesquisa aos estudantes para verificar os conhecimentos prévios e possíveis dificuldades no conteúdo de Geometria. Através deste retorno será desenvolvida uma Sequência Didática com o uso do *software* GeoGebra 3D, esta sequência será aplicada aos estudantes na própria escola, em encontros semanais nos períodos da disciplina de Matemática, quando abordado o conteúdo de Geometria Espacial. A pesquisa será finalizada com a aplicação de um novo instrumento de pesquisa aos estudantes, para analisar o conhecimento adquirido pelos mesmos após a aplicação da sequência com o *software* GeoGebra 3D.

## **4. Da utilização, armazenamento e descarte dos dados.**

Os dados coletados através desta investigação serão armazenados pela pesquisadora para análise dos resultados, visto que, serão apresentados na dissertação de Mestrado da pesquisadora.

## **5. Dos desconfortos e dos riscos.**

A participação é isenta de desconfortos e envolve riscos mínimos de quebra accidental de confidencialidade.

## **6. Dos benefícios.**

Propor a reflexão acerca da inclusão de ferramentas digitais em sala de aula, e suas potencialidades.

## **7. Da isenção e ressarcimento de despesas.**

O participante ficará isento de qualquer despesa e não receberá ressarcimento porque não terá despesas na realização desta pesquisa.

## **8. Da liberdade de recusar, desistir ou retirar meu consentimento.**

Seu filho (**e/ou menor sob sua guarda**) tem a liberdade de recusar, desistir ou de interromper a colaboração nesta pesquisa no momento em que desejar, sem necessidade de qualquer explicação. A desistência não causará prejuízo algum. Não virá interferir na pesquisa sobre o Pensamento Geométrico de um grupo de estudantes do 3º ano do Ensino Médio: da Geometria Plana à Espacial.

## **8. Da forma de acompanhamento e assistência.**

O desenvolvimento da pesquisa com os estudantes (aplicações dos instrumentos de pesquisa e a aplicação da sequência didática) são de responsabilidade da pesquisadora, ficando a disposição para possíveis esclarecimentos.

## **9. Da garantia de sigilo e de privacidade.**

Ressalto o compromisso que terei de resguardar a confidencialidade das informações prestadas, que serão usadas exclusivamente para análise dos resultados.

## **10. Da garantia de esclarecimento e informações a qualquer tempo.**

Tenho a garantia de tomar conhecimento e obter informações, a qualquer tempo, dos procedimentos e métodos utilizados neste estudo, bem como dos resultados finais, desta pesquisa. Para tanto, poderei consultar a **pesquisadora responsável Danielle dos Santos Rodrigues**. Em caso de dúvidas não esclarecidas de forma adequada pela pesquisadora, de discordância com os procedimentos, ou de irregularidades de natureza ética poderei ainda contatar o **Comitê de Ética em Pesquisa em Seres Humanos da ULBRA Canoas(RS)**, com endereço na Rua Farroupilha, 8001 – Prédio 14 – Sala 224, Bairro São José, CEP 92425-900 - telefone (51) 3477-9217, e-mail [comitedeetica@ulbra.br](mailto:comitedeetica@ulbra.br) .



Declaro que obtive todas as informações necessárias e esclarecimento quanto às dúvidas por mim apresentadas e, por estar de acordo, assino o presente documento em duas vias de igual conteúdo e forma, ficando uma em minha posse.

\_\_\_\_\_, \_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_.

\_\_\_\_\_  
**Participante da Pesquisa (estudante)**

\_\_\_\_\_  
**Responsável pelo Participante da Pesquisa**

\_\_\_\_\_  
**Pesquisador Responsável pelo Projeto**

## APÊNDICE B – TERMO DE ASSENTIMENTO



PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

### TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (PARA MENORES DE 12 a 18 ANOS - Resolução 466/12)

Convidamos você, após autorização dos seus pais [ou dos responsáveis legais] para participar como voluntário (a) da pesquisa: Pensamento Geométrico de um grupo de estudantes do 3º ano do Ensino Médio: da Geometria Plana à Espacial. Esta pesquisa é da responsabilidade da pesquisadora Danielle dos Santos Rodrigues (Av. Farrapos 8001, prédio 14 - sala 338, [danielle\\_santosrodrigues@hotmail.com](mailto:danielle_santosrodrigues@hotmail.com)) sob a orientação da Professora Dra. Carmen Kaiber telefone: (51) 3477-9278, e-mail ([kaiber@hotmail.com](mailto:kaiber@hotmail.com)).

Este Termo de Assentimento pode conter informações que você não entenda. Caso haja alguma dúvida, pergunte à pessoa que está lhe entrevistando para que esteja bem esclarecido (a) sobre sua participação na pesquisa. Você não terá nenhum custo, nem receberá qualquer pagamento para participar. Você será esclarecido (a) sobre qualquer aspecto que desejar e estará livre para participar ou recusar-se. Após ler as informações a seguir, caso aceite participar do estudo, assine ao final deste documento, que está em duas vias. Uma delas é para ser entregue aos seus pais para guardar e a outra é da pesquisadora responsável. Caso não aceite participar, não haverá nenhum problema se desistir, é um direito seu. Para participar deste estudo, o responsável por você deverá autorizar e assinar um Termo de Consentimento, podendo retirar esse consentimento ou interromper a sua participação a qualquer momento, sem nenhum prejuízo.

#### INFORMAÇÕES SOBRE A PESQUISA:

- A pesquisa visa analisar o conhecimento adquirido pelos estudantes do 3º ano do Ensino Médio ao longo da Educação Básica em relação ao ensino de Geometria na disciplina de Matemática, após esta análise, será proposta uma didática com o *software* GeoGebra 3D. A pesquisa será realizada em três etapas: no primeiro momento será aplicado um instrumento de pesquisa aos estudantes para verificar os conhecimentos prévios e possíveis dificuldades com os conteúdos de Geometria. Através deste retorno será desenvolvida uma Sequência Didática com o uso do *software* GeoGebra 3D. A sequência será aplicada aos estudantes na própria escola, em encontros semanais nos períodos da disciplina de Matemática, conforme orientação da professora titular e da direção. A pesquisa será finalizada com a aplicação de um novo instrumento de pesquisa aos estudantes, para analisar o conhecimento adquirido pelos mesmos após a aplicação da sequência com o *software* GeoGebra 3D.
- Os dados adquiridos através desta investigação serão utilizados na dissertação de Mestrado da pesquisadora que tem como objetivo investigar as possíveis contribuições da utilização do *software* *GeoGebra 3D* no ensino de Geometria Espacial, além de artigos e publicações científicas. O desenvolvimento desta pesquisa (aplicações dos instrumentos de pesquisa e a aplicação da sequência didática) são de responsabilidade da pesquisadora, ficando a disposição para possíveis esclarecimentos. Ressalto o compromisso que terei de resguardar a confidencialidade das informações prestadas, que serão usadas exclusivamente para análise dos resultados.
- A pesquisa tem como objetivo propor uma reflexão acerca da inclusão de ferramentas digitais nas aulas de matemática.

As informações desta pesquisa serão confidenciais e serão divulgadas apenas em eventos ou publicações científicas, não havendo identificação dos voluntários, a não ser entre os responsáveis pelo estudo, sendo assegurado o sigilo sobre a sua participação. Os dados coletados nesta pesquisa (entrevistas, gravações, fotos), ficarão armazenados, sob a responsabilidade da (pesquisadora e da Orientadora), no endereço (acima informado), pelo período de mínimo 5 anos. Nem você e nem seus pais [ou responsáveis legais] pagarão nada para você participar desta pesquisa.

Este documento passou pela aprovação do Comitê de Ética em Pesquisa Envolvendo Seres Humanos que está no endereço: (Avenida Farrroupilha nº 8001 – prédio 14, sala 224 – Bairro: São José – Canoas/RS, CEP: 92425-900, Tel.: (51) 3477-9217 – e-mail: [comitedeetica@ulbra.br](mailto:comitedeetica@ulbra.br)).

---

Assinatura do pesquisador (a)

**ASSENTIMENTO DO MENOR DE IDADE EM PARTICIPAR COMO VOLUNTÁRIO**

Eu, \_\_\_\_\_, portador (a) do documento de Identidade \_\_\_\_\_ (se já tiver documento), abaixo assinado, concordo em participar da pesquisa: *Pensamento Geométrico de um Grupo de estudantes do 3º ano do Ensino Médio: da Geometria Plana à Espacial*, como voluntário (a). Fui informado (a) e esclarecido (a) pela pesquisadora sobre a pesquisa, o que vai ser feito, assim como os possíveis riscos e benefícios que podem acontecer com a minha participação. Foi-me garantido que posso desistir de participar a qualquer momento, sem que eu ou meus pais precise pagar nada.

Local e data \_\_\_\_\_

Assinatura do (da) menor : \_\_\_\_\_

**Presenciamos a solicitação de assentimento, esclarecimentos sobre a pesquisa e aceite do/a voluntário/a em participar. 02 testemunhas (não ligadas à equipe de pesquisadores):**

Nome: \_\_\_\_\_ Nome: \_\_\_\_\_

Assinatura: \_\_\_\_\_ Assinatura: \_\_\_\_\_

## APÊNDICE C – MATERIAL SOBRE GEOMETRIA DE POSIÇÃO



# GEOMETRIA DE POSIÇÃO

Profa. Danielle Rodrigues

### A Geometria de Posição que será estudada neste material se refere:

- ↳ Posição relativa entre retas no espaço.
- ↳ Posição relativa entre planos.
- ↳ Posição relativa entre reta e plano.

### Antes iremos ...

# RELEMBRAR

## Algumas Noções e Relações Primitivas

### Noções Primitivas

Ponto, reta e plano são noções primitivas em Geometria, não sendo passíveis de definição e, por isso, vamos apenas estabelecer uma noção do que sejam.

**Ponto**  $A$  → Usualmente o representamos como um "pingo" ou uma "bolinha", mas é importante saber que isso é apenas uma representação. Nomeamos um ponto por uma letra maiúscula do alfabeto.

**Reta**  $r$  → A reta é formada por infinitos pontos alinhados, sendo objetos unidimensionais, ou seja, que possuem uma única dimensão e não fazem curvas, sendo infinita em ambos os sentidos. Podemos nomear uma reta por uma letra minúscula do alfabeto.

### Noções Primitivas

**Plano**  $\alpha$  → O Plano é formado por infinitas retas sendo ilimitado não possuindo fronteiras. Nomeamos um plano por uma letra minúscula do alfabeto grego.

**Espaço** → O espaço é formado por um conjunto de infinitos pontos, retas e planos.

### Relações Primitivas

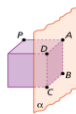
**Relação de inclusão**  
Relação de inclusão é quando todos os elementos de um determinado conjunto pertencem ou não a um outro conjunto. Essa relação é indicada pelos seguintes símbolos:  
 $c \rightarrow l\text{-se}$ : está contido  
 $c \rightarrow l\text{-se}$ : não está contido

**Relação de pertinência**  
A relação de pertinência ocorre entre um elemento e um conjunto. Para indicar se um elemento pertence ou não a um conjunto. Essa relação é indicada pelos seguintes símbolos:  
 $E \rightarrow l\text{-se}$ : Pertence  
 $E \rightarrow l\text{-se}$ : Não Pertence

### Algumas definições:

#### Pontos coplanares:

Dois ou mais pontos são denominados **coplanares** se existe um plano que contém todos eles.



- Os pontos  $A, B, C$  e  $D$  são coplanares. Em linguagem simbólica:  $A \in \alpha, B \in \alpha, C \in \alpha$  e  $D \in \alpha$ .
- O ponto  $P$  não é simultaneamente coplanar a  $A, B, C$  e  $D$ , pois  $P$  não pertence ao plano  $\alpha$ ; em linguagem simbólica:  $P \notin \alpha$ .

### Algumas definições:

#### Figuras Geométricas Planas e Figuras Geométricas Espaciais

Figura	Pontos	Plano / Não plana	Representação
$A_1, B, O', C$	4 pontos coplanares	plano	não recebe nome especial
	infinitos pontos	plano	linha
	infinitos pontos	plano	superfície
	infinitos pontos	não plana	sólido

#### Pontos Coplanares

### Postulados ou Axiomas: São propriedades aceitas como verdadeiras, não sendo necessário demonstrá-las.

#### Alguns Postulados ou Axiomas.

- P1 – O espaço tem infinitos pontos.
- P2 – Toda reta e todo plano são conjuntos de infinitos pontos.
- P3 – Fora de uma reta, bem como fora de um plano, há infinitos pontos.
- P4 – Dois pontos distintos determinam uma única reta.



### Postulados ou Axiomas

P5 – **Postulado das Paralelas:** Por um ponto  $P$  fora de uma reta  $s$ , passa somente uma reta paralela a  $s$ .

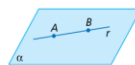


P6 – Três pontos não colineares determinam um único plano.



### Postulados ou Axiomas

P7 – Se dois pontos distintos estão em um plano, a reta que passa por eles está contida nesse plano.



#### Observações

- Quando uma reta está contida em um plano, todos os pontos que pertencem à reta também pertencem ao plano.
- Dada uma reta  $r$  que passa por dois pontos  $A$  e  $B$ , como mostra a figura acima, essa reta pode ser representada por  $r$  ou  $AB$ .

### Postulados ou Axiomas

P8. Se dois planos distintos,  $\alpha$  e  $\beta$ , se interceptam, a interseção é uma reta.



### Vamos estudar as Posições Relativas:

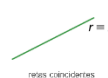
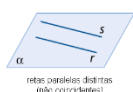
#### Posições Relativas



### Posição entre RETAS:

#### RETAS PARALELAS:

Dois retas,  $r$  e  $s$ , são paralelas se estão em um mesmo plano  $\alpha$  e não tem nenhum ponto comum (intersecção vazia), ou se têm todos os pontos comuns (coincidentes) ou se



### Posição entre RETAS:

#### RETAS CONCORRENTES:

As retas  $r$  e  $s$ , são concorrentes quando têm apenas um ponto  $P$  comum.

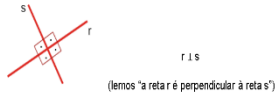


Ainda, se duas retas,  $r$  e  $s$ , são concorrentes em um ponto  $P$ , então elas determinam um único plano  $\alpha$ .

**GEOM** Posição entre RETAS:

o **RETAS PERPENDICULARES:**

As retas  $r$  e  $s$ , são perpendiculares quando são concorrentes e determinam quatro ângulos retos ( $90^\circ$ ).



**GEOM** Posição entre RETAS:

o **RETAS REVERSAS:**

As retas,  $r$  e  $s$ , são reversas (não coplanares) quando não existe um mesmo plano que as contenha.

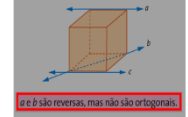
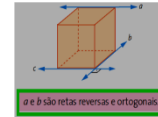


- Não existe um mesmo plano que contenha as retas  $r$  e  $s$ , ou seja, elas são reversas.
- As retas  $r$  e  $s$  não têm nenhum ponto comum, ou seja,  $r \cap s = \emptyset$ .

**GEOM** Posição entre RETAS:

o **RETAS ORTOGONAIS:**

As retas  $a$  e  $b$ , são ortogonais quando existe uma reta  $c$  que é paralela (não coincidente) a reta  $a$  e é perpendicular a reta  $b$ .



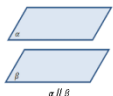
$a$  e  $b$  são retas reversas e ortogonais.

$a$  e  $b$  são reversas, mas não são ortogonais.

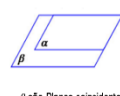
**GEOM** Posição entre PLANOS:

o **PLANOS PARALELOS:**

Os planos  $\alpha$  e  $\beta$  são paralelos se não têm nenhum ponto comum, ou se coincidem (têm todo os pontos comuns).



$\alpha \parallel \beta$   
Plano paralelos distintos (não coincidentes)

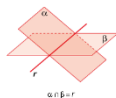


$\alpha \parallel \beta$  são Planos coincidentes

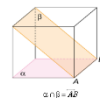
**GEOM** Posição entre PLANOS:

o **PLANOS SECANTES OU CONCORRENTES:**

Dois planos distintos,  $\alpha$  e  $\beta$ , são **secantes** (ou **concorrentes**) quando têm uma reta em comum (intersecção não vazia).



$\alpha \cap \beta = r$

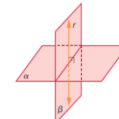


$\alpha \cap \beta = \alpha = \beta$

**GEOM** Posição entre PLANOS:

o **PLANOS PERPENDICULARES:**

Dois planos  $\alpha$  e  $\beta$  são **perpendiculares** quando um deles contém uma reta  $r$  perpendicular ao outro plano.



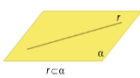
Se dois planos concorrentes não são perpendiculares, dizemos que são Planos OBLIQUOS.



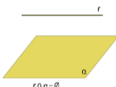
**GEOM** Posição entre RETA E PLANO:

o **RETA E PLANO PARALELOS:**

Uma reta  $r$  e um plano  $\alpha$  são paralelos se a reta  $r$  estiverem contida no plano  $\alpha$  ou se a reta  $r$  e o plano  $\alpha$  não tiverem nenhum ponto comum.



$r \subset \alpha$

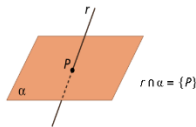


$r \cap \alpha = \emptyset$

**GEOM** Posição entre RETA E PLANO:

o **RETA E PLANO CONCORRENTES:**

Uma reta  $r$  e um plano  $\alpha$  são **concorrentes** (ou **secantes**) quando  $r$  e  $\alpha$  têm somente um ponto em comum.

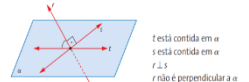
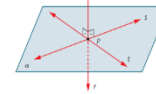


$r \cap \alpha = \{P\}$

**GEOM** Posição entre RETA E PLANO:

o **RETA E PLANO PERPENDICULARES:**

Dado uma reta  $r$  e um plano  $\alpha$  concorrentes no ponto  $P$ , dizemos que  $r$  é **perpendicular** ao plano  $\alpha$  quando  $r$  é perpendicular a todas as retas do plano  $\alpha$  que passam por  $P$ .



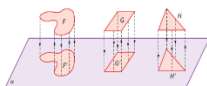
$r$  está contida em  $\alpha$   
 $s$  está contida em  $\alpha$   
 $r \perp s$   
 $r$  não é perpendicular a  $\alpha$

A reta é perpendicular a uma reta, mas não ao plano. a reta  $r$  é oblíqua ao plano.

**GEOM** PROJEÇÃO ORTOGONAL:

o **Projeção ortogonal de uma figura qualquer sobre um plano:**

A projeção ortogonal de uma figura, plana ou não plana, sobre um plano é a figura formada pelas projeções ortogonais dos pontos dessa figura sobre esse plano.



O estudo sobre Posições Relativas entre retas, planos, reta e plano foi **CONCLUÍDO!!**



## APÊNDICE D – MATERIAL SOBRE NOÇÕES PRIMITIVAS E CONHECIMENTOS BÁSICOS



### Noções Primitivas e Conceitos Básicos

Profa. Danielle Rodrigues

#### GEOE Geometria :

- ☐ É a área da Matemática que se dedica a questões relacionadas com forma, tamanho, posição relativa entre figuras e propriedades de figuras geométricas.
- ☐ Em sua forma mais elemental, a geometria trata de problemas métricos, como o cálculo da área e perímetro de figuras planas, o cálculo da área de superfície e volume de sólidos geométricos.
- ☐ Outros campos da geometria são a geometria analítica, a descritiva, a topologia, a geometria de espaços com quatro ou mais dimensões, a geometria fractal e as geometrias não-euclidianas.

#### GEOE

Antes iremos ...

## RELEMBRAR

### Conceito de Polígono

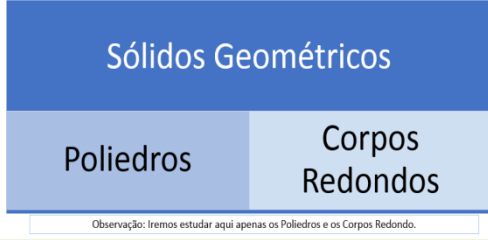
#### GEOE POLÍGONO:

Polígonos são figuras geométricas que são formadas apenas por segmentos de reta (lados) que não se cruzam a não ser em suas extremidades.

##### POLÍGONO REGULAR

Um polígono é regular se, e somente se, tem todos os lados congruentes e todos os ângulos internos congruentes.

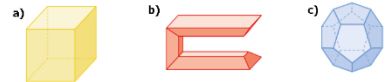
#### GEOE Estudaremos:



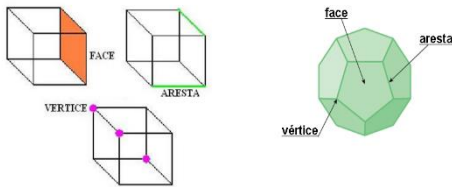
#### GEOE Poliedros:

Poliedros são sólidos geométricos formados por vértices, arestas e faces; sendo limitados por quatro ou mais polígonos planos que pertencem a planos diferentes e que têm dois a dois somente uma aresta em comum. Cada face de um poliedro é um polígono, podendo ser triângulos, quadriláteros, pentágonos e muitos outros.

Exemplos:



#### GEOE Elementos de um Poliedro:



#### GEOE Nomenclatura dos Poliedros:

Um poliedro costuma ser nomeado de acordo com seu número de faces.

<b>Poliedro</b> "várias" "Face"		
a) hexaedro 6 faces 8 vértices 12 arestas	b) tetradecaedro 14 faces 16 vértices 28 arestas	c) dodecaedro 12 faces 20 vértices 30 arestas

#### GEOE POLIEDROS estudados no material:

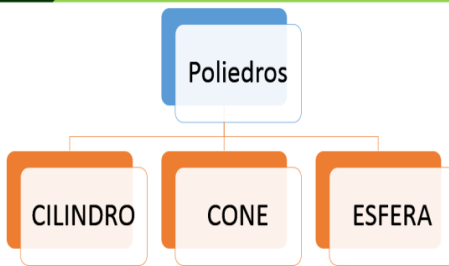


#### GEOE Corpos Redondos:

Os corpos redondos são objetos geométricos que possuem superfícies curvas e quando colocados em um plano levemente inclinado rolam.



#### GEOE Corpos Redondos divide-se em:



## Noções Primitivas e Conceitos Básicos **CONCLUÍDA!!**

## APÊNDICE F – MATERIAL SOBRE PIRÂMIDE



# Pirâmide

Profa. Danielle Rodrigues

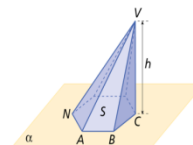
## GeoE Pirâmide

Vamos considerar um plano  $\alpha$ , uma região poligonal convexa  $S$  contida em  $\alpha$  e um ponto  $V$  fora de  $\alpha$ .



## GeoE Pirâmide

Chama-se **pirâmide** o poliedro formado por todos os segmentos de reta cujas extremidades são o ponto  $V$  e um ponto da região  $S$ .



## GeoE Classificação das Pirâmides

Considera o polígono da base:

• se a base é um triângulo, **pirâmide triangular**



• se a base é um quadrilátero, **pirâmide quadrangular**.

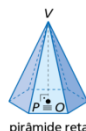


• se a base é um pentágono, **pirâmide pentagonal**, e assim por diante.



## GeoE Pirâmide Regular

Uma pirâmide cuja base é uma superfície poligonal regular e cuja projeção ortogonal  $P$  do vértice sobre o plano da base coincide com o centro  $O$  do polígono de base é chamada de **pirâmide regular**.



pirâmide reta

## GeoE Elementos de uma Pirâmide Regular

Pirâmide de base quadrada regular



## GeoE Caso Particular: TETRAEDRO REGULAR

O **tetraedro regular** é uma pirâmide regular cujas faces são determinadas por triângulos equiláteros.



Como a pirâmide é um tetraedro regular, sua área total, em função da medida  $l$  da aresta, será dada por:

$$A_{\text{total}} = l^2 \sqrt{3}$$

## GeoE Fórmulas

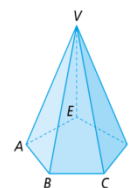
**ÁREA DA BASE** ( $A_{\text{base}}$ ): área da superfície poligonal que forma a base.

**ÁREA LATERAL** ( $A_{\text{lateral}}$ ): soma das áreas das faces laterais (superfícies triangulares).

**ÁREA TOTAL** ( $A_{\text{total}}$ ): soma da área lateral com a área da base.

$$A_{\text{total}} = A_{\text{lateral}} + A_{\text{base}}$$

## GeoE Volume de uma Pirâmide



$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{\text{área da base} \times \text{altura}}{3}$$



O estudo sobre Pirâmide foi  
**CONCLUÍDO!!**

## APÊNDICE G – MATERIAL SOBRE PRISMA

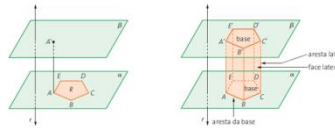


# PRISMA

Profa. Danielle Rodrigues

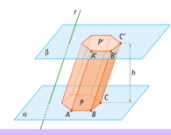
### GeoE Prisma

Vamos considerar dois planos paralelos,  $\alpha$  e  $\beta$ , uma região poligonal  $R$  contida em  $\alpha$  e uma reta  $r$  que intercepta os planos  $\alpha$  e  $\beta$ .

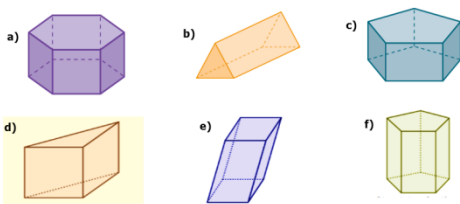


### GeoE Prisma

Chama-se **prisma** o poliedro formado por todos os segmentos de reta paralelos a  $r$  tais que uma de suas extremidades é um ponto da região  $P$  e a outra extremidade é um ponto no plano  $\beta$ .



### GeoE Exemplos:

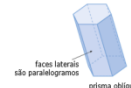
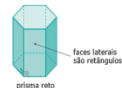


### GeoE Classificação dos Prismas

#### 1º critério

Consideramos a inclinação da reta  $r$  em relação aos planos  $\alpha$  e  $\beta$  que contêm as bases:

- se a reta  $r$  é perpendicular aos planos  $\alpha$  e  $\beta$  **prisma reto**
- se a reta  $r$  **não** é perpendicular aos planos  $\alpha$  e  $\beta$  **prisma oblíquo**



### GeoE Classificação dos Prismas

#### 2º critério

Consideramos o polígono que determina as bases:

- se esse polígono é um triângulo **prisma triangular**
- se é um pentágono **prisma pentagonal**, e assim por diante
- se é um quadrilátero **prisma quadrangular**

### GeoE Prisma Regular

Um prisma é **regular** se, e somente se, é reto e suas bases são superfícies poligonais regulares.

#### Exemplos

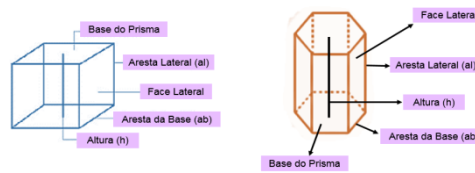


Este prisma é regular, pois ele é reto e as suas bases são quadradas.



Este prisma **não** é regular, pois as suas bases não são polígonos regulares.

### GeoE Elementos de um Prisma



### GeoE Caso Particular: PARALELEPÍEDO

Entre os prismas quadrangulares, aqueles que têm bases em forma de paralelogramos são chamados de paralelepípedos. Esses prismas podem ser **retos** ou **oblíquos**.

#### Exemplos



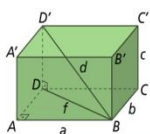
Paralelepípedo oblíquo



Paralelepípedo reto-retângulo ou bloco retangular

### GeoE Medida da diagonal de um paralelepípedo reto-retângulo

**Diagonal de um paralelepípedo** é todo segmento cujas extremidades são vértices desse paralelepípedo que não pertencem a uma mesma face.



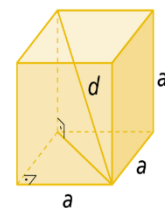
$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

### GeoE Caso Particular: CUBO

Cubo é um caso particular do paralelepípedo, sendo formado por seis faces quadradas.



### GeoE Medida da diagonal de um CUBO



$$d = a\sqrt{3}$$

### GeoE FÓRMULAS

**ÁREA DA BASE** ( $A_{base}$ ): área da face que é a base;

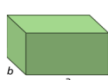
**ÁREA LATERAL** ( $A_{lateral}$ ): soma das áreas das faces laterais.

**ÁREA TOTAL** ( $A_{total}$ ): soma da área lateral com as áreas das duas bases.

$$A_{total} = A_{lateral} + 2.A_{base}$$

### GeoE Volume de um Prisma

O **volume** de um prisma corresponde a um único número real  $V$  positivo obtido pela comparação da porção do espaço ocupado pelo prisma com a porção do espaço ocupado por uma unidade de medida de volume.

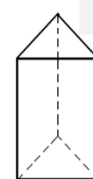


$$V_{paralelepipedo} = a \cdot b \cdot c$$



$$V_{cubo} = a^3$$

### GeoE Volume de um Prisma qualquer:



$$V_{prisma} = \text{área da base} \times \text{altura}$$

O estudo sobre Prisma foi **CONCLUÍDO!!**



APÊNDICE H – MATERIAL SOBRE CORPOS REDONDOS

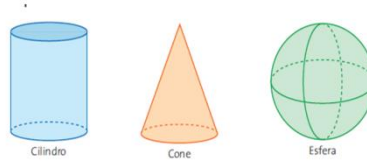


**CORPOS REDONDOS**

Profa. Danielle Rodrigues

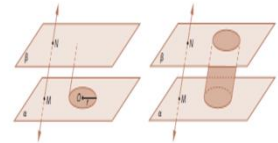
**Corpos Redondos**

Quando falamos em Corpos Redondos nos referimos ao cilindro, cone e esfera.



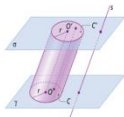
**CILINDRO:**

Considere dois planos paralelos,  $\alpha$  e  $\beta$ , um círculo  $C$  de raio  $r$  contido em  $\gamma$ , e uma reta  $s$  que intercepta planos  $\alpha$  e  $\beta$ .

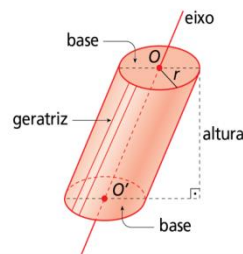


**CILINDRO:**

Chama-se **cilindro circular**, ou apenas **cilindro**, a figura geométrica formada pela reunião de todos os segmentos de reta paralelos à reta  $s$ , com uma extremidade em um ponto de  $C$  e a outra em um ponto do plano  $\sigma$ .

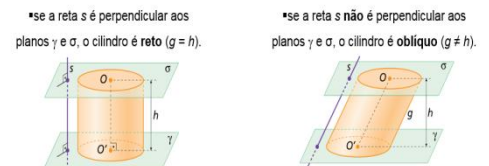


**Elementos de um Cilindro**



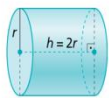
**Classificação dos Cilindros**

Podemos classificar os cilindros de acordo com a inclinação da reta  $s$  em relação aos planos  $\gamma$  e  $\sigma$  que contêm as bases:

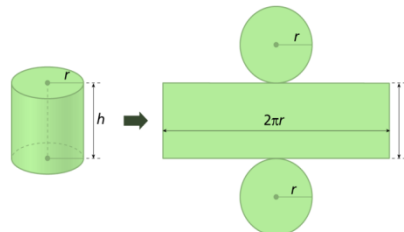


**Caso Particular: Cilindro Equilátero**

Se um cilindro reto tem altura igual ao dobro da medida do raio da base ( $h = 2r$ ), ele é chamado **cilindro equilátero**.



**Planificação da superfície de um CILINDRO RETO**

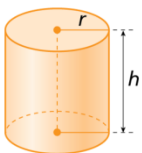


**FÓRMULAS**

- ÁREA DA BASE** ( $A_{base}$ ): é a área de um círculo de raio  $r$ .  
 $A_b = \pi r^2$
- ÁREA LATERAL** ( $A_{lateral}$ ): é a área do retângulo de lados  $2\pi r$  e  $h$ .  
 $A_l = 2\pi r h$
- ÁREA TOTAL** ( $A_{total}$ ): soma da área lateral com as áreas das duas bases.

$A_{total} = A_{lateral} + 2.A_{base}$

**Volume de um Cilindro**



$V_{cilindro} = A_b \cdot h$

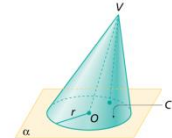
**CONE**

Vamos considerar um círculo  $R$ , de centro  $O$  e de raio  $r$ , em um plano  $\alpha$ , e um ponto  $P$  não pertencente ao plano  $\alpha$ .

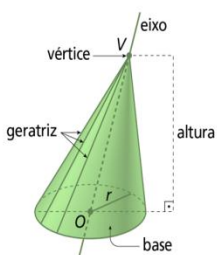


**CONE**

Chamamos de **cone circular**, ou apenas **cone**, a reunião de todos os segmentos de reta com uma extremidade em  $V$  e outra em um ponto de  $C$ .

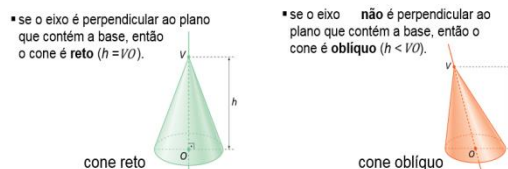


**Elementos de um Cone**



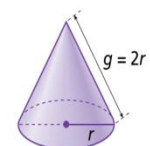
**Classificação dos CONES**

O cone pode ser classificado de acordo com a inclinação do eixo em relação ao plano que contém a base:

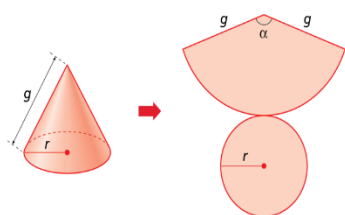


**Caso Particular: Cone Equilátero**

Se um cone reto tem medida da geratriz igual ao dobro da medida do raio da base ( $g = 2r$ ), ele é chamado de **cone equilátero**.



**Planificação da superfície de um CONE RETO**



**FÓRMULAS**

**ÁREA DA BASE** ( $A_{base}$ ): é a área de um círculo de raio  $r$ .

$$A_b = \pi r^2$$

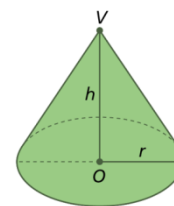
**ÁREA LATERAL** ( $A_{lateral}$ ): é a área de um setor circular.

$$A_l = \pi r g$$

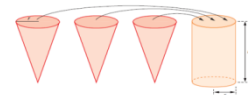
**ÁREA TOTAL** ( $A_{total}$ ): soma da área lateral com a área da base.

$$A_{total} = A_{lateral} + A_{base}$$

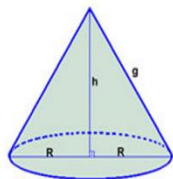
**Volume de um Cone**



$$V_{cone} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$



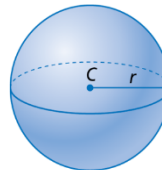
**Em um CONE, podemos identificar a geratriz, por meio, da soma dos quadrados da altura e do raio.**



$$g^2 = h^2 + r^2$$

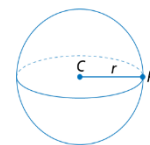
**ESFERA**

Considerando um ponto C no espaço e um segmento  $r$ . Chamamos de esfera o sólido formado por todos os pontos  $P$  do espaço que estão a uma distância de C menor ou igual a  $r$ .

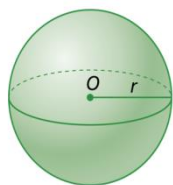


**Superfície Esférica**

A **superfície esférica** é a "casca" da esfera, ou seja, é o conjunto de pontos  $P$  do espaço que estão a uma distância de C igual a  $r$ .

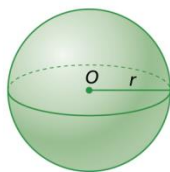


**Área da superfície esférica**



$$A_{superfície\ esférica} = 4\pi r^2$$

**Volume de uma Esfera**



$$V_{esfera} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

O estudo sobre Corpos Redondos foi

**CONCLUÍDO!!**

## APÊNDICE I – INSTRUMENTO QUESTIONÁRIO PERFIL DA TURMA

**ULBRA****UNIVERSIDADE LUTERANA DO BRASIL****PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E  
MATEMÁTICA****INSTRUMENTO DE INVESTIGAÇÃO – ESTUDANTES**

Prezado estudante estou realizando uma pesquisa em nível de mestrado acadêmico, no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática-PPGECIM da Universidade Luterana do Brasil.

A intenção de meu trabalho é investigar as possíveis contribuições da utilização do *software GeoGebra 3D* na aprendizagem da Geometria Espacial junto a um grupo de estudantes do 3º ano do Ensino Médio. Por esse motivo solicito sua colaboração, respondendo este questionário

Agradeço antecipadamente e ressalto o compromisso que terei de resguardar a confidencialidade das informações prestadas, as quais usadas exclusivamente para fins da pesquisa realizada. Da mesma forma, saliento que sua contribuição na prestação dessas informações é essencial para a conclusão do meu trabalho.

Atenciosamente,

Danielle Rodrigues Orientadora: Dra. Carmen Kaiber

---

**I) DADOS PESSOAIS:**

1. Faixa Etária:

15 anos    16 anos    17 anos    18 anos    19 anos    20 anos

2. Gênero:  Feminino    Masculino

3. Possui o hábito de estudar em casa?

Não    Sim

4. Se sim, quanto tempo você dedica aos estudos diariamente?

até 30 min    até 1 hora    até 2 horas    mais de 2 horas

5. Já reprovou?

Sim. Quantas vezes? \_\_\_\_\_. Em qual(ais) ano(s)? \_\_\_\_\_

Não

6. Trabalha?

Sim. Quantas horas diárias? \_\_\_\_\_    Não

7. Fará o ENEM em 2017?

Sim    Ainda não decidi    Não

8. Prestará Vestibular em 2017?

Sim. Para qual curso? \_\_\_\_\_    Não

**II) QUANTO A MATEMÁTICA:**

1. Gosta de estudar os conteúdos de Matemática?  Sim    Não

2. Sente dificuldade na aprendizagem dos conteúdos de Matemática?

Muita dificuldade    Pouca dificuldade    Nenhuma dificuldade

3. O que você recorda de ter estudado no Ensino Fundamental sobre o conteúdo de Geometria?

4. Nas aulas de Geometria, lembra do professor ter usado algum dos materiais abaixo:

- |                                                                        |                                                                 |
|------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> Modelos de figuras geometria planas.          | <input type="checkbox"/> Mostrar imagens/ recortes dos sólidos. |
| <input type="checkbox"/> Modelos de figuras de geometria espacial.     | <input type="checkbox"/> Construir os sólidos.                  |
| <input type="checkbox"/> Materiais como compasso, régua, transferidor. | <input type="checkbox"/> Desenhos de figuras geométricos.       |
| <input type="checkbox"/> Fazer dobraduras e recortes das figuras.      | <input type="checkbox"/> Outros _____                           |

### III) QUANTO AS TECNOLOGIAS:

- Possui internet em casa?  Sim  Não
- Das tecnologias digitais citadas abaixo, quais, você possui e utiliza?
 

<input type="checkbox"/> Smartphone	<input type="checkbox"/> Computador convencional
<input type="checkbox"/> Tablet/ Ipad	
<input type="checkbox"/> Notbooks/ Netbooks	<input type="checkbox"/> Outros. Qual? _____
- Conforme o(s) item(ns) respondido(s) na questão anterior, indique, com que frequência utiliza elas no dia-a-dia?
  - Smartphone:
 

<input type="checkbox"/> Direto (mais de 10h)	<input type="checkbox"/> Às vezes (até 5h)
<input type="checkbox"/> Frequentemente (até 10h)	<input type="checkbox"/> Raramente (minutos)
<input type="checkbox"/> Nunca	
  - Computador convencional/ Notebook/ Netbook:
 

<input type="checkbox"/> Direto (mais de 10h)	<input type="checkbox"/> Às vezes (até 5h)
<input type="checkbox"/> Frequentemente (até 10 h)	<input type="checkbox"/> Raramente (minutos)
<input type="checkbox"/> Nunca	
  - Tablet/ Ipad:
 

<input type="checkbox"/> Direto (mais de 10h)	<input type="checkbox"/> Às vezes (até 5h)
<input type="checkbox"/> Frequentemente (até 10h)	<input type="checkbox"/> Raramente (minutos)
<input type="checkbox"/> Nunca	

4. Utiliza-se das tecnologias digitais para:

- Comunicação (Redes Sociais/ E-mail)
- Entretenimento (Vídeos/ Jogos)
- Pesquisas (Blogs/ Sites Especializados/ Youtube)

Outros: \_\_\_\_\_

5. Se utiliza as tecnologias para o estudo, indique a frequência.

- Nunca       Raramente       Às vezes       Frequentemente       Sempre

6. Já utilizou alguma tecnologia em sala de aula (*softwares*, tablete, computador, jogos eletrônicos).

- Sim. Quais? \_\_\_\_\_ Aula de \_\_\_\_\_
- Não

7. Já utilizou o laboratório de informática da escola nas aulas de Matemática?

- Sim       Não

8. Se sim, que tipo de atividades foram desenvolvidas no laboratório de informática?

- Pesquisa na Internet       uso de *softwares*       Redes Sociais
- Jogos digitais       ídeos       Outros. \_\_\_\_\_

9. Nas aulas de Matemática, o(a) professor(a) já utilizou algum dos itens citados abaixo? Se sim, marque um X em qual ou quais.

- Projetor Multimídia       Jogos digitais       *Softwares*
- Pesquisa na Internet       Lousa Digital       Outro. \_\_\_\_\_
- Nunca utilizou nas aulas.

10. Você conhece ou já utilizou algum *software* de matemática? Qual?

11. O que você acha sobre a utilização das tecnologias na sala de aula? Na sua opinião, a escola e os professores estão preparados, para esta utilização?

12. Se você fosse o(a) professor(a) de Matemática da turma utilizaria as tecnologias em sala de aula? Se sim, quais e porquê?

## APÊNDICE J – INSTRUMENTO DE INVESTIGAÇÃO INICIAL

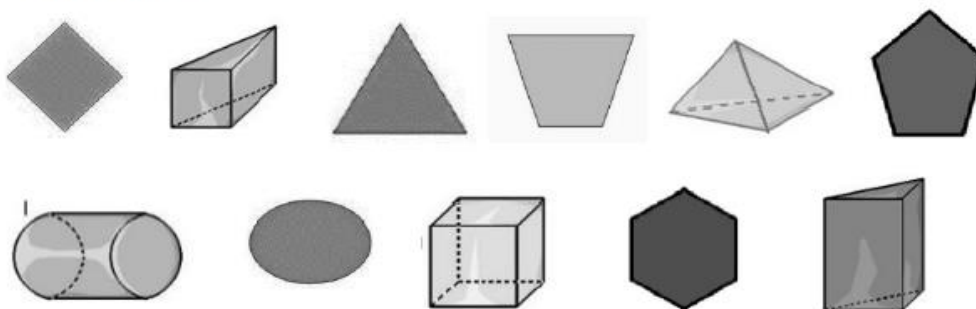


## ESCOLA MARECHAL RONDON

### Instrumento Inicial

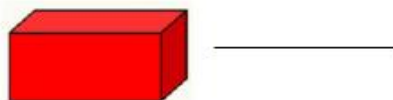
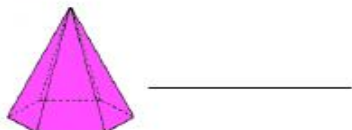
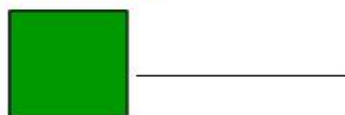
Nome: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_\_\_

1. Identifique quais objetos geométricos são figuras planas (P) e quais são figuras espaciais (E).



○ Ao responder esta questão, você considerou ela ( ) Fácil ( ) Médio ( ) Difícil

2. Indique a nomenclatura dos objetos geométricos indicados:

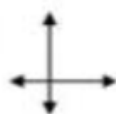


○ Ao responder esta questão, você considerou ela ( ) Fácil ( ) Médio ( ) Difícil

3. Indique a posição das retas:



Retas \_\_\_\_\_



Retas \_\_\_\_\_



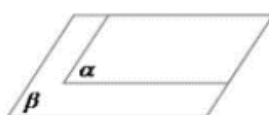
Retas \_\_\_\_\_

- Ao responder está questão, você considerou ela ( ) Fácil ( ) Médio ( ) Difícil

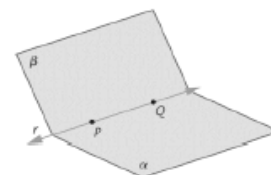
4. Indique a posição dos planos:



Planos \_\_\_\_\_



Planos \_\_\_\_\_



Planos \_\_\_\_\_

- Ao responder está questão, você considerou ela ( ) Fácil ( ) Médio ( ) Difícil

5. Quantas retas podemos traçar, a partir de um ponto contido no plano?

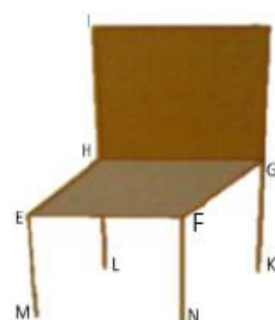
- Ao responder está questão, você considerou ela ( ) Fácil ( ) Médio ( ) Difícil

6. Quantas retas podemos traçar, a partir de dois pontos contidos em um plano?

- Ao responder está questão, você considerou ela ( ) Fácil ( ) Médio ( ) Difícil

7. Na cadeira representada na figura, o encosto é perpendicular ao assento e este é paralelo no chão. Sendo assim, indique as afirmações corretas:

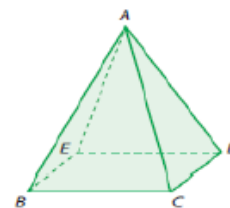
- Os planos EFNM e FGKN são paralelos.
- Os planos HIJG e EMNF são paralelos.
- Os planos FGKN e EMLH são paralelos.
- HG é um segmento de reta comum aos planos EFNM e EFHG.
- EF é um segmento de reta comum aos planos EFNM e EFGH.
- Os planos MNLK é perpendicular ao plano IJHG.
- EH é um segmento de reta paralelo ao segmento de reta NK.
- GK é um segmento de reta perpendicular ao plano IJKL.



- Ao responder está questão, você considerou ela ( ) Fácil ( ) Médio ( ) Difícil



8. Observe a pirâmide de base quadrada e verifique se as retas indicadas em cada item são paralelas, concorrentes ou nenhuma das duas.



a)  $\overleftrightarrow{AC}$  e  $\overleftrightarrow{AD}$  :

d)  $\overleftrightarrow{EC}$  e  $\overleftrightarrow{BD}$  :

b)  $\overleftrightarrow{AB}$  e  $\overleftrightarrow{ED}$  :

e)  $\overleftrightarrow{BC}$  e  $\overleftrightarrow{AE}$  :

c)  $\overleftrightarrow{CD}$  e  $\overleftrightarrow{ED}$  :

f)  $\overleftrightarrow{AE}$  e  $\overleftrightarrow{AC}$  :

o Ao responder esta questão, você considerou ela ( ) Fácil ( ) Médio ( ) Difícil

**BOM TRABALHO!**

*Danielle Rodrigues*

## APÊNDICE K – INSTRUMENTO DE INVESTIGAÇÃO FINAL



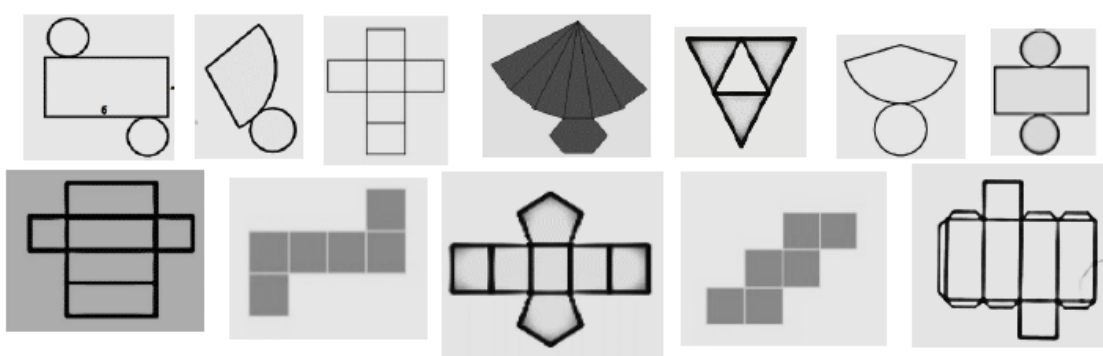
## ESCOLA MARECHAL RONDON

### Instrumento FINAL

Nome: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_\_\_

1. Indique a planificação ou as planificações, se houverem, dos sólidos geométricos espaciais indicados.

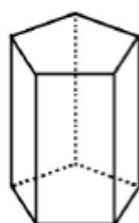
A – CONE B – CUBO C – PIRÂMIDE D – PRISMA E – CILINDRO



2. Após analisar as figuras abaixo, verifique se há elementos que pertencem as mesmas, indicando, se for o caso, onde se localizam. Considere que os polígonos da base, nas figuras, são regulares.

Apótema da Base – Face Lateral – Base – Aresta Lateral – Geratriz – Altura – Apótema da Face

Vértice – Aresta da Base – Altura da Face – Apótema total – Altura total



3. Com base no que já estudamos caracterize, com suas palavras Prisma.
4. Com base no que já estudamos caracterize, com suas palavras Pirâmide.

5. A partir das propriedades e definições apresentados nas alternativas, represente através de desenho (quando possível) os objetos geométricos indicados. Além disso, indique exemplos, de objetos ou construções que você conheça que possuem a mesma representação das apresentadas nas alternativas.

- São concorrentes e determinam quatro ângulos retos.
- É um poliedro formado por todos os segmentos de reta cujas extremidades são o ponto fora do plano e os demais pontos formam um plano.
- É um poliedro formado por todos os segmentos de reta paralelos a uma reta  $r$  tal que uma das extremidades é um ponto no plano  $V$  e a outra extremidade é um ponto no plano paralelo, ao plano  $V$ .

6. Observe a figura e sua representação matemática:



- Qual é a posição da reta  $AB$  em relação ao plano determinado por  $ABCD$ ?
- Cite duas retas que estejam “furando” o plano determinado por  $ABCD$ .
- A reta  $CD$  é a intersecção de infinitos planos. Cite dois desses planos.
- Qual é a posição relativa das retas  $AB$  e  $BH$ ?
- Cite um plano paralelo ao plano determinado por  $ABCD$ .
- A reta  $DF$  está simultaneamente em vários planos. Cite dois desses planos.
- Cite duas retas paralelas ao plano determinado por  $ABCD$ .

**BOM TRABALHO!**

*Danielle Rodrigues*

## APÊNDICE L – ATIVIDADE DE FAMILIARIZAÇÃO



**Escola Marechal Rondon - Profa. Danielle Rodrigues**

**GEOMETRIA DE POSIÇÃO – Software GeoGebra**

**ATIVIDADE - 1**

1. Explore o GeoGebra construindo pontos, retas, semirretas, segmentos de reta. Utilize as propriedades para alterar cor, estilo (estilo e espessura), aplicar decoração, exibir objeto, exibir rótulo, entre outros.
2. Explore o GeoGebra construindo ângulos de diferentes amplitudes e polígonos quaisquer e polígonos regulares. Novamente utilize as propriedades dos objetos para promover alterações.
3. Utilize o GeoGebra para construir retas paralelas, perpendiculares destacando os procedimentos adotados nessa construção. Defina o ângulo formado pelas retas perpendiculares.
4. Utilize o GeoGebra para construir diferentes tipos de polígonos.

APÊNDICE M – ATIVIDADE 1 NO *SOFTWARE* GEOGEBRA

**Escola Marechal Rondon - Profa. Danielle Rodrigues**

**GEOMETRIA DE POSIÇÃO – *Software* GeoGebra**

**ATIVIDADE - 1**

1. Explore o GeoGebra construindo pontos, retas, semirretas, segmentos de reta. Utilize as propriedades para alterar cor, estilo (estilo e espessura), aplicar decoração, exibir objeto, exibir rótulo, entre outros.
2. Utilize o GeoGebra para construir cinco sólidos geométricos, na janela 3D. Utilize as propriedades para alterar cor, estilo (estilo e espessura), aplicar decoração, exibir objeto, exibir rótulo, entre outros.
3. Com auxílio do *software* GeoGebra, construa retas e planos, interceptando os sólidos geométricos construídos no *software*.
4. Utilize o GeoGebra para indicar os elementos pertencentes ao poliedro, indique os elementos pertencentes ao poliedro construído, a nomenclatura deste sólido, a classificação e indique se é convexo ou não-convexo.

**Obrigada pela colaboração!  
Danielle Rodrigues**

## APÊNDICE N – MATERIAL SOBRE POLIEDROS



Escola Marechal Rondon

**POLIEDROS (PRISMA E PIRÂMIDE)**• **PRISMA**

É um poliedro composto por \_\_\_\_\_ que formam a base, que por sua vez, podem ser triangular, quadrangular, pentagonal, hexagonal. Além das faces o prisma é composto de \_\_\_\_\_ unidos por paralelogramos.

**Caso Particular:** \_\_\_\_\_

Quando a base é uma região em forma de paralelogramo, temos um prisma particular chamado \_\_\_\_\_. O \_\_\_\_\_ são prismas cuja particularidade é que qualquer de suas faces pode ser tomada como base, pois duas faces opostas quaisquer, visto que, é formada por planos paralelos e ligados por arestas paralelas entre si.

**PRISMAS RETOS:** o prisma é reto quando as arestas laterais são \_\_\_\_\_ às bases. As faces são regiões retangulares, de acordo com a região poligonal das bases, o prisma recebe a \_\_\_\_\_.

- Prisma reto de base triangular ou prisma reto triangular.
- Prisma reto de base pentagonal ou prisma reto pentagonal.
- Cubo ou hexaedro regular.

**Indique os elementos de um Prisma:**

**Indique as fórmulas utilizadas para calcular um Prisma:**

**EXERCÍCIOS:**

- Calcular a área total da superfície de paralelepípedo reto-retângulo de dimensões a, b e c (medidas dadas numa mesma unidade).
- Determine a área total da superfície de um prisma triangular reto, de altura 12 cm, sabendo que as arestas da base formam um triângulo retângulo de catetos que medem 6cm e 8 cm.

• **PIRÂMIDE**

É um poliedro composto por uma \_\_\_\_\_ (triangular, pentagonal, quadrada, retangular, paralelogramo), um \_\_\_\_\_ (vértice da pirâmide) que une todas as faces laterais triangulares. Sua \_\_\_\_\_ corresponde a distância entre o vértice e sua base.

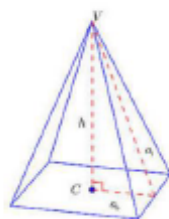
**Caso Particular: o tetraedro regular**

Uma pirâmide particular formada por \_\_\_\_\_ regiões triangulares congruentes e equiláteras é o tetraedro regular (*tetra*: quatro; *edro*: face). Nele, qualquer uma das faces pode ser considerada \_\_\_\_\_.

**PIRÂMIDE REGULAR:** é uma pirâmide reta cuja base é um região poligonal limitada por um polígono \_\_\_\_\_. As faces são regiões triangulares, de acordo com a região poligonal da base, a pirâmide recebe a nomenclatura.

**Indique os elementos de uma Pirâmide:**

**Indique as fórmulas utilizadas para calcular uma Pirâmide:**



**EXERCÍCIOS:**

- 1) A altura de uma pirâmide regular é 4cm. A base é um hexágono que tem 6cm de lado. Determine a medida do apótema da pirâmide.
- 2) Calcule a área total da superfície de uma pirâmide triangular regular cuja aresta lateral mede 82 mm e a aresta da base mede 36 mm.

**Bons estudos!!!!!!  
Danielle Rodrigues**

## APÊNDICE O – LISTA DE ATIVIDADES

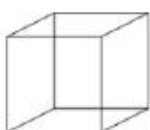


## ESCOLA MARECHAL RONDON

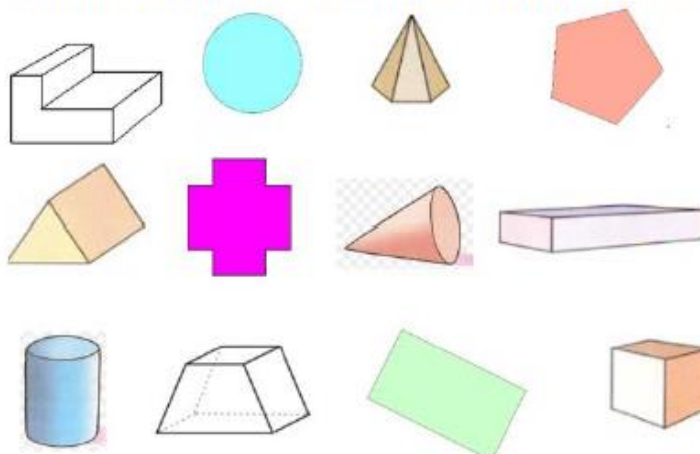
### Atividades

Nome: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_\_\_

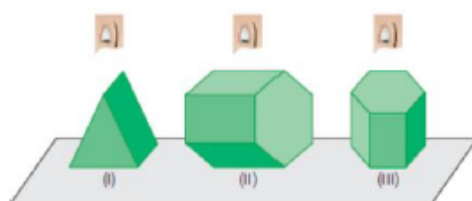
1. Identifique e determine os elementos que fazem parte de um poliedro:



2. Classifique os objetos geométricos em polígonos, poliedros ou nem polígono/ nem poliedro.



3. Dê exemplos de objetos ou construções ou mesmo objetos que você conheça a partir de representações, que possuam o formato de prismas e de pirâmides que você conhece (no mínimo três exemplos de cada).
4. Uma pessoa observa de cima cada um destes prismas, conforme indica a figura. Desenhe, o que ela vê em cada caso. Lembre-se de que o contorno de uma figura é sempre aparente, ou seja, nós o vemos.





APÊNDICE P – ATIVIDADE 2 NO *SOFTWARE* GEOGEBRA

**Escola Marechal Rondon - Profa. Danielle Rodrigues**

**GEOMETRIA ESPACIAL – Software GeoGebra**

**ATIVIDADE - 2**

1. Utilize o GeoGebra para construir dois poliedros qualquer, indicando os elementos deste poliedro vértice, aresta e face cada um com uma cor diferentes. Gravar com nome de turma e mandar por e-mail. Descreva como foi feita construção do poliedro.
2. Utilizando o GeoGebra faça diferentes modelos de prismas. Descreva a característica de cada construção, como nome, número de faces e bases.
3. Utilizando o GeoGebra faça diferentes modelos de pirâmides. Descreva a característica de cada construção, como nome, número de faces e bases.
4. Faça um a pesquisa na internet, das principais características e fórmulas necessárias para calcular área e volume de uma pirâmide e de um prisma.

**Obrigada pela colaboração!  
Danielle Rodrigues**

## APÊNDICE Q - TRABALHO EM GRUPO



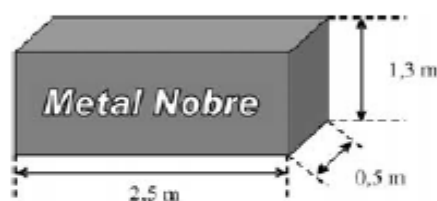
## ESCOLA MARECHAL RONDON

### Trabalho em Grupo

Nome: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_\_\_

1. A siderúrgica “Metal Nobre” produz diversos objetos maciços utilizando o ferro. Um tipo especial de peça feita nessa companhia tem o formato de um paralelepípedo retangular, de acordo com as dimensões indicadas na figura que segue. O produto das três dimensões indicadas na peça resultaria na medida da grandeza.

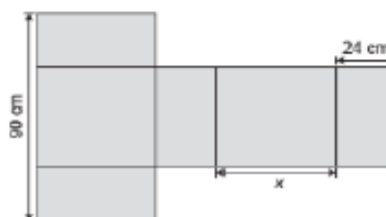
- Massa.
- Volume.
- Superfície.
- Capacidade.
- Comprimento.



2. Conforme regulamento da Agência Nacional de Ação Civil (Anac), o passageiro que embarcar em voo doméstico poderá transportar bagagem de mão, contudo a soma das dimensões da bagagem (altura + comprimento + largura) não pode ser superior a 115cm.

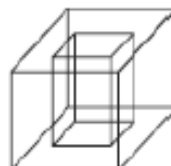
A figura mostra a planificação de uma caixa que tem a forma de um paralelepípedo retângulo. O maior valor possível para  $x$ , em centímetros, para que a caixa permaneça dentro dos padrões permitidos pela Anac é.

- 25.
- 33.
- 42.
- 45.
- 49.



3. Um porta-lápis de madeira foi construído no formato cúbico, seguindo o modelo ilustrado a seguir. O cubo de dentro é vazio. A aresta do cubo maior mede 12 cm e a do cubo menor, que é interno, mede 8 cm. O volume de madeira utilizada na confecção desse objeto foi de.

- $12\text{cm}^2$
- $64\text{cm}^2$
- $96\text{cm}^2$
- $1.216\text{cm}^3$
- $1.728\text{cm}^3$

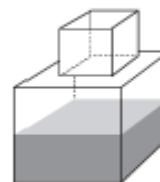


4. A figura mostra uma peça de enfeite. A aresta do cubo mede 20 cm. A cavidade, em forma de prisma regular de base triangular de aresta 5 cm, estende-se da face inferior à face superior do cubo. Determine a área total da peça.



5. Um fazendeiro tem um depósito para armazenar leite formado por duas partes cúbicas que se comunicam, como indicado na figura. A aresta da parte cúbica de baixo tem medida igual ao dobro da medida da aresta da parte cúbica de cima. A torneira utilizada para encher o depósito tem vazão constante e levou 8 minutos para encher metade da parte de baixo. Quantos minutos essa torneira levará para encher completamente o restante do depósito?

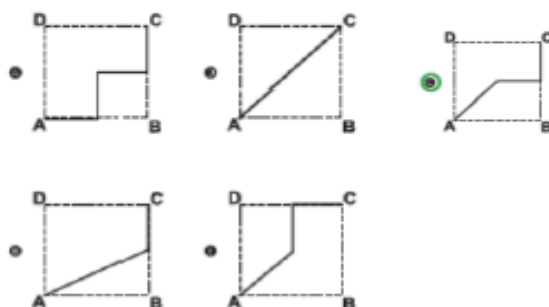
- a) 8
- b) 10
- c) 16
- d) 18
- e) 24



7. João propôs um desafio a Bruno, seu colega de classe ele iria descrever um deslocamento pela pirâmide a seguir e Bruno deveria desenhar a projeção desse deslocamento no plano da base da pirâmide.

O deslocamento descrito por João foi: mova-se pela pirâmide sempre em linha reta, do ponto A ao ponto E, a seguir do ponto E ao ponto M, e depois de M a C.

O desenho que Bruno deve fazer é



8. Uma indústria fabrica brindes promocionais em forma de pirâmide. A pirâmide é obtida a partir de quatro cortes em um sólido que tem a forma de um cubo. No esquema, estão indicados o sólido original (cubo) e a pirâmide obtida a partir dele.

Os pontos A, B, C, D e O do cubo e da pirâmide são os mesmos. O ponto O é central na face superior do cubo. Os quatro cortes saem de O em direção às arestas

$\overline{AD}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$ , nessa ordem. Após os cortes, são

descartados quatro sólidos.

Os formatos dos sólidos descartados são

- A todos iguais.
- B todos diferentes.
- C três iguais e um diferente.
- D apenas dois iguais.
- E iguais dois a dois.

