UNIVERSIDADE LUTERANA DO BRASIL
PRÓ-REITORIA ACADÊMICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

PRISCILA AUGUSTA DE QUADROS SCOTT HOOD

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL: UMA PROPOSTA DE MONITORIA *ONLINE* NO *FACEBOOK*

CANOAS
2018

UNIVERSIDADE LUTERANA DO BRASIL
PRÓ-REITORIA ACADÊMICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

PRISCILA AUGUSTA DE QUADROS SCOTT HOOD

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL: UMA PROPOSTA DE MONITORIA *ONLINE* NO *FACEBOOK*

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

ORIENTADORA:
Profª Drª Carmen Teresa Kaiber

CANOAS
2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Bibliotecária responsável - Vanessa Levati Biff - CRB 10/2454

S426c Scott Hood, Priscila Augusta de Quadros
Cálculo Diferencial e Integral : uma proposta de monitoria online no Facebook / Priscila Augusta de Quadros Scott Hood.-- Canoas, RS : 2018.
189 f.: il.

Orientadora: Profa Dra Carmen Teresa Kaiber
Dissertação (mestrado) - Universidade Luterana do Brasil, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Canoas, 2018.

1. Cálculo diferencial - Ensino e aprendizagem. 2. Cálculo integral - Ensino e aprendizagem. 3. Monitoria online. I.Kaiber, Carmen Teresa. II. Título.

CDD: Ed. 23 ed. -- 510.711

PRISCILA AUGUSTA DE QUADROS SCOTT HOOD

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL: UMA PROPOSTA DE MONITORIA *ONLINE* NO *FACEBOOK*

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Profª Drª Eleni Bisognin – Centro Universitário Franciscano (UNIFRA)

Prof. Dr. Arno Bayer – Universidade Luterana do Brasil (ULBRA)

Profª Drª Marlise Geller – Universidade Luterana do Brasil (ULBRA)

CANOAS

2018

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECIM) da Universidade Luterana do Brasil (ULBRA) por terem confiado a mim uma das vagas para o curso de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela bolsa de estudos destinada ao PPGECIM, a qual foi fundamental para que eu pudesse cursar o mestrado.

À minha orientadora, Profª Drª Carmen Teresa Kaiber, que me guiou ao longo desse processo, contribuindo para minha aprendizagem e crescimento tanto âmbito acadêmico quanto no pessoal.

Aos professores da banca examinadora, Profª Drª Eleni Bisognin, Prof. Dr. Arno Bayer e Profª Drª Marlise Geller, por suas valiosas contribuições para a qualificação deste trabalho.

A minha mãe, Maria Helena, que me apoiou durante toda essa jornada.

Ao meu querido amigo Paulo Napar, cujo incentivo foi decisivo para que eu cursasse uma pós-graduação, e que esteve ao meu lado durante todo esse tempo, sendo fundamental para que eu pudesse concluir essa etapa.

Ao Thiago Maciel por todo o carinho e apoio.

Aos demais colegas do PPGECIM e a todos que torceram por mim ao longo desse percurso.

Muito obrigada!

RESUMO

O presente trabalho se constituiu a partir de uma investigação sobre as potencialidades do uso do *Facebook* para o desenvolvimento e aplicação de uma proposta de monitoria *online* de Cálculo Diferencial e Integral, a qual foi aplicada junto a acadêmicos de cursos das áreas científica e tecnológica do Ensino Superior. O referencial teórico que embasou a investigação foi fundamentado em três pilares: o Cálculo Diferencial e Integral, no qual buscou-se abordar aspectos relacionados ao seu desenvolvimento histórico e epistemológico, além de questões referentes aos seus processos de ensino e aprendizagem; a Análise de Erros enquanto ferramenta para levantamento de erros recorrentes e dificuldades de aprendizagem enfrentadas pelos estudantes em sua formação; e as formas de utilização do *Facebook* como potencial Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA). Metodologicamente, a investigação se inseriu em uma perspectiva qualitativa, tendo características que a aproximam de um estudo de caso. Foi organizada e desenvolvida em cinco etapas, sendo as duas primeiras relacionadas a estruturação e elaboração do referencial teórico e dos instrumentos de investigação, além do início da análise dos documentos institucionais definidos para essa investigação; a terceira e quarta etapas consistiram na coleta de dados propriamente dita, a qual se deu por meio da coleta de provas junto ao primeiro grupo de acadêmicos participantes, e, também, da aplicação do que foi denominado como Projeto Monitoria *Online*; por fim, na quinta etapa deu-se a consolidação das análises referes às etapas anteriores. As etapas mencionadas tiveram por finalidade atender aos objetivos definidos para o presente estudo, dos quais destaca-se o objetivo geral: Investigar o uso de *Facebook* na constituição de uma proposta de monitoria *online* de Cálculo Diferencial e Integral de funções de uma variável, em uma Universidade privada da Região Metropolitana de Porto Alegre/RS. Os dados foram obtidos, inicialmente, com a coleta e análise, com base no modelo teórico de Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987), de avaliações realizadas por um grupo de acadêmicos participantes, que estivessem cursando componentes curriculares voltados ao estudo do Cálculo Diferencial e Integral de funções de uma variável. A análise das provas mencionadas, juntamente com a análise de documentos institucionais, tais como as Diretrizes Curriculares Nacionais específicas dos cursos de Engenharia, Física, Matemática, Química, dos planos de ensino da Instituição na qual se deu a aplicação da pesquisa e dos livros didáticos indicados como bibliografia básica, foi a base de dados que subsidiou o desenvolvimento e aplicação do projeto de monitoria *online* – foco dessa investigação – junto a um grupo de acadêmicos participantes, mediante a utilização do *Facebook*. Apontam-se como resultados a disponibilidade de vídeos *online* compatíveis com os conceitos abordados ao longo do curso de Cálculo da Instituição, e o potencial dos mesmos para auxílio aos estudantes frente às dificuldades de aprendizagem levantadas por meio da análise de erros realizada. Além disso, com base nas interações ocorridas entre a pesquisadora e os participantes ao longo da aplicação do projeto de monitoria *online*, foi possível verificar que os diferentes recursos disponíveis no *Facebook* permitiram aos usuários o compartilhamento de mensagens contendo imagens, vídeos ou textos, seja de forma individual ou coletiva, viabilizando o uso dessa plataforma como Ambiente Virtual de Aprendizagem para discussões matemáticas pertinentes ao estudo do Cálculo Diferencial e Integral. Destaca-se, ainda, a estrutura presente no espaço destinado aos álbuns de fotos, que possibilitou a distribuição dos vídeos selecionados de forma simplificada, favorecendo a autonomia dos participantes, elevando o potencial desse material de apoio como um recurso assíncrono.

Palavras-Chave: Cálculo Diferencial e Integral. Análise de Erros. *Facebook* como AVA. Monitoria *Online*. Ensino Superior.

ABSTRACT

This work was based on an investigation of the potential of using Facebook for the development and application of a proposal for online monitoring of Differential and Integral Calculus, which was applied to academics of courses in the scientific and technological areas of Higher Education. The theoretical framework that underlies the research was based on three pillars: Differential and Integral Calculus, which sought to address aspects related to its historical and epistemological development, as well as questions regarding its teaching and learning processes; the Error Analysis as a tool for surveying recurrent errors and learning difficulties faced by students in their training; and ways to use Facebook as a potential Virtual Learning Environment (VLE). Methodologically, the research was inserted in a qualitative perspective, having characteristics that approach it to a case study. It was organized and developed in five stages, the first two related to structuring and elaboration of the theoretical framework and research instruments, besides the beginning of the analysis of the institutional documents defined for this investigation; the third and fourth stages consisted in collecting data, which was done through the collection of evidence with the first group of participating academics, and also the application of what was called Online Monitoring Project; finally, in the fifth stage, the analyzes related to the previous stages were consolidated. The aforementioned steps had the purpose of meeting the objectives defined for the present study, of which the general objective is to: Investigate the use of Facebook in the constitution of an online monitoring proposal for Differential and Integral Calculus of functions of a variable, in a private University of the Metropolitan Region of Porto Alegre / RS. The data was initially collected and analyzed based on the theoretical model of Movshovitz-Hadar, Zaslavsky and Inbar (1987), and evaluations carried out by a group of participating academics who were studying curricular components for the study of Differential and Integral Calculus of functions of a variable. The analysis of the mentioned tests, along with the analysis of institutional documents,, such as the National Curricular Guidelines specific to the Engineering, Physics, Mathematics and Chemistry courses of the teaching plans of the Institution in which the research was applied and the textbooks indicated as basic bibliography, was the database that subsidized the development and application of the online monitoring project – focus of this research – with a group of participating academics through the use of Facebook. It stands out as a result the availability of online videos compatible with the concepts covered throughout the Calculation course of the Institution, and the potential of these to help students face the potential learning difficulties raised through the analysis of errors made. In addition, based on the interactions between the researcher and participants during the application of the online monitoring project, it was possible to verify that the different resources available on Facebook allowed the users to share messages containing images, videos or texts, either in an individual or a collective way, enabling the use of this platform as a Virtual Learning Environment for mathematical discussions pertinent to the study of Differential and Integral Calculus. It should also be noted the structure present in the space for photo albums, which made it possible to distribute the selected videos in a simplified way, favoring the participants' autonomy, raising the potential of this material as an asynchronous resource.

Keywords: Differential and Integral Calculus. Error Analysis. Facebook as VLE. Online Monitoring. Higher Education.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE SIGLAS

AVA – Ambiente Virtual de Aprendizagem

BDTD – Banco Digital de Teses e Dissertações

CAAE – Certificado de Apresentação para Apreciação Ética

CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Nível Superior

DCN – Diretrizes Curriculares Nacionais

EaD – Educação à Distância

PMO – Projeto Monitoria *Online*

PUC-SP – Pontifícia Católica de São Paulo

SOCESC – Sociedade Educacional de Santa Catarina

TFC – Teorema Fundamental do Cálculo

TIC – Tecnologias da Informação e Comunicação

UAB – Universidade Aberta do Brasil

ULBRA – Universidade Luterana do Brasil

UNESP – Universidade Estadual de São Paulo

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Disciplinas voltadas ao estudo do Cálculo Diferencial e Integral fazem parte de diferentes cursos do Ensino Superior das áreas científica e tecnológica, dentre os quais se apontam como exemplo Física, Matemática, Química e diferentes ramos da Engenharia. De acordo com as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) dos cursos mencionados, essa área de conhecimento está inserida nos núcleos básicos, nos quais são articulados diferentes aspectos teóricos com o intuito de consolidar a base dos conhecimentos necessários para a formação dos acadêmicos, dando subsídios para que possam cursar disciplinas de caráter específico de cada curso (BRASIL, 2001a;; 2001b; 2002a; 2002b).

No entanto, para muitos estudantes, o fator que se destaca em relação aos cursos de Cálculo não é a potencial aplicabilidade dos conceitos abordados, mas sim o nível de dificuldade envolvido e seus altos índices de retenção, que acarretam em atraso na formação dos futuros profissionais e, até mesmo, na sua evasão. Levando-se em consideração que as disciplinas de Cálculo são, muitas vezes, pré-requisito para outras disciplinas dos diferentes cursos de graduação, a retenção dos estudantes pode vir a atingir o andamento dos cursos de modo geral, estancando a oferta de novas disciplinas por falta de acadêmicos habilitados (CUNHA et al., 2017). Nesse sentido, uma prática comum das instituições de ensino é oferecer diferentes formas de apoio pedagógico complementar, tais como cursos de nivelamento, oficinas sazonais ou monitoria, sejam elas presenciais ou à distância (REZENDE, 2003).

Ainda, em relação à monitoria, destaca-se seu potencial para um atendimento individualizado, no qual é possível utilizar uma dinâmica em que as discussões ocorridas partem dos questionamentos levantados pelos participantes, diferentemente de quando o estudante tem o contato inicial com o conteúdo por meio da explicação do seu professor (CUNHA et al., 2017). Entende-se que essa modalidade de apoio possa ter seu alcance ampliado quando articulada com uma proposta de monitoria *online*, na qual monitores e estudantes possam interagir por meio de um ambiente virtual, seja de modo síncrono ou assíncrono, permitindo a flexibilização dos horários de atendimento aos acadêmicos (MORAES, 2011; SCOTT HOOD; KAIBER, 2017a).

Assim, é a partir dessa ideia de monitoria *online* que emergiu a pesquisa a ser apresentada neste trabalho, a qual tem como objetivo investigar o uso de *Facebook* em uma proposta de monitoria *online* de Cálculo Diferencial e Integral de funções de uma variável. Nesse sentido, foi constituído o que se denominou de Projeto Monitoria *Online* (PMO), que se refere a um grupo de estudos *online*, hospedado no *Facebook*, pensado como um espaço para estudo e discussão de conceitos relacionados ao Cálculo Diferencial e Integral de funções de uma variável. Essa proposta foi aplicada junto a acadêmicos das áreas científica e tecnológica da Universidade Luterana do Brasil (ULBRA), uma Instituição privada localizada na Região Metropolitana de Porto Alegre/RS, tendo como público alvo estudantes que, por motivos diversos, não tivessem disponibilidade para participar dos programas de apoio oferecidos pela Instituição.

A investigação foi desenvolvida sob uma perspectiva metodológica de cunho qualitativo, cujo delineamento se aproxima de um estudo de caso. Sua aplicação se deu ao longo de cinco etapas. A primeira etapa refere-se à estruturação do referencial teórico, juntamente com a delimitação do número de participantes e o início da elaboração dos instrumentos de investigação e do PMO, onde foram analisados recursos disponíveis *Facebook* que viessem a viabilizar a implementação do mesmo. Nessa etapa ocorreu, ainda, a submissão do projeto de pesquisa ao Comitê de Ética em Pesquisa em Seres Humanos e, a partir da sua aprovação, foram iniciados os procedimentos relacionados à segunda etapa da investigação. Na segunda etapa, foram consolidados os instrumentos de investigação e realizada a análise de documentos institucionais (DCN, planos de ensino da Instituição e os livros didáticos indicados nos planos analisados). Já na terceira etapa, foram coletadas e analisadas avaliações dos acadêmicos participantes, a fim de se realizar um levantamento de erros recorrentes que viessem a subsidiar a seleção de material de apoio a ser utilizado ao longo da aplicação do PMO, sendo que a quarta etapa consistiu na aplicação do PMO e análise dos dados obtidos. Por fim, na quinta etapa, foram consolidadas as análises referentes aos resultados obtidos nas segunda, terceira e quarta etapas da investigação.

O trabalho foi estruturado a partir de um embasamento teórico fundamentado em três pilares: o Cálculo Diferencial e Integral, no qual buscou-se caracterizar essa área de conhecimento, tomando como base aspectos históricos e epistemológicos, além de abordar questões pertinentes ao seu ensino e aprendizagem (ARTIGUE, 1995; BARUFI, 1999; BOYER, 1996; EVES, 2004; MENEGHETTI, 2010; REIS, 2001; REZENDE, 2003; SILVA, 2010); a Análise de Erros como ferramenta com potencial para revelar o estado de conhecimento dos estudantes, podendo ser integrada ao processo de ensino sob diferentes enfoques (CURY, 2004, 2008; CURY; CASSOL, 2004; MOVSHOVITZ-HADAR; ZASLAVSKY; INBAR, 1987; PEREIRA FILHO; KAIBER; LÉLIS, 2012; DEL PUERTO; MINNAARD; SEMINARA, 2006; RICO, 1995) e o uso do *Facebook* como Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA) que, dadas as ferramentas disponíveis, juntamente com seu caráter multimodal, permite aos usuários a publicação e compartilhamento de textos, imagens e vídeos, podendo ser utilizado para fins educacionais (BORBA; MALHEIROS; AMARAL, 2011;

BORBA; SILVA; GADANIDIS, 2014; CAVASSANI; ANDRADE, 2015; PATRÍCIO; GONÇALVES, 2010; PEREIRA; SCHIMITT; DIAS, 2007; SILVA, 2012; TOMAÉL; ALCARÁ; DI CHIARA, 2005).

No que se refere à estrutura do presente trabalho, destaca-se que o mesmo é composto por seis capítulos. Primeiramente é apresentada a justificativa para o estudo realizado, na qual foram destacados aspectos referentes à formação inicial da pesquisadora que, juntamente com um embasamento teórico preliminar, culminaram no problema de pesquisa e nos objetivos que nortearam essa investigação. A base teórica que sustenta a investigação, por sua vez, é abordada nos capítulos 2 e 3, nos quais se discorre acerca dos três pilares supracitados.

Os caminhos metodológicos adotados para a investigação, bem como os protocolos e instrumentos definidos para a realização das análises, são apontados no quarto capítulo. A apresentação das análises se dá nos capítulos 5 e 6 e, por fim, são trazidas as considerações finais acerca do estudo realizado, juntamente com as indicações de pesquisas futuras a serem desenvolvidas a partir dos questionamentos e resultados emergentes desse trabalho.

1 JUSTIFICATIVA E OBJETIVOS

Este capítulo apresenta o contexto do qual emergiu o problema de investigação, que está relacionado às experiências pessoais da pesquisadora enquanto monitora de disciplinas voltadas ao estudo do Cálculo Diferencial e Integral na Universidade Luterana do Brasil (ULBRA), uma Instituição privada localizada no município de Canoas, Região Metropolitana de Porto Alegre/RS. Uma vez colocadas as motivações pessoais que culminaram na escolha pela temática do trabalho, parte-se para a exposição de argumentações teóricas que amparam e delimitam o tema de pesquisa, levando à determinação dos objetivos gerais e específicos.

1.1 AS MOTIVAÇÕES PARA A INVESTIGAÇÃO

Ao longo da minha[1] formação inicial no curso de Licenciatura em Matemática, na Universidade Luterana do Brasil (ULBRA), tive a chance de participar de diferentes projetos de extensão e atividades complementares, como, por exemplo, monitoria das disciplinas voltadas ao estudo do Cálculo Diferencial e Integral, denominadas Cálculo I, II e III. Na referida instituição, as disciplinas de Cálculo I e II se referem ao estudo do Cálculo Diferencial e Integral de funções de uma variável, enquanto a disciplina de Cálculo III aborda o estudo das funções multivariadas. Atuar como monitora, além de possibilitar um convívio com acadêmicos das áreas científica e tecnológica, foi uma oportunidade de suma importância para retomada e aprofundamento de conceitos previamente estudados ao cursar tais disciplinas.

Meu primeiro contato com os vídeos *online* ocorreu ao longo da disciplina de Cálculo III, servindo como um recurso para retomada de conceitos, tendo em vista que cursei algumas disciplinas fora da ordem indicada na grade curricular do curso, sendo utilizados, também, para sanar dúvidas referentes aos conteúdos estudados no decorrer da disciplina. Juntamente com a abordagem da professora em sala de aula, os vídeos serviram como complemento ao que estava sendo estudado, contribuindo para meu êxito ao longo do semestre. Esse recurso também foi útil ao longo do período que atuei como monitora, principalmente porque me proporcionou conhecer novas abordagens e novos métodos de resolução além dos aprendidos em aula.

Durante a minha experiência como monitora, uma parcela significativa dos atendimentos realizados envolvia dúvidas relacionadas aos conteúdos abordados ao longo das disciplinas de Cálculo I e II, as quais tratavam de conceitos relacionados Cálculo Diferencial e Integral de funções de uma variável. Além de dificuldades inerentes ao estudo do Cálculo Diferencial e Integral, em muitos casos, os questionamentos apresentados pelos estudantes

---

[1] Essa seção da justificativa foi redigida em primeira pessoa por basear-se, em grande parte, em motivações e experiências pessoais da autora.

revelavam, implicitamente, a falta de domínio de conhecimentos relacionados ao Pré-Cálculo, envolvendo álgebra, trigonometria e funções em nível de Ensino Médio, potencialmente trabalhados ao longo da Educação Básica, fazendo-se necessária a revisão de tais conceitos. Nesse contexto, além do apoio pedagógico oferecido durante a monitoria, e considerando a experiência satisfatória que tive com o uso dos vídeos *online*, era comum que os indicasse aos estudantes, a fim de que pudessem contar com esse recurso fora dos horários da monitoria. A principal plataforma utilizada neste período, tanto para uso pessoal quanto para indicação, foi o *YouTube*[2], dada sua popularidade e facilidade para busca e distribuição de vídeos.

Outro aspecto a ser destacado, com base na minha experiência, é o perfil dos acadêmicos, uma vez que, por se tratar de uma instituição privada na qual os cursos são oferecidos majoritariamente em horário noturno, há uma parcela considerável dos discentes que trabalha. Dessa forma, é possível presumir que nem todos possuem disponibilidade para participar das monitorias presenciais, ficando com suas opções limitadas às oficinas (que ocorrem de forma sazonal) e os cursos de nivelamento *online*.

É a partir deste cenário que emergiu o questionamento inicial que norteou o desenvolvimento dessa investigação: **Como uma proposta de monitoria *online* pode contribuir no estudo do Cálculo Diferencial e Integral?** A partir esse questionamento buscou-se alinhar o uso dos vídeos como material de apoio complementar as aulas de Cálculo Diferencial e Integral à uma proposta de intervenção que viesse a flexibilizar os horários de atendimento aos estudantes.

A plataforma definida para desenvolvimento e aplicação do trabalho foi o *Facebook*[3], dada a potencial familiaridade dos participantes com essa rede social e ferramentas disponíveis. Além disso, o *Facebook* permite um compartilhamento facilitado de recursos tais como os vídeos *online*, apontados anteriormente como um importante instrumento a ser utilizado nesse estudo. Nesse sentido, surge um segundo questionamento norteador para o presente trabalho: **Quais as potencialidades do uso do *Facebook* como Ambiente Virtual para o estudo do Cálculo Diferencial e Integral?**

A partir dos questionamentos levantados com base na minha perspectiva pessoal, dei início à busca por um referencial que desse respaldo teórico ao tema escolhido e que ajudasse

[2] O *YouTube* é uma plataforma que permite ao usuário, por meio de uma interface simples e integrada, publicar a assistir vídeos em *streaming*, de forma gratuita (BURGESS; GREEN, 2009).

[3] O *Facebook* é uma rede social gratuita, que viabiliza a interação entre os usuários por meio do compartilhamento de textos, imagens e vídeos. Segundo a própria empresa, sua missão é "Dar às pessoas o poder de criar comunidades e aproximar o mundo" (FACEBOOK, 2018).

a definir os caminhos a serem tomados para essa investigação. Uma reflexão inicial acerca desse referencial é apresentada na próxima seção.

1.2 UM EMBASAMENTO TEÓRICO INICIAL

Levando-se em conta os questionamentos mencionados, os quais tiveram um caráter norteador para o desenvolvimento dessa investigação, entende-se que o presente estudo está inserido no âmbito das investigações voltadas às dificuldades relacionadas à aprendizagem dos conceitos referentes ao Cálculo Diferencial e Integral. Dessa forma, buscou-se analisar aspectos referentes a caracterização dessa área de conhecimento, desde seu contexto histórico, sendo utilizados trabalhos como os de Boyer (1996), Eves, (2004) e Meneghetti (2010). Os três autores mencionados abordam o desenvolvimento histórico de diferentes ramos da Matemática, dentre eles o Cálculo Diferencial e Integral, o que inclui também o seu desenvolvimento epistemológico. Entende-se que conhecer fatos relevantes que levaram ao desenvolvimento dos conceitos relacionados ao Cálculo permite compreender aspectos da forma na qual se dá seu ensino nos dias de hoje.

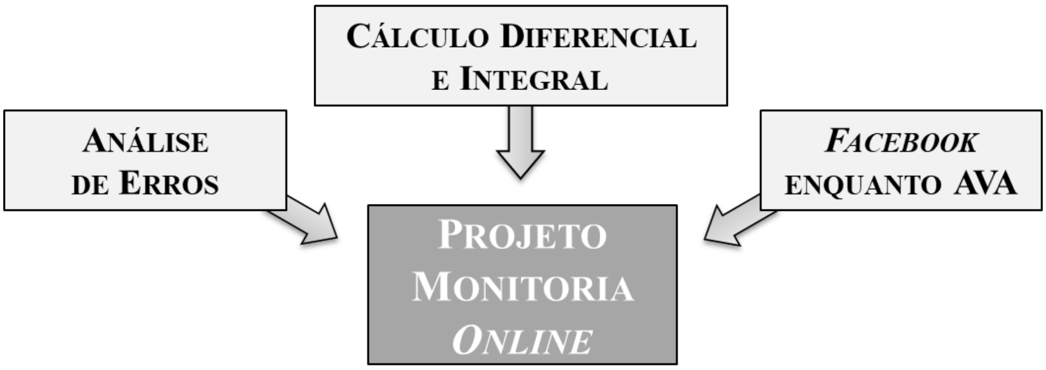
Em seguida, a investigação voltou-se para a análise de pesquisas que tratassem de questões pertinentes aos processos de ensino e aprendizagem dessa área de conhecimento, em especial das diferentes dificuldades enfrentadas pelos discentes. Dentre os trabalhos verificados, destacam-se os desenvolvidos por Barufi (1999), no qual a autora trata de questões relacionadas às diferentes abordagens empregadas em cursos iniciais de Cálculo e de que forma elas influenciam na construção de significados por parte dos estudantes; o de Rezende (2003), que tem como premissa a ideia de que parte das dificuldades referentes à aprendizagem do Cálculo se dá em razão de questões de natureza epistemológica, indo além dos métodos e abordagens empregadas; e o de Reis (2001), no qual o autor discorre sobre a tensão entre o Cálculo e a Análise, refletindo sobre as consequências de se tratar o Cálculo como uma espécie de Pré-Análise. Tais aspectos compõem o que se denomina como o primeiro pilar que sustenta essa investigação.

Como a experiência enquanto monitora apontou para a necessidade de identificar a natureza das dificuldades dos estudantes, entendeu-se pertinente lançar um olhar para Análise de Erros, enquanto abordagem de pesquisa em Educação Matemática, o que se constituiu como o segundo pilar da investigação. De acordo com Cury (2008), investigações dessa natureza vêm sendo desenvolvidas desde o século XX e têm por objetivo compreender de que forma os estudantes organizam seu pensamento, solucionam problemas e aplicam seus conhecimentos. Dentre as pesquisas analisadas destaca-se o próprio trabalho desenvolvido por Cury (2008), além de trabalhos como o de Del Puerto, Minnaard e Seminara (2006), cujas autoras apontam que os erros cometidos pelos estudantes promovem valiosas informações acerca da construção do seu conhecimento matemático, caracterizando-se como excelente ferramenta para revelar o estado de conhecimento dos estudantes, podendo, de acordo com Pereira Filho, Kaiber e Lélis (2012), ser integrada ao processo de ensino sob diferentes enfoques; e o de Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987), voltado para análise e categorização de erros, permitindo o levantamento de erros recorrentes e o apontamento das possíveis causas para os mesmos.

O terceiro e último pilar ocupa-se do potencial do uso *Facebook* como um Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA), tendo em vista que essa foi a plataforma escolhida para a implementação do projeto a ser desenvolvido nessa investigação. Encontrou-se subsídio para tal proposta em trabalhos como o de Borba, Silva e Gadanidis (2014), que apontam para seu potencial enquanto AVA, dadas as ferramentas que dispõe; o de Patrício e Gonçalves (2010), no qual os autores apontam que essa rede social se transformou, não só num canal de comunicação e interação entre sujeitos para fins de entretenimento, mas também se constituiu como uma oportunidade de expressão da academia de nível superior.

A partir dos aspectos mencionados, foi constituída a proposta de trabalho a ser desenvolvida na presente investigação. A mesma consistiu na formulação do Projeto Monitoria *Online* (PMO), que se refere à ideia de oferecer uma monitoria de Cálculo Diferencial e Integral na modalidade à distância, considerando a articulação de um embasamento teórico construído na noção dos três pilares: Análise de Erros, Cálculo Diferencial e Integral e o *Facebook* enquanto AVA. Com essa perspectiva, a Figura 1 destaca uma representação para a esquematização dessa ideia de investigação.

Figura 1 – Aspectos teóricos que levaram ao desenvolvimento do PMO



Fonte: a autora.

Nesse sentido, retomam-se os questionamentos que nortearam a investigação: **Como uma proposta de monitoria *online* pode contribuir no estudo do Cálculo Diferencial e Integral? E quais as potencialidades do uso do *Facebook* como Ambiente Virtual para o**

estudo do Cálculo Diferencial e Integral? A partir desses questionamentos foram estabelecidos os objetivos geral e específicos, os quais serão apresentados a seguir.

1.3 OBJETIVO GERAL

Investigar o uso do *Facebook* na constituição e implementação de uma proposta de monitoria *online* de Cálculo Diferencial e Integral de funções de uma variável, em uma Universidade privada da Região Metropolitana de Porto Alegre/RS.

1.3.1 Objetivos Específicos

- Investigar os aspectos institucionais relacionados ao estudo do Cálculo Diferencial e Integral na Instituição, tomando como referência as Diretrizes Curriculares Nacionais, os Planos de Ensino e livros didáticos indicados.
- Investigar possíveis dificuldades de aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral a partir de uma análise de erros realizada em avaliações dos componentes curriculares denominados Cálculo I e II.
- Implementar[4] um projeto de monitoria *online*, no *Facebook*, junto a acadêmicos que estejam cursando os componentes curriculares Cálculo I e II.

---

[4] No âmbito dessa investigação, o termo implementar refere-se a desenvolver, aplicar e avaliar o projeto de monitoria *online*.

2 CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL: UMA ABORDAGEM PRELIMINAR

Este capítulo tem por objetivo discorrer sobre aspectos referentes à caracterização e desenvolvimento histórico e epistemológico do Cálculo Diferencial e Integral, trazendo uma breve contextualização acerca dessa área de conhecimento. Além disso, apresentam-se ideias referentes às dificuldades de aprendizagem relacionadas ao Cálculo, de modo a trazer um panorama de como se situam essas questões em componentes curriculares voltados a esse estudo.

Primeiramente, toma-se a caracterização do Cálculo Diferencial e Integral segundo Anton (2006), que afirma ser esse uma compilação de ideias que oferecem formas de conceber e analisar o mundo físico, buscando descrevê-lo de forma precisa por meio de modelos matemáticos[5]. De acordo com Lopes (1999), tais modelos podem ser utilizados por diversas áreas da ciência, à medida que novas leis, regras, tendências ou princípios são descobertos, expressando de maneira determinística ou estatística fenômenos que possam ser quantificados. Ainda de acordo com o autor, a análise sistemática desses modelos, por meio de diferentes métodos abordados em cursos de Cálculo, permite "[...] prever, calcular, otimizar, medir, analisar o desempenho e performance de experiências, estimar, proceder análises estatísticas e ainda desenvolver padrões de eficiência que beneficiam o desenvolvimento social, econômico e humanístico dos diversos países do mundo" (LOPES, 1999, p. 125). O domínio de tais habilidades, e sua potencial aplicabilidade em problemas do mundo moderno, torna a aprendizagem do Cálculo cada vez mais requisitada frente às necessidades de uma sociedade em constante e crescente transformação (REZENDE, 2003).

O Cálculo Diferencial e Integral, enquanto área de conhecimento, articula um conjunto de conceitos (em diferentes níveis de complexidade) na busca por solucionar duas categorias de problemas: o problema da variabilidade – relacionado ao Cálculo Diferencial – e o problema da unidade na multiplicidade – relacionado ao Cálculo Integral[6] –, por meio de uma dualidade discreto/contínuo (REZENDE, 2003). De acordo com Rezende, (2003), essa dualidade pode ser percebida, por exemplo, ao se calcular o comprimento de uma curva por meio da aproximação de uma sequência de linhas poligonais, ou quando se calcula a área de uma região plana limitada por uma curva por exaustão de polígonos. Em ambos os casos "[...] estamos fazendo, *a priori*, uma aproximação discreta (por uma sequência de linhas poligonais, ou de polígonos ou de

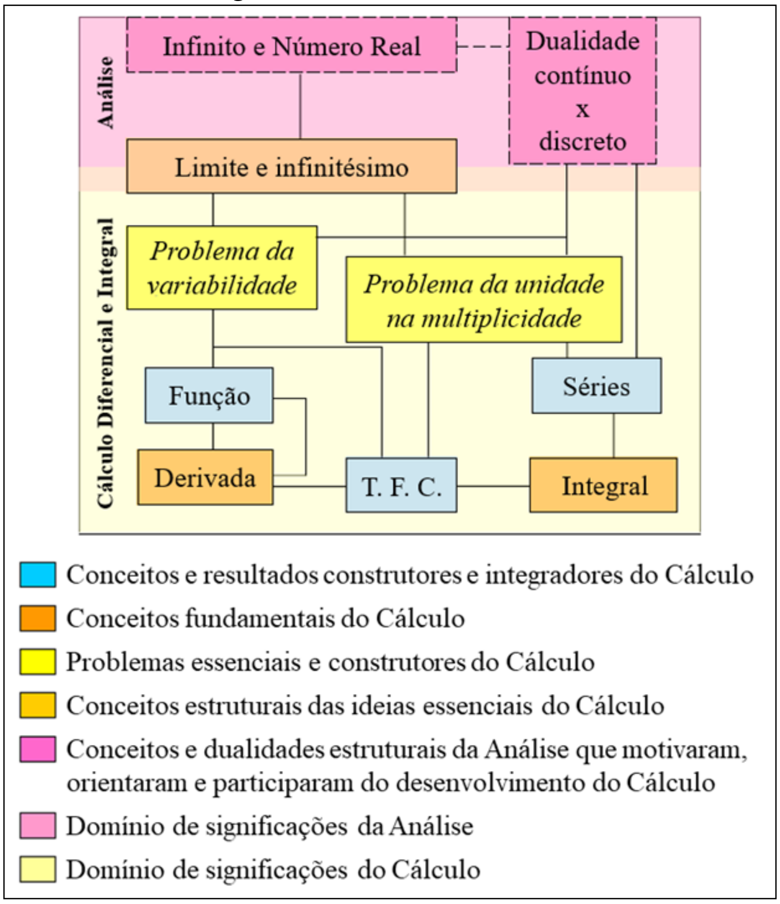
---

[5] Segundo Stewart, "um modelo matemático é uma descrição matemática (frequentemente por meio de uma função ou de uma equação) de um fenômeno do mundo real" (2014, p. 25).
[6] Tais categorias foram elaboradas por Machado (1988), tendo como objetivo agrupar os diferentes problemas que deram origem ao cálculo Diferencial e Integral.

sólidos, conforme o caso) de uma representação contínua (a curva a região plana ou o sólido em questão)" (REZENDE, 2003, p. 76-77, grifo do autor).

A Figura 2 apresenta uma proposta de articulação simbólica desse conjunto de conceitos, indicando o que Rezende (2003) entende como a "essência do Cálculo". Conforme representado na imagem, nem todos os conceitos se esgotam no próprio Cálculo Diferencial e Integral, estendendo-se ao domínio da Análise[7], como é o caso das noções de limite e infinitésimos.

Figura 2 – A essência do Cálculo[8]



Fonte: Adaptado de Rezende (2003, p. 81-82)

Embora a assimilação das noções de limites e infinitésimos ocorra apenas no âmbito da Análise, há forte influência das mesmas no que se refere ao ensino do Cálculo Diferencial e Integral, uma vez que são peças chave no processo de rigorização do mesmo. Nesse contexto, a fim de se buscar um entendimento mais aprofundado acerca dos processos de ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral, entende-se necessário um embasamento

[7] No contexto dessa investigação, entende-se que a "Análise" se refere ao contexto da Análise Matemática, por envolver a ideia de infinitésimo que incorpora, segundo Ávila (2006), o estudo do Conjunto dos Números Reais. Além disso, segundo esse autor e Reis (2001), a Análise se constitui uma formalização do Cálculo Diferencial e Integral na visão da matemática à rigor.
[8] Na Figura 2, Rezende (2003) utiliza a sigla "T. F. C." para se referir ao Teorema Fundamental do Cálculo.

teórico dos aspectos históricos que levaram ao surgimento e evolução dessa área de conhecimento, buscando entender quais problemas motivaram sua origem e de que maneira as etapas do seu desenvolvimento influenciam os moldes do ensino atual do Cálculo.

Nesse contexto, será apresentado, na próxima seção, um recorte de eventos da história da Matemática que se relacionam, de forma direta ou indireta, com a história do Cálculo Diferencial e Integral.

2.1 UM RECORTE HISTÓRICO DO DESENVOLVIMENTO DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Dá-se início a essa seção com um conjunto de ideias elaboradas por Rezende (2003), as quais serviram como base para uma reflexão inicial na busca por referenciais que abordassem o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral. Segundo o autor, o Cálculo toma "emprestado" conceitos e problemas fundamentais da geometria, aritmética e física, a fim de desenvolver novos instrumentos para solucionar tais problemas, conferindo aos conceitos um nível superior de significação. Nesse contexto, o autor descreve, de forma metafórica, que, sendo a geometria e a aritmética as bases do conhecimento matemático, o Cálculo representa sua "espinha dorsal", de modo que, "[...] sem a construção das ideias básicas do Cálculo, a geometria não passaria do cálculo de áreas e perímetros de regiões poligonais e de volumes de regiões poliédricas, e a teoria dos números se restringiria ao domínio dos racionais" (REZENDE, 2003, p. 70).

Eves (2004) destaca que essa área de conhecimento se desenvolveu ao longo de vários séculos, ocorrendo em uma sequência contrária àquela comumente apresentada em textos e livros utilizados em cursos atuais, tendo em vista que o surgimento do Cálculo Integral é anterior ao do Cálculo Diferencial. Segundo o autor, o Cálculo Integral é concebido a partir de motivação geométrica, ligada à ideia de processos somatórios relacionados a problemas que se referiam ao cálculo de áreas, volumes e comprimentos de arcos. O Cálculo Diferencial, por sua vez, se origina a partir de problemas relacionados ao traçado de tangentes a curvas e questões envolvendo a determinação de máximos e mínimos de funções (EVES, 2004). A unificação desses dois ramos do Cálculo ocorreu por meio da verificação da relação entre a integração e a derivação enquanto operações inversas, embasando, assim, a concepção do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC), dando início ao que denominamos como Cálculo Diferencial e Integral (EVES, 2004).

Tal feito ocorreu no século XVII, a partir dos trabalhos desenvolvidos por Newton (1642-1705) e Leibniz (1646-1716), os quais, segundo Reis (2001), são "[...] apontados pelos historiadores da Matemática como os maiores responsáveis pelo desenvolvimento do Cálculo não só devido aos seus métodos de derivação, mas principalmente pelos seus resultados [...]" (p. 54), dentre os quais se destaca o próprio TFC. Além disso, esse século é marcado pela emergência de importantes contribuições para o desenvolvimento da Matemática, como por exemplo: a revelação dos logaritmos por Napier (1550-1617); as contribuições de Harriot (1560-1621) e Oughtred (1574-1660) para a notação e codificação da álgebra; a ciência dinâmica de Galileu (1564-1642); as leis do movimento planetário de Kepler (1571-1630); o desenvolvimento da geometria analítica por Descartes (1596-1650) e as contribuições de Fermat (1601-1665) em relação à fundamentação da teoria dos números.

Embora Newton e Leibniz sejam apontados como os precursores dos estudos do Cálculo Diferencial e Integral, é importante destacar que o desenvolvimento dos seus trabalhos está amparado nas contribuições dos seus antecessores (MENEGHETTI, 2010), como, por exemplo, Wallis (1616-1703) e Barrow (1630-1677). Predecessores imediatos de Newton, Wallis e Barrow contribuíram de forma significativa ao Cálculo, sendo as principais contribuições de Wallis voltadas à integração e as de Barrow à diferenciação (EVES, 2004). Ainda no que se refere à Barrow, Eves (2004) destaca que ele foi o primeiro a perceber, de forma plena, que a diferenciação e a integração são operações inversas uma da outra, culminando na concepção do TFC. No entanto, era necessária, ainda,

> [...] a criação de um simbolismo geral com um conjunto sistemático de regras analíticas formais e também um redesenvolvimento, consistente e rigoroso, dos fundamentos da matéria. Foi a primeira dessas duas coisas, ou seja, a criação de um *cálculo* manipulável e proveitoso, que Newton e Leibniz, trabalhando independentemente, deram sua contribuição (EVES, 2004, p. 435, grifo do autor).

Em relação a Newton e Leibniz, Meneghetti (2010) salienta que os mesmos desenvolveram seus trabalhos sob abordagens distintas, consequência das diferentes perspectivas filosóficas desses estudiosos. Newton, na perspectiva filosófica do Empirismo[9], acreditava que as ciências, em especial, a Matemática, deveriam se desenvolver a serviço da resolução de problemas práticos, moldando-se em função da experiência (MENEGHETTI, 2010). Nesse sentido, as contribuições dos trabalhos de Newton se desenvolvem "[...] com o objetivo de serem aplicados a problemas físicos, uma ferramenta para demonstrar descobertas experimentais com respeito a problemas do movimento; as variáveis eram consideradas como dependentes do tempo" (MENEGHETTI, 2010, p. 100).

[9] O Empirismo é uma corrente filosófica que considera a experiência como critério ou norma da verdade, questionando o caráter absoluto da verdade e reconhece que a experiência é capaz de pôr a prova um conhecimento e de orientar sua retificação (ABBAGNANO, 2007).

No que diz respeito a Leibniz, Boyer (1996) o descreve como um estudioso que se baseou na perspectiva do Racionalismo[10]. Meneghetti (2010) aponta que, em contraponto às ideias do Empirismo, Leibniz defendia que o "termômetro" do conhecimento não é a experiência, mas sim a razão. Segundo a autora, essa questão reduz a ideia da experiência a uma questão secundária, entendendo que esta, de certa forma, direciona o conhecimento, mas não serve como fonte de certeza para o mesmo. Leibniz buscou embasar suas considerações sob procedimentos algorítmicos e métodos gerais, sem se voltar a questão geométrica experimental. Eves (2004) destaca que se deve a Leibniz muitas das ideias estruturais do Cálculo, como a diferenciação e séries infinitas, que os estudantes aprendem em um curso inicial.

Segundo Boyer (1996), mostrou-se evidente nessa época que, apesar das diferentes concepções filosóficas adotadas por Newton e Leibniz, ambos chegaram a uma ideia semelhante sobre o Cálculo Diferencial e Integral, para o qual assimilaram as noções de inversão entre as operações de integração e diferenciação, o que, de forma clara, se estabeleceu como intrínseco às ideias do TFC. Assim, tanto Newton quanto Leibniz, são considerados responsáveis pela unificação de diversos conceitos matemáticos que se relacionavam, mas que ainda eram vistos de formas disjuntas, tais como o método dos indivisíveis de Cavalieri (1598-1647); a geometria analítica de Descartes (1596-1650); a fundamentação moderna da teoria dos números de Fermat (1607-1665); os sólidos de revolução de Torricelli (1608-1647); as contribuições de Wallis (1616-1703) e Barrow (1630-1677) no âmbito das operações de integração e diferenciação (BOYER, 1996).

Apesar do enorme reconhecimento que Newton e Leibniz possuem em relação a essa fundamentação do Cálculo, muitos de seus princípios teóricos foram sendo questionados ao longo dos anos. A crítica a esses cientistas se embasava na ideia de que muitos dos conceitos apresentados por eles não possuíam um rigor fundamental e necessário para o desenvolvimento de princípios matemáticos que passaram a ser buscados à medida que a própria matemática se aperfeiçoava, como a necessidade de um rigor na demonstração de proposições, definições e teoremas em estado de linguagem simbólica, apesar da clareza na explicação de diversos conceitos matemáticos por aspectos geométricos (EVES, 2004).

De acordo com Ávila (2006), essa fundamentação gradativa das ideias do Cálculo está relacionada ao movimento de Aritmetização da Análise, que consistiu na transição de uma

[10] O Racionalismo, segundo Abbagnano (2007), se contrapõe ao Empirismo, tomando como princípio "[...] a tese da necessidade da razão como 'concatenação das verdades', e não como faculdade, no sentido de que ela não pode ser diferente do que é e, portanto, não pode sofrer desmentidos e não exige confirmações" (p. 326-327).

matemática fortemente amparada em princípios geométricos, passando a baseá-la em processos aritméticos. Segundo o autor, a fundamentação geométrica do Cálculo, que perdurou até o século XIX, foi sendo modificada à medida que a Geometria passou a se mostrar insuficiente. As ideias de derivada e integral, que tiveram origem nos conceitos de reta tangente, velocidade instantânea e área, juntamente com os conceitos de função, limite e convergência, passaram a ser definidos em termos de números. Segundo Reis (2001), o século XIX, foi marcado por um período de "primazia dos limites", influenciada pelos trabalhos de Cauchy (1789-1857) e Weierstrass (1815-1897), culminando no desenvolvimento das noções fundamentais do Cálculo a partir do conceito de limites.

Deve-se a Cauchy uma definição mais rigorosa do conceito de limites – relativamente próxima do que é conhecida atualmente – e a definição dos conceitos de derivada e integral como base do Cálculo, sendo estes, por sua vez, fundamentados apenas na noção de limites e do número real (REZENDE, 2003). Weierstrass, por sua vez, buscou basear o Cálculo no conceito de número, reduzindo os princípios da Análise ao conceito de número real (EVES, 2004). Conforme apontado por Reis (2001), a busca pelo rigor formal, motivado pelo movimento de Aritmetização da Análise, passou a ser valorizada e perseguida não apenas nos conceitos que se referem à Análise, e consequentemente ao Cálculo, mas também em diversas outras áreas que constituem a Matemática, cada qual com seus respectivos níveis de rigor.

Segundo Rezende (2003), pode-se traçar um panorama geral do desenvolvimento histórico do Cálculo Diferencial e Integral a partir de uma linha temporal que se divide em três fases, cada uma compreendendo um nível de entendimento acerca do que consistia o rigor formal:

- o período inicial, no qual se encontram os trabalhos desenvolvidos por Newton e Leibniz, foi fundamentado na ideia intuitiva de quantidades infinitamente pequenas. A ideia de rigor se resumia a justificar argumentos com base nas ideias vigentes acerca das quantidades infinitesimais;
- o segundo período é marcado pela crise da inconsistência lógica das quantidades infinitesimais. Como consequência, passam a coexistir diferentes abordagens para o Cálculo: uma em termos de limites, baseada em trabalhos como o desenvolvido por D'Lambert (1717-1783); outra em termos de infinitésimos, na qual destacam-se nomes como o de Euler (1707-1783); e, por fim, uma abordagem baseada na crença de que a álgebra poderia embasar tanto os processos envolvendo a abordagem infinitesimal quanto a abordagem em termos de limites, a qual foi liderada por Lagrange (1736-1813);

- o terceiro período é caracterizado pelo movimento de Aritmetização da Análise, no qual se destacam as contribuições de Cauchy e Weierstrass. Com Cauchy, a noção intuitiva de limite assume o papel de panorama para demonstrações de resultados do Cálculo. Posteriormente, com a definição formal de limite concebida por Weierstrass, surge o padrão epsilônico de limites para demonstração dos resultados do Cálculo.

Levando em consideração como se constituiu a ferramenta matemática, desde sua cronologia até suas inspirações filosóficas difusas, pode-se já vislumbrar aspectos pedagógicos no processo de ensino e aprendizagem nas disciplinas de Cálculo.

2.2 O ENSINO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL E AS DIFICULDADES DE APRENDIZAGEM ENFRENTADAS PELOS ESTUDANTES

Uma vez abordadas as ideias iniciais referentes à caracterização e desenvolvimento histórico do Cálculo Diferencial e Integral, parte-se para uma discussão acerca de diferentes aspectos que permeiam seus processos de ensino e aprendizagem, dando ênfase às dificuldades de aprendizagem enfrentadas por acadêmicos de diferentes cursos de área científica e tecnológica ao longo da sua formação.

Segundo Barufi (1999), ao ingressar no Ensino Superior, mais especificamente em cursos nos quais se faz presente o estudo do Cálculo Diferencial e Integral, o acadêmico tem como expectativa consolidar os conceitos matemáticos aprendidos ao longo da Educação Básica, uma vez que o estudo do Cálculo demanda certa bagagem de conhecimentos e o domínio de técnicas operatórias trabalhadas nesse período, em especial, aquelas aprendidas ao longo do Ensino Médio. No entanto, a autora aponta que, ao chegar à graduação, o estudante se depara com uma abordagem e um nível de rigor bastante distante daquele ao qual estava acostumado.

Para Barufi (1999), esse cenário baseado em uma abordagem formal visa potencializar o alcance de um rigor formal mais profundo, acabando por não ser significativa, uma vez que, para muitos deles, a Matemática aprendida até então possuía caráter intuitivo, não sendo apresentada como um conjunto de conhecimentos logicamente estruturado. A autora destaca, ainda, que “[...] embora alguns textos, dirigidos à escola média, apresentem tópicos relativos aos rudimentos do Cálculo, normalmente, o assunto não é tratado nesse período, sequer superficialmente” (BARUFI, 1999, p. 148).

Tal afirmativa encontra eco nas ideias de Silva (2010) que, por sua vez, afirma ser uma tendência comum a muitos cursos de graduação tratar a Matemática como um corpo linear de conhecimentos muito bem estruturado, na qual os conceitos são apresentados seguindo uma ordem lógica, dissociada da cronologia na qual foram concebidos. A autora afirma que, nesse contexto, o conhecimento matemático é transmitido como um conjunto de generalizações e modelos prontos, passíveis de aplicação em diferentes situações problema, reduzindo os processos de origem e desenvolvimento de tais conceitos a um papel de menor importância. Para Silva (2010), essa tendência torna-se ainda mais evidente em disciplinas que tratam do estudo do Cálculo Diferencial e Integral, nas quais os conteúdos são apresentados em um contexto formal, logicamente estruturado, tendo como objetivo final o estudo das funções de variável real, a partir das propriedades dos números reais.

Thomas (2005) destaca que a aprendizagem de Cálculo se dá de forma diferente de áreas como a Aritmética, a Álgebra ou a Geometria, nas quais, é possível partir de situações de base numérica para aprender a simplificar expressões algébricas, calcular com variáveis, entre outros conceitos, enquanto o Cálculo, mesmo envolvendo tais habilidades, o faz de forma mais precisa e com maior profundidade. Dessa forma, para que o estudante possa apropriar-se dos conhecimentos relacionados ao Cálculo, alcançando o nível de profundidade que a disciplina exige, se faz necessário o domínio de propriedades referentes a conceitos básicos de Matemática e, quando esse domínio é precário, o desenvolvimento dessas habilidades acaba prejudicado, resultando em dificuldades na sua aprendizagem (CURY, 2008; LOPES, 1999).

Nesse sentido, conforme apontado por Rezende (2003), uma prática comum no meio acadêmico é a oferta de cursos tais como “Cálculo Zero”, “Pré-Cálculo”, “Matemática Básica”, dentre outros. De acordo com o autor,

> [...] independentemente do nome que tenham, [esses cursos] têm como meta principal resolver o problema da *“falta de base”* do aluno, ponto, aliás, que parece consensual entre os professores de Cálculo. Com a finalidade de resolver a tão propalada “falta de base”, ensina-se, costumeiramente, nesses cursos, toda aquela parte da matemática básica necessária à realização técnica do Cálculo: polinômios, fatoração, relações e identidades trigonométricas, funções reais usuais (modulares, polinomiais, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas), produtos notáveis, simplificações e cálculos algébricos em geral, etc. É verdade que falta tudo isso ao nosso aluno recém-egresso do ensino médio. Mas também é verdade que a tal “falta de base” não é um problema específico do ensino de Cálculo. A “base” que falta aqui, para o ensino de Cálculo, também faz falta para o ensino de outras disciplinas do curso superior, e nem por isso os seus resultados são tão catastróficos como os do Cálculo (2003, p. 16-17, grifos do autor).

A partir do exposto, surge o seguinte questionamento: Quais seriam, além da potencial falta de base, as razões que levam os estudantes de cursos iniciais de Cálculo Diferencial e Integral a terem um rendimento tão abaixo do esperado?

Segundo Artigue (1995), são diversas as naturezas das dificuldades enfrentadas pelos estudantes na aprendizagem do Cálculo, as quais podem ser agrupadas em três grandes categorias: dificuldades associadas com a complexidade dos objetos básicos do Cálculo;

dificuldades associadas à conceituação e a formalização da noção de limite; dificuldades vinculadas às rupturas necessárias em relação aos modos de pensamento puramente algébricos e às especificidades do trabalho técnico realizado no Cálculo.

A descrição de cada uma das categorias mencionadas pela autora é apresentada, a seguir, na Figura 3.

Figura 3 – Dificuldades relacionadas à aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral

CATEGORIA	DESCRIÇÃO
Dificuldades associadas com os objetos básicos do Cálculo.	Agrega dificuldades relacionadas à mudança de tratamento dado a objetos tais como os números reais e as funções, tendo em vista que os mesmos são trabalhados ao longo da Educação Básica como objetos em construção, sendo devidamente formalizados no Ensino Superior. Em especial, no que se refere ao conceito de funções, são destacadas quatro subcategorias: • a primeira relacionada às dificuldades apresentadas pelos estudantes em identificar, de fato, o que é uma função; • a segunda envolvendo o reconhecimento da dualidade das funções enquanto processo e entidade conceitual; • a terceira tratando das dificuldades cognitivas envolvendo a articulação entre diferentes registros simbólicos, além dos hábitos de ensino que superestimam os registros algébricos frente aos geométricos; • e, por fim, a quarta subcategoria, que se refere a dificuldades relacionadas ao uso das funções como ferramentas matemáticas.
Dificuldades associadas à conceituação e a formalização da noção de limite.	De acordo com a autora, a noção de limites ocupa um lugar de destaque em investigações voltadas ao ensino do Cálculo, dado seu caráter essencial para a constituição dos demais conceitos, sendo destacadas as seguintes dificuldades: • significação equivocada do termo limite, na qual o mesmo é entendido como uma barreira intransponível e inalcançável, como se fosse uma marca ou o último termo do processo; • dificuldades relacionadas ao tratamento algébrico atribuído à noção de limites quando a mesma se refere a ideia de continuidade, de modo que são aplicadas noções de propriedades comuns, sem que o estudante compreenda de que forma isso se insere no contexto mais global da sua aplicação; • dificuldades resultantes de falsas generalizações ocorridas a partir de um tratamento geométrico dado à noção de limites, no qual são reforçadas concepções errôneas tais como a ideia de que se um objeto tende geometricamente a outro, os limites das suas magnitudes associadas tenderão às magnitudes do objeto limite; • a autora cita, também, dificuldades relacionadas ao duplo *status* da noção de limites: o operacional e o estrutural. Nesse caso, há certa dificuldade em analisar o limite por um viés que não seja puramente procedimental, dando foco ao objeto limite que o constituiu e analisando seu real significado; • ainda em relação a noção de limite, a autora destaca dificuldades relacionadas à formalização padrão da noção de limite. Segundo a autora, embora a formalização padrão da noção de limites funcione como um todo indivisível, é comum que os estudantes a tratem como dois processos distintos: um associado a variável e outro aos valores da função.
Dificuldades associadas à ruptura entre Álgebra e Cálculo.	Essa categoria agrega dificuldades relacionadas aos diferentes tratamentos dados aos objetos matemáticos por áreas como o Cálculo e a Álgebra. Como exemplo, destaca-se a noção de igualdade: No campo da Álgebra, busca-se transformar uma igualdade do tipo $a(x) = b(x)$ em uma sucessão de procedimentos $a_i(x) = b_i(x)$ até que se obtenham expressões em que a igualdade é uma afirmação verdadeira. Já no Cálculo, a análise pode ser realizada a partir do comparativo entre duas funções, como por exemplo, as funções $f(x)$ e $g(x)$, cujos contradomínios são definidos no conjunto dos números reais, tal que para todo ponto do contradomínio a imagem de $f(x)$ é menor ou igual a de $g(x)$. A necessidade nesse tipo de expressão está em avaliar para quais pontos do contradomínio a igualdade é verdadeira.

Fonte: Adaptado de Artigue (1995).

Fato é que, ao se buscar um entendimento sobre os aspectos que contribuem para o surgimento das dificuldades de aprendizagem enfrentadas pelos estudantes, ao longo de um curso de Cálculo, faz-se necessário investigar as questões relacionadas ao ensino do Cálculo Diferencial e Integral. Para Reis (2001), muitas das dificuldades confrontadas pelos alunos se dão em função de como, historicamente, se constituiu a estruturação para o ensino do Cálculo. De acordo com esse autor, este cenário se consolida a partir do movimento de Aritmetização da Análise (descrito na seção anterior), de modo que o ensino do Cálculo passou a sofrer forte influência da tradição dos limites – tendência predominante até os dias de hoje – na qual os conteúdos são apresentados em uma sequência que segue os padrões propostos por Cauchy e Weierstrass. Conforme destacado pelo autor:

> 1) influenciados pelo modelo *cauchyano*, tradicionalmente, iniciamos o estudo do Cálculo pela noção de limite de uma função e, em seguida, destacamos que: a continuidade depende de um limite (existir e ser igual ao valor da imagem da função no ponto); a derivada é um limite (do quociente incremental); a integral é um limite (das somas de Riemann);
> 2) a partir do refinamento *weierstrassiano* das definições, verificamos na maioria dos livros didáticos atuais, o desenvolvimento das teorias de derivadas e integrais posterior a apresentação dos limites. Estes, em geral, são definidos a partir do par $\varepsilon - \delta$ e em seguida, são destacadas as principais propriedades e alguns teoremas mais importantes relacionados aos limites (REIS, 2001, p. 62-63, grifos do autor).

A estrutura descrita por Reis (2001) já se fazia presente na análise realizada por Barufi (1999), para a qual foi tomado um conjunto de 24 livros didáticos voltados ao estudo de conceitos relacionados ao Cálculo Diferencial e Integral. Segundo a autora, a investigação realizada parte da concepção de que o livro didático é um importante instrumento para organização e comunicação de conhecimentos, podendo assumir um caráter norteador para o desenvolvimento de uma disciplina e servir como material de apoio aos estudantes, seja para leitura prévia ou para complemento das aulas ministradas pelo professor. Além disso, a autora busca apontar o reflexo da organização destes livros didáticos na organização dos conteúdos componentes dos cursos em que são utilizados.

Barufi (1999) destaca que os diferentes padrões encontrados podem ser definidos entre dois paradigmas de abordagem: o histórico e o lógico-formal. Para a autora, uma abordagem histórica é aquela que trata os conceitos em uma sequência que se alinha à gênese das ideias, contrapondo a abordagem lógico-formal, na qual os conceitos são reorganizados em uma sequência que se assemelha ao padrão Cauchy-Weierstrass, apontado por Reis (2001), conforme apresentado na Figura 4.

Figura 4 – Paradigmas de abordagem do Cálculo Diferencial e Integral

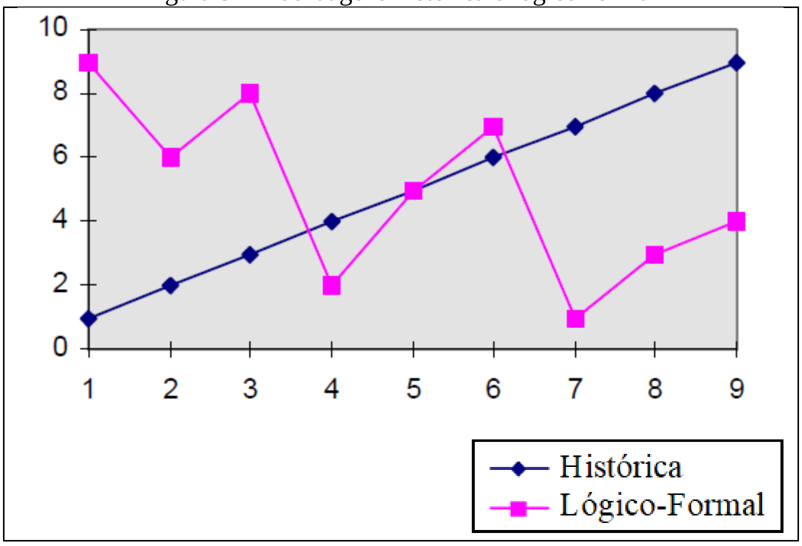
ABORDAGEM HISTÓRICA	ABORDAGEM LÓGICO-FORMAL
1. Integração através de problemas envolvendo área (quadratura), volume (cubatura), comprimento de arco (retificação).	1. Os números reais.
2. Diferenciação através de problemas de tangentes, valores extremos, normais e curvatura.	2. Funções elementares.
3. Unificação do Cálculo Integral e do Cálculo Diferencial por meio do TFC.	3. Limites.
4. Equações Diferenciais Ordinárias.	4. Diferenciação.
5. Desenvolvimento de notações e símbolos.	5. Estudo detalhado de funções de uma variável.
6. Conceito de função.	6. Integração.
7. O conceito de quantidades infinitamente pequenas, indivisíveis e quantidades divisíveis *ad infinitum*.	7. Teorema Fundamental do Cálculo.
8. O abandono eventual dos infinitésimos e a determinação do conceito de limite como conceito fundamental do Cálculo.	8. Equações Diferenciais Ordinárias.
9. Os números reais.	-

Fonte: Adaptado de Barufi (1999, p. 158-159).

Verifica-se, a partir do exposto na Figura 4, que a abordagem histórica remete a ordem de surgimento e desenvolvimento dos conceitos referentes ao Cálculo Diferencial e Integral, com destaque para os processos de integração e diferenciação, unificados posteriormente pelo surgimento do Teorema Fundamental do Cálculo e a formalização do conjunto dos números reais, decorrente do movimento de Aritmetização da Análise. A abordagem lógico-formal, por sua vez, se ampara na sequência Cauchy-Weierstrass, na qual a apresentação dos conceitos se dá em ordem contrária à da abordagem histórica, tomando como base o conjunto dos números reais e sendo o conceito de limites e continuidade a base para a formalização dos conceitos de derivada e integral (BARUFI, 1999).

A Figura 5 apresenta um comparativo elaborado por Barufi (1999), no qual toma-se a abordagem histórica como referência linear e, a partir dela, posiciona-se a sequência de tópicos de acordo com a abordagem lógico formal, ilustrando as diferenças entre as duas sequências.

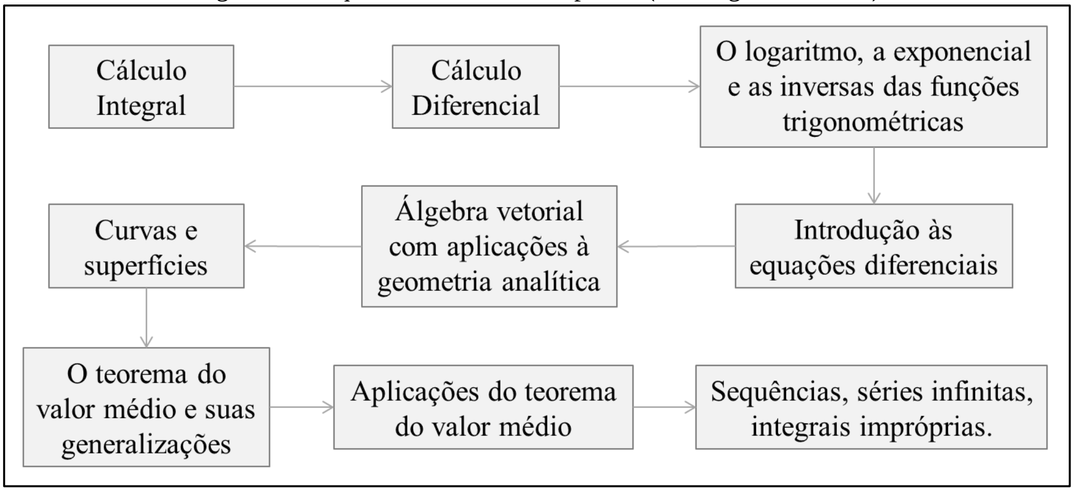
Figura 5 – Abordagens histórica e lógico-formal



Fonte: Barufi (1999, p. 160)

A diferença entre as duas abordagens descritas por Barufi (1999) pode ser percebida, também, a partir de exemplos destacados do conjunto de livros de Cálculo analisados por ela. Para tal, apresentam-se duas sequências temáticas formuladas por Barufi (1999), sendo a primeira a sequência temática do livro *Calculus – Vol. 1*, de T. M. Apostol[11], na qual a autora dispõe dos conceitos abordados no livro de acordo com seu sumário (Figura 6).

Figura 6 – Sequência temática de Apostol (abordagem histórica)



Fonte: Adaptado de Barufi (1999, p. 68).

Segundo a autora, o livro de Apostol apresenta uma introdução histórica na qual o autor discorre sobre sua visão acerca da utlidade do Cálculo como instrumento para a resolução de problemas relacionados às diferentes áreas de conhecimento humano. As ideias gerais do Cálculo, relacionadas ao cálculo da velocidade, área, volume, taxa de variação continuidade e reta tangente, são apresentadas tomando como referência a ordem histórica na qual foram sendo desenvolvidas, passando pelo

> [...] método da exaustão, utilizado com sucesso por Arquimedes (287-212 a.C.), sendo transformado no que passou a ser conhecido como o Cálculo Integral e que recebeu maior impulso no séc. XVII, principalmente devido aos esforços de Isaac Newton (1642-1727) e de Gottfried Leibniz (1646-1716). Até o séc. XIX, o assunto continuou a ser estudado, e, com Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) e Bernhard Riemann (1826-1866), adquiriu *uma base matemática firme* (BARUFI, 1999, p. 67, grifo da autora).

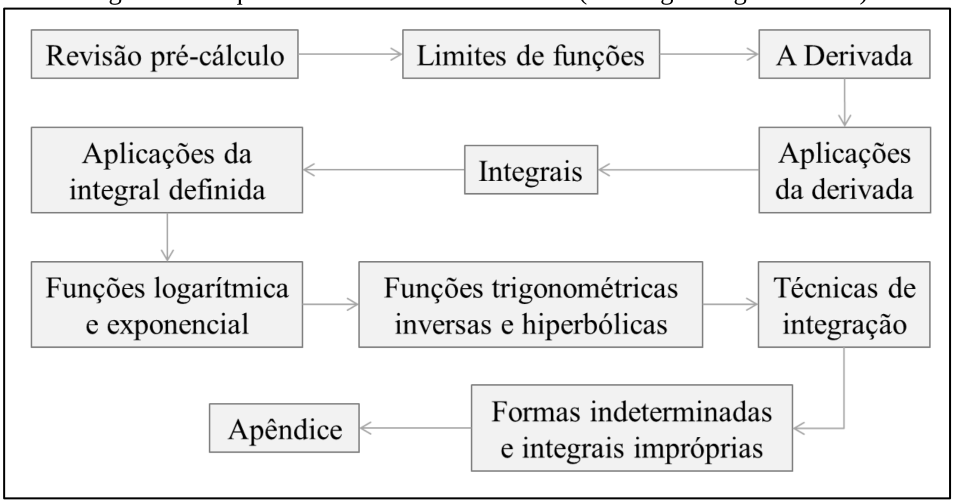
Estrutura tal como a de Apostol foi verificada por Barufi no livro *Introduction To Calculus And Analysis – Vol. 1*, de R. Courant e F. John[12]. Em relação a este livro, a autora destaca a preocupação dos autores em tornar mais explícitos os fatos que estão descrito em linguagem matemática por meio do uso da linguagem corrente. Ainda de acordo Barufi, "[...] os autores tratam de questões de áreas e o cálculo de algumas integrais, para depois, introduzir a questão da derivada de uma função em um ponto, através do problema da [reta] tangente ao

[11] APOSTOL, T. M. **Calculus – Vol. 1**. New York: Blaisdell Publishing Company, 1962.
[12] COURANT, R.; JOHN, F. **Introduction to Calculus And Analysis – Vol. 1**. New York: Interscience Publishers, 1965

gráfico de uma função em um ponto e da velocidade instantânea de um corpo em movimento" (BARUFI, 1999, p. 90), contrariando a sequência Cauchy-Weierstrass.

Em contraponto aos exemplos supracitados, tem-se a sequência temática do livro Cálculo com Geometria Analítica – Volume 1, de E. W. Swokowski[13], apresentada na Figura 7. Diferentemente das anteriores, a abordagem empregada neste livro segue um padrão lógico-formal, tendo em vista que o autor parte de uma revisão de conceitos relacionados ao Pré-Cálculo, contemplando uma revisão sobre conteúdos referentes ao conjunto dos números reais, prosseguindo, posteriormente, para o desenvolvimento do conceito de limite de uma função, apontado como "[...] *uma das ideias fundamentais que distinguem o cálculo da álgebra e da trigonometria*" (BARUFI, 1999, p. 119, grifos da autora). O conceito de derivada é apresentado a partir de exemplos relacionados a reta tangente ao gráfico de uma função em um deterinado ponto, a velocidade instantânea e a taxa de variação. O processo de integração, por sua vez, é trabalhado enquanto operação inversa da derivação, de modo que apresenta-se, inicialmente, a noção de integral indefinida e, em seguida, a integral definida por meio da sua aplicação no cálculo de áreas.

Figura 7 – Sequência temática de Swokowski (abordagem lógico-formal)



Fonte: Adaptado de Barufi (1999, p. 119).

Outro dos livros analisados por Barufi (1999) que articula os conceitos referentes ao estudo do Cálculo Diferencial e Integral com a Geometria Analítica é o Cálculo com Geometria Analítica, de G. F. Simmons[14]. De acordo com os dados apresentados pela autora, percebe-se que a obra de Simmons segue uma linha semelhante a utilizada por Swokowski, uma vez que os conteúdos são dispostos atendendo à sequência lógico-formal. No entanto a autora chama a

---

[13] SWOKOWSKI, E. W. **Cálculo com Geometria Analítica – Volume 1**. Tradução: Alfredo Alves de Faria, São Paulo: Makron Books, 1994.
[14] SIMMONS, G. F. **Cálculo Com Geometria Analítica – Vol. 1**. Tradução: Seiji Hariki, São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

atenção ao fato de que são apresentadas notas biográficas no final do livro, nas quais são abordados tópicos da História do Cálculo, "[...] o que pode ser muito motivador para o aluno interessado, mas que está colocado à parte do desenvolvimento do curso" (BARUFI, 1999, p. 115).

Salvas as variações entre as diferentes abordagens encontradas por Barufi (1999), verifica-se a predominância do padrão lógico-formal, dado que 17 dos livros analisados pela autora seguiam essa tendência, contra os dois exemplos citados anteriormente (Apostol, 1962; Courant e John, 1965), cujas abordagens se enquadram no padrão histórico[15].

Embora predominante, o padrão lógico-formal não deixou de sofrer críticas da autora, uma vez que, segundo ela, esse modelo de abordagem se constitui em uma apresentação dos conceitos relacionados ao Cálculo de forma sistematizada, seguindo uma estrutura pautada na lógica, sendo resultado do trabalho realizado ao longo de mais de vinte séculos por pensadores, filósofos e matemáticos. Ela argumenta que esse tipo de "[...] tratamento metodológico obedece, em muitos casos, à ideia de fornecer uma **revelação** do Cálculo. A proposta parece basear-se no fato questionável de que a lógica interna consistente deva garantir a aprendizagem significativa por parte dos estudantes" (BARUFI, 1999, p. 52, grifo da autora).

Uma das justificativas para escolha de tal abordagem, segundo a autora, é a busca por alcançar um rigor formal mais profundo. No entanto esse padrão de ensino, muitas vezes, acaba não sendo significativo ao estudante, tendo em vista que, para muitos deles, "[...] o conhecimento matemático, desenvolvido anteriormente, na escola secundária, pouco ou nada tem a ver com o que lhe é apresentado no curso de Cálculo, e o caráter de análise com o que passa a se defrontar parece constituir uma grande dificuldade" (BARUFI, 1999, p, 5).

Barufi (1999) defende que uma abordagem pautada no modelo histórico possui um potencial mais elevado para problematização, pois simula as demandas a partir das quais foram formulados os conceitos que culminaram no Cálculo Diferencial e Integral, destacando que tal processo não ocorreu de forma linear, conforme faz parecer a abordagem lógico-formal. Concordando com a autora, Silva (2010) destaca que

> [...] conhecer e fazer uso da história da ciência é importante para percebermos que o desenvolvimento científico não se deu a partir de "lampejos de gênios", mas na busca por interpretar, compreender, melhorar as condições de vida, obter novas conquistas, novos territórios. [Afinal,] O conhecimento científico também é fruto da ambição humana.
> [...]
> Especificamente em relação à matemática, sua história nos remete, de certo modo, a compreender a evolução da humanidade, uma vez que essa ciência teve e continua tendo papel central no desenvolvimento científico e tecnológico. Por isso,

---

[15] Cabe destacar que cinco dos 24 livros não foram contabilizados, tendo em vista que tratam de conceitos relacionados à Análise ou ao Cálculo Infinitesimal, o que foge do foco dessa investigação.

> compreender como se deu a evolução das ideias matemáticas também é importante para entendermos o passado, o presente e planejarmos o fututo. A história pode nos levar a dar respostas de como se deu o processo de construção do que assistimos no presente e, a partir dela, podemos fazer a reescrita da própria história, bem como dos fatos a ela remetidos (p. 31).

Para Barufi, (1999), Silva (2010) e Rezende (2003), a inserção dos aspectos históricos no ensino de matemática, em especial do Cálculo, abre um caminho para uma releitura da produção do conhecimento, potencializando que os estudantes estabeleçam relações entre os contextos social, cultural e político, de modo que venham a perceber a influência dos mesmos na constituição do conhecimento matemático.

Todavia, não há empecílios para que haja problematização dos conceitos trabalhados em cursos nos quais se opte pela adoção de livros didáticos cuja abordagem esteja alinhada ao padrão lógico-formal. Com base na perspectiva de Barufi (1999), quando adotados livros didáticos que assumam uma proposta metodológia voltada ao padrão lógico-formal, a problematização dos conceitos fica a cargo do professor da disciplina. Contudo, na falta de uma metodologia problematizadora, há o risco de que o mesmo contemple apenas um modo de "[...] transmitir seu próprio conhecimento, pronto estruturado, que o aluno não conseguirá articular se não tiver significado para ele, se não responder a algum problema que seja seu, especial, desafiador, interessante" (p. 30).

Além dos aspectos referentes às diferentes abordagens empregadas nos cursos de Cálculo, outro fator que se destaca, segundo Rezende (2003), são as dificuldades de natureza epistemológica, as quais articulam elementos de caráter histórico, filosófico, social e psicológicos. Conforme apontado pelo autor, tais dificuldades podem ser representadas por cinco dualidades: discreto/contínuo, variabilidade/permanência, finito/infinito, local/global e sistematização/construção, as quais articulam diferentes aspectos históricos e pedagógicos.

De acordo com Rezende (2003), a dualidade discreto/contínuo "[...] se constitui pelas discussões em torno do problema histórico e fundamental da medida de grandezas geométricas, intuitivamente contínuas, através de processos aritméticos discretos" (p. 327). Historicamente, tais dificuldades se originam de questões relativas à incomensurabilidade de determinados segmentos geométricos, as quais persistiram até a formalização do conjunto dos números reais, mas especificamente a concepção do conjunto dos números irracionais (REZENDE, 2003).

No âmbito pedagógico, de acordo com Rezende (2003), a dualidade discreto/contínuo é ignorada em diversos níveis do ensino da Matemática, não sendo um problema restrito aos cursos de Cálculo. No que se refere ao estudo do Cálculo Diferencial e Integral, isso se evidencia pelo uso indiscriminado do TFC e das técnicas de integração em detrimento da integral de Riemann e das noções referentes ao estudo das séries. Para o autor, isso ocorre em função do conhecimento limitado dos estudantes em relação aos conjuntos numéricos, tendo em vista que o mesmo se restringe ao conjunto dos números racionais, enquanto em relação aos irracionais, seus conhecimentos se limitam ao uso de técnicas operatórias.

A dualidade variabilidade/permanência, por sua vez, ocupa-se de questões referentes à relação de interdependência entre quantidades variáveis, mais especificamente à taxa de variação de uma das variáveis em relação à outra (REZENDE, 2003). Conforme apontado por Rezende (2003), as dificuldades associadas a essa dualidade expressam um entendimento puramente estático em relação ao conceito de função por parte dos alunos ingressantes no ensino superior, no qual a função se resumiria a expressão analítica que a define, sendo desconsiderada a relação funcional que ela representa. Nesse sentido, segundo o autor, o esboço e o estudo dos gráficos das diferentes funções se dão por meio da aplicação de uma tabela restrita de valores para x (geralmente formada por um mesmo conjunto de pontos) à expressão que representa a função, de modo que sua representação gráfica se constitui de um processo estático, estético e induzido por propriedades algébricas.

No que se refere à dualidade de finito/infinito, Rezende (2003) aponta para alguns dos primeiros questionamentos acerca de ideias relacionadas ao finito e infinito, tal como emergia no paradoxo de Galileu: "*pode uma série infinita ter um resultado finito?*" (p. 373, grifos do autor). Questionamentos como esse, atualmente, são simples de serem resolvidos, entretanto foram necessários séculos para a construção histórica desses conceitos e das argumentações matemáticas que eram necessárias para conduzir esse tipo prova (REZENDE, 2003).

Rezende (2003) atenta para a questão de que no Cálculo, se não da própria Matemática, a noção de infinito se configura como um dos elementos primordiais para a elaboração do que conecta os conceitos discreto/contínuo. Tal conexão se baseia principalmente nas ideias que são trabalhadas dentro do conjunto dos Números Reais, como os conceitos de Função e da aproximação de para calcular a área de uma região (REZENDE, 2003). Como destaca o autor, em um primeiro momento o conceito de infinito pode ser elementar de ser compreendido partir de potenciais tentativas de relacioná-lo com ideias daquilo que é "incontável", "sem fim", "ilimitado" (REZENDE, 2003). Segundo Rezende (2003) a complexidade desse conceito se mostra, geralmente, no estudo de elementos matemáticos em que se mostra necessário abordar esse estudo, como nas questões relacionadas a incomensurabilidade ou não-enumerabilidade e a própria noção de convergência de um dado limite.

Rezende (2003) aponta que no Cálculo, a partir da perspectiva pedagógica, a noção de limites é um dos conceitos matemáticos dos quais o aluno tenta expressar seu entendimento sobre infinito. De acordo com o autor, muitas vezes, as resoluções e as explicações de alunos se direcionam apenas a um ponto de vista algébrico, como a diferenciais os tipos de infinito: onde existe o infinito “positivo” ou “negativo” para representar a tendência dos limites laterais de uma função em um dado ponto e o limite “sem sinal” que aponta para a não existência do limite. Na perspectiva de Rezende (2003), essa ideia trivial passa longe da significação que gira em torno daquilo é que é discreto/contínuo e que, no caso, se distancia das relações teóricas fundamentais da real interpretação que envolve o conceito matemático abordado.

Sobre a dualidade local/global, esta está intimamente relaciona com temas como: “colagem de modelos locais em objetos globais, passagem local ao global e análise de suas obstruções métodos de análise das estruturas locais e/ou globais não triviais, etc.” (REZENDE, 2003, p. 373). No âmbito histórico, Rezende (2003) destaca que o conceito é novo por surgir na década de 80, porém, mostrou-se como um elemento essencial para trazer significado ao produto da percepção humana sobre local e global, destacando-se como um potencial ampliador de interpretações sobre os elementos e abordagens da Geometria Euclidiana. O autor destaca, ainda, que essa perspectiva aponta para as essenciais contribuições que o Cálculo teve com base nos conhecimentos da Geometria, destacando, dentre tantas, a possibilidade de relação e estudo com o Cálculo a partir da Geometria Analítica.

Na questão pedagógica dessa dualidade, Rezende (2003) aponta que uma das grandes dificuldades dessa abordagem no Cálculo está no entendimento sobre como os estudantes veem os conhecimentos matemáticos que são abordados. O autor coloca que a percepção de estudantes de Cálculo, às vezes, acaba ficando distorcida no ponto de vista ideológico do entendimento matemático, pois, por exemplo, simplificam conceitos complexos e profundos àquilo que enxergam em um dado problema. Essa noção dos estudantes pode trazer dificuldades em compreender as abordagens mais amplas de como conceitos, como Derivadas, podem estar relacionados a determinadas situações-problema. O autor enfatiza que a ação dos estudantes pode limitar-se a uma percepção que não condiz com todas as potencialidades de utilização do referido conceito e, assim, acaba concebendo uma visão particular (local) de um conjunto de possibilidades (global). Ainda, segundo Rezende (2003), o oposto também acaba trazendo complexidades à abordagem dos conhecimentos do Cálculo, pois uma abordagem global pode acabar trazendo dificuldades ao estudante em como percebê-las em situações específicas que exijam sua aplicação.

Por fim, a sistematização/construção, com base em uma noção filosófica, apresenta a forma como os conhecimentos são organizados ou sistematizados (REZENDE, 2003). Rezende (2003) destaca que as áreas de conhecimento da Matemática se organizam e se estruturam, inicialmente, em áreas mais abrangentes que, posteriormente, sistematizam todos os conhecimentos matemáticos. O autor coloca, ainda, que essa sistematização na área do Cálculo, parte de pressuposto de sistematizações pedagógicas.

Historicamente a emergência de alguns conhecimentos do Cálculo, como integral e derivada, ocorreram de forma distinta a como são concebidos no ensino de Cálculo atualmente (REZENDE, 2003). Rezende (2003) coloca que as primeiras noções de integral surgem juntamente com conceitos relacionado ao estudo do cálculo de áreas e continuidade de regiões e, posteriormente, os conceitos relacionados ao estudo de derivadas. No sentido pedagógico, o autor coloca que, apesar da ordem cronológica da constituição e formulação desses conceitos matemáticos, os atuais ensinos de Cálculo emergem numa perspectiva sequencial de Cauchy-Weierstrass, que considera a lógica sistemática de ensino de Cálculo em: Limites, Continuidade, Derivadas e Integrais. O autor destaca, num contexto mais amplo, que o ensino de Cálculo geralmente pressupõe uma tática sistemática para seu ensino que considera a ordem: (1) revisões sobre os conhecimentos matemáticos que precedem o Cálculo (funções, álgebra e operações), (2) a sequência Cauchy-Weierstrass e (3) técnicas e exercícios de fixação.

A percepção nessa sistematização de ensino destacada está vinculada a muitas das dificuldades que, epistemologicamente, o Cálculo conduz diante da construção e configuram dos conceitos matemáticos (REZENDE, 2003). Nessa percepção, parece que a relação epistemológica traz potenciais facilidades em como ensino do professor de Cálculo pode ser conduzido e em como a aprendizagem do aluno toma forma diante do referido estudo (REZENDE, 2003). Segundo o autor, é importante destacar que, apesar do Cálculo estar sistematizado numa lógica de ensino que, de certa maneira, fere o caminho epistemológico-histórico, as relações nessa perspectiva de ensino trazem, por um lado, colaborações a sistematização dos conhecimentos matemáticos constituídos pelos alunos e, por outro, a rigorização de como o conhecimento pode ser transposto ao aluno.

A forma em como a transposição do conhecimento do Cálculo é cristalizada pode vir a causar dificuldades na forma em como os alunos aprendem sobre essa área da Matemática (REIS, 2001). Uma das formas de manifestação observável das dificuldades de aprendizagem dos estudantes, seja em Cálculo ou em outras disciplinas, é por meio dos erros que se revelam nas produções realizadas pelos estudantes e, quando estes ocorrem, é necessária uma tomada de posição pelo professor, que pode fazer uso dos mesmos como elemento constituinte do processo de aprendizagem dos seus alunos. Dentre as ferramentas possíveis de serem utilizadas para essa finalidade está a análise de erros, a qual será abordada na próxima seção.

2.3 O ERRO NOS PROCESSOS DE ENSINO E APRENDIZAGEM DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Conforme apontado por Rico (1995) uma característica comum da matemática escolar é a aplicação de questões junto a estudantes nos diferentes níveis de ensino, as quais, independentemente do tópico abordado, possuem um conjunto limitado de respostas consideradas corretas, de modo que todas aquelas que não correspondem aos padrões estabelecidos podem ser consideradas um erro em relação à questão proposta. Segundo o autor, o erro é um objeto constante no processo de aprendizagem dos estudantes, no entanto, sendo o objetivo a aprendizagem correta dos conceitos, por muito tempo, sua presença foi tratada como uma evidência de fracasso no alcance de tal objetivo, de forma que se buscava, de todo modo, eliminá-lo. Tal postura foi sendo modificada com o passar do tempo, à medida que o erro se tornou objeto de estudo da Educação Matemática[16] (RICO, 1995).

Para Del Puerto, Minnaard e Seminara (2006), os erros são um elemento constante nas produções dos estudantes, sendo causados pelas dificuldades de diversas naturezas, geradas ao longo do processo de aprendizagem, as quais se conectam e reforçam em redes complexas que obstaculizam a aprendizagem, manifestando-se na forma de respostas equivocadas. Nesse sentido, a análise dos erros cometidos pelos estudantes promove uma valiosa informação sobre a construção do seu conhecimento matemático, além de constituir uma ferramenta para revelar o estado do conhecimento dos estudantes, com potencial para melhorar os resultados no processo de ensino e aprendizagem.

Segundo Cury, Bisognin E. e Bisognin V. (2009), a análise de erros cometidos pelos estudantes possui elementos comuns aos processos avaliativos presente no cotidiano escolar, podendo partir de uma categorização da resolução apresentada como correta, parcialmente correta ou incorreta. No entanto, as autoras destacam que, diferentemente de uma correção de caráter avaliativo, a análise de erros não tem como objetivo a atribuição de nota ou conceito, mas sim o levantamento de dados que possam ser utilizados em um contexto investigativo ou, então, no planejamento de estratégias de ensino. Bisognin, Fioreze e Cury (2007) apontam, ainda, que "conhecer as concepções dos alunos sobre algum conceito, analisar como ele pensa ao resolver um problema são elementos que podem fazer da análise de erros uma forma de pesquisar a própria prática pedagógica" (p. 32).

---

[16] Segundo Cury (2008), a Educação Matemática tem por objetivo "[...] o estudo das relações entre o conhecimento matemático, o professor e os alunos, relações estas que se estabelecem em um determinado contexto sociocultural [...]" (p. 19).

De acordo com Cury e Cassol (2004), a análise de erros, enquanto abordagem de pesquisa em Educação Matemática, originou-se nos Estados Unidos e na Europa, no início do século XX, assumindo, ao longo do tempo, diferentes enfoques dependendo dos pressupostos teóricos que amparavam as investigações e do nível de ensino ao qual se destinavam. Conforme indicado pelas autoras, as primeiras pesquisas realizadas eram voltadas à contagem dos erros ocorridos em exercícios padronizados e tinham como única finalidade a busca pela detecção e classificação dos erros cometidos pelos estudantes, sem explicitar teorias cognitivas ou pedagógicas que os justificassem, ficando implícitas as teorias do pesquisador em relação aos processos de ensino e aprendizagem (CURY, 2008; CURY; CASSOL, 2004).

Num segundo momento, as pesquisas passaram a incluir, além da contagem e classificação dos erros, uma busca por compreender suas causas, os obstáculos inerentes aos conteúdos analisados e sobre as concepções dos estudantes (CURY, 2008; CURY; CASSOL, 2004). Nesse contexto, segundo Cury e Cassol (2004), embora os erros façam parte dos dados analisados em pesquisas que envolveram a Análise de Erros, esses deixaram de ser o foco e as pesquisas da área passaram a concentrar seus esforços em descobrir as motivações e causas desses erros. De acordo com as autoras, os princípios utilizados tiveram, com frequência, o uso de aportes piagetianos e vygotskianos, bem como o uso de ideias de autores franceses que trabalham a engenharia didática.

Em um terceiro tipo de investigação emergente da Análise de Erros, Cury e Cassol (2004) destacam o surgimento de pesquisas que buscaram trazer atividades voltadas para estudantes e, com base na análise das resoluções e soluções de questões, os erros eram discutidos a base de referencial teórico que subsidiava a proposta investigativa. Esses tipos de propostas permitiram perceber abordagens para trabalhar a Análise de Erros, inclusive, enquanto proposta metodológica para o professor em sala de aula, pois a partir desse viés foi possível notar o modo como o erro pode corroborar para buscar entendimentos sobre obstáculos cognitivos e epistemológicos dos alunos (CURY; CASSOL, 2004). Esse destaque, principalmente, toma como foco uma avaliação sobre erros que alunos de Cálculo cometem em atividades que envolvem os conceitos dessa área da Matemática, possibilitando novas interpretações sobre como o ensino pode ser conduzido de modo a corroborar para a aprendizagem do estudante (CURY; CASSOL, 2004).

Concorda-se com Cury (2008), que argumenta que a Análise de Erros, numa perspectiva do ensino e aprendizagem, permite ao professor compreender como os erros acometem as resoluções dos alunos e que tipos de obstáculos emergem desses erros. A autora destaca que investigar os erros do aluno possibilita um entendimento para o professor de modo a trazer a ele uma visão de como o aluno vem estruturando sua aprendizagem. Por outro lado, é possível destacar também questões relativas a obstáculos a serem superados pelos alunos, os quais podem ser trabalhados pelo professor com o objetivo de aprimorar o conhecimento de seus alunos (CURY, 2008).

É nessa perspectiva que a Análise de Erros é tomada na presente investigação: como uma ferramenta de diagnóstico para o levantamento e identificação de erros, os quais possam vir a expressar potenciais dificuldades na aprendizagem conceitos matemáticos por parte dos alunos de Cálculo. Esse enfoque teórico destaca, dentre várias possibilidades, formas de se pensar sobre como os erros cometidos por estudantes podem ser utilizados no desenvolvimento de propostas de colaboração, com foco na redução das dificuldades de aprendizagem vivenciadas por esses alunos.

Cury (2008) destaca que existem diversas formas e modelos voltados a Análise de Erros, os quais são formulados a partir de diferentes concepções teóricas e metodológicas que se inserem nas investigações com alunos. Em suas pesquisas a autora destaca modelos teóricos sobre Análise de Erros tanto publicados por autores brasileiros como por estrangeiros, os quais emergiram de investigações realizadas em diferentes níveis de Ensino.

Dentre esses modelos teóricos de análise de erros destaca-se a perspectiva teórica de Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987), a qual será tomada na presente investigação. A motivação do uso deste modelo está no entendimento de que é possível constituir um instrumento investigativo para avaliar um quantitativo considerável de materiais, como registros de provas, trabalhos e etc., de estudantes. Desse modo, destacam-se elementos que se referem ao modelo desses autores.

Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987) constituíram um modelo de categorização que possibilitou generalizar erros cometidos por estudantes, considerando uma grande população de alunos. Segundo os autores, esse modelo foi criado a partir da análise de provas, com 18 questões abertas, de um exame anual aplicado com cerca de 20.000 estudantes do Ensino Médio durante dois anos seguidos. Esse modelo permite categorizar erros a partir de um conjunto de semelhanças e aproximações conceituais que possibilitaram identificar tipos de erros cometidos pelos mesmos (MOVSHOVITZ-HADAR; ZASLAVSKY; INBAR, 1987). O modelo definido pelos autores, a partir dessa investigação, é constituído por seis categorias, cada uma delas apresentando descritores que a caracterizam, os quais são apresentados a seguir:

- uso incorreto dos dados: nessa categoria devem ser enquadradas respostas nas quais o estudante utiliza informações que não são pertinentes ao problema, utilizando dados que não se relacionam com a situação em tratamento. Além disso, essa categoria se refere a casos nos quais o estudante negligencia dados informados que são necessários para a resolução do problema, compensando a falta de tais informações pelo acréscimo de dados irrelevantes;

- linguagem mal interpretada: essa categoria agrega casos nos quais o estudante traduz uma expressão de linguagem natural em termo matemático ou equação que represente uma relação diferente da que é descrita verbalmente; designa um conceito matemático a um símbolo que, tradicionalmente, refere-se a outro conceito e opera este símbolo em sua forma convencional; ou interpreta incorretamente símbolos gráficos como termos matemáticos ou vice-versa;
- inferência lógica inválida: envolve erros relacionados a processos lógicos, como por exemplo, situações nas quais o estudante conclui, a partir de uma afirmação condicional (se *p*, então *q*), sua recíproca, quer na sua forma positiva (se *q*, então *p*) ou na sua forma contra positiva (se não *p*, então não *q*); conclui a partir de uma afirmação condicional (se *p*, então *q*) e da sua consequente *q* que o antecedente *p* é válido; ou a partir de uma afirmação condicional e a negação do seu antecessor (não *p*) que a negação do consequente é válida; conclui que *p* implica em *q*, quando *q* não necessariamente infere de *p*; salta injustificadamente uma inferência lógica, isto é, declarar que *q* infere de *p* sem fornecer a sequência necessária de argumentos que conduzam de *p* a *q* ou fornece argumentos errôneos; e/ou utiliza dos quantificadores lógicos tais como “todo”, “existem” ou “finalmente” em lugares inapropriados;
- teorema ou definição distorcida: se refere a casos nos quais o estudante cita imprecisamente uma definição, teorema ou fórmula reconhecida; aplica um teorema fora de suas condições. Por exemplo, ao se aplicar a propriedade distributiva em uma função ou operação não distributiva;
- solução não verificada: situações nas quais o estudante apresenta boas argumentações, porém a solução encontrada não é a solicitada pelo problema;
- erro técnico: categoria que agrega respostas nas quais o estudante apresenta erros aritméticos; não extrai corretamente dados de tabelas; apresenta erros na manipulação de símbolos algébricos elementares; e/ou apresenta erros a execução de algoritmos.

No quadro da Figura 8, destaca-se, de modo sucinto, a categorização elaborada pelos autores.

Figura 8 – Modelo para categorização de erros cometidos por estudantes

CATEGORIA	DESCRITOR
Uso incorreto dos dados	Erros que apresentam um distanciamento entre as informações apresentadas no problema e o tratamento dado a essas informações.
Linguagem mal interpretada	Erros na transição de informações matemáticas de uma linguagem para outra.
Inferência lógica inválida	Inclui erros gerados a partir de interpretações inadequadas do problema e de informações atribuídas ao mesmo, configurando um raciocínio invalidado em relação ao conhecimento matemático em que se está trabalhando.
Teorema ou definição distorcida	Erros cometidos a partir da distorção de teoremas, definições ou princípios matemáticos necessários.
Solução não verificada	Refere-se aos erros que, apesar das etapas de raciocínio matemático estarem corretas, a solução se apresenta inadequada.
Erro técnico	Erros de cunho instrumental, aqueles cometidos a partir da extração de informações de tabelas, manipulação de símbolos algébricos ou de execução de algoritmos.

Fonte: Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987).

Esse modelo teórico permite através de suas categorias e descritores avaliar erros apresentados em produções de estudantes. Entende-se que, independente da visão teórica utilizada para analisar os erros cometidos, a emergência dos erros decorre de processos lógicos-matemáticos elaborados pelos estudantes ao longo de sua aprendizagem (MOVSHOVITZ-HADAR; ZASLAVSKY; INBAR, 1987), dos quais podem emergir interpretações que são consideradas adequadas ou não na perspectiva educacional. Além disso, embora esse modelo tenha constituído a partir de erros de estudantes do Ensino Médio, considera-se, com base em Pereira Filho, Kaiber e Lélis (2012), que tal perspectiva possa ser ampliada para estudos do nível Superior. Também, pelo motivo de que erros ocorrem de modo transversal nos processos de ensino e aprendizagem de todos os níveis de ensino (RICO, 1995; CURY, 2008)

Tendo-se abordado aspectos referentes ao modelo teórico de análise de erros que é usado nesta investigação, o capítulo da seção a seguir trará questões que se referem a utilização da monitoria *online* enquanto proposta de apoio pedagógico a acadêmicos de cursos de nível Superior em que se faz presente componentes curriculares de Cálculo Diferencial e Integral.

3 MONITORIA *ONLINE* COMO ESPAÇO DE APOIO PEDAGÓGICO

> *As mudanças ocorridas na maneira de tratar a informação, nas últimas décadas, nos mostram a necessidade permanente de tornar a interação com os computadores tão natural quanto o foi, nas décadas passadas, a manipulação do lápis ou caneta (BARUFI, 1999, p. 164).*

A fala de Barufi, destacada acima, representa o modo como se encara o uso das tecnologias na aplicação dessa investigação: os meios digitais utilizados não são apontados como ferramentas diferenciadas, uma vez que se entende que tanto as mídias quanto a rede social escolhida são potencialmente conhecidas pelos participantes. Nesse contexto, a quebra do padrão está justamente na mudança de perspectiva sobre o uso do *Facebook*, tanto pela pesquisadora quanto pelos participantes.

A partir dessa reflexão inicial apresenta-se, nesse capítulo, ideias relacionadas à utilização do *Facebook* como um potencial Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA) que possibilite ampliar o ensino e aprendizagem da Matemática, focando, especificamente, no estudo do Cálculo Diferencial e Integral.

A base teórica apresentada aqui se constitui na percepção de compreender sobre o uso potencial de redes sociais, mais especificamente o *Facebook* como AVA, e o uso da monitoria *online* como recurso didático complementar e de apoio pedagógico, que vise a aprendizagem colaborativa de conceitos do Cálculo Diferencial e Integral. Além disso, destaca-se a ideia das ferramentas existentes nesse Ambiente Virtual que permitem o compartilhamento de áudio, vídeo e escrita, configurando-se potenciais instrumentos para auxiliar na comunicação e compartilhamento de ideias inerentes a discussões sobre conceitos do Cálculo Diferencial e Integral. A partir desse aspecto, as seções que seguem apresentam ideias sobre trabalhos que abordaram essa temática, bem como trabalhos que trazem uma visão acerca das ferramentas do *Facebook* enquanto potencial AVA para os processos de ensino e aprendizagem da Matemática.

3.1 UM PANORAMA DE INVESTIGAÇÕES SOBRE MONITORIA *ONLINE* DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

O proposito desta seção é apresentar um panorama sobre investigações que buscaram trabalhar a ideia de monitorias *online* no estudo do Cálculo Diferencial e Integral. Para tanto, realizou-se uma busca por investigações com a referida temática nos últimos 15 anos nos seguintes repositórios: Google Acadêmico; Portal de periódicos, dissertações e teses da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES); Repositório da

Universidade Estadual de São Paulo (UNESP); repositório da Pontifícia Católica de São Paulo (PUC-SP) e no Banco Digital de Teses e Dissertações (BDTD).

Relacionados à temática encontraram-se seis trabalhos, dos quais quatro se referiram a artigos acadêmicos publicados em congressos ou revistas, um referente a uma dissertação de mestrado e um referente a uma tese de doutorado.

Um dos primeiros trabalhos encontrados é o de Silva et al. (2005), que discorre sobre a ideia de aplicar uma disciplina de Cálculo Diferencial e Integral numa modalidade à distância para um curso de Ciências da Computação. O foco principal da investigação dos autores foi buscar possíveis contribuições que o ensino complementar à distância pudesse proporcionar no desenvolvimento da aprendizagem do Cálculo, olhando para que tipo de trabalho seria eficaz nesse tipo de proposta, se é possível constituir um ambiente colaborativo para discussão dos conhecimentos do Cálculo e como que isso poderia ocorrer nesse dado ambiente.

Segundo os autores, a busca foi por encontrar e reduzir as dificuldades de Cálculo que muitos alunos apresentam ao estudar as ideias primordiais do Cálculo, como limites, derivação, séries e integrais. É apontado pelos autores que as principais dificuldades na aprendizagem do Cálculo iniciam logo nos primeiros anos do Ensino Médio, pois é quando o aluno passa por uma forte transição entre o tratamento e procedimentos com conjuntos de uma forma universal para uma ideia funcional (SILVA et al., 2005). Essa transição, por conta dos poucos recursos de tempo e tecnológicos apresentados ao aluno do Ensino Médio, podem apontar uma lacuna de dificuldade do conhecimento abordado (SILVA et al. 2005). Por exemplo, é necessário, muitas vezes, que os alunos tenham tempo para abstrair os conhecimentos que envolvem o uso de operações com intervalos de funções e operações entre conjuntos numéricos, o que, por vezes, não ocorre, pois o professor do Ensino Médio possui tempo limitado para dar conta de ensinar todos os conteúdos, restando ainda menos tempo para os alunos assimilarem tais conhecimentos (SILVA et al. 2005).

Basicamente a ideia da investigação dos autores se estrutura em seis fases de execução:

- Fase 1 – em que se refere ao planejamento geral do projeto, determinando-se os objetivos, tempo e recursos disponíveis;
- Fase 2 – que se referiu a um aprofundamento do conteúdo com materiais de referência e especialistas na área de Ensino de Cálculo e uso de Tecnologias em Informação e Comunicação (TIC), bem como a definição dos conteúdos do projeto (reta tangente);
- Fase 3 – em que foi realizado o planejamento instrucional a partir da análise de aspectos pedagógicos de planos curriculares de componentes de Cálculo, observando os elementos que envolvem os tópicos abordados, as metodologias e sistemas de avaliação;

- Fase 4 – que contemplou o desenvolvimento e produção dos materiais selecionados com base na fase anterior, a fim de se elaborar artes gráficas que possam representar os conceitos retirados do texto, envolvendo atividades para que os alunos as resolvessem com as próprias ideias e convicções, envolvendo *softwares* como o *AllPlot* para a representação gráfica do conteúdo abordado, e por fim uma ideia da utilização de vídeo aulas que abordassem o assunto trabalhado;
- Fase 5 – em que a eficácia das ideias empregadas no projeto foi verificada, olhando para a qualidade técnica e matemática das representações gráficas dos conceitos e sua mobilidade virtual. Essas questões possibilitaram, também, a melhoria significativa do uso dos materiais e da interface até que se alcançasse um ideal desejado;
- Fase 6 – se consistiu na elaboração e execução de um questionário aos alunos participantes da investigação, a fim de se verificar a efetividade da proposta e o interesse dos alunos em acompanhar um estudo sobre Cálculo Diferencial e Integral, via *online*.

Por fim, Silva et al. (2005) apontam as informações consideradas relevantes sobre o uso e manutenção do estudo de Cálculo via *online*, tal como foi levantado pelos participantes da investigação no questionário da fase 6.

Sobre o local de acesso, os alunos destacaram como importante os diversos locais geográficos que os materiais *online* puderam ser acessados, sendo que dos 11 alunos que responderam: 64% afirma ter acessado em casa, 27% no trabalho e 9% na faculdade. Das opiniões sobre a interface gerada para o ambiente: 0% considerou muito boa, 73% boa, 9% apontou para razoável e 18% consideraram ruim. Sobre os conhecimentos sobre o conteúdo de retas tangentes: 0% conhecia muito, 55% conhecia, 45% conhecia pouco e 0% não conhecia.

Sobre as dificuldades dos participantes: 9% apontou que possuía muita dúvida, 82% alguma dúvida e 9% nenhuma dúvida. Apontando para a suficiência dos materiais utilizados no ambiente virtual: 18% considerou que não foi suficiente para sanar suas dúvidas e 82% destacou que foi. Silva et al. (2005) questionam aos participantes, também, qual foi o tipo de visualização do conceito matemático que mais chamou a atenção nos participantes: 9% indicou ser o usual (imagens e texto), 27% apontou sobre as simulações que envolviam os conceitos destacados e 64% achou interessante o uso do vídeo como recurso.

Nas conclusões da investigação, Silva et al. (2005) apontam que as estruturas de ambientes virtuais criados para um trabalho à distância são de extrema importância para que os alunos entendam sua utilidade e que consigam abstrair os conhecimentos que estão sendo apresentados. Além disso, os autores destacam o sentido de infraestrutura em seu entendimento que se refere à existência de todas as necessidades físicas e tecnológicas, digitais ou não, para a existência do curso a distância.

Zanette, Nicoleit E. e Nicoleit G. (2007) buscaram investigar sobre uma ideia para planejar, produzir e organizar material didático para o componente de Cálculo Diferencial e Integral I numa modalidade de Educação a Distância (EaD), visando trabalhar uma ideia de material cooperativo e colaborativo a serem construídos no processo de ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos.

Nesse trabalho os autores destacam algumas considerações sobre a aprendizagem humana enquanto reflexo de constante mudança do cenário educativo. Apontam que as TIC se mostram como ferramenta indispensável ao uso humano, pois elas contemplam muitos dos recursos disponíveis atualmente para comunicar, expressar e informar. Tal questão, segundo os autores, é iminente nas interações que os seres humanos estabelecem com as tecnologias enquanto desenvolvimento do processo de autonomia do pensar humano (ZANETTE; NICOLEIT E.; NICOLEIT G., 2007).

No contexto da Educação, as tecnologias servem como ferramentas de apoio que podem transformar o aprender num processo mais construtivo, possibilitando maior interação, comunicação e produção de conhecimentos e pesquisa, implicando numa ideia do “dar sentido” àquilo que se busca nas redes de comunicações (ZANETTE; NICOLEIT E.; NICOLEIT G., 2007).

Baseando-se nessa ideia do uso das TIC, Zanette, Nicoleit E. e Nicoleit G. (2007) destacam como importante que o professor, principalmente no contexto universitário, tenha condições de compreender os pressupostos teóricos do sócio-interacionismo e construtivismo que envolvem a interação do aluno com as tecnologias digitais. Segundo os autores, enquanto o lado sócio-interacionista se preocupa com as relações sociais e percepções da aprendizagem entre sujeito e objeto de colaboração humana, o construtivismo mostra o ser humano como agente ativo na construção de seus próprios conhecimentos, agindo sobre o objeto e transformando-o a sua necessidade e, por consequência, transformando a si mesmo.

Com tal ideal, os autores apontam que o planejamento a organização de material didático *online* deve preceder alguns elementos importantes, como: a interação em grupo, que deve assumir característica principal da reflexão da aprendizagem e reformulação das ações do sujeito; o professor enquanto investigador, que atua como sujeito comprometido em instigar seus alunos ao pensar nos conhecimentos estudados a partir de variadas técnicas pedagógicas; o planejamento e a organização de materiais, que se baseiam no princípio natural de organização do pensamento humano e do ensino dos conhecimentos matemáticos que envolvem o ensino e aprendizagem da matemática.

Zanette, Nicoleit E. e Nicoleit G. (2007) destacam, nessa ótica, que o trabalho organizado apresenta uma série de vantagens, dentre elas: a produção cognitiva do grupo e suas interações e comunicações; a cooperação na resolução de problemas e tarefas; e a interpretação em diferentes pontos de vista que possibilita a interação e debate mais amplo sobre o tema.

Silva et al. (2005) e Zanette, Nicoleit E. e Nicoleit G. (2007) convergem para a concepção de que os estudos na versão *online* devem estar percebidos num ambiente de sócio comunicação e interação entre os indivíduos, uma vez que isso pode potencializar as discussões que circundam os estudos da aprendizagem dos alunos, oportunizando novos caminhos de reflexão e discussão.

No entanto, Zanette, Nicoleit E. e Nicoleit G. (2007) apontam que o trabalho em grupo pode gerar alguns problemas, tal como a difusão de responsabilidade, a competição, a falta de empenho, o controle de acessos e a sobrecarga de comunicação. Nesse sentido, cabe ao professor, enquanto sujeito mediador do processo comunicativo de aprendizagem dos alunos, intervir com ações e recursos que possibilitem ao grupo um debate o modo com o qual estão aprendendo e debatendo matemática. Nessa questão, um dos recursos que são extremamente essenciais nesse contexto, segundo Zanette, Nicoleit E. e Nicoleit G. (2007), se refere a empregabilidade dos materiais didáticos como construção cooperativa e colaborativa.

Segundo os autores, a ideia de material cooperativo e colaborativo se contempla num processo de produção e edição constante por parte dos professores e dos alunos. No aspecto investigativo central dos autores, destacam uma metodologia que se impulsione da seguinte forma:

- momento 1 – constitui-se na elaboração inicial de problemas e situações que envolvem os conceitos matemáticos a partir dos referenciais bibliográficos indicados no componente de Cálculo Diferencial e Integral;
- momento 2 – produção colaborativa que se refere a uma redação preliminar dos problemas e conceitos regidos pelos professores participantes da construção do material;
- momento 3 – organiza-se como o compartilhamento dos objetos e materiais constituídos pelos professores que sucedem a ideia da construção desse processo num ambiente virtual;

- momento 4 – inserção do material constituído num ambiente virtual de aprendizagem que, busca contar, também, com a colaboração dos alunos de um componente de Cálculo sobre as temáticas apontadas.

Segundo os autores, a partir desses momentos investigativos constitui-se um material final que é posto num AVA, cujos acadêmicos possuem acesso à versão final criada. Nessa versão final, os próprios alunos podem trazer ideias e discussões por meio de fóruns participativos ou mesmo apresentar a complementação de ideia do conteúdo apresentado.

Um dos exemplos destacados pelos autores se refere a uma ideia dos conceitos que envolvem as transformações trigonométricas. Segundo os autores, os professores no material colaborativo inicial destacaram elementos que envolveram um resgate histórico do conceito matemático, imagens que permitem vislumbrar os conceitos de forma geométrica, os conceitos, definições e teoremas necessários para a abordagem. Este material, então, foi levado, por meio de um AVA, a alunos que cursavam um componente de Cálculo, gerando discussões acerca do material, nas quais os estudantes indicaram possíveis complementações, tais como: o acréscimo de algum vídeo explicativo e a indicação de mais situações que envolvessem aplicações daqueles conhecimentos as áreas de trabalho dos cursos envolvidos em estudo o Cálculo. Esse material retornou aos professores, e os mesmos pensaram nas sugestões, acrescentando-as ao material com um viés pedagógico.

Os autores destacam, como no caso do exercício mencionado, uma possibilidade de potencializar e ampliar os constructos dos materiais disponibilizados por esses professores de forma colaborativa e cooperativa consigo mesmos e com os próprios alunos. Além disso, apontam a possibilidade de construir um ambiente interativo que promove discussões e sugestões acerca de materiais didáticos disponibilizados em ambientes virtuais, de modo a elencar os potenciais dutos do ensino e aprendizagem que os mesmos elevam.

Torres (2007) apresentou uma investigação sobre uma monitoria virtual no *Moodle* como proposta para “reconstruir” os conceitos de Cálculo. A ideia investigativa buscou identificar as deficiências de conteúdos que os alunos ingressantes no Ensino Superior apresentam em relação aos conceitos do nível Médio entendidos como pré-requisitos para estudo do Cálculo. A partir disso, a autora elaborou uma proposta de ações a serem realizadas por professores universitários, com o objetivo de minimizar os índices de reprovação e evasão dos alunos da disciplina de Cálculo iniciais dos cursos de graduação, os quais ocorrem, ainda segundo a autora, devido as recorrentes “faltas” de conhecimento de conteúdos básicos que deveriam ser aprendidos pelos alunos no Ensino Médio.

Para essa proposta, Torres (2007) constituiu, junto a professores de cursos de nível superior que lecionam Cálculo, atividades de recuperação de conteúdos matemáticos, as quais foram inseridas no *Moodle* e, além disso, a ideia da criação de uma Monitoria Virtual para apoio aos alunos com dificuldades de aprendizagem.

A pesquisa de Torres (2007) foi estruturada em duas fases: na primeira buscou-se compreender os fatores que geram a evasão e repetência dos alunos nas disciplinas de Cálculo; e na segunda houve um trabalho sistemático de um professor de Cálculo com os alunos, no sentido de construir os pré-requisitos necessários para a aprendizagem de Cálculo com atividade não presenciais, por meio do ambiente virtual do *Moodle.*

Segundo a autora, o desenvolvimento do projeto ocorreu na plataforma do *Moodle* por ser um recurso que permite a interação por meio de fóruns, *chats*, e tópicos de discussões. Tal questão, na perspectiva da autora, é importante para a construção de uma aprendizagem dinâmica e mutua, necessária para contemplar diferentes visões sobre um tópico matemático e sobre as interpretações que os sujeitos têm sobre os conhecimentos que estão aprendendo. Nessa perspectiva, a ideia da autora vai de encontro às de Silva et al. (2005) quando se aponta como importante que haja, principalmente no que diz respeito a um ambiente virtual, as relações e interações estabelecidas ou criadas entre seres humanos.

Torres (2007) destaca que o *Moodle* é uma plataforma que possibilita a construção de ambientes virtuais de suporte a aprendizagem e aos vários módulos necessários na construção e na produção do conhecimento, promovendo a comunicação, interação e o armazenamento desses dados. Na perspectiva da investigadora, esses recursos da plataforma permitiram ajudar os educandos e o professor a desmistificar e a reconstruir conceitos fundamentais para que o acadêmico consiga desenvolver os conhecimentos de cálculo no âmbito de suas competências e habilidades para lidar com matemática.

Um dos questionamentos que surgiram ao longo da investigação da autora remete as seguintes perguntas: “Como sanar as possíveis dificuldades de aprendizagem em Cálculo? Como devem ser estruturados os ambientes virtuais para trabalho no processo de ensino e aprendizagem?” Em relação à essas questões, a autora aponta que

> [...] é possível recuperar as deficiências conceituais e de pré-requisitos através de um acompanhamento extraclasse e esse deve estar estritamente ligado ao trabalho do professor da disciplina. Todavia, pode ser realizado de maneira virtual, em um ambiente que permita a construção de uma comunidade virtual de aprendizagem, configurado como um espaço para se colocar materiais, promover discussões e reflexões acerca do trabalho, garantindo fácil acesso aos alunos e professores, de maneira simplificada, disponível todos os dias da semana e a qualquer horário (TORRES, 2007, p.71).

Destaca-se, na visão da autora, que os diferentes recursos, principalmente os assíncronos, permitiram desenvolver tarefas que vão além da sala de aula e que se organizam a medida em que o professor media e orienta o processo de discussão para a aprendizagem dos alunos (TORRES, 2007). Nesse intuito, as salas virtuais com uma funcionalidade interacional possuem como foco a renovação de velhos hábitos, antes tidos apenas no sentido geográfico e físico, caracterizando-se como um ambiente promovedor de superação da discussão e da argumentação numa visão compartilhada e formativa do conhecimento.

Segundo Torres (2007) uma Monitoria Virtual depende dos inúmeros recursos que estão dispostos na oferta das tecnologias que a compreendem. Vídeos e áudio são elementos complementares a escrita em língua natural, que se elevam, ainda, com o uso de imagens em linguagem simbólica matemática (TORRES, 2007). A autora destaca, ainda, que "a monitoria virtual permite flexibilidade em termos de horários e locais, evitando o deslocamento dos alunos até a universidade, auxiliando a promover maior interação entre monitor e alunos [...]" (p. 73). De todo modo, é importante destacar que no estudo do Cálculo é necessário que hajam diferentes modos de interação com a escrita, principalmente ao se trabalhar com uma área da matemática que concerne diferentes representações matemáticas. Nesse intuito, o recorrente uso de recursos representativos de um ambiente como o *Moodle* se mostra importante no quesito das transformações e relações necessárias para a comunicação e discussão de ideias matemáticas.

Por fim, Torres (2007) destaca como importante a questão da visualidade do ambiente virtual utilizado. Segundo a autora, de certo modo, o *Moodle* possibilitou uma fácil interação do usuário com o ambiente virtual e com a comunicação dos outros participantes, o que, fortemente, destaca a potencialidade dessa plataforma como objeto para estudo da Matemática e, especificamente, no estudo o Cálculo Diferencial e Integral.

Destaca-se, também, a investigação desenvolvida por Moraes e Gomes, cujos resultados são encontrados em Moraes (2011) e Moraes e Gomes (2014). Nesses trabalhos as autoras apresentam resultados referentes a um estudo de caso, envolvendo a aplicação de uma monitoria virtual voltada a conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral junto a acadêmicos dos cursos de Engenharia das instituições da Sociedade Educacional de Santa Catarina (SOCESC). De acordo com as autoras, o aprimoramento das ferramentas da *internet* e a evolução das TIC trouxeram consigo novas formas de se pensar a EaD, servindo como estímulo para investigações envolvendo o uso de recursos virtuais nos processos de ensino e aprendizagem em diferentes áreas de conhecimento (MORAES, 2011, MORAES; GOMES, 2014).

Foram analisadas as potencialidades de um conjunto de ferramentas virtuais disponíveis no *Lector Live*, uma plataforma de *web* conferência que permite a interação síncrona por meio de compartilhamento de telas *online* e recursos de áudio e vídeo, apontando para possíveis contribuições de uma monitoria virtual no processo de aquisição de conhecimentos relacionados ao Cálculo (MORAES, 2011; MORAES; GOMES, 2014).

Encontra-se, em Moraes e Gomes (2014), uma breve reflexão acerca das elevadas taxas de reprovação, evasão e trancamento de acadêmicos dos cursos de Engenharia na instituição na qual se deu a aplicação da investigação, apontando as dificuldades na aprendizagem de conceitos relacionados ao Cálculo Diferencial e Integral como uma das causas que contribui para tais índices. A partir desse contexto é elaborada a proposta de monitoria virtual de Cálculo, visando oferecer uma forma de mediação pedagógica complementar ao programa de monitoria presencial já oferecido pela instituição, buscando uma redução no número de reprovações a partir do uso do conjunto de funcionalidades oferecidas no *Lector Live* (MORAES; GOMES, 2014).

Segundo Moraes (2011), a organização do projeto de monitoria virtual se deu em quatro as fases:

- a primeira consistiu na definição das ferramentas a serem utilizadas na monitoria virtual, por meio do levantamento de informações e apoio do setor de tecnologia da informação da instituição;
- na segunda ocorreu a capacitação dos monitores em relação à metodologia que seria utilizada durante a monitoria, além da realização de testes das ferramentas selecionadas para aplicação;
- na terceira etapa foi realizada a padronização das listas de exercícios utilizadas nas monitorias e aulas de Cálculo I, nas diferentes instituições da SOCESC, a fim de facilitar a interação entre os participantes;
- na quarta etapa foi realizada ampla divulgação da monitoria virtual, na qual foi apresentado aos estudantes um tutorial para utilização das ferramentas virtuais escolhidas.

O acesso à monitoria virtual era dado mediante convite, enviado por *e-mail* aos estudantes matriculados na disciplina de Cálculo I, no qual eram disponibilizados os *links* para instalação do *Lector Live* e demais programas necessários (MORAES, 2011). As interações ocorriam em horários pré-determinados, num total de 24 horas semanais, das quais 16 horas eram distribuídas ao longo dos dias úteis (variando ao longo dos semestres) e as demais, aos sábados (MORAES, 2011; MORAES; GOMES, 2014). Os monitores interagiam com os alunos por meio do compartilhamento de telas, disponibilizando a resolução de exercícios, além do uso de *chat* e voz. Os alunos, por sua vez, interagiam majoritariamente por meio de *chat*, havendo, também, a opção do uso do microfone, liberada pelo monitor quando haviam poucos estudantes conectados (MORAES; GOMES, 2014). As monitorias eram gravadas e enviadas aos participantes, possibilitando que todos acompanhassem a resolução dos exercícios (MORAES, 2011). Além disso, os participantes tinham acesso, em tempo integral, a uma biblioteca na qual eram publicados exercícios adicionais e outros materiais relacionados aos conceitos estudados (MORAES, 2011).

Moraes (2011) apresenta um panorama inicial dos resultados obtidos ao longo da aplicação da investigação, a partir de dados coletados por meio de fichas de ocorrência preenchidas pelos monitores, enquete realizada com os participantes e visitação em aula gravada. Para essa análise, foram utilizados dados coletados ao longo de 30 monitorias, ocorridas no ano de 2011, nas quais foram atendidos 112 estudantes.

As fichas de ocorrência tinham como propósito o registro de eventuais problemas técnicos ocorridos ao longo das monitorias e o controle do número de participantes. Dentre os problemas técnicos ocorridos estão a perda de rede na instituição, problemas na qualidade do som e cabo desconectado (MORAES, 2011). Segundo a autora, todos esses problemas foram contornados, de modo que causaram atraso nos atendimentos, porém não chegaram a inviabilizá-los.

Segundo Moraes (2011), as enquetes tinham por objetivo realizar um levantamento acerca das percepções dos participantes em relação à monitoria virtual. Dentre os resultados apontados pela autora destaca-se que 64% dos alunos não haviam participado dos momentos de interação, acessando apenas as gravações enviadas por *e-mail*, alegando motivos de trabalho e matrícula realizada após o início das atividades, o que acarretou em um atraso no envio dos convites para acesso, uma vez que apenas os alunos matriculados na disciplina de Cálculo I podiam participar do projeto. Em relação ao grupo que participou dos momentos de discussão, tem-se que 94% afirmaram que o projeto está ajudando em seus estudos; 90% disseram que os monitores esclarecem as dúvidas solicitadas (78% dos casos em menos de 48 horas). No que se refere a uma opinião geral sobre a monitoria, a maioria dos participantes classificou como ótimo ou bom (43% e 47%, respectivamente).

Moraes (2011) salienta que uma quantia considerável de acessos às gravações enviadas aos participantes, evidenciando-se o acesso daqueles que, por motivos diversos, não puderam participar das discussões, recorrendo aos recursos disponibilizados para utilização assíncrona.

Nesse ponto, retoma-se a fala de Torres (2007) acerca da importância dos recursos assíncronos, os quais podem vir a ser utilizados como uma extensão da sala de aula, no caso, da monitoria virtual, oportunizando que mesmo aqueles que não estivessem "presentes" nos debates pudessem usufruir dos mesmos, integrando-os ao seu processo de aprendizagem.

Os resultados trazidos por Moraes e Gomes (2014) complementam os de Moraes (2011), tendo em vista que o projeto seguiu sendo aplicado e refinado, alcançando um total de 194 monitorias e 778 estudantes atendidos.

Alguns aspectos se mantiveram, tais como a grande quantia dos alunos que não participavam das discussões, mais uma vez alegando motivos de trabalho, comprovando, novamente, a importância da disponibilização das gravações para consulta posterior. Por outro lado, foram tomadas medidas na busca por minimizar problemas enfrentados anteriormente, como, por exemplo, o adiamento da data de início das atividades, aguardando o período de reajuste de matrícula para evitar o atraso no envio do acesso aos participantes. Além disso, intensificou-se a divulgação da monitoria virtual por meio da exposição de cartaz na sala dos calouros dos cursos de Engenharia, uma vez que, na aplicação anterior, parte dos alunos alegaram não estarem cientes da oferta da monitoria virtual.

Cabe destacar que, segundo Moraes (2011), uma monitoria virtual traz como vantagem a possibilidade de uma explicação em tempo real, sem que haja necessidade do aluno se deslocar até a instituição para obter atendimento. Dessa forma, a autora defende que o tempo que seria gasto no deslocamento poderia ser aproveitado para estudo, seja nos horários de atendimento da monitoria ou utilizando os materiais disponibilizados na biblioteca virtual.

No que se refere aos resultados obtidos em ambos os trabalhos, Moraes e Gomes (2014) apontam que foi percebida uma redução nos índices de reprovação na disciplina de Cálculo I desde o início da aplicação da monitoria virtual, entretanto, destacam que outros programas foram desenvolvidos em paralelo, o que pode ter contribuído para tais resultados. Entende-se que os programas destacados não apresentam um foco conclusivo a investigação, não ficando claros os resultados emergentes da pesquisa realizada.

Almeida (2016) constituiu uma investigação que objetivou investigar o papel das Tecnologias Digitais no ensino da disciplina Cálculo I, oferecida a distância nos cursos de Licenciatura em Matemática da Universidade Aberta do Brasil (UAB). Para tanto, o autor utiliza de uma abordagem metodológica baseada na Teoria Fundamentada nos Dados, na qual o pesquisador constrói uma teoria a partir do desenvolvimento de conceitos, categorias, propriedades e dimensões do conhecimento. Nessa perspectiva, o autor conduziu uma investigação que tomou como fonte de dados os seguintes tópicos: observação no AVA das instituições; entrevistas com professores, tutores e alunos dos cursos avaliados; e análise de documentos institucionais destes cursos.

Os dados produzidos nessa investigação sugerem que as Tecnologias Digitais se constituem como aspectos para uma polidocência compartilhada entre os alunos, tutores e professores que compunham o quadro de estratégias de ensino. O AVA utilizado pelas universidades, em grande maioria o *Moodle*, trazem ferramentas que auxiliam no desenvolvimento da aprendizagem dos alunos, porém o autor destaca a existência das limitações comunicativas que existem nesse modelo de plataforma como, por exemplo, questões relacionadas a possibilidade de uma comunicação simultânea entre alunos, professores e tutores. Apesar disso, o fundo de polidocência entendido pelo autor viabilizou que as aprendizagens dos alunos pudessem ser construídas a partir de outras perspectivas: dos próprios alunos, dos tutores e dos professores da disciplina. Segundo o autor, essas estratégias se baseiam numa visão que contraria a ideia de que o AVA serve, muitas vezes, como um repositório de arquivos e documentos, assumindo uma visão multiorganizacional que, dentro das limitações da plataforma, buscou atender as necessidades e questionamento que ali emergiam.

Almeida (2016) pondera que, apesar da presença de elementos usuais de trabalho para ensino na sala de aula comum, como vídeos conduzindo aulas em quadros ou papeis, as tecnologias constituíram-se como um viés compartilhado de informação, comunicação e adaptação de recursos, os quais possibilitam o aluno uma maior liberdade para o estudo, reflexão e posicionamento sobre os conhecimentos matemáticos ali destacados. O autor coloca que, na constituição de uma teoria de análise para os dados obtidos, é necessário apontar questões vinculadas os potenciais falhas e melhoras no ensino. Nesse sentido, o autor destaca que para o ensino de Cálculo é interessante que se utilize de outras ferramentas digitais que, não somente, coloquem o aluno numa posição receptiva, mas, também, como agente para aprimorar seu próprio desempenho acadêmico.

Por fim, o autor pondera a importância de que as tecnologias ofertem ambientes virtuais atrelados as necessidades que os alunos ao estudarem Cálculo apresentam, utilizando de recursos de imagem, escrita e linguagem matemática necessários para o desenvolvimento do aluno. Além disso, é importante que essas tecnologias objetivem construir um caminho diferente dos métodos usuais da sala de aula, como no caso da polidocência, na qual o aluno consiga perceber o diferencial que as mesmas trazem para seus estudos Matemáticos.

A partir dos trabalhos investigativos descritos nesta seção, apresenta-se no subcapítulo a seguir, com base em investigações, o uso do *Facebook* enquanto possibilidade como AVA.

3.2 *FACEBOOK* COMO AMBIENTE VIRTUAL DE APRENDIZAGEM: RECURSOS DE INTERAÇÃO E COMUNICAÇÃO MATEMÁTICA

A evolução tecnológica promoveu um conjunto de recursos virtuais que, atualmente, é bastante utilizado pela sociedade, principalmente ao se mencionar sobre redes sociais. Segundo Tomaél, Alcará e Di Chiara (2005), as redes sociais representam as ideias de pessoas que unem suas percepções em torno de seus interesses e valores que são compartilhados. Essa concepção, para os autores, consiste na formação de uma rede de informações que se entrelaça e se complementa na convergência de ideários comum aos sujeitos que participam das chamadas "redes". Essas redes podem ser consideradas como um conjunto visões organizadas, ou não, que remetem o entendimento do papel da expressão e comunicação humana, constituindo-se como um conjunto de formulações consistentes de representação das ideias e das percepções dos sujeitos (SILVA, 2012). Na visão de Patrício e Gonçalves (2010), as redes sociais se configuram como uma tendência de compartilhar e partilhar, além de informações, conhecimentos e interações que constitui uma rede de comunicações.

O *Facebook*, enquanto rede social, tem se mostrado uma das tendências mais emergentes nos atuais grupos sociais, configurando-se como uma rede bastante utilizada para manifestar os diferentes e comuns interesses entre os sujeitos (ALLEGRETTI, et al., 2012). As interações, comunicações e conhecimentos dessa rede social emergem a partir de um conjunto de ferramentas e aplicações das mesmas que permitem aos seus usuários vislumbrar sobre as correntes informações específicas ou gerais de assunto comum e globalizado (PATRÍCIO; GONÇALVES, 2010).

Silva e Geller (2014) destacam questões que corroboram a perspectiva de Patrício e Gonçalves (2010). Com base na investigação de Silva e Geller (2014), pode-se dizer que existem algumas tendências de uso das redes sociais para a comunicação, pesquisa, relacionamentos e diversão. Na investigação dos autores, foram apontados dados referentes a questionários respondidos por 1.027 alunos e 65 professores, dos quais, 38 são de Porto Alegre/RS e Região Metropolitana. A pesquisa apontou que cerca de 87% dos alunos utilizavam a rede social do *Facebook*, enquanto 92% dos professores de Porto Alegre/RS e Região Metropolitana ou possuíam perfil na rede social ou a utilizavam de forma frequente. Os dados apontaram, ainda, em relação aos professores, que sobre a finalidade dessa plataforma virtual, que a maioria dos profissionais a utilizava com foco a comunicação, seguida da diversão, relacionamento e, por fim, o uso para pesquisa.

Além do destaque mencionado, os dados da investigação apontaram que 89% dos professores utiliza a rede social com a finalidade de conversas particulares e 63% para conversas profissionais, 76% como fonte de informação, 53% para divulgação de informação e 45% para troca de materiais com seus alunos ou colegas (SILVA; GELLER, 2014). Esses dados indicam que, além da questão relacionada a comunicação e interação entre sujeitos, existe outras potencialidades para o uso dessa plataforma, tal como destacaram sobre o uso para o compartilhamento de materiais que, potencialmente, estão inseridos no âmbito educativo.

Segundo Patrício e Gonçalves (2010), o *Facebook* transformou-se, não só num canal de comunicação e interação entre sujeitos que estejam num meio comum de procurar, partilhar ou aprender sobre determinado assunto, mas, também, constituiu-se como uma oportunidade de expressão da academia de nível superior. Para os autores, constitui-se como uma rede social e ferramenta popular, fácil de utilizar e que muitas vezes não necessita de um desenvolvimento interno para aquisição de conhecimentos para seu entendimento. Pode, inclusive, em relação a um ambiente educacional, configurar-se um espaço para que professores, alunos e funcionários tenham alternativas de se comunicarem e expressarem informação e conhecimento.

O *Facebook*, no sentido de um ambiente comunicativo e de expressão humana, pode apresentar a possibilidade de estruturar-se como um Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA), por constituir um conjunto de interações, informações e conhecimentos que podem ser compartilhados e semeados por um determinado grupo. Na perspectiva mencionada, destaca-se a ideia de AVA segundo Pereira, Schimitt, Dias (2007), na qual se considera que um AVA consiste numa modalidade de mídia que é utilizada para mediar o processo de ensino e aprendizagem à distância.

Essa ideia, segundo os autores, consiste no oferecimento de uma aprendizagem que estabelece, a partir de diferentes recursos educativos de comunicação e interação, um conjunto de práticas que fogem do ambiente geográfico como é usualmente estruturado nas aulas presenciais, que, muitas vezes, é condicionada a um tipo de ensino que pode acabar ficando limitado aos recursos temporais estabelecidos. Os autores destacam, ainda, que a ideia do AVA permite recursos multimodais, assíncronos e variáveis da Educação presencial, constituindo-se a partir de vários elementos e componentes eletrônicos que possibilitam sua complementação e potencialização na eficácia do ensino.

Silva (2012) destaca que um AVA é uma sala de aula *online,* composta por ferramentas decisivas para a construção da interatividade e da aprendizagem, favorecendo a formação de uma rede de conhecimentos que pode ser entendida na ideia de participação colaborativa que conecta os saberes, crenças e ideais de diferentes sujeitos de um mesmo grupo. O autor destaca, ainda, que a potencialidade dessa estrutura, enquanto rede de comunicações, permite que a aprendizagem seja constituída a partir de registros de debates, discussões e comunicações de conceitos e conhecimentos que permitem a constituição dos processos de aprendizagem.

Borba, Malheiros e Amaral (2011), apontam para diferentes formas de interação entre professores e alunos em um AVA, sintetizando-as em três categorias: "um-para-um", "um-para-muitos" e "muitos-para-muitos". Segundo os autores, em uma abordagem "um-para-um", o material a ser utilizado é disponibilizado aos alunos, para estudo individual, e a *internet* é utilizada como fonte de informações, servindo como complemento ao material disponibilizado. Nesse modelo há pouco (ou nenhum) contato com o professor e a avaliação se dá por meio de teste padrão. Uma proposta pautada na abordagem "um-para-muitos" possui características semelhantes às de uma sala de aula presencial, na qual o professor apresenta atividades a serem realizadas pelos estudantes e a interação se dá, principalmente, por meio de perguntas e respostas referentes a esclarecimento de dúvidas. Por fim, em uma abordagem "muitos-para-muitos", a interação ocorre de modo mais intenso, proporcionando um *feedback* mais ágil, considerando que há mais pessoas com acesso às discussões, seja de modo síncrono ou assíncrono.

Com base na ideia dos autores mencionados até aqui, pode-se destacar que um AVA assume um caráter que se baseia na possibilidade de uma construção de aprendizagem mútua entre indivíduos que interagem numa mesma rede de comunicações e informações. Nessa concepção, vê-se a possibilidade da utilização do *Facebook* enquanto meio para um canal de comunicações de aprendizagem e compartilhamento de conhecimentos potencialmente importantes no processo educacional. Destacam-se, nesse sentido, algumas das ferramentas virtuais disponíveis nesse "canal" de comunicação humana, e potencial ambiente de aprendizagem, que viabilizam a interação entre seres humanos e as representações de seus conhecimentos.

O *Facebook* possui um caráter multimodal que viabiliza aos usuários publicações e compartilhamento de informações em forma de textos, imagens e vídeos (BORBA; SILVA; GADANIDIS, 2014). Outro aspecto relevante é sua interface responsiva, que permite o acesso via diferentes dispositivos, tais como de computadores, *notebooks, tablets* e *smartphones*, sem que haja prejuízo ao usuário. Oferece um conjunto de ferramentas virtuais que podem ser entendidas como qualitativamente superiores, quando comparadas aos usuais AVA de processos de estudos, por apresentar um ambiente mais dinâmico e colaborativo entre os usuários (CAVASSANI; ANDRADE, 2015).

Destacam-se, assim, ferramentas as quais se qualificam nesse processo: grupos de usuários, que podem se constituir como ambiente que possibilita comunicação entre diferentes pessoas com um mesmo propósito de estudo; álbuns de fotos, que podem se estruturar como uma “coleção de expressões” para disseminar informação e conhecimento existentes em mídias como o *YouTube*; e postagens e publicações interativas, que podem se modelar como fóruns de participação por meio de postagens que constituem informação mutua e conjunta entre participantes, o que potencialmente eleva a qualificação dessa rede social como instrumento para o desenvolvimento educacional, mais especificamente, no estudo do Cálculo Diferencial e Integral.

A área do Cálculo, em específico, utiliza de diferentes linguagens (algébrica, numérica e geométrica) que requerem um conjunto de conhecimentos e representações bastante articuladas entre si (BARUFI, 1999; REZENDE, 2003). Nesse quesito, a plataforma do *Facebook* satisfaz essas premissas iniciais constituindo-se como um ambiente fortemente capaz de estabelecer vínculo com a Educação Matemática, por meio de símbolos e expressões matemáticas as quais, por exemplo, podem ser expressas através de imagens ou representadas em vídeos de outros veículos de comunicação que aderem vínculo ao *Facebook*, tal como o *YouTube*.

Até aqui foram apresentadas as problematizações e aspectos teóricos que direcionaram o caminho investigativo. No que segue, será apresentado o caminho metodológico da investigação, trazendo um direcionamento sobre como a mesma se constitui enquanto uma pesquisa sobre a utilização do *Facebook* para a implementação de uma monitoria *online* voltada ao estudo do Cálculo Diferencial e Integral.

4 ASPECTOS METODOLÓGICOS

Apresentam-se, neste capítulo, aspectos referentes à organização e descrição dos processos envolvidos no desenvolvimento da investigação. Para tal, retoma-se o objetivo geral, que é **investigar o uso do *Facebook* na constituição e implementação de uma proposta de monitoria *online* de Cálculo Diferencial e Integral de funções de uma variável, em uma Universidade privada da Região Metropolitana de Porto Alegre/RS**, juntamente com os específicos, que são:

- Investigar os aspectos institucionais relacionados ao estudo do Cálculo Diferencial e Integral na Instituição, tomando como referência as Diretrizes Curriculares Nacionais, os Planos de Ensino e livros didáticos indicados.
- Investigar possíveis dificuldades de aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral a partir de uma análise de erros realizada em avaliações dos componentes curriculares denominados Cálculo I e II.
- Implementar um projeto de monitoria *online*, no *Facebook*, junto a acadêmicos que estejam cursando os componentes curriculares Cálculo I e II.

A partir dos objetivos apontados, foram definidos os parâmetros que norteariam o presente estudo, tais como a caracterização da investigação, a definição do *lócus* e dos participantes da pesquisa, além dos instrumentos de pesquisa utilizados junto aos participantes.

Entende-se que a articulação entre os parâmetros mencionados ocorre por meio de uma metodologia de investigação compreendida no âmbito da pesquisa qualitativa, com base na noção apontada por Bogdan e Biklen (1994). Segundo esses autores, a investigação do tipo qualitativa, principalmente no que diz respeito as que são realizadas no contexto educacional, pode ser compreendida com base em cinco aspectos, dos quais pode-se destacar aqueles que estão presentes nesta pesquisa:

- a fonte direta de dados desse tipo de investigação é o ambiente natural, ou seja, é o ambiente em que o pesquisador se insere para obter as informações que desenvolverá em sua investigação;
- esse tipo de investigação é descritiva, o que implica em que os dados são coletados a partir da escrita, das imagens, da fala, da observação e não somente de números;
- o interesse investigativo é maior no processo do que em seus resultados ou produtos, de modo que se concebe a ideia de que a preocupação investigativa deve estar centrada na avaliação e no desenvolvimento do processo e não unicamente em seus resultados;
- a tendência da análise dos dados é indutiva, isto é, a base da análise dos dados não é a

preocupação em confirmar ou refutar hipóteses, mas conduzir a uma melhora potencial para os fins educativos;

- o significado é importância vital na abordagem qualitativa, quer dizer que o entendimento investigativo deve ser dado e interpretado no modo em como o meio compreende as propostas do ensino.

No ambiente educacional, os autores apontam que esse tipo de pesquisa demanda atenção e reflexão ao modo em como se vê o ambiente e em como se reflete sobre os dados coletados, a fim de que se organize e extraia possíveis contribuições para a melhora educacional no caminho percorrido. Além disso, é importante que haja o objetivo em entender como os participantes "reconhecem, percebem e entendem" as modificações e transformações causadas pela investigação (BOGDAN; BIKLEN,1994).

A pesquisa qualitativa possui diferentes ramos de estudo que destacam possibilidades distintas de investigação. Assim destaca-se que no âmbito da pesquisa qualitativa, a presente investigação se constitui em um estudo de caso.

Essa modalidade de pesquisa, de acordo com Yin (2010), parte de uma perspectiva empírica, e tem como finalidade investigar "[...] um fenômeno contemporâneo em profundidade e em seu contexto de vida real, especialmente quando os limites entre o fenômeno e o contexto não são claramente evidentes" (p. 39). Segundo o autor, é uma metodologia de investigação apropriada para o estudo de fenômenos sociais complexos, sejam eles individuais, grupais, sociais ou políticos, no qual a análise englobe fortemente as condições contextuais envolvidas no processo analisado, características tais, que se entende, estão presentes nessa investigação.

Para Lüdke e André (2013), um estudo de caso se refere ao estudo de *um* caso em que se busca investigar sobre algo elementar e específico ou complexo e abstrato (grifo das autoras). As autoras destacam que esses tipos de estudo são delimitados e bem definidos sobre àquilo que se deseja investigar, trazendo elementos que possibilitam descrever e compreender os fenômenos envolvidos na situação. Ainda, esses tipos de investigações podem ser similares a outras, mas ao mesmo tempo acabam sendo diferentes, tendo em vista que de cada novo fenômeno investigado emergem características que diferenciam os casos um a um (LÜDKE; ANDRÉ, 2013).

Com base em Lüdke e André, são definidas algumas características fundamentais sobre pesquisas que trabalham com um estudo de caso, as quais envolvem os seguintes elementos:

- descoberta, pois mesmo que o pesquisador esteja envolvido em um processo teórico ele sempre deverá estar atento aos novos elementos que podem surgir no processo investigativo;

- a enfatização de interpretação em um contexto, da qual, para se levar em conta os aspectos que levam a compreensão do objeto, é necessário que se esteja atento às circunstâncias o em que ele ocorre, de modo que seja possível perceber as possibilidades que tragam uma compreensão sobre o problema, as ações, as percepções, os comportamentos e as interações entre os sujeitos e objetos envolvidos;
- a busca por apresentar a realidade de forma completa e profunda, já que o pesquisador busca apresentar múltiplas dimensões sobre uma situação ou problema para destacar os elementos envolvidos em uma visão do todo;
- o uso de variedades de fontes de informação, considerando a necessidade de se apresentar dados que discorrem o mais próximo possível sobre os fatos envolvidos no caso, do qual se mostra a importância de cruzar informações de diferentes momentos e óticas de coleta de dados;
- a revelação da experiência vicária que permite generalizações naturalistas, considerando a tentativa, a partir do conhecimento empírico, da associação de informações e dados com base no experiencial;
- a apresentação de diferentes e conflitantes pontos de vista presentes numa situação social, pois podem emergir visões e opiniões divergentes entre os participantes de um estudo, além da visão do próprio pesquisador sobre o fenômeno estudado;
- a utilização de uma linguagem e estrutura mais acessível, considerando o movimento da interpretação empírica que pode acabar facilitando a comunicação do que ocorre no processo de estudo.

Definida a metodologia empregada, segue-se para a apresentação das etapas da investigação, as quais organizaram metodologicamente o caminho investigativo, sendo estruturadas tomando como base as fases de um estudo de caso.

4.1 ETAPAS DA INVESTIGAÇÃO

Segundo Lüdke e André (2013), pesquisas que configuram um estudo de caso se organizam em três fases de investigação: (1) exploratória, (2) sistemática em termos de coleta de dados e (3) interpretação sistemática dos dados.

A fase 1 se refere a um planejamento inicial que vai se delineando, qualificando e estruturando a medida em que o estudo ocorre e se desenvolve. Essa é a fase em que questionamentos iniciais são aprofundados, refutados ou mesmo redirecionados a outros pontos de vista que emergem da interpretação do pesquisador a partir de materiais (documentos, livros, artigos...), informações (diálogos, entrevistas, observações...) ou até mesmo da experiência pessoal do proponente da pesquisa, bem como o desenvolvimento e organização dos instrumentos de investigação (LÜDKE; ANDRÉ, 2013).

A fase 2, por sua vez, é classificada por Lüdke e André (2013) como o momento no qual o pesquisador, após realizar suas reflexões iniciais e estabelecer o caminho investigativo do seu estudo, coleta dados de forma sistemática, por meio de instrumentos mais ou menos estruturados ou técnicas variadas, a fim de atingir seu objetivo principal de investigação.

Por fim, de acordo com as autoras, a fase 3 é o momento em que, com base nos dados coletados na fase anterior, se constituem profundas análises as quais são, ainda, intercaladas as análises e reflexões iniciais da investigação que se estruturam na fase 1. É com base nessa etapa que se constitui a parte sólida e concreta de volume de dados e análises que consolida a investigação, tendo por base o envolvimento analítico empregado em toda a estrutura elaborada pelo pesquisador.

Apesar disso, as autoras destacam, também, que embora as fases possam ser definidas o processo de construção da investigação é não linear, pois constantemente há um confronto daquilo que há de teórico e do que envolve o empírico.

Nesse contexto, apresenta-se, no quadro da Figura 9, uma relação das fases do estudo de caso com as etapas utilizadas nessa investigação.

Figura 9 – Etapas da investigação

FASES	ETAPAS	PROCEDIMENTOS REALIZADOS
Fase (1)	**1ª Etapa**	• Estruturação do referencial teórico em relação aos três pilares da investigação: Cálculo Diferencial e Integral, Análise de Erros e *Facebook* enquanto AVA; • Delimitação dos participantes e submissão do projeto de pesquisa ao Comitê de Ética em Pesquisa em Seres Humanos; • Início da elaboração dos Instrumentos de Pesquisa; • Início da elaboração do PMO.
	2ª Etapa	• Aprovação do Projeto de Pesquisa no Comitê de Ética em Pesquisa em Seres Humanos sob o CAAE de nº 59961816.5.0000.5349; • Consolidação dos Instrumentos de Pesquisa; • Análise dos documentos institucionais selecionados: DCN, planos de ensino e bibliografia básica indicada nos planos de ensino analisados.
Fase (2)	**3ª Etapa**	• Coleta e análise das produções dos acadêmicos em avaliações, • Seleção do material de apoio a ser utilizado junto aos participantes; • Consolidação do PMO.
	4ª Etapa	• Aplicação e análise do PMO.
Fase (3)	**5ª Etapa**	• Consolidação das análises referentes aos resultados obtidos nas etapas 2, 3 e 4.

Fonte: a autora.

No que segue, são descritos elementos envolvidos para a produção da investigação, considerando o *lócus*, os participantes, os instrumentos, os apêndices e as questões teóricas que foram utilizadas para coleta dos dados para a produção deste trabalho.

4.2 LÓCUS E PARTICIPANTES

A investigação foi conduzida junto a acadêmicos de cursos das áreas científica e tecnológica da Universidade Luterana do Brasil (ULBRA), uma Instituição privada de Ensino Superior, localizada no município de Canoas, Região Metropolitana de Porto Alegre/RS. Destaca-se que a investigação teve a apreciação do Comitê de Ética em Pesquisa Seres Humanos.

Delimitou-se que a população da pesquisa seria composta por estudantes matriculados nos componentes curriculares denominados Cálculo I e II. A partir de tal restrição, realizou-se levantamento dos cursos oferecidos pela Instituição, buscando identificar quais deles contavam os referidos componentes curriculares e em qual semestre estavam previstos (Figura 10), dando um indicativo quais seriam os potenciais participantes da investigação.

Figura 10 – Cursos com disciplinas de Cálculo e o semestre estimado para cursá-las

CURSO	SEMESTRE	
	CÁLCULO I	CÁLCULO II
Engenharia Ambiental e Sanitária	2º	3º
Engenharia Civil	2º	3º
Engenharia Elétrica	1º	2º
Engenharia Mecânica	2º	3º
Engenharia Mecânica Automotiva	2º	3º
Engenharia Química	1º	2º
Engenharia de Produção	2º	3º
Física (Licenciatura)	2º	3º
Matemática (Licenciatura)	2º	3º
Química (Licenciatura)	2º	3º
Química Industrial	2º	3º

Fonte: Matrizes curriculares da Instituição participante.

De acordo com informações da Coordenação do curso de Licenciatura em Matemática, ao qual está vinculada a oferta das disciplinas de Cálculo, são oferecidas, semestralmente, um quantitativo médio de 18 turmas de Cálculo I e II, cada uma com 50 vagas, o que gera uma população que chega a um total de 900 indivíduos, sendo esta composta por acadêmicos dos cursos mencionados na Figura 10.

A partir dessa realidade, e considerando as distintas etapas da investigação, fez-se necessário estabelecer subconjuntos que representassem esses indivíduos. Nesse contexto, foram previstos dois momentos de interação com os participantes, sendo que cada um deles contou com uma parcela específica de participantes:

- Em um primeiro momento (3ª etapa), na busca por dados que servissem para subsidiar a constituição do PMO, foi realizada análise de erros a partir de um conjunto de 222 provas do grupo de 900 acadêmicos dos cursos da área científica e tecnológica (Matemática, Química, Física e Engenharias) da Universidade Luterana do Brasil que, ao final do segundo semestre de 2016, disponibilizaram suas provas para análise. O quantitativo de provas analisadas foi baseado na tabela de Arkin e Colton apresentada em Gil (2002), na qual é estabelecido o tamanho da amostra para uma população de até 1000 indivíduos, com margem de erro de cinco pontos percentuais para mais ou para menos[17].

- Já no segundo momento (4ª etapa), referente à etapa de aplicação do PMO, tendo como objetivo a busca por dados basicamente descritivos, advindos do estudo de documentos pessoais (produções), observação participante e entrevistas, contou-se com a participação de 15 acadêmicos que, voluntariamente, aceitaram participar da investigação. A definição do número de participantes para a execução do PMO, base para o desenvolvimento da pesquisa, se deu, também, considerando o número de acadêmicos que buscam o programa de monitoria presencial oferecido pela instituição na qual a pesquisa foi aplicada, dado esse obtido junto a Coordenação do Curso de Matemática.

Considerando os diferentes propósitos dos momentos de interação descritos anteriormente e a número de participantes envolvidos na investigação, formada por acadêmicos de diferentes turmas e cursos, entendeu-se necessário estabelecer formas claras para identificá-los.

A fim de especificar de qual momento cada indivíduo participou, buscou-se elaborar uma nomenclatura pertinente, a qual é apresentada a seguir.

- Os participantes do primeiro momento foram denominados por **Tx_Py**, onde: T referiu-se a “turma” e x representa o número da turma, com variação de 1 a 18 (total de turmas), sendo o intervalo entre 1 e 9 referente às turmas de Cálculo I e o intervalo entre 10 e 18 às turmas de Cálculo II; P significa “participante” e y representa o número atribuído ao participante, com variação de 1 a 50 (total de vagas por turma).
- Já os participantes do segundo momento foram denominados por **MOz**, na qual: MO significa “monitoria *online*” e z representa o número atribuído ao participante, com variação entre 1 e 15 (total de participantes do PMO).

---

[17] A utilização de tabela quantitativa para determinação e justificativa da quantidade de provas analisadas deu-se em função de exigência do Comitê de Ética para Pesquisa em Seres Humanos. No entanto, dada a natureza qualitativa da investigação, aponta-se para o uso da saturação empírica como forma de avaliar os dados de forma qualitativa. Segundo Thiry-Cherques (2009), saturar empiricamente significa estabelecer o momento no qual o acréscimo de dados e informações em uma investigação não traz novos elementos a compreensão do fenômeno estudado, caracterizando-se como um critério que possibilita estabelecer uma delimitação ao conjunto de dados analisados.

Uma vez estabelecido o cenário da investigação e caracterizados os participantes, parte-se para a descrição dos procedimentos adotados para a análise dos dados obtidos ao longo das etapas da investigação, os quais serão apresentados na próxima seção.

4.3 PROCEDIMENTOS ADOTADOS PARA A ANÁLISE DOS DADOS

Aqui serão discutidos os aspectos teóricos utilizados para os procedimentos de análise dos dados obtidos na investigação. Para tanto, se ponderam as perspectivas teóricas que envolvem: a Análise de Erros (MOVSHOVITZ-HADAR; ZASLAVSKY; INBAR, 1987), utilizada para análise das produções escritas dos participantes da terceira etapa da investigação; e a Análise Textual Discursiva (MORAES; GALIAZZI, 2011), empregada de modo transversal para análise dos documentos institucionais, as interações entre os participantes e as respostas dadas pelos mesmo em relação ao questionário inicial e a entrevista semiestruturada realizada ao final da aplicação do PMO.

4.3.1 Análise e categorização de Erros

Conforme apontado no quadro da Figura 9, na 3ª etapa da investigação foi realizada uma análise dos erros ocorridos em provas recolhidas junto aos acadêmicos participantes, a qual foi fundamentada no modelo teórico elaborado por Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987)[18]. Com base no que foi discutido anteriormente, tem-se que o referido modelo é composto por seis categorias, denominadas: uso incorreto de dados, linguagem mal interpretada, inferência lógica inválida, definição ou teorema distorcido, solução não verificada e erro técnico. A fim de se retomar o que foi exposto anteriormente, foi elaborado o quadro da Figura 11, no qual são apresentadas as categorias elaboradas pelos autores, juntamente com a descrição de cada uma delas.

[18] O modelo teórico mencionado foi apresentado na seção 2.3 do referencial teórico deste trabalho.

Figura 11 – Categorias elaboradas por Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar para análise de erros

CATEGORIA	DESCRIÇÃO
Uso incorreto dos dados	Esta categoria contempla casos envolvendo discrepância entre os dados apresentados no problema e o tratamento dado a eles. Se refere as respostas nas quais o estudante negligencia informações mencionadas, podendo suprir a falta de tais informações por aspectos que não sejam pertinentes ao fenômeno estudado.
Linguagem mal interpretada	Categoria na qual incluem-se erros que resultam da compreensão inadequada de conceitos matemáticos. Esse tipo de situação se evidencia, por exemplo, em casos nos quais o estudante traduz uma informação dada em linguagem natural em termo matemático ou equação que não a representa ou, então, em casos nos quais símbolos gráficos são interpretados como termos matemáticos e vice-versa.
Inferência lógica inválida	Categoria destinada a erros que resultam de raciocínio falacioso decorrente de inferências equivocadas, ocorridas ao longo do processo de resolução de uma questão, sem necessariamente envolver um conteúdo específico. De acordo com as autoras, nesse contexto, novas informações inválidas são elaboradas a partir de parte de informações ou de informações inferidas anteriormente.
Teorema ou definição distorcida	Essa categoria se refere as situações em que se apresentam erros relacionados a forma como uma regra, teorema, definição ou princípio matemático foram interpretados. Ainda, podem ser aqueles erros que emergem a partir de uma escrita inadequada de um dado conceito matemático que foi utilizado ao longo de uma resolução.
Solução não verificada	Situações de erros nas quais o aluno apresenta na resolução argumentações ou justificativas corretas e relacionadas ao assunto, mas que, ao chegar na solução, conclui algo que não responde o problema ou se mostra incorreto.
Erro técnico	Categoria de cunho instrumental que envolve erros em que o aluno não extrai adequadamente as informações do problema ou aqueles que estão presentes em operações procedimentais, como erros algébricos e aritméticos.

Fonte: Adaptado de Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987).

Com base nos indicadores mencionados, foi organizado um protocolo para análise dos erros ocorridos nas provas coletadas, o qual está disposto no apêndice C. A análise para a qual o protocolo foi utilizado teve como objetivo fazer um levantamento dos erros recorrentes e potenciais dificuldades de aprendizagem dos estudantes de Cálculo como forma embasar a escolha de recursos audiovisuais utilizados como material de apoio junto aos participantes do PMO.

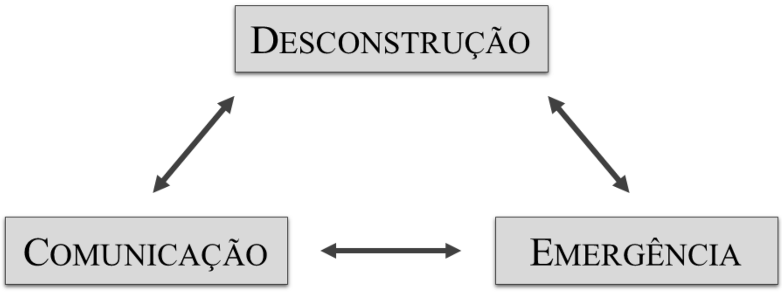
4.3.2 Análise Textual Discursiva e a análise de documentos e discursos

Dadas as características dos dados coletados e os objetivos da pesquisa, elege-se a Análise Textual Discursiva de Moraes e Galiazzi (2011) em razão da sua proposta de emergência das relações e resultados a partir da imersão do pesquisador na leitura e interpretação atribuída aos dados coletados.

Moraes e Galiazzi (2011) destacam que as pesquisas de cunho qualitativo utilizam-se, cada vez mais, de análises textuais, seja de textos pré-existentes (como documentos oficiais, livros, entrevistas e etc.) ou produzidos a partir de entrevistas e observações. Segundo os autores, tais pesquisas não visam testar hipóteses, comprovando-as ou refutando-as ao final da investigação, mas sim aprofundar e compreender fenômenos a partir de uma análise rigorosa e criteriosa. Nesse contexto, a análise textual discursiva “[...] corresponde a uma metodologia de análise de dados e informações de natureza qualitativa com a finalidade de produzir novas compreensões sobre os fenômenos e discursos" (MORAES; GALIAZZI, 2011, p. 7).

Moraes (2003) destaca um ciclo que compõe uma compreensão e interpretação de um texto: **desmontagem dos textos; estabelecimento de relações; captando o novo emergente; um processo auto organizado**, o qual pode ser sintetizado conforme ilustrado na Figura 12.

Figura 12 – Ciclo da Análise Textual Discursiva



Fonte: Moraes e Galiazzi (2011, p. 41).

O processo de **desmontagem dos textos**, também denominado como processo de unitarização, consiste em examinar os materiais escolhidos para análise e seus detalhes, fragmentando-os no sentido de estabelecer unidades constituintes ao fenômeno estudado (MORAES, 2003). É necessário que o pesquisador faça uma imersão na leitura dos textos para interpretar sobre os diversos significados que podem emergir dos chamados significantes (MORES, 2003). Esses significantes são os materiais de referência que permitem exprimir as informações e seus sentidos simbólicos na investigação e é a partir daí que surgem os significados do texto (MOARES; GALLIAZZI, 2011).

Moraes e Galiazzi (2011) apontam que os significados interpretados pelo pesquisador surgem a partir de seus conhecimentos sobre o assunto e sobre outros materiais de referência (referenciais teóricos) que o servem de conhecimento para escrita e análise. Cabe destacar, ainda segundo os autores, que uma leitura textual é sempre feita com base numa perspectiva teórica, seja ela consciente ou não, pois é com base nessa percepção que se encontram os elementos para significação e interpretação do significante.

Um elemento inicial ao processo desmontagem de textos, conforme Moraes (2003), é a noção de *corpus*. Segundo o autor, *corpus* é entendido como o conjunto de documentos que delimita o uso de materiais utilizados na investigação, podendo ser: tanto os textos produzidos essencialmente para a pesquisa, quanto documentos já existentes previamente. Nesse sentido, é necessário, por parte do pesquisador, a definição de um *corpus* de investigação, o qual se configura o primeiro passo antes da desconstrução e unitarização dos textos (MORAES; GALIAZZI, 2011).

A desconstrução e a unitarização dos textos consiste num processo de desmontagem dos textos que busca por elementos que sejam de interesse do pesquisador, os quais possam inferir numa divisão de percepções que servem para a significação sobre os documentos em análise (MORAES, 2003). É, segundo o autor, com base nessa desmontagem que surgem as unidades de análise, também chamadas de **unidades de significado ou de sentido**. Moraes e Galiazzi (2011) apontam que essas unidades podem ser definidas como: unidades *a priori*, aquelas que são definidas com base em elementos pragmatistas que atendem aos objetivos da pesquisa; e unidades emergentes, que surgem a partir da análise, desmontagem e validação da leitura realizada. Esse processo, segundo os autores, consiste na análise rigorosa do material a fim de alinhar um ideário que esteja engajado em produzir meios e fins para a análise do texto.

O **estabelecimento de relações**, segundo Moraes (2003), se inicia num processo de categorização que deve buscar a assimilação entre as unidades defendidas na desmontagem dos textos. Moraes e Galiazzi (2011) apontam que o estabelecimento de relações entre as unidades de análise, vai além de reunir elementos semelhantes por categorias. Destacam que essa etapa deve implicar em refinar as unidades e defini-las com maior precisão, explicitando elementos que permitam retomar a interpretação sobre os dados de análise.

Moraes (2003) entende que essas categorias podem ser constituídas em diferentes níveis, assumindo características iniciais, intermediárias e finais, de modo a constituir, em cada grupo de categorização, categorias mais abrangentes e de menor número. O autor indica duas formas de como se chegam a essas categorias:

> O método dedutivo, um movimento do geral para o particular, implica construir categorias antes mesmo de examinar o *corpus* de textos. As categorias são deduzidas das teorias que servem de fundamento para a pesquisa. São “caixas” (Bardin, 1977), nas quais as unidades de análise serão colocadas ou organizadas. Esses agrupamentos constituem as categorias *a priori*.
> [...] o método indutivo implica construir as categorias com base nas informações contidas no *corpus*. Por um processo de comparação e contrastação constantes entre as unidades de análise, o pesquisador vai organizando conjuntos de elementos semelhantes, geralmente com base em seu conhecimento tácito, conforme descrevem Lincoln e Guba (1985). Esse é um processo essencialmente indutivo, de caminhar do particular ao geral, resultando no que se denomina as categorias emergentes (MORAES, 2003, p. 197, grifos da autora).

Esses dois métodos, segundo Moraes (2003), podem ser combinados num processo de análise misto no qual, assumindo categorias definidas *a priori*, o pesquisador encaminha seus entendimentos para transformações gradativas da análise do *corpus*.

Além dos dois métodos destacados, Moraes e Galiazzi (2011) apontam para um terceiro método: *método intuitivo.* Os autores o concebem como um processo emergente da sistemática complexa de significados, a qual visa uma superação da racionalidade, baseadas em inspirações ou *insights* que decorrem da investigação.

Moraes (2003) destaca que as categorias a serem criadas também podem ser feitas a partir de *propriedades*. Essas propriedades, na perspectiva do autor, são os elementos das categorias que as validam como efetivo e pertinentes de sua relação com a análise textual empregada. Moraes e Galiazzi (2011) indicam que é desejável as seguintes propriedades: **homogeneidade**, a construção e definição a partir de um mesmo princípio; **não exclusão mútua**, deixar de considerar elementos que podem ser percebidos diretamente na construção das categorias; e o **não reducionismo**[19], considerar a relação atribuída a uma questão particular para o conjunto de fatores que envolvem essa questão.

Além das propriedades mencionadas, é necessário que haja um envolvimento da categorização enquanto implicação teórica, ou seja, deve-se estar posto conjunto de elementos e argumentos que sustentam a categorização utilizadas (MORAES, 2003). Nesse caso, aportando a sustentação teórica que embasa a investigação "se no primeiro momento da análise textual se processa uma separação, isolamento e fragmentação de unidades de significado, na categorização, o segundo dá-se no trabalho inverso: estabelecer relações, reunir semelhantes, construir categorias" (MOARES; GALIAZZI, 2011, p. 31), a partir das noções teóricas que direcionam e orientam as futuras análises da investigação.

Por fim, destaca-se o terceiro aspecto da análise textual discursiva que é a **captando o novo emergente**: expressando as compreensões atingidas.

A configuração dessa última etapa do processo textual discursivo qualitativo pode ser interpretada como uma ação metodológica que, a partir do conjunto de documentos, proveniente do *corpus*, e das *categorizações* que emergem do processo de leitura e releitura continua, acarretam na possibilidade de um *metatexto* que descreve as interpretações dos sentidos e significados construídos pelo pesquisador (MORAES, 2003). Para tanto, Moraes e Galiazzi (2011) apontam que há a necessidade de questões eminentes no processo investigativo do pesquisador:

- descrição e interpretação, que se referem a apresentação dos argumentos e justificativas que se baseiam nas categorizações fundamentadas em interlocuções empíricas, argumentos e informações retirados dos textos, materiais produzidos ou no próprio referencial teórico instituído;
- produção textual, compreensão e teorização, que configura a produção do metatexto descritivo-interpretativo enquanto esforço de expressar as intuições e entendimentos

[19] Uma analogia qualitativa: considerando os elementos particulares interpretados num conjunto de objetivos matemáticos significados; inferir que somente essas características interpretadas do conjunto podem ser válidas para todo o universo.

atingidos no processo investigativo, o qual se impregna essencialmente e intensamente do *corpus* de análise;

- construção da validade, que entende a validação da atividade investigativa enquanto processo repleto de elementos confiáveis e rigorosos submetidos a avaliação dos autores do *corpus* analisado ou de pesquisadores com conhecimento no assunto investigativo.

A partir dos elementos que constituem a análise textual discursiva, os resultados culminantes, mais especificamente, os metatextos produzidos e elaborados pelo pesquisador, conforme Moraes e Galiazzi (2011), indicam a reflexão de uma auto-organização investigativa que pressupõem o processo de estudo e aprendizagem para o pesquisador. Segundo os autores, a reflexão da auto-organização está embasada no ciclo da análise textual e acarreta:

- em um movimento de desconstrução, reavaliação, revalidação do *corpus* estabelecido, aquecendo-se em um movimento para caos interpretativo e necessário para atingir os objetivos do pesquisador;
- na emergência do novo, que é a inferência da tentativa do pesquisador investir seus esforços na produção consciente de uma pesquisa científica que objetive contribuir para a sua área;
- no movimento que se intitula “comunicando as compreensões emergentes”, que se refere a construção de elementos comunicativos que concretizam o metatexto e o processo investigativo.

De acordo com Moraes e Galiazzi (2011), é desse processo analítico textual discursivo, no âmbito da investigação qualitativa, que surge um fenômeno metodológico, denominado pelos autores como **um processo de aprendizagem**. Esse processo, ainda segundo os autores, pode potencializar a compreensão do pesquisador acerca do processo investigativo que está desenvolvendo, fazendo com que surjam, de forma natural e racional, as contribuições que ele produz para a comunidade científica.

A fim de se apontar o método empregado na estrutura dessa investigação, tomando como referência a Análise Textual Discursiva de Moraes e Galiazzi (2011), retomam-se os diferentes métodos estipulados pelos autores por meio de síntese apresentada no quadro da Figura 13.

Figura 13 – Síntese dos diferentes métodos empregados na Análise Textual Discursiva

MÉTODO	DESCRIÇÃO
Dedutivo	As categorias são estabelecidas antes mesmo da análise do *corpus*. São deduzidas a partir das teorias que fundamentam a investigação, partindo do geral para o particular → **categorias *a priori***.
Indutivo	O pesquisador estabelece as categorias com base nas unidades de análise constituídas a partir do “*corpus*”. Diferentemente do método dedutivo, o processo de categorização indutivo caminha do particular ao geral → **categorias emergentes**.
Misto	Combina aspectos dos métodos dedutivo e indutivo. As categorias definidas *a priori* (método dedutivo) passam por transformações gradativas, sendo refinadas com base no exame das informações do *corpus* da análise (método indutivo).
Intuitivo	Busca superar a racionalidade linear implícita nos métodos dedutivo e indutivo. Defende a **categorização a partir das inspirações repentinas, ou *insights***, que se apresentam ao pesquisador a partir do seu envolvimento profundo com o fenômeno investigado.

Fonte: Adaptado de Moraes e Galiazzi (2011).

Com base no exposto, entende-se que a organização do presente trabalho se utiliza do método misto, uma vez que os conceitos abordados na primeira etapa da investigação, referentes ao estudo do Cálculo Diferencial e Integral de funções de uma variável, foram divididos em quatro eixos principais: Funções, Limites e Continuidade, Derivadas e Integrais, oriundos dos documentos institucionais verificados, tais como as ementas, os planos de ensino da Instituição e a bibliografia básica mencionada nesses planos – método dedutivo –, enquanto a subdivisão de cada eixo emerge da análise das respostas dos participantes, na qual surgem padrões de respostas, especialmente no que se refere às conjecturas referentes aos erros apresentados, gerando subcategorias – método indutivo.

Uma vez indicados os procedimentos adotados para análise dos dados, foram elaborados os instrumentos de investigação a serem apresentados na próxima seção.

4.4 INSTRUMENTOS DE INVESTIGAÇÃO

A fim de se atingir os objetivos estabelecidos para essa investigação, foram definidos seis instrumentos de pesquisa, sendo quatro deles protocolos para análise, dos quais dois foram utilizados para análise de documentos institucionais (DCN e planos de ensino da Instituição), um protocolo para análise das provas coletadas e o quarto para análise das interações ocorridas ao longo da aplicação do PMO; além de outros dois instrumentos para coleta de dados, a serem utilizados nos momentos de interação junto aos participantes (questionário inicial e entrevista semiestruturada). Esses instrumentos são descritos a seguir:

- Instrumento I – Protocolo de Análise das Diretrizes Curriculares Nacionais (Apêndice A): constituído com o intuito de analisar e identificar os elementos previstos nos documentos oficiais relacionados aos cursos envolvidos com os componentes de Cálculo da Instituição, na busca pelo entendimento acerca dos conhecimentos do Cálculo que devem fazer (ou fazem) parte dos referidos cursos. Buscou-se lançar um olhar sobre: o perfil esperado pelo egresso de cada curso, as competências e habilidades a serem desenvolvidas pelos acadêmicos, bem como as áreas de conhecimento que são abordadas em cada curso.

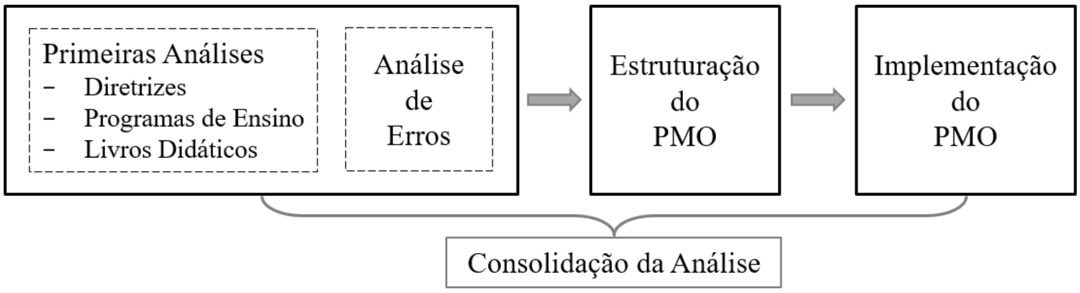
- Instrumento II – Protocolo de Análise dos planos de ensino dos componentes curriculares de Cálculo (Apêndice B): constituído com o objetivo de analisar questões sobre como são direcionadas as aulas dos componentes de Cálculo I e Cálculo II na Instituição na qual se deu a aplicação da investigação. Com o referido protocolo foram analisados elementos relacionados à ementa, objetivos, conteúdos, recursos e metodologia, bem como referencias bibliográficos da Instituição.
- Instrumento III – Protocolo para análise e categorização de erros (Apêndice C): elaborado com base no modelo teórico de Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987), com o objetivo de identificar, categorizar e analisar erros cometidos nas produções de acadêmicos, tanto em avaliações quanto na argumentação dos participantes PMO.
- Instrumento IV – Questionário para levantamento do perfil dos participantes do PMO (Apêndice D): elaborado com o objetivo de coletar de dados que oportunizem um diagnóstico inicial dos participantes do PMO. Composto por perguntas referentes ao curso, ao hábito de estudo e também sobre a familiaridade dos participantes com as mídias selecionadas cuja pesquisa se propõe a investigar.
- Instrumento V – Protocolo de análise das interações (Apêndice E): constituído com o objetivo de possibilitar uma forma de observar as interações que emergiram entre participantes e pesquisadora ao longo da aplicação do PMO. Foi elaborado com a intenção de trazer um olhar para as questões que fizeram emergir as discussões que geraram as interações, destacando: os potenciais erros que fizeram emergir a discussão, os conceitos matemáticos, em relação ao Cálculo, envolvidos, os tipos de representações (aritmética, geométrica e verbal) utilizadas ao longo das discussões e os recursos (fotos, *softwares* e mídias) que foram utilizados durante a comunicação.
- Instrumento VI – Entrevista semiestruturada (Apêndice F): elaborada com o objetivo de investigar aspectos sobre o uso das mídias digitais pelos participantes e se a participação no PMO alterou sua visão no que se refere ao uso de critérios de confiabilidade para escolha do material a ser utilizado. Outro ponto a ser investigado é a opinião dos participantes sobre as ferramentas disponíveis na plataforma utilizada, verificando quais eles já conheciam e se perceberam novas possibilidades a partir do trabalho realizado.

4.5 ESTRUTURA DE APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

A apresentação dos dados obtidos nessa investigação será feita em duas etapas, cada uma delas em um capítulo distinto, sendo o primeiro relacionado à análise dos documentos institucionais (DCN dos cursos de Física, Matemática, Química e Engenharias; planos de ensino dos componentes curriculares de Cálculo Diferencial e Integral de funções de uma variável da Instituição; e a análise dos livros didáticos indicados nos planos de ensino analisados) e o segundo referente articulação entre os dados obtidos na análise de erros produzida a partir das provas coletadas junto ao primeiro grupo de participantes dessa investigação, o material de apoio selecionado a partir da análise de erros realizada e recortes das interações ocorridas entre a pesquisadora e o segundo grupo de participantes ao longo da aplicação do PMO.

Entende-se pertinente, ainda, estabelecer que a condução do processo de investigação não coincide com a condução da apresentação de dados. A análise de erros realizada em tempo prévio ao desenvolvimento e execução do PMO será apresentada junto às análises oriundas da aplicação do mesmo. Assim, no intuito de traçar um panorama de como se deram os caminhos de investigação e da análise dos dados, apresentam-se nas Figuras 14 e 15 esquemas de como os mesmos foram organizados. A Figura 14 se refere aos caminhos que guiaram os processos ao longo da investigação.

Figura 14 – Caminhos da investigação

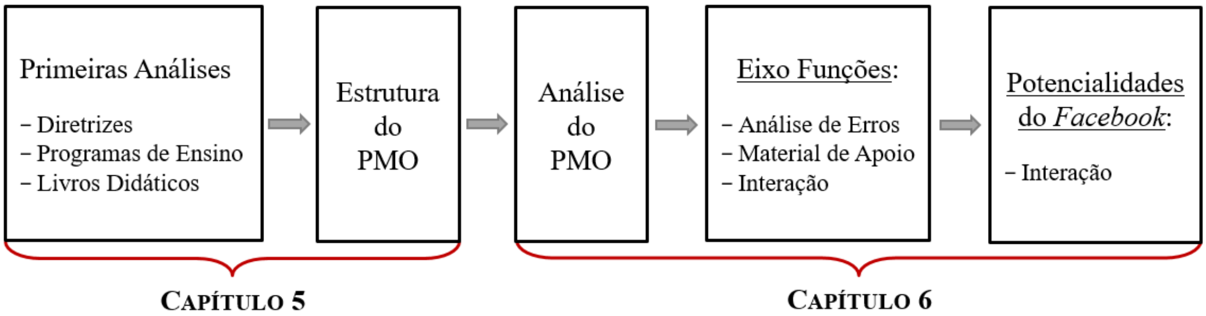


Fonte: a autora.

Conforme indicado no esquema da Figura 14, o ponto de partida da investigação foi o grande bloco que agregou elementos referentes às análises envolvendo documentos institucionais, o qual se subdivide em dois blocos menores, sendo o primeiro relacionado às primeiras análises, nas quais se realizou a verificação das DCN dos cursos de Física, Matemática, Química e Engenharias, dos planos de ensino da Instituição na qual se deu a aplicação da investigação e dos livros didáticos indicados nos planos analisados; o segundo diz respeito à análise de erros realizada no conjunto de provas disponibilizadas pelo primeiro grupo de participantes da pesquisa. Esse conjunto de procedimentos fundamentou as etapas seguintes da investigação, tendo em vista que, a partir dos dados obtidos, foi estruturado e implementado o PMO, junto ao segundo grupo de participantes da investigação.

Os caminhos da apresentação e a consolidação das análises são destacados na Figura 15.

Figura 15 – Caminhos da apresentação das análises



Fonte: a autora.

Embora na condução da investigação a análise de erros tenha sido realizada previamente à organização do PMO, fundamentando-o juntamente com as análises das DCN, dos planos de ensino e dos livros didáticos, na apresentação das análises dos dados a mesma será apresentada ligada ao eixo Funções, o qual será tomado como referência para análise. Além disso, discute-se sobre as potencialidades do Ambiente Virtual no qual se desenvolveu o modelo de monitoria proposto, tomando como base a interação entre a pesquisadora e os participantes MO1 e MO2.

Assim, no capítulo 5 serão apresentadas as denominadas Primeiras Análises, que se referem à análise dos documentos institucionais selecionados para essa investigação, que são: as DCN dos cursos de Física (2001a), Matemática (2002b), Química (2001b) e Engenharia (2002a); os planos de ensino dos componentes curriculares denominados Cálculo I e II, da Instituição na qual se desenvolveu a investigação; e os livros didáticos de Cálculo, indicados como bibliografia básica nos planos de ensino analisados. Além disso, no mesmo capítulo serão apresentados elementos relacionados à Estrutura do PMO, fundamentada a partir dos dados emergentes das análises dos documentos mencionados.

Já no capítulo 6, divide-se a análise em dois momentos. No primeiro, apresenta-se uma articulação entre os diferentes aspectos envolvidos na investigação, partindo da análise de uma questão do eixo de Funções, sob a ótica da Análise de Erros (MOVSHOVITZ-HADAR; ZASLAVSKY; INBAR, 1987), para o levantamento de potenciais dificuldades relacionadas ao estudo do Cálculo. Isso serviu, também, como parâmetro para a seleção de vídeos a serem disponibilizados aos participantes da monitoria *online*. Por fim, destaca-se a análise dos recortes selecionados das interações realizadas ao longo da aplicação do PMO. Já o segundo momento, envolveu a análise de uma interação para discutir as potencialidades do uso do *Facebook* como um ambiente virtual para o estudo do Cálculo Diferencial e Integral.

Uma vez definidos os caminhos da investigação e da análise dos dados, parte-se para o primeiro capítulo no qual se dará a apresentação dos dados referentes à análise dos documentos institucionais selecionados para essa investigação.

5 PRIMEIRAS ANÁLISES E A CONSTITUIÇÃO DO PROJETO MONITORIA *ONLINE*

Neste capítulo são apresentados tópicos relacionados à análise de documentos institucionais, sendo eles: as DCN dos cursos envolvidos na presente investigação (BRASIL, 2001a; 2001b; 2002a; 2002b), os planos de ensino das disciplinas de Cálculo I e II da Instituição na qual se deu a aplicação da pesquisa e os livros didáticos indicados nos planos de ensino analisados. Cabe destacar que, no âmbito dessa investigação, os livros didáticos analisados foram considerados como documentos institucionais, dada sua indicação nos planos de ensino verificados. A análise de tais documentos tem por objetivo traçar um panorama de como se dá o ensino de Cálculo Diferencial e Integral na Instituição, além de subsidiar a estrutura na qual se deu a distribuição do material de apoio no PMO.

5.1 SOBRE AS DIRETRIZES CURRICULARES NACIONAIS

Nesta seção são discutidos aspectos referentes às orientações presentes nas DCN dos cursos de Engenharia, Física, Matemática e Química, buscando definir questões relativas aos objetivos que se buscam para o perfil do egresso, as áreas da Matemática que são abordadas, bem como as competências e habilidades a serem desenvolvidas pelo futuro profissional.

As DCN dos cursos de Bacharelado e Licenciatura têm como propósito orientar, minimamente, os cursos de graduação quanto a sua estrutura para a formação profissional de acadêmicos do nível Superior. Pode-se destacar alguns elementos importantes que são apontados por esses documentos, como: o perfil do egresso dos cursos, as competências e habilidades a serem desenvolvidas nos acadêmicos e as áreas de conhecimento a serem trabalhadas ao longo do curso. Com tal questão, busca-se, no que segue, apresentar brevemente uma análise acerca das diretrizes curriculares dos cursos em que, na instituição, o Cálculo está presente, os quais destacam-se: Engenharias (BRASIL, 2002a), Física Licenciatura (BRASIL, 2001a), Matemática Licenciatura (BRASIL, 2002b) e Química Licenciatura e Bacharelado (BRASIL, 2001b).

O objetivo é destacar, nos aspectos oficiais, os objetivos formativos e estruturais dos cursos da Instituição, buscando um entrelaçamento entre os mesmos que vise, de certo modo, encontrar a potencial conexão entre a necessidade do Cálculo nos referidos cursos e os documentos oficias. Para tal reflexão, toma-se como eixo central os seguintes aspectos: perfil do egresso, competências e habilidade, e áreas de conhecimento.

O perfil do egresso se refere a visão de que “perfil” se deseja que o acadêmico construa ao longo de sua formação e para qual tendência e noção profissional o mesmo deve caminhar ao concluir sua formação. A partir desse entendimento, o quadro da Figura 16 destaca os perfis de egresso dos cursos de Licenciatura, aos quais, ao longo do texto, se discorrerá sobre as respectivas competências e habilidades inerentes aos cursos.

Figura 16 – Perfis de egressos dos cursos de Licenciatura em Física, Matemática e Química

CURSO	PERFIL DO EGRESSO
Física (Licenciatura)	Dedicar-se a formação e à disseminação do saber científico em diferentes instâncias sociais, seja através da atuação no ensino escolar formal, seja através de novas formas de educação científica, como vídeos, *softwares*, ou outros meios de comunicação.
Matemática (Licenciatura)	A visão de seu papel social de educador e capacidade de se inserir em diversas realidades com sensibilidade para interpretar as ações dos educandos. A visão da contribuição que a aprendizagem da Matemática pode oferecer à formação dos indivíduos para o exercício de sua cidadania. A visão de que o conhecimento matemático pode e deve ser acessível a todos, e consciência de seu papel na superação dos preconceitos, traduzidos pela angústia, inércia ou rejeição, que muitas vezes ainda estão presentes no ensino-aprendizagem da disciplina.
Química (Licenciatura)	Formação generalista, mas sólida e abrangente em conteúdo dos diversos campos da Química, preparação adequada à aplicação pedagógica do conhecimento e experiências de Química e de áreas afins na atuação profissional como educador na Educação do Ensino Fundamental e Ensino Médio.

Fonte: (BRASIL, 2001a; 2001b; 2002b)

As DCN específicas dos cursos de Licenciatura em Física (BRASIL, 2001a), Química (BRASIL, 2001b) e Matemática (BRASIL, 2002b), em relação ao perfil do egresso, apontam para a necessidade de que o futuro professor tenha condições de manusear o seu conhecimento científico e tecnológico acerca do ensino e aprendizagem de suas áreas. De modo geral, apontam para elementos, que aqui entende-se cruciais na formação dos futuros professores, que articulam o saber a partir do conhecimento específico e o saber para ensino na Educação Básica.

O documento que orienta os cursos de Licenciatura em Física (BRASIL, 2001a), por exemplo, destaca no perfil do egresso a necessidade de que o futuro professor tenha o manuseio, para a atuação na educação regular, de novas formas de Educação Científica e Tecnológica para o Ensino de Física. Essa percepção, na formação das competências e habilidades do egresso, une um conjunto de elementos que incorporam, segundo as DCN específicas do curso (BRASIL, 2001a), as competências e habilidades em compreender:

- o estudo da física enquanto objeto das ciências tendo condições de escrever, explicar, diagnosticar e desenvolver interpretações físicas e conceitos científicos de suas formulações, dentro de um contexto constantemente atualizado a partir de princípios sociais e históricos;
- de utilizar a linguagem natural e matemática enquanto ferramenta para explicar, elaborar, conduzir, conhecer e compreender modelos, teorias e recursos da Física, Tecnologias Digitais e Tecnologias em geral para a expansão do estudo da área, bem como a disseminação e divulgação cultural;

- de planejar, elaborar e adaptar conhecimentos da Física com estratégias adequadas ao ensino na Educação Básica, tendo foco na formação científica e social de seus alunos;
- ter a experimentação com a utilização da pesquisa científica, com a produção científica e tecnológica sabendo e buscando entender a importância dessas pesquisas nos estudos da sociedade.

Sobre o curso de Licenciatura em Química, as diretrizes (BRASIL, 2001b) destacam a importância de que os diversos conhecimentos da química estejam articulados e atrelados a prática pedagógica do professor, principalmente no que diz respeito à elaboração de experimentações que possibilitem os alunos do Ensino Fundamental e Médio conhecerem e buscarem, positivamente, a importância da área em seu cotidiano.

Nas competências e habilidades formativas, o referido documento destaca a importância de que o futuro professor tenha:

- conhecimento sólido e abrangente na área de Química, tendo conhecimento sobre as técnicas, tecnologias, e teorias epistemológicas que se mostram importantes em seu conhecimento particular e no conhecimento dos alunos da Educação Básica;
- a capacidade de promover pesquisas em torno da área de conhecimento específico promovendo possibilidade de se desenvolver novos conhecimentos que possam ser utilizados nos fins culturais, históricos, políticos e sociais que envolvem e articulam a sociedade contemporânea e os ambientes naturais;
- ter a compreensão de executar e formular trabalhos em equipe que permitam a interdisciplinaridade, transdisciplinaridade e multidisciplinaridade nos contextos curriculares e extracurriculares do ensino e aprendizagem em Química, englobando os elementos que incorporam, principalmente, a crítica, autocritica e reflexão sobre o conhecimento científico;
- conhecer, compreender e saber utilizar as concepções pedagógicas e didáticas que incorporam o estudo de Química na formação do cidadão, do desenvolvimento social, cultural e tecnológico na condição de formação profissional dos cidadãos em formação.

Por fim, sobre os cursos de Licenciatura em Matemática, as DCN específicas (BRASIL, 2002b) apontam que, no conjunto de elementos matemáticos a das questões profissionais que envolvem o professor, é necessário que o licenciado tenha condições de: compreender seu papel enquanto educador e a capacidade de envolver a matemática na realidade de seus alunos; de entender que a aprendizagem Matemática pode oferecer uma formação para o exercício da cidadania; e de que o conhecimento matemático é acessível a todos, possibilitando aos alunos um horizonte de superação dos limites e preconceitos durante o ensino e aprendizagem da matemática.

Essas noções para a formação do egresso estão articuladas sobre um conjunto de competências e habilidades que incorporam:

- à elaboração de propostas de ensino-aprendizagem de Matemática para a Educação Básica, de modo a analisar, selecionar e produzir materiais didáticos e estratégias de ensino que estejam de acordo com a realidade escolar e maturação dos alunos;
- à percepção da prática docente enquanto elemento flexível, dinâmico e de autocrítica que visa contribuir com inovações as propostas pedagógicas curriculares e da dinâmica em sala de aula;
- à concepção de que a matemática é objeto transformador na vida social e estudantil dos alunos, de modo que colabora a construção da cidadania no seu conjunto histórico, social, cultural e político.

Nos cursos de Licenciatura, segundo os referidos documentos mencionados, nota-se o contexto de que a prática docente é objeto principal nos estudos acadêmicos para esse um currículo de formação de professores. Além disso, nota-se a importância dos aspectos científicos, teóricos, culturais, históricos, sociais, e políticos que devem se entrelaçar na formação do contexto da docência para a prática do professor na Educação Básica. Esse perfil institucionalizado, bem como as competências e habilidades a serem desenvolvidas, segundo as DCN específicas (BRASIL, 2001a; 2001b; 2002b), diferem das que se apresentam nos cursos de Bacharelado, pois, de modo técnico, entende-se que as mesmas tenham objetivos profissionais distintos.

As licenciaturas, além do foco tecnológico e científico devem se preocupar com uma formação que contemple o desenvolvimento de competências e habilidades necessárias para formar um profissional capaz de ensinar os conhecimentos específicos transpondo-os adequadamente a um contexto social e cultural de formação do cidadão (BRASIL, 2001a; 2001b; 2002b). Enquanto isso, os cursos de bacharelado possuem uma preocupação específica na formação tecnológica e científica, compreendem abordagens para, por exemplo, desenvolvimento econômico, industrial, pesquisa e etc. (BRASIL 2001b; 2002a). Nesse sentido, o quadro da Figura 17 apresenta o perfil do egresso dos cursos de bacharelado, segundo das DCN específicas para os mesmos (BRASIL, 2001b; 2002a), presentes na instituição de investigação, que são, no caso, os cursos de Química (BRASIL, 2001b) e Engenharias (BRASIL, 2002a).

Figura 17 – Perfil do egressos dos cursos de Bacharelado em Química e Engenharias

CURSO	PERFIL DO EGRESSO
Química (Bacharelado)	Formação generalista, com domínio das técnicas básicas de utilização de laboratórios e equipamentos, com condições de atuar nos campos de atividades socioeconômicas que envolvam as transformações da matéria; direcionando essas transformações, controlando os seus produtos, interpretando criticamente as etapas, efeitos e resultados; aplicando abordagens criativas à solução dos problemas e desenvolvendo novas aplicações e tecnologias.
Engenharias	Uma sólida formação técnica científica e profissional geral que capacite a absorver e desenvolver novas tecnologias, estimulando de modo a estimular a atuação crítica e criativa na identificação e resolução de problemas, considerando os aspectos políticos, econômicos, sociais, ambientais e culturais, com visão ética e humanística, em atendimento às demandas da sociedade.

Fonte: (BRASIL, 2001b; 2002a)

Segundo as DCN específicas dos cursos de bacharelado em Química (BRASIL, 2001b), é necessário que se forme um profissional que tenha uma visão ampliada acerca das técnicas e da utilização de ferramentas de laboratório, sendo, assim, capaz de atuar nos diferentes campos da indústria: socioeconômico, transformações de produtos e materiais, efeitos e resultados, problemáticas industriais e etc. Essa questão requer que as instituições de Ensino Superior deem enfoque e investimento na educação a partir da pesquisa e da prática profissional dos acadêmicos. Entende-se, nesse quesito, a necessidade que sejam trabalhos os conceitos vinculados e articulados a prática profissional dos futuros profissionais químicos, os quais contemplam as habilidade e competências de:

- possuir conhecimento sólido e abrangente na sua área de atuação, conseguindo aplicar seus conhecimentos na prática profissional e adequá-los às diferentes dinâmicas e problemáticas do trabalho;
- de utilizar, escrever, determinar, organizar, escrever, arranjar e interpretar diferentes relações e modelos teóricos que envolvem linguagem Física, Química e Matemática, atrelando-as ao uso de tecnologias e aparatos necessários para a resolução de problemas;
- ser capaz de trabalhar em equipe, tendo facilidade na comunicação de informações, dados, reflexões com foco principal nas atitudes culturais, econômicas e sociais necessárias para o aperfeiçoamento continuo das práticas de trabalho;
- de conseguir ler, interpretar, conjecturar textos científicos e informações pertinentes ao uso social para desenvolvimento econômico nas diferentes e abrangentes áreas sociais, anexando, sempre que possível, os elementos tecnológicos digitais para facilitação em disseminar informação e depurar dados necessários;
- ser capaz de desenvolver trabalhos e projetos para o crescimento social, político e histórico com ênfase em políticas públicas e noções de que o trabalho é cooperativo para o aprimoramento das tecnológicas químicas.

No que se refere aos cursos de Engenharia, as DCN específicas (BRASIL, 2002a) apontam a necessidade de que os cursam de Engenharia formem profissionais de formação técnica e profissional geral de modo a compreenderem e identificarem problemas e suas resoluções, considerando um conjunto de articulações políticas, econômicas, sociais, ambientais e culturais que permitam o profissional atender as demandas sociais. Para tanto, é necessário que o profissional tenha desenvolvido as competências e habilidades, segundo o referido documento, de:

- aplicar conhecimentos matemáticos, científicos, tecnológicos e instrumentais as noções de engenharia, projetando, conduzindo, coordenando, aprimorando, supervisionando projetos, sistemas, experimentos e serviços da área;
- desenvolver, aplicar, conduzir e aprimorar ferramentas técnicas de aplicação à área de engenharia, ao meio ambiente e ao contexto social;
- compreender as possibilidades e viabilidades econômicas para a realização de projetos com o objetivo de assumir posturas críticas, reflexivas e necessárias para o aprimoramento de técnicas e tecnologias.

No delineamento do contexto dos cursos destacados até aqui aponta-se para as áreas de conhecimento a serem desenvolvidas nos cursos mencionados. O quadro da Figura 18 apresenta as áreas de conhecimento dos cursos destacados.

Figura 18 – Áreas de conhecimento a serem desenvolvidas nos cursos analisados

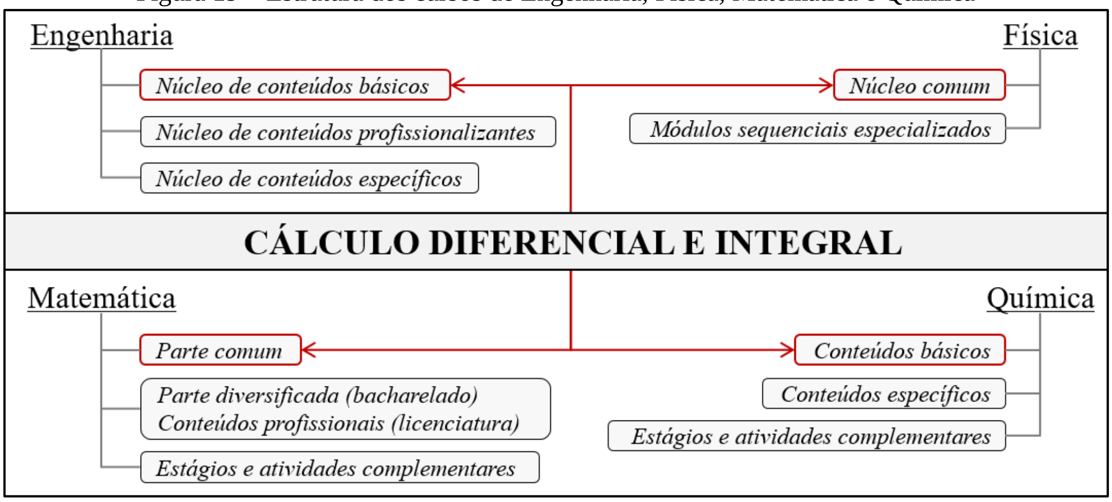
<table>
<tr><th>CURSO</th><th colspan="2">ÁREAS DE CONHECIMENTO</th></tr>
<tr><td>Física (Licenciatura)</td><td colspan="2">Núcleo Comum (50% do currículo): Física geral, Matemática (na qual contemplam-se um conjunto de conhecimentos, dentre os quais cita-se o Cálculo Diferencial e Integral), Física Clássica, Física Moderna e Contemporânea e Disciplinas Complementares.
Núcleo Específico (50% do currículo): Conhecimentos de Física para ensino no Ensino Médio, Conhecimento de Ciências para ensino no Ensino Fundamental, especialização pedagógica.</td></tr>
<tr><td>Matemática (Licenciatura)</td><td colspan="2">Conteúdo da parte comum: Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra Linear, Fundamentos de Análise, Fundamentos de Álgebra, Fundamentos de Geometria, Geometria Analítica; Conteúdos matemáticos presentes na Educação Básica nas áreas de Álgebra, Geometria e Análise; Conteúdos de áreas afins à Matemática, que são fontes originadoras de problemas e campos de aplicação de suas teorias; Conteúdos da Ciência da Educação, da História e Filosofia das Ciências e da Matemática.
Parte diversificada: Conteúdos pedagógicos e profissionalizantes da formação de professores.</td></tr>
<tr><td>Química (Licenciatura)</td><td>Conteúdo Específico: Concepções e práticas pedagógicas para ensino de Química.</td><td rowspan="2">Conteúdos Básicos:
Matemática – Álgebra, Álgebra Linear e Cálculo Diferencial e Integral;
Física – Conhecimentos gerais sobre modelos e concepções teóricas da área;
Química (Teoria e laboratório) – propriedades físico-químicas das substâncias e dos materiais; estrutura atômica e molecular; análise química (métodos químicos e físicos e controle de qualidade analítico); termodinâmica química; cinética química; estudo de compostos orgânicos, organometálicos, compostos de coordenação, macromoléculas e biomoléculas; técnicas básicas de laboratório.</td></tr>
<tr><td>Química (Bacharelado)</td><td>Conteúdo Específico: Concepções e práticas para trabalho com Química</td></tr>
</table>

CURSO	ÁREAS DE CONHECIMENTO
Engenharias	**Núcleo de Conteúdos Básicos** (30% do currículo): Metodologia Científica e Tecnológica, Comunicação e Expressão, Informática, Expressão Gráfica, Matemática, Física, Fenômenos de Transporte, Mecânica dos Sólidos, Eletricidade Aplicada, Química, Ciência e Tecnologia dos Materiais, Administração, Economia; Ciências do Ambiente, Humanidades, Ciências Sociais e Cidadania; **O Núcleo de Conteúdos Profissionais** (15% do currículo) envolve áreas especificas da Engenharia como, por exemplo: Algoritmos e Estruturas de Dados, Bioquímica, Ciência dos Materiais, Circuitos Elétricos, Circuitos Lógicos, Compiladores, Construção Civil e etc.; **O Núcleo de Conteúdos Específicos** se refere ao aprofundamento de conteúdos profissionais conforme o curso de engenharia estabelecido pela Instituição de Ensino Superior.

Fonte: (BRASIL, 2001a; 2001b; 2002a;, 2002b)

Dando foco ao objeto de estudo desta investigação, a partir do exposto na Figura 18, nota-se que, no que se refere aos conteúdos que constituem as chamadas parte comum ou núcleo básico, todos os cursos, com exceção das engenharias, especificam que deve haver o estudo do Cálculo Diferencial e Integral. Em relação às Engenharias, entende-se que o estudo do Cálculo esteja inserido no núcleo de conteúdos básicos, quando se destaca o termo "Matemática", considerando que, segundo Reis (2001), o Cálculo é objeto de estudo das Engenharias. A partir de tais argumentações, busca-se ilustrar, por meio da Figura 19, os núcleos que compõem as estruturas dos cursos envolvidos nessa investigação e especificar em quais deles está incluído o Cálculo Diferencial e Integral.

Figura 19 – Estrutura dos cursos de Engenharia, Física, Matemática e Química



Fonte: a autora.

Uma vez discutidas as orientações das DCN em relação ao estudo do Cálculo Diferencial e Integral nas instituições de Ensino Superior, parte-se para a verificação dos planos de ensino da instituição na qual se dá a aplicação da investigação, buscando-se, por meio da articulação de tais documentos, caracterizar a forma como se dá o ensino do Cálculo nessa Instituição.

5.2 PLANOS DE ENSINO E AS DIRETRIZES CURRICULARES NACIONAIS

Na Instituição na qual se deu a aplicação da pesquisa, o estudo dos conceitos voltados ao Cálculo Diferencial e Integral se dá ao longo de três componentes curriculares distintos, denominados Cálculo I, II e III, cuja responsabilidade é da coordenação do curso de Licenciatura em Matemática. Considerando o objetivo dessa investigação, delimitaram-se os componentes curriculares para ação investigativa, os quais se referem aos Cálculos I e II. Buscando-se traçar um panorama de como se dá o ensino de Cálculo na Instituição, foi realizada a análise dos referidos componentes, a qual foi fundamentada a partir da perspectiva institucional, tomando-se como base os planos de ensino de cada componente, além verificar aspectos relacionados às indicações das DCN.

O quadro da Figura 20 apresenta a carga horária destinada aos componentes curriculares, bem como as ementas e os objetivos dos mesmos.

Figura 20 – Carga horária, ementas e objetivos dos componentes de Cálculo

DESCRITORES	O QUE ARTICULA	
Nome do componente	Cálculo I	Cálculo II
Carga horária	68 horas	68 horas
Ementas	Estudo e compreensão de funções e suas implicações e importância para as áreas exatas e tecnológicas, através da representação gráfica e analítica, aplicando as técnicas de derivação para o desenvolvimento do pensamento lógico na resolução de problemas.	Estudo da representação gráfica, analítica e técnicas de derivação e integração das funções com uma variável, suas aplicações nas áreas exatas e tecnológicas com vistas ao desenvolvimento do pensamento lógico na resolução de problemas.
Objetivos	Geral: Aplicar os conceitos matemáticos na resolução de problemas, através de técnicas analíticas e recursos tecnológicos.	
	Específicos: - identificar e representar graficamente funções; identificar e resolver problemas; - reconhecer o uso do limite e da derivada em diversas aplicações; - aplicar corretamente as técnicas de derivação em situações problemas; utilizar técnicas de derivação de funções para obter informações a respeito de sua variação; - reconhecer o caráter interdisciplinar no estudo do Cálculo Diferencial e Integral.	Específicos: - identificar e resolver problemas; - reconhecer o uso das integrais e derivadas em diversas aplicações; - aplicar corretamente as técnicas de derivação e integração em situações problemas; - utilizar técnicas de integração de funções para o cálculo de áreas e volumes de sólidos de revolução; - reconhecer o caráter interdisciplinar no estudo do Cálculo Diferencial e Integral.

Fonte: a autora.

Pode-se perceber por meio das ementas e dos objetivos dos componentes que o foco dos mesmos está em trazer conceitos matemáticos para serem utilizados na resolução de problemas por meio do pensamento lógico e organizado, com aplicações, *a priori*, no campo científico dos referidos cursos. Esses elementos apontam para a percepção de que o conhecimento matemático ali apresentado está em consonância com a visão de se possibilitar o egresso constituir um perfil atrelado às competências e habilidades que o acadêmico deve possuir para vivenciar as transformações e as diferentes possibilidades de trabalho que exercerá. Pode-se destacar, por exemplo, o que as DCN (BRASIL, 2001a; 2001b; 2002a; 2002b) indicam como conhecimento sólido e abrangente sobre os aspectos científicos e tecnológicos das áreas de conhecimento específico e das habilidades necessárias para a atuação profissional dos acadêmicos.

Destaca-se, também, que o objetivo geral dos componentes, sobre aplicar os conceitos matemáticos a resolução de problemas com recursos tecnológicos e analíticos, atende as DCN (BRASIL, 2001a; 2001b; 2002a; 2002b) no que se refere às competências e habilidades que servem para constituir a autonomia dos profissionais. Entende-se que as lógicas de aplicação e técnicas para resolver problemas traz potenciais contribuições as aptidões aos elementos de crítica e autocrítica sobre o pensamento lógico que o profissional exerce sobre determinadas situações. Além disso, entende-se que a percepção tem a contribuir para a leitura e interpretação de problemas, o que possibilita um entendimento adequado das melhores técnicas e tecnologias a serem utilizadas para sua resolução.

Outro aspecto considerado relevante decorre das palavras descritas como “interdisciplinares” nos planos de ensino da instituição. Entende-se que o conceito de interdisciplinar, como é sugerido nos planos de ensino, possibilite uma visão em torno dos diferentes cursos que estão envolvidos nestes componentes. Tal como é descrito nas DCN (BRASIL, 2001a; 2001b; 2002a; 2002b), em relação às competências e habilidades, é necessário que o acadêmico seja capaz de atuar e trabalhar em grupos e buscar a solução de problemas com olhos ao desenvolvimento político, econômico e cultural abordados nos projetos em que se envolvem. Essa questão leva ao entendimento de que, por exemplo, em projetos que devam ser constituídos em grupos de profissionais de diferentes áreas de conhecimento, há a necessidade de que o egresso tenha habilidades para conseguir atuar em consonância com os demais profissionais participantes, buscando uma articulação de suas competências com as dos outros, de modo a corroborar para a qualificação e implementação do projeto que estejam constituindo.

Para tanto, entende-se, concordando as DCN (BRASIL, 2001a; 2001b; 2002a; 2002b), que é necessário que o acadêmico tenha uma visão pluralizada que envolva diferentes conhecimentos a sua atuação, bem como o trabalho em grupo com profissionais de outras áreas de conhecimento, destacando assim a interdisciplinaridade de sua atuação. Nesse sentido, os componentes de Cálculo, conforme os objetivos dos componentes, tendem a corroborar para que essa competência profissional possa ser desenvolvida pelo acadêmico ao longo de sua formação.

Sobre a metodologia e recursos, os conteúdos programáticos e indicações bibliográficas, o quadro da Figura 21 apresenta o que os planos de ensino destacam.

Figura 21 – Metodologias e recursos, conteúdos programáticos e referências bibliográficas dos planos de ensino.

<table>
<tr><th>DESCRITORES</th><th colspan="2">O QUE ARTICULA</th></tr>
<tr><td>Metodologia e recursos</td><td colspan="2">A disciplina deve ser desenvolvida utilizando aulas expositivas, dialogadas, pesquisa bibliográfica e utilização de recursos tecnológicos como calculadoras gráficas, softwares e a internet.</td></tr>
<tr><td>Conteúdos</td><td>Funções de uma variável: polinomiais, potência, modulares, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas.
Limite de funções reais: definição, interpretação geométrica, limites laterais. Limites no infinito. Cálculo de limites.
Continuidade de funções reais: definição e estudo em diferentes tipos.
Derivadas de funções reais: definição, interpretação geométrica e cinemática. Equações de retas tangentes e normais. Regras de derivação. Regra da Cadeia, derivadas de ordem superior, derivada implícita. Aplicações da derivada: máximos e mínimos relativos e globais, estudo da variação e da concavidade dos gráficos de funções. Construção de gráficos de funções. Resolução de problemas. Regra de L'Hopital.</td><td>Diferencial.
Antiderivada e a primitiva geral.
Integral indefinida: função de integração imediata, composta e substituição simples.
Integral definida: soma de Riemann, Teorema Fundamental do Cálculo e aplicações na Física e no cálculo de áreas e volumes.
Técnicas de Integração: por partes, frações parciais, potências de funções trigonométricas e substituição trigonométrica, funções logaritmo e exponencial natural, derivação logarítmica, funções trigonométricas inversas.</td></tr>
<tr><td>Bibliografias indicadas (básicas)</td><td colspan="2">ANTON, Howard. Cálculo, um novo horizonte. v. 1. 6ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2006.
STEWART, James. Cálculo. v. 1. 7ª ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2014.
THOMAS, George B. Cálculo. v. 1. São Paulo: Addison Wesley, 2005.</td></tr>
</table>

Fonte: a autora.

No que se refere à metodologia e recursos, foi possível perceber que há a predominância de elementos que envolvem o uso de tecnologias e pesquisa científica. De acordo com as DCN (BRASIL, 2001a; 2001b; 2002a; 2002b), é necessário que os cursos das instituições de Ensino Superior possibilitem aos acadêmicos desenvolver competências e habilidades nas áreas especificas, científicas e tecnologias de seus cursos. No que tange a essa possibilidade, percebe-se que os planos de ensino destacam esse olhar a formação dos acadêmicos estando, assim, de acordo com o que os documentos oficiais apontam sobre a necessidade de um perfil articulado as áreas destacadas, possibilitando, minimamente, que o aluno desenvolva essas características nas áreas destacadas.

A descrição dos conteúdos programáticos, juntamente com os livros indicados como material bibliográfico mostra que, de modo geral, contempla-se o estudo de: limites de funções, a derivada e suas aplicações, integrais (definidas e indefinidas) e suas aplicações, funções exponenciais e logarítmicas, funções trigonométricas inversas e hiperbólicas. Além dos conhecimentos relacionados ao que se chama de Pré-Cálculo, envolvendo álgebra, trigonometria e funções a nível de Ensino Médio. Esses conteúdos estão atrelados a visão de que, segundo as DCN (BRASIL, 2001a; 2001b; 2002a; 2002b), devem existir áreas da Matemática a fim de apresentar relações teóricas e aplicáveis sobre como o conhecimento matemático pode se inserir e intervir nas práticas profissionais dos acadêmicos.

A partir desses conteúdos programáticos, foi possível perceber quais os conhecimentos matemáticos são abordados nos componentes curriculares, trazendo uma visão de como os estudos gerados no Projeto de Monitoria *Online* (PMO) deveriam ser conduzidos. Além disso, sobre as indicações bibliográficas, pode-se notar quais os referentes matemáticos deveriam ser utilizados como base de conhecimento matemático para serem utilizados ao longo da implementação do projeto. Assim, os planos de ensino apontaram para os livros Anton (2006), Stewart (2014) e Thomas (2005).

Com base nos elementos percebidos e destacados nesta seção, o subcapítulo a seguir apresenta uma análise dos livros da bibliografia básica indicada nos planos de ensino, que teve por objetivo subsidiar o conhecimento matemático que foi utilizado ao longo das intervenções realizadas no PMO.

5.3 UMA ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS

Esta seção apresenta uma análise dos livros de Cálculo Diferencial e Integral utilizados como respaldo e referência de conhecimento matemático, dando suporte às ações empregadas ao longo do PMO. O critério para seleção dos livros escolhidos foi tomado a partir dos planos de ensino dos componentes curriculares de Cálculo I e II da Instituição, sendo escolhidos os três livros que, segundo os referidos documentos, constituem a bibliografia básica utilizada pelos acadêmicos. Os livros escolhidos se referem ao volume 1 e são: Cálculo: um novo horizonte, 6ª edição, de Howard Anton (2006); Cálculo, 6ª edição, de James Stewart (2014) e Cálculo, 11ª edição, de George B. Thomas (2005). Para facilitar o uso da chamada dos referidos livros ao longo do texto, os mesmos serão denominados por L1, L2 e L3, de acordo com o exposto na Figura 22:

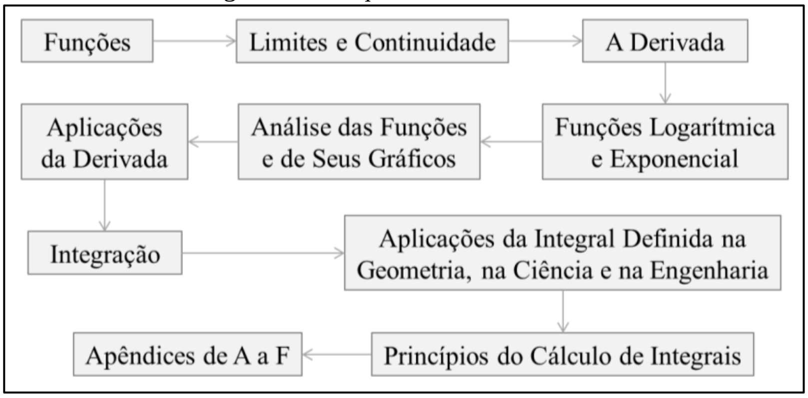
Figura 22 – Denominação atribuída aos livros analisados

CÓDIGO	TÍTULO E AUTOR
L1	Cálculo: um novo horizonte, 6ª edição, de Howard Anton (2006)
L2	Cálculo, 6ª edição, de James Stewart (2014)
L3	Cálculo, 11ª edição, de George B. Thomas (2005)

Fonte: a autora.

A fim de se traçar um panorama geral de como se dá a organização dos livros analisados, toma-se como referência a ideia de sequência temática proposta por Barufi (1999), a partir da qual foram elaboradas as Figuras 23, 24 e 25. Inicialmente, apresenta-se, na Figura 23, a sequência verificada no livro Cálculo: um novo horizonte, de Howard Anton (2006) – L1.

Figura 23 – Sequência temática de L1

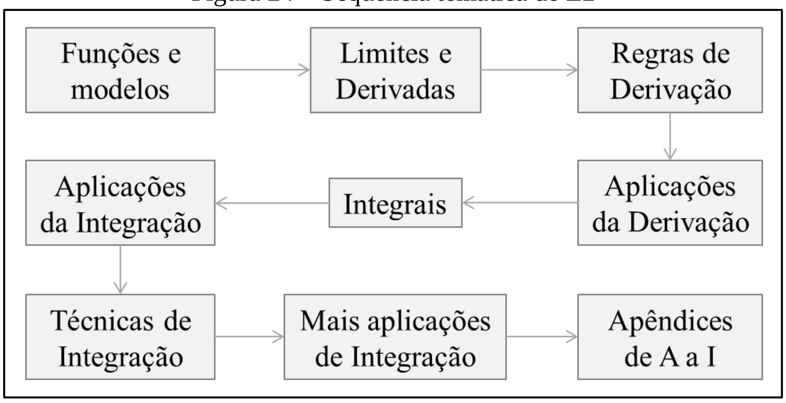


Fonte: a autora.

Conforme exposto, a estruturação dos conteúdos segue o padrão de uma abordagem lógico-formal (BARUFI, 1999), partindo da formalização do conceito de funções, seguindo para a discussão entorno da noção de limites e continudade, a partir das quais se dá a base para o estudo dos conceitos de derivada e integral. Destacam-se ainda, capítulos referentes ao estudo de funções logarítmica e exponencial e análise de funções em geral. Ao final do livro são apresentados apêndices que abordam a revisão de conteúdos tais como números reais, intervalos e desigualdades, além de conteúdos relacionados ao plano cartesiano e à trigonometria.

A sequência temática elaborada a partir da análise do livro Cálculo, de James Stewart (2014) – L2 (Figura 24) – aponta, mais uma vez, para o uso de uma abordagem lógico-formal, uma vez que a ordem de apresentação dos conceitos funções, limites, derivadas e integrais, se aproxima do padrão estabelecido por Cauchy e Weierstrass (REIS, 2001). No entanto, o que difere L2 de L1 é a organização dos conteúdos, tendo em vista que, diferentemente do anterior, no qual limites e derivadas eram estudados em capítulos distintos, o autor opta por uma articulação direta entre esses conceitos, discorrendo sobre derivadas já no capítulo referente ao estudo de limites. Além disso, conteúdos destacados em L1, tais como o estudo das funções logarítmicas e exponenciais, são aobrdados de forma secundária, fazendo parte de capítulos como "Funções e modelos".

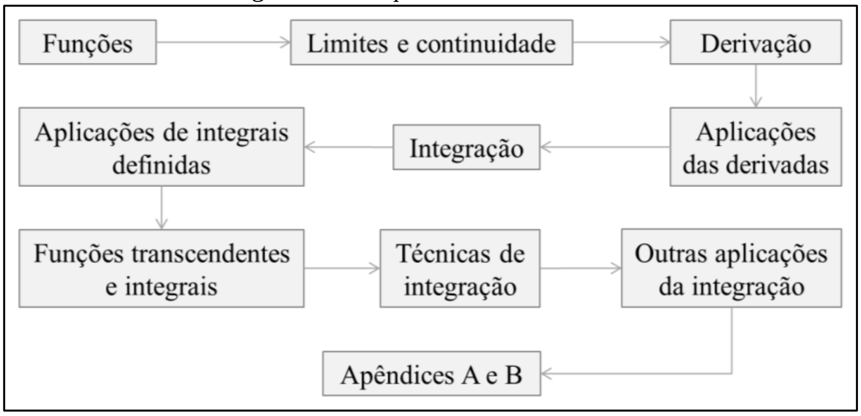
Figura 24 – Sequência temática de L2



Fonte: a autora.

Por fim, a sequência temática referente ao livro Cálculo, de George B. Thomas (2005) – L3 – mostra um padrão semelhante aos verificados em L1 e L2, mais uma vez alinhado à proposta de uma abordagem lógico-formal (Figura 25). A organização dos conceitos segue a ordem estabelecida por Cauchy e Weierstrass, tendo seus primeiros capítulos voltados ao estudo e a formalização dos conceitos de funções e de limites e continuidade, constituindo a base para o estudo dos conceitos de derivadas e integrais.

Figura 25 – Sequência temática de L3



Fonte: a autora.

As análises desses livros foram tomadas a partir de eixos, os quais foram determinados com base nas ideias da Análise Textual Discursiva, de Moraes e Galiazzi (2011). Esses eixos foram considerados a partir dos conhecimentos que são abordados nos componentes curriculares de Cálculo da Instituição em que ocorreu o PMO. Para cada eixo é apresentada análise referente aos três livros mencionados, sendo essa fundamentada em aspectos e critérios que se consideram importantes a serem tomados na abordagem de conhecimentos matemáticos de livros didáticos:

- os conceitos matemáticos apresentados de modo adequado, considerando as definições, proposições, teoremas e demonstrações ou justificativas matemáticas apresentadas;
- a utilização de linguagem está coesa e articulada com os conhecimentos matemáticos que são apresentados;
- a contextualização dos conceitos matemáticos enquanto ferramentas matemáticas para uso em outros conceitos ou para uso em aplicações do mundo físico.

Tendo por base esses delineamentos, no que segue, apresentam-se as análises dos livros de Cálculo.

No eixo de Funções, os três livros de Cálculo apresentam conceitos elementares que buscam trazer alicerce matemático que é utilizado ao longo dos demais eixos. Trazem conceitos que, nota-se, estarem fortemente vinculados ao que se poderia denominar de “Pré-Calculo” por retomar conceitos que sobre funções que são ensinadas no Ensino Médio. Entende-se que, nos três livros, esse eixo temático tem a função de trazer uma base matemática para que o aluno possa prosseguir com a sua aprendizagem na área do Cálculo. Destaca-se, entretanto, que o livro L2 (STEWART, 2014) apresenta, ainda, uma seção de “verificação de conhecimento”, na qual o aluno pode realizar atividades para avaliar se possui domínio sobre conceitos mais básicos, como propriedades de potências e radiciação, para dar seguimento para a seção de “Pré-Cálculo”. Nesse quesito, entende-se que esse livro traga uma abordagem que destaca a importância de se perceber se o aluno de Cálculo possui domínio acentuado sobre procedimentos matemáticos que são utilizados ao longo do curso de Cálculo.

Pode-se destacar, ainda, que isso traz uma possibilidade de aproximação com as diferentes realidades de aprendizagem de diferentes alunos, sejam aqueles que, por proximidade de tempo, recém tiveram contato com os referidos conhecimentos matemáticos ou aqueles que, muitas vezes, iniciam o Ensino Superior depois que se passou tempo da conclusão do Ensino Médio. Entende-se que essa questão possa trazer auxílio ao aluno possa identificar suas dificuldades que antecedem o próprio Cálculo para que ele possa percorrer um caminho de estudo de modo a sanar essas potenciais dificuldades. A Figura 26 destaca, a título de exemplo, o que foi apontado:

Figura 26 – Testes de verificação referentes às noções algébricas

A **TESTES DE VERIFICAÇÃO: ÁLGEBRA**

1. Calcule cada expressão sem usar uma calculadora.
(a) $(-3)^4$ (b) -3^4 (c) 3^{-4}
(d) $\dfrac{5^{23}}{5^{21}}$ (e) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}$ (f) $16^{-3/4}$

2. Simplifique cada expressão. Escreva suas respostas sem expoentes negativos.
(a) $\sqrt{200} - \sqrt{32}$
(b) $(3a^3b^3)(4ab^2)^2$
(c) $\left(\dfrac{3x^{3/2}y^3}{x^2y^{-1/2}}\right)^{-2}$

3. Expanda e simplifique.
(a) $3(x+6)+4(2x-5)$ (b) $(x+3)(4x-5)$
(c) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ (d) $(2x+3)^2$
(e) $(x+2)^3$

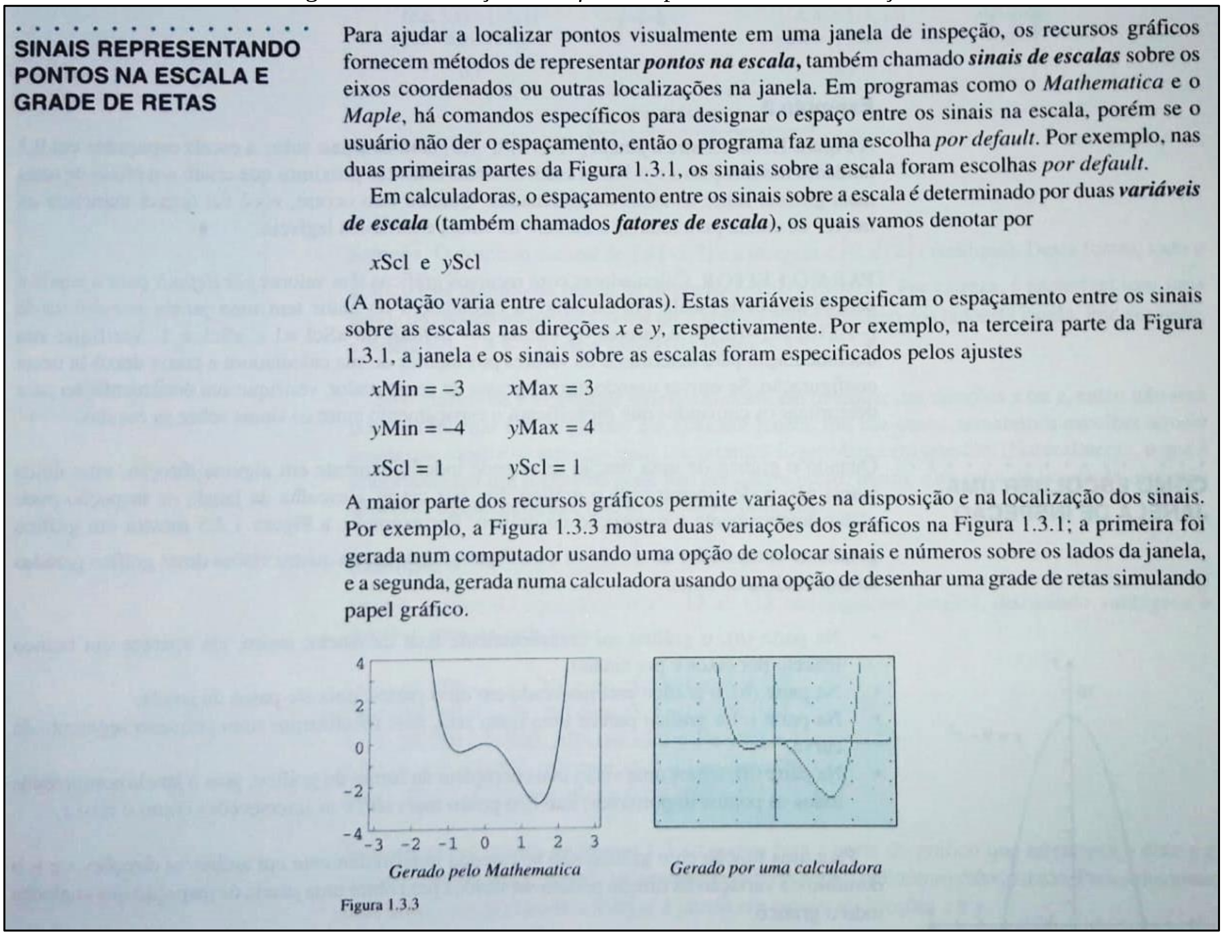
4. Fatore cada expressão.
(a) $4x^2-25$ (b) $2x^2+5x-12$
(c) $x^3-3x^2-4x+12$ (d) x^4+27x
(e) $3x^{3/2}-9x^{1/2}+6x^{-1/2}$ (f) x^3y-4xy

5. Simplifique as expressões racionais.
(a) $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-x-2}$ (b) $\dfrac{2x^2-x-1}{x^2-9}\cdot\dfrac{x+3}{2x+1}$
(c) $\dfrac{x^2}{x^2-4}-\dfrac{x+1}{x+2}$ (d) $\dfrac{\dfrac{y}{x}-\dfrac{x}{y}}{\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}}$

Fonte: Stewart (2014, p. XVII)

Em cada um dos três livros, o eixo de Funções é explorado a partir de conceitos que trazem: a noção de função, a diferenciação entre os conceitos dos diferentes tipos de funções (linear, quadrática, polinomial, exponencial, trigonométricas, por partes e modular), e a aplicação desses conhecimentos em situações que envolvem Física, Matemática e Engenharia. Os livros L1 (ANTON, 2006) e L2 (STEWART, 2014) trazem, ainda, ideias sobre como os conceitos de funções podem ser explorados com uso de tecnologias, trazendo a possibilidade e ideias iniciais da modelagem de equações que representam algum tipo de fenômeno ou que elucidam a ideia do uso desses conceitos com base no referido conceito. A Figura 27 apresenta uma ideia do que se está destacando:

Figura 27 – Indicação de *softwares* para a análise de funções



SINAIS REPRESENTANDO PONTOS NA ESCALA E GRADE DE RETAS

Para ajudar a localizar pontos visualmente em uma janela de inspeção, os recursos gráficos fornecem métodos de representar ***pontos na escala***, também chamado ***sinais de escalas*** sobre os eixos coordenados ou outras localizações na janela. Em programas como o *Mathematica* e o *Maple*, há comandos específicos para designar o espaço entre os sinais na escala, porém se o usuário não der o espaçamento, então o programa faz uma escolha *por default*. Por exemplo, nas duas primeiras partes da Figura 1.3.1, os sinais sobre a escala foram escolhas *por default*.

Em calculadoras, o espaçamento entre os sinais sobre a escala é determinado por duas ***variáveis de escala*** (também chamados ***fatores de escala***), os quais vamos denotar por

xScl e yScl

(A notação varia entre calculadoras). Estas variáveis especificam o espaçamento entre os sinais sobre as escalas nas direções x e y, respectivamente. Por exemplo, na terceira parte da Figura 1.3.1, a janela e os sinais sobre as escalas foram especificados pelos ajustes

xMin = –3 xMax = 3

yMin = –4 yMax = 4

xScl = 1 yScl = 1

A maior parte dos recursos gráficos permite variações na disposição e na localização dos sinais. Por exemplo, a Figura 1.3.3 mostra duas variações dos gráficos na Figura 1.3.1; a primeira foi gerada num computador usando uma opção de colocar sinais e números sobre os lados da janela, e a segunda, gerada numa calculadora usando uma opção de desenhar uma grade de retas simulando papel gráfico.

Gerado pelo Mathematica *Gerado por uma calculadora*

Figura 1.3.3

Fonte: Anton (2006, p. 37).

Sentiu-se falta, nesse quesito, de apresentações de contextualização, no âmbito das aplicações ao mundo físico, da utilização desses conceitos por parte do livro L3 (THOMAS, 2005), pois foi percebida a predominância do trato como os conhecimentos matemáticos na perspectiva intramatemática, deixando a abordagem e relações com questões de aplicação do conhecimento em segundo plano.

Entende-se que todos os livros, no eixo de Funções, fazem uso de linguagem adequada para a apresentação dos conhecimentos matemáticos, articulando as diferentes formas de representação das funções[20] (ANTON, 2006; STEWART, 2014):

- numérica – por meio de tabelas de valores, buscando a análise preliminar do comportamento da função por meio da atribuição de valores à variável independente;
- geométrica – por representações gráficas, "traduzindo" a partir de representações geométricas os dados numéricos, explicitando a natureza dos dados (discretos ou contínuos).
- algébrica – com o uso de fórmulas explícitas e linguagem simbólica, dá outra dimensão às representações numérica e geométrica ao determinar, de forma exata, a natureza dos dados e os intervalos para os quais a função está definida;
- verbal – descrevendo as situações com o uso de língua materna.

A utilização dessas diferentes formas de representação de um mesmo objeto e a articulação das mesmas em conversões (DUVAL, 2011) cumprem o objetivo de, em termos cognitivos, fazer o estudante se apropriar do objeto de estudo. De acordo com Duval (2011), à medida que um mesmo objeto é percebido em diferentes formas de representação, mais o sujeito dele se apropria.

Verificou-se, ainda, a utilização dos conceitos matemáticos enquanto ferramentas de outras áreas de conhecimento e do próprio Cálculo, como a modelagem de uma função para reduzir custo de uma empresa, para calcular a ocorrência de fenômenos repetidos em um determinado ambiente, para calcular o aumento da população de bactérias ou da propagação do som, dentre outros. Apresenta-se a Figura 28 como um exemplo do que está sendo destacado nesse trecho:

[20] Considerando que todos os conceitos abordados num curso de Cálculo tratam, em última análise, das funções, tais representações serão utilizadas em todos os eixos, servindo como uma forma de organização das análises apresentadas.

Figura 28 – Aplicação do conceito de funções na modelagem matemática

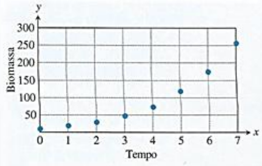


FIGURA 1.49 Biomassa de uma cultura de levedura em função do tempo (Exemplo 8). (Dados de PEARL, R., "The growth of population", *Quart. Rev. Biol.*, v. 2, p. 532-548, 1927.)

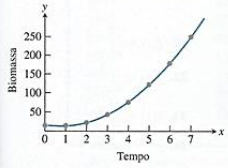


FIGURA 1.50 Ajustando uma curva quadrática aos dados de Pearl, obtemos a equação $y = 6{,}10x^2 - 9{,}28x + 16{,}43$ e a predição $y(17) = 1.622{,}65$ (Exemplo 8).

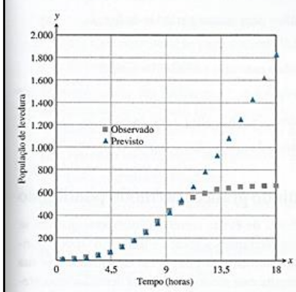


FIGURA 1.51 O restante dos dados de Pearl (Exemplo 8).

EXEMPLO 8 Encontrando uma curva para predizer níveis populacionais

Talvez queiramos predizer o tamanho futuro de uma população, como o número de trutas ou bagres vivendo em uma propriedade onde se criam peixes. A Figura 1.49 mostra um gráfico de dispersão dos dados coletados por R. Pearl para uma cultura de células de levedura (medidas como **biomassa**) crescendo em um meio de cultura ao longo do tempo (medido em horas).

Em um sistema de coordenadas cartesianas, os pontos parecem estar em uma curva lisa com uma tendência ascendente. Podemos tentar captar essa tendência ajustando um polinômio (por exemplo, uma curva quadrática $y = ax^2 + bx + c$), uma curva de potência ($y = ax^b$) ou uma curva exponencial ($y = ae^{bx}$). A Figura 1.50 mostra o resultado de uma calculadora para ajustar um modelo quadrático.

O modelo quadrático $y = 6{,}10x^2 - 9{,}28x + 16{,}43$ parece ajustar-se razoavelmente bem aos dados coletados (Figura 1.50). Usando esse modelo, predizemos que, depois de 17 horas, a população será $y(17) = 1.622{,}65$. Vamos examinar melhor os dados de Pearl para verificar se nosso modelo quadrático continua a ser uma boa escolha.

Na Figura 1.51, apresentamos todos os dados de Pearl. Agora você vê que a predição de $y(17) = 1.622{,}65$ superestima exageradamente a população observada de 659,6. Por que o modelo quadrático não conseguiu predizer um valor mais exato?

O problema está no perigo de fazer previsões além do conjunto de dados usados para construir o modelo empírico. (A faixa de dados que permitiu criar nosso modelo foi $0 \leq x \leq 7$.) Esse tipo de *extrapolação* é especialmente perigoso quando o modelo escolhido não está baseado em algum fundamento racional que sugira a forma do modelo. Em nosso exemplo, por que esperaríamos uma função quadrática como base do crescimento populacional? Por que não uma função exponencial? Em vista disso, como então podemos predizer os valores futuros? Geralmente, o cálculo pode ajudar e, no Capítulo 9, vamos utilizá-lo para fazer a modelagem do crescimento populacional.

Fonte: Thomas (2005, p. 35).

De modo geral, esse eixo, nos três livros, destaca elementos importantes e necessários para o estudo de Cálculo, de modo a corroborar para conhecimentos básicos, como o trabalho com funções, primordiais para que os demais eixos possam corroborar para a aprendizagem do aluno de Cálculo.

No eixo de Limites e Continuidades, os três livros apresentam um conjunto de conhecimentos matemáticos que partem do estudo de limites para definir um grupo de problemas que é de estudo do Cálculo, tal como: a continuidade de funções em um dado ponto, o estudo de assíntotas verticais e horizontais, as relações e propriedades com operações de funções continuas, tal como a soma, diferença, produto, multiplicação por constantes, quocientes, potenciações e composição de funções, com limites e com funções contínuas. Além disso, os livros trazem consigo, a partir da noção de limites, as ideias iniciais de derivada, a partir da demonstração do conceito como um limite convergente a um único ponto. Apresentam linguagens consideradas adequadas para o referido estudo, com elementos algébricos, numéricos e de linguagem natural, e abordam a aplicação desses conceitos enquanto ferramentas matemáticas utilizadas para outras ideias matemáticas iniciais, como a natureza da continuidade de funções, sequências convergentes ou divergentes e noção de derivada. A Figura 29 ilustra, de forma parcial, os aspectos mencionados.

Figura 29 – Diferentes representações do conceito de limites

Exemplo 7

Ache

(a) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-6x+9}{x-3}$ (b) $\lim_{x\to -4} \frac{2x+8}{x^2+x-12}$

Solução(a). O limite do numerador e do denominador é zero quando x se aproxima de 3; logo, há um fator comum de $x - 3$. Procedemos como a seguir.

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-6x+9}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)^2}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x-3) = 0$$

Solução(b). O limite do numerador e do denominador é zero quando x se aproxima de -4; logo, há um fator comum de $x-(-4) = x + 4$. Procedemos como a seguir:

$$\lim_{x\to -4} \frac{2x+8}{x^2+x-12} = \lim_{x\to -4} \frac{2(x+4)}{(x+4)(x-3)} = \lim_{x\to -4} \frac{2}{x-3} = -\frac{2}{7}$$ ♦

Se o limite do denominador for zero, porém não o do numerador, então há três possibilidades para o limite da função racional quando $x \to a$:

- O limite poderá ser $+\infty$.
- O limite poderá ser $-\infty$.
- O limite poderá ser $+\infty$ de um lado e $-\infty$ do outro.

A Figura 2.2.3 ilustra isto graficamente para funções da forma $1/(x-a)$, $1/(x-a)^2$, e $-1/(x-a)^2$.

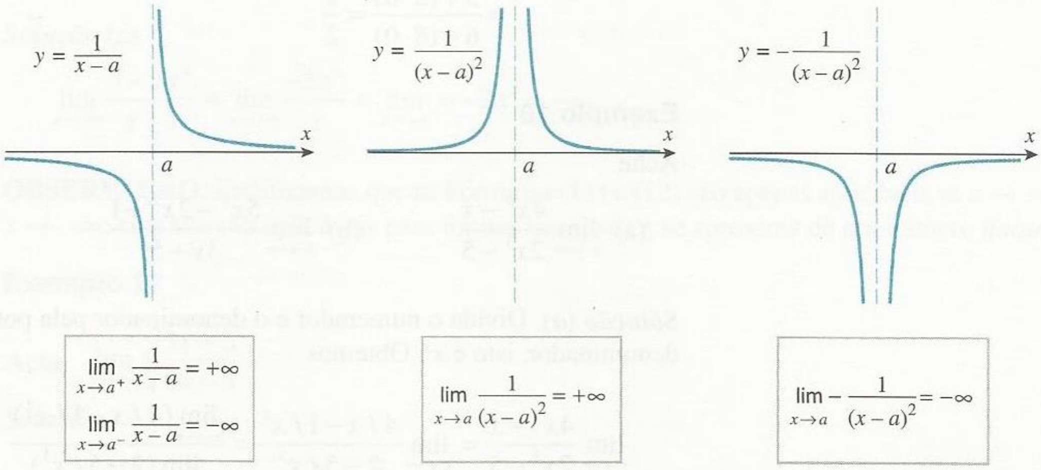


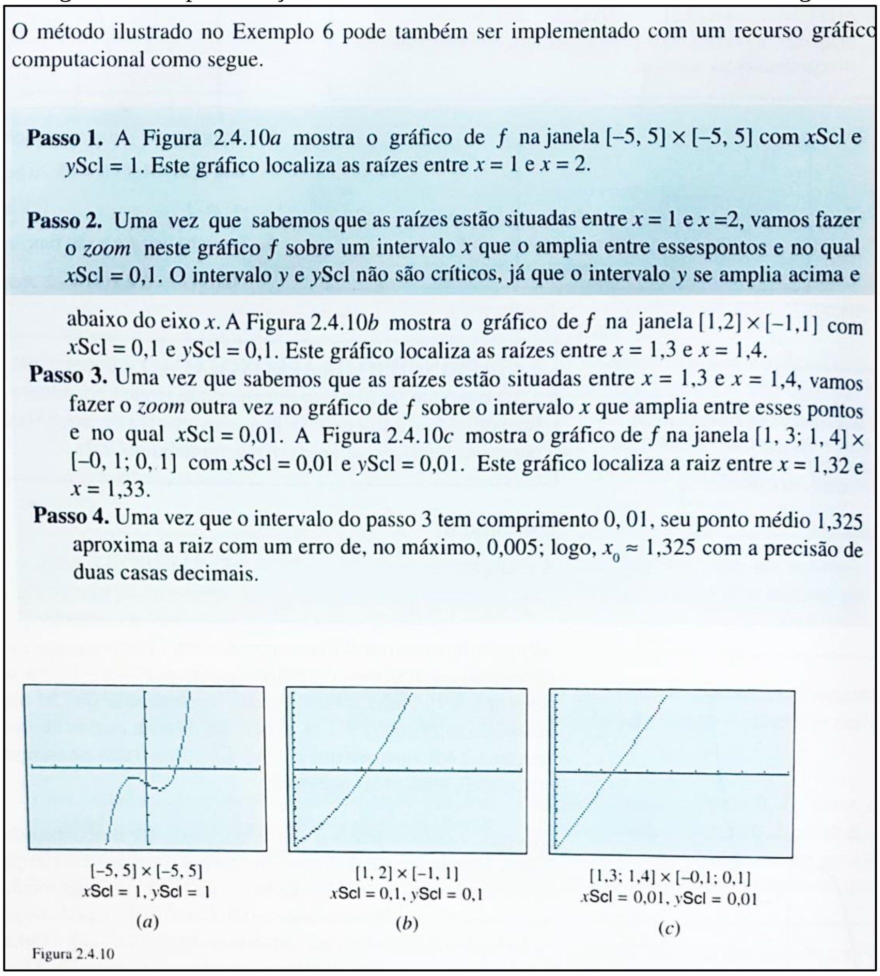
Figura 2.2.3

Fonte: Anton (2006, p. 133).

Entende-se, com base na análise realizada, que a seção apresenta elementos que estão essencialmente vinculados a ideia de trabalhar a noção de limites e continuidade de funções enquanto ferramenta matemática para bases matemáticas dentro dos próprios conceitos que são abordados dentro do Cálculo, o que, de certa maneira, a configura como um objeto de estudo relacionado dentro da própria Matemática.

Apesar do mencionado, o livro L1 (ANTON, 2006) tem destaque por apresentar, novamente, uma aproximação entre questões envolvendo limites e o uso de tecnologias que são de uso comum nas diferentes áreas do conhecimento. Entende-se que essa questão, mesmo não sendo uma noção de contextualização direta, pode trazer a emergência de um estudo voltado ao uso de recursos necessários no desenvolvimento dos conceitos a partir de uma perspectiva tecnológica que está cada vez mais presente nos estudos dos alunos de nível superior. Tal relação é exemplificada por meio de recorte extraído do L1 (ANTON, 2006) (Figura 30):

Figura 30 – Aproximação entre o conceito de limites e o uso de tecnologias


O método ilustrado no Exemplo 6 pode também ser implementado com um recurso gráfico computacional como segue.

Passo 1. A Figura 2.4.10*a* mostra o gráfico de f na janela $[-5, 5] \times [-5, 5]$ com xScl e yScl = 1. Este gráfico localiza as raízes entre $x = 1$ e $x = 2$.

Passo 2. Uma vez que sabemos que as raízes estão situadas entre $x = 1$ e $x = 2$, vamos fazer o *zoom* neste gráfico f sobre um intervalo x que o amplia entre essespontos e no qual xScl = 0,1. O intervalo y e yScl não são críticos, já que o intervalo y se amplia acima e abaixo do eixo x. A Figura 2.4.10*b* mostra o gráfico de f na janela $[1,2] \times [-1,1]$ com xScl = 0,1 e yScl = 0,1. Este gráfico localiza as raízes entre $x = 1,3$ e $x = 1,4$.

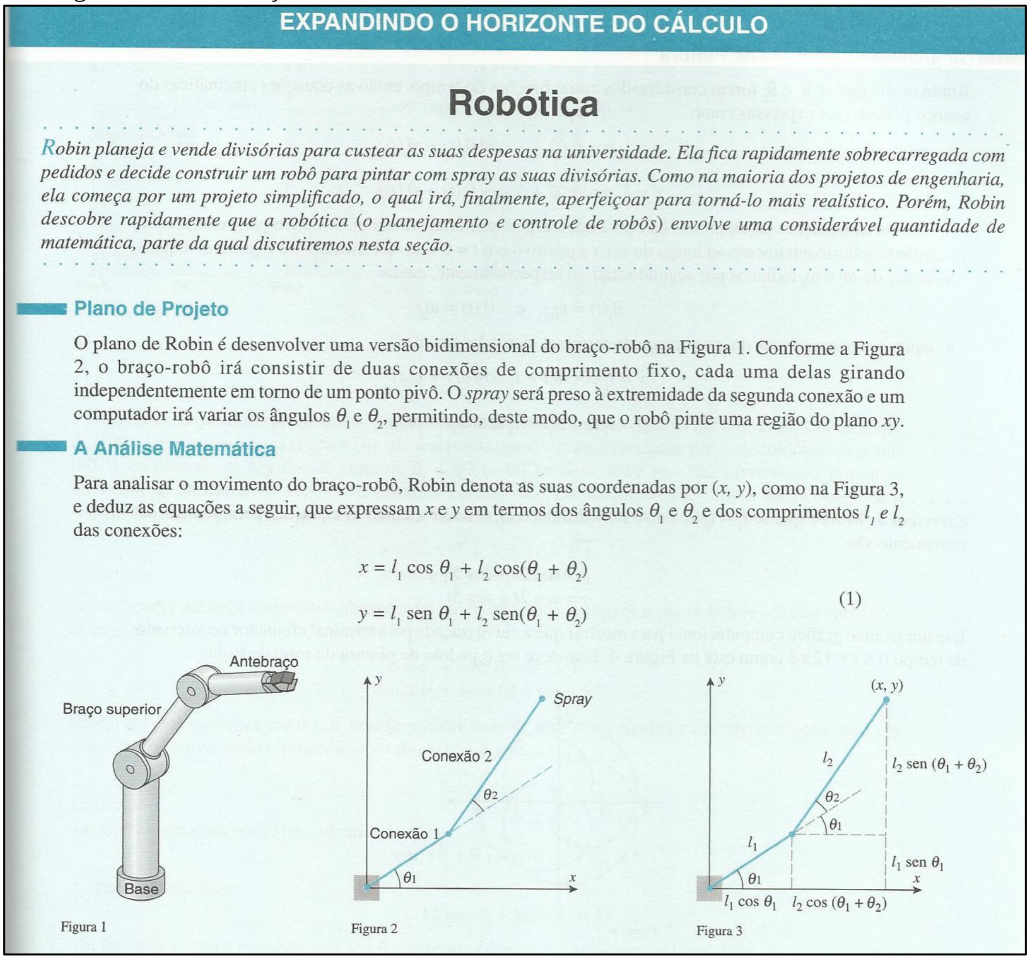
Passo 3. Uma vez que sabemos que as raízes estão situadas entre $x = 1,3$ e $x = 1,4$, vamos fazer o *zoom* outra vez no gráfico de f sobre o intervalo x que amplia entre esses pontos e no qual xScl = 0,01. A Figura 2.4.10*c* mostra o gráfico de f na janela $[1, 3; 1, 4] \times [-0, 1; 0, 1]$ com xScl = 0,01 e yScl = 0,01. Este gráfico localiza a raiz entre $x = 1,32$ e $x = 1,33$.

Passo 4. Uma vez que o intervalo do passo 3 tem comprimento 0, 01, seu ponto médio 1,325 aproxima a raiz com um erro de, no máximo, 0,005; logo, $x_0 \approx 1,325$ com a precisão de duas casas decimais.

Fonte: Anton (2006, p. 155-156).

O eixo de Derivadas, apresenta-se um pouco diferente em cada um dos referidos livros. No L3 (THOMAS, 2005), a derivação é introduzida a partir do conceito de limites seguindo para a definição do que é uma derivada, apresentando suas regras, propriedades, e aplicações, indo para um constructo abrangente sobre sua utilização matemática a partir de outras noções e perspectivas. Aborda também, noções como a de velocidade, distância percorrida, aceleração de um objeto entre outros elementos que são entendidos como aplicações contextualizadas em outras áreas de conhecimento. Já o L2 (STEWART, 2014), apresenta o conceito de diferencial junto de limites e funções contínuas, dedicando seções especificas, depois da noção de diferencial, para abordar as regras e propriedades da derivada. O referido livro traz exemplos de aplicações com máximos e mínimos de uma função, otimização de problemas a partir desses conceitos, como o cálculo do volume máximo de um cilindro com determinadas dimensões, encaixe de relações de velocidade e elementos também entendidos como de contextualização e aplicação daqueles conhecimentos matemáticos. Por fim, o L1 (ANTON, 2006) destaca questões semelhantes a exemplos e aplicações do uso de derivadas, porém, além disso, traz ideias vinculadas ao uso de tecnologias e Geometria Analítica como respaldo para trazer uma “perceptiva” de horizonte diferenciado sobre o Cálculo. A Figura 31 ilustra uma das questões apontadas.

Figura 31 – Articulações entre o conceito de Derivadas e outras áreas de conhecimento



EXPANDINDO O HORIZONTE DO CÁLCULO

Robótica

Robin planeja e vende divisórias para custear as suas despesas na universidade. Ela fica rapidamente sobrecarregada com pedidos e decide construir um robô para pintar com spray as suas divisórias. Como na maioria dos projetos de engenharia, ela começa por um projeto simplificado, o qual irá, finalmente, aperfeiçoar para torná-lo mais realístico. Porém, Robin descobre rapidamente que a robótica (o planejamento e controle de robôs) envolve uma considerável quantidade de matemática, parte da qual discutiremos nesta seção.

Plano de Projeto

O plano de Robin é desenvolver uma versão bidimensional do braço-robô na Figura 1. Conforme a Figura 2, o braço-robô irá consistir de duas conexões de comprimento fixo, cada uma delas girando independentemente em torno de um ponto pivô. O *spray* será preso à extremidade da segunda conexão e um computador irá variar os ângulos θ_1 e θ_2, permitindo, deste modo, que o robô pinte uma região do plano xy.

A Análise Matemática

Para analisar o movimento do braço-robô, Robin denota as suas coordenadas por (x, y), como na Figura 3, e deduz as equações a seguir, que expressam x e y em termos dos ângulos θ_1 e θ_2 e dos comprimentos l_1 e l_2 das conexões:

$$x = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$
$$y = l_1 \operatorname{sen} \theta_1 + l_2 \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2) \qquad (1)$$

Figura 1 Figura 2 Figura 3

Fonte: Anton (2006, p. 221).

De modo geral, assim como nos eixos anteriores, há uma predominância de diferentes linguagens (algébrica, numérica e geométrica) as quais são importantes para ilustrar, justificar e demonstrar as questões matemáticas envolvidas. Apresentam estrutura lógica, a partir de teoremas, proposições e justificativas adequadas para os conhecimentos abordados. Nesse eixo notou-se a predominância de objetos de aplicação e, principalmente, contextualização a outras áreas de conhecimento. Nos três livros, todos os conceitos são explorados e apresentados com bastantes exemplos e questões que existem o estudo e interpretação por parte de quem lê, configurando-se como materiais que estimulam o pensar matemática para a resolução de problemas do Cálculo.

Por fim, o último eixo, de Integrais, apresenta um conjunto de conhecimentos que relacionam o estudo de Integrais, a partir de sua definição, utilização, aplicação e relação com outros conhecimentos matemáticos. De modo geral, os três livros seguem uma mesma ideia de abordagem sobre a Integral, como: conceito de a partir do limite da soma, operação inversa a derivação, aplicação a partir para cálculo de áreas ou volumes de objetos, regras a partir de noções intuitivas que geram os formulários e métodos de integração. Destaca-se que a linguagem utilizada nos três livros está adequada e articulada com os conhecimentos matemáticos dos eixos anteriores e mostra-se como uma noção de contextualização as diversas áreas do conhecimento, tal como a Física, Biologia, Química, Matemática e Engenharias. A Figura 32 traz alguns elementos do que se está apontando.

Figura 32 – Articulações entre o conceito de Integrais e outras áreas de conhecimento

EXEMPLO 4 Içando um balde com corda

Um balde que pesa 5 lb é içado a partir do solo, puxando-se com velocidade constante uma corda com 20 pés de comprimento (Figura 6.60). A corda pesa 0,08 lb/pé. Quanto trabalho foi realizado para elevar o balde e a corda?

SOLUÇÃO O balde tem peso constante, portanto o trabalho realizado ao elevar-se apenas ele é peso × distância = $5 \cdot 20 = 100$ pés · lb.

O peso da corda varia conforme a elevação do balde, pois uma parte cada vez menor dela fica pendendo. Quando o balde está a x pés do solo, o pedaço remanescente da corda ainda pendente pesa $(0{,}08) \cdot (20 - x)$ libras. Conseqüentemente, o trabalho para erguer a corda é

$$\text{Trabalho na corda} = \int_0^{20} (0{,}08)(20 - x)\,dx = \int_0^{20} (1{,}6 - 0{,}08x)\,dx$$

$$= \left[1{,}6x - 0{,}04x^2\right]_0^{20} = 32 - 16 = 16 \text{ pés} \cdot \text{lb}$$

O trabalho total para o balde e a corda juntos é

$$100 + 16 = 116 \text{ pés} \cdot \text{lb}$$

Fonte: Thomas (2005, p. 483)

Destaca-se que os três livros apresentam apêndices que articulam, principalmente, a ideia de aplicação de integral a outras áreas de conhecimento. Porém, não se desconsidera que os outros eixos também são abordados nesses apêndices. Em especial o L1 (ANTON, 2006), no qual há apêndices que priorizam um estudo da Integração a partir da perspectiva histórica, trazendo elementos que mostram como ocorreu o desenvolvimento e o surgimento da linha de pensamento do Cálculo, tal como é ensinado atualmente. Os livros L2 (STEWART, 2014) e L3 (THOMAS, 2005) trazem apêndices que mostram uma dimensão tecnológica com o uso de tecnologias como GeoGebra, Mathematicas e calculadoras gráficas, as quais podem ser utilizadas no ensino e na aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral.

Por fim, entende-se que os livros destacados apresentam bons elementos para estudo da Matemática, com enfoque ao Cálculo, os quais se consideram como bons referentes para ensino e aprendizagem dessa área de conhecimento.

A análise realizada sobre as DCN dos cursos de Física (BRASIL, 2001a), Matemática (2002b), Química (2001b) e Engenharias (2002a), os planos de ensino dos componentes curriculares de Cálculo e os livros didáticos indicados nos planos verificados (Anton, 2006; Stewart, 2014; Thomas 2005), serviu como base para a estruturação do PMO, a qual é apresentada na próxima seção.

5.4 ESTRUTURA DO PROJETO MONITORIA *ONLINE*[21]

Ao se pensar no *Facebook* enquanto plataforma para hospedagem do Projeto Monitoria *Online* (PMO), percebeu-se a necessidade do lançamento de um olhar diferenciado sobre as ferramentas que ele dispõe, dada a subversão da sua finalidade primária, que é o entretenimento. Foi necessário avaliar de qual forma essas ferramentas podiam ser utilizadas para atender as demandas de um projeto de cunho educacional. Mas então, por que utilizar uma rede social ao invés de uma plataforma originalmente elaborada para fins acadêmicos?

Borba, Silva e Gadanidis (2014) chamam atenção ao caráter multimodal do *Facebook*, uma vez que permite ao usuário tanto a publicação de textos escritos quanto de imagens e vídeos. A plataforma oferece, também, comunicação via *chat*, o que permite comunicação direta e privativa entre os indivíduos. As diferentes formas de interação oferecidas pela plataforma fazem do *Facebook* uma opção “qualitativamente superior ao propiciar a percepção de um ambiente mais dinâmico e permitir uma aprendizagem colaborativa e ativa quando comparados aos já tradicionais AVA [...] que normalmente são utilizados como repositórios de documentos” (CAVASSANI; ANDRADE, 2015, p. 8). Outro aspecto relevante é a interface responsiva do *Facebook*, que permite o acesso via diferentes dispositivos, tais como computadores, *notebooks*, *tablets* e *smartphones*, sem que haja prejuízo ao usuário.

[21] A estrutura apresentada nessa seção encontra-se publicada em artigo científico denominado “Vídeos do Y*ouTube* como material de apoio no estudo de Cálculo Diferencial e Integral: possibilidades de uso das ferramentas do *Facebook*” (SCOTT HOOD; KAIBER, 2017b), submetido ao XLV Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia, ocorrido entre os dias 26 e 29 de Setembro de 2017, na cidade de Joinville/SC.

Dessa forma, buscou-se verificar, inicialmente, quais seriam os recursos disponíveis na plataforma e de qual forma os mesmos poderiam ser utilizados para viabilizar o desenvolvimento e aplicação do PMO. Uma vez verificadas as ferramentas disponíveis, partiu-se para a análise de suas funcionalidades, apurando quais delas trariam melhor experiência aos usuários frente aos objetivos da pesquisa, considerando dois aspectos: a comunicação entre os participantes e a pesquisadora e a distribuição dos materiais de apoio que ficariam à disposição dos participantes durante a aplicação do projeto.

Definiu-se, então, que o material de apoio previamente selecionado seria publicado no espaço destinado aos álbuns de fotos, dado seu *layout* mais estável, favorecendo sua consulta ao longo de todo o processo; já o *chat* em grupo e o espaço para publicações seria destinado às dúvidas dos participantes, atribuindo-lhes caráter de fóruns de participação, nos quais todos os indivíduos podiam acompanhar e participar das discussões propostas ou, até mesmo, ter uma discussão de forma individual com a pesquisadora.

Dando foco às ferramentas que possibilitaram a organização dos materiais de apoio selecionados e de formas de interação entre os integrantes do grupo, apresenta-se, a seguir, um detalhamento sobre a utilização das duas últimas ferramentas mencionadas: os álbuns de fotos e os fóruns de participação.

5.4.1 Álbuns de fotos

Para essa investigação, foi definido que o material de apoio a ser disponibilizado aos participantes seria constituído por vídeos *online* disponíveis no *YouTube*. Tal escolha deu-se em razão de que os vídeos, potencialmente, agregam uma série de recursos que podem ser utilizados com a finalidade de introduzir, aprofundar ou retomar conteúdos estudados nos cursos de Cálculo. Além disso, julgou-se pertinente que recursos tais como representações gráficas por meio de *softwares* dinâmicos, tabelas e textos seriam produzidos a partir das demandas dos participantes.

Sendo os vídeos o principal material de apoio selecionado para a investigação, buscou-se dentre as ferramentas do *Facebook*, aquela que propiciasse uma forma organizada para distribuição de *playlists*, visando um acesso facilitado para consulta, de modo que os participantes pudessem fazê-lo de forma autônoma. A opção que melhor atendia essa demanda eram os álbuns de fotos, visto que possibilitavam que o material de apoio fosse dividido em eixos principais, com suas respectivas subdivisões.

Tomando como referência a análise de erros realizada no primeiro momento da investigação, juntamente com a bibliografia indicada nas ementas das disciplinas de Cálculo

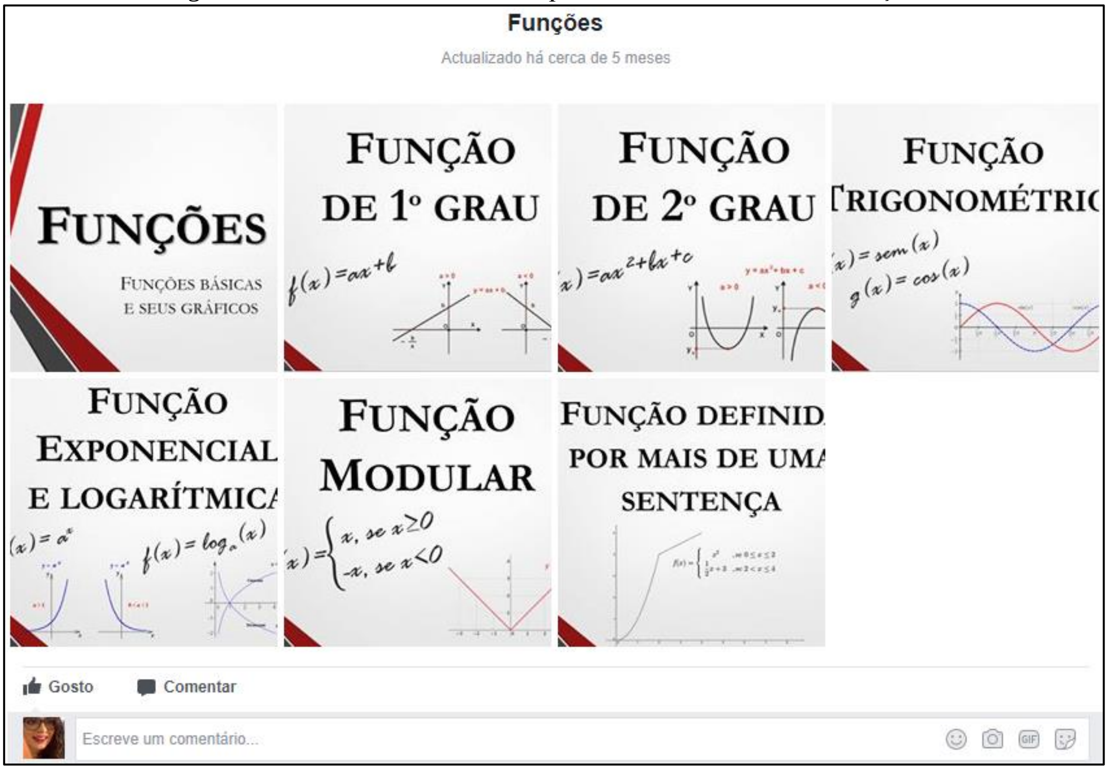
(Anton, 2006; Stewart, 2014; Thomas, 2005), optou-se organizar o material de apoio em quatro eixos, distribuídos da seguinte forma: funções, limites e continuidade, derivadas e integrais. Para cada um deles foi criado um álbum, conforme ilustrado na Figura 33.

Figura 33 – *Layout* da distribuição dos materiais de apoio

Fonte: a pesquisa.

Para cada conceito que denomina um álbum, foi elaborada uma lista com tópicos relacionados a ele. Cada um desses tópicos foi ilustrado por uma imagem contendo representações gráficas e algébricas. Uma vez que todos os álbuns seguem a mesma estrutura, para um maior detalhamento será mostrado apenas um deles. A Figura 34 mostra as fotos que compõem o álbum “Funções”. Para esse conceito foram previamente estabelecidos os tópicos: funções, função de primeiro grau, função de segundo grau, funções trigonométricas, funções exponencial e logarítmica, função modular e funções definidas por mais de uma sentença.

Figura 34 – Fotos ilustrativas dos tópicos referentes ao álbum “Funções”

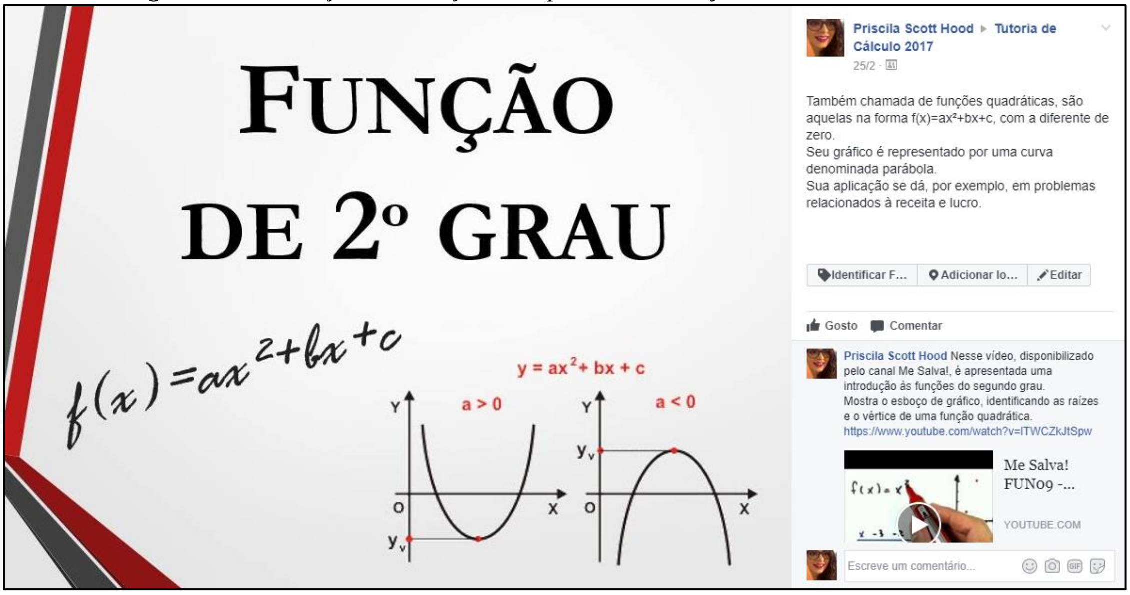


Fonte: a pesquisa.

Por sua vez, cada uma das imagens que compõem os álbuns traz uma breve descrição acerca do tópico ao qual se refere, juntamente com uma *playlist* de vídeos, distribuídos individualmente no espaço destinado aos comentários da imagem, conforme ilustrado na Figura 35. Dessa forma, os participantes podiam realizar publicações tanto em um aspecto mais geral, utilizando o espaço destinado aos comentários da imagem ou, especificamente, sobre algum dos vídeos, utilizando o espaço destinado às respostas de cada comentário.

Juntamente com cada um dos vídeos, é apresentada uma prévia sobre seu conteúdo, informando ao participante se o mesmo possui características mais conceituais (como a abordagem de definições e aplicações) ou procedimentais (exibindo, por exemplo, a resolução de exercícios), além dos recursos utilizados (*softwares* dinâmicos, representações gráficas, dentre outros), de forma que o participante pudesse filtrar quais deles lhe interessam (Figura 35).

Figura 35 – Ilustração e descrição do tópico e distribuição dos vídeos relacionados



Fonte: a pesquisa.

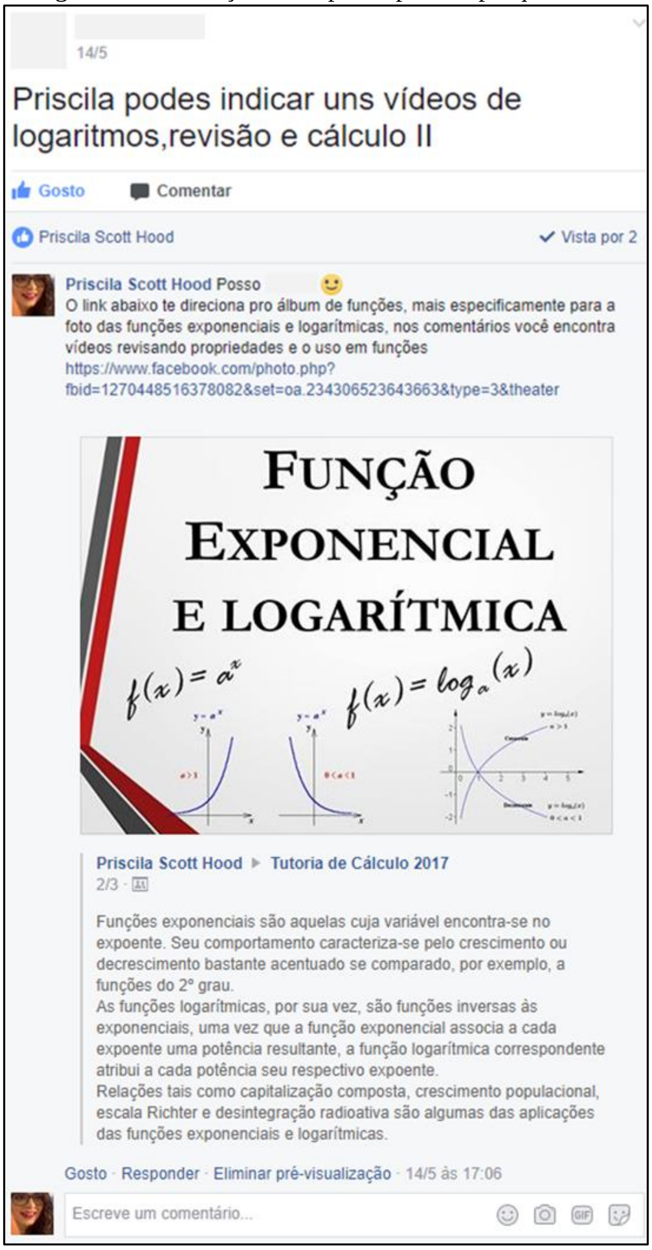
Por meio dessa organização, tinha-se por intensão proporcionar aos participantes uma maior autonomia na navegação entre os vídeos disponibilizados. Facilitar a consulta ao material de apoio é de suma importância para garantir que o participante tenha acesso aos vídeos a qualquer momento, sem a necessidade de intervenção direta da pesquisadora ou dos demais colegas, podendo fazê-lo de acordo com sua disponibilidade.

5.4.2 Fóruns de participação

Os fóruns de participação foram destinados para as discussões acerca dos questionamentos dos participantes, por meio de publicações realizadas tanto na página inicial do grupo quanto no espaço destinado ao *chat* (seja de modo individual ou em grupo). Busca-se com essas ferramentas, oportunizar que as discussões ocorram de forma compartilhada, de forma que todos possam acompanhar o andamento dos debates, seja de forma síncrona ou assíncrona.

Tomando-se como exemplo uma interação ocorrida a partir de um participante na página inicial do grupo, apresenta-se como se dá o uso de uma dessas ferramentas. Destacam-se como potencialidades desse recurso a possibilidade de haverem discussões paralelas sem que as mesmas acabem se misturando, além de possibilidade de que cada interação seja comentada individualmente. É possível, também, fazer o uso de *hiperlinks*, direcionando os participantes para algum dos materiais de apoio que estejam relacionados com o questionamento realizado, conforme ilustra a Figura 36.

Figura 36 – Interação entre participante e pesquisadora



Fonte: a pesquisa.

Além disso, em ambas as ferramentas descritas, aqueles que gerenciam o grupo têm acesso à lista de usuários que estão acompanhando as publicações realizadas, podendo monitorar seu acesso e, caso seja de interesse, notificar alguém sobre alguma discussão que esteja acontecendo.

Destaca-se ainda a potencial familiaridade dos participantes com as ferramentas utilizadas, dadas as chances de uma parcela deles já ser usuária do *Facebook* antes do início da pesquisa, o que tende a favorecer sua interação, de modo que as interações entre os participantes possam ocorrer independentemente da intervenção da pesquisadora.

A partir do que se apresentou nesta seção, salientam-se elementos que foram analisados na estruturação do PMO, os quais abordaram:

- a visão das DCN em relação aos cursos da Instituição que envolvem o componente curricular de Cálculo, buscando apresentar questões relacionadas ao que o acadêmico deve desenvolver para sua competência profissional e estabelecendo relações com o Plano de Ensino do referido componente;
- questões relacionadas às indicações sobre o que o aluno deverá aprender e desenvolver ao estudar Cálculo, vinculando essa noção a visão dos materiais que são indicados como referência matemática (livros de Cálculo) nos planos de ensino;
- uma análise dos livros de Cálculo, apontados pelo Plano de Ensino, os quais serviram como respaldo matemático para a constituição do *PMO* e das interações com os participantes do projeto.

Esses aspectos, como um todo, possibilitaram um amplo entendimento para a estruturação do PMO trazendo uma noção acerca da:

- visão do que deve ser desenvolvido, a partir dos documentos oficiais que regulamentam os cursos envolvidos;
- instituição, com base nos planos de ensino que foram analisados;
- própria Matemática, devido a análise dos livros de Cálculo.

Considerando os aspectos em destaque, apresenta-se, no que segue os dados obtidos nesta investigação e uma análise constituída com base nos mesmos.

6 O DESENVOLVIMENTO DO PROJETO MONITORIA *ONLINE*

Neste capítulo apresentam-se os resultados obtidos a partir da análise dos dados coletados ao longo da investigação. Primeiramente são destacados aspectos relacionados ao perfil dos participantes do Projeto de Monitoria *Online* (PMO), tais como o curso de graduação que cursavam e qual sua afinidade com o uso de meios digitais e redes sociais. Posteriormente são apresentados dois subcapítulos: no primeiro são abordados conceitos matemáticos relacionados ao eixo de Funções, destacando elementos de uma Análise de Erros que foi utilizada para a seleção de vídeos a serem disponibilizados aos participantes do PMO, juntamente a análise de uma interação relacionada a esse eixo, buscando evidenciar as possibilidades de discussões matemáticas existentes no âmbito da monitoria *online*; já o segundo traz a análise das potencialidades dos recursos de interação disponíveis na rede social *Facebook*.

Destaca-se que a aplicação do PMO se deu ao longo do primeiro semestre do ano de 2017, mais especificamente entre os meses de março e julho, abrangendo todos os tópicos apresentados na sua organização: o estudo de Funções, Limites e Continuidade, Derivadas e Integrais (seção 5.4). Buscou-se, dessa forma, avaliar a viabilidade de uma proposta de monitoria *online* no *Facebook* que contemplasse o estudo do Cálculo Diferencial e Integral de modo amplo, sendo coletados dados relativos a cada um dos eixos mencionados, o que incluiu as provas analisadas, os vídeos selecionados e as interações ocorridas entre a pesquisadora e os participantes durante a aplicação do projeto.

No entanto, considerando-se o objetivo geral deste trabalho, que é “Investigar o uso do *Facebook* na constituição e implementação de uma proposta de monitoria *online* de Cálculo Diferencial e Integral de funções de uma variável, em uma Universidade privada da Região Metropolitana de Porto Alegre/RS”, opta-se pela apresentação de um recorte dos dados obtidos na aplicação do PMO. Busca-se, a partir disso, indicar como se deu a articulação entre a Análise de Erros realizada e os vídeos selecionados, mostrando como esse processo se insere no âmbito do projeto desenvolvido por meio da análise de uma interação entre a pesquisadora e um participante (MO4). Para tal, toma-se como referência o eixo Funções, tendo em vista que este é a base para o estudo dos demais conceitos que compõem o Cálculo Diferencial e Integral. Além disso, é trazida uma interação entre a pesquisadora e dois participantes (MO1 e MO2), sendo essa selecionada por conter elementos complementares a primeira interação, os quais apontam para as potencialidades do uso do *Facebook* para fins educacionais.

Os dados referentes ao perfil dos participantes do PMO foram obtidos por meio da aplicação do questionário disposto no apêndice D. O objetivo era, a partir desse questionário, perceber-se questões relacionadas ao curso a qual os estudantes fazem parte, bem como sobre seus hábitos para a utilização de tecnologias e seu contato com a academia. O questionário foi aplicado a 15 participantes, sendo que somente 13 responderam. O quadro da Figura 37 destaca as graduações cursadas pelos respondentes, sendo que a grande maioria, 12 participantes, estão nos semestres iniciais de seus cursos (do primeiro até o quinto semestre) e somente um encontra-se na trajetória final do curso (entre o quinto e o nono semestre).

Figura 37 – Distribuição dos participantes do PMO por cursos

CURSO	Nº DE PARTICIPANTES
Engenharia Civil	2
Engenharia de Produção	1
Engenharia Química	3
Engenharia Elétrica	2
Engenharia Mecânica	1
Engenharia Mecânica Automotiva	1
Licenciatura em Matemática	2
Licenciatura em Química	1

Fonte: a pesquisa.

Ao serem questionados sobre o hábito de estudarem em casa, oito estudantes responderam que estudam somente aos finais de semana, dois responderam que estudam somente quando há atividades propostas pelos professores, um respondeu que estuda diariamente e dois responderam que não possuem o hábito de estudar em casa. Nove participantes preferem estudar individualmente e quatro estudam em grupos, de modo virtual ou presencial.

O questionário apontou que para estudos, os participantes preferem: em primeiro lugar, fazer uso de vídeos *online* que tratam do assunto que precisam estudar; em segundo lugar, a utilização de notas de aula; em terceiro lugar, o uso de livros didáticos do Ensino Superior; em quarto, estudos com colegas do componente curricular; e por último, o uso da monitoria presencial.

Ao serem questionados sobre a utilização da *internet*, os 13 participantes indicaram que fazem uso da mesma com fins educacionais. Além disso, desses 13, 12 indicaram que fazem uso da rede social do *Facebook*, o que indica uma potencial familiaridade dos participantes com a plataforma escolhida para a implementação do PMO.

Com base no que foi apontado sobre os dados em relação ao perfil dos participantes do PMO, conduz-se, na seção a seguir, a apresentação e análise dos dados referentes ao eixo Funções, conforme já justificado.

6.1 FUNÇÕES

De acordo com Anton (2006), parte significativa do estudo do Cálculo Diferencial e Integral se concentra na análise das relações entre grandezas, sejam elas físicas ou matemáticas, as quais podem ser descritas por meio de palavras, dados numéricos, gráficos e modelos matemáticos. A ideia básica por trás de todas as formas de representação mencionadas é o conceito de Funções, o qual, segundo Stewart (2014), se caracteriza como objeto fundamental do Cálculo, sendo transversal aos demais conceitos que compõem essa área de conhecimento: Limites e Continuidade, Derivadas e Integrais.

Embora o conceito de Funções seja objeto de estudo do Cálculo Diferencial e Integral, cabe destacar que seu estudo se inicia durante a Educação Básica, sendo ampliado e aprofundado ao longo do Ensino Superior. Dessa forma, é necessário que o estudante, ao ingressar num curso de Cálculo, tenha certo domínio acerca que funções elementares, tais como as lineares, quadráticas, cúbicas, trigonométricas, logarítmicas e exponenciais. Para que o estudante mostre conhecimento sobre os objetos destacados, é importante que seja capaz de esboçar gráficos, avaliar os intervalos de domínio e imagem, bem como amplitude e período (no caso das funções trigonométricas), além de determinar intervalos de crescimento e decrescimento das funções. Todas essas ações não podem ser tomadas isoladamente, devendo estar articuladas de maneira que o estudante saiba transitar entre as diferentes formas de representações das funções: numérica, geométrica, algébrica e verbal (ANTON, 2006).

Verificou-se, com base no material analisado, que questões envolvendo, exclusivamente, o conceito de funções, são elementos presentes em provas da disciplina de Cálculo I, majoritariamente em provas de G1[22], considerando que esse conceito está atrelado a uma revisão de Pré-Calculo, servindo como suporte para os demais assuntos desenvolvidos ao longo das disciplinas de Cálculo I e II. Das provas analisadas, verificou-se que as questões abordam a construção e análise de gráficos de funções determinadas por uma ou mais sentenças, além de questões que utilizam contextualização do conhecimento abordado, potencialmente, em situações-problema.

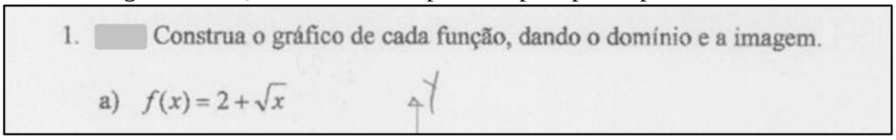
6.1.1 Análise de erros em avaliações

No que segue, são destacadas produções dos participantes em avaliações, as quais foram analisadas tomando como referência a classificação de erros proposta no modelo teórico de Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987). A análise aqui apresentada refere-se a um recorte

[22] Nos componentes curriculares Calculo I e II, são realizadas duas provas semestrais, denominadas G1 e G2, e uma avaliação recuperativa.

das questões relativas ao conceito de Funções. Para tal, toma-se como exemplo a produção do participante T3_A18 na resolução de uma questão extraída de uma das avaliações verificadas (Figura 38).

Figura 38 – Questão de G1 respondida pelo participante T3_A18


1. Construa o gráfico de cada função, dando o domínio e a imagem.

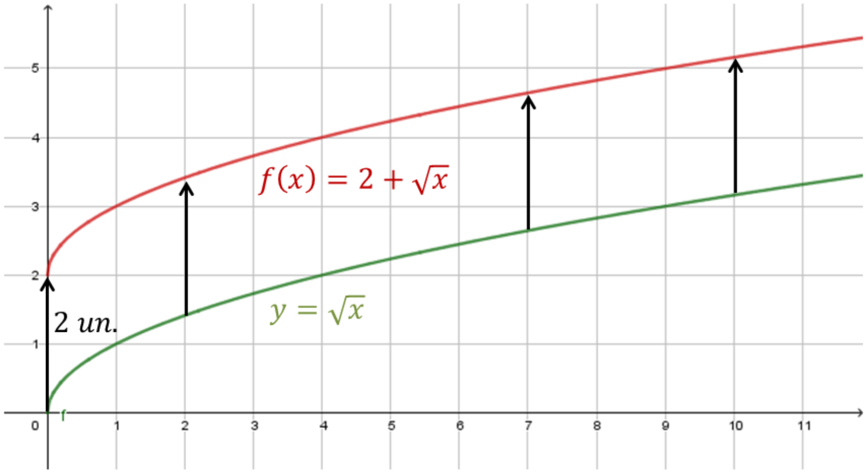
a) $f(x) = 2 + \sqrt{x}$

Fonte: a pesquisa.

Conforme exposto na Figura 38, a questão solicita ao estudante a construção do gráfico da função $f(x) = 2 + \sqrt{x}$ e que sejam determinados seus intervalos de domínio e imagem. A função apresentada pode ser vista como uma variação de $y = \sqrt{x}$, fazendo parte da família de funções da forma $f(x) = a\sqrt{x} + b$ (onde $a, b \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$), na qual o coeficiente a determina a variação de crescimento ou decrescimento da função e b indica em qual ponto a função irá interceptar o eixo das ordenadas, interferindo diretamente no conjunto imagem da função (STEWART, 2014). Destaca-se ainda que o domínio natural de uma função do tipo $f(x) = a\sqrt{x} + b$ se estende por $[0, +\infty)$, de modo que, para haver alteração no conjunto domínio, a função deveria ser uma variação de $y = \sqrt{x + c}$ (onde $c \in \mathbb{R}^*$) (STEWART, 2014). Analogamente, tais características se replicam a outras funções da forma $f(x) = a\sqrt[n]{x} + b$ (onde $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$).

Entende-se que para solucionar esse tipo de questão é pertinente que o estudante perceba a relação entre a função $f(x) = 2 + \sqrt{x}$ e a forma mais elementar de uma função raiz quadrada de x, a fim de antecipar uma possível tendência para o gráfico que deverá esboçar, tendo em vista que $f(x) = 2 + \sqrt{x}$ se caracteriza como um caso de translação vertical de $y = \sqrt{x}$. Considerando que o estudante tenha conhecimento acerca das noções de alongamento/compressão e de translação de funções, poderá inferir que, dado $a = 1$, ambas terão a mesma inclinação e variação de crescimento e que, sendo $b = 2$, $f(x) = 2 + \sqrt{x}$ representa um deslocamento de duas unidades no sentido positivo do eixo das ordenadas em relação à $y = \sqrt{x}$, conforme indicado na Figura 39.

Figura 39 – Gráficos das funções $y = \sqrt{x}$ e $f(x) = 2 + \sqrt{x}$

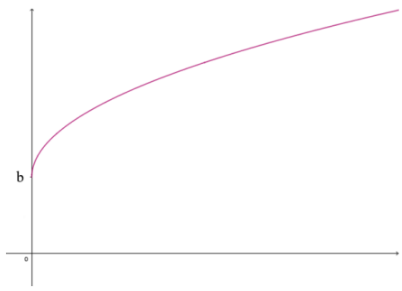


Fonte: a pesquisa.

De posse dessas informações, o estudante poderia solucionar a questão sem a necessidade de tratamento numérico ou geométrico para determinar os intervalos de domínio e imagem, utilizando as noções de transformações no plano como uma base para sua argumentação. Entretanto, via de regra, a solução para esse tipo de situação não é encaminhada tomando a perspectiva apontada. Nesse contexto, tais conhecimentos poderiam servir como uma espécie de prevenção de eventuais erros que poderiam ser cometidos, pois caso chegasse numa solução diferente da esperada, o estudante seria capaz de perceber o problema e verificar em qual parte da sua resolução cometeu algum equívoco.

Porém a resolução completa de questões dessa natureza, quando apresentada nos livros didáticos analisados, articula três das quatro formas de representação de funções apontadas por Anton (2006): numérica, geométrica e algébrica. Desse modo, um caminho possível para a resolução seria, primeiramente, o uso da representação numérica, na qual o acadêmico atribui valores de sua escolha para a variável independente da função, calculando sua imagem correspondente. Tal procedimento é uma forma de sondagem inicial acerca do comportamento da função, indicando um recorte do seu domínio e, consequentemente, da sua imagem. A representação geométrica complementa a numérica, servindo para ilustrar se a função trata de dados discretos ou contínuos e apontando sua tendência para casos nos quais o domínio não é limitado inferiormente ou superiormente. Por fim, a representação algébrica possibilita determinar, com exatidão, os intervalos de domínio e imagem da função, servindo para indicar se o estudante compreende o comportamento da função além do trecho representado graficamente. Os procedimentos de resolução mencionados, juntamente com suas respectivas representações são apresentadas no quadro da Figura 40.

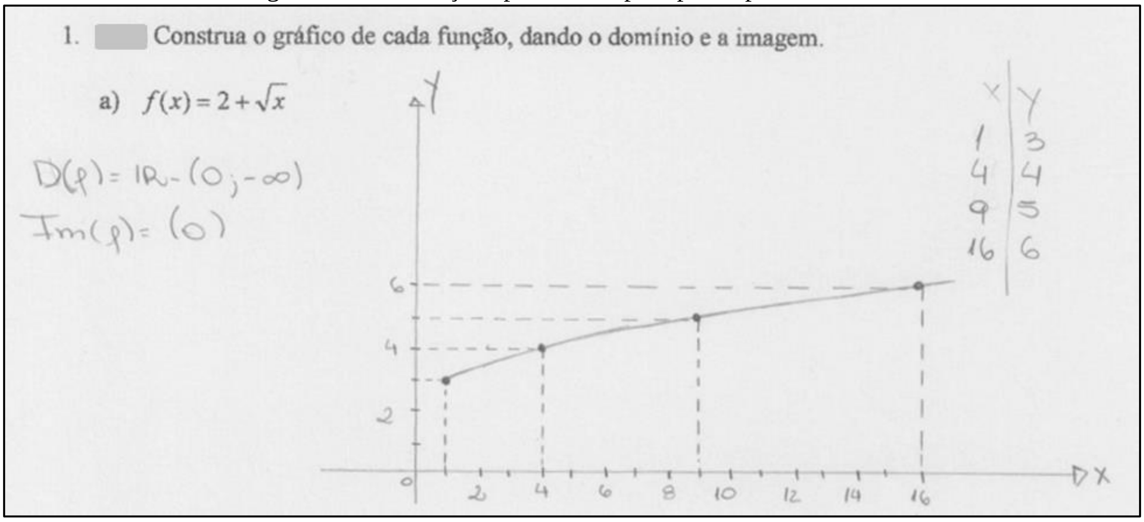
Figura 40 – Representações e procedimentos referentes a função $f(x) = 2 + \sqrt{x}$

Representação Numérica	Representação Geométrica	Representação Algébrica
Tabela de valores: $\begin{array}{c\|c} x & f(x) = a\sqrt{x} + b \\ \hline x_0 & f(x_0) = a\sqrt{x_0} + b \\ x_1 & f(x_1) = a\sqrt{x_1} + b \\ x_2 & f(x_2) = a\sqrt{x_2} + b \\ \vdots & \vdots \end{array}$	Gráficos: 	Intervalos ou conjuntos: $D(f) = \mathbb{R}_+$ $Im(f) = [b, +\infty), b \epsilon \mathbb{R}_+$

Fonte: a autora.

No caso do participante T3_A18, começando pelo aspecto numérico da sua resolução, o que pode ser visto na Figura 41, foi elaborada tabela na qual foram atribuídos quatro valores para x e, a partir deles, determinadas as imagens correspondentes para y. Os valores para x, escolhidos pelo participante, variam entre 1 e 16 e indicam um potencial conhecimento acerca dos quadrados perfeitos, uma vez que tais valores viriam a facilitar seus cálculos e, posteriormente, a marcação das coordenadas para esboço do gráfico.

Figura 41 – Resolução apresentada pelo participante T3_A18



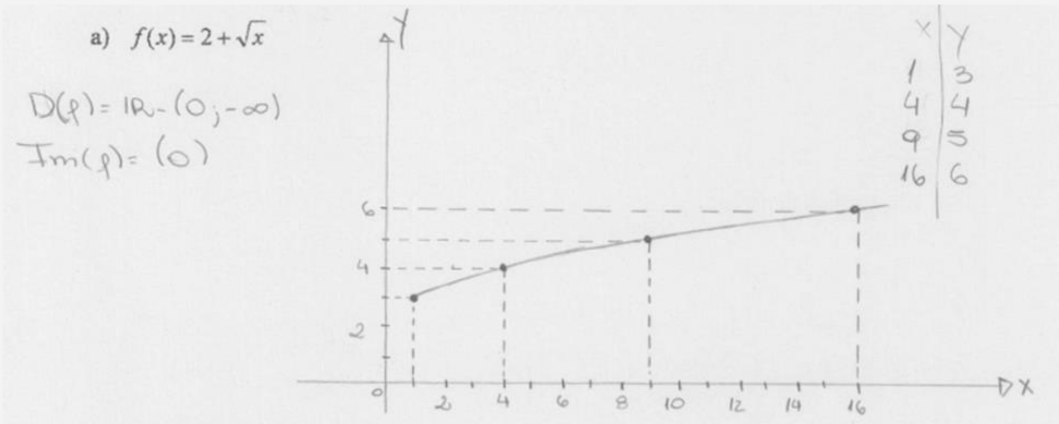
Fonte: a pesquisa.

Embora não contenham dados que possam ser apontados como erros, as escolhas do participante não são suficientes para dar indícios contundentes do seu entendimento acerca do domínio e da imagem dessa função, tendo em vista que a representação numérica apresenta uma amostra limitada desses conjuntos, sem identificar suas possíveis restrições. Nesse sentido, faz-se necessária uma articulação com as demais formas de representação, como, por exemplo, a representação gráfica, dada por meio do esboço do gráfico.

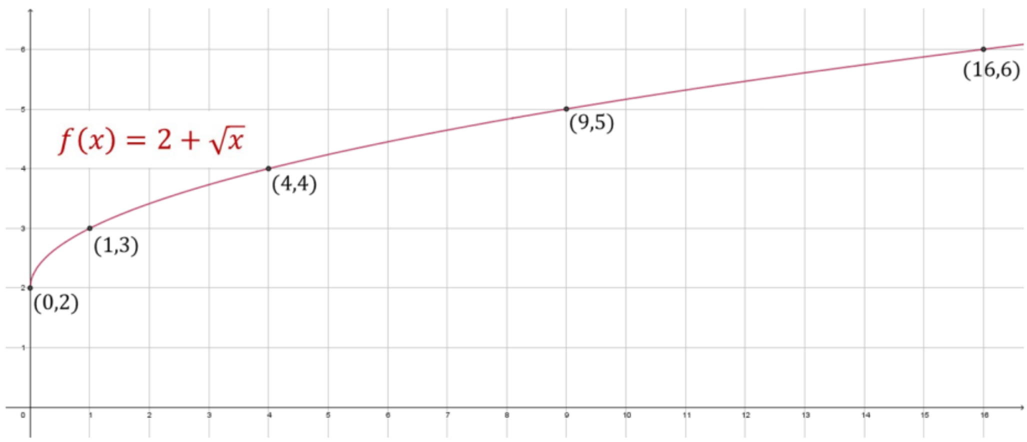
Conforme destacado no quadro da Figura 42, a representação geométrica elaborada pelo participante indica que os dados da tabela, que servem como base para o traçado da curva, foram transpostos para o esboço do gráfico, sendo atribuídos às suas respectivas coordenadas. No entanto, embora o participante não limite o traçado aos pontos indicados, o prolonga apenas para valores de $x \geq 1$, ignorando o comportamento da função para aqueles localizados no intervalo $[0{,}1)$, o que resulta em uma representação errônea da função. A representação geométrica pertinente é apresentada no quadro da Figura 42, juntamente com a elaborada pelo participante.

Figura 42 – Comparativo entre representações geométricas da função $f(x) = 2 + \sqrt{x}$

Representação geométrica do participante T3_A18



Representação geométrica sugerida



Fonte: a autora.

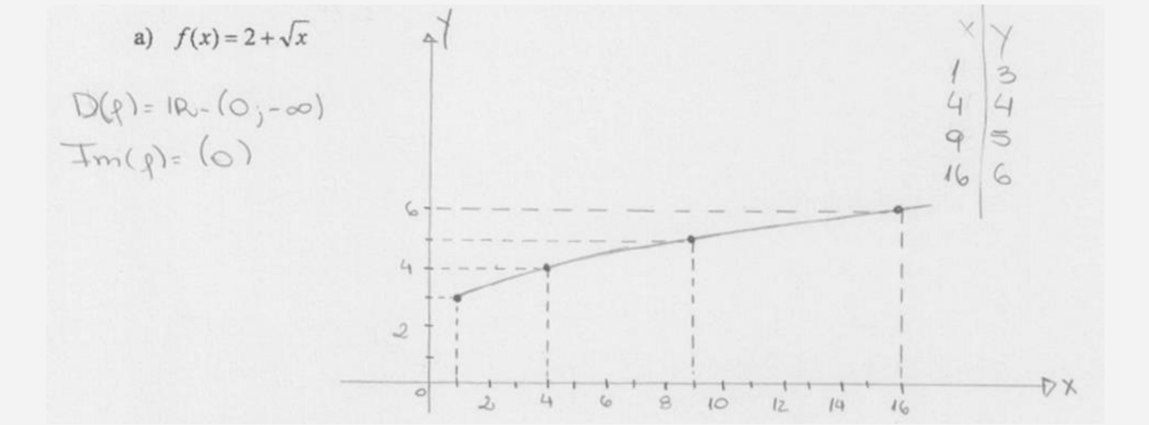
Entende-se que erros dessa natureza se enquadrem na categoria **teorema ou definição distorcida**, tendo em vista que a articulação entre os dados apresentados na tabela e no gráfico indicam que o participante assume, erroneamente, que a curva da função em questão se inicia no ponto $(1{,}3)$. Nesse contexto, faltou ao participante um entendimento acerca de qual seria o significado do domínio da função em questão, tenho em vista que ele ignora um intervalo contendo infinitos termos entre $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$.

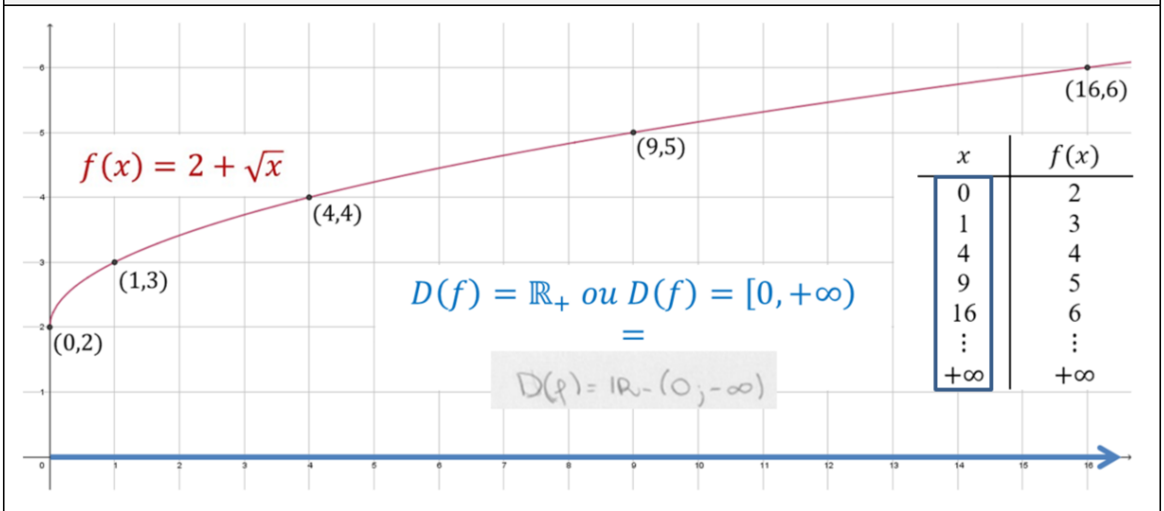
No que se refere à representação algébrica do intervalo de domínio da função, tem-se que, embora compatível com o domínio natural de $f(x) = 2 + \sqrt{x}$, o intervalo considerado pelo participante, $\mathbb{R} - (0, -\infty)$, apresenta erro de notação, uma vez que, por definição, um intervalo deve ser representado da menor para a maior distância dos pontos que o delimitam em relação a zero (ANTON, 2006). Entende-se que esse tipo de situação pode vir a ser classificado como um caso de **erro técnico** (MOVSHOVITZ-HADAR; ZASLAVSKY; INBAR, 1987). Além disso, tal intervalo não é condizente com a representação geométrica apresentada pelo participante na Figura 42, visto que, ao representar geometricamente a função, o participante o faz considerando o domínio $[1, +\infty)$.

No quadro da Figura 43 são retomadas as representações numérica e geométrica, tanto as apresentadas pelo participante quanto as sugeridas, fazendo um comparativo entre os domínios correspondentes a cada gráfico e a resposta dada pelo participante.

Figura 43 – Comparativo entre representações algébricas do domínio da função $f(x) = 2 + \sqrt{x}$

Representação geométrica do participante T3_A18





Fonte: a autora.

Conjectura-se que, para obter o intervalo indicado, o participante tenha determinado o domínio da função com base na análise da sua lei de formação, desconsiderando os dados apresentados nas representações numérica e geométrica. Dessa forma, a restrição apresentada leva em conta que a operação $\sqrt{x}$ não é válida para valores de x menores do que zero, conforme indicado na Figura 44:

Figura 44 – Restrição referente ao domínio natural de $f(x) = 2 + \sqrt{x}$

$$f(x) = 2 + \sqrt{x} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{l}\text{Restrição:}\\ \forall\, x \in \mathbb{R}/x < 0\end{array}}$$

Fonte: a autora.

Entretanto, essa possibilidade evidencia uma falta de articulação entre os demais elementos apresentados na resolução, caracterizando-se como um caso de **solução não verificada**, dadas as divergências entre eles. Situações como essa podem indicar dificuldades implícitas, tendo em vista que a falta de coerência entre as representações pode ser causada pelo entendimento equivocado de um ou mais elementos.

Outra possibilidade seria considerar um somatório de erros relacionados ao tratamento dos dados e à notação de intervalos. Nesse contexto, conjectura-se que a resposta apresentada é fruto de um tratamento de dados equivocado, no qual o participante parece basear-se apenas nas informações obtidas a partir da representação numérica, cujos pontos representam coordenadas isoladas, associando tais valores ao conjunto dos números inteiros ao invés dos números reais. Mesmo traçando uma curva que relaciona as coordenadas do gráfico – indicando a compreensão do participante sobre o comportamento contínuo da função –, a restrição apontada por ele é condizente com uma análise de dados discretos[23], na qual o valor imediatamente superior a $x = 0$ seria $x = 1$. Dessa forma, a representação algébrica do domínio, coerente ao gráfico esboçado pelo participante, seria dada por $D(f) = \mathbb{R} - (-\infty, 0]$ ao invés de $D(f) = \mathbb{R} - (0, -\infty)$, o que indicaria erro em relação à notação de intervalo aberto ou fechado.

Entende-se que, no âmbito das dificuldades de natureza epistemológica, esse tipo de tratamento seja fruto de um entendimento essencialmente estático do conceito de função, no qual a mesma se resumiria à expressão analítica que a define e aos dados obtidos por meio do uso de tabela de valores, sem levar em conta a relação funcional que essa função representa. Esse conjunto de características remete a uma das cinco dualidades mencionadas por Rezende (2003): a dualidade variabilidade/permanência.

Com base nas argumentações apresentadas na segunda hipótese, entende-se que ambos os erros mencionados se enquadram na categoria **teorema ou definição distorcida**. O primeiro seria um caso de aplicação de um teorema fora das suas condições, tendo em vista que o conceito de intervalos, referente a dados contínuos, foi utilizado em uma interpretação de dados discretos. No segundo caso, o participante utiliza notação de intervalo aberto em um intervalo

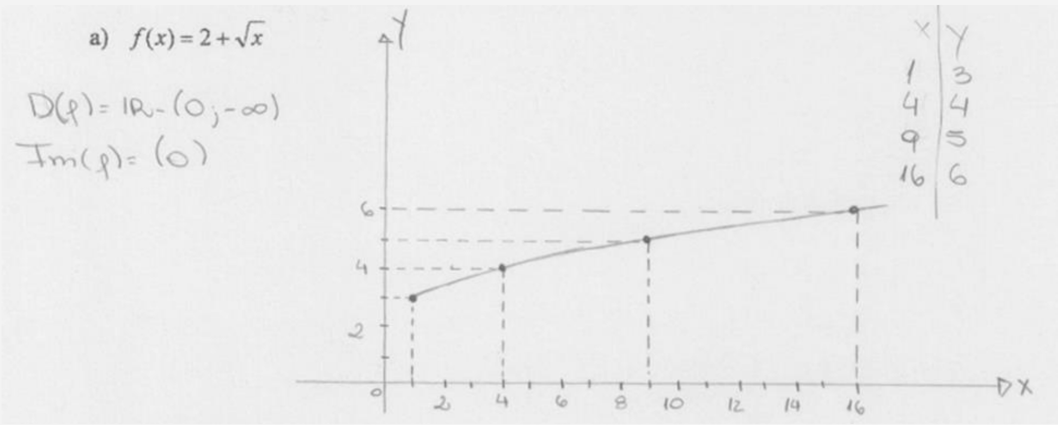
[23] Diferentemente dos dados contínuos, que variam continuamente sobre determinado intervalo e levam a curvas sem interrupção, dados discretos geram mapas de dispersão, formados por pontos isolados (ANTON, 2006).

que deveria ser fechado, o que pode ter ocorrido em razão de não compreender o significado dos símbolos envolvidos, não diferenciando o uso dos parênteses ou colchetes.

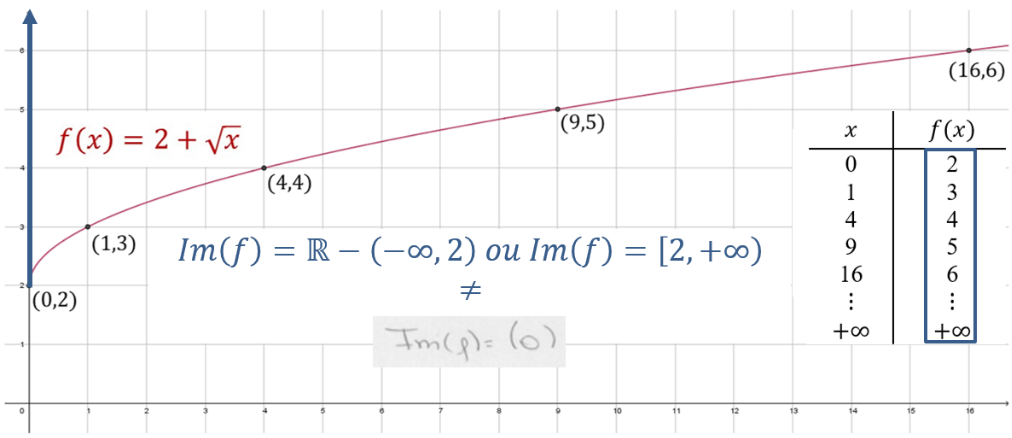
Já em relação à representação algébrica da imagem da função, tem-se que a resposta apresentada se difere da correta, bem como daquela que resultaria dos dados expostos no gráfico elaborado pelo participante. A Figura 45 apresenta, mais uma vez, as representações geométricas e numéricas do participante e sugeridas, destacando-se o os dados referentes as suas imagens, comparando-os com a resposta do participante a fim de serem verificadas as divergências.

Figura 45 – Comparativo entre representações algébricas da imagem da função $f(x) = 2 + \sqrt{x}$

Representação algébrica do participante T3_A18



Representação algébrica sugerida



Fonte: a autora.

Ao denotar que a imagem de $f(x) = 2 + \sqrt{x}$ é dada por $Im(f) = (0)$, o participante não deixa claro se está se referindo a um ponto, intervalo ou conjunto, uma vez que a notação utilizada não representa a nenhum dos elementos mencionados. Dessa forma, a análise inferida sobre sua resposta se baseia em conjecturas tecidas a partir das demais representações apresentadas por ele, considerando que o conjunto imagem da função é dado por $[2, +\infty)$.

Conforme destacado nas representações numérica e geométrica esboçadas pelo participante, apresentadas na Figura 45, a imagem da função se estende ao longo de um determinado intervalo do eixo das ordenadas, o que descartaria respostas envolvendo um único ponto de y. Além disso, a representação gráfica do participante não mostra intersecção da função com a origem do plano cartesiano, o que eliminaria coordenada do tipo $(x, 0)$. Ainda no que se refere à representação algébrica da imagem da função, tem-se que $Im(f) = (0)$ não retrata um intervalo, visto que seriam necessários dois extremos dados por a e $b \in \mathbb{R}$, sendo $a < b$.

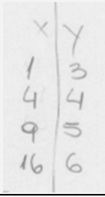
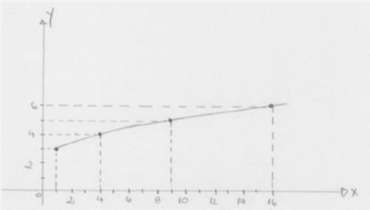
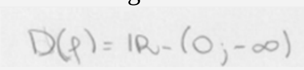
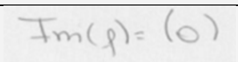
Dessa forma, entende-se que a relação mais coerente a ser estabelecida entre os elementos citados e a resposta do participante envolveria o uso de conjuntos. No entanto, dado o gráfico esboçado, supõe-se que $Im(f) = (0)$ não representa um conjunto no qual zero é único elemento, mas sim um conjunto vazio, dada a ausência de intersecção da curva com o eixo y. Destaca-se que, neste caso, teria sido cometido erro de notação, visto que um conjunto vazio deveria ser representado por $\{\ \}$ ou $\emptyset$.

As dissensões verificadas indicam que, possivelmente, o conhecimento do participante acerca do conceito de imagem não esteja devidamente consolidado, tendo em vista que a resposta apresentada descreve a projeção da função em relação ao eixo y. A resposta dada reforça, ainda, o argumento supracitado de que o participante não difere os símbolos que caracterizam conjuntos abertos ou fechados. Assumindo-se que a resposta dada se relacione com o gráfico, supõe-se que (0) refere-se a um conjunto vazio que representa a não existência de intersecção com o eixo das ordenadas. A partir do exposto, entende-se que o erro cometido pelo participante se enquadra na categoria **teorema ou definição distorcida**, indicando possíveis dificuldades relacionadas ao conceito de conjunto imagem, uma vez que o participante parece acreditar que a imagem se relaciona à intersecção da curva com o eixo y.

Além disso, destacam-se as dificuldades em relação a notação que, entende-se, podem comprometer a expressão do entendimento do participante, uma vez que existe a possibilidade do mesmo compreender os aspectos envolvidos no conceito de imagem de uma função, sem que saiba expressar tal conhecimento por meio de linguagem matemática. Nesse sentido, destaca-se que o mesmo poderia fazer uso da forma de representação verbal de uma função, descrevendo por meio de linguagem matemática o que quis expressar ao usar $Im(f) = (0)$.

Apresenta-se na Figura 46 uma síntese da análise realizada a partir das diferentes representações elaboradas pelo participante T3_A18, retomando as principais considerações sobre os erros encontrados em cada um dos elementos que compõem a sua resolução.

Figura 46 – Síntese da análise realizada sobre a produção do participante T3_A18

TIPO DE REPRESENTAÇÃO	CONSIDERAÇÕES/ERROS ENCONTRADOS
Numérica 	• Os valores determinados pelo participante para a variável independente pertencem ao domínio para o qual a função está definida; • As imagens foram calculadas corretamente, no entanto podem ter induzido ao erro cometido na representação geométrica produzida pelo participante.
Geométrica 	• O gráfico apresentado está de acordo com os dados indicados na tabela, no entanto o traçado incompleto da função sugere um entendimento equivocado em relação aos seus intervalos de domínio e imagem. • Conjectura-se que o participante tenha assumido que o menor valor possível para x na função $f(x) = 2 + \sqrt{x}$ é 1, configurando-se como um caso de **teorema ou definição distorcida**.
Algébrica 	DOMÍNIO: • O intervalo considerado pelo participante sugere um entendimento do mesmo acerca da restrição do domínio natural da função $f(x) = 2 + \sqrt{x}$, embora apresente uma escrita que difere da usual, uma vez que o zero antecede infinito negativo. Tal escrita pode ser resultado de um erro de notação (**erro técnico**), ou estar associada a um entendimento não consolidado em relação a ordenação dos elementos do conjunto dos números reais (**teorema ou definição distorcida**). Destaca-se, ainda, que o intervalo mencionado diverge das demais representações apresentadas em sua resolução. • Entende-se haver duas hipóteses para essa divergência: 1. resposta baseada na lei de formação, sem haver articulação com as demais representações, o que se caracteriza como um caso de **solução não verificada**. 2. resposta que se relaciona com o gráfico esboçado e dados numéricos, havendo tratamento equivocados dos dados e erro de notação. Dois casos de **teorema ou definição distorcida**.
	IMAGEM: • A resposta apresentada não evidencia notação de ponto, intervalo ou conjunto, não deixando clara qual foi a interpretação realizada pelo participante. Nesse contexto, entende-se que o participante não tem entendimento de como determinar o conjunto imagem da função em questão. Conjectura-se que tal resposta deve-se a falta de intersecção da curva esboçada por ele e o eixo das ordenadas, sendo representada, possivelmente, por uma notação distorcida de conjunto vazio, enquadrando-se na categoria **teorema ou definição distorcida.**

Fonte: a autora.

A análise de erros realizada a partir das avaliações coletadas viabilizou o levantamento e identificação de potenciais dificuldades na aprendizagem dos conteúdos abordados no curso de Cálculo na Instituição na qual se deu a aplicação da investigação. Esse levantamento, além de indicar potenciais dúvidas que seriam abordadas durante a aplicação do PMO, serviu como critério para busca e seleção do material do apoio disponibilizado aos participantes do projeto.

A partir do exposto, apresenta-se na próxima seção, análise acerca de vídeos cujo conteúdo se relaciona aos conhecimentos matemáticos envolvidos na questão verificada.

6.1.2 Vídeos selecionados

Retomando-se brevemente o que foi mencionado no trecho voltado à apresentação da estrutura do PMO (seção 5.4), os vídeos selecionados foram disponibilizados no *Facebook*, sendo organizados de acordo com o *layout* do espaço destinado aos álbuns de fotos. Dessa forma, para cada um dos quatro eixos determinados (Funções, Limites e Continuidade, Derivadas e Integrais) foi elaborado um conjunto de imagens relacionadas ao conceito que denomina o álbum, sendo uma delas de caráter mais geral, a qual servia como capa, e as demais fazendo referência a tópicos específicos pertinentes a esse conceito. Cada uma das imagens era acompanhada de uma breve descrição e os vídeos relacionados foram publicados no espaço destinado aos comentários da respectiva imagem.

Com base no exposto e tomando como referência os dados emergentes da análise de erros verificados na resolução apresentada pelo participante T3_A18, foram selecionados, dentre os vídeos *online* disponíveis no *YouTube*, um conjunto de vídeos que abordavam tópicos relacionados ao conceito de funções, dando ênfase a caracterização do domínio, contradomínio e imagem de funções, os quais foram publicados na imagem referente à capa do álbum Funções. O quadro da Figura 47 apresenta a imagem utilizada como capa do álbum, juntamente com a descrição que a acompanhava, a qual continha informações relacionadas ao conceito que denomina o álbum, dando um breve panorama acerca dos conteúdos abordados nos demais tópicos.

Figura 47 – Capa e descrição referente ao álbum denominado Funções

CAPA DO ÁLBUM FUNÇÕES	
	As Funções, de modo geral, são elementos importantes do estudo do Cálculo Diferencial e Integral, uma vez que permeiam três dos seus eixos principais: Limites e Continuidades, Derivadas e Integrais. Dito isso, é bastante útil conhecer as características de algumas das funções chave estudadas ao longo das disciplinas de Cálculo I e II: Funções Polinomiais (primeiro, segundo graus), Funções Trigonométricas (seno, cosseno...), Funções Exponenciais e Funções Logarítmicas.

Fonte: a pesquisa.

Assim como em cada uma das imagens que compõem os álbuns, cada um dos vídeos publicados trazia uma descrição do seu conteúdo, dando indicativos se o mesmo era voltado ao estudo de determinado conceito, seja em caráter introdutório ou revisional, ou se tratava da indicação e resolução de atividades (Figura 48). Além disso, buscou-se informar os participantes sobre os recursos utilizados ao longo do vídeo. Tais informações tinham por objetivo direcionar os participantes aos vídeos de seu interesse, a fim de que tivessem a disposição uma forma de apoio assíncrono, a qual tivesse potencial para suporte às suas dificuldades.

Figura 48 – Exemplo de publicação dos vídeos por meio de comentários

Fonte: a pesquisa.

Dentre os vídeos apontados na Figura 48 destaca-se, inicialmente, vídeo extraído do canal Oficina Resolve[24], denominado “Dica de Matemática - Funções - Parte 1 - Oficina do Estudante”. Este vídeo é o primeiro de uma *playlist* voltada ao estudo de funções, a qual foi disponibilizada pelo canal mencionado. O quadro da Figura 49 apresenta uma ficha técnica do referido vídeo, na qual constam dados tais como o título do vídeo, sua duração, o álbum do PMO no qual o *link* que direciona para o vídeo foi publicado, o canal responsável pela elaboração e publicação do vídeo no *YouTube* e a descrição, elaborada pela pesquisadora, disponibilizada aos participantes do PMO.

[24] Disponível em https://www.youtube.com/channel/UCBP5wakIulXr3kBaLEHvHCw Acesso em 26 Abr 2018.

Figura 49 – Dados de vídeo voltado ao estudo de domínio, contradomínio e imagem de funções

INFORMAÇÕES	DESCRIÇÃO
Título do vídeo	Dica de Matemática - Funções - Parte 1 - Oficina do Estudante
Duração	10:00
Álbum	Funções
Canal	oficinadoestudante/Oficina Resolve[25]
Número de inscritos	Aproximadamente 121 mil inscritos
Disponível em	https://www.youtube.com/watch?v=8qRun3Dr_-c
Descrição encontrada no canal	Nesta aula de Matemática, o professor Altair faz uma introdução fundamental pra quem quer entender de uma vez por todas o que são Funções e as nomenclaturas utilizadas. Assunto de máxima importância pros vestibulandos, entender funções é chave-mestra pra abrir outros assuntos da matemática! Então, tá esperando o quê?!
Descrição publicada no grupo	Neste vídeo, disponibilizado pelo canal oficinadoestudante, o professor Altair apresenta, por meio da representação de diagramas, o conceito de funções e uma breve descrição de domínio, contradomínio e imagem.

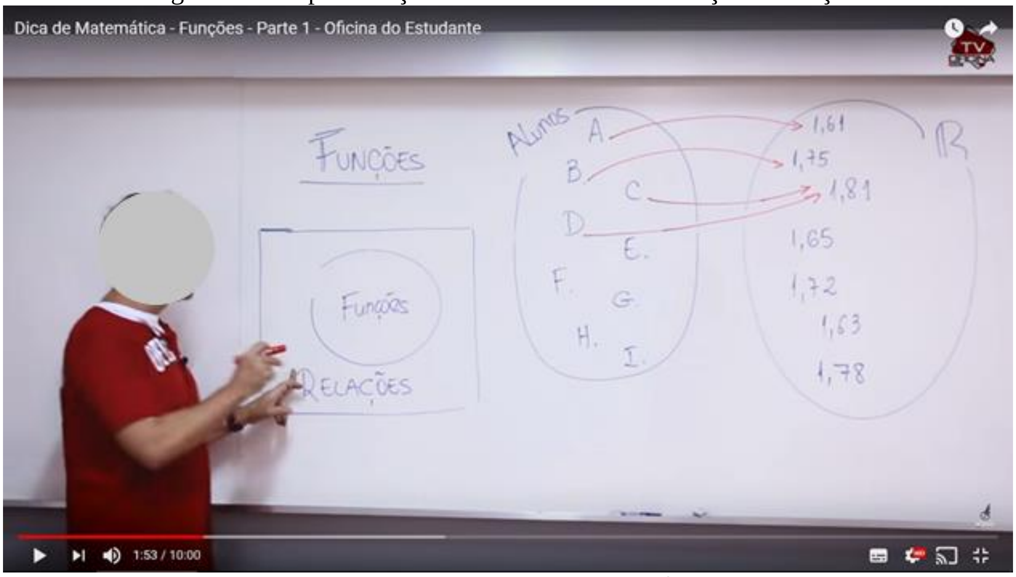
Fonte: a pesquisa.

Conforme apontado no quadro da Figura 49, o referido vídeo aborda questões relacionadas ao conceito de funções, tais como: nomenclatura, formas de representação e intervalos de domínio, contradomínio e imagem. De acordo com a descrição publicada no canal, é um vídeo originalmente voltado a um público constituído por alunos da Educação Básica e vestibulandos. No entanto, por meio da análise do seu conteúdo, entende-se que o mesmo teria potencial para auxiliar os participantes do PMO na retomada desse conhecimento, tendo em vista que é uma noção básica, primordial para o desenvolvimento dos conteúdos relacionados com o estudo do Cálculo Diferencial e Integral.

No que se refere ao material analisado, tem-se que o vídeo apresentado pelo Prof. Altair é uma aula expositiva, na qual são utilizados como recursos quadro branco e caneta. O professor inicia sua fala explicando sobre as características básicas de uma função, tomando como exemplo representações por diagramas, sendo a primeira referente a uma articulação entre as noções de funções e relações com a ideia de conjuntos e subconjuntos, na qual o professor faz uma analogia tomando as funções e relações como elementos de dois conjuntos, de modo que as funções seriam um subconjunto das relações (Figura 50).

[25] O canal do qual foi extraído o vídeo chamava-se “oficinadoestudante” na época do seu compartilhamento no PMO, sendo atualmente denominado “Oficina Resolve”.

Figura 50 – Representação de ideias envolvendo funções e relações



Fonte: Canal Oficina Resolve[26].

A representação indicada na Figura 50 é acompanhada da seguinte fala do professor:

> Professor Altair – [...] na verdade, toda função é uma relação. A relação, no caso, é uma associação, associação entre elementos de dois conjuntos, onde ela não é tanto restrita, ela não tem tantas restrições. Por exemplo, você pode pegar alunos de uma sala de aula, associar as idades desses alunos ou, a cidade natal desses alunos, ao RG de cada um desses alunos. Ou seja, vocês percebem que a ideia de associar dois elementos de dois conjuntos é uma ideia bastante utilizada no dia a dia, no cotidiano, então não concerne somente à área de Matemática. Então veja bem, [...] toda função é uma relação, mas nem toda relação é uma função. Então, considerando que eu pudesse colocar todas as relações dentro desse conjunto maior, algumas delas, ou, muitas delas, podem ser consideradas funções. Veja bem, uma função é uma relação onde ela deve seguir algumas condições para que ela exista. E quais são as condições? (OFICINA RESOLVE, 2016, transcrição extraída de 1:02 a 2:16)[27].

Entende-se que a abordagem utilizada pelo professor para introduzir a aula dada possui linguagem coerente ao nível de ensino ao qual o vídeo originalmente se destina, dando-se ênfase a sua busca pela articulação do conteúdo trabalhado com elementos que possam, potencialmente, ser relacionados com o dia a dia dos seus alunos/expectadores, podendo ser utilizado tanto na discussão inicial em torno de um conceito, quanto em um viés revisional. Já no contexto de um curso de Cálculo e, em especial, nessa investigação, tal explicação pode ser vista como um exemplo elementar, que cumpre a função de material de apoio a ser utilizado para revisão do conteúdo, deixando questões mais complexas a cargo do professor das disciplinas.

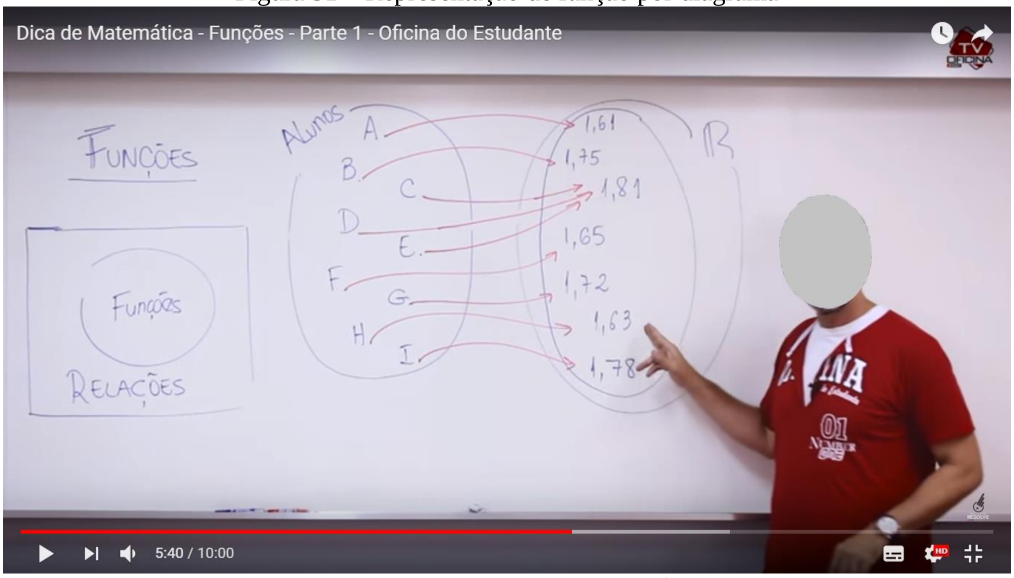
---

[26] Disponível em https://www.youtube.com/watch?v=8qRun3Dr_-c Acesso em 12 Abr 2018.

[27] Destaca-se que a explicação dada pelo professor, juntamente com a forma como ele ilustra a articulação mencionada, está de acordo com definição de funções apontada por Flemming (2006), na qual a autora classifica esse conceito como sendo, essencialmente, uma relação entre os elementos de dois conjuntos, sem necessariamente restringir a uma relação numérica.

Além disso, ainda na imagem apresentada na Figura 50, é possível visualizar uma segunda representação por diagramas, dessa vez um diagrama de flechas (STEWART, 2014), a qual é apresentada com mais informações e de forma mais detalhada na Figura 51. Nessa imagem estão presentes dois diagramas relacionados por meio de flechas, sendo o primeiro composto por elementos algébricos e o segundo contendo valores numéricos. Essa representação, como um todo, ilustra uma função, sendo o primeiro diagrama apontado como o conjunto de partida (domínio da função) e o segundo o conjunto de chegada (contradomínio). Já as flechas representam a relação existente entre os elementos desses conjuntos, dos quais para cada elemento do conjunto de partida há um correspondente (imagem) no conjunto de chegada.

Figura 51 – Representação de função por diagrama



Fonte: Canal Oficina Resolve[28].

A representação mencionada se refere a um exemplo no qual o professor discute sobre uma função que relaciona um grupo de estudantes às suas respectivas alturas. É destacado que os elementos contidos no conjunto domínio são as letras atribuídas aos alunos desse grupo e os valores destacados no contradomínio são referentes às alturas dos mesmos, que são pertencentes ao conjunto dos números reais.

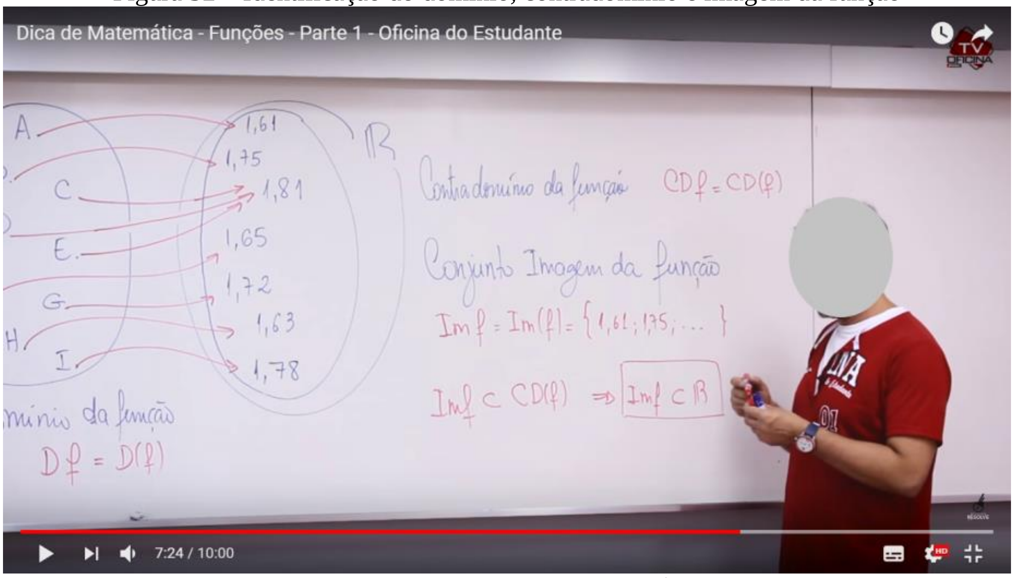
Esse exemplo parte da ideia de que todo e qualquer indivíduo possui altura, a qual é dada por um valor numérico pertencente ao conjunto dos números reais. Além disso, um ou mais indivíduos podem ter a mesma altura, no entanto, um único indivíduo não pode ter, simultaneamente, duas ou mais alturas distintas. Esse exemplo contextualiza, de forma elementar, condições para existência de uma função: todos os elementos do domínio devem

[28] Disponível em https://www.youtube.com/watch?v=8qRun3Dr_-c Acesso em 12 Abr 2018.

estar relacionados a um único elemento do conjunto do contradomínio, o que configura a imagem dessa função, podendo os elementos desse conjunto estar relacionados a um ou mais elementos do domínio da função (STEWART, 2014).

Posteriormente, conforme indicado na Figura 51, o professor relaciona o conjunto de partida ao domínio de uma função, o conjunto de chegada ao contradomínio e o subconjunto formado pelos elementos correspondentes em relação ao domínio à imagem da função, apresentando suas notações algébricas.

Figura 52 – Identificação do domínio, contradomínio e imagem da função

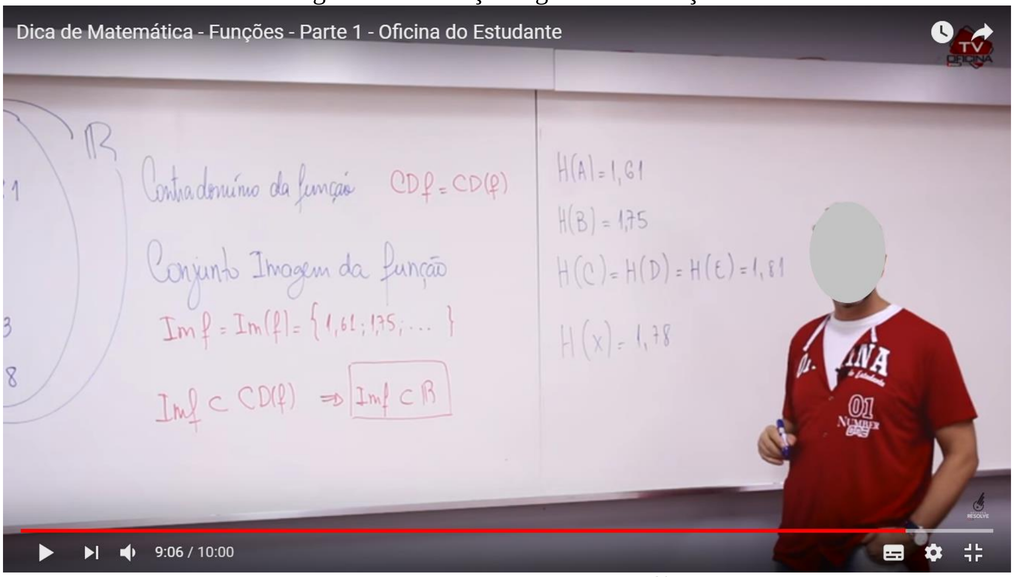


Fonte: Canal Oficina Resolve[29].

Por fim, o professor discorre sobre a importância dos estudantes conhecem e saberem manipular a notação algébrica de uma função, tomando o exemplo apresentado como forma de contextualizar os elementos que a compõem. Nesse sentido, ele define $H(x)$ como a relação funcional entre os elementos dos conjuntos de domínio e imagem da função. Dessa forma, conforme ilustrado na Figura 53, parte dos dados apresentados por meio dos diagramas é retomada utilizando a notação algébrica de função, com destaque aos três elementos que possuem mesma imagem e, também, ao exemplo no qual busca-se x a partir da imagem indicada.

[29] Disponível em https://www.youtube.com/watch?v=8qRun3Dr_-c Acesso em 12 Abr 2018.

Figura 53 – Notação algébrica da função



Fonte: Canal Oficina Resolve[30].

A partir da análise dos tópicos abordados ao longo do vídeo e do levantamento feito com base nas respostas do participante T3_A18, entendeu-se que o vídeo selecionado poderia vir a colaborar com o estudo dos participantes do PMO, retomando noções básicas acerca do conceito de funções, a fim atribuir significado aos elementos envolvidos na resolução de questões pertinentes ao estudo do Cálculo Diferencial e Integral.

Destaca-se, ainda, que a opção pelo uso de vídeo com linguagem voltada a estudantes pré-universitários leva em consideração que uma parcela do grupo de participantes do projeto é composta por acadêmicos cursando o componente curricular denominado Cálculo I, o qual, de acordo com as matrizes curriculares dos cursos envolvidos na investigação, é uma das disciplinas iniciais, prevista entre o primeiro e segundo semestres desses cursos. Nesse sentido, infere-se que esse tipo de linguagem seria, de certa forma, familiar aos participantes, retomando a ideia de Barufi (1999) sobre as dificuldades dos acadêmicos em lidar com o nível de rigor que passam a encarar ao ingressar no Ensino Superior.

O próximo vídeo a ser apresentado, conforme indicado no quadro da Figura 54, também foi produzido e publicado pelo canal Oficina Resolve. Denominado “Matemática - Funções - Domínio e Imagem - Parte 3 - Oficina do Estudante”, dá seguimento ao estudo das funções, dessa vez abordando questões relacionadas à interpretação de gráficos, identificando os intervalos de domínio e imagem de funções por meio da representação geométrica, juntamente com revisão acerca das noções de abcissas e ordenadas. A ficha técnica desse vídeo é apresentada no quadro da Figura 54.

---

[30] Disponível em https://www.youtube.com/watch?v=8qRun3Dr_-c Acesso em 12 Abr 2018.

Figura 54 – Dados de vídeo voltado ao estudo de abscissa, ordenada, domínio e imagem de funções

INFORMAÇÕES	DESCRIÇÃO
Título do vídeo	Matemática - Funções - Domínio e Imagem - Parte 3 - Oficina do Estudante
Duração	8:04
Álbum	Funções
Canal	oficinadoestudante/Oficina Resolve
Número de inscritos	Aproximadamente 121 mil inscritos
Disponível em	https://www.youtube.com/watch?v=TFpOD_LDxi4
Descrição encontrada no canal	Nesta aula de Matemática, o professor Altair continua a estudar as funções. Dessa vez vamos entender conceitos como abscissa, ordenada, domínio e imagem da função. Bora!
Descrição publicada no grupo	Nesse vídeo do canal oficinadoestudante, o professor Altair utiliza software dinâmico para auxiliar na identificação do domínio e imagem de gráficos de funções.

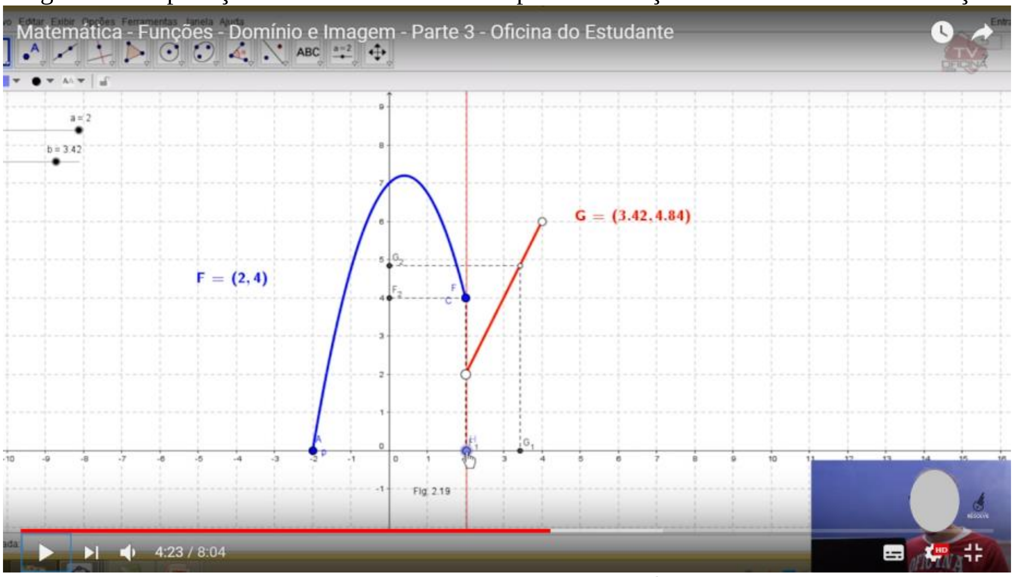
Fonte: a pesquisa.

O vídeo tem início com a apresentação do gráfico de uma função definida por duas sentenças, plotado no GeoGebra, tal como indicado na Figura 55. Com base no exemplo dado, o professor Altair parte para a análise dos diferentes aspectos que compõem o gráfico, tais como: a natureza das funções que definem o gráfico, a identificação das abcissas e ordenadas dessa função; e a aplicação do teste da reta vertical ao longo do gráfico da função dada no exemplo.

Tal como indicado na Figura 55, a função analisada é formada por duas sentenças, sendo a primeira referente a uma função quadrática com concavidade voltada para cima e a segunda uma função linear crescente. A partir do exemplo dado e utilizando os recursos disponíveis no *software* escolhido, o professor parte para a identificação das coordenadas das funções por meio do deslocamento das abcissas das mesmas. Nesse processo, ele apresenta diferentes pares ordenados obtidos, apontando as abcissas e ordenadas de cada um dos pontos.

Entende-se que o tipo de tratamento dado à função, no qual busca-se mostrar a relação funcional entre os dados da função explorando a ideia de variabilidade ao invés de recorrer a recursos estáticos, possa vir a auxiliar os participantes do PMO a superarem dificuldades relacionadas a dualidade variabilidade/permanência (REZENDE, 2003), tais como as verificadas a partir das respostas dadas pelo participante T3_A18.

Figura 55 – Aplicação do teste da reta vertical para verificação da existência de uma função



Fonte: Canal Oficina Resolve[31].

Ainda nesse trecho do vídeo, o professor faz a aplicação do teste da reta vertical, o qual se destina a verificar, por meio de uma varredura, se existe algum ponto da curva traçada que intercepte mais de uma vez essa reta, determinando se a curva se trata, ou não, de uma função (ANTON, 2006). O teste utilizado tem dupla função na análise realizada, servindo para confirmar que o gráfico verificado refere-se a uma função e, também, verificar os pontos nos quais a função está definida, em espacial no caso da descontinuidade presente no gráfico (Figura 55).

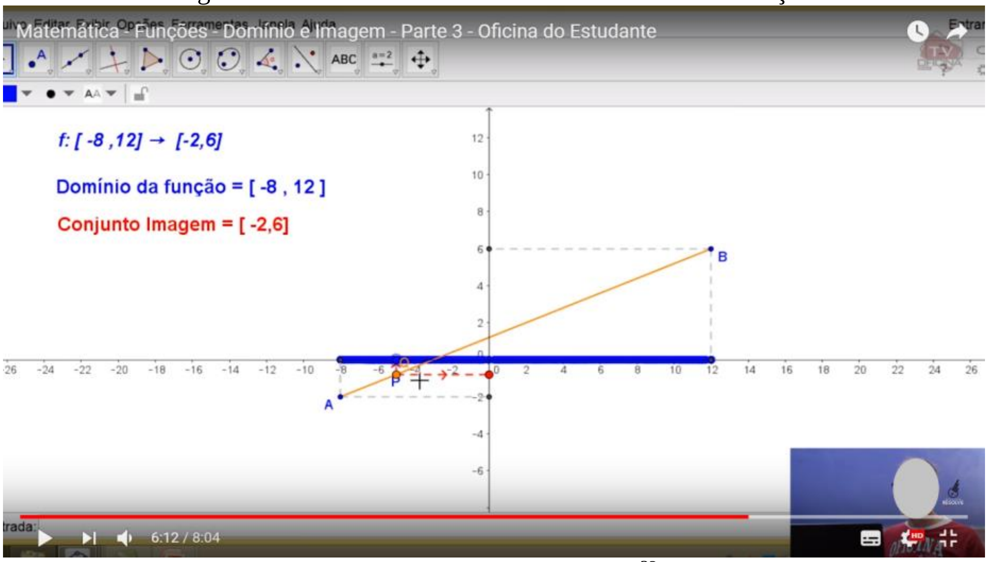
Além dos aspectos mencionados, o referido vídeo aborda questões relacionadas ao estudo dos intervalos de domínio e imagem de uma função, mais especificamente à projeção dos mesmos nos eixos das abcissas e das coordenadas. Para tal, o professor utiliza, novamente, dos recursos disponíveis no *software* escolhido para mostrar como se dá a projeção de cada um dos pontos da função nos intervalos mencionados.

Primeiramente, o professor retoma o que é o domínio de uma função, relacionando sua explicação com a ideia de conjunto de partida e, após isso, parte para a análise gráfica do domínio de uma função. A Figura 56 apresenta a análise do intervalo referente ao domínio de uma função linear, dado pela projeção dos pontos do segmento determinado pela mesma no eixo das abcissas. Cabe destacar que o domínio da função vai sendo definido à medida que o professor varia a posição de um dos pontos da função ao longo do intervalo no qual a mesma está definida.

---

[31] Disponível em https://www.youtube.com/watch?v=TFpOD_LDxi4 Acesso em 07 Abr 2018.

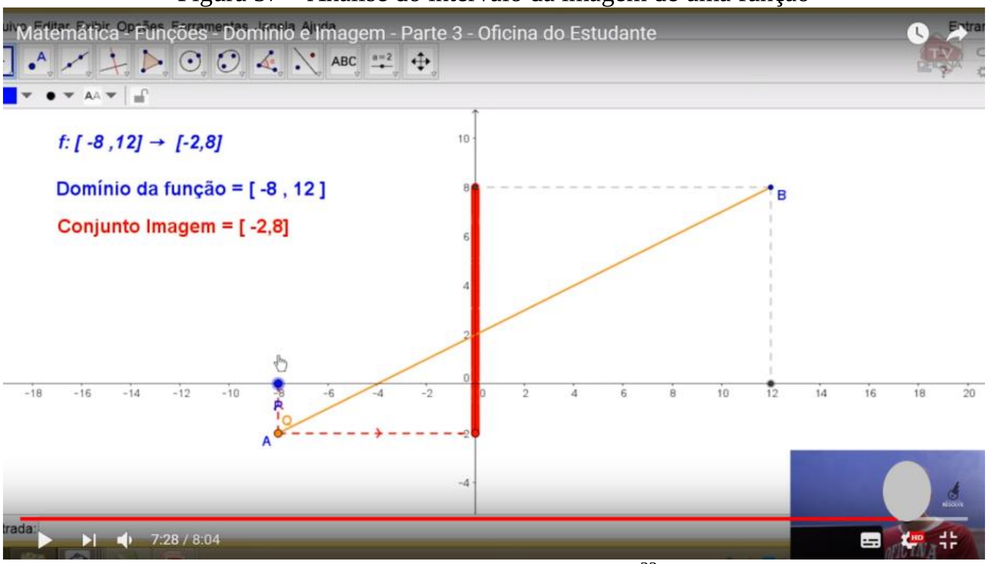
Figura 56 – Análise do intervalo do domínio de uma função



Fonte: Canal Oficina Resolve[32].

A análise da imagem da função segue processo semelhante ao do domínio, de modo que o professor retoma a noção de conjunto de chegada da relação funcional, definindo a imagem como um subconjunto do contradomínio. Logo em seguida, conforme indicado na Figura 57, é mostrada a projeção dos pontos da função no eixo das ordenadas à medida que é feito o deslocamento de um dos seus pontos. Bem como na Figura 56, a Figura 57 mostra, ainda, a representação do domínio e imagem da função por meio da notação de intervalos.

Figura 57 – Análise do intervalo da imagem de uma função



Fonte: Canal Oficina Resolve[33].

Além dos aspectos destacados anteriormente acerca do uso de *software* dinâmico para análise gráfica de diferentes tipos de funções, e a forma como entende-se que isso possa vir a auxiliar os participantes a superarem eventuais dificuldades relacionadas a dualidade

[32] Disponível em https://www.youtube.com/watch?v=TFpOD_LDxi4 Acesso em 07 Abr 2018.
[33] Disponível em https://www.youtube.com/watch?v=TFpOD_LDxi4 Acesso em 07 Abr 2018.

variabilidade/permanência (REZENDE, 2003), destaca-se que as explicações dadas pelo professor, articuladas com as ideias dos conjuntos de chegada e partida possam vir a retomar os conteúdos aprendidos em aula, auxiliando os participantes do PMO a diferenciar os elementos que compõem o estudo de uma função, sabendo identificar, a partir da interpretação da representação geométrica da função, os intervalos referentes ao domínio e imagem de uma função e formas de transcrever essas informações para a notação de intervalos.

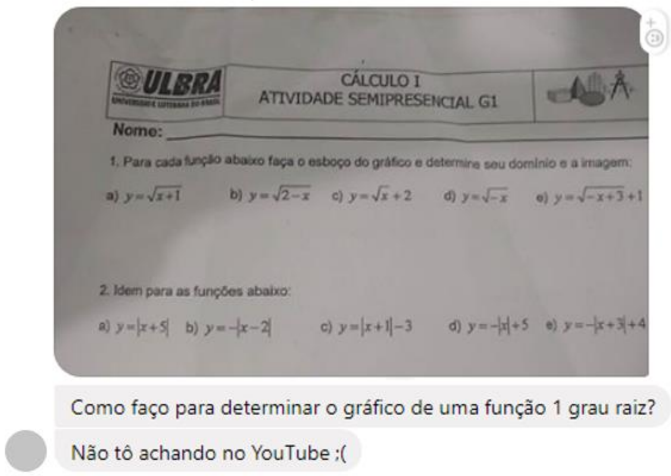
Uma vez trazidos exemplos de como se deu a análise dos vídeos selecionados como material de apoio a ser disponibilizado aos participantes do PMO, apresenta-se, na próxima seção, a análise de recortes das interações ocorridas ao longo da aplicação do projeto.

6.1.3 Sobre as interações realizadas

A última seção a ser apresentada nesse capítulo se refere à análise de recortes das interações entre pesquisadora e um dos participantes do PMO, ocorridas ao longo da aplicação do projeto. Esta seção tem por finalidade concluir a articulação entre os dados apresentados nas seções anteriores, indicando de que forma essas análises viabilizaram a implementação do projeto que mobilizou a presente investigação.

O recorte selecionado para análise se refere à interação ocorrida entre o participante MO4 e a pesquisadora, via *chat*, na qual são discutidos aspectos referentes ao conceito de funções, tais como o esboço do gráfico e a análise do domínio e imagem de funções envolvendo raiz quadrada. A interação mencionada tem início a partir de questionamento realizado pelo participante MO4, o qual é destacado na Figura 58.

Figura 58 – Início da interação entre pesquisadora e participante MO4



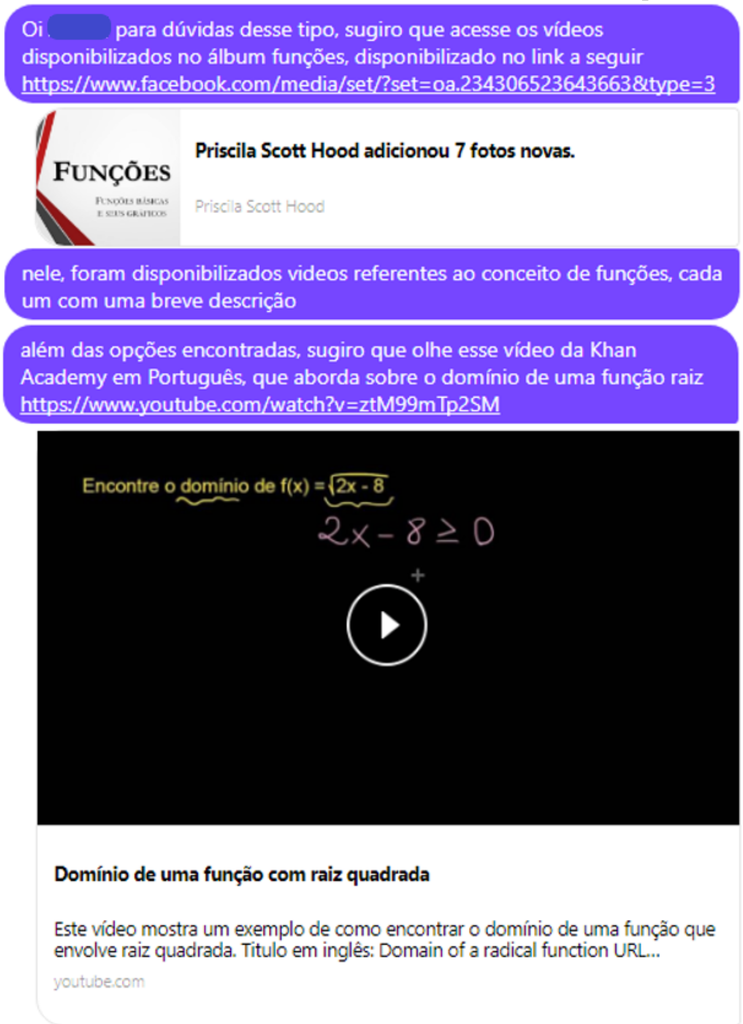
Fonte: a pesquisa.

Conforme indicado na Figura 58, o questionamento do participante surge a partir da tentativa de realizar atividade apresentada em aula, sendo inicialmente voltado ao esboço de gráficos de diferentes funções do tipo $y = \sqrt{x + a} + b$. Essa interação foi selecionada por envolver o mesmo tipo de função da questão tomada como exemplo na análise de erros realizada anteriormente (seção 6.1.1).

A fala do participante aponta para uma tentativa de utilização de vídeos disponíveis no *YouTube* como recurso para auxiliar no seu estudo, no entanto a afirmação "Não tô achando no YouTube" sugere que sua busca se deu diretamente na plataforma, sem que tivesse havido a verificação da disponibilidade desse material na página do PMO. Ainda em relação ao questionamento do participante, tem-se que o mesmo não deixa claro se "função 1 grau raiz" se refere ao grau dos radicandos apresentados na questão ou se aponta para um entendimento equivocado acerca do que seria o grau de uma função do tipo raiz quadrada.

A partir desse contexto, propõe-se ao participante que seja realizada consulta ao álbum "Funções", a fim de que ele procure, dentre os vídeos selecionados, aquele(s) que julgar pertinente(s) para a superação da sua dificuldade (Figura 59). Além do *hiperlink* que direcionaria o participante ao álbum sugerido, foi realizada uma busca por um vídeo complementar, voltado exclusivamente ao estudo do domínio de funções do tipo raiz quadrada.

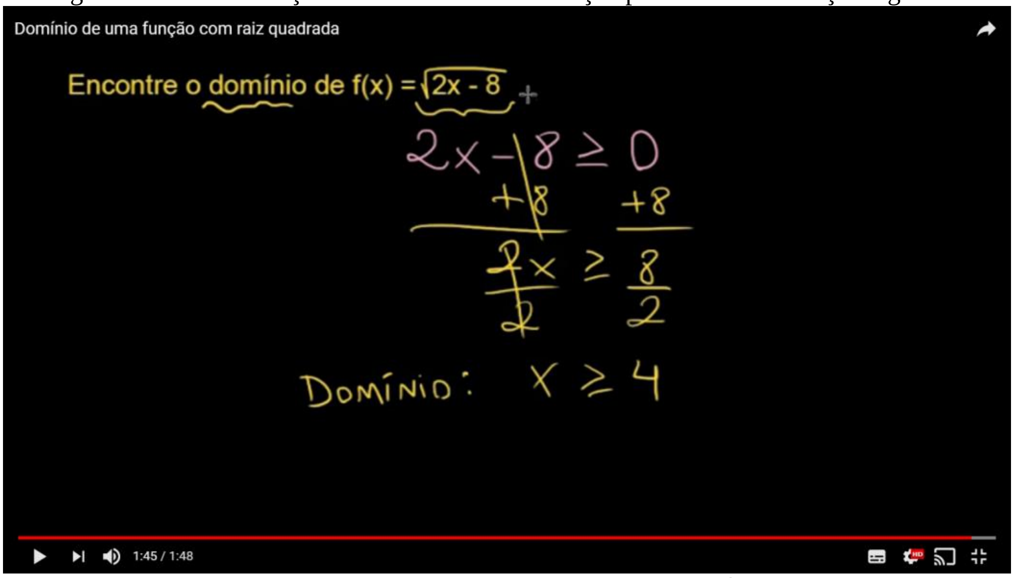
Figura 59 – Sugestões feitas ao participante MO4 incluindo consulta ao álbum "Funções" e vídeo complementar



Fonte: a pesquisa.

O vídeo complementar sugerido é um vídeo de curta duração (menos de dois minutos), produzido e publicado pelo canal Khan Academy em Português[34], no qual é apresentada a resolução de uma atividade que pede a determinação do domínio de uma função do tipo raiz quadrada. Conforme indicado na Figura 60, o caminho sugerido para solucionar o exemplo é por meio de resolução algébrica, a partir da qual encontra-se que o domínio natural da função é dado por $x \geq 4$.

Figura 60 – Determinação do domínio de uma função por meio de resolução algébrica



Fonte: Canal Khan Academy em Português[35].

A intervenção inicial realizada teve por objetivo indicar vídeos que servissem como base para discussões relacionadas às noções envolvidas na questão apresentada pelo participante, seja de forma indireta – analisando como interpretar os intervalos de domínio e imagem em diferentes tipos de funções, não necessariamente em uma função envolvendo raiz quadrada –, ou de forma direta – direcionando esse estudo para a análise algébrica do domínio de funções dessa natureza.

Os próximos passos a serem tomados na discussão em torno do questionamento levantado pelo participante MO4 iriam na direção de aguardar o *feedback* do participante, verificando a necessidade de novos vídeos ou o uso de novos exemplos para discussão. No entanto, tais medidas não foram tomadas em razão da fala do participante sobre ter conseguido solucionar a questão sem a necessidade de novas intervenções (Figura 61).

---

[34] Disponível em https://www.youtube.com/user/KhanAcademyPortugues Acesso em 15 Mar 2018.
[35] Disponível em https://www.youtube.com/watch?v=ztM99m//Tp2SM Acesso em 12 Fev 2018.

Figura 61 – *Feedback* dado pelo participante MO4

Fonte: a pesquisa.

Esse primeiro recorte, apresentou uma interação pontual entre os envolvidos, na qual o participante manifestou ter sanado suas dúvidas sem a necessidade de maiores intervenções por parte da pesquisadora. No entanto, destacam-se desse diálogo evidências sobre a iniciativa desse participante em buscar vídeos para auxiliar no seu processo de estudo, o que pode indicar que o hábito de utilizar desse tipo de recurso já estava presente na sua realidade, de modo que o diferencial do PMO não se encontra na disponibilização de vídeos como material de apoio, mas sim no oferecimento de material previamente selecionado e organizado em uma estrutura que se assemelhe aos moldes das disciplinas cursadas por esses acadêmicos.

Encerradas as discussões acerca do primeiro questionamento, o mesmo participante propõe um novo debate, dessa vez envolvendo questões relacionadas a outro tópico do estudo de funções: as transformações de funções. Conforme indicado na Figura 62, o segundo questionamento realizado pelo participante MO4 é motivado por uma atividade na qual solicita-se a determinação de uma série de funções obtidas a partir de uma função genérica dada por $y = f(x)$. A solução desse tipo de questão demanda do estudante um conjunto de conhecimentos relacionados à translação, reflexão e compressão e alongamento de funções.

Figura 62 – Questão que motivou questionamento realizado pelo participante MO4

1 Suponha dado o gráfico da função y = f(x). Escreva equações para os gráficos obtidos a partir do gráfico de f(x) da seguinte forma:

a) Desloque 3 unidades para cima. R. ....

b) Desloque 3 unidades para baixo. R. ....

c) Desloque 3 unidades para a direita. R. ....

d) Desloque 3 unidades para a esquerda. R. ....

e) Faça reflexão em torno do eixo x. R. ....

f) Faça reflexão em torno do eixo y R. ....

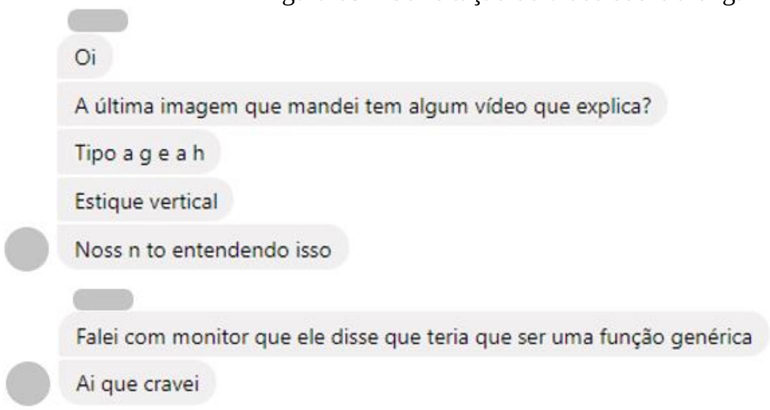
g) Estique verticalmente por um fator de 3. R. ....

h) Encolha verticalmente por um fator de 3. R. ....

Fonte: a pesquisa.

Assim como no primeiro recorte analisado, o questionamento do participante é acompanhado da solicitação pela indicação de vídeos relacionados a atividade apresentada, com destaque para as questões envolvendo o alongamento e a compressão de funções (Figura 63). Ainda de acordo com a Figura 63, tem-se que o participante já havia procurado apoio junto à monitoria presencial, tendo permanecido com dúvidas mesmo após a explicação do monitor.

Figura 63 – Solicitação de vídeo sobre alongamento de funções

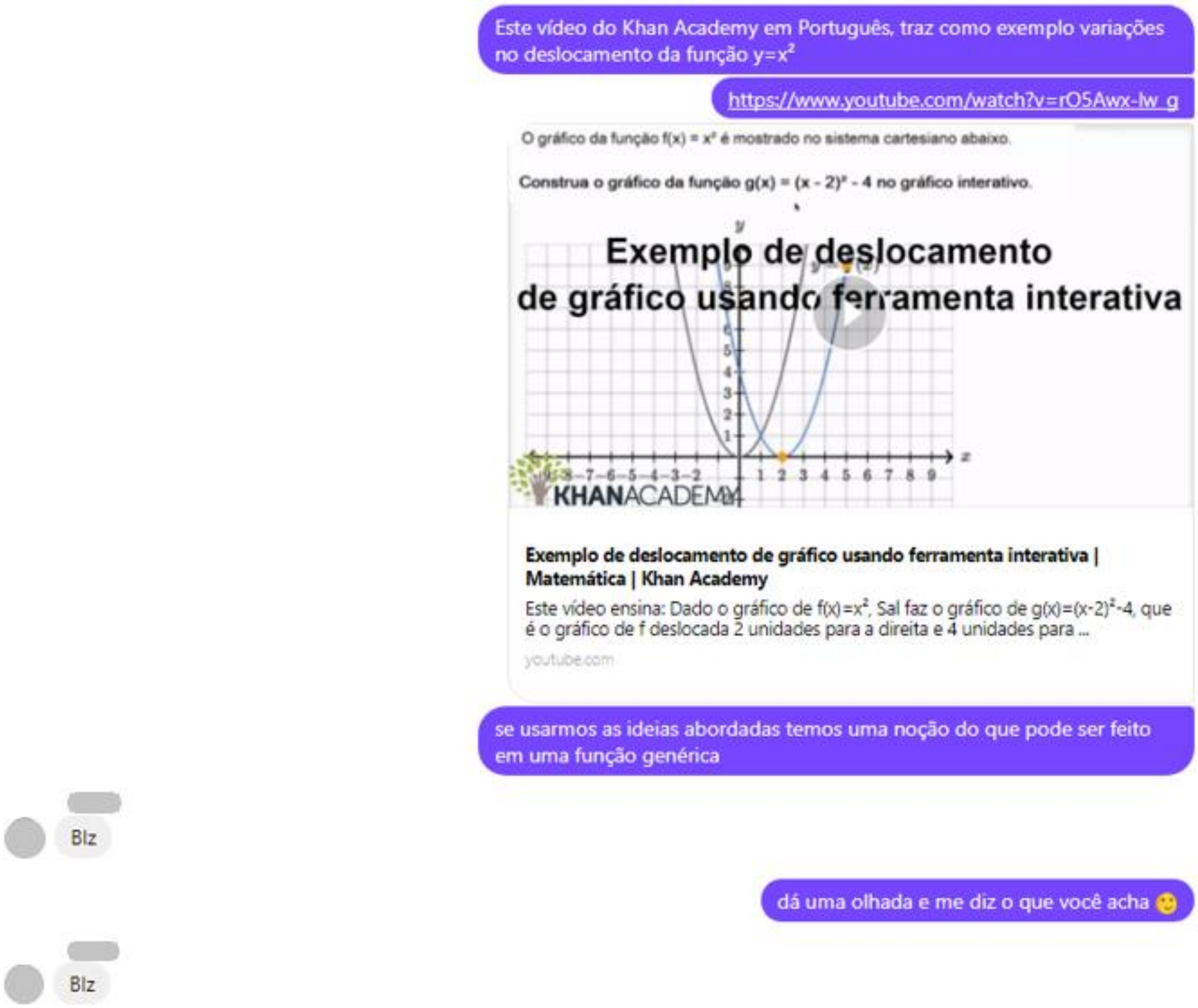


Fonte: a pesquisa.

Ressalta-se que o álbum sugerido anteriormente já continha vídeos que abordavam tópicos relacionados ao questionamento do participante, tendo em vista que cada um dos tópicos que compunham o álbum traziam vídeos relacionados ao estudo das variações dos coeficientes angulares e lineares nos diferentes tipos de funções. Entretanto, para que tais vídeos fossem efetivos frente a dúvida do participante MO4, seria necessário que ele relacionasse as informações apresentadas separadamente e generalizasse esse conhecimento, transpondo-o para uma função genérica, o que vai de encontro a orientação recebida pelo participante ao apresentar esse questionamento ao responsável pela monitoria presencial da instituição (Figura 63).

Nesse contexto, as interações seguintes se voltaram ao estudo das variações de um tipo específico de função – a função quadrática $y = x^2$ – para que, a partir dela, fossem realizadas as generalizações necessárias para o entendimento das demais funções. Assim como na discussão apresentada anteriormente, além do material previamente selecionado, é feita a busca e indicação de vídeo complementar para o participante, o qual foi selecionado a partir das dúvidas mencionadas, tendo como objetivo encontrar um vídeo que se aproxime o máximo possível do tema da discussão.

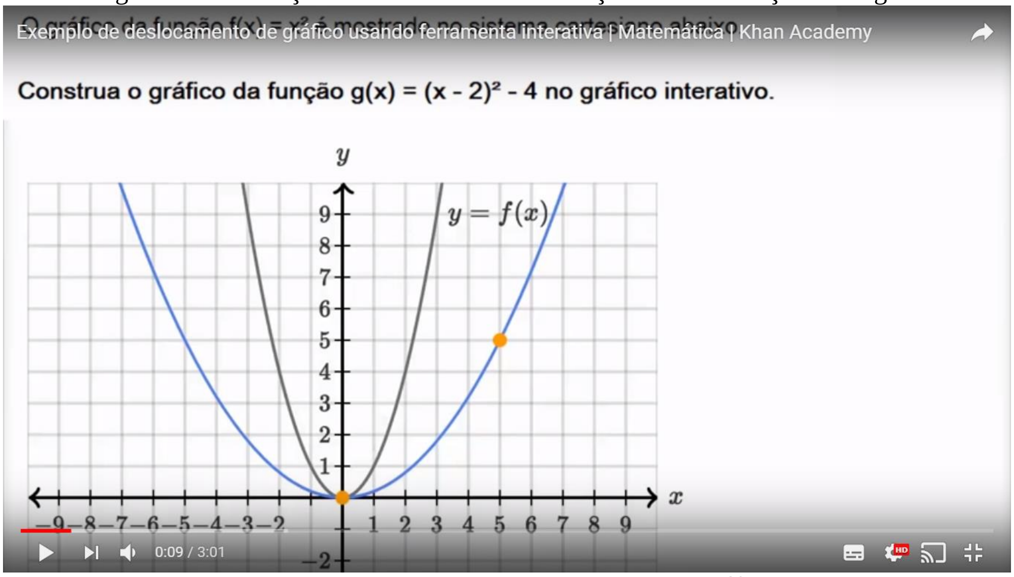
Figura 64 – Sugestão de vídeo sobre translações de funções



Fonte: a pesquisa.

O vídeo sugerido foi encontra-se disponível no canal Khan Academy em Português e apresenta, em pouco mais de três minutos, um estudo sobre as translações horizontais e verticais de funções quadráticas, analisando, por meio de *software* dinâmico, o comportamento das funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = (x-2)^2 - 4$ (Figura 65). A análise é realizada tomando-se como referência inicial o gráfico de duas funções coincidentes, de modo que, nesse contexto, tem-se que $f(x) = g(x)$. A partir disso, discute-se os efeitos gráficos de $g(x)$ à medida que se subtrai uma constante 2 de x, ou seja, o deslocamento horizontal obtido em relação a $f(x)$ quando $g(x) = (x-2)^2$. Posteriormente, é verificado o que ocorre com o gráfico da função $g(x)$ quando é subtraída uma constante 4 de $g(x)$, isso é, o deslocamento vertical obtido em relação a $f(x)$ quando tem-se que $g(x) = (x-2)^2 - 4$.

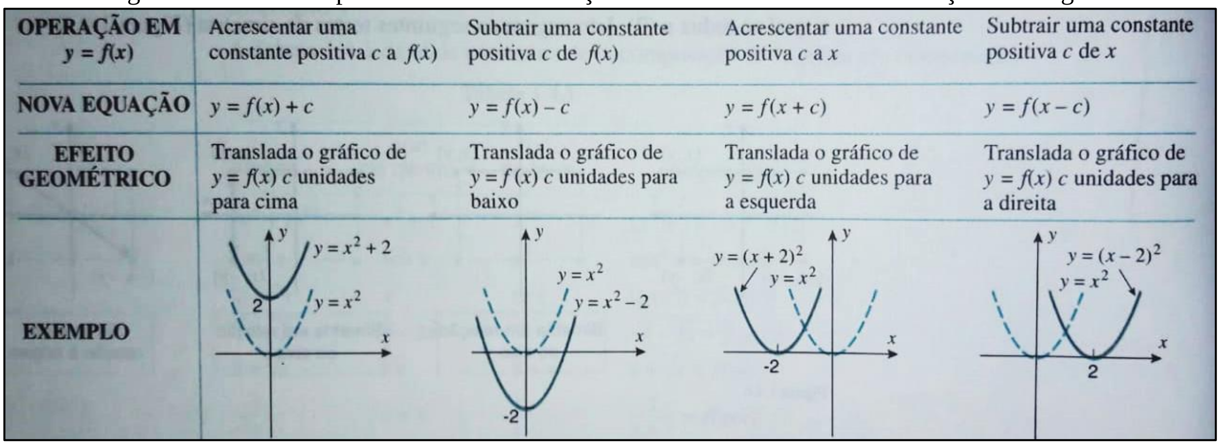
Figura 65 – Indicação de vídeo sobre as translações de uma função do 2º grau



Fonte: Canal Khan Academy em Português[36].

Destaca-se, ainda, que a análise apresentada ao longo do vídeo sugerido ao participante é semelhante ao modelo proposto por Anton (2006) (L1), no qual o autor aponta para técnicas que podem ser utilizadas para a análise das translações de uma função do segundo grau, e que podem ser generalizadas para outros tipos de funções.

Figura 66 – Técnicas para análise das translações verticais e horizontais de funções do 2º grau



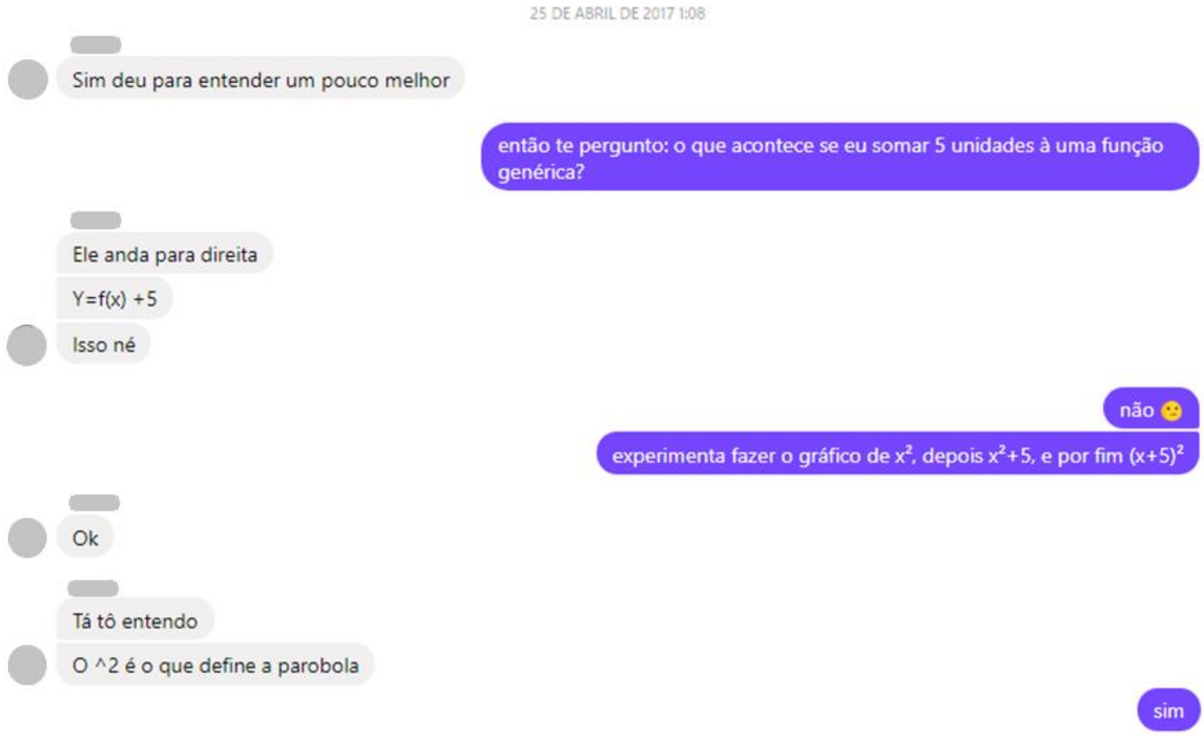
OPERAÇÃO EM $y = f(x)$	Acrescentar uma constante positiva c a $f(x)$	Subtrair uma constante positiva c de $f(x)$	Acrescentar uma constante positiva c a x	Subtrair uma constante positiva c de x
NOVA EQUAÇÃO	$y = f(x) + c$	$y = f(x) - c$	$y = f(x + c)$	$y = f(x - c)$
EFEITO GEOMÉTRICO	Translada o gráfico de $y = f(x)$ c unidades para cima	Translada o gráfico de $y = f(x)$ c unidades para baixo	Translada o gráfico de $y = f(x)$ c unidades para a esquerda	Translada o gráfico de $y = f(x)$ c unidades para a direita
EXEMPLO	$y = x^2 + 2$; $y = x^2$; 2	$y = x^2$; $y = x^2 - 2$; -2	$y = (x + 2)^2$; $y = x^2$; -2	$y = (x - 2)^2$; $y = x^2$; 2

Fonte: Anton (2006, p. 54).

Tendo o participante MO4 assistido ao vídeo sugerido, deu-se início à discussão sobre os aspectos pertinentes ao questionamento levantado por ele. Nesse sentido, conforme indicado na Figura 67, tomando-se como base o estudo apresentado no vídeo do canal Khan Academy em Português, as interações por parte da pesquisadora tiveram por objetivo verificar o entendimento do participante em relação aos diferentes tipos de variações possíveis para uma função genérica.

[36] Disponível em https://www.youtube.com/watch?v=rO5Awx-lw_g&t=9s Acesso em 13 Fev 2018.

Figura 67 – *Feedback* dado pelo participante MO4

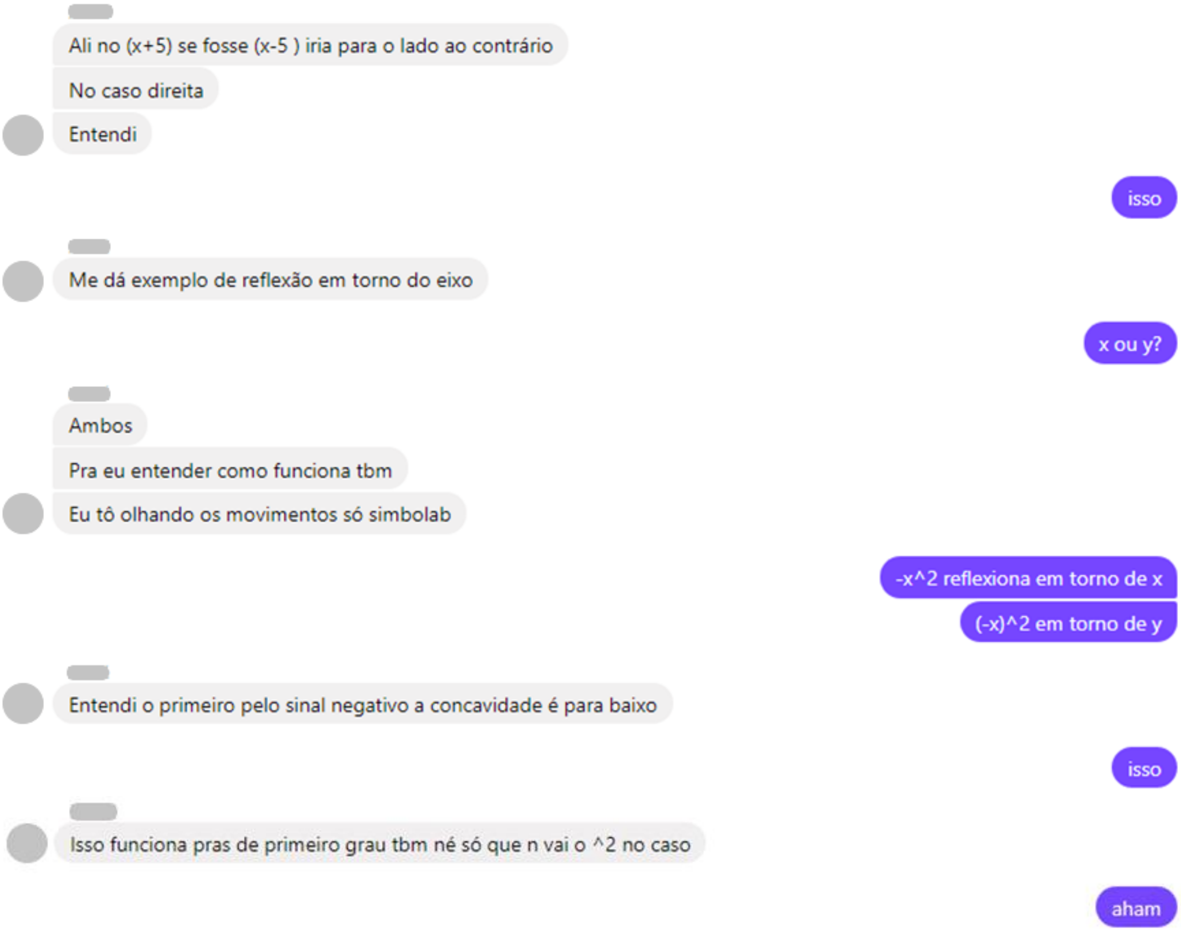


Fonte: a pesquisa.

Ainda de acordo com a Figura 67, o primeiro questionamento feito para o participante diz respeito à translação vertical de uma função, uma vez que lhe é perguntado o que acontece quando são somadas cinco unidades à uma função genérica. Como resposta, ele menciona que a ela “anda” para a direita, apontando que essa variação seria indicada na forma algébrica por $y = f(x) + 5$. A representação algébrica apontada pelo participante é coerente com a função a qual a pesquisadora se referiu quando utilizou a forma de representação verbal (ANTON, 2006), no entanto, há uma discrepância entre essa função e o comportamento indicado anteriormente pelo participante. Entende-se que esse tipo de situação possa ser classificado como um caso de **teorema ou definição distorcida**, (MOVSHOVITZ-HADAR; ZASLAVSKY; INBAR, 1987), tendo em vista que o erro cometido pelo participante indica que seu entendimento acerca dos efeitos gráficos gerados pelas diferentes formas de translação não foi devidamente consolidado.

Com o objetivo de promover uma reflexão do participante entorno das diferentes translações de uma função genérica, a fim de que ele passe a identificar os elementos que caracterizam os deslocamentos horizontal e vertical de uma função, sugere-se que ele esboce o gráfico de três funções distintas, dadas por $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 + 5$ e $h(x) = (x + 5)^2$. Destaca-se que foram escolhidas funções quadráticas devido ao vídeo utilizado como material de apoio durante essa interação.

Figura 68 – Discussão sobre translação horizontal de uma função e reflexão em torno dos eixos x e y



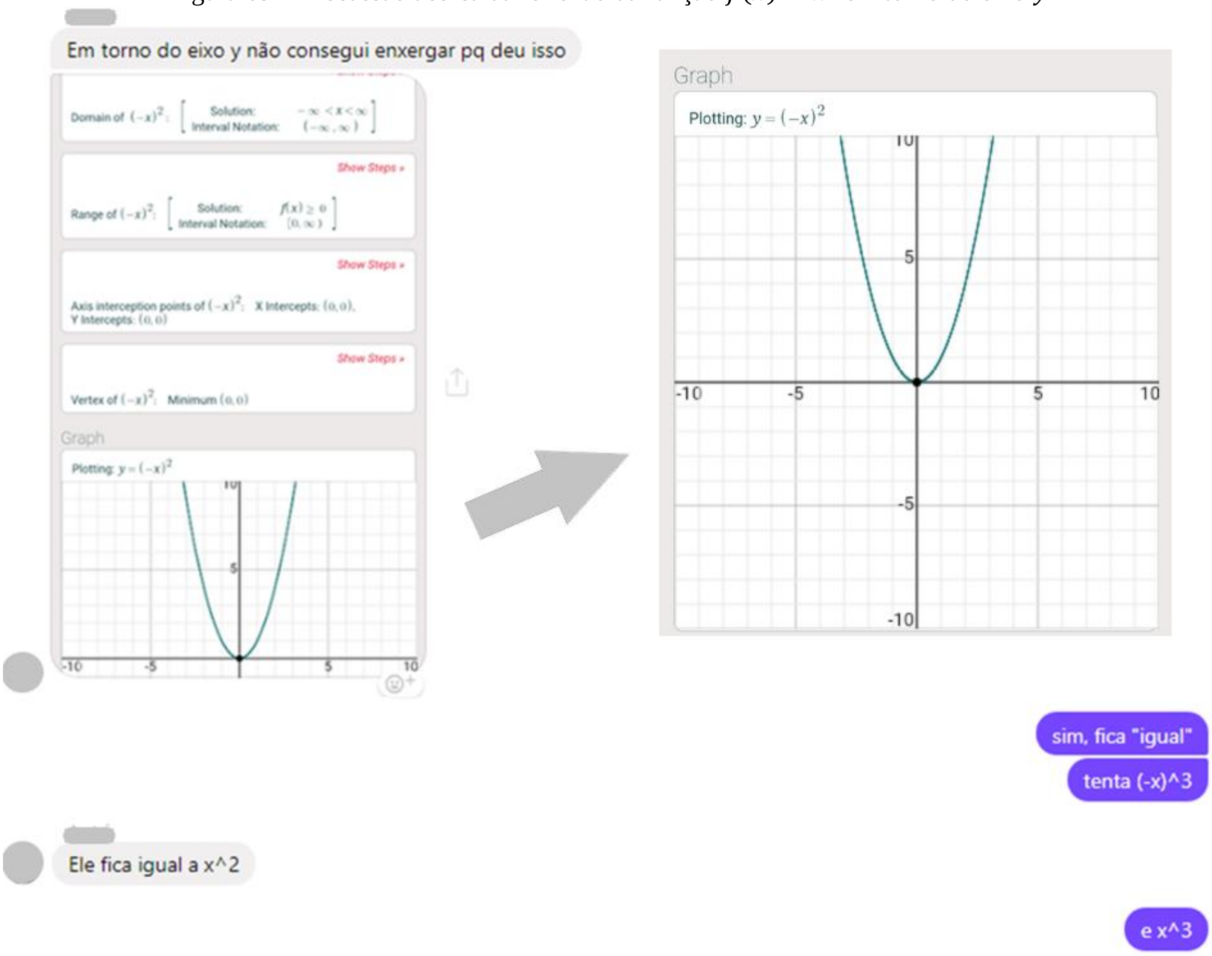
Fonte: a pesquisa.

Os primeiros sinais de compreensão do participante em relação às diferentes formas de translação são apresentados logo após a sugestão do esboço dos gráficos das três funções quadráticas. De acordo com o exposto na Figura 68, a fala do participante começa a apresentar coerência entre as formas de representação algébrica e verbal (ANTON, 2006), dada sua colocação sobre a mudança de direção no deslocamento horizontal da função quando, ao invés de somarmos, subtraímos cinco unidades no x da função. Cabe apontar, dados os recursos disponíveis na plataforma na qual ocorreram as interações analisadas e as eventuais dificuldades que os participantes possam ter enfrentado na representação de alguns elementos matemáticos, e pelo contexto no qual se insere esse trecho da interação, entender-se que o participante estava se referindo à duas funções do segundo grau, sendo elas $f(x) = (x + 5)^2$ e $g(x) = (x - 5)^2$.

Ainda na Figura 68, é possível verificar a solicitação do participante por exemplos que o auxiliem a diferenciar as formas de reflexão de uma função em torno dos eixos x e y. Tal solicitação é respondida com a indicação de dois exemplos elementares, dados por $f(x) = -x^2$ e $g(x) = (-x)^2$, cujos gráficos são prontamente esboçados pelo participante com o uso de *software* dinâmico escolhido por ele. A partir das representações obtidas, são apresentadas as considerações indicadas nas Figuras 69 e 71.

Ao esboçar os gráficos das duas funções sugeridas, o participante consegue visualizar o efeito gráfico causado pela reflexão da função $f(x) = -x^2$ em torno do eixo x, tomando como referência a função $y = x^2$. No entanto, o mesmo não ocorre em relação ao gráfico da função $g(x) = (-x)^2$, o que leva o participante a realizar o questionamento apresentado na Figura 69. Conforme indicado na referida figura, o participante alega não visualizar nenhuma variação entre o gráfico obtido a partir da função $g(x) = (-x)^2$ e o gráfico, já conhecido, da função $y = x^2$. A fala do participante é confirmada pelo compartilhamento da imagem em destaque na Figura 69, na qual verifica-se que o gráfico esboçado assemelha-se, de fato, ao gráfico da função $y = x^2$.

Figura 69 – Discussão acerca da reflexão da função $f(x) = x^2$ em torno do eixo y



Fonte: a pesquisa.

O efeito percebido pelo participante ocorre devido à natureza da função analisada (função par) e a forma de representação empregada (representação geométrica), tendo em vista que as imagens obtidas tanto para $g(x) = (-x)^2$ e $y = x^2$ são as mesmas, ficando a variação restrita a representação numérica de tais funções, conforme indicado na Figura 70.

Figura 70 – Representação numérica das funções $y = x^2$ e $g(x) = (-x)^2$

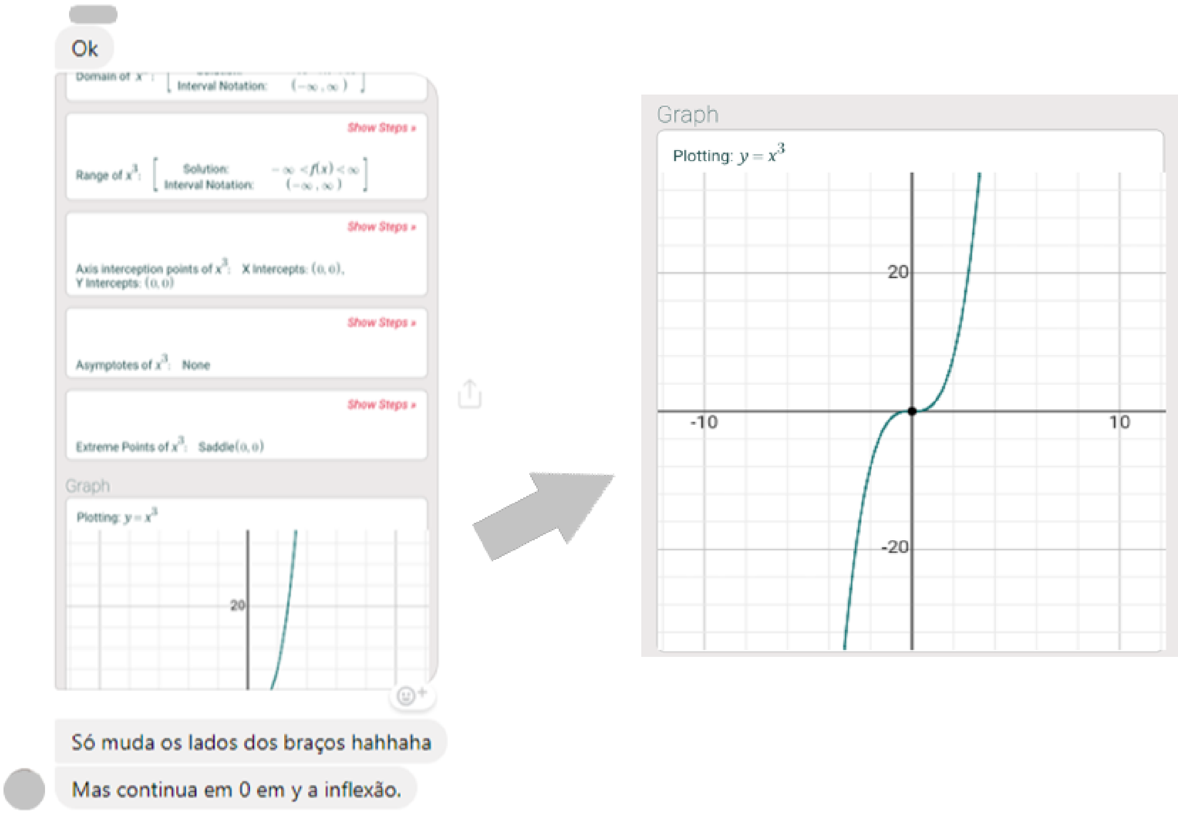
x	$y = x^2$	$g(x) = (-x)^2$
-2	$y = (-2)^2 = 4$	$g(-2) = [-(-2)]^2 = 2^2 = 4$
-1	$y = (-1)^2 = 1$	$g(-1) = [-(-1)]^2 = 1^2 = 1$
0	$y = 0^2 = 0$	$g(0) = (-0)^2 = 0^2 = 0$
1	$y = 1^2 = 1$	$g(1) = (-1)^2 = 1$
2	$y = 2^2 = 4$	$g(2) = (-2)^2 = 4$

Fonte: a pesquisa.

Traduzindo-se os dados da figura acima para uma forma de representação verbal (ANTON, 2006), tem-se que o trecho do gráfico referente ao subdomínio dado pelo intervalo $(-\infty, 0)$, que na função $y = x^2$ é traçado à esquerda do eixo y, fosse traçado à direita do mesmo eixo quando a função é $g(x) = (-x)^2$. O mesmo ocorrendo, analogamente, para o subdomínio dado pelo intervalo $(0, +\infty)$, de modo que o trecho que anteriormente ficava à direita de y, passa a ser traçado à esquerda do mesmo eixo.

Dessa forma, a fim de se manter o recurso já utilizado pelo participante, dando seguimento ao raciocínio constituído por ele, sugere-se que sejam feitos os esboços dos gráficos de um novo tipo função, sendo elas $y = x^3$ e $f(x) = (-x)^3$, as quais são exemplos de funções ímpares (Figura 69).

Figura 71 – Discussão acerca da reflexão da função $f(x) = x^3$ em torno do eixo y

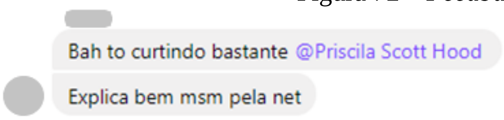


Fonte: a pesquisa.

Ao esboçar os gráficos das novas funções, o participante passa a perceber as variações ocasionadas pela reflexão da função $y = x^3$ em torno do eixo y, compreendendo como as mesmas acabam por gerar a função $f(x) = (-x)^3$. Tal constatação, é indicada na Figura 71, juntamente com uma breve consideração acerca do ponto de inflexão das funções analisadas, na qual o participante aponta que o mesmo se manteve igual, independentemente das reflexões realizadas.

Destaca-se, ainda, que a questão apresentada pelo participante MO4 permitia a discussão entorno de outros aspectos envolvidos no estudo das transformações de funções no plano, tais como a análise do alongamento e compressão do gráfico de funções. No entanto, a discussão é encerrada pelo participante por meio de um *feedback*, no qual ele expõe sua opinião acerca do desenvolvimento das interações ocorridas no PMO, destacando que as mesmas estão se avançando de forma satisfatória, não havendo prejuízos nas interações mediadas por uma plataforma *online* em comparação com um atendimento presencial (Figura 72).

Figura 72 – *Feedback* final dado pelo participante MO4



Fonte: a pesquisa.

Foram apresentados e analisados aqui dados referentes a um dos eixos segundo os quais a análise foi conduzida. Esses dados emergiram a partir da análise dos erros cometidos pelo acadêmico T3_A18 na solução de questão avaliativa, a análise dos vídeos disponibilizados na página destinada ao PMO, os quais foram selecionados a partir dos erros levantados e, por fim, a análise das interações ocorridas entre a pesquisadora e um participante ao longo da aplicação do PMO.

Particularmente, foi trazida apenas a análise sobre a discussão de uma questão que envolvia diferentes formas de representação uma função, tais como a numérica, a geométrica e a algébrica, para a determinação dos seus intervalos de domínio e imagem. Isso se constitui como uma questão clássica de provas de Cálculo e que apresenta erros recorrentes em relação conceito de Funções.

No caso analisado, para uma f tal que o domínio se referia a $x \geq 0$, a representação geométrica revelou a tomada de um domínio $[1, +\infty)$, o que aponta para um entendimento que o número imediatamente maior do que zero é o 1, sendo excluídos todos os valores reais entre zero e 1, revelando um erro do tipo **teorema ou definição distorcida**. Em relação às representações algébricas apresentadas pelo participante para essa mesma função, tem-se que foram verificados diferentes erros de notação, sendo um deles a representação do intervalo do domínio da função de forma diferente da apontada na definição, um erro de caráter elementar classificado como um caso de **erro técnico**. Já no que se refere à imagem dessa função, tem-se que a resposta apresentada pelo participante não se assemelha a ponto, intervalo ou conjunto, indicando que o conhecimento do mesmo sobre o conceito de imagem de uma função não está devidamente consolidado, o que se classifica, novamente, como um caso de **teorema ou definição distorcida**.

Para o trabalho com esses tipos de erros foi selecionado e disponibilizado um conjunto de vídeos, do qual foram destacados dois exemplos referentes a discussão sobre o conceito de funções, bem como do domínio e imagem das mesmas. Entende-se que esses vídeos apresentam potencialidades para o esclarecimento de dúvidas dos participantes em relação aos conhecimentos matemáticos envolvidos em atividades tais como a que foi tomada como referência para a análise de erros realizada. Isso decorre do fato de que o conteúdo e a abordagem dos vídeos estavam relacionados aos tópicos que estavam sendo tratados nessa questão.

Sobre as interações apresentadas, as mesmas giraram em torno de uma discussão sobre as diferentes formas de representação de uma função, com destaque para as transformações de funções (translações, reflexões, alongamento e compressão de funções). Nessas interações foi possível perceber que os vídeos previamente selecionados, juntamente com os indicados, se mostraram convenientes ao longo do debate sobre a questão mencionada, visto que estavam alinhados aos conteúdos pertinentes aos questionamentos trazidos pelo participante MO4. Além disso, considerando a união desse material em consonância com as intervenções da pesquisadora, segundo das menções do aluno, os questionamentos relacionados a atividade que estava em pauta puderam ser sanados.

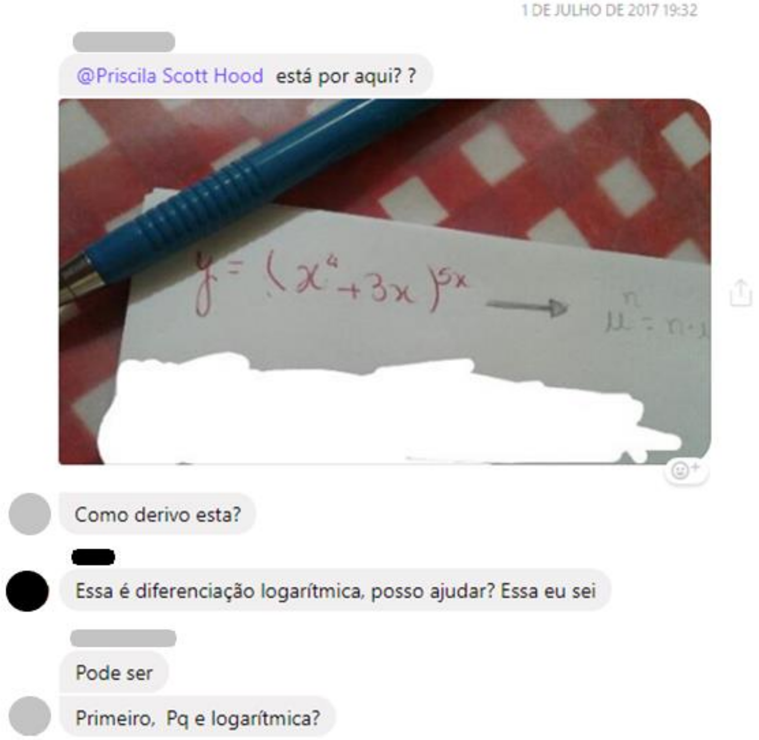
Esta seção teve como foco discussões matemáticas relacionadas ao estudo do Cálculo, mais especificamente no conceito de Funções que serve, segundo STEWART (2014), como alicerce para a fundamentação e referência matemática dos demais conceitos que são abordados ao longo dos componentes de Cálculo Diferencial e Integral. Nesse sentido, a seção a seguir apresenta uma segunda análise na perspectiva de abordar as potencialidades da utilização do *Facebook* enquanto ambiente virtual que hospedou o PMO. Essa interação foi selecionada devido a dinâmica de interação dos participantes envolvidos, que discutiram aspectos matemáticos relacionados ao conceito de Derivadas.

6.2 ANÁLISE DAS POTENCIALIDADES DO *FACEBOOK*

Apontam-se, aqui, potencialidades do uso do *Facebook* como um Ambiente Virtual para o estudo do Cálculo Diferencial e Integral observadas ao longo da aplicação do PMO. Para tal, toma-se como referência um recorte de uma discussão entre a pesquisadora e os participantes

MO1 e MO2, envolvendo a técnica de diferenciação logarítmica, parte integrante do estudo de Derivadas. A referida discussão foi motivada por questionamento realizado pelo participante MO2, o qual é apresentado na Figura 73.

Figura 73 – Início das interações[37]



Fonte: a pesquisa.

Conforme indicado na Figura 73, as interações tiveram início em um sábado à noite (1º de Julho de 2017, as 19h32min), com questionamento publicado pelo participante MO2 no espaço destinado ao *chat* em grupo, sendo mobilizados recursos tais como as mensagens de texto e o compartilhamento de imagens. Cabe destacar que o *Facebook* não possui recursos voltados à escrita em linguagem matemática – necessária no contexto de uma monitoria *online* de Cálculo – de forma que o compartilhamento de imagens se mostra um facilitador desse processo, permitindo que o usuário envie fotos de anotações feitas manualmente, assim como feito pelo participante MO2 (Figura 73). Embora o participante MO2 tenha se dirigido originalmente a pesquisadora, a primeira pessoa que intervém é o participante MO1, apontando, de forma pertinente, o conteúdo ao qual a questão se refere e oferecendo apoio ao participante MO2 (Figura 73).

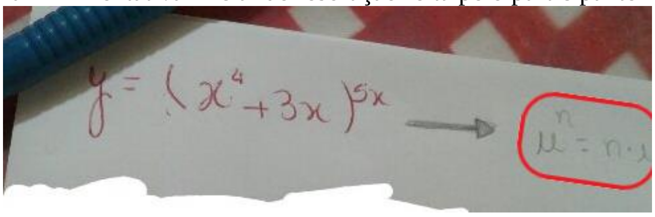
O trecho apresentado na Figura 73 evidencia o que Borba, Malheiros e Amaral (2014) denominam como uma forma de abordagem "muitos-para-muitos", considerando que a opção

[37] A fim de que seja possível diferenciar os participantes envolvidos na discussão, os mesmos serão identificados por cores distintas, sendo a cor preta atribuída ao participante MO1 e a cor cinza atribuída ao participante MO2. Destaca-se, também, que as falas dos participantes estão sempre alinhadas à esquerda e as da pesquisadora à direita.

do participante MO2 pelo uso do *chat* permitiu que os demais pudessem acompanhar a discussão (seja de modo síncrono ou assíncrono) e, inclusive, participar da mesma, como é o caso do participante MO1. Tal dinâmica não ocorreria, por exemplo, se participante MO2 optasse por uma troca de mensagens privadas com a pesquisadora, tendo em vista que, nesse cenário, o acesso à discussão seria restrito a apenas duas pessoas e o esclarecimento das dúvidas do participante ficaria a cargo da pesquisadora, o que se aproxima de um modelo de abordagem “um-para-um” (BORBA; MALHEIROS; AMARAL, 2014).

No que se refere ao contexto do Cálculo, verifica-se, com base na anotação feita na imagem compartilhada pelo participante MO2 (em destaque na Figura 74), uma tentativa de solucionar a questão por meio da aplicação de técnica de derivação denominada regra da potência, voltada a funções dadas por base variável e expoente numérico: $y = u^n \to y' = n\, u^{n-1}\, u'$ (STEWART, 2014). Conjectura-se que o participante MO2 tenha optado por essa técnica levando em conta apenas que a função a ser derivada é constituída por uma base e um expoente, desconsiderando que ambos são expressos em funções de x. Salienta-se, ainda, a fala do participante MO2 – “Pq é logarítmica?” – frente a colocação do participante MO1 sobre o uso da técnica de diferenciação logarítmica (Figura 73). Entende-se que tal pensamento se caracteriza como erro que, segundo Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987), pode ser classificado como um caso de **linguagem mal interpretada**, uma vez que o participante não interpreta corretamente os elementos que compõem a fórmula mencionada.

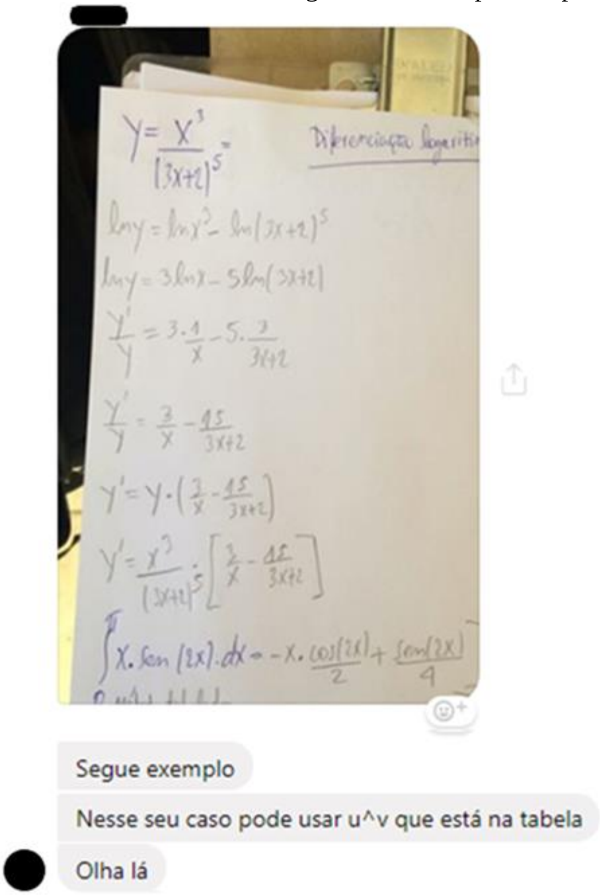
Figura 74 – Tentativa inicial de resolução feita pelo participante MO2



Fonte: a pesquisa.

Em resposta ao questionamento do participante MO2, o participante MO1 compartilha imagem contendo a resolução de um exemplo que também poderia ser resolvido por meio de diferenciação logarítmica, o qual é apresentado na Figura 75. O exemplo sugerido pelo participante MO1, diferentemente da função apontada pelo participante MO2, trata da derivação de uma função racional (composta pela divisão entre dois polinômios) por meio da aplicação da técnica de diferenciação logarítmica (Figura 75). Embora distinto, o exemplo proposto ilustra todos os passos envolvidos na sua resolução, de forma que possibilita ao participante MO2 tecer comparações com a primeira função apresentada, auxiliando-o no processo solução da mesma. Cabe destacar que o exemplo sugerido pelo participante MO1 poderia ser solucionado com a aplicação de outras técnicas de derivação, em especial a técnica denominada regra do quociente, dada por $y = \frac{u}{v} \rightarrow y' = \frac{v\,u' - u\,v'}{v^2}$, voltada para a derivação de funções racionais (STEWART, 2014).

Figura 75 – Exemplo compartilhado pelo participante MO1



Fonte: a pesquisa.

Além de compartilhar exemplo de aplicação da técnica de diferenciação logarítmica, o participante MO1 menciona que a questão apresentada pelo participante MO2 poderia ser solucionada com o uso de outra técnica de derivação, indicada por ele como "u^v", referindo a funções do tipo u^v (Figura 75). Segundo o participante MO1, a referida técnica estaria presente em uma determinada tabela, que se supõe ser o formulário de derivadas e integrais utilizado ao longo das disciplinas de Cálculo I e II. Destaca-se deste formulário, o trecho apontado na Figura 76, no qual consta fórmula tal como a mencionada pelo participante, dada por $y = u^v \rightarrow y' = v\,u^{v-1}\,u' + u^v \ln(u)\,v'$.

Figura 76 – Trecho do formulário de derivadas e integras utilizado na Instituição

ULBRA

Universidade Luterana do Brasil
DISCIPLINAS: CÁLCULO II e III – FORMULÁRIO

Nº	FUNÇÕES E DERIVADAS	Nº	INTEGRAIS
1	$y = k \Rightarrow y' = 0$	1	$\int du = u + c$
2	$y = u^n \Rightarrow y' = n.u^{n-1}.u'$	2	$\int u^n.du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c\ ,\quad n \neq -1$
3	Regra da cadeia: $y = f(g(x)) \Rightarrow f'(g(x)).g'(x)$	3	$\int \frac{du}{u} = \ln\|u\| + c$
4	$y = a^u \Rightarrow y' = a^u.\ln a.u', (a > 0, a \neq 1)$	4	$\int a^u.du = \frac{a^u}{\ln a} + c,\quad a > 0, a \neq 1$
5	$y = e^u \Rightarrow y' = e^u.u'$	5	$\int e^u.du = e^u + c$
6	$y = u.v \Rightarrow y' = u.v' + v.u'$	6	Integral por partes $\int u.dv = u.v - \int v.du$
7	$y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{v.u' - u.v'}{v^2}$	7	$\int sen\ u.du = -\cos u + c$
8	$y = \log_a u \Rightarrow y' = \frac{u'}{u}\log_a e$ ou $y' = \frac{u'}{u.\ln a}$	8	$\int \cos u.du = sen\ u + c$
9	$y = \ln u \Rightarrow y' = \frac{1}{u}.u' = \frac{u'}{u}$	9	$\int \tan u.du = \ln\|\sec u\| + c$
10	$y = u^v \Rightarrow y' = v.u^{v-1}.u' + u^v.(\ln u).v'$	10	$\int \cot u.du = \ln\|sen\ u\| + c$

Fonte: a pesquisa.

No decorrer da discussão, o participante MO1 relatou, também, que seu professor de Cálculo mostrou ambos os métodos de resolução para os alunos, conforme indicado na Figura 77. Tal posicionamento sugere que o mesmo compreende que existam as duas possibilidades de tratamento para a resolução da questão em discussão.

Figura 77 – Relato do participante acerca de métodos para derivação de funções

[redacted]

@Priscila Scott Hood professor na minha turma mostrou essas duas maneiras e optei pela aplicação da propriedade ln que achei mais fácil de memorizar

Fonte: a pesquisa.

Entretanto, o que o participante entende como duas técnicas dissociadas são, na verdade, o mesmo conceito, expresso por perceptivas matemáticas diferentes. Para ilustrar tal ideia apresenta-se, no quadro da Figura 78, a dedução do modelo matemático contido no formulário de derivadas e integrais (Figura 76), com base na técnica de diferenciação logarítmica. A primeira coluna expressa os passos em linguagem simbólica e a segunda coluna descreve os referidos passos em linguagem natural (Figura 78).

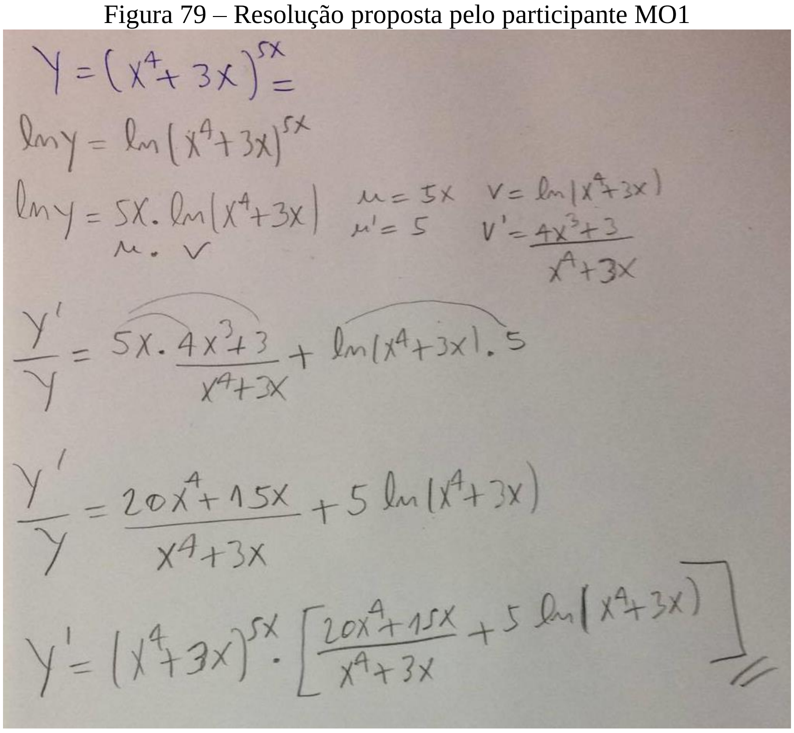
Figura 78 – Dedução da derivada de função do tipo $y = u^v$ tomando como referência a técnica de diferenciação logarítmica

ETAPA	DESCRIÇÃO
(1) $y = u^v$	Forma genérica de uma função do tipo u elevado a v, em que u e v também são funções, diferentes de 0.
(2) $\ln y = \ln u^v$	Aplicação do logaritmo natural em ambos os lados da igualdade.
(3) $\ln y = v.\ln u$	Utilização da propriedade de logaritmos no segundo membro da igualdade.
(4) $\frac{y'}{y} = v\,\frac{u'}{u} + v'.\ln u$	Aplicação da derivada em ambos os lados da igualdade.
(5) $y' = \left[v\,\frac{u'}{u} + v'\ln u\right]\,y$	Multiplicação de ambos os lados da igualdade por y.
(6) $y' = \left[v\,\frac{u'}{u} + v'.\ln u\right]\,u^v$	Substituição de y por u^v, considerando a igualdade em (1).
(7) $y' = v.u'.u^{v-1} + v'.\ln u\,.u^v$	Aplicação da operação distributiva no segundo membro da igualdade.

Fonte: a autora.

Por fim, encerrando o primeiro trecho das interações realizadas entre os dois participantes (MO1 e MO2), tem-se a imagem compartilhada pelo participante MO1, na qual a questão apresentada pelo participante MO2 é resolvida passo a passo com o uso da técnica de diferenciação logarítmica, conforme indicado na Figura 79.

Figura 79 – Resolução proposta pelo participante MO1

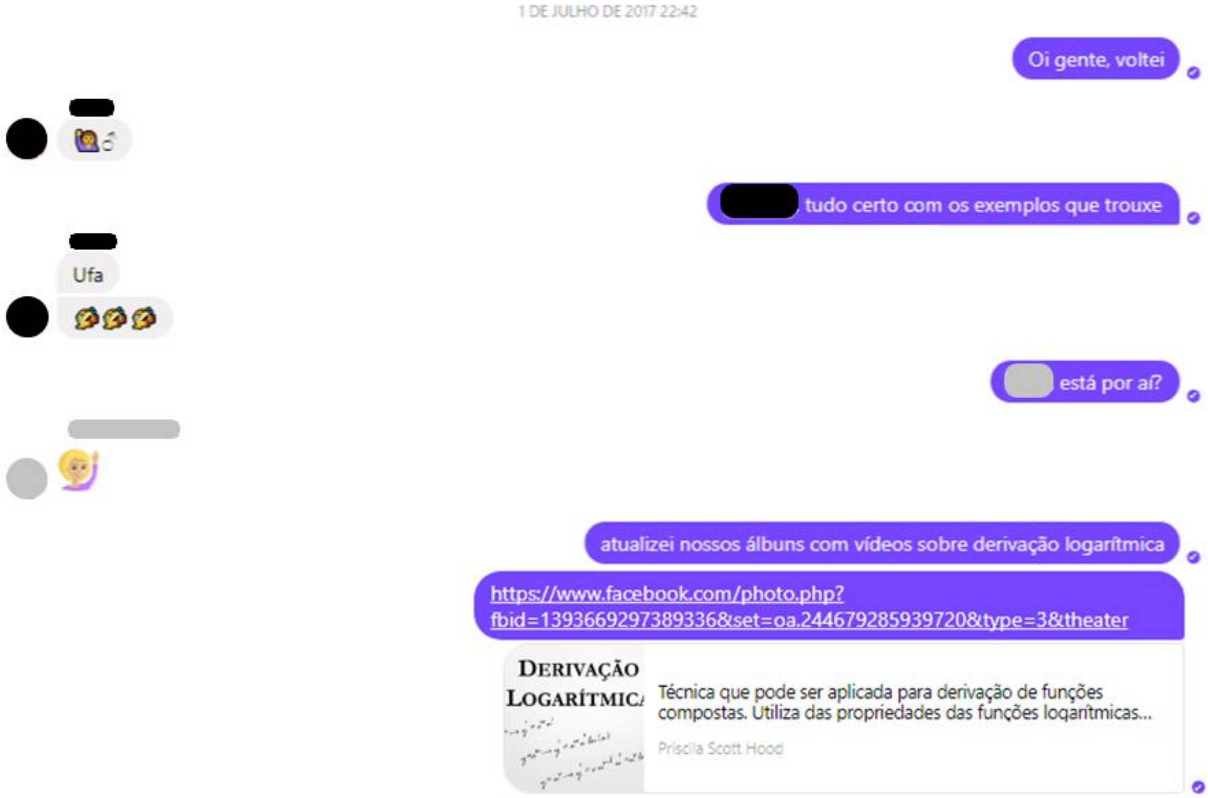


Fonte: a pesquisa.

Destaca-se que até esse momento, os participantes interagiram de forma autônoma, utilizando dos diferentes recursos disponíveis na plataforma, tais como as mensagens de texto e o compartilhamento de imagens, que por sua vez se mostra de grande valia para execução do PMO, dado o uso recorrente de linguagem matemática que não pode ser expressa apenas com os recursos textuais presentes no *Facebook*.

As intervenções da pesquisadora passam a ocorrer poucas horas após a interação inicial entre os participantes, tendo por objetivo verificar se o participante MO2 necessita de algum suporte além do já oferecido pelo participante MO1. Aproveita-se esse momento para indicação de dois vídeos *online* relacionados ao conteúdo abordado, selecionados com base nas falas dos participantes e adicionados a um dos álbuns previamente disponibilizados (Figura 80). Isso é possível devido a possibilidade de uso dos *hiperlinks*, que podem direcionar os usuários tanto a publicações realizadas no próprio site – como é o caso dos álbuns de fotos – quanto a conteúdos externos ao *Facebook* – tais como os vídeos, disponíveis no *YouTube*, selecionados para distribuição aos participantes do PMO.

Figura 80 – Primeiras intervenções da pesquisadora



Fonte: a pesquisa.

Os vídeos indicados foram selecionados com a finalidade de complementar a fala do participante MO1 e apresentam a resolução detalhada de uma série de exemplos envolvendo a derivação de funções por meio da aplicação da técnica de diferenciação logarítmica. A ficha técnica contendo um conjunto de dados desses vídeos é apresentada no quadro da Figura 81.

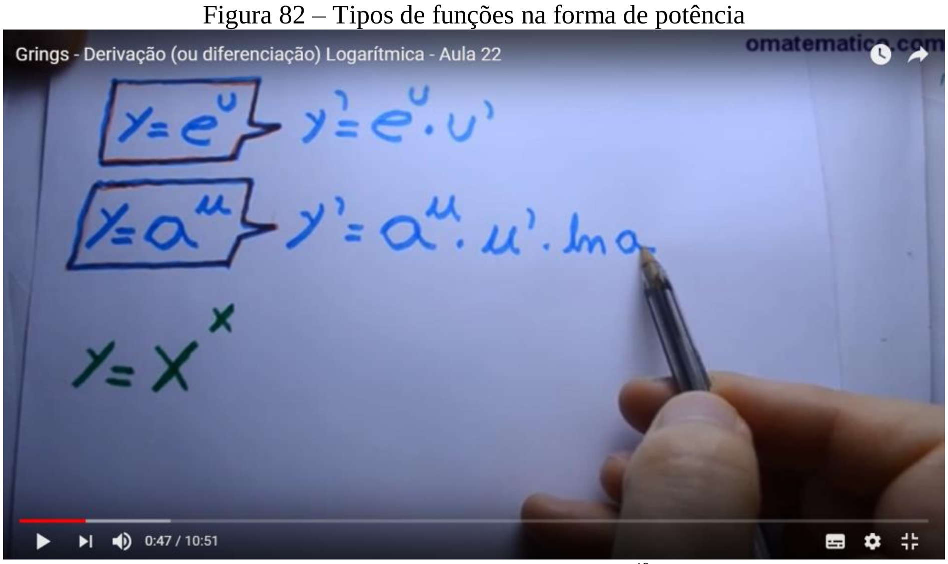
Figura 81 – Dados de vídeos voltados ao estudo de diferenciação logarítmica

INFORMAÇÕES	DESCRIÇÃO	
Título do vídeo	Grings – Derivação (ou diferenciação) Logarítmica – Aula 22	EFB105 – Cálculo Diferencial e Integral I [Diferenciação logarítmica 01]
Duração	10:51	15:21
Álbum	Derivadas	Derivadas
Canal	omatematico.com[38]	Instituto Mauá de Tecnologia[39]
Número de inscritos	Aproximadamente 404 mil inscritos	Aproximadamente de 8,4 mil inscritos
Disponível em	https://www.youtube.com/watch?v=XSlwqagkjc0&feature=youtu.be	https://www.youtube.com/watch?v=jZrr79JYX74&feature=youtu.be
Descrição encontrada no canal	Não foram disponibilizadas descrições sobre esse vídeo no canal.	Resolução de exercícios sobre diferenciação logarítmica, com a Prof.ª Juliana.
Descrição publicada no grupo	Vídeo disponibilizado pelo canal omatemático.com. Apresenta resolução de um exemplo por meio da técnica de derivação logarítmica e faz a dedução de uma das suas fórmulas.	Neste vídeo, disponibilizado pelo canal Instituto Mauá de Tecnologia, a professora Juliana apresenta as resoluções de três exemplos por meio da aplicação da técnica de derivação logarítmica.

Fonte: a pesquisa.

Além do conteúdo que norteia a discussão em análise, a seleção dos vídeos levou em conta o erro cometido pelo participante MO2 em relação ao significado atribuído aos elementos envolvidos na função a ser derivada e que, consequentemente, interferiram no seu entendimento acerca da técnica de diferenciação logarítmica. Nesse sentido, destaca-se o vídeo denominado “Grings – Derivação (ou diferenciação) Logarítmica – Aula 22”, indicado no quadro da Figura 81, no qual são abordadas as diferenças entre funções dos tipos $y = e^u$, $y = a^u$ e $y = x^x$, explicando o significado matemático dos termos que compõem cada uma delas, relacionando-os com a técnica de derivação por diferenciação logarítmica (Figura 82).

Figura 82 – Tipos de funções na forma de potência



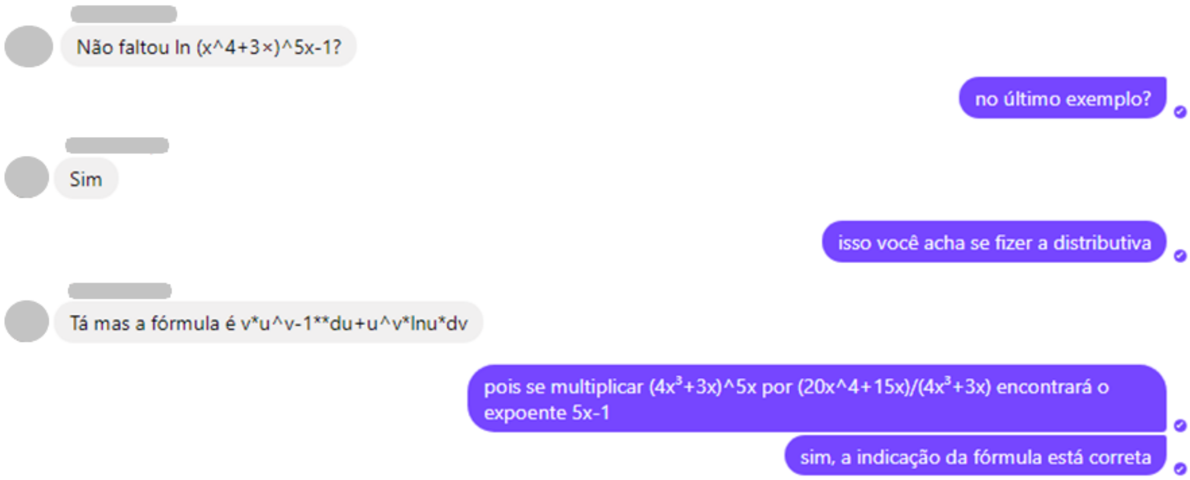
Fonte: Canal omatematico.com[40]

[38] Disponível em https://www.youtube.com/channel/UCu8lEv0rJy2VpMXeJAltlEA Acesso em 13 Abr 2018.
[39] Disponível em https://www.youtube.com/channel/UCRQjpElGIMSpWmIAPdpQHsA Acesso em 09 Abr 2018.
[40] Disponível em https://www.youtube.com/watch?v=XSlwqagkjc0&feature=youtu.be Acesso em 13 Abr 2018.

Entende-se, com base nas ideias de Torres (2007), que a articulação entre recursos de som e imagem, proporcionada por vídeos tais como os selecionados, possa vir a potencializar os benefícios de uma monitoria *online* de Cálculo, tendo em vista que permite o uso simultâneo de diferentes formas de linguagem, como, por exemplo, a oral, a escrita e a simbólica. No que se refere ao contexto do PMO, a indicação de vídeos *online* tem por objetivo embasar discussões a partir do conteúdo dos mesmos, que possam contribuir para o esclarecimento das dúvidas dos participantes, sendo utilizados como parte do processo de estudo e não como um recurso isolado e autossuficiente.

Apesar das potencialidades mencionadas, nenhum dos participantes envolvidos na discussão em análise forneceu *feedback* sobre o material compartilhado, de modo que as interações que se sucederam giraram em torno dos exemplos compartilhados pelo participante MO1 e das duas diferentes formas de resolução para o problema. A Figura 83 apresenta a retomada das interações a partir da indicação dos vídeos selecionados.

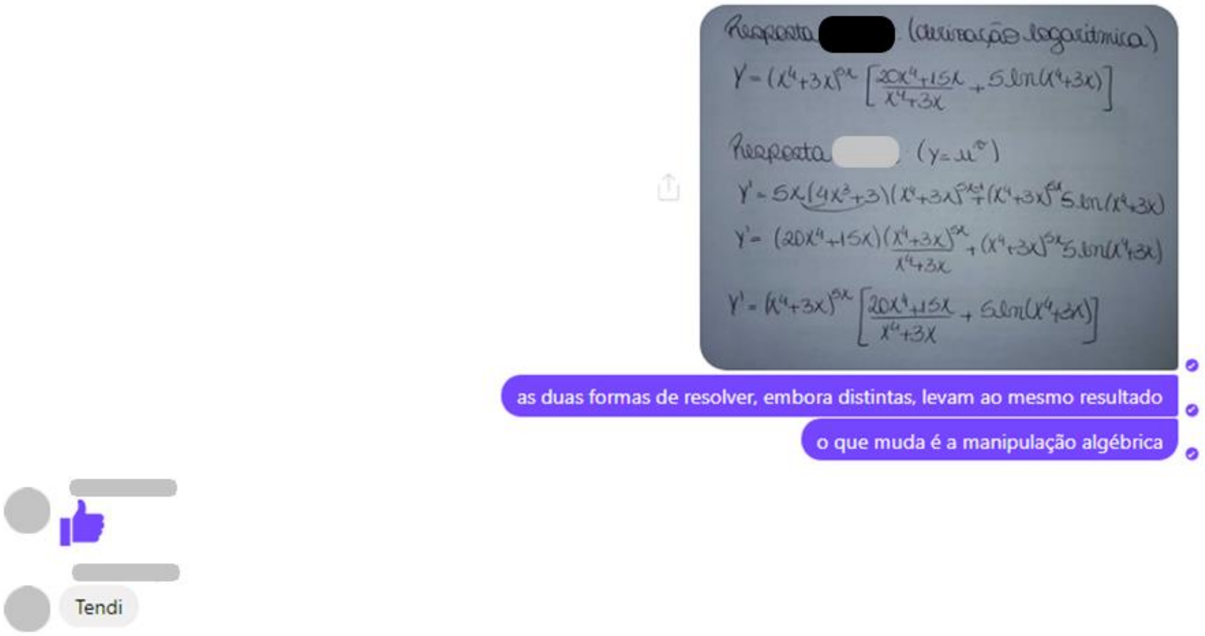
Figura 83 – Conversa entre a pesquisadora e o participante MO2



Fonte: a pesquisa.

Verifica-se, com base no exposto, que o participante MO2 questiona a ausência do “ln” na resolução anteriormente apresentada pelo participante MO1 (Figura 79), referindo-se ao $\ln(x^4 + 3)$. Com base nesse questionamento feito pelo participante MO2, presume-se que sua dúvida seja fruto de uma comparação entre a resolução apresentada anteriormente pelo participante MO1, na qual foi utilizada a técnica de diferenciação logarítmica, e uma tentativa de resolução do participante MO2 por meio da aplicação da fórmula expressa no material das disciplinas de Cálculo. Por esse motivo, explica-se ao participante que a suposta divergência entre as respostas tenha sido causada pelas escolhas de diferentes formas de expressão da derivada da função, e que o resultado de ambas poderia ser expressado igualmente por meio de manipulação algébrica. Nesse contexto, é compartilhada imagem elaborada pela pesquisadora, na qual são comparadas as respostas obtidas com a aplicação de ambos os métodos de resolução, juntamente com uma manipulação algébrica que evidencie que os dois resultados podem ser escritos da mesma forma (Figura 84).

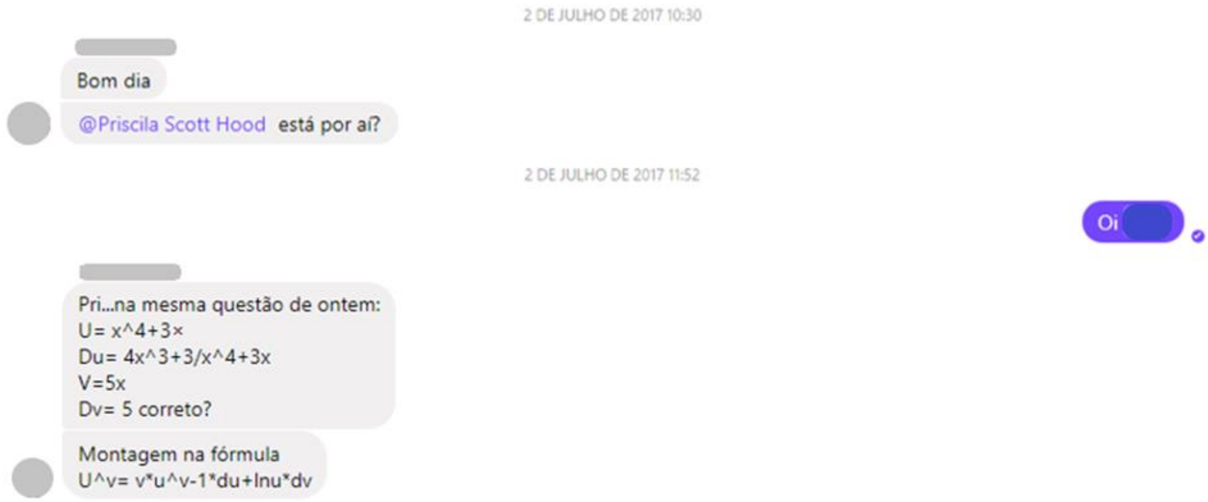
Figura 84 – Comparativo entre as resoluções obtidas a partir da aplicação de métodos de resolução distintos



Fonte: a pesquisa.

O primeiro dia de discussão se encerra com comentários entre a pesquisadora e os participantes MO1 e MO2 acerca das duas formas de resolução estudadas e com a solicitação de que o participante MO1 revisasse os cálculos realizados por ele, a fim de verificar se ainda restavam dúvidas pendentes, os quais seriam compartilhadas para conferência. Conforme indicado na Figura 85, o participante MO2 retoma a discussão na manhã do dia seguinte, apresentando dados referentes a uma resolução por meio da aplicação do modelo do formulário de derivadas e integrais.

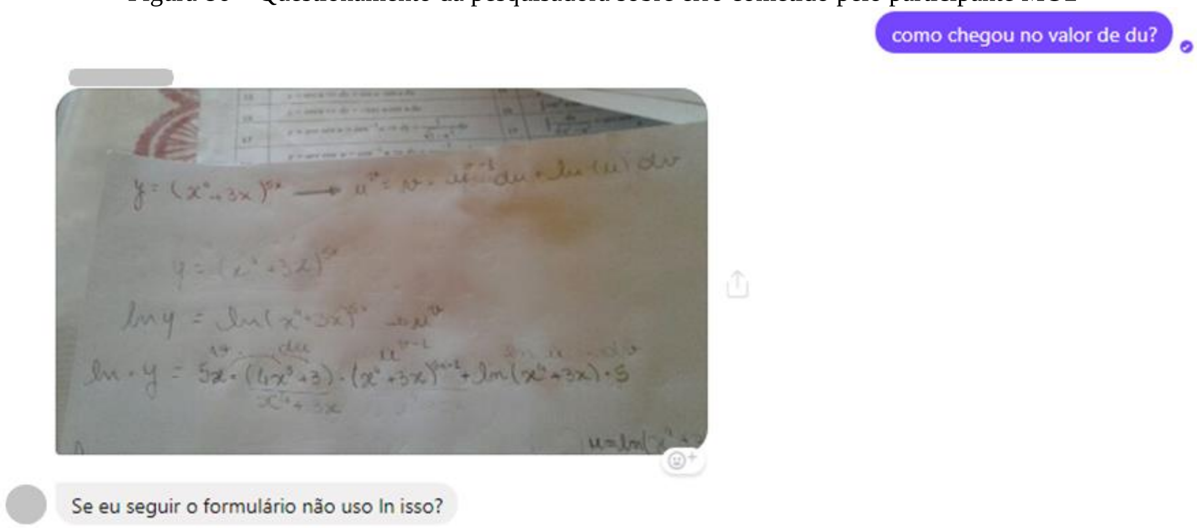
Figura 85 – Retomada da discussão entre pesquisadora e participante MO2 no dia seguinte



Fonte: a pesquisa.

Após a conferência dos dados enviados pelo participante MO2, percebe-se divergência entre a fórmula apresentada pelo participante e o modelo contido no formulário de integrais e derivadas (Figura 76). Além disso, o participante aponta quais seriam os valores para u e v, dada a função a ser derivada, $y = (x^4 + 3x)^{5x}$, a partir da qual tem-se $u = x^4 + 3x$ e $v = 5x$. Porém, ao determinar quais seriam as derivadas das funções u e v, o participante apresenta um resultado incompatível com a derivada da função $u = x^4 + 3x$, sendo este $du = \frac{4x^3+3}{x^4+3x}$ ao invés de $du = 4x^3 + 3$. Com base nos valores apresentados, questiona-se ao participante como ele chegou a tais resultados, o que é respondido com o envio de resolução parcial, conforme ilustrado na Figura 86.

Figura 86 – Questionamento da pesquisadora sobre erro cometido pelo participante MO2

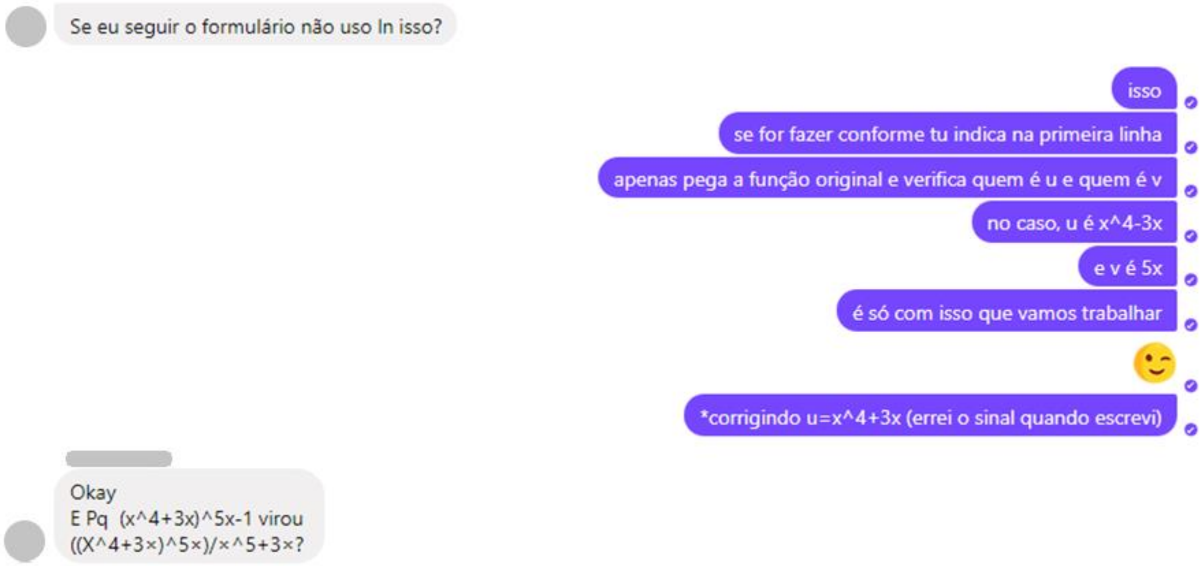


Fonte: a pesquisa.

O primeiro aspecto a ser destacado na resolução compartilhada pelo participante MO2 é a anotação relacionada ao modelo matemático a ser utilizado para derivação da função $y = (x^4 + 3x)^{5x}$, que ele descreve como $u^v = v.u^{v-1}du + \ln(u)\,dv$. Considerando-se o contexto dessa resolução parcial, conjectura-se que tal equação se refira a uma tentativa de expressar o modelo compreendido no formulário de derivadas e integrais, dado por: $y = u^v \rightarrow y' = v.u^{v-1}.u' + u^v(\ln u).v'$ (Figura 76). Entende-se que a divergência entre os dois modelos não aponte, necessariamente, para uma compreensão equivocada do participante em relação aos dados envolvidos, mas sim para uma falta de rigor na sua escrita em linguagem matemática, como se o mesmo se apropriasse de linguagem simbólica para representar uma ideia procedimental do tipo "se eu tenho uma função na forma u^v, devo derivá-la utilizando $v.u^{v-1}du + \ln(u)\,dv$". No entanto, é necessário destacar a ausência do termo u^v no segundo membro da igualdade da equação apresentada pelo participante MO2 (Figura 86), o que, se caracteriza como um caso de **teorema ou definição distorcida**, tendo em vista que o modelo de resolução tomado como referência para resolução conduz o participante a um resultado incorreto.

Além disso, verifica-se que a resolução do participante se inicia com a indicação da função a ser derivada, seguida pela aplicação da função logarítmica em ambos os membros da igualdade – etapa característica de um processo de resolução com base na técnica de diferenciação logarítmica – para então relacionar os dados obtidos com uma função do tipo $y = u^v$ (Figura 86). Conjectura-se que as etapas descritas pelo participante MO2 sejam evidências de uma articulação equivocada entre os dois métodos de resolução mencionados ao longo dessa discussão: a técnica de diferenciação logarítmica, em sua forma geral, e modelo proposto no formulário de derivadas e integrais (Figura 76), resultante da manipulação algébrica da técnica de diferenciação logarítmica para casos específicos de funções do tipo $y = u^v$, o que pode ser classificado como um caso de **inferência lógica inválida**. Nesse sentido, as intervenções da pesquisadora voltam-se a uma busca por retomar a relação entre ambos os métodos de resolução, esclarecendo ao participante como utilizar o modelo matemático escolhido por ele para resolução da questão, o que leva ao trecho apresentado na Figura 87.

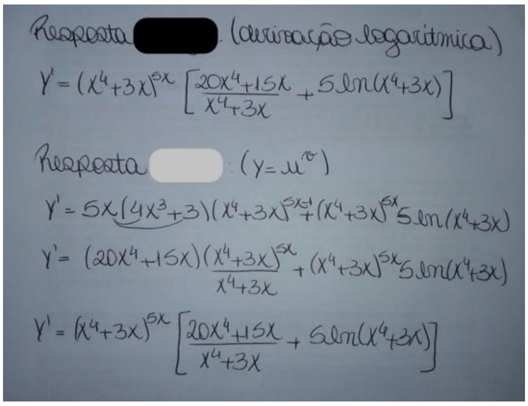
Figura 87 – Discussão sobre o modelo matemático proposto no formulário de derivadas e integrais



Fonte: a pesquisa.

Ainda de acordo com a Figura 87, o participante MO2 solicita um esclarecimento do motivo pelo qual o termo $(x^4 + 3x)^{5x-1}$ “virou” $\frac{(x^4+3x)^{5x}}{x^5+3x}$. Assume-se que o participante esteja se referindo as diferenças apontadas na comparação entre os resultados obtidos por meio da aplicação dos dois métodos de resolução discutidos (em destaque na Figura 88), tendo cometido um erro de digitação ao tentar expressar a fração $\frac{(x^4+3x)^{5x}}{x^4+3x}$.

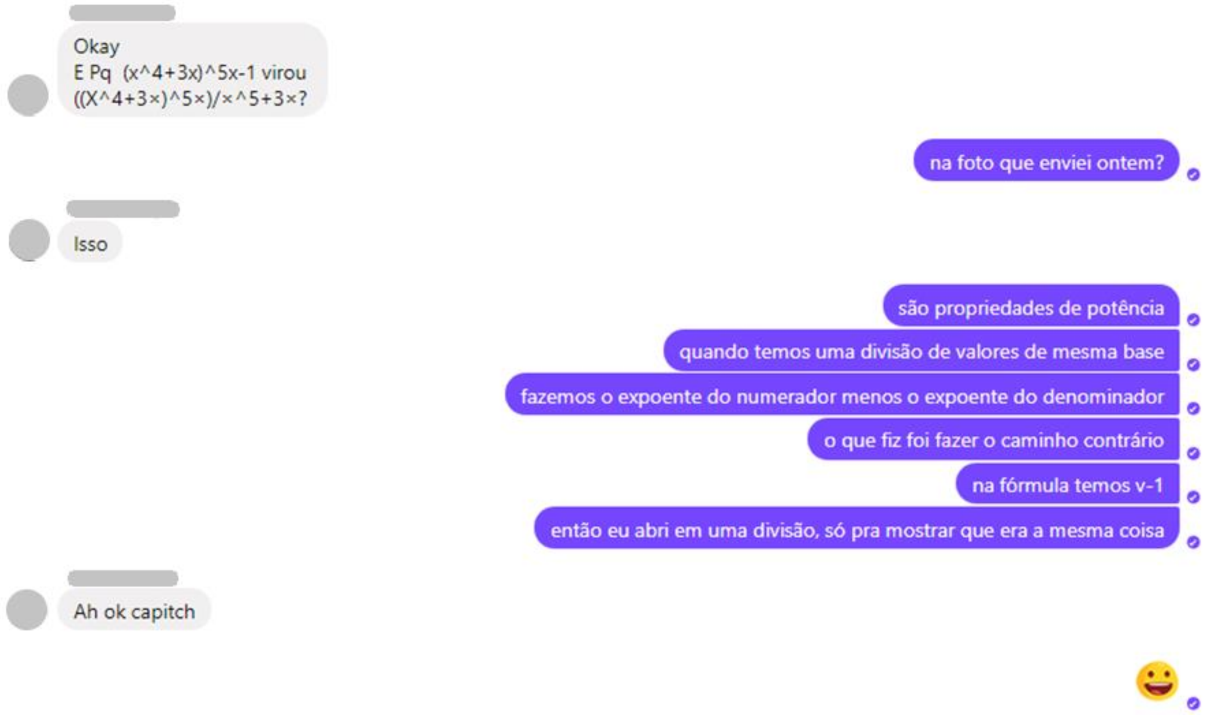
Figura 88 – Comparativo entre os resultados obtidos em ambos os métodos de resolução discutidos



Fonte: a pesquisa.

Convém destacar o volume de dados utilizados pelo participante para representar as duas expressões, o que pode vir a ter favorecido o cometimento do erro de digitação por parte do mesmo, sendo que tais chances poderiam ter sido reduzidas caso ele optasse pela escrita manual de tais informações e o compartilhamento das mesmas por meio de foto. Conforme indicado na Figura 89, a fim de se verificar se a suposição acerca do questionamento do participante MO2 está correta, pergunta-se a ele estaria se referindo a imagem compartilhada pela pesquisadora na noite anterior (Figura 88), o que é confirmado pelo mesmo. A partir disso, a pesquisadora explica que as duas expressões são formas distintas de representar o mesmo dado, diferindo-se por meio de manipulação algébrica envolvendo propriedade de potência (Figura 89).

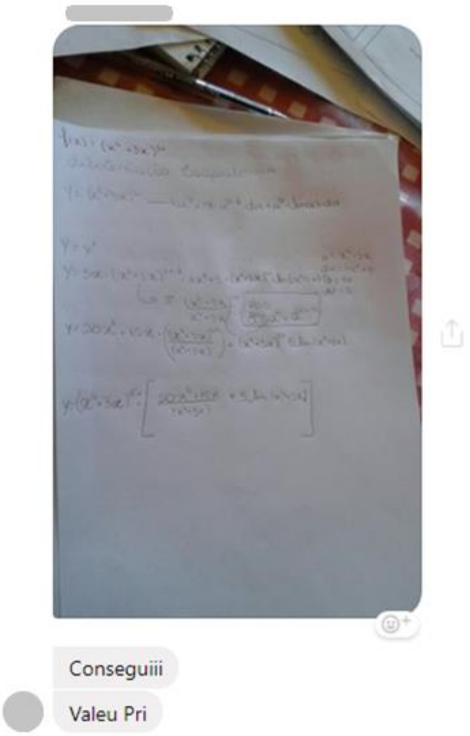
Figura 89 – Discussão sobre propriedades de potência



Fonte: a pesquisa.

A discussão se encerra, ainda no domingo, com o compartilhamento da resolução final do participante MO2, a qual é acompanhada por comentário feito pelo mesmo mencionando que havia finalizado a tarefa. A resolução enviada foi conferida pela pesquisadora, estando correta mediante aos aspectos matemáticos discutidos.

Figura 90 – Resolução final apresentada pelo participante MO2



Fonte: a pesquisa.

Com base nas análises tecidas a partir dos dados extraídos da discussão entre a pesquisadora e os participantes MO1 e MO2, juntamente com as respostas dadas pelos participantes que responderam à entrevista semiestruturada, destacam-se, a seguir, aspectos relacionados a esse modelo de discussão *online*.

De modo geral, um dos principais tópicos a serem destacados em relação a discussão analisada é o fato de que a mesma se estendeu ao longo de um horário no qual os participantes não teriam acesso aos serviços de apoio pedagógico já oferecidos pela Instituição, uma vez que a mesma tem início em um sábado à noite e é finalizada na manhã do dia seguinte. Tal situação se refletiu na maioria dos atendimentos prestados, tendo em vista que das 36 interações ocorridas durante a aplicação do PMO, 17 se deram entre segunda e sexta-feira, sendo duas delas em feriados, e 19 em finais de semana. Nesse sentido, o oferecimento de um serviço de apoio pedagógico em um horário flexível, vai de encontro a demanda dos acadêmicos, pois, conforme apontado pelo participante MO2, “[...] o tempo que temos para estudar são os feriados e os finais de semana, então a monitoria estava sempre disponível durante madrugadas, feriados, manhã, tarde e noite” (MO2, anexo B). Ainda em relação a flexibilização dos horários de atendimento, destaca-se trecho da resposta dada pelo participante MO3, "[...] como todos sabem estudantes ficam várias horas acordados estudando e teve um caso que a Priscila ficou no grupo até a 01:00 da manhã para me ajudar [...]" (MO3, anexo C). Esse participante ressalta, ainda, que a proposta de trabalho desenvolvida

> É um meio de estudantes e monitor conseguirem trocar ideias em qualquer momento, pois se não consegue responder na hora em algum momento acaba sendo respondido, além de ser **uma forma rápida de trocar informações e uma maneira de trocar ideia sem precisar sair de casa**. Pessoas educadas e monitora sempre disponível para nos ajudar (MO3, anexo C, grifos da autora).

No que se refere ao *Facebook*, plataforma escolhida para implementação do PMO, cabe ressaltar a familiaridade dos participantes em relação aos recursos disponíveis, destacando-se que, embora nem todos os participantes já fizessem uso dessa rede social com propósitos educacionais, nenhum teve dificuldades de adaptação, tendo em vista que já a utilizavam para fins de entretenimento. Nesse sentido, aponta-se para uma nova significação em relação ao uso das redes sociais, de modo que os participantes passaram a ver o *Facebook* como forma de comunicação em grupo para complementação de estudos voltados ao Cálculo Diferencial e Integral.

Entende-se que estar ambientado a plataforma na qual se desenvolveu o trabalho é de suma importância para estimular a autonomia dos participantes, uma vez que se trata de um ambiente que possibilita aos usuários expressarem suas reações de forma mais objetiva, permitindo um *feedback* rápido entre os envolvidos nas discussões ocorridas, seja na forma "um-para-um", "um-para-muitos" ou "muitos-para-muitos" (BORBA; MALHEIROS; AMARAL, 2014). As diferentes formas de interação oferecidas pelo *Facebook* viabilizaram a constituição de um ambiente no qual a pesquisadora pôde guiar as discussões geradas a partir de questionamentos apresentados pelos participantes, o que, segundo o participante MO2, "[...] não deixava que fossem desenvolvidas ideias erradas [...]" (MO2, anexo B). Além disso, o participante destaca que a disponibilidade da pesquisadora, que os "[...] guiava com melhores critérios de ensino, mais explícitos, mais amplos e de bom entendimento (linguagem não tão formal)" (MO2, anexo B). Destaca-se, também, a fala do participante MO4 sobre a forma como as dúvidas eram esclarecidas durante a aplicação do PMO:

> Não ter a resposta logo de prontidão é muito melhor, te faz pensar em como chegou naquele resultado. **Se for numa página de pesquisa logo mostra a resposta, se satisfaz com o que é apresentado e não busca entender o motivo daquele resultado.** O modelo utilizado foi muito didático e seria ótimo se fosse utilizado por todos os professores (MO4, anexo D, grifos da autora).

Já em relação a utilização dos vídeos *online* como material de apoio para o estudo dos conceitos relacionados ao Cálculo Diferencial e Integral, tomam-se como base as falas dos participantes MO1, MO2 e MO4, que mencionam já fazer uso de tal recurso antes da participação no PMO, porém, como destaca o participante MO2, ao buscar por vídeos sem orientação “[...] perdia muito tempo procurando algo específico” (MO2, anexo B), o que é confirmado pelo participante MO4 ao afirmar que “Os vídeos foram de suma importância. O motivo é que eu tinha a dúvida e a monitora já me mostrava o vídeo que era referente a minha dúvida, não precisei ficar pesquisando entre vários” (MO4, anexo D). Por sua vez, o participante MO1 destaca uma mudança em seu critério para busca e seleção de material para estudo, pois anteriormente “Utilizava o critério de popularidade entre os alunos. Com a participação no projeto ora citado o meu critério além de ser popular é o entendimento e facilidade no que tange o conteúdo ofertado” (MO1, anexo A).

Com base nos resultados obtidos a partir das análises realizadas sobre os dados coletados ao longo dessa investigação, apresentam-se, na seção a seguir, as considerações finais relacionadas ao trabalho desenvolvido.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os apontamentos aqui destacados emergem da articulação entre os aspectos discutidos nas etapas de análise que encaminharam o presente estudo: a análise dos documentos institucionais selecionados para a presente investigação (DCN, planos de ensino e livros didáticos), a análise dos erros cometidos pelo participante T3_A18 ao longo da resolução de questão envolvendo o conceito de funções, a discussão acerca dos vídeos selecionados com base nas análises mencionadas e, por fim, a análise dos recortes de duas interações ocorridas entre a pesquisadora e os participantes MO1, MO2 e MO4, ao longo da aplicação do projeto de monitora *online*, desenvolvido ao da investigação: o Projeto Monitoria *Online* (PMO).

No que se refere aos documentos institucionais analisados, os mesmos possibilitaram um entendimento acerca do papel dos componentes curriculares voltados ao estudo do Cálculo Diferencial e Integral nos diferentes cursos de graduação nos quais se insere. Por meio da análise dos planos de ensino, foi possível verificar como a Instituição na qual se deu a aplicação da investigação se coloca frente às orientações das DCN, tanto em relação à carga horária destinada a tais componentes quanto às competências e habilidades que devem ser desenvolvidas na formação dos acadêmicos. Por fim, a análise dos livros didáticos indicados nos planos de ensino serviu para traçar um parâmetro acerca da abordagem metodológica empregada na Instituição.

Assim, no que se refere aos resultados referentes às análises dos documentos supracitados, tem-se que o Cálculo Diferencial e Integral é uma área de conhecimento que trata de um conjunto de conceitos matemáticos a serem utilizados na resolução de problemas pertinentes aos diferentes setores da sociedade. Está presente nos núcleos básicos dos cursos Engenharia, Física, Matemática e Química da Instituição na qual se deu a aplicação da presente investigação, sendo dividida em três componentes curriculares de 68 horas cada, dos quais dois que são voltados ao estudo de funções de uma variável – aos quais a pesquisa foi delimitada – e o terceiro voltado ao estudo de funções de múltiplas variáveis. Além disso, a análise realizada, juntamente com os livros didáticos indicados nos planos de ensino, aponta para um ensino que preza pela contextualização dos conceitos nas diferentes áreas de atuação dos profissionais em formação.

Em relação à resolução apresentada pelo participante T3_A18, a análise dos diferentes tipos de erros cometidos pelo participante possibilitou a realização de levantamento de potenciais dificuldades relacionadas à aprendizagem do conceito de funções, dentre elas, uma de natureza epistemológica. Este levantamento, juntamente com a análise institucional, serviu como direcionamento para a busca de vídeos disponíveis no *YouTube*, os quais foram utilizados como material de apoio disponibilizado aos participantes do PMO.

Destaca-se que o projeto de monitoria ocorreu em um ambiente virtual que potencialmente facilita a familiarização dos participantes, já que é uma plataforma que é comumente utilizada para fins de interação, tal como apontaram os dados do questionário perfil dos participantes. Além disso, essa plataforma viabilizou um conjunto de recursos de áudio, vídeo e escrita que podem ser articulados entre si e que, ainda, podem permear a interação e discussão de estudos matemáticos entre os envolvidos. Alguns recursos que podem ser apontados estão relacionados: a criação e utilização de grupos para uma comunicação coletiva; a comunicação individual, por meio de *chat*, tal como é proporcionado pelo aplicativo *Messenger* agregado ao *Facebook*; o uso de linguagem natural e visual que permite diferentes formas de comunicar Matemática; e a utilização de outras plataformas para a que possibilitam a comunicação de informação e conhecimento, tal como é o *YouTube*.

Em relação aos vídeos selecionados, constata-se a disponibilidade de material *online* compatível com as potenciais dificuldades apresentadas pelos participantes, que foram previstas com base no levantamento de erros das provas analisadas. Entende-se que esses vídeos podem vir tanto a introduzir, complementar e retomar os conhecimentos relacionados ao estudo dos alunos de Cálculo quanto a possibilitar ao professor uma forma de apresentar um recurso assíncrono para o apoio aos seus alunos.

Aponta-se para a possibilidade de disponibilização dos vídeos selecionados para acadêmicos de modo geral, visto que a seleção, organização e descrição dos vídeos, faz deles um material de potencial interesse para consulta daqueles que estejam cursando componentes curriculares voltados ao estudo do Cálculo Diferencial e Integral, mesmo fora do contexto de uma monitoria *online*. O espaço pensado para isso seria o site do Laboratório do Curso de Matemática (LABORMAT)[41], o qual está vinculado ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECIM), da Universidade Luterana do Brasil (ULBRA), Instituição na qual se deu o desenvolvimento e a aplicação da presente investigação. Destaca-se que a opção pelo uso dessa plataforma leva em conta o acesso direto do estudante ao material de apoio, eliminando a necessidade do mesmo possuir uma conta no *Facebook*.

Sobre as interações, foi possível verificar a viabilidade de implementação de uma proposta de monitoria *online* no *Facebook*, dada facilidade oferecida pela plataforma para a troca de mensagens de texto, de figuras e de vídeos, além da possibilidade de organização e

[41] Disponível em http://ppgecim.ulbra.br/laboratorio/index.php/pagina-exemplo/ Acesso em 15 Jul 2018.

distribuição de material de apoio no espaço destinado aos álbuns de fotos, que no caso dessa investigação foi restrito a vídeos, mas que pode ser utilizado para diferentes recursos. Destacam-se, ainda, a familiaridade dos participantes MO1, MO2 e MO4 em relação aos recursos disponíveis na plataforma, tais como o uso dos espaços destinados a troca de mensagens e o compartilhamento de imagens e vídeos *online*.

No que se refere à interação entre a pesquisadora e o participante MO4, ressalta-se que sua familiaridade com o uso dos vídeos *online* como recurso para estudo e retomada de conceitos abordados em sala de aula, juntamente com outras ferramentas, tais como *softwares* gráficos para esboço e análise dos gráficos de funções. Tais conhecimentos, juntamente com os recursos da plataforma, permitiu que as interações apresentadas ocorressem de forma direta, sem que ele precisasse destinar tempo para se ambientar com o ambiente virtual escolhido. No que tange ao Cálculo Diferencial e Integral, tomando-se como base a interação entre a pesquisadora e os participantes MO1 e MO2, tem-se que as eventuais limitações da plataforma para escrita em linguagem matemática são facilmente contornadas pelo compartilhamento de imagens, de modo que, em caso de necessidade, é possível compartilhar uma foto de uma anotação feita à mão ou, até mesmo, uma imagem extraída de um *software* voltado ao estudo de conceitos matemáticos.

Contudo, cabe destacar que, conforme apontado pelos participantes MO2 e MO3 (anexos B e C), parte dos atendimentos realizados pela pesquisadora ocorreram em horários diferenciados, tais como finais de semana, feriados e madrugadas, o que se caracteriza como um fator limitador para a reprodução desse modelo de monitoria *online* fora de um contexto investigativo. Normas trabalhistas e regulamentos que orientam as práticas de professores e monitores que, no geral, estabelecem que os atendimentos ocorram em horário comercial ou, no máximo, aos sábados, não permitiriam parte do tipo de interação que ocorreu ao longo da investigação.

Por fim, dois questionamentos emergentes do fechamento do presente trabalho, os quais podem ser alvo de pesquisas futuras:

- Quais critérios devem ser considerados na concepção de uma ferramenta teórica para análise e seleção de vídeos que abordem conceitos matemáticos? De que forma essa ferramenta pode vir a contribuir na elaboração e produção de novos vídeos?
- Quais as potenciais contribuições de uma proposta de monitoria *online* de Cálculo voltada para acadêmicos que estejam cursando graduações nas áreas científicas e tecnológica em uma modalidade EaD?

REFERÊNCIAS

ABBAGNANO, Nicola. Dicionário de Filosofia. Tradução: Alfredo Bosi e Ivone Castilho Benedetti. 5ª ed. São Paulo: Martins Fontes, 2007. Disponível em: http://charlezine.com.br/wp-content/uploads/2011/11/Dicionario-de-Filosofia-Nicola-ABBAGNANO.pdf Acesso em 01 Jun 2016.

ALLEGRETTI, Sonia Maria Macedo; HESSEL, Ana Maria Di Grado; HARDAGH, Cláudia Coelho; SILVA, José Erigleidson da. Aprendizagem nas redes sociais virtuais: o potencial da conectividade em dois cenários. **Revista Contemporaneidade Educação e Tecnologia (Cet)**, v. 1, n. 2, 2012, p. 53-60.

ALMEIDA, Helber Rangel Formiga Leite de. **Polidocentes-com-Mídias e o Ensino de Cálculo I**. 217 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, São Paulo, 2016.

ANTON, Howard. **Cálculo: um novo horizonte – Volume 1**. Tradução: Cyro de Carvalho Patarra e Márcia Tamanaha. 6ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2006.

ARTIGUE, Michèle. La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. In: ARTIGUE, Michèle; DOUADY, Régine; MORENO, Luis. **Ingeniería Didática em Educación Matemática: Un esquema para la investigación em la enseñanza y el aprendizaje de las matemática s.** 1ª ed. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica, 1995. p. 97-140. Disponível em http://funes.uniandes.edu.co/676/1/Artigueetal195.pdf Acesso em 25 Jun 2016.

ÁVILA, Geraldo Severo de Souza. **Análise matemática para licenciatura**. 3ª ed. São Paulo: Blücher, 2006. 246 p.

BARUFI, Maria Cristina Bonomi. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral**. 184 p. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.

BISOGNIN, Eleni; FIOREZE, Leandra Anversa; CURY, Helena Noronha. **Análise de erros e proporcionalidade: uma experiência com alunos da graduação e pós-graduação**. Vidya (Santa Maria), v. 25, p. 31-40, 2007.

BOGDAN, Robert C.; BIKLEN, Sari Knopp. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Lisboa: Porto Editora. 1994. 336 p.

BORBA, Marcelo de Carvalho; MALHEIROS, Ana Paula dos Santos; AMARAL, Rúbia Barcelos. **Educação a Distância *online***. 3ª ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011. 160 p.

BORBA, Marcelo de Carvalho; SILVA, Ricardo Scucuglia Rodrigues da; GADANIDIS, George. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática: Sala de aula e *internet* em movimento**. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2014. 149 p.

BOYER, Carl Benjamin Boyer. **História da Matemática**. 2ª ed. São Paulo: Blücher, 1996. 495 p.

BRASIL. Parecer CNE/CES 1.304/2001. Ministério da Educação/Conselho Nacional de Educação. **Diretrizes Curriculares para os cursos de Física**. 2001a.

______. Parecer CNE/CES 1.303/2001. Ministério da Educação/Conselho Nacional de Educação. **Diretrizes Curriculares para os cursos de Química**. 2001b.

______. Parecer CNE/CES 1.362/2001. Ministério da Educação/Conselho Nacional de Educação. **Diretrizes Curriculares dos cursos de Engenharia**.2002a.

______. Parecer CNE/CES 1.302/2001. Ministério da Educação/Conselho Nacional de Educação. **Diretrizes Curriculares para os cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura**. 2002b.

BURGESS, Jean; GREEN, Joshua. **YouTube e a Revolução Digital: como o maior fenômeno da cultura participativa transformou a mídia e a sociedade**. tradução Ricardo Giassetti, São Paulo: Aleph, 2009, 239 p.

CAVASSANI, Thiago Bernardo; ANDRADE, Joana Jesus. **Dos Círculos de Cultura aos Grupos Virtuais: Efeitos das redes sociais no ensino superior**. 6º Simpósio Internacional em Educação e Comunicação. Aracajú: Universidade Tiradentes, 2015. p. 7-12. Disponível em http://proceedings.ciaiq.org/index.php/ciaiq2015/article/view/184 Acesso em 10 Mai de 2017.

CUNHA, Valdinilson Lourenço da; RUBENICH, Aline Evangelista; SANTOS, Altman Haaron dos; MORIEL JÚNIOR, Jeferson Gomes; MARTINS, Ronan Marcelo. Dificuldades discentes em Cálculo Diferencial e Integral: Análise da monitoria de Cálculo em Engenharias. In: Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia (COBENGE), XLV, Joinville: Abenge, 2017.

CURY, Helena Noronha. "Professora, eu só errei um sinal!": Como a Análise de Erros pode esclarecer problemas de aprendizagem. In: ______ (Org.) **Disciplinas Matemáticas em cursos superiores: reflexões, relatos, propostas**. 1ª ed. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2004. p. 111-138.

______ **Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos estudantes**. 1ª ed. 1ª reimp. Belo Horizonte: Autêntica, 2008, 116 p.

CURY, Helena Noronha; BISOGNIN, Eleni; BISOGNIN, Vanilde. **A Análise de Erros como Metodologia de Investigação**. In: ProfMat, 2009, Viana do Castelo-Portugal. ProfMat2009. Lisboa: APM, 2009. v. 1. p. 1-12.

CURY, Helena Noronha; CASSOL, Mariana. **Análise de Erros em Cálculo: uma Pesquisa para Embasar Mudanças**. Revista Acta Scientiae, v. 6, n. 1, 2004, p. 27-36. Disponível em http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/128 Acesso em 15 Jul 2016.

DEL PUERTO, Silvia Mónica; MINNAARD, Claudia Lilia; SEMINARA, Silvia Alejandra. **Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las Matemáticas**. Revista Iberoamericana de Educación. Nº 38/4, abr. 2006. Disponível em http://rieoei.org/1285.htm Acesso em 20 Jun 2016.

DUVAL, Raymond. Registros de Representações Semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). **Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica**. 8ª ed. Campinas: Papirus, 2011.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da UNICAMP, 2004. 844 p.

FACEBOOK. Disponível em https://www.facebook.com/pg/FacebookBrasil/about/ Acesso em 08 Fev 2018.

FLEMMING, Diva Marília. **Cálculo A: funções, limite, derivação, integração**. São Paulo: Pearson Pretince Hall, 2006.

LOPES, Artur O. (Ensino) Algumas reflexões sobre a questão do alto índice de reprovação nos cursos de Cálculo da UFRGS. **Revista Matemática Universitária**. n. 26/27, 1999. Disponível em http://rmu.sbm.org.br/Conteudo/n26_n27/n26_n27_Artigo05.pdf Acesso em 12 jun 2016.

LÜDKE, Menga; ANDRÉ, Marli Eliza Dalmazo Afonso de. **Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas**. 2ª ed. Rio de Janeiro: E. P. U., 2013.

MACHADO, José Nilson. **Noções de Cálculo**. Coleção Matemática por Assunto. vol. 9. São Paulo: Editora Scipione. 1988.

MENEGHETTI, Renata Cristina Geromel. **Construção do saber matemático: reflexões filosóficas e históricas**. Londrina: EDUEL, 2010. 172 p.

MORAES, Ana Carolina de. Utilização das tecnologias de informação e comunicação (TIC) na Monitoria de Cálculo I. **Revista Interdisciplinar Aplicada**. v. 5, n. 3, 2011, p. 28-38. Disponível em http://rica.unibes.com.br/index.php/rica/article/view/419/358 Acesso em 11 Mai 2016.

MORAES, Ana Carolina de; GOMES, Kelly Aparecida. Monitoria Virtual como apoio ao ensino presencial na disciplina de Cálculo I. In: Congresso Brasileiro de Ensino Superior a Distância, XI, 2014, Florianópolis, **Anais**. Florianópolis: UFSC, 2014, p. 2488-2500. Disponível em http://esud2014.nute.ufsc.br/anais-esud2014/files/pdf/126500.pdf Acesso em 24 Abr 2016.

MORAES, Roque. Uma t**empestade de luz: a compreensão possibilitada pela Análise Textual Discursiva**. Revista Ciência & Educação. v.9, n. 2, 2003, p. 191-211.

MORAES, Roque; GALIAZZI, Maria do Carmo. **Análise Textual Discursiva**. Ijuí: Editora Unijuí. 2011

MOVSHOVITZ-HADAR, Nitsa; ZASLAVSKY, Orit; INBAR, Shmolo. An empirical classification model for erros in high school mathematics. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 18, n. 1, p. 3-14, 1987. Disponível em https://www.jstor.org/stable/749532?seq=1#page_scan_tab_contents Acesso em 25 Mai 2016.

OLIVEIRA, Maria Cristina Araújo de; RAAD, Marcos Ribeiro. **A existência de uma cultura escolar de reprovação no ensino de Cálculo.** Boletim GEPEM, v. 1, p. 125-137, 2012. Disponível em http://www.ufjf.br/mestradoedumat/files/2011/09/Produto-educacional-Marcos-Raad.pdf Acesso em 19 Abr 2017.

PATRÍCIO, Maria Raquel; GONÇALVES, Vitor. Facebook: rede social educativa? In: CONSTA, Fernando; MIRANDA, Guilhermina; MATOS, João; CHAGAS, Isabel; CRUZ, Elisabete (Orgs.), **Actas do I Encontro Internacional de TIC e Educação: Inovação Curricular com TIC**. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, p. 593-598, 2010. Disponível em https://bibliotecadigital.ipb.pt/bitstream/10198/3584/1/118.pdf Acesso em 20 Abr 2017.

PEREIRA, Alice Theresinha Cybis; SCHIMITT, Valdenise; DIAS, Maria Regina Álvares Correia. Ambientes Virtuais de Aprendizagem. In: PEREIRA, Alice Theresinha Cybis. (Org.). **Ambientes Virtuais de Aprendizagem: em diferentes contextos**. 1ª ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007, v. 1, p. 2-22. Disponível em http://www.pucrs.br/ciencias/viali/tic_literatura/artigos/ava/2259532.pdf Acesso em 06 de Set 2017.

PEREIRA FILHO, Albano Dias; KAIBER, Carmen Teresa; LÉLIS, Flavio Roldão de Carvalho. Categorização e Análise de Erros Cálculo Diferencial e Integral. In: Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia (COBENGE). XL, 2012, Belém: Abenge. 2012.

REIS, Frederico da Silva. **A tensão entre rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise: A visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos**. 2001. 302 p. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2001.

REZENDE, Wanderley Moura. **O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica**. 2003. 450 p. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

RICO, Luis. Errores y dificultades em el aprendizaje de las matemáticas. In: KILPATRICK, Jeremy; GÓMEZ, Pedro; RICO, Luis (Orgs.). **Educación Matemática**. México: Grupo Editorial Iberoamérica S. A., 1995, p. 69-108.

SCOTT HOOD, Priscila Augusta de Quadros; KAIBER, Carmen Teresa. Mídias digitais e o estudo do Cálculo Diferencial e Integral. In: Congresso Internacional de Ensino de Matemática (CIEM), VII, 2017, Canoas, **Anais do CIEM**. Canoas: ULBRA, 2017a.

______. Vídeos do YouTube como material de apoio no estudo de cálculo diferencial e integral: possibilidades de uso das ferramentas do Facebook. In: Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia (COBENGE), XLV, 2017, Joinville: UDESC/UNISOCIESC, 2017b.

SILVA, Alexandre Campos; SANTOS, Marcio Jorge dos; BIANCHINI, Marco Aurélio; SURIANI, Rogério Massaro. **Educação a Distância aplicada à disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I na graduação de Ciência da Computação**. 2005. Disponível em http://www.abed.org.br/congresso2005/por/pdf/146tcc3.pdf Acesso em 20 Mai 2016.

SILVA, Márcio Roberto Machado da; GELLER, Marlise. Cenário do uso educacional de redes sociais na região metropolitana de Porto Alegre/RS. **Revista Novas Tecnologias na Educação (RENOTE)**, v. 12, p. 100-110, 2014.

SILVA, Marco. Criar e professorar um curso *online*: relato de experiência. In: ______ (Org.) **educação *online***. 4ª ed. São Paulo: Edições Loyola, 2012. p. 53-76.

SILVA, Maria Deusa Ferreira da. **Problemas e modelos que contribuíram com o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral: dos gregos a Newton**. 242 p. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2010.

STEWART, James. **Cálculo – Volume 1**. Tradução: Antonio Carlos Moretti. São Paulo: Thomson Learning, 2014.

THIRY-CHERQUES, Hermano Roberto. Saturação em Pesquisa Qualitativa: estimativa empírica de dimensionamento. **Revista Brasileira de Pesquisas de Marketing, Opinião e Mídia (PMKT)**, v. 3, 2009, p. 20-27.

THOMAS, George B. **Cálculo – Volume 1**. Tradução: Paulo Boschcov. 5ª ed. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2005.

TOMAÉL, Maria Inês; ALCARÁ, Adriana Rosecler; DI CHIARA, Ivone Guerreiro. **Das redes sociais à inovação**. Revista Ciência da Informação (Ci. Inf.), v. 34, n. 2, 2005, p. 93-104. Disponível em http://www.scielo.br/pdf/ci/v34n2/28559.pdf Acesso em 17 Mai 2017.

TORRES, Terezinha Ione Martins. **Monitoria virtual no Moodle: Uma proposta para reconstruir os pré-requisitos de Cálculo "A"**. 130 p. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Faculdade de Física, PUCRS, Porto Alegre, 2007. Disponível em http://repositorio.pucrs.br/dspace/bitstream/10923/2998/1/000397320-Texto%2bCompleto-0.pdf Acesso em 08 Jun 2016.

YIN, Robert K. **Estudo de Caso: Planejamento e Métodos**. 4ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2010, 248 p.

ZANETTE, Elisa Netto; NICOLEIT, Evânio Ramos; NICOLEIT, Graziela Fátima Giacomazzo. **A produção do material didático no contexto colaborativo e colaborativo da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, na modalidade de educação à distância, na graduação**. Revista Novas Tecnologias na Educação (RENOTE), v. 4, n. 1, 2006. Disponível em http://www.seer.ufrgs.br/renote/article/viewFile/14042/7930 Acesso em 27 Mai 2016.

APÊNDICES

APÊNDICE A – PROTOCOLO PARA ANÁLISE DAS DIRETRIZES CURRICULARES NACIONAIS DOS CURSOS DE FÍSICA, MATEMÁTICA, QUÍMICA E ENGENHARIAS

CURSO	PERFIL DO EGRESSO	ÁREAS DE CONHECIMENTO	COMPETÊNCIAS E HABILIDADES
Física (Licenciatura)	Dedicar-se a formação e à disseminação do saber científico em diferentes instâncias sociais, seja através da atuação no ensino escolar formal, seja através de novas formas de educação científica, como vídeos, *softwares*, ou outros meios de comunicação.	**Núcleo Comum** (50% do currículo): Física geral, Matemática (na qual contemplam-se um conjunto de conhecimentos, dentre os quais cita-se o Cálculo Diferencial e Integral), Física Clássica, Física Moderna e Contemporânea e Disciplinas Complementares. **Núcleo Específico** (50% do currículo): Conhecimentos de Física para ensino no Ensino Médio, Conhecimento de Ciências para ensino no Ensino Fundamental, especialização pedagógica.	• o estudo da física enquanto objeto das ciências tendo condições de escrever, explicar, diagnosticar e desenvolver interpretações físicas e conceitos científicos de suas formulações, dentro de um contexto constantemente atualizado a partir de princípios sociais e históricos; • de utilizar a linguagem natural e matemática enquanto ferramenta para explicar, elaborar, conduzir, conhecer e compreender modelos, teorias e recursos da Física, Tecnologias Digitais e Tecnologias em geral para a expansão do estudo da área, bem como a disseminação e divulgação cultural; • de planejar, elaborar e adaptar conhecimentos da Física com estratégias adequadas ao ensino na Educação Básica, tendo foco na formação científica e social de seus alunos; • ter a experimentação com a utilização da pesquisa científica, com a produção científica e tecnológica sabendo e buscando entender a importância dessas pesquisas nos estudos da sociedade.
Matemática (Licenciatura)	A visão de seu papel social de educador e capacidade de se inserir em diversas realidades com sensibilidade para interpretar as ações dos educandos. A visão da contribuição que a aprendizagem da Matemática pode oferecer à formação dos indivíduos para o exercício de sua cidadania. A visão de que o conhecimento matemático pode e deve ser acessível a todos, e consciência de seu papel na superação dos preconceitos, traduzidos pela angústia, inércia ou rejeição, que muitas vezes ainda estão presentes no ensino-aprendizagem da disciplina.	**Conteúdo da parte comum:** Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra Linear, Fundamentos de Análise, Fundamentos de Álgebra, Fundamentos de Geometria, Geometria Analítica; Conteúdos matemáticos presentes na Educação Básica nas áreas de Álgebra, Geometria e Análise; Conteúdos de áreas afins à Matemática, que são fontes originadoras de problemas e campos de aplicação de suas teorias; Conteúdos da Ciência da Educação, da História e Filosofia das Ciências e da Matemática. **Parte diversificada:** Conteúdos pedagógicos e profissionalizantes da formação de professores.	• elaboração de propostas de ensino-aprendizagem de Matemática para a Educação Básica, de modo a analisar, selecionar e produzir materiais didáticos e estratégias de ensino que estejam de acordo com a realidade escolar e maturação dos alunos; • percepção da prática docente enquanto elemento flexível, dinâmico e de autocrítica que visa contribuir com inovações as propostas pedagógicas curriculares e da dinâmica em sala de aula; • concepção de que a matemática é objeto transformador na vida social e estudantil dos alunos, de modo que colabora a construção da cidadania no seu conjunto histórico, social, cultural e político.

CURSO	PERFIL DO EGRESSO	ÁREAS DE CONHECIMENTO		COMPETÊNCIAS E HABILIDADES
Química (Licenciatura)	Formação generalista, mas sólida e abrangente em conteúdo dos diversos campos da Química, preparação adequada à aplicação pedagógica do conhecimento e experiências de Química e de áreas afins na atuação profissional como educador na Educação do Ensino Fundamental e Ensino Médio.	**Conteúdo Específico:** Concepções e práticas pedagógicas para ensino de química.	**Conteúdos Básicos:** Matemática: Álgebra, Álgebra Linear, e Cálculo Diferencial e Integral; Física: Conhecimentos gerais sobre modelos e concepções teóricas da área; Química (Teoria e laboratório): propriedades físico-químicas das substâncias e dos materiais; estrutura atômica e molecular; análise química (métodos químicos e físicos e controle de qualidade analítico); termodinâmica química; cinética química; estudo de compostos orgânicos, organometálicos, compostos de coordenação, macromoléculas e biomoléculas; técnicas básicas de laboratório.	• conhecimento sólido e abrangente na área de Química, tendo conhecimento sobre as técnicas, tecnologias, e teorias epistemológicas que se mostram importantes em seu conhecimento particular e no conhecimento dos alunos da Educação Básica; • a capacidade de promover pesquisas em torno da área de conhecimento específico promovendo possibilidade de se desenvolver novos conhecimentos que possam ser utilizados nos fins culturais, históricos, políticos e sociais que envolvem e articulam a sociedade contemporânea e os ambientes naturais; • ter a compreensão de executar e formular trabalhos em equipe que permitam a interdisciplinaridade, transdisciplinaridade e multidisciplinaridade nos contextos curriculares e extracurriculares do ensino e aprendizagem em Química, englobando os elementos que incorporam, principalmente, a crítica, autocritica e reflexão sobre o conhecimento científico; • conhecer, compreender e saber utilizar as concepções pedagógicas e didáticas que incorporam o estudo de Química na formação do cidadão, do desenvolvimento social, cultural e tecnológico na condição de formação profissional dos cidadãos em formação.
Química (Bacharelado)	Formação generalista, com domínio das técnicas básicas de utilização de laboratórios e equipamentos, com condições de atuar nos campos de atividades socioeconômicas que envolvam as transformações da matéria; direcionando essas transformações, controlando os seus produtos, interpretando criticamente as etapas, efeitos e resultados; aplicando abordagens criativas à solução dos problemas e desenvolvendo novas aplicações e tecnologias.	**Conteúdo Específico:** Concepções e práticas para trabalho com Química		• possuir conhecimento sólido e abrangente na sua área de atuação, conseguindo aplicar seus conhecimentos na prática profissional e adequados as diferentes dinâmicas e problemáticas do trabalho; • de utilizar, escrever, determinar, organizar, escrever, arranjar e interpretar diferentes relações e modelos teóricos que envolvem linguagem Física, Química e Matemática, atrelando-as ao uso de tecnologias e aparatos necessários para a resolução de problemas; • ser capaz de trabalhar em equipe, tendo facilidade na comunicação de informações, dados, reflexões com foco principal nas atitudes culturais, econômicas e sociais necessárias para o aperfeiçoamento continuo das práticas de trabalho; • de conseguir ler, interpretar, conjecturar textos científicos e informações pertinentes ao uso social para desenvolvimento econômico nas diferentes e abrangentes áreas sociais, anexando, sempre que possível, os elementos tecnológicos digitais para facilitação em disseminar informação e depurar dados necessários; • ser capaz de desenvolver trabalhos e projetos para o crescimento social, político e histórico com ênfase em politicas públicas e noções de que o trabalho é cooperativo para o aprimoramento das tecnológicas químicas.

CURSO	PERFIL DO EGRESSO	ÁREAS DE CONHECIMENTO	COMPETÊNCIAS E HABILIDADES
Engenharias	Uma sólida formação técnica científica e profissional geral que capacite a absorver e desenvolver novas tecnologias, estimulando de modo a estimular a atuação crítica e criativa na identificação e resolução de problemas, considerando os aspectos políticos, econômicos, sociais, ambientais e culturais, com visão ética e humanística, em atendimento às demandas da sociedade.	**Núcleo de Conteúdos Básicos** (30% do currículo): Metodologia Científica e Tecnológica, Comunicação e Expressão, Informática, Expressão Gráfica, Matemática, Física, Fenômenos de Transporte, Mecânica dos Sólidos, Eletricidade Aplicada, Química, Ciência e Tecnologia dos Materiais, Administração, Economia; Ciências do Ambiente, Humanidades, Ciências Sociais e Cidadania; **O Núcleo de Conteúdos Profissionais** (15% do currículo) envolve áreas especificas da engenharia como, por exemplo: Algoritmos e Estruturas de Dados, Bioquímica, Ciência dos Materiais, Circuitos Elétricos, Circuitos Lógicos, Compiladores, Construção Civil e etc.; **O Núcleo de Conteúdos Específicos** se refere ao aprofundamento de conteúdos profissionais conforme o curso de engenharia estabelecido pela Instituição de Ensino Superior.	• aplicar conhecimentos matemáticos, científicos, tecnológicos e instrumentais as noções de engenharia, projetando, conduzindo, coordenando, aprimorando, supervisionando projetos, sistemas, experimentos e serviços da área; • desenvolver, aplicar, conduzir e aprimorar ferramentas técnicas de aplicação a área de engenharia, ao meio ambiente e ao contexto social; • compreender as possibilidades e viabilidades econômicas para a realização de projetos com o objetivo de assumir posturas críticas, reflexivas e necessárias para o aprimoramento de técnicas e tecnologias.

Fonte: Diretrizes Curriculares Nacionais dos cursos de Engenharia, Física, Matemática e Química (BRASIL, 2001a; 2001b; 2002a; 2002b).

APÊNDICE B – PROTOCOLO DE ANÁLISE DOS PLANOS DE ENSINO DOS COMPONENTES CURRICULARES DE CÁLCULO

DESCRITORES	O QUE ARTICULA	
Nome do componente	Cálculo I	Cálculo II
Carga horária	68 horas	68 horas
Ementas	Estudo e compreensão de funções e suas implicações e importância para as áreas exatas e tecnológicas, através da representação gráfica e analítica, aplicando as técnicas de derivação para o desenvolvimento do pensamento lógico na resolução de problemas.	Estudo da representação gráfica, analítica e técnicas de derivação e integração das funções com uma variável, suas aplicações nas áreas exatas e tecnológicas com vistas ao desenvolvimento do pensamento lógico na resolução de problemas.
Objetivos	Geral: Aplicar os conceitos matemáticos na resolução de problemas, através de técnicas analíticas e recursos tecnológicos.	
	Específicos: - identificar e representar graficamente funções; identificar e resolver problemas; - reconhecer o uso do limite e da derivada em diversas aplicações; - aplicar corretamente as técnicas de derivação em situações problemas; utilizar técnicas de derivação de funções para obter informações a respeito de sua variação; - reconhecer o caráter interdisciplinar no estudo do Cálculo Diferencial e Integral.	Específicos: - identificar e resolver problemas; - reconhecer o uso das integrais e derivadas em diversas aplicações; - aplicar corretamente as técnicas de derivação e integração em situações problemas; - utilizar técnicas de integração de funções para o cálculo de áreas e volumes de sólidos de revolução; - reconhecer o caráter interdisciplinar no estudo do Cálculo Diferencial e Integral.
Conteúdos	Funções de uma variável: polinomiais, potência, modulares, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas. Limite de funções reais: definição, interpretação geométrica, limites laterais. Limites no infinito. Cálculo de limites. Continuidade de funções reais: definição e estudo em diferentes tipos. Derivadas de funções reais: definição, interpretação geométrica e cinemática. Equações de retas tangentes e normais. Regras de derivação. Regra da Cadeia, derivadas de ordem superior, derivada implícita. Aplicações da derivada: máximos e mínimos relativos e globais, estudo da variação e da concavidade dos gráficos de funções. Construção de gráficos de funções. Resolução de problemas. Regra de L'Hopital.	Diferencial. Antiderivada e a primitiva geral. Integral indefinida: função de integração imediata, composta e substituição simples. Integral definida: soma de Riemann, Teorema Fundamental do Cálculo e aplicações na Física e no cálculo de áreas e volumes. Técnicas de Integração: por partes, frações parciais, potências de funções trigonométricas e substituição trigonométrica, funções logaritmo e exponencial natural, derivação logarítmica, funções trigonométricas inversas.
Metodologia e recursos	A disciplina deve ser desenvolvida utilizando aulas expositivas, dialogadas, pesquisa bibliográfica e utilização de recursos tecnológicos como calculadoras gráficas, *softwares* e a *internet*.	
Bibliografias indicadas (básicas)	ANTON, Howard. **Cálculo, um novo horizonte**. v. 1. 6 ed. Porto Alegre: Bookman, 2006. STEWART, James. **Cálculo**. V. 1. 7 ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2014. THOMAS, George B. **Cálculo**. V. 1. São Paulo: Addison Wesley, 2005.	

Fonte: planos de ensino da Instituição.

APÊNDICE C – PROTOCOLO PARA CATEGORIZAÇÃO DOS ERROS

CATEGORIAS	INDICADORES
Uso incorreto dos dados	- utiliza informações que não são pertinentes ao problema, apresentando dados estranhos à situação em tratamento; - negligencia dados informados necessários para a resolução e solução do problema, compensando sua falta pelo acréscimo de dados explicitamente irrelevantes; - aponta como requisito algo que não foi exigido no problema; - atribui à parte de informação dada um significado inconsistente com o texto; - aplica valor numérico de uma variável em outra; e/ou - transcreve de forma incorreta para a solução dados informados no problema.
Linguagem mal interpretada	- traduz uma expressão de linguagem natural em termo matemático ou equação que represente uma relação diferente da que é descrita verbalmente; - designa um conceito matemático a um símbolo que, tradicionalmente, refere-se a outro conceito e opera este símbolo em sua forma convencional; - interpreta incorretamente símbolos gráficos como termos matemáticos ou vice-versa.
Inferência lógica inválida	- conclui a partir de uma afirmação condicional (se *p*, então *q*) sua recíproca, quer na sua forma positiva (se *q*, então *p*) ou na sua forma contra positiva (se não *p*, então não *q*); - conclui a partir de uma afirmação condicional (se *p*, então *q*) e da sua consequente *q* que o antecedente *p* é válido; ou a partir de uma afirmação condicional e a negação do seu antecessor (não *p*) que a negação do consequente é válida; - conclui que *p* implica em *q*, quando *q* não necessariamente infere de *p*; - salta injustificadamente uma inferência lógica, isto é, declarar que *q* infere de *p* sem fornecer a sequência necessária de argumentos que conduzam de *p* a *q* ou fornece argumentos errôneos; e/ou - utiliza dos quantificadores lógicos tais como “todo”, “existem” ou “finalmente” em lugares inapropriados.
Teorema ou definição distorcida	- cita imprecisamente uma definição, teorema ou fórmula reconhecida; - aplica um teorema fora de suas condições; e/ou - aplica a propriedade distributiva em uma função ou operação não distributiva.
Solução não verificada	- apresenta boas argumentações, porém a solução encontrada não é a solicitada pelo problema.
Erro técnico	- apresenta erros aritméticos; - não extrai corretamente dados de tabelas; - apresenta erros na manipulação de símbolos algébricos elementares; e/ou - apresenta erros a execução de algoritmos.

Fonte: Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987).

APÊNDICE D – QUESTIONÁRIO PARA LEVANTAMENTO DO PERFIL DOS PARTICIPANTES

Questionário
1) Prazer, meu nome é Priscila. E o seu?
2) Em qual curso está matriculado?
3) Em que ano ingressou na graduação?
4) Qual semestre está cursando?
5) Qual foi sua última formação antes de ingressar na graduação? Quando concluiu?
6) Você trabalha? Caso a resposta foi sim, indique a carga horária. *Sim: ( ) até 20 horas semanais ( ) de 20 a 40 horas semanais ( ) mais de 40 horas semanais* *( ) Não, apenas estudo.*
7) Tem o hábito de estudar em casa? *( ) Sim ( ) Não*
8) Se você respondeu sim a questão anterior, qual frequência? *( ) Diariamente* *( ) Finais de semana* *( )Somente quando há atividades para entregar* *( ) Antes das provas*
9) Que tipo de material você costuma utilizar para estudar conteúdos referentes ao Cálculo Diferencial e Integral? (Atribua valores de 1 a 5 de acordo com a sua preferência, quanto maior o valor maior a preferência) *( ) Notas de aula* *( ) Livros* *( ) Vídeos disponibilizados no YouTube* *( ) Monitoria na universidade* *( ) Estudo com colegas*
10) Como prefere estudar? *( ) Individualmente* *( ) Em grupo – pessoalmente* *( ) Em grupo – via redes sociais*
11) Costuma utilizar as redes sociais para discutir ou dúvidas com colegas sobre conteúdos tratados em aula? *( ) Sim ( ) Não*
12) Em quais locais do seu cotidiano você acessa à internet? (Múltipla escolha) *( ) Em casa* *( ) No trabalho* *( ) Na universidade* *( ) Outros. Quais?*
13) Para qual finalidade costuma utilizar a internet? (Múltipla escolha) *( ) Para estudo* *( ) Entretenimento* *( ) Motivos de trabalho* *( ) Outras. Quais?*
14) Qual(is) dessa(s) redes sociais você costuma acessar? *( ) Facebook* *( ) YouTube* *( ) Whatsapp* *( ) Twitter* *( ) Outras. Quais?*

15) Se você selecionou uma ou mais redes sociais na questão anterior, responda: quais tecnologias digitais utiliza para acessá-la(s)? Se respondeu não, pule esta questão. *(   ) Computador* *(   ) Notebook* *(   ) Celular* *(   ) Tablet* *(   ) Outra. Qual?*
16) Você sabia que eles podem ser utilizados para fins educativos? *(   ) Sim   (   ) Não*
17) Costuma utilizar as redes sociais para estudar Cálculo Diferencial e Integral? *(   ) Sim   (   ) Não*
18) Quanto você utiliza dessas plataformas para estudar? *(   ) Uso sempre* *(   ) Muito* *(   ) Pouco* *(   ) Muito pouco* *(   ) Não utilizo*
19) Caso utilize a plataforma *YouTube* para estudar, possui algum canal de preferência?
20) Tem algum critério para seleção do material a ser utilizado?
21) Você compartilha os materiais encontrados no *YouTube* ou no *Facebook* com seus colegas? *(   ) Sim   (   ) Não*
22) Você utiliza esse material para estudar em grupo? *(   ) Sim   (   ) Não*

Fonte: a autora.

APÊNDICE E – PROTOCOLO DE ANÁLISE DAS INTERAÇÕES DO PMO

COMPONENTES DAS INTERAÇÕES	DESCRITOR
Questão envolvida	Qual o modelo de questão envolvida na discussão.
Conceitos Matemáticos	A discussão apresentou que conceitos matemáticos relacionados ao Cálculo Diferencial e Integral.
Tipos de erros	Quais os potenciais erros envolvidos que geraram a discussão ou possíveis problemáticas na busca da solução da questão.
Formas de representação	Que tipos de representação (aritmética, geométrica e verbal) são utilizados ao longo das discussões com o objetivo de resolver os problemas encontrado
Recursos utilizados	Quais recursos foram utilizados durante a interação: fotos de materiais, *softwares* e mídias.

Fonte: a autora.

APÊNDICE F – ROTEIRO PARA ENTREVISTA SEMIESTRUTURADA

ENTREVISTA SEMIESTRUTURADA	
1.	O Projeto de Monitoria *Online*, do qual foi voluntário durante esses meses de aplicação tinha por objetivo fomentar um espaço de aprendizagem colaborativa, no qual os participantes, além do material disponibilizado pela pesquisadora, também podiam indicar novos vídeos como material de apoio para estudo dos conteúdos referentes ao Cálculo Diferencial e Integral.
a)	Antes de participar do Projeto, você já utilizava os vídeos disponíveis no *YouTube* como recurso para estudar algum conteúdo que estava aprendendo em sala de aula?
b)	Em caso de resposta afirmativa no item anterior, desenvolveu empiricamente algum critério para seleção dos vídeos utilizados? A participação no projeto acarretou em alguma mudança em seus critérios para seleção de novos vídeos que serão utilizados daqui para frente?
2.	Outro dos pontos explorados foram os debates acerca dos conteúdos que eram partilhados no grupo de estudos.
a)	Você já fazia uso das redes sociais como plataforma para estudos em grupo de forma *online*?
b)	Caso utilizasse, conheceu alguma nova ferramenta do *Facebook* utilizada ao longo do processo?
c)	Acredita que tenha obtido melhoras no seu entendimento no que se refere aos conceitos estudados?
d)	Caso não utilizasse, passará a utilizar essa plataforma para fins de Educação a partir da sua participação nesse projeto?
e)	Teve alguma dificuldade de adaptação ao modelo proposto?
f)	Você considera a flexibilidade nos horários de utilização como um facilitador para sua adaptação com o método proposto?
3.	O trabalho desenvolvido fazia uso constante dos vídeos e também da troca de conhecimentos entre os participantes por meio de discussões. Pode destacar algum dos dois aspectos como mais relevante para sua aprendizagem? Por quê?

Fonte: a autora.

APÊNDICE G – DESCRIÇÃO DOS VÍDEOS INDICADOS NO EIXO FUNÇÕES

CAPA DO ÁLBUM FUNÇÕES	
	As Funções, de modo geral, são elementos importantes do estudo do Cálculo Diferencial e Integral, uma vez que permeiam três dos seus eixos principais: Limites e Continuidades, Derivadas e Integrais. Dito isso, é bastante útil conhecer as características de algumas das funções chave estudadas ao longo das disciplinas de Cálculo I e II: Funções Polinomiais (primeiro, segundo graus), Funções Trigonométricas (seno, cosseno...), Funções Exponenciais e Funções Logarítmicas.

Fonte: a pesquisa.

INFORMAÇÕES	DESCRIÇÃO
Título do vídeo	Dica de Matemática - Funções - Parte 1 - Oficina do Estudante
Duração	10:00
Álbum	Funções
Canal	Oficina Resolve
Disponível em	https://www.youtube.com/watch?v=8qRun3Dr_-c
Descrição publicada no grupo	Neste vídeo, disponibilizado pelo canal oficinadoestudante, o professor Altair apresenta, por meio da representação de diagramas, o conceito de funções e uma breve descrição de domínio, contradomínio e imagem.

Fonte: a pesquisa.

INFORMAÇÕES	DESCRIÇÃO
Título do vídeo	Matemática - Funções - Aula 2 - Oficina do Estudante
Duração	9:43
Álbum	Funções
Canal	Oficina Resolve
Disponível em	https://www.youtube.com/watch?v=VO2zI2rM1po#t=583.481
Descrição publicada no grupo	Em mais um vídeo do canal oficinadoestudante, o professor Altair apresenta novas ferramentas para o estudo de funções, tais como os pares ordenados, a representação gráfica e o teste da vertical para verificação de uma função.

Fonte: a pesquisa.

INFORMAÇÕES	DESCRIÇÃO
Título do vídeo	Matemática - Funções - Domínio e Imagem - Parte 3 - Oficina do Estudante
Duração	8:04
Álbum	Funções
Canal	Oficina Resolve
Disponível em	https://www.youtube.com/watch?v=TFpOD_LDxi4
Descrição publicada no grupo	Nesse vídeo do canal oficinadoestudante, o professor Altair utiliza software dinâmico para auxiliar na identificação do domínio e imagem de gráficos de funções.

Fonte: a pesquisa.

PLAYLIST FUNÇÕES DE 1º GRAU	
	Também chamadas de Função Polinomial de Primeiro Grau, são aquelas determinadas pela lei f(x)=ax+b, cuja representação gráfica se dá por meio de uma reta. Dividem-se em função afim, função linear e função constante. Suas aplicações se dão, por exemplo, em problemas relacionados à custo, receita e lucro, demanda e oferta, consumo e poupança.

Fonte: a pesquisa.

INFORMAÇÕES	DESCRIÇÃO
Título do vídeo	Função afim (1 de 7)
Duração	15:18
Álbum	Funções
Canal	Toda Matemática
Disponível em	https://www.youtube.com/watch?v=updIF5-eNkk
Descrição publicada no grupo	Nesse vídeo, disponibilizado pelo canal Toda Matemática, o professor Gustavo Viegas apresenta estudo sobre função afim, trazendo exemplos do cotidiano, visando favorecer uma noção intuitiva sobre os elementos que compõem sua lei de formação.

Fonte: a pesquisa.

INFORMAÇÕES	DESCRIÇÃO
Título do vídeo	Gráfico (Função afim - 2 de 7)
Duração	12:20
Álbum	Funções
Canal	Toda Matemática
Disponível em	https://www.youtube.com/watch?v=2fEH2N_C1Ok
Descrição publicada no grupo	Em mais um vídeo do canal Toda Matemática, o professor Gustavo Viegas apresenta exemplos nos quais mostra como esboçar o gráfico de diferentes funções de primeiro grau.

Fonte: a pesquisa.

INFORMAÇÕES	DESCRIÇÃO
Título do vídeo	Me Salva! FUN08 - Funções - Como esboçar uma função de 1º grau, método ninja
Duração	3:58
Álbum	Funções
Canal	Me Salva!
Disponível em	https://www.youtube.com/watch?v=CbdYdWjT5L4&t=68s
Descrição publicada no grupo	O canal Me Salva! apresenta neste vídeo um "Método Ninja" para calcular pontos de funções de primeiro grau intencionando facilitar o esboço de seu gráfico.

Fonte: a pesquisa.

INFORMAÇÕES	DESCRIÇÃO
Título do vídeo	Me Salva! FUN05 - Funções - Coeficiente angular da Função de 1º grau
Duração	6:13
Álbum	Funções
Canal	Me Salva!
Disponível em	https://www.youtube.com/watch?v=oLEsg0BPdik
Descrição publicada no grupo	Nesse vídeo, o canal Me Salva! aborda com mais detalhes o coeficiente angular das funções do primeiro grau.

Fonte: a pesquisa.

INFORMAÇÕES	DESCRIÇÃO
Título do vídeo	Me Salva! FUN06 - Funções - Coeficiente Linear das Funções de 1º grau
Duração	3:45
Álbum	Funções
Canal	Me Salva!
Disponível em	https://www.youtube.com/watch?v=e5i34GfMly0
Descrição publicada no grupo	Nesse vídeo, o canal Me Salva! aborda com mais detalhes o coeficiente linear das funções do primeiro grau.

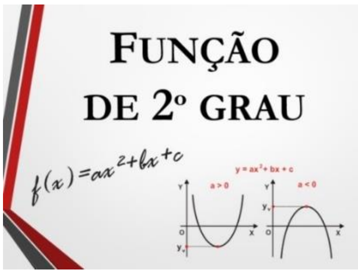
Fonte: a pesquisa.

INFORMAÇÕES	DESCRIÇÃO
Título do vídeo	Me Salva! FUN07 - Funções - Resumo dos coeficientes das Funções de 1º grau
Duração	4:06
Álbum	Funções
Canal	Me Salva!
Disponível em	https://www.youtube.com/watch?v=6coyYFDJJPY
Descrição publicada no grupo	Nesse vídeo o canal Me Salva! apresenta um estudo dos sinais dos coeficientes angulares e lineares das funções do primeiro grau, mostrando de que forma eles influenciam no crescimento e decrescimento do gráfico dessas funções.

Fonte: a pesquisa.

INFORMAÇÕES	DESCRIÇÃO
Título do vídeo	Matemática - Funções - Parte 4 - Função de 1o Grau - Oficina do Estudante
Duração	11:20
Álbum	Funções
Canal	Oficina Resolve
Disponível em	https://www.youtube.com/watch?v=4bkHYGDc-_8
Descrição publicada no grupo	Nesse vídeo, disponibilizado pelo canal oficinadoestudante, o professor Altair fala dos coeficientes da função do primeiro grau e utiliza software dinâmico para analisar o comportamento de diversas funções.

Fonte: a pesquisa.

PLAYLIST FUNÇÕES DE 2º GRAU	
	Também chamada de funções quadráticas, são aquelas na forma f(x)=ax²+bx+c, com a diferente de zero. Seu gráfico é representado por uma curva denominada parábola. Sua aplicação se dá, por exemplo, em problemas relacionados à receita e lucro.

Fonte: a pesquisa.

INFORMAÇÕES	DESCRIÇÃO
Título do vídeo	Me Salva! FUN09 - Funções - Introdução as funções de 2º grau
Duração	7:25
Álbum	Funções
Canal	Me Salva!
Disponível em	https://www.youtube.com/watch?v=lTWCZkJtSpw
Descrição publicada no grupo	Nesse vídeo, disponibilizado pelo canal Me Salva!, é apresentada uma introdução às funções do segundo grau. Mostra o esboço de gráfico, identificando as raízes e o vértice de uma função quadrática.

Fonte: a pesquisa.

INFORMAÇÕES	DESCRIÇÃO
Título do vídeo	Me Salva! FUN10 - Funções - Resumo dos coeficientes da função de 2º grau
Duração	7:18
Álbum	Funções
Canal	Me Salva!
Disponível em	https://www.youtube.com/watch?v=NO78s8nosZI
Descrição publicada no grupo	Em mais uma vídeo disponibilizado pelo canal Me Salva!, é apresentado um estudo sobre os coeficientes da função de segundo grau, mostrando como eles interferem no esboço do gráfico.

Fonte: a pesquisa.

INFORMAÇÕES	DESCRIÇÃO
Título do vídeo	Me Salva! FUN11 - Funções - Delta, Baskara - Raízes da parábola passo a passo
Duração	7:07
Álbum	Funções
Canal	Me Salva!
Disponível em	https://www.youtube.com/watch?v=LodMxZZXg9w
Descrição publicada no grupo	Esse vídeo, disponibilizado pelo canal Me Salva!, mostra o cálculo das raízes das funções do segundo grau, utilizando a fórmula de Báskara, além de apresentar a relação das raízes com o esboço do gráfico.

Fonte: a pesquisa.

INFORMAÇÕES	DESCRIÇÃO
Título do vídeo	Me Salva! FUN12 - Funções - Como encontrar o vértice da parábola
Duração	5:34
Álbum	Funções
Canal	Me Salva!
Disponível em	https://www.youtube.com/watch?v=0mS5AqRrhxY
Descrição publicada no grupo	Esse vídeo do canal Me Salva! mostra como fazer o cálculo do vértice de uma parábola por meio da análise das raízes da função e, também, pelo uso das fórmulas específicas.

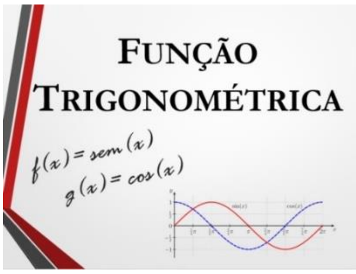
Fonte: a pesquisa.

INFORMAÇÕES	DESCRIÇÃO
Título do vídeo	Me Salva! FUN13 - Funções - Como esboçar uma parábola
Duração	7:26
Álbum	Funções
Canal	Me Salva!
Disponível em	https://www.youtube.com/watch?v=Wg-KGKeiQOY
Descrição publicada no grupo	Nesse vídeo o canal Me Salva! sugere um "método ninja" para esboçar o gráfico de uma parábola.

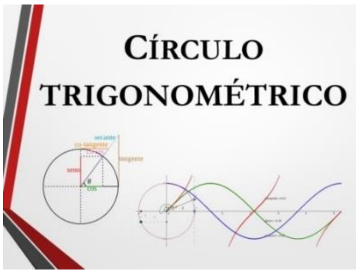
Fonte: a pesquisa.

INFORMAÇÕES	DESCRIÇÃO
Título do vídeo	Reforço Cálculo I - FUNÇÃO QUADRÁTICA com o Prof. Rodrigo Braga
Duração	5:41
Álbum	Funções
Canal	Unisinos
Disponível em	https://www.youtube.com/watch?v=_a-u1fOHyyM
Descrição publicada no grupo	Nesse vídeo, disponibilizado pelo canal Unisinos, o professor Rodrigo apresenta um estudo sobre as funções de segundo grau, falando sobre seus elementos e esboço do gráfico. Destaca-se o momento no qual mostra quadro com as variações dos coeficientes das funções, e como isso interfere no esboço do gráfico.

Fonte: a pesquisa.

<table>
<tr><th colspan="2">PLAYLIST FUNÇÃO TRIGONOMÉTRICA</th></tr>
<tr><td></td><td>São funções cíclicas, cujo comportamento se repete periodicamente. Duas das mais elementares são as funções seno e cosseno, das quais derivam-se outras funções trigonométricas.
São utilizadas em diferentes áreas do conhecimento da física, engenharia, matemática e etc. Na física, por exemplo, essas funções são evidencias ao estudar fenômenos de onda eletromagnéticas, propagação do som, propagação da luz, enfim, propagação dos mais diversos e diferentes tipos de onda, auxiliando na compreensão dos elementos de frequência, período e oscilação dos conhecimentos citados. Em respeito as engenharias, por exemplo, são utilizadas nos fundamentos de elétrica, de mecânica, de modulação de estruturas sólidas ou flexíveis. Por fim, seu estudo por ser contemplado, no sentido interpretativo, geométrico e aritmético, ao se estudar pela visão da matemática.</td></tr>
</table>

Fonte: a pesquisa.

<table>
<tr><th colspan="2">PLAYLIST CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO</th></tr>
<tr><td></td><td>Uma vez que as funções trigonométricas são cíclicas (ou circulares), uma ferramenta interessante para entendermos o comportamento dessas funções é círculo trigonométrico, no qual podemos analisar o padrão de comportamento em um ciclo de 360°, replicando-o à graus maiores.
Assim sendo, foram selecionados alguns vídeos que mostram o estudo de cada uma das funções trigonométricas usadas ao longo das disciplinas de Cálculo, utilizando o círculo trigonométrico, servindo como base para a representação gráfica dessas funções no plano cartesiano.</td></tr>
</table>

Fonte: a pesquisa.

INFORMAÇÕES	DESCRIÇÃO
Título do vídeo	Me Salva! TRG03 - Trigonometria - Círculo trigonométrico
Duração	6:52
Álbum	Funções
Canal	Me Salva!
Disponível em	https://www.youtube.com/watch?v=-qVIXr-x0JA&list=PLf1lowbdbFIDyVckJbycSHH4FVwdOc2Gd&index=3
Descrição publicada no grupo	Este vídeo, disponibilizado pela canal Me Salva!, apresenta algumas noções iniciais sobre o círculo trigonométrico, tais como o raio, o sentido de abertura dos ângulos e a distribuição dos quadrantes. O vídeo apresenta também os ângulos notáveis e a relação entre graus e radianos.

Fonte: a pesquisa.

INFORMAÇÕES	DESCRIÇÃO
Título do vídeo	Me Salva! TRG05 - Trigonometria - Funções seno e cosseno
Duração	8:25
Álbum	Funções
Canal	Me Salva!
Disponível em	https://www.youtube.com/watch?v=LUZH0kgug8M&list=PLf1lowbdbFIDyVckJbycSHH4FVwdOc2Gd&index=5
Descrição publicada no grupo	Este vídeo, disponibilizado pelo canal Me Salva!, apresenta um estudo sobre as coordenadas das funções seno e cosseno utilizando o círculo trigonométrico. Por meio de representações geométricas é feito um estudo sobre o comportamento dessas funções ao longo de cada ciclo de 360° graus, dadas suas coordenadas e projeções nos eixos x e y.

Fonte: a pesquisa.

INFORMAÇÕES	DESCRIÇÃO
Título do vídeo	Me Salva! TRG06 - Trigonometria - Funções tangente e secante
Duração	7:15
Álbum	Funções
Canal	Me Salva!
Disponível em	https://www.youtube.com/watch?v=nhlRbWuJvsE&index=6&list=PLf1lowbdbFIDyVckJbycSHH4FVwdOc2Gd
Descrição publicada no grupo	Este vídeo, disponibilizado pelo canal Me Salva!, apresenta um estudo sobre as coordenadas das funções tangente e secante utilizando o círculo trigonométrico. Por meio de representações geométricas é feito um estudo sobre o comportamento da função tangente ao longo de cada ciclo de 360° graus, dadas suas coordenadas e projeções na reta tangente.

Fonte: a pesquisa.

INFORMAÇÕES	DESCRIÇÃO
Título do vídeo	Me Salva! TRG07 - Trigonometria - Funções cotangente e cossecante
Duração	3:58
Álbum	Funções
Canal	Me Salva!
Disponível em	https://www.youtube.com/watch?v=-3GKRlAsM7Q&list=PLf1lowbdbFIDyVckJbycSHH4FVwdOc2Gd&index=7
Descrição publicada no grupo	Este vídeo, disponibilizado pelo canal Me Salva!, apresenta um estudo sobre as coordenadas das funções cotangente e cossecante utilizando o círculo trigonométrico. Por meio de representações geométricas é feito um estudo sobre a localização das coordenadas dessas funções ao longo de cada ciclo de 360° graus.

Fonte: a pesquisa.

INFORMAÇÕES	DESCRIÇÃO
Título do vídeo	Grings - Aula 3 - Trigonometria - Função seno e cosseno
Duração	12:25
Álbum	Funções
Canal	omatematico.com
Disponível em	https://www.youtube.com/watch?v=kMdNnFSFXAo&feature=youtu.be
Descrição publicada no grupo	O vídeo do canal omatemático.com mostra um estudo sobre as funções seno e cosseno, transpondo as informações do círculo trigonométrico para a representação gráfica dessas funções no plano cartesiano.

Fonte: a pesquisa.

INFORMAÇÕES	DESCRIÇÃO
Título do vídeo	Grings - Aula 5 - Trigonometria - Gráficos da função seno
Duração	16:03
Álbum	Funções
Canal	omatematico.com
Disponível em	https://www.youtube.com/watch?v=Afm3UnA3i4w
Descrição publicada no grupo	Nesse vídeo do canal omatemático.comsão apesentados casos de variações da função seno, nos quais podemos ver fatores que interferem na imagem, na amplitude e no período dos gráficos dessa função.

Fonte: a pesquisa.

INFORMAÇÕES	DESCRIÇÃO
Título do vídeo	Aula sobre Função Seno
Duração	13:19
Álbum	Funções
Canal	Pense Vestibular
Disponível em	https://www.youtube.com/watch?v=z7X9PuY8Ekg
Descrição publicada no grupo	Nesse vídeo, disponibilizado pelo canal Pense Vestibular, o professor Orestes utiliza software dinâmico para mostrar as variações do gráfico da função seno em relação à período, imagem, amplitude e deslocamento.

Fonte: a pesquisa.

INFORMAÇÕES	DESCRIÇÃO
Título do vídeo	Grings - Aula 6 - Trigonometria - Gráficos da Função cosseno
Duração	11:23
Álbum	Funções
Canal	omatematico.com
Disponível em	https://www.youtube.com/watch?v=5UNDEm3AQ7k
Descrição publicada no grupo	Nesse vídeo do canal omatemático.com são apesentados casos de variações da função cosseno, nos quais podemos ver fatores que interferem na imagem, na amplitude e no período dos gráficos dessa função.

Fonte: a pesquisa.

INFORMAÇÕES	DESCRIÇÃO
Título do vídeo	Aula sobre Função Cosseno
Duração	9:08
Álbum	Funções
Canal	Pense Vestibular
Disponível em	https://www.youtube.com/watch?v=ah4kMSpI7fY
Descrição publicada no grupo	Nesse vídeo, disponibilizado pelo canal Pense Vestibular, o professor Orestes utiliza software dinâmico para mostrar as variações do gráfico da função cosseno em relação à período, imagem, amplitude e deslocamento.

Fonte: a pesquisa.

INFORMAÇÕES	DESCRIÇÃO
Título do vídeo	Aula sobre Função Tangente
Duração	13:44
Álbum	Funções
Canal	Pense Vestibular
Disponível em	https://www.youtube.com/watch?v=TzDivwnAivA
Descrição publicada no grupo	Nesse vídeo, disponibilizado pelo canal Pense Vestibular, o professor Orestes utiliza software dinâmico para mostrar as variações do gráfico da função tangente em relação à período, imagem, amplitude e deslocamento.

Fonte: a pesquisa.

PLAYLIST FUNÇÃO EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA	
	Funções exponenciais são aquelas cuja variável encontra-se no expoente. Seu comportamento caracteriza-se pelo crescimento ou decrescimento bastante acentuado se comparado, por exemplo, a funções do 2º grau. As funções logarítmicas, por sua vez, são funções inversas às exponenciais, uma vez que a função exponencial associa a cada expoente uma potência resultante, a função logarítmica correspondente atribui a cada potência seu respectivo expoente. Relações tais como capitalização composta, crescimento populacional, escala Richter e desintegração radioativa são algumas das aplicações das funções exponenciais e logarítmicas.

Fonte: a pesquisa.

INFORMAÇÕES	DESCRIÇÃO
Título do vídeo	Pre-Calculus 1 - ALGEBRA_ PROPERTIES OF POWER
Duração	14:03
Álbum	Funções
Canal	Matemática Rio com Prof. Rafael Procopio
Disponível em	https://www.youtube.com/watch?v=VJNT5BUoK9Q
Descrição publicada no grupo	Neste vídeo, disponibilizado pelo canal Matemática Rio, o professor Rafael traz uma revisão sobre as propriedades de potenciação, utilizando questões comentadas para mostrar as diferentes propriedades.

Fonte: a pesquisa.

INFORMAÇÕES	DESCRIÇÃO
Título do vídeo	Matemática - Função Exponencial
Duração	11:28
Álbum	Funções
Canal	Aula De
Disponível em	https://www.youtube.com/watch?v=dMNoXKqHGA4
Descrição publicada no grupo	Nesse vídeo disponibilizado pelo canal Aula De, o professor Diego traz um breve estudo sobre funções exponenciais, abordando pontos importantes para esboço das mesmas, tais como ponto de intersecção com os eixos e intervalos de crescimento e decrescimento. Apresenta exemplos para funções exponenciais em uma estrutura mais simples, com um número elevado a um expoente variável e, também, estrutura envolvendo transformações e deslocamentos no gráfico.

Fonte: a pesquisa.

INFORMAÇÕES	DESCRIÇÃO
Título do vídeo	Matemática – Logaritmos
Duração	13:12
Álbum	Funções
Canal	Hexag Mackenzie
Disponível em	https://www.youtube.com/watch?v=qU_pH2kG9eI&feature=youtu.be
Descrição publicada no grupo	O vídeo disponibilizado pelo canal Hexag Mackenzie, o professor Nando aborda o conceito de logaritmos, apresentando sua definição e propriedades, explica também sua relação com a potenciação. Por fim, é apresentada um a questão comentada resolvida com o uso das propriedades apresentadas.

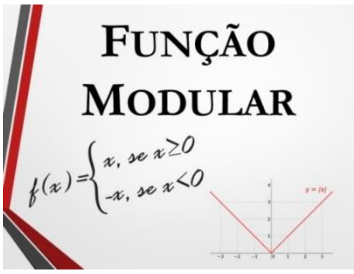
Fonte: a pesquisa.

INFORMAÇÕES	DESCRIÇÃO
Título do vídeo	Matemática - Função Logarítmica
Duração	12:23
Álbum	Funções
Canal	Aula De
Disponível em	https://www.youtube.com/watch?v=2jWt1JXfIzo
Descrição publicada no grupo	Nesse vídeo disponibilizado pelo canal Aula De, o professor Diego traz um breve estudo sobre funções logarítmicas, abordando pontos importantes para esboço das mesmas, tais como ponto de intersecção com os eixos e intervalos de crescimento e decrescimento. Apresenta exemplos para funções logarítmicas em uma estrutura mais simples, com um número elevado a um expoente variável e, também, estrutura envolvendo transformações e deslocamentos no gráfico.

Fonte: a pesquisa.

INFORMAÇÕES	DESCRIÇÃO
Título do vídeo	Grings - Log8 - Funções Logarítmica e Exponencial
Duração	16:47
Álbum	Funções
Canal	omatematico.com
Disponível em	https://www.youtube.com/watch?v=LUzfvhcnhoE&feature=youtu.be
Descrição publicada no grupo	Neste vídeo, disponibilizado pelo canal omatematico,com, as funções exponenciais e logarítmicas são apresentadas como funções inversas, mostrando, com o uso de exemplos, como se dá o comportamento de ambas no plano cartesiano.

Fonte: a pesquisa.

PLAYLIST FUNÇÃO MODULAR	
 	Também conhecida como função valor absoluto, é aquela que apresenta o módulo (ou valor absoluto) em sua lei de formação. É um dos exemplos de função definida por mais de uma sentença, na qual existem reflexões no gráfico de acordo com o valor de x.

Fonte: a pesquisa.

INFORMAÇÕES	DESCRIÇÃO
Título do vídeo	FUNÇÃO MODULAR _ MÓDULO DE UM NÚMERO REAL
Duração	10:09
Álbum	Funções
Canal	Equaciona matemática
Disponível em	https://www.youtube.com/watch?v=iT0KSy08itc
Descrição publicada no grupo	Neste vídeo, disponibilizado pelo canal Equaciona matemática, o professor Paulo aborda o conceito de módulo, cujo entendimento é primordial para o estudo das funções modulares. São apresentadas as definições geométrica e algébrica, além de exemplos de equações modulares.

Fonte: a pesquisa.

INFORMAÇÕES	DESCRIÇÃO
Título do vídeo	FUNÇÃO MODULAR _ CONCEITOS INICIAIS E GRÁFICOS
Duração	8:53
Álbum	Funções
Canal	Equaciona matemática
Disponível em	https://www.youtube.com/watch?v=pmZdHEsr5LM
Descrição publicada no grupo	Em mais um vídeo do canal Equaciona matemática, o professor Paulo explica como fazer a construção de gráficos do que ele chama de "Tipo I" - aquelas nas quais não há termos fora do módulo, como por exemplo y=|x|.

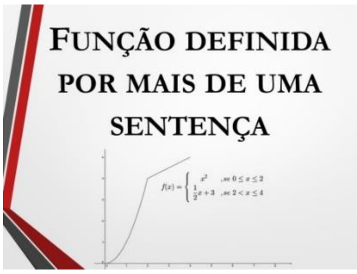
Fonte: a pesquisa.

INFORMAÇÕES	DESCRIÇÃO
Título do vídeo	FUNÇÃO MODULAR _ GRÁFICOS #2
Duração	6:50
Álbum	Funções
Canal	Equaciona matemática
Disponível em	https://www.youtube.com/watch?v=b9K884tjeO4
Descrição publicada no grupo	Em mais um vídeo, disponibilizado pelo canal Equaciona matemática, o professor Paulo explica como fazer a construção de gráficos do que ele chama de "Tipo II" - aquelas nas quais há termos fora do módulo, como por exemplo y=|x-2|+1.

Fonte: a pesquisa.

INFORMAÇÕES	DESCRIÇÃO
Título do vídeo	Gráficos de Funções Modulares - Módulo na Função do 1º Grau e na Função do 2º Grau (Truques)
Duração	9:11
Álbum	Funções
Canal	Waldematica
Disponível em	https://www.youtube.com/watch?v=CoW3LiE4T9U&t=28s
Descrição publicada no grupo	Neste vídeo, disponibilizado pelo canal W4L deMÁTICA, o professor W4L apresenta um estudo de funções modulares envolvendo funções de primeiro e segundo graus. São dados exemplos de aplicação da função módulo em que não há elementos fora do módulo - acarretando a reflexão de parte do gráfico em torno do eixo x; Exemplos nos quais o módulo é aplicado apenas na variável - acarretando em uma reflexão de parte do gráfico em torno do eixo y; E por fim, exemplos nos quais há uma aplicação dupla do módulo: na variável e em toda a função dada, havendo uma combinação de reflexões do gráfico em torno dos eixos.

Fonte: a pesquisa.

PLAYLIST FUNÇÃO DEFINIDA POR MAIS DE UMA SENTENÇA	
	Também conhecidas como funções por partes ou várias leis, são aquelas cuja lei de formação varia dependendo do valor de x. A esses valores nos quais ocorre a mudança da lei de formação é dado o nome de pontos de mudança. Uma de suas aplicações está relacionada ao índice de sensação térmica.

Fonte: a pesquisa.

INFORMAÇÕES	DESCRIÇÃO
Título do vídeo	Função Definida por duas ou mais Sentenças - Parte 1
Duração	8:09
Álbum	Funções
Canal	Ficou Mais Fácil
Disponível em	https://www.youtube.com/watch?v=zdr3gbo-N4U
Descrição publicada no grupo	Este vídeo, disponibilizado pelo canal Ficou Mais Fácil, é apresentado exemplo de função definida por duas, no qual a professora faz uma análise dos comportamentos de cada sentença que compõem f(x), observando as restrições dadas pelo domínio de cada função e a representação de pontos contidos ou não nas funções. Uma feita essa sondagem é feito o esboço do gráfico e análise dos intervalos de domínio e imagem de f(x).

Fonte: a pesquisa.

INFORMAÇÕES	DESCRIÇÃO
Título do vídeo	Função Definida por duas ou mais Sentenças - Parte 2
Duração	8:09
Álbum	Funções
Canal	Ficou Mais Fácil
Disponível em	https://www.youtube.com/watch?v=1YWB28KbW5Q
Descrição publicada no grupo	Em mais um vídeo disponibilizado pelo canal Ficou Mais Fácil, é apresentado exemplo de função definida por duas, no qual a professora faz uma análise dos comportamentos de cada sentença que compõem f(x), observando as restrições dadas pelo domínio de cada função e a representação de pontos contidos ou não nas funções. Uma feita essa sondagem é feito o esboço do gráfico e análise dos intervalos de domínio e imagem de f(x).

Fonte: a pesquisa.

INFORMAÇÕES	DESCRIÇÃO
Título do vídeo	Gráfico de Função Sentença
Duração	9:01
Álbum	Funções
Canal	Bem Simples – Exatas
Disponível em	https://www.youtube.com/watch?v=h1hnZtm9znE
Descrição publicada no grupo	Este vídeo, disponibilizado pelo canal Bem Simples - Exatas, apresenta um exemplo de função definida por duas sentenças no qual o professor chama a atenção para as restrições das sentenças que compõem f(x), informação importante para localizar o domínio de cada sentença.

Fonte: a pesquisa.

ANEXOS

ANEXO A – RESPOSTAS DA ENTREVISTA SEMIESTRUTURADA DADAS PELO PARTICIPANTE MO1

	ENTREVISTA SEMIESTRUTURADA – PROJETO MONITORIA *ONLINE*
1.	O Projeto de Monitoria *Online*, do qual foi voluntário durante esses meses de aplicação tinha por objetivo fomentar um espaço de aprendizagem colaborativa, no qual os participantes, além do material disponibilizado pela pesquisadora, também podiam indicar novos vídeos como material de apoio para estudo dos conteúdos referentes ao Cálculo Diferencial e Integral.
a)	Antes de participar do Projeto, você já utilizava os vídeos disponíveis no *YouTube* como recurso para estudar algum conteúdo que estava aprendendo em sala de aula? *Sim, utilizava com frequência devido ao acesso ser mais prático e ágil em ralação aos livros.*
b)	Em caso de resposta afirmativa no item anterior, desenvolveu empiricamente algum critério para seleção dos vídeos utilizados? A participação no projeto acarretou em alguma mudança em seus critérios para seleção de novos vídeos que serão utilizados daqui para frente? *Utilizava o critério de popularidade entre os alunos. Com a participação no projeto ora citado o meu critério além de ser popular é o entendimento e facilidade no que tange o conteúdo ofertado.*
2.	Outro dos pontos explorados foram os debates acerca dos conteúdos que eram partilhados no grupo de estudos.
a)	Você já fazia uso das redes sociais como plataforma para estudos em grupo de forma *online*? *Sim, mas com pouca frequência.*
b)	Caso utilizasse, conheceu alguma nova ferramenta do *Facebook* utilizada ao longo do processo? *Não.*
c)	Acredita que tenha obtido melhoras no seu entendimento no que se refere aos conceitos estudados? *Sim.*
d)	Caso não utilizasse, passará a utilizar essa plataforma para fins de Educação a partir da sua participação nesse projeto? *Sim.*
e)	Teve alguma dificuldade de adaptação ao modelo proposto? *Não.*
f)	Você considera a flexibilidade nos horários de utilização como um facilitador para sua adaptação com o método proposto? *Sim.*
3.	O trabalho desenvolvido fazia uso constante dos vídeos e também da troca de conhecimentos entre os participantes por meio de discussões. Pode destacar algum dos dois aspectos como mais relevante para sua aprendizagem? Por quê?
	A participação efetiva entre os colegas e a intervenção da responsável (professora) no quesito de utilizar técnicas para forçar o raciocínio dos alunos.

ANEXO B – RESPOSTAS DA ENTREVISTA SEMIESTRUTURADA DADAS PELO PARTICIPANTE MO2

ENTREVISTA SEMIESTRUTURADA – PROJETO MONITORIA *ONLINE*	
1.	O Projeto de Monitoria *Online*, do qual foi voluntário durante esses meses de aplicação tinha por objetivo fomentar um espaço de aprendizagem colaborativa, no qual os participantes, além do material disponibilizado pela pesquisadora, também podiam indicar novos vídeos como material de apoio para estudo dos conteúdos referentes ao Cálculo Diferencial e Integral.
a)	Antes de participar do Projeto, você já utilizava os vídeos disponíveis no *YouTube* como recurso para estudar algum conteúdo que estava aprendendo em sala de aula? *Sim, porém perdia muito tempo procurando algo especifico.*
b)	Em caso de resposta afirmativa no item anterior, desenvolveu empiricamente algum critério para seleção dos vídeos utilizados? A participação no projeto acarretou em alguma mudança em seus critérios para seleção de novos vídeos que serão utilizados daqui para frente? *A Priscila, estando sempre online, nos guiava com melhores critérios de ensino, mais explícitos, mais amplos e de bom entendimento (linguagem não tão formal).*
2.	Outro dos pontos explorados foram os debates acerca dos conteúdos que eram partilhados no grupo de estudos.
a)	Você já fazia uso das redes sociais como plataforma para estudos em grupo de forma *online*? *Não, antes do projeto de monitoria, eu utilizava livros didáticos e vídeos do youtube. Redes sociais, somente whatsapp para com os colegas.*
b)	Caso utilizasse, conheceu alguma nova ferramenta do *Facebook* utilizada ao longo do processo? *O Messenger foi bastante utilizado para meio de comunicação, além de grupos de colegas pela rede.*
c)	Acredita que tenha obtido melhoras no seu entendimento no que se refere aos conceitos estudados? *Com toda a certeza, pois era além de vídeos indicados, as fotos passo a passo, facilitou muito o entendimento.*
d)	Caso não utilizasse, passará a utilizar essa plataforma para fins de Educação a partir da sua participação nesse projeto? *Sim, pois há bastante comunicação, interação. Os questionamentos levantados pela monitora e pelos colegas fazem o pensamento notar onde está o erro, onde melhorar a forma de resolver a situação.*
e)	Teve alguma dificuldade de adaptação ao modelo proposto? *Nenhuma dificuldade.*
f)	Você considera a flexibilidade nos horários de utilização como um facilitador para sua adaptação com o método proposto? *Sim, pois o tempo que temos para estudar, são em feriados e finais de semana, então a monitora estava disponível, sempre, madrugada, feriados, manhã, tarde, noite.*
3.	O trabalho desenvolvido fazia uso constante dos vídeos e também da troca de conhecimentos entre os participantes por meio de discussões. Pode destacar algum dos dois aspectos como mais relevante para sua aprendizagem? Por quê?
	Os vídeos, em especifico, pois eram direcionados da dúvida, muitas vezes procurávamos vídeos e na metade do vídeo vimos que não era exatamente o que queríamos, então os vídeos específicos, melhora, pois diminui a perda de tempo. Em relação as discussões, entre participantes, nem sempre eram 100% maravilhosas, alguns querem ajudar e atrapalham, mas a monitora não deixava que fosse realizada a ideia errada, sempre estava presente para guiar as discussões, e questionamentos.

ANEXO C – RESPOSTAS DA ENTREVISTA SEMIESTRUTURADA DADAS PELO PARTICIPANTE MO3

ENTREVISTA SEMIESTRUTURADA – PROJETO MONITORIA *ONLINE*	
1.	O Projeto de Monitoria *Online*, do qual foi voluntário durante esses meses de aplicação tinha por objetivo fomentar um espaço de aprendizagem colaborativa, no qual os participantes, além do material disponibilizado pela pesquisadora, também podiam indicar novos vídeos como material de apoio para estudo dos conteúdos referentes ao Cálculo Diferencial e Integral.
a)	Antes de participar do Projeto, você já utilizava os vídeos disponíveis no *YouTube* como recurso para estudar algum conteúdo que estava aprendendo em sala de aula? *Sim.*
b)	Em caso de resposta afirmativa no item anterior, desenvolveu empiricamente algum critério para seleção dos vídeos utilizados? A participação no projeto acarretou em alguma mudança em seus critérios para seleção de novos vídeos que serão utilizados daqui para frente? *Não os vídeos de apoio já eram os que seguiam como material de ensino.*
2.	Outro dos pontos explorados foram os debates acerca dos conteúdos que eram partilhados no grupo de estudos.
a)	Você já fazia uso das redes sociais como plataforma para estudos em grupo de forma *online*? *Sim.*
b)	Caso utilizasse, conheceu alguma nova ferramenta do *Facebook* utilizada ao longo do processo? *Não.*
c)	Acredita que tenha obtido melhoras no seu entendimento no que se refere aos conceitos estudados? *Sim, a Priscila foi uma ótima monitora on-line.Com muita paciência e com várias estratégias para conseguir que o aluno captasse a matéria e fazendo com que ele entendesse. Ela não dava a resposta mas com uma forma sabia ia conversando vários pontos de aprendizagem até que o aluno compreendesse a questão. Isso aconteceu comigo em uma questão de cálculo I, ela fazia várias perguntas no grupo até que eu compreendesse a lógica e acabei conseguindo resolver a questão aprendendo não decorando.*
d)	Caso não utilizasse, passará a utilizar essa plataforma para fins de Educação a partir da sua participação nesse projeto? *Sim é uma ótima plataforma se todos os monitores on-line tivessem a mesma atenção que a Priscila nos prestou. Pois, como todos sabem estudantes ficam várias horas acordados estudando e teve um caso que a Priscila ficou no grupo até a 01:00 da manhã para me ajudar, achei uma tamanha generosidade.*
e)	Teve alguma dificuldade de adaptação ao modelo proposto? *Não.*
f)	Você considera a flexibilidade nos horários de utilização como um facilitador para sua adaptação com o método proposto? *Sim, como comentei na letra d.*
3.	O trabalho desenvolvido fazia uso constante dos vídeos e também da troca de conhecimentos entre os participantes por meio de discussões. Pode destacar algum dos dois aspectos como mais relevante para sua aprendizagem? Por quê?
	É um meio de estudantes e monitor conseguirem trocar ideias em qualquer momento, pois se não consegue responder na hora em algum momento acaba sendo respondido, além de ser uma forma rápida de trocar informações e uma maneira de trocar ideia sem precisar sair de casa. Pessoas educadas e monitora sempre disponível para nos ajudar. Adorei a plataforma seria muito bom para todos os alunos se continuarem esta ideia.

ANEXO D – RESPOSTAS DA ENTREVISTA SEMIESTRUTURADA DADAS PELO PARTICIPANTE MO4

ENTREVISTA SEMIESTRUTURADA – PROJETO MONITORIA *ONLINE*	
1.	O Projeto de Monitoria *Online*, do qual foi voluntário durante esses meses de aplicação tinha por objetivo fomentar um espaço de aprendizagem colaborativa, no qual os participantes, além do material disponibilizado pela pesquisadora, também podiam indicar novos vídeos como material de apoio para estudo dos conteúdos referentes ao Cálculo Diferencial e Integral.
a)	Antes de participar do Projeto, você já utilizava os vídeos disponíveis no *YouTube* como recurso para estudar algum conteúdo que estava aprendendo em sala de aula? *Não. Procurava em livros ao invés do Youtube.*
b)	Em caso de resposta afirmativa no item anterior, desenvolveu empiricamente algum critério para seleção dos vídeos utilizados? A participação no projeto acarretou em alguma mudança em seus critérios para seleção de novos vídeos que serão utilizados daqui para frente?
2.	Outro dos pontos explorados foram os debates acerca dos conteúdos que eram partilhados no grupo de estudos.
a)	Você já fazia uso das redes sociais como plataforma para estudos em grupo de forma *online*? *Sim, é uma forma eficaz de compartilhar conhecimentos e sanar dúvidas, porém de maneira muito mais rápida.*
b)	Caso utilizasse, conheceu alguma nova ferramenta do *Facebook* utilizada ao longo do processo? *Não que eu me lembre.*
c)	Acredita que tenha obtido melhoras no seu entendimento no que se refere aos conceitos estudados? *Com certeza! Não ter a resposta logo de prontidão é muito melhor, te faz pensar em como chegou naquele resultado. Se for numa página de pesquisa logo mostra a resposta, se satisfaz com o que é apresentado e não busca entender o motivo daquele resultado. O modelo utilizado foi muito didático e seria ótimo se fosse utilizado por todos os professores.*
d)	Caso não utilizasse, passará a utilizar essa plataforma para fins de Educação a partir da sua participação nesse projeto?
e)	Teve alguma dificuldade de adaptação ao modelo proposto? *Não, achei excelente.*
f)	Você considera a flexibilidade nos horários de utilização como um facilitador para sua adaptação com o método proposto? *Com certeza.*
3.	O trabalho desenvolvido fazia uso constante dos vídeos e também da troca de conhecimentos entre os participantes por meio de discussões. Pode destacar algum dos dois aspectos como mais relevante para sua aprendizagem? Por quê?
	Os vídeos foram de suma importância. O motivo é que eu tinha a dúvida e a monitora já me mostrava o vídeo que era referente a minha dúvida, não precisei ficar pesquisando entre vários.

ANEXO E – RESPOSTAS DA ENTREVISTA SEMIESTRUTURADA DADAS PELO PARTICIPANTE MO6

	ENTREVISTA SEMIESTRUTURADA – PROJETO MONITORIA *ONLINE*
1.	O Projeto de Monitoria *Online*, do qual foi voluntário durante esses meses de aplicação tinha por objetivo fomentar um espaço de aprendizagem colaborativa, no qual os participantes, além do material disponibilizado pela pesquisadora, também podiam indicar novos vídeos como material de apoio para estudo dos conteúdos referentes ao Cálculo Diferencial e Integral.
a)	Antes de participar do Projeto, você já utilizava os vídeos disponíveis no *YouTube* como recurso para estudar algum conteúdo que estava aprendendo em sala de aula? *Muito esporadicamente.*
b)	Em caso de resposta afirmativa no item anterior, desenvolveu empiricamente algum critério para seleção dos vídeos utilizados? A participação no projeto acarretou em alguma mudança em seus critérios para seleção de novos vídeos que serão utilizados daqui para frente? *Sim pois a medida que as dúvidas apareciam, solicitava ajuda e ai utilizava os vídeos indicados.*
2.	Outro dos pontos explorados foram os debates acerca dos conteúdos que eram partilhados no grupo de estudos.
a)	Você já fazia uso das redes sociais como plataforma para estudos em grupo de forma *online*? *Não só entre os colegas.*
b)	Caso utilizasse, conheceu alguma nova ferramenta do *Facebook* utilizada ao longo do processo? *Não.*
c)	Acredita que tenha obtido melhoras no seu entendimento no que se refere aos conceitos estudados? *Sim.*
d)	Caso não utilizasse, passará a utilizar essa plataforma para fins de Educação a partir da sua participação nesse projeto?
e)	Teve alguma dificuldade de adaptação ao modelo proposto? *Não.*
f)	Você considera a flexibilidade nos horários de utilização como um facilitador para sua adaptação com o método proposto? *Sim.*
3.	O trabalho desenvolvido fazia uso constante dos vídeos e também da troca de conhecimentos entre os participantes por meio de discussões. Pode destacar algum dos dois aspectos como mais relevante para sua aprendizagem? Por quê?
	A troca de conhecimentos entre os integrantes e as dicas da Priscila para melhor fixação do conteúdo.