

**UNIVERSIDADE LUTERANA DO BRASIL**

PRÓ-REITORIA ACADÊMICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA AUXILIADA POR  
COMPUTADOR: IDENTIFICAÇÃO DAS  
DIFICULDADES DOS ALUNOS DOS CURSOS DE  
ENGENHARIA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS  
COM DERIVADAS

AGOSTINHO IAQCHAN RYOKITI HOMA



Canoas, 2018

# UNIVERSIDADE LUTERANA DO BRASIL

PRÓ-REITORIA ACADÊMICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA



AGOSTINHO IAQCHAN RYOKITI HOMA

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA AUXILIADA POR COMPUTADOR: IDENTIFICAÇÃO  
DAS DIFICULDADES DOS ALUNOS DOS CURSOS DE ENGENHARIA NA  
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COM DERIVADAS

Tese apresentada no Programa de Pós - Graduação em  
Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana  
do Brasil para obtenção do título de doutor em Ensino de  
Ciências e Matemática.

Orientadora: Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Cláudia Lisete Oliveira Groenwald

Canoas, 2018

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)**

**H763a** Homa, Agostinho Iaqchan Ryokiti  
Avaliação diagnóstica auxiliada por computador: identificação das dificuldades dos alunos dos cursos de engenharia na resolução de problemas com derivadas. / Agostinho Iaqchan Ryokiti Homa. – Canoas, 2019.  
212 f. ; il.

Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Pró-Reitoria Acadêmica, Universidade Luterana do Brasil.

Orientadora: Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Claudia Lisete Oliveira Groenwald

1. Educação. 2. Matemática - Ensino. 3. Aprendizagem. 4. Tecnologia Educacional. 5. Informática na Educação. I. Groenwald, Claudia Lisete Oliveira. II. Título.

**CDD 372.7**

**Ficha elaborada pela bibliotecária Anamaria Ferreira CRB 10/1494**

AGOSTINHO IAQCHAN RYOKITI HOMA

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA AUXILIADA POR COMPUTADOR: IDENTIFICAÇÃO  
DAS DIFICULDADES DOS ALUNOS DOS CURSOS DE ENGENHARIA PARA A  
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COM DERIVADAS

Área de concentração: Ensino e Aprendizagem em Ensino de Ciências e Matemática.

Tese apresentada no Programa de Pós - Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil para obtenção do título de doutor em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Cláudia Lisete Oliveira Groenwald

BANCA EXAMINADORA

---

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Vanilde Bisognin

Universidade Franciscana - UFN

---

Prof. Dr. Frederico da Silva Reis

Universidade Federal de Ouro Preto - UFOP

---

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Carmen Teresa Kaiber

Universidade Luterana do Brasil - ULBRA

---

Prof. Dr. Arno Bayer

Universidade Luterana do Brasil - ULBRA

---

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Cláudia Lisete Oliveira Groenwald (Orientadora)

Universidade Luterana do Brasil - ULBRA

À memória de minha mãe, que me fez ver o  
valor dos estudos.

## **AGRADECIMENTOS**

Às minhas filhas, pela compreensão dos meus momentos de ausência.

À Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Cláudia Lisete Oliveira Groenwald, que fez muito mais do que me orientar, dando-me apoio, incentivo e acolhimento nos momentos difíceis nessa caminhada de quatro anos de estudo.

Aos alunos e professores do PPGECIM com as discussões, o compartilhamento de leituras e o sorriso amigo, que de algum modo contribuíram com meus estudos.

À Universidade Luterana do Brasil, pela bolsa parcial de estudos que contribuiu para a realização de mais esta etapa do meu desenvolvimento acadêmico.

## RESUMO

Dentre as competências do egresso de engenharia identifica-se a resolução de problemas, com os conceitos de variabilidade/permanência, como uma competência ampla que envolve outras competências e habilidades. O problema desta investigação foi *como implementar<sup>1</sup> um sistema de avaliação diagnóstica que possibilite identificar as dificuldades para a resolução de problemas envolvendo o conceito de Derivadas em alunos de engenharia*, visando o pleno desenvolvimento das competências matemáticas necessárias ao exercício da profissão, identificando o que não se aprendeu e porque não se aprendeu, dentro do contexto da autogestão do conhecimento, no qual o aluno é o protagonista do seu processo de aprendizagem. O objetivo geral foi investigar um modelo de avaliação diagnóstica fundamentado na análise de erro, executável em um sistema de avaliação computacional que identifica as dificuldades dos alunos de engenharias na resolução de problemas envolvendo os conceitos de Derivadas. Para alcançar o objetivo proposto foram desenvolvidos: a avaliação diagnóstica auxiliado por computador denominada como ADAC; o banco de questões composto de 79 itens de avaliação para as avaliações Matemática (envolvendo manipulações algébricas) e Resolução de problemas (envolvendo resolução de problemas com os conceitos de Derivadas). Para a definição do banco de itens foi desenvolvida uma matriz de referência com a identificação das competências matemáticas do egresso de engenharia, para a resolução de problemas envolvendo os conceitos de Derivadas (conceito de variação; conceito de valor; característica de ponto crítico; cálculo das derivadas; aplicações das derivadas); os conceitos matemáticos como Álgebra (ordem das operações; propriedade distributiva da multiplicação sobre a adição; frações algébricas; simplificações; potenciação e radiciação; equações não polinomiais); representação algébrica das funções notáveis (função linear, quadrática, cúbica, trigonométricas seno e cosseno, exponencial, logarítmica e raiz); representação algébrica das cônicas (círculo e elipse); compreensão do fenômeno; interpretação do problema; verificação dos resultados no contexto do problema; aplicação dos esquemas de resolução de um problema. Para validação do ADAC foi realizado um estudo qualitativo através de um experimento com trinta e nove alunos dos cursos de graduação em engenharias, matriculados nas disciplinas de Cálculo, da Universidade Luterana do Brasil campus Canoas. Para validação dos itens de avaliação foram analisadas as respostas das avaliações Matemática e Resolução de problemas, armazenadas no banco de dados do ADAC, e as entrevistas dos participantes do experimento. Os resultados apontam que o ADAC identificou satisfatoriamente as dificuldades matemáticas associadas às habilidades e competências gerais necessárias a resolução de problemas com Derivadas, dos alunos participantes do experimento.

**Palavras-Chave:** Ensino Superior. Derivadas. Avaliação Diagnóstica. Avaliação auxiliada por Computador

---

<sup>1</sup> Implementar está sendo utilizado no sentido de desenvolver, aplicar e avaliar.

## ABSTRACT

Among the competences of the engineering graduate, problem solving with concepts of variability/permanence is identified as a broad competence that involves other skills and abilities. The research problem was how to implement a diagnostic assessment system which allows to identify difficulties in solving problems that involves the concept of Derivatives in engineering students, aiming the full development of mathematical skills needed to practice the profession. Identifying what has not been learned and the reasons why, within the context of self-management of knowledge where the student is the protagonist of his own learning process. The general purpose was to investigate an assessment diagnostic model, based upon error analysis. Executable in an assessment computational system that identifies students' difficulties in solving problems involving the concept of derivatives. To achieve the proposed goal, it was developed: Computer-aided Diagnostic Assessment called ADAC; the questions database made of 79 assessment items for the tests: Mathematic (involving algebraic manipulations) and Problem Solving (involving problems resolution with concepts of Derivatives). To define the item database, a reference matrix was developed with the identification of the mathematical competences of engineering graduate, to solve problems involving the concepts of Derivatives (concept of variation; concept of value; critical point characteristic, calculation of derivatives, applications of derivatives); mathematical concepts such as Algebra (operations order, distributive property of multiplication over addition, algebraic fractions, simplifications, potentiation and radication, non-polynomial equations); algebraic representation of the common functions (linear function, quadratic, cubic, sine and cosine trigonometric, exponential, logarithmic and root functions); algebraic representation of conics (circle and ellipse); understanding of the phenomenon; interpretation of the problem; results in the context of the problem; application of problem solving schemes. To validate the ADAC, a qualitative study was conducted through an experiment with thirty-nine students from the undergraduate course in engineering, enrolled in the disciplines of Calculus, from Universidade Luterana do Brasil. To validate the assessment items, the answers from Mathematics and Problem Solving evaluations stored in the ADAC database and the interviews of the participants of the experiment were analyzed. The results indicate that ADAC satisfactorily identified the mathematical difficulties associated with the general skills and competences required to solve problems with Derivatives of the students participating in the experiment.

**Keywords:** Higher education. Derivative. Diagnostic assessment. Computer-aided assessment.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Estrutura fundamental da organização das ações do homem.....	22
Figura 2 - Padrões e critérios da EUR-ACE, ABET EC 2000 e Tuning-AHELO.....	24
Figura 3 – Quadro de Competências e habilidades gerais definidas nas DCN do Curso de Graduação em Engenharia.....	26
Figura 4 – Quadro com Cursos de Graduação ofertados pelas Universidades da região metropolitana de Porto Alegre.....	32
Figura 5 – Quadro com as disciplinas com conteúdo matemático nos cursos de Engenharia da UFRGS .....	33
Figura 6 – Quadro com as disciplinas com conteúdo matemático nos cursos de Engenharia da ULBRA.....	33
Figura 7 - Quadro com as disciplinas com conteúdo matemático nos cursos de Engenharia da PUCRS .....	34
Figura 8 – Quadro com as disciplinas com conteúdo matemático nos cursos de Engenharia da UNISINOS .....	35
Figura 9 – Quadro com a Abordagem da Disciplina de Cálculo Diferencial e Integral nas Matrizes Curriculares dos Cursos de Graduação em Engenharia das Universidades pesquisadas .....	36
Figura 10 – Quadro com os critérios analisados na ementa da disciplina Cálculo I – ULBRA .....	37
Figura 11 – Quadro a ementa da disciplina Cálculo I A - UFRGS .....	37
Figura 12 – Quadro a ementa da disciplina Cálculo Diferencial e Integral I - PUCRS .....	38
Figura 13 – Quadro com a ementa da disciplina Cálculo I: Estudo da Derivada - UNISINOS .....	39
Figura 14 – Conhecimentos e habilidades matemáticas integrantes das competências gerais.....	41
Figura 15 – Quadro com as pesquisas brasileiras sobre análise de erros Cury (2007) .....	43
Figura 16 - Quadro com as pesquisas brasileiras posteriores a 2006 sobre análise de erros ...	44
Figura 17 - Quadro com as pesquisas brasileiras no período de 2000 a 2017 sobre análise de erros e o processo de aprendizagem da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral .....	50
Figura 18 - Item de múltipla escolha tipo complementação simples .....	61
Figura 19 - Item de múltipla escolha tipo resposta única .....	61
Figura 20 - Item de múltipla escolha tipo interpretação .....	62
Figura 21 - Item de múltipla escolha tipo resposta múltipla .....	63

Figura 22 - Item de múltipla escolha tipo asserção-razão .....	64
Figura 23 – Síntese das etapas da investigação realizada.....	70
Figura 24 – A avaliação no contexto da disciplina.....	76
Figura 25 – Tela de Login e Menu para administração .....	81
Figura 26 – Tela de Cadastro de usuário .....	81
Figura 27 – Tela de Cadastro de conceitos.....	82
Figura 28 – Telas de Cadastro de itens e Encadeamento de Itens.....	82
Figura 29 – Tela para Gerenciamento de itens .....	83
Figura 30 – Tela de Cadastro de itens .....	83
Figura 31 – Tela de encadeamento de itens e tela de Relatórios.....	84
Figura 32 – Tela de Relatórios .....	85
Figura 33 – Questão do tipo certo/errado. ....	88
Figura 34 - Item múltipla opção tipo resposta única .....	89
Figura 35 - Competências e habilidades para profissionais de engenharia que requerem conhecimento matemático .....	91
Figura 36 – As competências gerais acionadas para a resolução de problemas.....	92
Figura 37 - Diagrama com as etapas de resolução de problemas e conceitos matemáticos avaliados .....	93
Figura 38 – Conceitos cadastrados e a classificação dos erros.....	94
Figura 39 – Diagrama dos itens relativos a um tópico da avaliação Matemática .....	96
Figura 40 – Itens AF e AV para a ordem das operações .....	97
Figura 41 – Itens AF e AV para a ordem das operações .....	97
Figura 42 – Itens M5 e M6 para a ordem das operações.....	98
Figura 43 – Itens AF e AV para a propriedade distributiva da multiplicação.....	98
Figura 44 – Itens M9 e M10 para a propriedade distributiva da multiplicação.....	99
Figura 45 – Itens M11 e M12 para propriedade distributiva da multiplicação em relação a adição .....	99
Figura 46 – Itens M13 e M14 para a simplificação algébrica .....	100
Figura 47 – Itens M15 e M16 para a simplificação algébrica .....	100
Figura 48 – Itens M17 e M18 para simplificação algébrica .....	101
Figura 49 – Itens M19 e M20 para a operações com frações algébricas.....	101
Figura 50 – Itens AF e AV para operações com frações algébricas.....	102
Figura 51 – Itens M23 e M24 para operações com frações algébricas.....	102
Figura 52 – Itens M25 e M26 para solução de equações não polinomiais.....	103

Figura 53 – Itens M27 e M28 para solução de equações não polinomiais .....	103
Figura 54 – Itens M29 e M30 para solução de equações não polinomiais .....	104
Figura 55 – Itens M31 e M32 para radiciação .....	104
Figura 56 – Itens M33 e M34 para radiciação .....	105
Figura 57 – Itens M35 e M36 para radiciação .....	105
Figura 58 – Itens M37 e M38 para potenciação .....	106
Figura 59 – Itens AF e AV para potenciação .....	106
Figura 60 – Itens AF e AV para potenciação .....	107
Figura 61 – Organização da avaliação “Resolução de Problemas.....	108
Figura 62 – Pergunta 1 da Situação Problema 1 .....	109
Figura 63 – Pergunta 2 da situação-problema 1 .....	110
Figura 64 – Pergunta 3 da situação-problema 1 .....	110
Figura 65 – Pergunta 4 da situação-problema 1 .....	111
Figura 66 – Pergunta 5 da situação-problema 1 .....	111
Figura 67 – Pergunta 6 da situação-problema 1 .....	112
Figura 68 – Pergunta 8 da situação-problema 1 .....	112
Figura 69 – Perguntas 7 da situação-problema 1 .....	113
Figura 70 – Pergunta 10 da situação-problema 1 .....	113
Figura 71 – Pergunta 11 da situação-problema 1 .....	114
Figura 72 – Pergunta 9 da situação-problema 1 .....	114
Figura 73 – Organização dos itens da situação-problema 1 .....	115
Figura 74 – Pergunta 2 da Situação-problema 2 .....	116
Figura 75 – Pergunta 2 da Situação-problema 2 .....	117
Figura 76 – Pergunta 3 da Situação-problema 2 .....	117
Figura 77 – Pergunta 4 da Situação-problema 2 .....	118
Figura 78 – Pergunta 5 da Situação-problema 2 .....	119
Figura 79 – Pergunta 6 da Situação-problema 2 .....	120
Figura 80 – Pergunta 7 da Situação-problema 2 .....	120
Figura 81 – Pergunta 8 da Situação-problema 2 .....	121
Figura 82 – Pergunta 9 da Situação-problema 2 .....	122
Figura 83 – Pergunta 10 da Situação-problema 2 .....	122
Figura 84 – Diagrama de encadeamentos dos itens da situação.....	123
Figura 85 – Item 1 da Situação-problema 2 .....	125
Figura 86 – Item Q2 da situação-problema 3 .....	126

Figura 87 - Item Q3 da situação-problema 3 .....	126
Figura 88 - Item Q4 da situação-problema 3 .....	127
Figura 89 - Item Q5 da situação-problema 3 .....	128
Figura 90 - Item Q6 da situação-problema 3 .....	128
Figura 91 - Item Q7 da situação-problema 3 .....	129
Figura 92 – Item Q8 da situação-problema 3 .....	129
Figura 93 - Item Q9 da situação-problema 3 .....	130
Figura 94 - Item Q10 da situação-problema 3 .....	130
Figura 95 – Diagrama de encadeamento dos itens da situação-problema 3.....	131
Figura 96 – Diagrama dos itens Cálculo de Derivadas .....	132
Figura 97 – Itens D1 e D2 do cálculo de derivadas .....	133
Figura 98 – Itens D3 e D4 do cálculo de derivadas .....	134
Figura 99 – Itens D5 e D6 do cálculo de derivadas .....	134
Figura 100 – Faixa etária dos participantes .....	136
Figura 101 – Jornada de trabalho .....	136
Figura 102 – Média para a disciplina de Cálculo .....	137
Figura 103 – Número de vezes que os alunos cursaram a disciplina Cálculo 1 .....	137
Figura 104 – Ano que cursou a disciplina de Cálculo .....	138
Figura 105 – Perguntas sobre o envolvimento do aluno com os estudos e a importância do ADAC .....	138
Figura 106 – Percepção sobre a avaliação <i>Resolução de problemas</i> .....	139
Figura 107 - Percepção sobre a avaliação <i>Matemática</i> .....	140
Figura 108 – Conceitos e habilidades avaliados nas etapas de resolução de problemas.....	144
Figura 109 - Organização da sequência dos itens da avaliação <i>Matemática</i> .....	145
Figura 110 - Itens de avaliação para a expressões algébricas (ordem das operações) .....	147
Figura 111 - Itens de avaliação para a EA (propriedade distributiva da multiplicação sobre a adição) .....	149
Figura 112 - Itens de avaliação para a Expressões algébricas (simplificação algébrica) .....	150
Figura 113 - Itens de avaliação para a Expressões algébricas (fração algébricas) .....	151
Figura 114 - Itens de avaliação para a Equações não polinomiais .....	152
Figura 115 - Itens de avaliação para a Expressões algébricas (radiciação).....	153
Figura 116 - Itens de avaliação para a Expressões algébricas (potenciação) .....	155
Figura 117 – Pergunta 1 da Situação-Problema 1 .....	159
Figura 118 – Pergunta 2 da Situação-problema 1 .....	160

Figura 119 – Pergunta 3 da Situação-problema 1 .....	161
Figura 120 – Pergunta 4 da Situação-problema 1 .....	161
Figura 121 – Pergunta 5 da Situação-problema 1 .....	163
Figura 122 – Pergunta 6 da Situação-problema 1 .....	164
Figura 123 – Perguntas 7 da Situação-problema 1 .....	164
Figura 124 – Pergunta 8 da Situação-problema 1 .....	166
Figura 125 – Pergunta 10 da Situação-problema 1 .....	166
Figura 126 – Pergunta 11 da Situação-problema 1 .....	167
Figura 127 – Pergunta 9 da Situação-problema 1 .....	168
Figura 128 - Pergunta 1 da Situação-problema 2 .....	169
Figura 129 – Pergunta 2 da Situação-problema 2 .....	170
Figura 130 – Pergunta 3 da Situação-problema 2 .....	171
Figura 131 – Pergunta 4 da Situação-problema 2 .....	172
Figura 132 – Pergunta 5 da Situação-problema 2 .....	173
Figura 133 – Pergunta 6 da Situação-problema 2 .....	174
Figura 134 – Pergunta 7 da Situação-problema 2 .....	175
Figura 135 – Pergunta 8 da Situação-problema 2 .....	176
Figura 136 – Pergunta 9 da Situação-problema 2 .....	177
Figura 137 – Pergunta 10 da Situação-problema 2 .....	178
Figura 138 – Cálculo das Derivadas nos pontos.....	178
Figura 139 – Item 1 da Situação-problema 3 .....	179
Figura 140 – Item Q2 da Situação-problema 3.....	180
Figura 141 - Item Q3 da Situação-problema 3 .....	181
Figura 142 - Item Q4 da Situação-problema 3 .....	182
Figura 143 - Item Q5 da Situação-problema 3 .....	183
Figura 144 - Item Q6 da Situação-problema 3 .....	184
Figura 145 - Item Q7 da Situação-problema 3 .....	184
Figura 146 – Item Q8 da Situação-problema 3.....	185
Figura 147 - Item Q9 da Situação-problema 3 .....	186
Figura 148 - Item Q10 da Situação-problema 3 .....	186
Figura 149 – Itens de avaliação para o cálculo de derivadas.....	187
Figura 150 – Conhecimentos e habilidades matemáticas integrantes das competências gerais .....	189

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Informações gerais da avaliação <i>Matemática</i> .....	142
Tabela 2 – Informações gerais da avaliação <i>Resolução de Problemas</i> .....	143
Tabela 3 – Número de erros por conteúdo .....	146
Tabela 4 – Número de alunos com respostas erradas por conteúdo matemático .....	147
Tabela 5 – Número de respostas não corretas para a <i>Ordem das operações</i> .....	148
Tabela 6 – Itens de avaliação para a EA (propriedade distributiva da multiplicação sobre a adição) .....	149
Tabela 7 - Número de respostas não corretas para Expressões algébricas (simplificação algébricas).....	150
Tabela 8 - - Número de respostas não corretas para Expressões algébricas (frações algébricas) .....	152
Tabela 9 - Número de respostas não corretas para Equações não polinomiais .....	153
Tabela 10 - Número de respostas não corretas para Expressões algébricas (radiciação).....	154
Tabela 11 - - Número de respostas não corretas para Expressões algébricas (potenciação)..	156
Tabela 12 – Quantidade de respostas erradas por dificuldades cadastradas no ADAC .....	157
Tabela 13 - Número de participantes que responderam incorretamente aos itens da avaliação <i>Resolução de problemas</i> agrupados pelos conteúdos e conceitos avaliados pelo ADAC .....	158
Tabela 14– Número das respostas não corretas dos itens S7, S8 e S9 .....	177
Tabela 15 – Contabilização das respostas não corretas para o cálculo das derivadas.....	187

## SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>15</b>
<b>1 COMPETÊNCIAS MATEMÁTICAS DOS ENGENHEIROS.....</b>	<b>19</b>
1.1 CONCEITO DE COMPETÊNCIA .....	19
1.2 AS COMPETÊNCIAS DESENVOLVIDAS NO CURSO DE ENGENHARIA .....	21
1.3 COMPETÊNCIAS MATEMÁTICAS .....	28
1.4 A MATEMÁTICA NOS CURSOS DE ENGENHARIA .....	31
<b>2 ANÁLISE DE ERROS .....</b>	<b>42</b>
<b>3 AVALIAÇÃO .....</b>	<b>52</b>
3.1 ITENS DE AVALIAÇÃO.....	55
3.2 CONSTRUÇÃO DOS ITENS DE AVALIAÇÃO.....	56
3.3 FIDEDIGNIDADE E CONFIABILIDADE DA AVALIAÇÃO .....	58
3.4 ITEM DE MÚLTIPLA ESCOLHA .....	58
<b>3.4.1 Item de múltipla escolha tipo complementação simples.....</b>	<b>60</b>
<b>3.4.2 Item de múltipla escolha tipo resposta única.....</b>	<b>61</b>
<b>3.4.3 Item de múltipla escolha tipo interpretação .....</b>	<b>61</b>
<b>3.4.4 Item de múltipla escolha tipo resposta múltipla.....</b>	<b>62</b>
<b>3.4.5 Assertão-razão.....</b>	<b>63</b>
3.5 ITEM CERTO/ERRADO.....	64
3.6 ITEM DE RESPOSTA FECHADA .....	65
3.7 ITEM DE RESPOSTA CURTA ABERTA .....	65
3.8 ITEM DISSERTATIVO (REDAÇÃO).....	65
<b>4 ENCAMINHAMENTOS METODOLÓGICOS .....</b>	<b>67</b>
4.1 PROBLEMA DE PESQUISA .....	67
4.2 OBJETIVOS.....	68
<b>4.2.1 Objetivo geral .....</b>	<b>68</b>
<b>4.2.2 Objetivos específicos .....</b>	<b>68</b>
4.3 METODOLOGIA DA INVESTIGAÇÃO .....	68
4.4 ATIVIDADES COM RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COM DERIVADAS .....	72
4.5 EXPERIMENTO.....	74
<b>5 AMBIENTE DE PESQUISA.....</b>	<b>76</b>
5.1 AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA AUXILIADA POR COMPUTADOR – ADAC .....	77
5.2 TIPOS DE ITENS DE AVALIAÇÃO .....	85
5.3 AS AVALIAÇÕES DO ADAC .....	90
<b>5.3.1 Teste Diagnóstico de Matemática .....</b>	<b>95</b>
<b>5.3.2 Resolução de problemas .....</b>	<b>107</b>
5.3.2.1 Situação Problema 1.....	109
5.3.2.2 Situação-problema 2.....	115
5.3.2.4 Situação-problema 3.....	124
<b>5.3.3 Cálculo de Derivadas .....</b>	<b>131</b>

<b>6 ANÁLISE DE DADOS.....</b>	<b>135</b>
6.1 PERFIL DOS PARTICIPANTES .....	135
6.2 CATEGORIAS DE ANÁLISE DOS DADOS.....	140
6.3 VALIDAÇÃO DO ADAC .....	141
<b>6.3.1 Análise dos itens de avaliação .....</b>	<b>143</b>
<b>6.3.2 Avaliação Matemática .....</b>	<b>144</b>
<b>6.3.3 Análise da avaliação Resolução de problemas .....</b>	<b>156</b>
6.4 CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	188
<b>CONCLUSÃO.....</b>	<b>194</b>
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>197</b>
<b>APÊNDICES .....</b>	<b>204</b>
<b>APÊNDICE A – Termo de consentimento e livre esclarecido.....</b>	<b>205</b>
<b>APÊNDICE B – Questionário de perfil do participante e percepção da avaliação.....</b>	<b>208</b>



## INTRODUÇÃO

Para o exercício de funções técnicas profissionais, é necessária a qualificação nas respectivas áreas de atuação, por meio de formação adequada ao desempenho da profissão. Os cursos superiores de engenharias têm nas ciências exatas, como a matemática, a física e a química, os aportes teóricos fundamentais para o desenvolvimento e formação dos profissionais técnicos. Entende-se que as engenharias estudam e aplicam especificidades da física e da química, tendo a matemática como instrumental para a compreensão, modelagem e resolução das situações-problema.

Um aspecto importante a ser trabalhado, nos cursos superiores de graduação em engenharia, é a compreensão dos fenômenos estudados e a competência para representá-los através de modelos matemáticos. Para a construção de tais modelos, é necessário o domínio de conceitos matemáticos, como as funções reais e suas características de valor, de variabilidade/permanência (REZENDE, 2003) e suas representações.

Parte desses conceitos são desenvolvidos no ensino fundamental e no ensino médio, na disciplina de matemática. Contudo, para vários alunos, ao ingressarem no nível superior, há a necessidade da retomada desses conceitos, pois eles são requisitos para a compreensão e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral, indispensáveis para a formação nos cursos superiores de engenharias.

Para alguns alunos, a aprendizagem adequada dos conceitos matemáticos não ocorre por motivos diversos, entre eles, problemas de fundo emocional, epistemológicos ou mesmo pela didática do professor (REZENDE, 2003), gerando lacunas no conjunto de saberes necessários à compreensão dos conceitos desenvolvidos nas disciplinas de cálculo. As disciplinas que apresentam o Cálculo Diferencial e Integral estão entre as com maior índice de reprovação (LOPES, 1999; FERNANDES FILHO, 2001), situação que incentiva os estudos relacionados às dificuldades, assim como a didática para ensino-aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral.

Reis (2001) nos traz a visão de professores pesquisadores, autores de livros didáticos que são referência para o ensino-aprendizagem do Cálculo e Análise, os quais afirmam que o Cálculo deveria ser menos formal e baseado em situações-problema, enfatizando a intuição. Com isso, o Cálculo não é reduzido somente a métodos e procedimentos algébricos mecanicamente realizados. Se por um lado tem-se a consciência da necessidade do conhecimento matemático

relativo a funções, por outro, surge a preocupação com a deficiência desse conhecimento, isto é, o que é utilizado desse conhecimento para resolver situações-problemas.

Destaca-se que nem sempre as aplicações desse conhecimento são devidamente realizadas, apresentando o que é comumente denominado como erro. Estudos como os realizados por Cury (2003), Borasi (1996), Barufi (1999), Barichello (2008), analisando os erros matemáticos dos estudantes, apontam a relevância na realização de estudos para a identificação das causas geradoras, assim como a elaboração de estratégias para que ocorra a aprendizagem significativa dos conceitos estudados.

O levantamento dos artigos do Cobenge<sup>2</sup>, realizado por Godoy e Almeida (2017), relacionados com a evasão nos cursos de engenharias, aponta uma forte relação, mas não única, dessa com as reprovações no início dos cursos, em particular nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral. Entende-se que as reprovações são decorrentes de baixos desempenhos nos processos avaliativos, os quais, por sua vez, advêm da incompreensão dos conceitos e/ou dos métodos e procedimentos matemáticos, seja por dificuldades relacionadas aos conteúdos ministrados na Educação Básica (CURY, 2003; GODOY; ALMEIDA, 2017) ou pela própria epistemologia do Cálculo (REZENDE, 2003).

As pesquisas realizadas por Reis (2001), Rezende (2003) e Cury (2003) trouxeram à luz os problemas na aprendizagem de Cálculo e sugerem ações e alterações na didática para o desenvolvimento desses conceitos. O que leva à necessidade da realização de mais pesquisas sobre os erros cometidos pelos estudantes, que objetivem subsidiar os professores na busca de alternativas metodológicas para o processo de ensino-aprendizagem do Cálculo.

A pesquisa realizada nesta tese não busca encontrar a solução para os problemas de ensino-aprendizagem do Cálculo, mas prover mais informações sobre as dificuldades com o conhecimento matemático relacionado com o pensamento variacional. Isso considerando que, em uma sala de aula heterogênea, com estudantes com graus de conhecimentos diferentes, é necessária a realização de avaliações que identifiquem as dificuldades de cada um, para que sejam desenvolvidas ações individualizadas, que proporcionem a compreensão dos conceitos estudados no Cálculo Diferencial e Integral por alunos com perfis variados.

---

<sup>2</sup> Congresso Brasileiro de Educação em Engenharias, organizado pela Associação Brasileira de Educação em Engenharias, a ABENGE, cujos anais estão disponíveis em <http://www.abenge.org.br/cobenge.php>

A produção matemática realizada pelo estudante, seja durante as aulas, seja nas avaliações, é a representação do saber desse aluno, e a identificação dos erros nessa produção pode indicar ações para o planejamento de ensino, de modo que resulte uma aprendizagem mais significativa dos conceitos em estudo. De acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Brasileira “A educação, dever da família e do Estado [...] tem por finalidade o pleno desenvolvimento do educando, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho” (BRASIL, 1996).

Desse modo, buscando a qualificação adequada dos profissionais técnicos, em específico das engenharias, pesquisas envolvendo as dificuldades individuais de aprendizagem do Cálculo encontram argumentos que as justificam, pela importância e necessidade de serem realizadas. Visando ao pleno desenvolvimento das competências matemáticas necessárias para o exercício da profissão – identificando, por meio de avaliações com suporte nas tecnologias, o que não foi aprendido e por que não o foi, para que ações de recuperação sejam realizadas, propõe-se a presente pesquisa para responder à pergunta: *Como implementar<sup>3</sup> um sistema de avaliação diagnóstica que possibilite identificar as dificuldades para a resolução de problemas envolvendo o conceito de Derivadas em alunos de Engenharia?*

Para responder ao problema proposto, delimita-se o objetivo geral em investigar um modelo de avaliação diagnóstica fundamentado na análise de erro, executável em um sistema de avaliação computacional que identifica as dificuldades dos alunos de engenharias na resolução de problemas envolvendo os conceitos de Derivadas.

A tese está organizada em seis capítulos. No primeiro, apresenta-se um estudo sobre as competências a serem desenvolvidas nos estudantes durante sua formação nos cursos de engenharia e uma síntese das competências matemáticas necessárias para a resolução de problemas. Este capítulo subsidiou a delimitar os conteúdos abordados pelos itens de avaliação, assim como a organização da sequência dos mesmos.

No segundo capítulo, é realizada uma apresentação sobre a análise de erros, as taxonomias e as linhas de pesquisas que trabalham com o tema e um levantamento das pesquisas realizadas sobre ele. Os estudos dos tipos de erros e os trabalhos sobre o tema foram a base para a construção dos distratores e as dificuldades associadas a eles.

Dados o caráter da pesquisa e a necessidade de instrumental para identificar as dificuldades dos estudantes, um estudo sobre as avaliações, os tipos de itens e a construção de itens de avaliação é apresentado no terceiro capítulo.

---

<sup>3</sup> Implementar está sendo utilizado no sentido de desenvolver, aplicar e avaliar.

O quarto capítulo apresenta os encaminhamentos metodológicos, com o problema de pesquisa, os objetivos, a metodologia de investigação e a descrição do experimento. O ambiente de pesquisa, com os itens de avaliação, a Avaliação Diagnóstica Auxiliada por Computador e suas características de funcionamento são apresentadas no quinto capítulo.

A análise de dados é apresentada no sexto capítulo, com uma visão geral do desempenho dos alunos nas avaliações, a análise dos itens com considerações sobre a qualidade e validade dos mesmos. Por fim, apresenta-se a conclusão da tese e as referências bibliográficas.

# 1 COMPETÊNCIAS MATEMÁTICAS DOS ENGENHEIROS

Neste capítulo, apresenta-se o conceito de competência, sob um enfoque laboral<sup>4</sup>, como sendo algo desejável e, sob uma perspectiva pedagógica, como as necessárias para a formação integral do indivíduo. O capítulo finaliza com a apresentação das competências do egresso de engenharia que envolvem as competências e habilidades matemáticas, foco de estudo desta pesquisa.

## 1.1 CONCEITO DE COMPETÊNCIA

A análise etimológica de “competência” leva ao latim *competere*, que significa lutar, disputar com, sendo adotado na esfera jurídica francesa, no final do século XV, para legitimar e outorgar autoridade às instituições para tratar certos assuntos (DOLZ; BROCKART, 2004). Conceito que, saindo da esfera estritamente jurídica para outros campos do saber, foi ampliado como sendo a capacidade, decorrente da experiência e do saber, que o indivíduo tem sobre um determinado assunto.

No decorrer da história, a definição de competência se adapta de acordo com o momento socioeconômico e a área que dela se apropria. Deste modo, tem-se as competências jurídicas, gerenciais, de produção, de comunicação, etc., mas todas apoiadas na ideia principal da capacidade de determinada ação do indivíduo sob condições específicas (BUNK, 1994; LE BOTERF, 2001).

Assim, as competências têm sua fonte na área profissional que, em um processo de formação para o exercício da atividade laboral, primeiro definiu-se como sendo as capacitações que tornam o indivíduo apto a realizar uma tarefa específica em determinada profissão. Esta definição se ampliou quando houve a mudança da capacitação para a qualificação do indivíduo, de modo que, além dos conhecimentos, destrezas e atitudes necessários ao exercício da profissão, fossem incluídos o planejamento, a flexibilidade e a autonomia como características a serem desenvolvidas, estendendo-se para uma base profissional mais ampla, mudando da especialização para a não especialização (BUNK, 1994).

Ainda, dentro do âmbito profissional, Le Boterf (2001) define a competência como uma combinação de recursos, como conhecimento, saber fazer, atitudes, e recursos do ambiente, como informações e relações que são mobilizados para o desempenho de uma ação.

Bunk (1994) distingue a competência formal, uma atribuição conferida ou outorgada, da competência real, que são as capacidades adquiridas para o desempenho adequado de ações

---

<sup>4</sup> Laboral no sentido de trabalho.

em determinadas situações. Efetivamente, para o exercício da profissão, as competências reais são as que interessam e, dentro do enfoque pedagógico, entende-se que o desenvolvimento dessas competências exige processos de formação integrados para a composição, no indivíduo, do conjunto de capacidades e qualificações profissionais desejados. Capacidades essas compostas de conhecimentos, destrezas e atitudes, com a finalidade de realizar atividades, mas incluindo os aspectos de organização e planejamento, com o objetivo de resolver os problemas profissionais de forma autônoma e colaborando no seu entorno profissional (BUNK, 1994).

A mudança da competência exclusivamente técnica para uma que envolve qualificações pessoais de atitudes e organização é reforçada pela acelerada evolução das tecnologias, que leva ao rápido desuso das destrezas profissionais especializadas e requer o desenvolvimento de competências que não fiquem obsoletas tão rapidamente, ou que nunca fiquem desatualizadas. Tais características estão presentes nas qualificações pessoais, como a autonomia de pensamento e ação, a flexibilidade metodológica, a capacidade de previsão e de reação, a interpretação e comunicação, que transcendem os limites de uma determinada profissão.

Ressalta-se que o desuso de destrezas específicas não implica em uma formação unicamente voltada a qualificações pessoais, mas em uma formação técnica em conjunto com a capacidade da aprendizagem autônoma, em uma ação autorregulada, com a intenção de que o indivíduo se atualize no transcorrer da sua atuação profissional.

O desenvolvimento de competências de alto nível necessita, segundo Flores (2007), das competências gerais que dão apoio e suporte à aprendizagem, incluindo as competências básicas, ou saberes elementares, como leitura, escrita, literacia matemática<sup>5</sup>, comunicação e a atitude de aprendizagem contínua.

Em relação às competências gerais, Perrenoud (1999a) critica a ideia do utilitarismo estrito, limitado por alguns saberes elementares, ser associado como competência. Entende-se que ler, escrever, contar, etc. são recursos necessários para o desenvolvimento das competências de alto nível, sendo elementos basilares do pensamento e ação do indivíduo, mas que não devem ser consideradas como competências gerais.

Desse modo, para o profissional da área de engenharia, dentre as competências gerais que fornecem suporte ao desenvolvimento de competências de alto nível destacam-se as competências matemáticas, como o raciocínio lógico e matemático, o domínio da linguagem

---

<sup>5</sup> Literacia Matemática é a capacidade do indivíduo para formular, empregar e interpretar a matemática em vários contextos. Isso inclui o raciocínio matemático, o uso de conceitos matemáticos, procedimentos, fatos e ferramentas para descrever, explicar e prever fenômenos, avaliando a capacidade dos indivíduos sobre o papel que a matemática desempenha no mundo para que sejam cidadãos construtivos, envolvidos e reflexivos (PISA, 2014).

matemática, incluindo a leitura e interpretação de gráficos, a modelagem e resolução de problemas e a capacidade de comunicar-se, transitando entre a linguagem natural e as representações matemáticas e vice-versa.

Perrenoud (1999a, p. 29) afirma que “uma competência pressupõe a existência de recursos mobilizáveis, mas não se confunde com eles, pois acrescenta-se aos mesmos ao assumir sua postura em sinergia com vistas a uma ação eficaz em determinada situação complexa” e os conhecimentos matemáticos, recursos essenciais ao profissional da engenharia, não são exclusivos de uma competência, na medida em que podem ser mobilizados por outras, ou seja, são recursos utilizáveis em contextos distintos e com objetivos diferentes.

Esta pesquisa investiga as competências matemáticas necessárias para o exercício da profissão do engenheiro. Neste sentido, apresentam-se, a seguir, as competências de um curso de engenharia.

## 1.2 AS COMPETÊNCIAS DESENVOLVIDAS NO CURSO DE ENGENHARIA

Segundo o Dicionário Brasileiro da Língua Portuguesa (1975), o termo “*engenharia*”, que tem sua etimologia no latim *ingenium*, que significa gênio, é a arte de aplicar os conhecimentos científicos à invenção, aperfeiçoamento ou utilização da técnica industrial em todas as suas determinações. Na antiguidade, a designação de engenheiro foi dada aos construtores das máquinas de guerra (engenhos), depois o termo passou a ser utilizado para os que construía estruturas civis como pontes e edifícios, surgindo, então, a expressão “engenheiro civil”, que diferencia do “engenheiro militar”.

A visão antropológica que considera o homem um ser incompleto entende que sua situação o leva, por consequência, a ser um agente transformador da natureza. Para Bunk (1994), essas transformações se realizam mediante ações em seu meio ambiente, tendo a estrutura representada na Figura 1. Segundo o mesmo autor, a ação deixa de ser ação caso algum elo da cadeia não esteja presente, pois a realização sem pensamento é uma reação, a realização sem percepção é automatização e a percepção ou pensamento sem realização é contemplação ou reflexão, tudo isso iniciado pela fixação dos objetivos, que se ajustam em um ciclo de controle que redefine objetivos e o encadeamento dos elementos componentes da ação.

Figura 1 – Estrutura fundamental da organização das ações do homem.



Fonte: Bunk (1994, p. 11).

Logo, a ideia de transformação do ambiente é a principal atividade do profissional de engenharia, fazendo com que a estrutura de transformação apresentada na Figura 1 esteja presente nas ações da engenharia. Ressalta-se que a transformação do ambiente não significa que um único engenheiro realize, de modo concreto, toda uma ação transformadora. Compreende-se que os conhecimentos do engenheiro englobam toda a estrutura da ação transformadora, mas suas realizações individuais podem estar concentradas em parte dela. Pode-se citar a diferença entre o engenheiro projetista e o engenheiro de execução da área civil: ambos têm a mesma formação, mas, no mundo profissional, suas ações e, conseqüentemente, suas destrezas profissionais se distinguem.

De um modo geral as competências dos engenheiros abrangem as competências de caráter técnico, específicos da sua área de atuação, e conhecimentos gerais que permitem a compreensão do mundo para sua ação transformadora.

Para esta pesquisa apresentam-se as competências a serem desenvolvidas pelos estudantes de engenharia, de acordo com as Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Graduação em Engenharia e as definições dos programas de credenciamento internacionais para cursos de engenharia, como o EUR-ACE (EUROpean ACcredited Engineer) e o ABET (Accreditation Board for Engineering and Technology), assim como o projeto Tuning-AHELO, que é referência para a OECD (Organisation for Economic Co-operation and Development).

Na Europa e nos Estados Unidos da América (EUA), as sociedades de engenharia, preocupadas com a formação dos profissionais das suas categorias, criaram órgãos de credenciamento para os cursos de formação em engenharia e estabeleceram, respectivamente, os padrões e critérios EUR-ACE e o ABET EC 2000.



Os critérios definem quais competências devem ser desenvolvidas nos estudantes para o exercício da profissão de engenharia, os quais são organizados em definições de competências gerais e comuns a todas as engenharias e competências específicas, de acordo com a área de formação, funcionando como orientação para a organização, desenvolvimento e avaliação dos projetos pedagógicos dos cursos de graduação em engenharia.

Os padrões e critérios da EUR-ACE são a base para o acordo europeu de reconhecimento mútuo, desenvolvido no âmbito da União Europeia, para o credenciamento dos cursos de engenharia. O ABET faz parte do Acordo de Washington, que é essencialmente um acordo de reconhecimento mútuo entre doze agências de credenciamento em diversos países, incluindo Austrália, Canadá, Taipei, Hong Kong, Irlanda, Japão, Coreia e Nova Zelândia, Singapura, África do Sul, Reino Unido e Estados Unidos (OECD, 2011).

O projeto coordenado pela European Tuning Association, intitulado Tuning-AHELO (Assessment of Higher Education Learning Outcomes), tem o objetivo de desenvolver uma prova para estudantes universitários comparável internacionalmente, com foco em:

- habilidades genéricas comuns a todos os alunos (como pensamento crítico, raciocínio analítico, resolução de problemas e comunicação escrita);
- habilidades específicas em economia e engenharia.

Para o projeto Tuning-AHELO, os padrões do ABET EC 2000 e EUR-ACE, que abrangem diversos países de maneira direta ou indireta, são a base para o desenvolvimento da sua proposta de trabalho.

A Figura 2 apresenta o quadro com a síntese dos critérios e padrões das competências gerais e comuns às engenharias, avaliados pelo ABET EC 2000 e o EUR-ACE. As informações estão organizadas de acordo com a equivalência comparativa realizada pelo Tuning-AHELO (OECD, 2011, p. 17–18).

Figura 2 - Padrões e critérios da EUR-ACE, ABET EC 2000 e Tuning-AHELO.

<b>Padrões EUR-ACE para o credenciamento de programas de engenharia</b>	<b>Crítérios ABET-USA para Credenciamento de Programas Engenharias</b>	<b>Tuning-AHELO Estrutura de resultados de aprendizagem</b>
<b>Conhecimento e entendimento</b>		<b>Ciências Básicas e Engenharia</b>
Conhecimento e compreensão dos princípios científicos e matemáticos subjacentes ao ramo da engenharia	Capacidade de aplicar conhecimento de matemática, ciências e engenharia;	Capacidade de demonstrar conhecimento e compreensão dos princípios científicos e matemáticos subjacentes ao seu ramo de engenharia;
Compreensão sistemática dos principais aspectos e conceitos de seu ramo de engenharia		Capacidade de demonstrar compreensão sistemática dos principais aspectos e conceitos de seu ramo de engenharia;
Conhecimento coerente de seu ramo de engenharia, incluindo conceitos de vanguarda do ramo.		Capacidade de demonstrar conhecimento abrangente de seu ramo de engenharia, incluindo questões novas/emergentes.
Sensibilização para o amplo contexto multidisciplinar da engenharia.		
<b>Análises da Engenharia</b>		<b>Análises da Engenharia</b>
Capacidade de aplicar o seu conhecimento e compreensão para identificar, formular e resolver problemas de engenharia usando métodos estabelecidos;	Capacidade de projetar e realizar experimentos, bem como analisar e interpretar dados;	Capacidade de aplicar o seu conhecimento e compreensão para identificar, formular e resolver problemas de engenharia usando métodos estabelecidos;
Capacidade de aplicar o seu conhecimento e compreensão para analisar produtos, processos e métodos de engenharia;	Capacidade de identificar, formular e resolver problemas de engenharia;	Capacidade de aplicar o seu conhecimento e compreensão para analisar produtos, processos e métodos de engenharia;
Capacidade de selecionar e aplicar métodos analíticos e de modelagem relevantes.		Capacidade de selecionar e aplicar métodos analíticos e de modelagem relevantes.
		Capacidade de realizar pesquisas bibliográficas, utilizar outras fontes de informação e bases de dados.
		Capacidade de projetar e realizar experimentos adequados, interpretar os dados e tirar conclusões.
<b>Projeto de Engenharia</b>		<b>Design (projeto) de Engenharia</b>
Capacidade de aplicar seu conhecimento e compreensão para desenvolver e realizar projetos para atender aos requisitos definidos e especificados;	Capacidade de projetar um sistema, componente ou processo para atender às necessidades desejadas dentro dos limites realistas, como econômico, ambiental, social, político, ético, saúde e segurança, manufatura e sustentabilidade;	Capacidade de aplicar o seu conhecimento e compreensão para desenvolver projetos que atendam aos requisitos definidos e especificados;
Compreensão de projetar metodologias e capacidade para usa-las		Capacidade de demonstrar compreensão das metodologias de design e como utilizar.
<b>Investigações</b>		
Capacidade de realizar pesquisas bibliográficas, utilizar outras fontes de informação e bases de dados.		
Capacidade de projetar e realizar experimentos adequados, interpretar os dados e tirar conclusões.		
Habilidades para oficinas e laboratórios.		

(Continua)

<b>Padrões EUR-ACE para o credenciamento de programas de engenharia</b>	<b>Crítérios ABET-USA para Credenciamento de Programas Engenharias</b>	<b>Tuning-AHELO Estrutura de resultados de aprendizagem</b>
<b>Prática da Engenharia</b>		<b>Prática da Engenharia</b>
Capacidade de selecionar e utilizar equipamentos, ferramentas e métodos adequados;	Compreensão da responsabilidade profissional e ética	Capacidade de combinar teoria e prática para resolver problemas de engenharia;
Capacidade de combinar teoria e prática para resolver problemas de engenharia;	Conhecimento de questões contemporâneas/atuais.	Capacidade de combinar teoria e prática para resolver problemas de engenharia;
Compreensão das técnicas e métodos aplicáveis, e suas limitações;	Capacidade de usar técnicas, habilidades e ferramentas de engenharia modernas necessárias para a sua prática.	Capacidade de demonstrar compreensão das técnicas e métodos aplicáveis, e suas limitações;
Consciência das implicações da prática de engenharia de forma não técnica.		Capacidade de demonstrar a compreensão das implicações não técnicas da prática de engenharia;
		Capacidade de demonstrar habilidades para oficinas e laboratórios;
		Capacidade de demonstrar compreensão sobre saúde, segurança e questões legais e responsabilidades da prática de engenharia e o impacto das soluções em um contexto social e ambiental, comprometido com a ética profissional, responsabilidades e normas de prática de engenharia;
		Capacidade de demonstrar conhecimento de gerenciamento de projetos e práticas comerciais, como o gerenciamento de riscos e mudanças, e estar ciente de suas limitações.
<b>Habilidades transferíveis</b>		<b>Habilidades genéricas</b>
Atuar como indivíduo e membro de equipe.	Capacidade para trabalhar/atuarem equipes multidisciplinares;	Capacidade para atuar como indivíduo e como membro de uma equipe;
Utilizar métodos diversos para comunicação efetiva com a comunidade de engenharia e a sociedade em geral;	Capacidade de comunicação efetiva.	Capacidade de utilizar métodos diversos para comunicação efetiva com a comunidade de engenharia e a sociedade em geral;
Demonstrar consciência sobre questões de saúde, segurança e jurídicas, responsabilidades da prática de engenharia, o impacto das soluções em um contexto social e ambiental e se comprometer com a ética profissional, responsabilidades e normas de prática de engenharia;	Educação ampla para entender o impacto das soluções de engenharia em um contexto global, econômico, ambiental e social.	Habilidade de reconhecer a necessidade e ter a capacidade desenvolver em uma aprendizagem independente e permanente.
Demonstrar consciência de gerenciamento de projetos e práticas comerciais, como manejo de riscos e mudanças, compreendendo suas limitações;	Reconhecer a necessidade, ter a habilidade e se envolver na permanente busca de atualização e aprendizagem.	Capacidade de demonstrar consciência do amplo contexto multidisciplinar da engenharia.
Reconhecer a necessidade e ter a capacidade de se envolver em uma aprendizagem independente e permanente.		

Fonte – OECD, 2011.

No Brasil, segundo o parecer CNE/CES 1.362/2001 (BRASIL, 2001), o perfil do egresso de engenharia:

...compreenderá uma sólida formação técnico científica e profissional geral que o capacite a absorver e desenvolver novas tecnologias, estimulando a sua atuação crítica e criativa na identificação e resolução de problemas, considerando seus aspectos políticos, econômicos, sociais, ambientais e culturais, com visão ética e humanística, em atendimento às demandas da sociedade.

Dentro dessa perspectiva, nas Diretrizes Curriculares Nacionais do Curso de Graduação em Engenharia (BRASIL, 2002), são definidos os princípios, fundamentos, condições e procedimentos da formação de engenheiros, em âmbito nacional, na organização, desenvolvimento e avaliação dos projetos pedagógicos dos cursos de graduação em engenharia das Instituições do Ensino Superior.

O documento, muito semelhante ao ABET, explicita que a formação do engenheiro tem por objetivo dotar o profissional dos conhecimentos requeridos para o exercício das competências e habilidades gerais apresentadas no quadro de competências da Figura 3 (BRASIL, 2002, p. 32).

Figura 3 – Quadro de Competências e habilidades gerais definidas nas DCN do Curso de Graduação em Engenharia

	Competências e habilidades gerais
<b>I.</b>	aplicar conhecimentos matemáticos, científicos, tecnológicos e instrumentais à engenharia;
<b>II.</b>	projetar e conduzir experimentos e interpretar resultados;
<b>III.</b>	conceber, projetar e analisar sistemas, produtos e processos;
<b>IV.</b>	planejar, supervisionar, elaborar e coordenar projetos e serviços de engenharia;
<b>V.</b>	identificar, formular e resolver problemas de engenharia;
<b>VI.</b>	desenvolver e/ou utilizar novas ferramentas e técnicas;
<b>VII.</b>	supervisionar a operação e a manutenção de sistemas;
<b>VIII.</b>	avaliar criticamente a operação e a manutenção de sistemas;
<b>IX.</b>	comunicar-se eficientemente nas formas escrita, oral e gráfica;
<b>X.</b>	atuar em equipes multidisciplinares;
<b>XI.</b>	compreender e aplicar a ética e responsabilidade profissionais;
<b>XII.</b>	avaliar o impacto das atividades da engenharia no contexto social e ambiental;
<b>XIII.</b>	avaliar a viabilidade econômica de projetos de engenharia;
<b>XIV.</b>	assumir a postura de permanente busca de atualização profissional.

Fonte: Diário Oficial da União; Brasília; 9 de abril de 2002. Seção 1; p. 32

Realizando uma análise comparativa entre as DCN, os critérios do ABET e EUR-ACE e o projeto Tuning-AHELO, identificam-se semelhanças nas competências gerais definidas pelas diferentes entidades. De modo geral, os critérios apresentam diferenças somente na sua forma apresentação das ideias sobre o mesmo conjunto de competências gerais que devem ser desenvolvidas nos indivíduos durante sua formação, com duração em torno de seis a oito

semestres. Os critérios gerais levam em conta os avanços das tecnologias e, através de seus descritores, definem competências que não se tornam obsoletas, assim como as competências comuns às diferentes formações técnicas das engenharias.

É importante ressaltar a relação entre as tecnologias e a formação, pois as tecnologias apresentam o paradoxo de serem boas e ruins ao mesmo tempo. Boas pela importância no exercício da profissão e ruins pela dificuldade de atualização dos currículos dos cursos, dada a sua rapidez de evolução e o tempo de formação, que acaba sendo maior que o tempo de vida de determinadas tecnologias, tornando, por vezes, o conhecimento do egresso obsoleto no momento do seu ingresso na vida profissional.

O desenvolvimento das tecnologias e a integração da mesma aos diversos campos da economia, da planta fabril ao marketing, foi denominada, na década de 90, como a terceira revolução industrial. Coutinho (1992) destacou que essa integração tecnológica com a economia de produção e serviço, iniciada nos anos 80 e 90, geraria impacto sobre a composição e perfil da força de trabalho, ressaltando a necessidade de estar capacitado a lidar, proficientemente, com as tecnologias, requerendo o raciocínio abstrato, conhecimentos matemáticos, interpretação de instruções, informações visuais, códigos, etc., devendo reagir a esses com presteza e eficácia.

O que era uma previsão em 1990, agora, no século XXI, torna-se uma realidade, com o mercado de trabalho exigindo o domínio das tecnologias, que se renovam constantemente, e um perfil de aprendizagem que busque constante atualização do conhecimento necessário ao adequado uso dessas tecnologias.

Zuffo (1997) apresentou a evolução tecnológica em “eras”, com seus tempos de duração, ressaltando uma diminuição significativa do seus períodos. Para o autor, a *Era Industrial* teve um período de duzentos anos; a *Era Pós-Industrial*, um período de vinte a quarenta anos; e a era seguinte, denominada por ele como *Info Era*, teria um período de quatro anos, que é um período menor que o proposto para um curso de engenharia. Dessa forma, muito do que deve ser aprendido durante a graduação ainda está por ser inventado ou descoberto e parte do que foi aprendido se tornará obsoleto até seu ingresso na vida profissional.

O atual mercado de trabalho, em constante estado de mudança, exige uma atualização contínua de conhecimentos por parte do profissional, que também deve estar disposto a se desenvolver em outras áreas afins à sua formação, impondo uma conduta flexível de formação e de aprendizagem. No entanto, mesmo com a evolução das tecnologias, algumas competências, como a comunicação, a autogestão do conhecimento e as competências matemáticas, não se tornam obsoletas, estando clara a necessidade das mesmas durante a formação do indivíduo.

Compreende-se que, para solucionar um problema, o indivíduo lança mão dos recursos necessários envolvidos na situação, assim como de esquemas e estratégias que levem ao êxito. Logo, para o desenvolvimento das competências descritas, as habilidades e conhecimentos matemáticos envolvidos devem estar presentes como recursos a serem acionados quando necessários, em determinados momentos e em situações específicas.

A seguir, apresentam-se as competências matemáticas identificadas direta e indiretamente dentre o rol de competências imprescindíveis ao desenvolvimento da profissão de engenheiro.

### 1.3 COMPETÊNCIAS MATEMÁTICAS

O objetivo da engenharia de manipular e controlar a natureza envolve a necessidade de identificar, relacionar e matematizar, ficando explícita a necessidade da estrutura conceitual sobre funções, em conjunto com a compreensão das características de valor e variação dos fenômenos. Assim, são primordiais, para a modelagem e matematização da situação-problema, os conhecimentos matemáticos apresentados nas disciplinas de Cálculo.

Para Reis (2001), as noções do Cálculo formam um conteúdo integrante de diversas disciplinas para cursos universitários que formam profissionais com diferentes perfis, como, por exemplo, engenharia, física, economia, além, obviamente, de matemática. O autor afirma que uma prática muito comum entre os professores de Cálculo é ministrar essa disciplina sempre da mesma forma, com os mesmos conteúdos, usando da mesma metodologia, os mesmos exemplos, as mesmas aplicações, sem considerar a natureza do curso. Para o autor, essa não é uma prática adequada, entendendo que cada um desses cursos profissionalizantes exige do professor uma transposição didática própria, de modo que a produção de significados das ideias do Cálculo esteja em estreita relação com o contexto profissional do curso.

Ressalta-se que para o desenvolvimento das competências de alto nível, definem-se as necessidades de formação, indo do profissional para o escolar, das competências menos complexas e também das elementares necessárias. Caso as competências a priori não estejam adequadamente desenvolvidas no aluno, ações e mudanças na organização da disciplina devem ser realizadas pelo professor.

Para Perrenoud (1999a), uma competência envolve a capacidade de agir eficazmente em uma situação, apoiada, mas não limitada, em conhecimentos. Logo, é importante que os professores e alunos conheçam as capacidades individuais que melhor podem servir ao processo cíclico de aprendizagem-ensino-aprendizagem.

Bunk (1994) afirma que, para formar competências e seus procedimentos, é importante definir, em primeiro lugar, os conteúdos necessários para o desenvolvimento das mesmas. O autor também ressalta que uma ação de formação se justifica pedagogicamente, de forma espontânea e ativa, a um objetivo, a um problema ou a uma tarefa em que se percebe com clareza os fenômenos envolvidos. Assim como se existe a relação entre a teoria e a prática, o planejamento e a organização de possibilidades de êxito, considerando o nível de decisão e responsabilidade, permitindo a autoavaliação e a mensuração do resultado, dentro do contexto da autorregulação da aprendizagem.

Entende-se que as ferramentas de avaliação, com foco na autogestão do conhecimento, são parte do processo de formação. Ressalta-se que o fato de estudar com autonomia, de ter uma posição autodidata, não implica em uma efetiva aprendizagem significativa. A verificação da existência e do grau de destreza das competências desenvolvidas na área de conhecimento estudado é ação componente da formação e validada por agente externo, que detém a competência de auferir valor e corroborar que o conhecimento adquirido está correto ou suficiente.

Segundo Depresbiteris e Tavares, as informações resultantes das avaliações são importantes para que o professor seja capaz de tomar decisões para ações eficazes e corretas, na orientação dos estudantes (DEPRESBITERIS e TAVARES, 1989).

Desse modo, além do empenho e da adequada gestão do processo de ensino-aprendizagem por parte do professor, deve existir uma participação efetiva do aluno no seu projeto de aprendizagem, em termos de autoavaliação, autodesenvolvimento e, também, de autoconhecimento. Logo, o estudante deve conhecer quais são os seus pontos fracos e fortes, quais são as suas competências naturais, como indicativos para fazer sua história profissional (MATAI; MATAI, 2005).

Nesse sentido, é importante que um estudante tenha conhecimento do que sabe, mas, também, do que não sabe e por que não sabe, de maneira que possa se organizar para transpor suas dificuldades e desenvolver, na plenitude, as competências definidas como objetivos na sua formação. Os conhecimentos matemáticos, a organização dos dados e saber-fazer são componentes que possibilitam a inferência sobre o domínio da competência matemática na resolução de problemas, assim como possibilitam identificar suas dificuldades, ponto-chave desta pesquisa.

Nessa perspectiva, é fundamental diferenciar competência de habilidade. De forma simplificada, compreende-se que a competência orchestra um conjunto de esquemas de percepção, pensamento, avaliação e ação, enquanto a habilidade é menos ampla e pode servir a

várias competências (PERRENOUD, 1999a). O autor afirma que "para enfrentar uma situação da melhor maneira possível deve-se, de regra, pôr em ação e, em sinergia, vários recursos cognitivos complementares, entre os quais estão os conhecimentos" (PERRENOUD, 1999a, p. 7).

Nesse sentido, alguns saberes matemáticos são habilidades e outros são competências, e ser competente matematicamente influi no desenvolvimento do profissional de engenharia. Logo, tais conhecimentos são relevantes para o desenvolvimento das competências exigidas para os egressos desses cursos. Alguns conceitos matemáticos são considerados conhecimentos gerais, como leitura matemática, uso de simbologia matemática, manipulação algébrica, conhecimentos elementares de geometria. Porém, outros são considerados de caráter complexo, como uso da matemática na resolução de problemas profissionais e na modelagem matemática de situações-problema.

Nos critérios e padrões definidos pela DCN, nos critérios do ABET e EUR-ACE e no projeto Tuning-AHELO, identifica-se nas competências gerais as competências matemáticas, de maneira direta ou indireta, podendo ser resumidas como:

- identificar, formular e resolver problemas de engenharia;
- conhecimento e compreensão dos princípios científicos e matemáticos subjacentes à engenharia;
- capacidade em aplicar conhecimentos matemáticos, científicos, tecnológicos e instrumentais à engenharia;
- conduzir experimentos e ter a capacidade de interpretar resultados;
- capacidade de comunicar-se eficientemente nas formas escrita, oral e gráfica.

Apresentou-se, no início deste capítulo, as definições de competências como um conjunto de conhecimentos e habilidades, tanto de ação como de reflexão, mobilizados em uma determinada situação. O acesso e a mobilização desse conjunto de recursos são distintos em diferentes indivíduos, diferenciando-se em tempo de resposta e esforço físico ou mental. Essa distinção, definida como destreza, é associada explícita ou implicitamente com a definição de competência, de modo que indivíduos distintos podem ter a mesma competência, mas com destrezas diferenciadas.

Segundo Nakao et al. (2003), as avaliações dos alunos de engenharia devem basear-se nas competências, habilidades e conteúdos curriculares desenvolvidos, tendo as Diretrizes Curriculares para os cursos de graduação em engenharia como referência, além de utilizar metodologias e critérios para acompanhamento e avaliação do processo de ensino-aprendizagem e dos próprios cursos de graduação em engenharia, em consonância com o



sistema de avaliação e a dinâmica curricular definida pelas suas respectivas instituições de ensino.

A seguir, apresenta-se a organização curricular e as disciplinas matemáticas dos cursos de engenharia das instituições de ensino superior da região metropolitana de Porto Alegre.

#### 1.4 A MATEMÁTICA NOS CURSOS DE ENGENHARIA

A engenharia, transformadora dos recursos da natureza e do meio ambiente para servir a um determinado objetivo, é personificada na pessoa do engenheiro, que pertence a um sistema social e produtivo. Esse engenheiro, como profissional da sua área, é caracterizado por um conhecimento geral e específico, associado à capacidade de aplicá-lo na tomada de decisões, visando solucionar situações que se apresentam. Ressalta-se que a matemática é parte desse conhecimento geral associado e interligado com a indústria, comércio, construção e outras áreas subjacentes ao desenvolvimento social e econômico (BIEMBENGUT, 2015).

Em geral, na engenharia, busca-se descrever o fenômeno verbalmente, geometricamente, numericamente ou algebricamente (BASSANEZI, 2002) e são estas condições que orientam e definem as ações e a prática pedagógica dos professores que cuidam da matemática nos cursos de engenharia e, de certo modo, definem o currículo dos cursos de graduação em engenharias.

Apresenta-se um estudo da organização curricular e das disciplinas matemáticas dos cursos de engenharia, das Instituições de Ensino Superior da região metropolitana de Porto Alegre. Tal estudo foi estruturado em quatro etapas.

Na primeira, investigou-se os cursos de graduação em engenharia ofertados por quatro universidades da Região Metropolitana de Porto Alegre, Rio Grande do Sul, que são: Universidade Luterana do Brasil (ULBRA); Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (PUCRS); Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS); Universidade do Vale do Rio dos Sinos (UNISINOS). O quadro da Figura 4 apresenta as respectivas universidades e os cursos de graduação em engenharia ofertados pelas mesmas.

Figura 4 – Quadro com Cursos de Graduação ofertados pelas Universidades da região metropolitana de Porto Alegre

<b>Cursos de Graduação em Engenharia ofertados pelas Universidades da região metropolitana de Porto Alegre</b>			
Universidade Luterana do Brasil Canoas RS (ULBRA)	Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (PUCRS)	Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS)	Universidade do Vale do Rio dos Sinos (UNISINOS)
-	-	-	Engenharia Agrônômica
Engenharia Ambiental e Sanitária	-	Engenharia Ambiental	Engenharia Ambiental
-	-	Engenharia de Alimentos	Engenharia de Alimentos
-	-	-	Engenharia Biomédica
-	-	Engenharia Cartográfica	Engenharia Cartográfica e de Agrimensura
Engenharia Civil	Engenharia Civil	Engenharia Civil	Engenharia Civil
-	Engenharia de Computação	Engenharia de Computação	Engenharia da Computação
-	Engenharia de Controle e Automação	Engenharia de Controle e Automação	Engenharia de Controle e Automação
Engenharia Elétrica	Engenharia Elétrica	Engenharia Elétrica	Engenharia Elétrica
-	-	-	Engenharia Eletrônica
-	-	Engenharia de Energia	Engenharia de Energia
-	-	Engenharia Física	-
-	-	Engenharia de Gestão de Energia - Litoral Norte	-
-	-	Engenharia Hídrica	-
-	-	Engenharia de Materiais	Engenharia de Materiais
Engenharia Mecânica	Engenharia Mecânica	Engenharia Mecânica	Engenharia Mecânica
Engenharia Mecânica Automotiva	-	-	-
-	-	Engenharia Metalúrgica	-
-	-	Engenharia de Minas	-
Engenharia de Produção	Engenharia de Produção	Engenharia de Produção	Engenharia de Produção
Engenharia Química	Engenharia Química	Engenharia Química	Engenharia Química
-	-	Engenharia de Serviços – Litoral Norte	-
-	Engenharia de Software	-	-

Fonte: Elaborado pelo autor.

Observa-se na Figura 4 que a ULBRA e PUCRS oferecem sete cursos de graduação em engenharia; a UFRGS oferece dezessete cursos e a UNISINOS oferece quinze cursos. As quatro universidades investigadas possuem cinco cursos de graduação em engenharia em comum: Engenharia Civil; Engenharia Elétrica; Engenharia Mecânica; Engenharia de Produção e Engenharia Química.

A análise das disciplinas matemáticas que compõem as matrizes curriculares dos cursos de graduação em engenharia ofertados pelas universidades referidas constituiu a segunda etapa. No currículo os cursos de engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), identifica-se as disciplinas com o conteúdo de Álgebra Linear, Geometria Analítica e Cálculo Diferencial Integral como disciplinas comuns a todas as Engenharias (Figura 5) e, pela matriz curricular, que essas disciplinas são disponibilizadas no início de curso, até o quarto semestre, e são exigidas como pré-requisitos para cursar as disciplinas profissionalizantes dos semestres posteriores.

Figura 5 – Quadro com as disciplinas com conteúdo matemático nos cursos de Engenharia da UFRGS

DISCIPLINA	ENGENHARIA AMBIENTAL	ENGENHARIA CARTOGRÁFICA	ENGENHARIA CIVIL	ENGENHARIA ELÉTRICA	ENGENHARIA FÍSICA	ENGENHARIA HÍDRICA	ENGENHARIA MECÂNICA	ENGENHARIA METALÚRGICA	ENGENHARIA QUÍMICA	ENGENHARIA DE ALIMENTOS	ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO	ENGENHARIA DE CONTROLE E AUTOMAÇÃO	ENGENHARIA DE ENERGIA	ENGENHARIA DE MATERIAIS	ENGENHARIA DE MINAS	ENGENHARIA DE PRODUÇÃO
Cálculo e Geometria Analítica I - A	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Cálculo e Geometria Analítica II - A	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Álgebra Linear I – A	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Equações Diferenciais II	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Probabilidade e Estatística	x	x	x	x	x		x	x	x	x	x	x		x	x	
Cálculo Numérico	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Geometria Descritiva III			x				x								x	x
Geometria Descritiva II-A	x		x				x	x	x				x	x	x	x
Matemática Aplicada II				x	x	x	x	x	x	x	x	x				
Matemática Discreta B											x					
Matemática Financeira - A													x			
Estatística para a Engenharia													x			x
Estatística aplicada aos Recursos Hídricos						x										

Fonte: Adaptado da UFRGS<sup>6</sup>, 2018.

A Universidade Luterana também organiza as três disciplinas que compõem o Cálculo Diferencial e Integral, Geometria Analítica e Álgebra Linear nos primeiros semestres dos seus cursos de engenharias. Na Figura 6, são identificadas as disciplinas comuns aos cursos de engenharias da instituição.

Figura 6 – Quadro com as disciplinas com conteúdo matemático nos cursos de Engenharia da ULBRA

DISCIPLINA	ENGENHARIA AMBIENTAL E SANITÁRIA	ENGENHARIA CIVIL	ENGENHARIA ELÉTRICA	ENGENHARIA MECÂNICA	ENGENHARIA MECÂNICA AUTOMOTIVA	ENGENHARIA QUÍMICA	ENGENHARIA DE PRODUÇÃO
Geometria Analítica e Álgebra Linear	x	x	x	x	x	x	x
Cálculo I	x	x	x	x	x	x	x
Cálculo II	x	x	x	x	x	x	x
Cálculo III	x	x	x	x	x	x	x
Tratamento de Dados	x	x	x	x	x	x	x
Modelagem de Sistemas Dinâmicos I		x	x	x	x	x	x
Modelagem de Sistemas Dinâmicos II			x	x	x	x	
Métodos Numéricos e Programação			x	x	x		
Métodos Numéricos para Engenharia Química						x	
Métodos Numéricos para Produção							x

Fonte: Adaptado da ULBRA<sup>7</sup>, 2018.

<sup>6</sup> Disponível em: <<http://www.ufrgs.br/ufrgs/ensino/graduacao/cursos>> Acesso em out. 2018.

<sup>7</sup> Disponível em: <<http://www.ulbra.br/canoas/graduacao/cursos/presencial>> Acesso em out. 2018

Analisando o currículo dos cursos de engenharia da PUCRS, identifica-se o Cálculo I como disciplina comum a todas as engenharias (Figura 7). De acordo com a matriz curricular da universidade, a disciplina é disponibilizada nos primeiros semestres dos cursos.

Figura 7 - Quadro com as disciplinas com conteúdo matemático nos cursos de Engenharia da PUCRS

DISCIPLINA	ENGENHARIA CIVIL	ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO	ENGENHARIA DE CONTROLE E AUTOMAÇÃO	ENGENHARIA ELÉTRICA	ENGENHARIA MECÂNICA	ENGENHARIA DE PRODUÇÃO	ENGENHARIA QUÍMICA	ENGENHARIA SOFTWARE
Cálculo I	x	x	x	x	x	x	x	x
Cálculo II	x	x	x	x	x	x	x	
Cálculo III				x				
Cálculo IV				x				
Cálculo Diferencial e Integral III	x	x	x		x	x	x	
Matemática Discreta		x						x
Álgebra Matricial	x	x	x		x	x	x	
Álgebra Linear e Geometria Analítica				x				
Cálculo Diferencial e Integral IV		x	x		x		x	
Matemática Aplicada		x	x	x	x		x	
Cálculo Numérico A	x		x		x	x	x	
Métodos Numéricos para Eng. Química							x	
Probabilidade E Estatística	x	x	x	x	x			x
Probabilidade						x		
Estatística Inferencial						x		
Estatística Descritiva						x		
Estatística Avançada						x		
Controle Estatístico da Qualidade						x		
Modelagem de Sistemas Dinâmicos			x				x	

Fonte: Adaptado da PUCRS<sup>8</sup>, 2018.

Identifica-se, na Figura 8, as disciplinas com o conteúdo matemático presentes no currículo dos cursos de engenharia ofertados pela UNISINOS, o qual apresenta duas disciplinas

<sup>8</sup> Disponível em: < <http://www.pucrs.br/politecnica/curso/engenharias/#curriculos> > Acesso em out. 2018

comuns: Cálculo I (estudo da derivada) e Cálculo II (estudo da integral). De acordo com a matriz curricular, tais disciplinas são disponibilizadas no início dos cursos.

Figura 8 – Quadro com as disciplinas com conteúdo matemático nos cursos de Engenharia da UNISINOS

DISCIPLINA	ENGENHARIA AGRONÔMICA	ENGENHARIA AMBIENTAL	ENGENHARIA DE ALIMENTOS	ENGENHARIA BIOMÉDICA	ENGENHARIA CARTOGRÁFICA E DE AGRIMENSURA	ENGENHARIA CIVIL	ENGENHARIA DA COMPUTAÇÃO	ENGENHARIA DE CONTROLE E AUTOMAÇÃO	ENGENHARIA ELÉTRICA	ENGENHARIA ELETRÔNICA	ENGENHARIA DE ENERGIA	ENGENHARIA DE MATERIAIS	ENGENHARIA MECÂNICA	ENGENHARIA DE PRODUÇÃO	ENGENHARIA QUÍMICA
Cálculo I: Estudo da Derivada	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Cálculo II: Estudo da Integral	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Cálculo III: Estudo das Séries				x	x		x	x		x					
Álgebra Vetorial e Matricial	x	x	x	x	x		x	x	x	x	x	x			
Álgebra Linear				x		x	x	x	x	x			x	x	x
Cálculo de Várias Variáveis		x	x					x	x	x	x	x	x		x
Variáveis Complexas								x	x	x					
Equações Diferenciais e Séries		x	x	x		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Estatística Aplicada À Saúde				x											
Estática das Construções						x									
Fundamentos de Probabilidade e Estatística								x	x	x				x	
Fundamentos Matemáticos Para Sinais e Sistemas								x	x	x					
Fundamentos de Operações e Logística															
Geometria descritiva I					x										x
Métodos Numéricos		x		x		x	x	x	x	x	x		x	x	x
Controle Estatístico da Qualidade		x				x					x	x	x		x

Fonte: Adaptado da UNISINOS<sup>9</sup>, 2018.

A terceira etapa de análise refere-se à abordagem da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral nas matrizes curriculares disponibilizadas pelas universidades investigadas, resultado desta análise pode ser visto na Figura 9. Nessa etapa, investigou-se o nome dado à disciplina, seu código, a carga horária, a quantidade de créditos e o semestre no qual a disciplina é abordada.

<sup>9</sup> Disponível em: < <http://unisinos.br/vestibular/images/cursos/curriculos/engenharia.pdf> > Acesso em out. 2018

Figura 9 – Quadro com a Abordagem da Disciplina de Cálculo Diferencial e Integral nas Matrizes Curriculares dos Cursos de Graduação em Engenharia das Universidades pesquisadas

<b>Abordagem do Cálculo Diferencial e Integral nas Matrizes Curriculares dos cursos de graduação em Engenharia das Universidades Investigadas</b>					
	<b>Nome da Disciplina</b>	<b>Código</b>	<b>Carga horária</b>	<b>Créditos</b>	<b>Semestre</b>
ULBRA	Cálculo I	203500	68	4	2º Semestre Observação: nos cursos de Engenharia Elétrica e Química a disciplina é abordada no 1º semestre.
PUCRS	Cálculo Diferencial e Integral I	4115M-04	60	4	1º Semestre
UFRGS	Cálculo I A- (Cálculo e Geometria Analítica I A)	MAT01353	90	6	1º Semestre
UNISINOS	Cálculo I: Estudo da Derivada	97952	60	4	2º Semestre Observação: no curso de Engenharia Civil a disciplina é abordada no 1º semestre.

Fonte: Elaborado pelo autor.

De acordo com a Figura 9, observa-se que o Cálculo Diferencial e Integral, nas matrizes curriculares dos cursos de Graduação em Engenharia, recebe uma nomenclatura diversificada. Com relação a carga horária, constata-se que duas das quatro universidades investigadas estabelecem 60 horas para o Cálculo Diferencial e Integral, uma universidade estabelece 68 horas e a outra, 90 horas. Com relação aos créditos estabelecidos para a disciplina, constata-se que das quatro universidades, três estabelecem 4 créditos para o estudo do Cálculo Diferencial e Integral e uma estabelece 6 créditos.

Verifica-se ainda, de acordo com as matrizes curriculares dos cursos de Graduação em Engenharia das universidades, que o Cálculo Diferencial e Integral é abordado nos semestres iniciais dos Cursos de Graduação em Engenharia, como mostra a Figura 9.

A partir da análise da abordagem do Cálculo Diferencial e Integral nas matrizes curriculares dos cursos de graduação em engenharia, estabelece-se a quarta etapa de análise, na qual investigou-se as ementas das disciplinas apresentadas pelas quatro universidades. Nessa etapa, buscou-se identificar os conceitos abordados, o objetivo da disciplina, a forma de avaliar o processo de aprendizagem dos conceitos e a bibliografia básica recomendada.

Para cada universidade pesquisada, apresenta-se um quadro contendo os critérios que foram analisados nas ementas referentes ao estudo do Cálculo Diferencial e Integral. A Figura 10 apresenta o quadro com os critérios analisados referentes à ementa da disciplina de Cálculo I disponibilizada pela ULBRA.

Figura 10 – Quadro com os critérios analisados na ementa da disciplina Cálculo I – ULBRA

<b>Ementa da Disciplina Cálculo I - ULBRA</b>	
<b>Conceitos Abordados</b>	<b>Referência Bibliográfica Básica Recomendada</b>
-Funções de uma variável: Limite, Continuidade, Derivada, Integral indefinida e Definida; - Aplicações da derivada e integral; - Funções de várias variáveis: domínio, curvas de nível, derivada parcial e Integrais duplas. - Aplicações.	STEWART, James. Cálculo. Vol 1 e Vol 2. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006. ANTON, H. Cálculo, um novo horizonte. Vol. 1 Vol. 2. Porto Alegre: Bookman, 2000. ÁVILA, Geraldo. Cálculo - Funções de uma variável. Vol. 1 e Vol. 2. Rio de Janeiro: Editora LTC – Livros Técnicos e Científicos, 2000. 5 ed.

Fonte: Adaptado da ULBRA<sup>10</sup>, 2018.

A ementa disponibilizada pela ULBRA apresenta, para o estudo do Cálculo Diferencial e Integral, de acordo com a Figura 10, os conceitos de: funções de uma variável (limite, continuidade); derivada, integral indefinida e definida; aplicações da derivada e integral; funções de várias variáveis (domínio, curvas de nível, derivada parcial e Integrais duplas); aplicações. Na ementa da disciplina não constam os objetivos, nem os critérios de avaliação do processo de aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral.

Para o estudo do Cálculo Diferencial e Integral, a UFRGS, propõe a disciplina denominada Cálculo e Geometria Analítica I, cuja análise da ementa é apresentada na Figura 11.

Figura 11 – Quadro a ementa da disciplina Cálculo I A - UFRGS

<b>Ementa da Disciplina Cálculo I A- Cálculo e Geometria Analítica IA -UFRGS</b>	
<b>Conceitos Abordados</b>	<b>Referência Bibliográfica Básica Recomendada</b>
- Estudo da reta e de curvas planas; - Cálculo diferencial de uma variável real; - Cálculo integral das funções de uma variável real.	ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. Cálculo. 8. ed. Porto Alegre: Bookman.v.1. ANTON, Howard. Cálculo. 10. ed. Porto Alegre: Bookman.

Fonte: Adaptado da UFRGS<sup>11</sup>, 2018.

De acordo com a ementa proposta pela UFRGS, a Disciplina de Cálculo IA (Cálculo e Geometria Analítica IA) está dividida em duas áreas do conhecimento especificadas no conteúdo programático, o qual apresenta como ementa: o estudo da reta e de curvas planas; cálculo diferencial de uma variável real e cálculo integral das funções de uma variável real.

Com relação à metodologia utilizada para o estudo do Cálculo Diferencial e Integral, consta na ementa da disciplina que o conteúdo será apresentado de forma expositiva-dialogada, com apelo à intuição do estudante, exemplificando com abundância os tópicos abordados e seguindo uma sistematização adequada ao curso de Cálculo. Ainda segundo o documento, a disciplina visa fornecer ao aluno conhecimentos e técnicas que lhe sejam úteis posteriormente, capacitando-o à aplicação dos temas abordados, mediante exemplos práticos. Também serão

<sup>10</sup> Disponível em: <<http://www.ulbra.br/canoas/graduacao/presencial/engenharia-civil/bacharelado/ementa/5458>> Acesso em out. 2018

<sup>11</sup> Disponível em: <<http://www.mat.ufrgs.br/~calculo/1calculo.html#plano>> Acesso em out. 2018

indicados por cada professor exercícios relevantes, que cubram a matéria ministrada e que capacitem o aluno a sintetizar as técnicas utilizadas.

A ementa das disciplinas de Cálculo (UFRGS, 2010; ULBRA, 2017) apresentam como objetivos: o estudo para a compreensão, análise e síntese das principais ideias referentes ao estudo da derivação e integração de funções de uma variável real; suas implicações e importância para as áreas exatas e tecnológicas; aplicação dos métodos matemáticos e seus resultados, estabelecendo juízo de valor a respeito dos métodos e processos empregados.

A análise da ementa da disciplina Cálculo Diferencial e Integral I, disponibilizada pela PUCRS é apresentada na Figura 12.

Figura 12 – Quadro a ementa da disciplina Cálculo Diferencial e Integral I - PUCRS

<b>Ementa da Disciplina Cálculo Diferencial e Integral I - PUCRS</b>	
<b>Conceitos Abordados</b>	<b>Referência Bibliográfica Básica Recomendada</b>
<p>1. VETORES Vetor: definição e operações. Sistema de coordenadas cartesianas. Vetor definido por dois pontos. Produto escalar: definição, propriedades, módulo de um vetor, ângulo entre dois vetores.</p> <p>2. FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL Conceito de função. Função inversa. Função composta. Operações com funções. Tipos de funções mais utilizadas: funções polinomiais, função valor absoluto, função exponencial, função logarítmica, funções trigonométricas. Representação e análise gráfica. Modelagem.</p> <p>3. LIMITES E CONTINUIDADE Limites de funções num ponto. Limites infinitos e no infinito. Teoremas sobre limites de funções. Continuidade de uma função. Teoremas sobre continuidade.</p> <p>4. DERIVADAS Definição, interpretação geométrica e física. Regras de derivação. Derivada da função composta. A derivada como taxa de variação. Derivadas de ordem superior e derivação implícita. Aplicações: funções crescentes e decrescentes. Concavidade e pontos de inflexão. Máximos e mínimos globais e locais. Formas indeterminadas. Diferenciais. Aproximações lineares. Teorema do Valor Médio.</p>	<p>1. ANTON, Howard. Cálculo: Um novo horizonte. 6. ed. Porto Alegre: Bookman, 1999-2006. 2 v.</p> <p>2. STEWART, James. Cálculo. 5 ed. São Paulo: Cengage Learning, 2002-2008. 2 v.</p> <p>3. SWOKOWSKI, Earl W. Cálculo com geometria analítica. 2. ed. São Paulo: Makron, Books, 1983-1995. 2 v.</p>

Fonte: Adaptado de PUCRS<sup>12</sup>, 2018.

A ementa da disciplina Cálculo Diferencial e Integral I apresentada pela PUCRS propõe a exploração do plano cartesiano por meio da noção de vetores bidimensionais; caracterização de funções de uma variável; estudo de domínio e representação gráfica dessas funções; análise de limites e continuidade; definições e aplicações de derivadas e diferenciais.

De acordo com a análise da ementa apresentada pela PUCRS, para o estudo do Cálculo Diferencial e Integral nos cursos de Graduação em Engenharia, conforme apresentado na Figura 12.

<sup>12</sup> Disponível em: <[http://www.politecnica.pucrs.br/programas/pdf.php?\\_prog=426](http://www.politecnica.pucrs.br/programas/pdf.php?_prog=426)> Acesso em out. 2018



Figura 12, observa-se que a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I aborda os conceitos de: vetores; funções de uma variável; limites e continuidade; derivadas com o objetivo de instrumentalizar os alunos com conceitos básicos de vetores, limite, continuidade e derivada, bem como, explorar aplicações da derivada em modelagem matemática. Verifica-se que a ementa da disciplina não apresenta os critérios de avaliação do processo de aprendizagem.

A Figura 13 ilustra a análise da ementa da disciplina de Cálculo I: estudo da derivada apresentada pela UNISINOS.

Figura 13 – Quadro com a ementa da disciplina Cálculo I: Estudo da Derivada - UNISINOS

<b>Ementa da Disciplina Cálculo I: Estudo da Derivada - UNISINOS</b>	
<b>Conceitos Abordados</b>	<b>Referência Bibliográfica Básica Recomendada</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>- Limites: definição intuitiva, técnicas de cálculo de limites: limites laterais, limites no infinito.</li> <li>- Assíntotas horizontais e verticais.</li> <li>- Continuidade.</li> <li>- Retas tangentes, velocidade e taxas de variação gerais.</li> <li>- Derivada: definição pelo limite, a derivada como uma função.</li> <li>- Técnicas de diferenciação: regras do produto, do quociente e da cadeia.</li> <li>- Derivadas de funções polinomiais, racionais, trigonométricas e compostas.</li> <li>- Taxas relacionadas.</li> <li>- Aplicações da derivada: valores máximo e mínimo, crescimento e decrescimento, concavidade, gráficos de polinômios e funções racionais, problemas de otimização.</li> </ul>	Não informado

Fonte: Adaptado de Unisinos<sup>13</sup>, 2018.

Verifica-se que, na ementa proposta pela UNISINOS para a disciplina Cálculo I: estudo da Derivada, foram apresentados somente os conceitos abordados pela disciplina.

Apesar do desenvolvimento histórico do Cálculo diferir da organização e sequência dos conteúdos apresentados nas disciplinas, é objetivo das mesmas a construção da competência matemática envolvendo o Cálculo Diferencial e Integral para a resolução de problemas da Engenharia.

Em seus trabalhos, Barufi (1999) e Reis (2001) identificam a sequência de Cauchy-Weierstrass na organização didática da maioria das literaturas utilizadas nos cursos iniciais de Cálculo. Essa sequência apresenta os conceitos básicos do Cálculo Diferencial e Integral com base nas noções de limite e número real, de maneira que o conceito de limite de Weierstrass é formalmente definido, seguido da definição de continuidade, derivada e integral de uma função,

<sup>13</sup> Disponível em: <<http://www.unisinos.br/aplica/ementas/index.php>> Acesso em out. 2018

a partir da noção de limite. Essa organização é, segundo Ivor Grattan-Guinness (1997 apud REIS, 2001), o inverso do desenvolvimento histórico do Cálculo.

Os trabalhos de Rezende (2003) e Reis (2001) apontam para problemas epistemológicos associados à aprendizagem do Cálculo, assim como problemas de caráter didático, excesso de formalismo, falta de transposição didática, etc.

Considerando os conceitos e conteúdos matemáticos apresentados nos cursos de engenharia, com o objetivo de formar um profissional com as competências coerentes e condizentes com o mercado de trabalho, é esperado que o estudante de engenharia resolva problemas da sua área fazendo uso das suas habilidades e conhecimentos desenvolvidos durante sua formação.

Entende-se que ter conhecimento e habilidades específicas, que compõem as competências, não significa necessariamente que essas competências estejam adequadamente desenvolvidas. Isto porque é preciso acionar as habilidades e conhecimentos em conjunto e em sinergia, situação essa que pode não ocorrer. A competência para resolver determinados problemas de engenharia requer que as habilidades e conhecimentos matemáticos sejam acessados e utilizados em conjunto com os princípios científicos e tecnológicos próprios para solucioná-los.

Dentre as diversas situações, existe uma classe de problemas de engenharia que envolve situações de predição (CANTORAL, 2013). Como exemplo, tem-se as situações apresentadas na Engenharia Mecânica e na Civil, que envolvem estruturas e as cargas que estas suportam; pode-se afirmar que não se constrói uma estrutura, como uma ponte ou as fundações de um edifício, e depois verifica-se a sua carga máxima, expondo a mesma a uma situação extrema. Nesses casos a Engenharia se vale de modelos matemáticos que preveem o comportamento estrutural em condições como velocidade dos ventos, mudanças de carga, levando em conta até mesmo a temperatura ambiente.

Em determinados projetos, identifica-se a necessidade de ensaios para gerar o conhecimento que sirva como premissa para a construção do modelo matemático que represente as diversas situações e resultados de acordo com determinadas condições. Logo, o modelo matemático adquire a função de um instrumento preditivo que permite a análise e consequente tomada de decisão, com base nos seus resultados.

Assim, a competência de *Identificar, formular e resolver problemas de engenharia* é uma das competências que inclui outras competências, inclusive as matemáticas. Na Figura 14 se apresenta a síntese dos conhecimentos e habilidades matemáticas integrantes das competências gerais, definidas pela ABET, EUR-Ace, Tuning-AHELO e as DCN, e

relacionadas com as habilidades e competências matemáticas no que tange à resolução de problemas de engenharia.

Figura 14 – Conhecimentos e habilidades matemáticas integrantes das competências gerais

<b>Competências</b>	<b>Habilidades e competências</b>
Modelagem de situações	Ler, interpretar e identificar os dados relevantes; Representar matematicamente a situação-problema.
Aplicar conhecimentos científicos	Identificar métodos e algoritmos matemáticos adequados a situação-problema.
Comunicar-se eficientemente	Comunicar-se transitando entre a linguagem natural e as representações matemáticas e vice-versa.
Aplicar conhecimentos matemáticos	Acessar e utilizar de algoritmos e procedimentos matemáticos; Executar cálculos matemáticos.
Resolução de problemas	Modelagem de situações; Aplicar conhecimentos científicos; Comunicar-se eficientemente; Aplicar conhecimentos matemáticos; Interpretar os resultados dentro do contexto da situação-problema.

Fonte: Elaborado pelo autor, data.

A pesquisa não tem por objetivo discutir os problemas associados ao processo de ensino-aprendizagem do Cálculo, mas propor uma metodologia baseada na resolução de problemas e análise de erros, para inferir quais são os conhecimentos, métodos e conceitos que não estão adequadamente dominados pelos estudantes. Isso para que esses estudantes, assim como os professores, possam realizar ações para alcançar êxito no objetivo proposto por um curso de engenharia: formar um egresso com capacidade de ingressar, e se manter, com sucesso, no seu meio profissional.

## 2 ANÁLISE DE ERROS

Neste capítulo apresenta-se o conceito de erro, os aspectos do erro na educação, uma relação de trabalhos e pesquisas relevantes sobre o tema, subsidiando e justificando a presente pesquisa.

Se, para a formação do profissional de engenharia, é necessário que sejam definidos os objetivos em termos de competências, que por sua vez são desenvolvidos através de uma série de conhecimentos cognitivos procedimentais e atitudinais, tem-se então a necessidade da validação ou comprovação da aprendizagem pela execução exitosa das tarefas e atividades, na forma de trabalhos ou avaliações dadas aos estudantes. Situação diametralmente oposta é dada pela não execução satisfatória das tarefas e tratamentos das situações que se apresentam, que são evidências de problemas de aprendizagem.

É preocupação do professor e do estudante compreender e tratar as causas das dificuldades que levam à execução inadequada das atividades propostas. O aluno, com foco na própria formação, dentro do paradigma da autogestão do conhecimento; e o professor, com uma visão mais geral, avalia a sua prática pedagógica e a didática empregada, pela análise do grupo de alunos que não atingem os objetivos propostos.

Os erros aparecem nas produções devido a concepções equivocadas sobre aspectos fundamentais da matemática, pelo uso incorreto dos dados, pelo uso do modelo equivocado, pelo uso de procedimento equivocado sistematizado, incorrendo em manipulações algébricas, por não ter levado em conta as restrições estabelecidas na situação-problema, e outras razões como afirmam Cury (CURY, 2003, 2007), Pochulu (2009) e Rico (1998). Para cada uma dessas razões, o erro, ou equívoco, aparece como uma evidência associada a uma causa, de modo que a análise do erro permite identificar o seu motivo, ou seja, quais são as dificuldades dos alunos na execução de determinadas atividades matemáticas.

Há pesquisas e trabalhos cujas propostas são de caráter didático-pedagógico, que objetivam a superação das dificuldades detectadas pelos erros cometidos pelos alunos durante a resolução de uma situação-problema. A presente pesquisa não tem o objetivo de propor estratégias para superar ou minorar as dificuldades dos alunos, mas desenvolver uma avaliação *para* o aluno, que forneça informações sobre as suas dificuldades matemáticas na resolução de problemas com o conceito de derivadas.

Em uma retrospectiva sobre a *Análise de erros*, Rico (1998) considera como pioneiro o trabalho de Weiner na Europa, no qual ele estabelece padrões de erro e diferencia o equívoco, falso que se apresenta como verdadeiro, e o erro, classificando este em cinco categorias: erros

de família, erros persistentes, erros devido à semelhança, erros mistos e erros devido a situações emocionais.

Cury (2007, 2009), Radatz (1980) e Rico (1998), em uma revisão histórica sobre as pesquisas em Educação Matemática envolvendo análise de erros, ressaltam que os primeiros trabalhos tinham como foco de pesquisa os erros aritméticos dos estudantes e utilizavam na análise métodos quantitativos,. Deste modo, submetiam grandes populações de alunos à execução de provas, categorizando as questões em uma escala de dificuldade, dada em termos da distribuição normal, e relacionando essa escala com os conceitos e erros associados.

Os mesmos autores apontam que os trabalhos posteriores a esses deixaram de lado o enfoque estatístico para a análise de erros, dando atenção ao processo de ensino- aprendizagem, buscando responder quais são as causas de determinados conteúdos apresentarem mais dificuldades na aprendizagem do que outros.

Cury (2007) apresenta uma relação destes trabalhos e pesquisas nacionais na Figura 15, no qual notamos seis deles realizados com o nível superior, sendo três com o tema de Cálculo, no período dos quase vinte anos anteriores a 2007.

Figura 15 – Quadro com as pesquisas brasileiras sobre análise de erros Cury (2007)

<b>Autor(es)</b>	<b>Ano de Divulgação</b>	<b>Nível de Ensino</b>	<b>Conteúdo</b>
Lopes	1987	EF	Ambientes de “verdades provisórias”
Crepaldi; Wodewotzki	1988	EM	Variado
Cury	1988	ES	Demonstrações em Geometria
Guimarães Jr.	1989	EF	Programa para diagnóstico automático de Erros em subtração
Moren; David e Machado	1992	EF	Sistema de Numeração e Subtração
Batista	1995	EF	Operações Aritméticas
Pinto	1998	EF	Problemas de Aritmética
Baldino e Cabral	1999	ES	Técnicas de Integração
Bathelt	1999	EF	Idéia de Números e Operações com Frações
Gusmão	2000	ES	Emoções diante do Erro
Utsumi	2000	EF	Resolução de Problemas Algébricos
Ribeiro	2001	EF	Álgebra
Notari	2002	EF / EM	Frações aritméticas e Algébricas
Freitas	2002	EM	Equações do 1º grau
Milani	2002	ES	Conceitos de Cálculo
Souza	2003	EF	Variado
Valentino; Grando	2004	ES	Álgebra Elementar
Allevato	2005	ES	Funções
Silva	2005	EF	Variado
Perego	2006	EF	Variado

Fonte: Adaptado de Cury (2007).

Ampliando o quadro anterior para os anos após 2006, apresenta-se na Figura 16 a pesquisa realizada no catálogo de teses e dissertações da Capes sobre trabalhos com o tema erro, nas áreas de conhecimento Ensino, Matemática, Ensino de Ciências e Matemáticas, e constata-se um aumento nas pesquisas sobre o tema, com 32 trabalhos em 12 anos.

O centro das atenções dos trabalhos identificados continua sendo o Ensino Fundamental e Médio, e algumas pesquisas dos trabalhos relativos ao Ensino Superior têm seu foco na matemática básica, ou seja, nas dificuldades que os alunos carregam desde sua formação inicial e que permanecem ao ingressar na universidade.

Figura 16 - Quadro com as pesquisas brasileiras posteriores a 2006 sobre análise de erros

Autor(es)	Ano	Nível de Ensino	Conteúdo
Berti, Nívia Martins	2007	EF	Números e operações
Miranda, Werventon Dos Santos	2007	EF	Conjuntos numéricos; expressão numérica; Porcentagem; Produto Notável
Santos, João Ricardo Viola dos	2007	EF	Pensamento algébrico
Pontes, Jailson da Costa	2008	ES	Funções
Braga, Roberta Modesto	2009	ES	Equações diferenciais
Cordeiro, Clailton Costa	2009	EF	Geometria
Costa, Conceição Souza	2009	EF	Ciências
Paias, Ana Maria	2009	EF; EM	Potenciação
Peron, Luciana Del Castanhel	2009	EF	Números e operações
Espíndola, Nederson Antônio	2010	EF	Geometria
Junior, Antonio Rafael Pecepe	2011	EF	Álgebra
Pereira, Renata Brito	2011	EF	Modelagem
Reis, Adinilson Marques	2011	EM	Funções
Filho, Albano Dias Pereira	2012	ES	Cálculo
Bastos, Antonio Sergio Abrahao Monteiro	2013	ES	Análise de erro
Leite, Maici Duarte	2013	ES	Teorema de Pitágoras
Lima, Elson Nascimento	2013	ES	Operação módulo; Lógica formal de proposições.
Santos, Sueli dos Prazeres	2013	ES	Álgebra
Silva, Andre Gustavo Oliveira da	2013	EM	Funções
Costa, Jose Roberto	2014	EF	Sistema de numeração posicional de base oito
Lima, Adrizza Macedo Damaceno	2014	ES	Números e Operações; Álgebra e Funções
Ramos, Maria Luisa Perdigao Diz	2014	EM	Funções
Sousa, Jean Carlos Fideles de	2014		Equações; Funções
Ramos, Syana Monteiro de Alencar	2015	ES	A Concepção de Erro entre os professores de Matemática
Santos, John Kennedy Jeronimo	2015	EF	Números racionais
Escobar, Felipe Correa da Cruz	2016	EF	Operações com frações; Equações do primeiro grau; Produtos notáveis; Resolução de equações do 2º grau.
Ozores, Ana Luiza Festa	2016	EF	Regras de sinais; operações com fração, ordem das operações,
Santos, Marney Araujo dos	2016	EM	Matemática Financeira
Nascimento, Raul Francisco da Silva	2017	EM	Resolução de Problemas; Proporção
Sousa, Valdirene da Silva de	2017	EF	Reflexões a respeito de ações docentes no processo de ensino
Zagnoli, Tiago de Paula	2017	EM	Grandezas e Medidas; Números e Operações Álgebra e Funções
Moraes, Michael Machado de	2018	EF	Aritmética

Fonte: Catálogo de teses e dissertações – Capes, 2018.

Os estudos e investigações relativos aos erros na aprendizagem da Matemática podem ser classificados de acordo com categorizações apresentadas por Rico (1998), que inclui uma quarta categoria – erro na avaliação psicométrica –, quando comparada à categorização

apresentada por Siegel, Borasi e Fonzi (1998), que identificam três grandes correntes dentro das pesquisas sobre Análise de Erros, sintetizadas em ensino, aprendizagem e atividade.

Apresentando as categorias de Rico, temos que a primeira categoria estuda as causas das produções dos erros, as taxonomias e classificações, procurando estabelecer as causas estruturais, podendo ser decorrentes de conhecimentos *a priori*, ou da própria natureza do conhecimento matemático, ou seja, de carácter epistemológico (HADAR; ZASLAVSKY; INBAR, 1987; RADATZ, 1979, 1980).

A segunda categoria dedica os estudos para a organização didática da aprendizagem da matemática, que trata de ver os erros e promover meios para sua correção de maneira positiva, ou seja, trabalhando os currículos e buscando saber quais são os problemas que os alunos possuem em relação ao tema (BALDINO; CABRAL, 1997; CABRAL; BALDINO, 2008; CURY, 1999, 2003, 2007, 2016; CURY; KONZEN, 2006; MOREN; DAVID; MACHADO, 1992).

Na terceira categoria, os estudos são dedicados às formações dos professores e como eles devem trabalhar em relação aos erros que os alunos cometem, aproveitando as situações intrínsecas ao processo de aprendizagem (BORASI, 1989, 1996; BROUSSEAU; WERNER; DAVIS, 1986; KILPATRICK; GÓMEZ; RICO, 1998; LANNIN; BARKER; TOWNSEND, 2007; SIEGEL; BORASI; FONZI, 1998). O quarto grupo de trabalhos inclui aqueles que trabalham com análise da produção dos alunos, dentro de uma avaliação psicométrica (MENDES, 2005).

Uma característica dos problemas matemáticos é que a resposta de um estudante poder ser classificada como certa ou errada e, mesmo quando é possível subdividir em soluções parciais, as respostas a elas ainda são do tipo certo ou errado (RICO, 1998). Colocando o foco de atenção nas respostas incorretas, identifica-se o erro como uma evidência da falta ou deficiência de um conhecimento, método ou processo, que leva, frente a determinada situação-problema, o aluno a responder incorretamente, sendo essa a premissa base para o desenvolvimento da presente pesquisa.

Entende-se que os erros são parte da produção dos alunos durante a aprendizagem da matemática e podem contribuir para o processo de ensino-aprendizagem (BORASI, 1996; CURY, 2003; REZENDE, 2003; RICO, 1998), pois, ao cometer um erro, o aluno expressa a incompletude do seu conhecimento, permitindo a interferência para levar à compreensão do que lhe falta.

Logo, o erro é parte essencial do processo de aprendizagem, pois o conhecimento é a construção de novos saberes, que tomam como base conhecimentos anteriores. No transcorrer

da sua formação, a formalização e a sistematização equivocada do conhecimento podem levar o aluno a incorrer em erros, por inferências inadequadas, baseadas nesses conhecimentos *a priori* ou pela falta de compreensão dos novos conhecimentos, seja pela ação pedagógica do professor ou pelas dificuldades intrínsecas da disciplina (CABRAL; BALDINO, 2008; RICO, 1998).

Segundo Rico (RICO, 1998), a falibilidade do conhecimento humano, individual ou coletiva, está na capacidade de considerar conceitos e procedimentos desenvolvidos inadequadamente como verdadeiros, incluindo ideias contraditórias, interpretações e justificações falsas.

Os erros não aparecem por mero acaso; eles surgem baseados em um marco conceitual consistente e fundamentado nos conhecimentos *a priori*, associados ao pensamento lógico e à intuição do indivíduo sobre o assunto, que utiliza de uma lógica empirista. Para a maioria dos pesquisadores, o erro não é uma ação acidental, mas algo que surge a partir de estratégias e regras pessoais empregadas na resolução de problemas e baseadas nas suas experiências particulares, interpretações e conhecimentos matemáticos iniciais (BORASI, 1996; CURY, 2003; REZENDE, 2003; RICO, 1998). Desse modo, a maioria dos erros é extremamente persistente, pois reflete o conhecimento do aluno sobre um conceito.

No entanto, existem os erros que ocorrem por azar ou por distração. Esses são menos persistentes, pois não refletem o conhecimento real e inadequado do estudante.

Resultados importantes encontram-se na regularidade dos erros ou padrões consistentes dos erros. De forma individual, tem-se um padrão quando o sujeito mostra o mesmo erro ao realizar atividades ou problemas matemáticos similares; em nível coletivo, o padrão se revela quando se tem pessoas diferentes cometendo os mesmos erros em certas etapas do desenvolvimento da aprendizagem.

Brousseau, Werner e Davis (1986, p. 208) chamam a atenção para algumas características do erros nas produções dos estudantes:

- os erros dos alunos são, muitas vezes, o resultado de algum procedimento sistemático que contém uma falha, sendo utilizado frequentemente e de maneira consistente;
- os alunos muitas vezes, têm conceitos errados sobre aspectos fundamentais da matemática;
- a observação do aluno e do professor mostra que o primeiro, frequentemente, usa procedimentos falhos e possui conceitos errôneos, que não são reconhecidos pelo professor;



- os estudantes, com frequência, inventam seus próprios métodos e, até mesmo, ignoram o método apresentado pelo professor.

Os estudos sobre os erros, com foco nas regularidades e padrões, acabam por realizar classificações e estabelecer taxonomias para os tipos ou causas dos erros. Os estudos de Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987) usaram como referência o conhecimento matemático e os estudos de Radatz (1979), o processamento da informação.

O método de processamento da informação supõe que os problemas matemáticos podem ser decompostos em vários componentes de processamento e, como essas dificuldades são de natureza interna, é necessário utilizar métodos indiretos de observação. Entre estes, se encontra a análise dos erros dos sujeitos e suas produções matemáticas (RICO, 1998)

Com a finalidade de agrupar por características comuns, apresentam-se as categorizações dos modelos cognitivos dos padrões de erros, com base em mecanismos de processamento da informação, segundo Radatz (1979):

- erros devidos a problemas de linguagem – para muitos alunos, os conceitos matemáticos, os símbolos e o vocabulário específico da matemática são como uma língua estrangeira e a incompreensão do texto matemático, devido a erros de tradução da linguagem natural para a formal, é, frequentemente, a fonte dos erros;
- erros devidos a dificuldades na obtenção de informação espacial – muitos erros decorrem das dificuldades na obtenção da informação visual ou espacial contida nos enunciados e diagramas para a execução de uma atividade matemática, devido à falta de imaginação e pensamento espacial dos alunos;
- erros devidos à deficiência no domínio de habilidades, fatos e conceitos prévios – estes erros são decorrentes da falta ou deficiência no conhecimento necessário para realização da atividade matemática. Dentre os conhecimentos prévios, tem-se os procedimentos incorretos, o desconhecimento de algoritmos e as informações básicas insuficientes em relação ao conteúdo abordado;
- erros devidos a associações incorretas e rigidez do pensamento – a flexibilidade inadequada para decodificar novas informações significa que a experiência com um problema leva à rigidez do pensamento, ou seja, o aluno perpetua o processo e as operações, mesmo quando há a troca da atividade. Pippig (1975, apud RADATZ, 1980) distingue, nesta classe de erros, cinco tipos:
  - erros por preservação, quando predomina um único elemento de uma atividade ou problema;

- erros de associação, por interação incorreta entre os elementos únicos;
- erros de interferência, quando diferentes operações e procedimentos interferem um no outro, por estarem na mesma tarefa;
- erros de assimilação, que ocorrem quando o aluno não entende corretamente a atividade, podendo ser resultantes da falta de atenção e concentração;
- erros de transferência negativa de tarefas anteriores, que ocorrem depois de executar um conjunto de atividades nas quais o mesmo procedimento continua sendo utilizado, mesmo com a mudança da atividade.

Em uma investigação realizada por Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987), foi realizada uma categorização baseada mais no conhecimento matemático do que no processamento da informação, apresentando seis categorias descritivas para classificação dos erros:

- dados incorretamente utilizados – erro que ocorre quando há discrepâncias entre a informação fornecida e como o aluno trata e usa a informação. Considera-se, nesta classe de erros, o uso de dados não informados, a negligência de informação necessária e a inclusão de outras informações para compensação, atribuição de significado inconsistente à informação dada e uso do valor de uma variável no lugar de outra;
- interpretação incorreta da linguagem – quando os erros são decorrentes da tradução incorreta de uma linguagem para outra dos dados matemáticos descritos ou enunciados. Os elementos característicos desta classe de erros são a conversão incorreta da linguagem natural em termos matemáticos, o uso para um conceito matemático da simbologia associada por convenção a outro conceito e aplicando os métodos ou procedimentos dessa simbologia associada a esse outro conceito, para a resolução do problema, a interpretação incorreta de símbolos gráficos em termos matemáticos e vice-versa;
- inferências logicamente inválidas – incluem os erros decorrentes de inferências inválidas não de um conteúdo específico, que se caracterizam pelo uso incorreto do método da afirmação e da negação, Modus Ponens e Tollens respectivamente; inferências lógicas não justificadas; uso e interpretação inadequada dos quantificadores universal ( $\forall$ ) e existencial ( $\exists$ );
- teoremas ou definições distorcidas – nesta categoria incluem-se os erros provenientes de uma distorção ou generalização equivocada de uma regra, teorema ou definição. Caracteriza-se pela aplicação de teorema correto, mas sem as condições necessárias;

aplicação da propriedade distributiva a operações não distributivas; uso parcial de definição, teorema ou fórmula;

- falta de verificação da solução – nesta categoria, os erros estão associados ao resultado final, que não atende ao solicitado, mesmo que todos os passos tenham sido corretamente executados, ou seja, o desenvolvimento não apresenta um erro matemático, mas o resultado não é solução para o enunciado;
- erros técnicos – esta categoria inclui erros na extração de dados de tabelas, erros em manipulações algébricas elementares, erros na ordem das operações e omissão de parênteses.

Apesar de Radatz e Hadar et al. tomarem como base diferentes abordagens para a suas classificações, existe uma superposição entre as mesmas. Para Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987), os erros na sua categoria *inferência logicamente inválida* são devidos à associação incorreta ou a *rigidez de pensamento* (Radatz) ou devidos a *dados incorretamente utilizados* (Radatz). Já os *erros devidos à deficiência no domínio de habilidades, fatos e conceitos prévios* de Radatz podem ser vistos como *teorema ou definição distorcida* ou *erro técnico* de Hadar et al.

Apesar das dificuldades na classificação, as categorizações fornecem informações básicas e importantes para as pesquisas em aprendizagem matemática, assim como auxiliam o professor na sua prática, ao compreender e prever determinados erros persistentes do coletivo, permitindo o planejamento de plano de ação voltado a minorar os problemas de aprendizagem dos tópicos associados.

Apresenta-se, na Figura 17, a pesquisa realizada no catálogo de teses e dissertações da Capes sobre a temática *análise de erro e o processo de aprendizagem em Cálculo Diferencial e Integral*, no período de 2000 a 2017. Observa-se que o tema ainda é pouco explorado, foram encontradas sete teses de doutorado que apresentam como temática a análise dos erros cometidos pelos estudantes no processo de aprendizagem da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral.

Figura 17 - Quadro com as pesquisas brasileiras no período de 2000 a 2017 sobre análise de erros e o processo de aprendizagem da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral

Autor(es)	Ano	Nível de Ensino	Conteúdo
Cavasotto, Marcelo	2010	ES	Dificuldades na Aprendizagem de Cálculo: o que os erros cometidos pelos alunos podem informar
Filho, Albano Dias Pereira	2012	ES	Análise de Erros produzidos por estudantes de um curso de Engenharia Civil na Disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I
Vieira, Aldo Freitas	2013	ES	Ensino do Cálculo Diferencial e Integral: das técnicas ao <i>humans-with-media</i>
Moncao, Fabricio Figueredo.	2015	ES	Uma Leitura dos Erros Cometidos por Estudantes na Resolução de Questões do Cálculo Diferencial e Integral
Muller, Thaisa Jacintho	2015	ES	Objetos de aprendizagem multimodais e ensino de cálculo : uma proposta baseada em análise de erros
Carvalho, Heloisa de Andrade	2016	ES	A análise dos erros dos alunos em Cálculo I como estratégia de ensino
Nascimento, Patricia Cacho do	2017	ES	Um Estudo sobre os Erros dos alunos em Cálculo Diferencial e Integral I em um Curso de Engenharia Civil

Fonte: Catálogo de teses e dissertações – Capes<sup>14</sup>, 2018.

Com foco na construção do conhecimento, e não somente nas classificações e eliminação do erro, as pesquisas de Borasi (BORASI, 1988, 1989) apresentam uma mudança do paradigma da remediação do erro para uma abordagem da *análise de erros*, em uma estratégia construtivista, que a autora denomina como *using errors as springboards for inquiry* (usando os erros como trampolins para o inquérito<sup>15</sup>), engajando o estudante nesse processo.

Para Borasi (1989), dentro do contexto de aprendizagem, pode-se explorar os erros como *trampolins*, em relação aos objetivos educacionais, não os reduzindo ao mero domínio de fatos e habilidades matemáticas. Em seu trabalho, a autora propõe a estratégia de uso construtivo dos erros, em uma combinação entre os níveis do discurso matemático (executando uma atividade matemática, aprendendo um conteúdo técnico, aprendendo sobre a natureza da matemática<sup>16</sup>) e a aprendizagem (remediação, construção do conhecimento, aberto a desafios<sup>17</sup>). Para Cury:

...a análise de erros é uma abordagem de pesquisa com fundamentações teóricas variadas, objetivos distintos e participação de todos os níveis de ensino nas amostras, mas também é uma metodologia de ensino, podendo ser empregada quando se detecta dificuldades na aprendizagem dos alunos e se quer explorá-las em sala de aula (CURY, 2007, p. 91).

Essa abordagem estratégica para a aprendizagem da matemática é semelhante à *leitura positiva* de Garnica (2006), defendida no Modelo Teórico dos Campos Semânticos, que sustenta a ideia de que é partir da fala do aluno, do modo como ele argumenta sobre o que fez

<sup>14</sup> Disponível em: <<http://catalogodeteses.capes.gov.br>> Acesso em nov. 2018

<sup>15</sup> Inquérito – ações para apurar a verdade dos fatos.

<sup>16</sup> Tradução nossa.

<sup>17</sup> Quando os erros motivam questionamentos e a busca por outros conhecimentos e atividades matemáticas.

ou sobre o que pensa quando resolve algum problema ou discute algum conceito, identificando o seu saber e como pensa, que devem ser elaboradas estratégias para a aprendizagem.

Se, por um lado, se apresenta a *leitura positiva*, há também a *leitura pela falta*, na qual se identifica:

...o que falta ao aluno: falta aprender conteúdos anteriores, falta a ele exercitar-se mais, faltam a ele certos conceitos, falta aprender a operacionalizar certos conceitos ou encaminhar melhor certas operacionalizações, falta a ele ler mais cuidadosamente o problema... (GARNICA, 2006).

A ideia da *leitura positiva* é mais claramente aplicada nas situações presenciais, quando é possível conduzir um diálogo em uma espécie de maiêutica, em um processo de aprendizagem a partir da reflexão sobre as respostas a perguntas simples, guiadas pelo professor, em processo semelhante às atividades propostas por Borasi em seus trabalhos.

A *leitura positiva*, como processo de ensino-aprendizagem, é interessante na construção do conhecimento, mas, para o objetivo da pesquisa, a *leitura pela falta* é mais adequada pois, dentro da perspectiva da autogestão do conhecimento, a atenção volta-se para os aspectos e causas que levam ao não desenvolvimento dos objetivos esperados.

Desse modo, ao identificar as dificuldades do estudante, busca-se fornecer informação sobre o seu conhecimento em relação ao tema que é objeto de estudo e, concordando com Pinto (2000), tornar o erro um objeto observável ao aluno, de maneira que ele possa interagir e, eventualmente, superá-lo.

Para se ter acesso à informação sobre o conhecimento do estudante sobre um tema e suas dificuldades associadas, é necessário que este externe, na forma de uma produção escrita, falada em outra forma de expressão, para que seja realizada uma análise e se atribua um valor de juízo sobre essa informação. Para a pesquisa realizada, utilizou-se uma ferramenta de avaliação computacional, buscando acessar o conhecimento e as dificuldades associadas. O próximo capítulo apresenta a avaliação dentro do contexto de ensino-aprendizagem.

### 3 AVALIAÇÃO

Neste capítulo, é apresentado o conceito de avaliação dentro do processo de ensino-aprendizagem, a construção de itens de avaliação e as características de fidedignidade e confiabilidade do processo de avaliação. Além disso, são apresentados os tipos de itens para uma avaliação e as melhores práticas para a construção deles.

A concepção de ensino-aprendizagem muda e adquire algumas particularidades, de acordo com as teorias pedagógicas que permeiam as ações do professor. A parte comum das metodologias está no seu objetivo, no qual se espera que o aluno desenvolva as competências definidas nos currículos.

As comprovações do desenvolvimento dessas capacidades e competências ocorrem pelas diversas avaliações pelas quais o estudante é submetido, durante o período de sua formação, nas diversas disciplinas cursadas. Existem várias maneiras de verificar se os objetivos foram atingidos, durante ou no término do processo de aprendizagem, podendo os interessados se valerem do interrogatório oral, das discussões, da observação do indivíduo e da sua produção material, como a construção de maquetes, a execução de uma obra musical, a produção literária ou escrita, a resolução de um problema, etc. (DEPRESBITERIS; TAVARES, 2009).

Para que o aceite seja dado, é necessário atribuir um valor de juízo às capacidades de realização dos estudantes, verificando se a produção do indivíduo atende aos critérios estabelecidos de acordo com os objetivos instrucionais.

A avaliação da aprendizagem, segundo Luckesi (2000), se faz presente na vida de todos, sendo um recurso pedagógico útil e necessário para auxiliar o educador e o educando na construção de si mesmo.

Scriven (1973 apud DEPRESBITERIS; TAVARES, 1989) apresenta as três funções principais para a avaliação: diagnóstica, formativa e somativa. Segundo o autor, a avaliação diagnóstica objetiva verificar a presença ou não de conhecimentos prévios dos alunos. A avaliação formativa tem a função reguladora do processo de aprendizagem, permitindo guiar e otimizar aprendizagens em andamento, mostrando quais aspectos devem ser melhorados. Pela sua característica, essa avaliação é indissociável do processo de aprendizagem (PERRENOUD, 1999b), ocorrendo em vários momentos e de várias maneiras, não sendo necessariamente uma avaliação formal.

Diferente das anteriores, a avaliação somativa geralmente ocorre ao término do processo de ensino e é apresentada de maneira formal e de acordo com os objetivos definidos,

visando verificar o conjunto de conhecimentos desenvolvidos. As avaliações são de caráter pedagógico e a avaliação somativa deve ser utilizada para o acompanhamento e orientação do aluno nas séries subsequentes, de maneira que as deficiências, caso se apresentem, possam ser superadas ou minimizadas (DEPRESBITERIS; TAVARES, 2009).

A avaliação somativa não deve ser utilizada como mero procedimento de estabelecer uma nota à aprendizagem do estudante. Luckesi (2000) ressalta a diferença entre avaliação e exame. O exame é excludente, não é construtivo, é utilizado para a classificação e seleção, enquanto que a avaliação é inclusiva, dinâmica e construtiva. A diferença também reside nos resultados das análises e nas respectivas ações decorrentes.

Nas avaliações os resultados podem ser qualitativos, quantitativos e até mesmo os dois. A relação entre as dimensões quantitativa e qualitativa, nas avaliações, causa certa confusão. Worthen (1982 apud DEPRESBITERIS; TAVARES, 1989) exemplifica as diferenças entre avaliações quantitativas e qualitativas com os resultados de um salto com varas. Um saltador executa um salto com uma altura cuja medida foi obtida por um instrumento adequado. Mas qual o significado de um salto com essa medida? Neste exemplo, se o salto é executado em uma prova de seleção para os Jogos Olímpicos, a avaliação é do tipo seletiva, com base na medida, de modo que, se o salto é superior ao mínimo, há o aceite; se é inferior, acarreta a exclusão. Logo, os juízes utilizam uma avaliação quantitativa com critérios absolutos.

A avaliação que utiliza somente a dimensão quantitativa pode ter a função classificatória, pois é possível ordenar os resultados dos examinados e, também, ter a função seletiva, com o aceite ou não destes examinados, com base em critérios estabelecidos e de acordo com os objetivos esperados. As avaliações do tipo seletivas são também denominadas “testes”.

Para o saltador e seu treinador, a avaliação é quantitativa e qualitativa, pois é pela análise do resultado medido que se qualifica o salto em excelente, bom, médio ou ruim, caso esteja muito perto do mínimo aceitável.

Nas situações de bom, médio e ruim, ações serão tomadas para que os resultados possam ser melhorados, pois o objetivo do saltador e seu treinador é a excelência. Luckesi (2000) afirma que o ato de avaliar implica dois processos articulados e indissociáveis: diagnosticar e decidir. Não é possível uma decisão sem diagnóstico, e um diagnóstico sem uma decisão é um processo abortado.

Assim como nos jogos e competições, os indivíduos também são avaliados em relação à sua aprendizagem quando submetidos a programas de ensino. Segundo Depresbiteris e Tavares (1989), dentro da atividade de ensino-aprendizagem, a avaliação é uma necessidade tanto para o professor quanto para o aluno. A avaliação permite que o professor seja capaz de

tomar decisões para as ações mais eficazes na orientação dos estudantes e, para o aluno, a avaliação permite verificar em que aspectos ele deve melhorar, durante seu processo de aprendizagem.

Em avaliações adequadas, primeiramente vem o processo de diagnosticar, que consiste na constatação da qualificação do objeto da avaliação, tendo por base suas propriedades específicas. A avaliação não é um ato neutro; é dinâmico e, depois de diagnosticar, implica na decisão de *o que fazer*. Dessa forma, o ato de avaliar não é um ato impositivo, mas um ato dialógico, inclusivo e construtivo (LUCKESI, 2000).

De acordo com Depresbiteris e Tavares (1989), para uma avaliação é importante: a definição de medidas e critérios para qualificar o desempenho do avaliado; determinar a abrangência desses critérios (relativos ou absolutos); coletar a informação relevante, por meio de instrumento adequado e aplicação do critério para qualificação do objeto avaliado.

A definição de critérios, ou padrão de comparação, tem de ser estabelecida com base no planejamento de ensino e na teoria pedagógica que o sustenta, pois ambos são importantes para a qualificação dos dados coletados. É essencial que a teoria, que dá suporte à prática pedagógica, esteja clara e presente no planejamento de ensino, incluindo os processos avaliativos (LUCKESI, 2000).

A prática pedagógica que valoriza a retenção da informação difere da prática que desenvolve a compreensão, a análise e aplicação dos conceitos, pois seus objetivos são distintos, assim como a informação a ser obtida pelos instrumentos de coleta. Enquanto a primeira tem um questionamento direto, e exige uma resposta objetiva e única, a outra apresenta uma situação contextualizada, que exige do estudante o uso das habilidades trabalhadas nos módulos de ensino<sup>18</sup>, podendo admitir respostas com base em hipóteses levantadas pelo próprio respondente (RABELO, 2013).

Considerando que as avaliações têm a intenção de qualificar a situação do estudante quanto à sua aprendizagem, a construção da ferramenta de avaliação é de suma importância, pois ela é parte integrante do processo de ensino-aprendizagem.

Como instrumento de qualificação do conhecimento, é importante que as questões de uma avaliação sigam o critério de máxima informação, ou seja, que os itens de avaliação sejam elaborados de maneira a fornecer a máxima e mais fidedigna informação sobre o conhecimento do respondente.

---

<sup>18</sup> Neste trabalho, módulo de ensino é definido como o espaço-tempo destinado ao processo de ensino-aprendizagem, para o desenvolvimento de determinadas competências ou habilidades.



### 3.1 ITENS DE AVALIAÇÃO

A elaboração de uma avaliação requer primeiramente que se defina *o que avaliar*, para que seja possível adotar as estratégias e os tipos de itens para avaliação, ou seja, as questões que serão apresentadas ao estudante. Para tal, é necessário que estejam claros os objetivos instrucionais propostos pelos módulos de ensino que compõem o currículo, assim como a metodologia a ser utilizada no desenvolvimento do processo planejado. Essas informações são organizadas na matriz de referência (BRASIL, 2010) que serviu como instrumento norteador para a construção dos itens de avaliação.

Analisando as produções docentes, em termos de itens para avaliação, Rabelo (2013) identifica três tipos básicos de questões: convencional, textualizada e contextualizada. O autor refere que há predominância do tipo convencional, que foca na capacidade de utilizar o conhecimento aprendido na reprodução de procedimentos rotineiros ou na identificação de dados e informações, seguido das questões textualizadas e, depois, as contextualizadas.

Rabelo (2013) afirma que as questões textualizadas são as que incluem textos desnecessários, pois a mesma poderia ser solucionada sem a leitura do mesmo. Esse tipo de questão teria a pretensão de ser uma questão contextualizada, que deveria fornecer informações essenciais para a resolução da situação-problema, mas que acaba por ter somente informações acessórias. Algumas vezes, esses textos acabam por criar contextos ficcionais, que se tornam completos absurdos em relação à realidade.

A contextualização possibilita descrever uma situação-problema de modo que se manifeste a competência ou habilidade a ser avaliada. O nível de dificuldade do item está associado ao contexto utilizado, pois quanto mais próximo está do cotidiano dos estudantes, mais fácil é o seu entendimento, enquanto que contextos técnico-científicos ou abstratos, que utilizam raciocínios mentais elaborados, têm um maior nível de complexidade:

... desse modo, contextualizar torna-se uma estratégia fundamental para a construção de cenários de significação de conteúdos e enriquecimento da situação-problema a ser explorada, permitindo ao estudante uma melhor compreensão dos conteúdos nela envolvidos e sua inter-relação com diversas áreas de conhecimento (RABELO, 2013).

Como instrumento de coleta de dados, a avaliação pode ser realizada na forma de um único ou de vários itens, de maneira a identificar as competências ou habilidades desenvolvidas durante o processo de aprendizagem do estudante.

Um item de avaliação contextualizado deve ser composto de um texto, preferencialmente recorte de situação real, que descreve a situação-problema dentro da realidade do respondente, e um enunciado com um objetivo claro, de maneira que não haja

dúvidas quanto às informações, procedimentos ou ações requeridas como resposta ou ambiguidade à interpretação (BRASIL, 2010).

### 3.2 CONSTRUÇÃO DOS ITENS DE AVALIAÇÃO

Os documentos legais que regulam os diversos níveis de educação do Brasil apresentam os conceitos de competência, habilidade e conhecimento que, por sua vez, servem de orientação para a elaboração dos currículos escolares. Desse modo, os instrumentos de avaliação, articulados com o projeto pedagógico e com o planejamento do ensino, devem ser elaborados com questões que permitam avaliar o conhecimento e o desenvolvimento de determinada habilidade necessária para o desenvolvimento de uma competência específica, preferencialmente em uma situação contextualizada dentro da realidade.

Sendo assim, o item de avaliação deve ser composto de um texto de contextualização, que caracterizará uma situação-problema a ser compreendida e interpretada, permitindo demonstrar as competências a serem avaliadas, seguido do enunciado que apresenta, de maneira clara e objetiva, as ações requeridas pelo respondente, seja a identificação de um fato ou informação, seja a execução de um procedimento ou o uso de uma habilidade desenvolvida durante a aprendizagem.

Deve-se, então, selecionar o tipo de resposta mais adequado para qualificar os conhecimentos que serão avaliados. Desse modo, os itens de avaliação diferem entre si, mais comumente, pelos seus tipos de respostas aceitas. As formas mais comuns de respostas dos itens são: múltipla escolha, certo/errado, resposta fechada, resposta curta aberta, dissertativa (redação).

No desenvolvimento de um item de avaliação, o texto base é a primeira parte a ser construída, após a definição do que será avaliado, com base na matriz de referência e na metodologia a ser utilizada. Preferencialmente, selecionam-se textos de fontes primárias, de autoria explícita, que sejam curtos e integrais, com uma linguagem simples e adequada aos estudantes. O texto deve ter coerência com o enunciado e as respostas que serão apresentadas ao estudante, sendo estruturado de maneira integrada com o todo, que se apresenta como uma única situação-problema a ser solucionada pelo estudante (RABELO, 2013).

O texto base deve representar um cenário da realidade, podendo ser um texto propriamente dito, um gráfico, uma figura, esquema, um estudo de caso, um simulacro. Deve conter as informações necessárias à compreensão da situação-problema, permitindo ao respondente utilizar a habilidade ou competência a ser avaliada.

O texto não deve conter informações desnecessárias ao contexto da situação ou que causem confusão na interpretação. Além disso, não deve favorecer determinado grupo de respondentes – como é o caso de textos técnicos, que podem facilitar o acerto para os que já possuem conhecimento específico sobre o assunto. No caso das questões de múltipla escolha e certo/errado, o texto deve possibilitar a elaboração dos *distratores*, e não apresentar respostas que induzam o estudante ao erro.

O *distrator* é uma resposta errada, mas plausível, e relacionada com um algum nível de conhecimento, de modo que o respondente com baixo desempenho a selecione. A resposta com erro induzido é aquela que pode ser selecionada por um respondente com habilidades adequadas, pois ela apresenta a resposta textualmente equivocada, aparentando ser a correta, induzindo o respondente habilidoso ao erro (BRASIL, 2010).

O texto original pode sofrer recortes ou ser adaptado, se assim for necessário, como é o caso de situações-problema que requeiram cálculos complexos e não seja permitido o uso de calculadoras. Neste caso, além de informar a fonte de referência, deve-se indicar a adaptação (BRASIL, 2010).

Depois da definição do texto base, elabora-se o enunciado, para que não haja problemas de interpretação, com uma escrita impessoal, clara, sem erudição, precisa e objetiva quanto à ação que será exigida como resposta. Para as questões de múltipla escolha, certo/errado e resposta fechada, o enunciado não pode ser passível de argumentação ou considerações de cenário dentro da situação-problema, pois a mesma poderá aceitar outras respostas corretas, como é o caso das questões de resposta curta aberta e dissertativa (redação).

A escolha de um tipo de item está associada à ação definida no enunciado. As respostas curtas abertas e dissertativas são mais utilizadas para identificar o grau de domínio sobre procedimentos que exigem respostas descritivas. Também são utilizadas quando as respostas podem ser elaboradas na forma de diagramas organizacionais, que são passíveis de variações na organização da apresentação das ideias e conceitos, mas que são consideradas corretas mesmo com diferentes formatações.

Quando as questões exigem respostas objetivas como números, frases ou palavras, utilizam-se questões do tipo múltipla opção, certo/errado e fechada, por serem mais fáceis de corrigir, conferindo agilidade no processo. Esses tipos de itens são os mais utilizados em avaliações de larga escala.

As questões do tipo objetivas são as mais utilizadas em sistemas informatizados de avaliação, pois é possível a correção sem a intervenção humana, conferindo agilidade ao processo. Além disso, em sistemas informatizados, as respostas podem ser utilizadas por

algoritmos de seleção de itens, como é o caso dos Testes Adaptativos Computacionais, permitindo, assim, a customização das avaliações, apresentando itens com dificuldades diferenciadas e de acordo com a performance do respondente.

### 3.3 FIDEDIGNIDADE E CONFIABILIDADE DA AVALIAÇÃO

Para a construção de avaliações, a seleção do tipo de item deve considerar a fidedignidade da informação, ou seja, a veracidade da resposta em relação à aprendizagem do respondente. Dessa maneira, deve-se levar em consideração as probabilidades de acerto casual do item, como é o caso das respostas certo/errado, que têm uma probabilidade de acerto de 50% por um estudante de baixo desempenho, e 20% nas respostas de múltipla opção, com uma opção certa dentre cinco. Assim, quanto menor as chances de acerto casual pelo respondente, maior será a veracidade da informação associada ao acerto da mesma.

A fidedignidade das informações obtidas pelos itens confere confiabilidade ao instrumento de coleta de dados, permitindo uma melhor inferência sobre proficiência do estudante em determinado campo do conhecimento, assim como o grau de desenvolvimento de uma habilidade ou competência durante a aprendizagem.

O uso de mais de um item para avaliar um mesmo objeto de conhecimento ou habilidade aumenta a qualidade da informação sobre o respondente em relação ao que se está avaliando, principalmente quando há a possibilidade de acerto casual do item. Os tipos mais comuns de itens utilizados em sistemas de avaliação computacional são apresentados na próxima subseção.

### 3.4 ITEM DE MÚLTIPLA ESCOLHA

Para esta e as demais subseções, foram estudados os guias do INEP para elaboração e revisão de itens (BRASIL, 2010, 2011) e o livro da Coleção PROFMAT, editado pela Sociedade Brasileira de Matemática, de Mauro Luiz Rabelo (2013): *Avaliação Educacional: Fundamentos, Metodologias e Aplicações no Contexto Brasileiro*. A seguir, apresenta-se uma síntese com recomendações para a elaboração de itens de múltipla escolha.

O item de múltipla escolha requer como resposta a escolha de uma única opção dentre as várias apresentadas. A opção correta deve ser única dentre as demais, que devem ser indubitavelmente incorretas, mas plausíveis. As respostas erradas, denominadas *distratores*, devem fazer parte do contexto, não sendo algo absurdo, mas uma resposta plausível para

aqueles que não desenvolveram a competência ou habilidade que está sendo avaliada (RABELO, 2013).

Caso o *distrator* retrate uma situação impossível para o respondente de baixo desempenho, de maneira que ele não seja selecionado, então ele não cumpre seu papel, aumentando a probabilidade de acerto casual e até mesmo possibilitando que a resposta correta seja identificada, prejudicando a coleta de informação sobre o desenvolvimento da aprendizagem do respondente.

Assim como o *distrator* não deve ser uma resposta não plausível para os respondentes de baixo desempenho, ele também não deve ser uma resposta com um atrativo para os respondentes de bom desempenho (RABELO, 2013). Tais opções de resposta são prejudiciais na qualificação da aprendizagem dos estudantes.

Nos itens de múltipla escolha, apresenta-se algumas recomendações (RABELO, 2013) quanto ao enunciado e à organização das opções de resposta, com a intenção de não evidenciar nenhuma delas:

- apresentar as respostas numéricas em ordem crescente ou decrescente, sem discrepância acentuada de valores, para que nenhuma resposta seja visualmente mais atraente que as outras, evidenciando a resposta correta ou as erradas, o que facilita a identificação da correta por exclusão;
- apresentar em ordem cronológica crescente ou decrescente, no caso de datas;
- construir as respostas textuais com extensão e estruturas semelhantes, não sendo possível utilizar a forma trapezoidal;
- organizar as opções em ordem alfabética, mas sempre dando preferência à ordenação por tamanho;
- obedecer ao tempo verbal e à forma gramatical do enunciado nas opções;
- manter o paralelismo sintático na apresentação das opções, ou seja, todas iniciando por verbo, substantivo ou artigo;
- redigir as opções de maneira homogênea, isto é, as respostas devem formar um conjunto equilibrado de sinais, métodos, exemplos, quantidades de termos, figuras, etc.
- considerar o balanceamento das respostas, isto é, o número de respostas certas por opção, em relação ao total de itens elaborados;

- procurar, sempre que possível, redigir os enunciados e opções na forma afirmativa, evitando que a compreensão e solução do problema seja prejudicado por um erro lógico de ajuste do comando;
- evitar formulações do tipo “é correto afirmar que” ou “a afirmação correta é”. O enunciado deve ser claro na ação do respondente, mas através do questionamento sobre o objeto de conhecimento que se procura avaliar;
- considerar o tempo de quatro minutos para a solução de um item e, assim, evitar textos base, enunciados e respostas textuais extensas;
- não formular opções de respostas encadeadas, pois os *distratores* não podem conter informações que auxiliem na identificação do caráter, certo ou errado, das demais opções;
- levar em consideração as condições de execução da avaliação e fazer as adaptações necessárias, como é o caso de cálculos complexos sem o uso da calculadora;
- não utilizar nomes fictícios, jocosos ou situações controversas com nomes de pessoas públicas;
- não fazer propaganda comercial, citando marcas de produtos, ou propaganda política;
- evitar respostas aparentemente repetidas, com diferença somente em conectivos lógicos e armadilhas semânticas como apenas, somente se, nunca, jamais, exclusivamente, sempre, totalmente, todo, tudo, pouco, nada, nenhum, e outros desse tipo, pois o estudante pode considerar como incorreta por conter algum desses termos;
- evitar o uso de prefixos de negação como “in” ou a palavra “não” para tornar falsa uma afirmação, prejudicando, assim, a plausibilidade da resposta.

Os itens de múltipla escolha são tipificados em complementação simples, resposta única, interpretação, resposta múltipla e asserção-razão. A seguir, apresentam-se explicação e exemplos dos tipos de itens de múltipla escolha.

#### **3.4.1 Item de múltipla escolha tipo complementação simples**

O item de múltipla escolha tipo complementação simples ou afirmação incompleta consiste de um enunciado redigido na forma de uma frase afirmativa, de maneira que uma das opções completa e torna verdadeira a sentença. Esse tipo de item não costuma se apresentar como uma situação-problema a ser solucionada pelo estudante. A Figura 18 apresenta um exemplo de um item na forma de complementação simples.

Figura 18 - Item de múltipla escolha tipo complementação simples

<p>Considerando a sequência {2,3,5,7,11,13} o próximo número será:</p> <p>a) 15</p> <p>b) 17</p> <p>c) 19</p> <p>d) 21</p> <p>e) 23</p>
---

Fonte: Elaborado pelo autor.

### 3.4.2 Item de múltipla escolha tipo resposta única

O tipo resposta única, Figura 19, tem a estrutura parecida com o item de complementação simples, que também não se apresenta como uma situação-problema. A diferença está no enunciado apresentado na forma de pergunta, tendo as opções como resposta. O exemplo apresenta o mesmo problema com a alteração do enunciado.

Figura 19 - Item de múltipla escolha tipo resposta única

<p>Considerando a sequência {2,3,5,7,11,13} qual será o próximo número?</p> <p>a) 15</p> <p>b) 17</p> <p>c) 19</p> <p>d) 21</p> <p>e) 23</p>
--

Fonte: Elaborado pelo autor.

### 3.4.3 Item de múltipla escolha tipo interpretação

O item de múltipla escolha tipo interpretação é o modelo empregado no Exame Nacional do Ensino Médio, ENEM. O item é apresentado com um texto base que descreve uma situação-problema contextualizada na realidade, de maneira que o estudante precisa organizar as ideias, dados e orientações para resolvê-lo. Esse tipo de item possibilita verificar o desenvolvimento de determinada competência, pois o estudante necessita mobilizar, articular e utilizar diversos recursos e conhecimentos para solucionar o problema. O enunciado pode ser apresentado na forma de uma frase incompleta ou uma pergunta, mas que difere dos tipos anteriores por estar contextualizado em uma situação-problema.

O exemplo da Figura 20 foi aplicado no ENEM 2009 e avalia a ideia de proporcionalidade com os dados apresentados de maneira indireta, sendo necessária a identificação das relações, conversões de tempo e proporções envolvidas.

Figura 20 - Item de múltipla escolha tipo interpretação

Os calendários usados pelos diferentes povos da Terra são muito variados. O calendário islâmico, por exemplo, é lunar, e nele cada mês tem sincronia com a fase da Lua. O calendário maia segue o ciclo de Vênus, com cerca de 584 dias, e cada 5 ciclos de Vênus corresponde a 8 anos e 365 dias da Terra.

MATSURA, Oscar. Calendários e o fluxo do tempo. Scientific American Brasil. Disponível em: <<http://www.uol.com.br>>. Acesso em: 14 out. 2008 (adaptado).

Quantos ciclos teria, em Vênus, um período terrestre de 48 anos?

- a) 30
- b) 40
- c) 73
- d) 240
- e) 384

Fonte: Adaptado do ENEM 2009<sup>19</sup>.

#### 3.4.4 Item de múltipla escolha tipo resposta múltipla

O item de múltipla escolha com resposta múltipla ou complementação múltipla, ou múltipla escolha complexa consiste de um texto base, um enunciado contendo de três a cinco afirmações e opções de respostas com alternativas sobre as afirmações, conforme a Figura 21. Para a solução desse tipo de item, o estudante tem de interpretar e qualificar as afirmações como falsas ou verdadeiras e depois identificar, entre as opções, qual está de acordo com as suas conclusões.

O exemplo a seguir foi aplicado no ENADE 2011 para os estudantes de Matemática, visando verificar o nível do conhecimento matemático do respondente relativo à Teoria dos Números. O mesmo não apresenta um texto base pelo seu conteúdo específico, mas apresenta as informações pertinentes em seu enunciado, de modo que o estudante consiga identificar a segunda e quarta afirmação como as corretas.

Nota-se que cada afirmação aparece duas vezes nas respostas, assim como a ordenação das respostas está organizada da menos extensa para a mais extensa, evitando que o aluno de baixo desempenho seja induzido a uma escolha lógica particular por exclusão ou atração de alguma das opções.

---

<sup>19</sup> Disponível em: <<http://www.clicrbs.com.br/pdf/7217487.pdf>> Acesso em fev. 2017



Figura 21 - Item de múltipla escolha tipo resposta múltipla

Considerando  $a, b$  e  $c$  pertencentes ao conjunto dos números naturais e representando por  $a|b$  a relação "*a divide b*", avalie as proposições abaixo.

- I. Se  $a|(b + c)$ , então  $a|b$  ou  $a|c$ .
- II. Se  $a|bc$  e  $\text{mdc}(a, b) = 1$ , então  $a|c$ .
- III. Se  $a$  não é primo e  $a|bc$ , então  $a|b$  ou  $a|c$ .
- IV. Se  $a|bc$  e  $\text{mdc}(a, b) = 1$ , então  $\text{mdc}(a, c) = 1$ .

É correto apenas o que se afirma em

- a) I
- b) II
- c) I e III
- d) II e IV
- e) III e IV

Fonte: Adaptado do ENADE 2011<sup>20</sup>

Nesses tipos de item, convém observar, em especial, além das anteriormente apresentadas, as seguintes recomendações:

- não combinar afirmações que sejam excludentes entre si;
- elaborar afirmações com o mesmo nível de complexidade para julgamento;
- fazer o balanceamento das afirmações nas opções de resposta;
- apresentar afirmações de estrutura simples e textos que não demandem muito tempo de leitura.

As recomendações têm a intenção de evitar que o respondente procure a resposta correta por eliminação, sem mobilizar os recursos necessários e que são avaliados no item apresentado.

### 3.4.5 Asserção-razão

No item de múltipla escolha tipo asserção-razão ou análise de relações, o enunciado é composto de duas proposições ligadas pela palavra *porque*, estabelecendo uma relação causal entre as duas, de maneira que a segunda justifica ou constitui razão da primeira.

O item da Figura 22 mostra a estrutura de um item aplicado no ENADE 2014 com as duas proposições verdadeiras, mas sem que a segunda seja justificativa da primeira.

<sup>20</sup> Disponível em: < <http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos3> > Acesso em fev. 2017

Figura 22 - Item de múltipla escolha tipo asserção-razão

O conjunto  $M_2(\mathbb{Z})$  é formado pelas matrizes quadradas de ordem 2 com entradas inteiras. Esse conjunto é fechado sob as operações usuais de soma e multiplicação de matrizes, uma vez que as entradas das matrizes resultantes da soma e da multiplicação são números inteiros.

Com relação à estrutura algébrica desse conjunto com as operações descritas, avalie as seguintes asserções e a relação proposta entre elas.

- I. O conjunto  $M_2(\mathbb{Z})$ , munido das operações usuais de soma e multiplicação, forma um anel.

PORQUE

- II. O conjunto  $M_2(\mathbb{Z})$ , munido da operação usual de soma de matrizes, forma um grupo e existe o elemento unidade dado pela matriz identidade de ordem 2.

A respeito dessas asserções, assinale a alternativa correta.

- a) As asserções I e II são proposições verdadeiras, e a II é uma justificativa correta da I.
- b) As asserções I e II são proposições verdadeiras, mas a II não é uma justificativa correta da I.
- c) A asserção I é uma proposição verdadeira, e a II é uma proposição falsa.
- d) A asserção I é uma proposição falsa, e a II é uma proposição verdadeira.
- e) O As asserções I e II são proposições falsas.

Fonte: Adaptado de ENADE 2014<sup>21</sup>.

### 3.5 ITEM CERTO/ERRADO

O item do tipo certo/errado apresenta uma série de sentenças assertivas. O estudante deve classificar cada uma como certa ou errada, de acordo com o contexto apresentado e fazendo uso das informações, procedimentos e habilidades avaliadas.

Para esse tipo de item, recomenda-se que não exista um padrão em relação à sequência e à quantidade de repostas certas e erradas. Preferencialmente, as sentenças devem ser construídas de maneira que sejam independentes entre si, evitando que uma sentença facilite ao respondente determinar a resposta de outra; evitar o uso de sentenças na forma negativa e duplo negativo, pois os alunos podem se confundir na interpretação, não sendo, assim, um instrumento adequado para qualificar a aprendizagem do estudante.

<sup>21</sup> Disponível em: < <http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos3> > Acesso em fev. 2017

Em relação a itens do tipo certo/errado, deve-se levar em conta que há sempre a possibilidade do acerto casual. Por isso, recomenda-se seu uso com certa restrição ou combinado com outros tipos de itens, para inferência mais precisa sobre a aprendizagem do respondente.

### 3.6 ITEM DE RESPOSTA FECHADA

O item de resposta fechada requer que o estudante apresente a resposta correta, podendo ser um valor, uma palavra ou expressão escrita, identificar um dado em uma tabela, uma palavra em um texto, o desenho de um gráfico, uma figura geométrica, um diagrama. Cabe ressaltar que a resposta é única, não sendo passível de variação.

A vantagem da resposta fechada é que o respondente deve apresentar a resposta correta sem a possibilidade de acerto casual, como ocorre nos itens do tipo certo/errado e de múltipla escolha. A desvantagem, em relação aos demais tipos de itens, é que, dependendo da resposta, a correção é mais trabalhosa e menos ágil. Para palavras únicas e números inteiros, as correções são mais fáceis de implementar em sistemas de avaliação computacional.

### 3.7 ITEM DE RESPOSTA CURTA ABERTA

O item de resposta curta aberta, ou item aberto, exige que o estudante apresente uma ou mais respostas dentre várias opções corretas, como é o caso de um procedimento cuja sequência de ações pode se diferenciar, mas que resulta no objetivo proposto, e a construção de grafos e diagramas, que diferem na sua organização gráfica, mas são isomorfos entre si.

Como a variedade de respostas aceitas como corretas pode ser grande, é necessário que seja fornecido aos avaliadores o padrão de respostas esperadas, com exemplos de situações corretas e parcialmente corretas, assim como a métrica a ser utilizada para valorar as respostas, quando assim for necessário.

No caso de avaliações de larga escala, quando há mais de um avaliador, recomenda-se um processo de dupla avaliação para cada resposta e, em caso de discrepância, a submissão para um terceiro avaliador.

### 3.8 ITEM DISSERTATIVO (REDAÇÃO)

O item dissertativo também é um item aberto, pois aceita várias respostas como sendo certas, mas, diferentemente do item da resposta curta aberta, a dissertação é uma resposta mais elaborada e extensa, que pode apresentar pontos de vista, considerações e argumentos, ou pode

descrever a resolução de um problema proposto. Deve-se deixar clara qual é a proposta ou objetivo no enunciado do item, para facilitar a definição de critérios e minimizar o número de respostas aceitas, o que agiliza as correções.

Finalizando esta seção, cabe registrar que as recomendações apresentadas têm a intenção de qualificar a produção de itens de avaliação no aspecto técnico, diminuindo os erros por falta de compreensão do enunciado ou das respostas e as chances de acerto casual, assim como fornece indicações para o processo de correção e acompanhamento do mesmo. Mas a principal característica de um item de avaliação qualificado é a obtenção da informação sobre aprendizagem relacionada ao objeto de avaliação.

Nesta pesquisa buscou-se identificar as dificuldades dos estudantes de cursos de engenharia e, para isto, desenvolveu-se um método implementável em um sistema de avaliação diagnóstica, com suporte computacional, para identificar quais aspectos os alunos têm dificuldade na resolução de problemas envolvendo derivadas.

## 4 ENCAMINHAMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo são tratados os aspectos metodológicos da pesquisa, com a apresentação do problema de pesquisa, o delineamento dos objetivos, gerais e específicos, e a metodologia da investigação.

Para a realização da pesquisa, foi desenvolvido um sistema de avaliação computacional, com a apresentação das funcionalidades no capítulo *Ambiente de Pesquisa*.

Apesar do sistema de avaliação ser imprescindível para a realização da pesquisa, o banco de questões é tanto ou mais importante, pois é ele que traz os itens observáveis à luz das análises e permite que inferências sejam realizadas. A construção das atividades, a organização da sequência de apresentação e o objeto de avaliação dos itens são apresentados no capítulo denominado *Ambiente de pesquisa*.

### 4.1 PROBLEMA DE PESQUISA

Dentre as competências do egresso de engenharia, identifica-se a resolução de problemas, uma competência ampla que pode envolver outras competências e habilidades, de acordo com a classe de problemas. A pesquisa centra os estudos na classe de problemas nos quais os conceitos de variabilidade/permanência estão presentes de modo que o estudante identifique as situações como sendo diferentes da classe de problemas que requerem somente o valor da função em um ponto, refletindo sobre a resolução do problema, adotando os métodos e procedimentos adequados, executando os cálculos necessários e usando reflexão e interpretação do resultado final, dentro do contexto de realidade que está inserido.

O conceito de variabilidade/permanência, estudado no Cálculo das derivadas, é composto e organizado como um conjunto de conceitos matemáticos que se relacionam entre si, com relações de dependências levando a situações nas quais a falta de domínio de um determinado conceito, considerado *a priori*, pode afetar a compreensão do conceito *a posteriori*.

A perspectiva na qual o conceito das Derivadas é mais amplo e *posteriori* a outros, sendo necessário para a resolução de uma classe de problemas de engenharia, leva à pergunta que impulsiona essa pesquisa: *como implementar<sup>22</sup> um sistema de avaliação diagnóstica que possibilite identificar as dificuldades para a resolução de problemas envolvendo o conceito de Derivadas em alunos de engenharia?*

---

<sup>22</sup> Implementar está sendo utilizado no sentido de desenvolver, aplicar e avaliar.

## 4.2 OBJETIVOS

Desenvolveu-se a pesquisa realizada dentro do contexto de uma aprendizagem efetiva, em um processo de autorregulação da aprendizagem, com o questionamento de como alunos de engenharia identificam suas dificuldades para a resolução de problemas envolvendo os conceitos de Derivadas. Na sequência, são apresentados os objetivos gerais e específicos.

### 4.2.1 Objetivo geral

Esta pesquisa tem por objetivo geral: *investigar um modelo de avaliação diagnóstica fundamentado na análise de erro, executável em um sistema de avaliação computacional que identifica as dificuldades dos alunos de engenharias na resolução de problemas envolvendo os conceitos de Derivadas.*

### 4.2.2 Objetivos específicos

Para alcançar o objetivo geral, foram definidos os seguintes objetivos específicos:

1. delinear uma matriz de referência, fundamentada nas competências e habilidades, de acordo com o perfil dos egressos de um curso de engenharia, conforme o parecer CNE/CES 1.362/2001 (BRASIL, 2001), e o conteúdo do Cálculo, com o tema Derivadas;
2. investigar itens de avaliação para compor o banco de questões do sistema de avaliação diagnóstica, fundamentado na teoria de erros;
3. implementar (desenvolver, aplicar e avaliar) o ADAC<sup>23</sup>, realizando um experimento com estudantes de graduação em engenharia, matriculados nas disciplinas de Cálculo, da Universidade Luterana do Brasil (ULBRA).

## 4.3 METODOLOGIA DA INVESTIGAÇÃO

A investigação proposta visou desenvolver e validar um sistema de avaliação diagnóstica, fundamentado na análise de erro, com suporte nas tecnologias digitais, capaz de identificar os conceitos, prévios ou os associados à epistemologia do Cálculo, que estudantes dos cursos de engenharia não dominam e que dificultam a resolução de problemas que envolvem Derivadas. Foi realizada uma pesquisa na perspectiva qualitativa, com enfoque de estudo de caso, uma vez que a mesma tem como foco a compreensão em profundidade dos fenômenos que acontecem no contexto investigado, segundo Triviños (2008).

---

<sup>23</sup> ADAC – Avaliação Diagnóstica Auxiliada por Computador, explicado no capítulo *Ambiente de Investigação*.

A abordagem qualitativa é caracterizada como um estudo detalhado de um fato, objeto, grupo de pessoas ou fenômenos da realidade, buscando informações fidedignas para explicar o significado e as características do contexto em que se encontra o objeto de pesquisa (OLIVEIRA, 2007). Considerou-se o enfoque qualitativo, embora tenha sido utilizado, nas análises, para melhor visualização e reflexão sobre os dados coletados, valores quantitativos, organizados em tabelas e com cálculo de percentuais, que permitiram uma análise mais fidedigna dos mesmos.

Optou-se pelo enfoque do estudo de caso porque a validação do sistema diagnóstico construído (ADAC) foi através de um experimento realizado com um grupo de estudantes matriculados nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral dos cursos de engenharias da Universidade Luterana do Brasil, que são: Engenharia Ambiental e Sanitária, Engenharia Civil, Engenharia Elétrica, Engenharia Mecânica, Engenharia Mecânica Automotiva, Engenharia Química, Engenharia de Produção. Seguindo a resolução nº 510, de 07 de abril de 2016, a pesquisa foi submetida ao Comitê de Ética em Pesquisa em Seres Humanos e aprovada pelo parecer 2.928.987.

Segundo Yin (2001, p. 33), “o estudo de caso como estratégia de pesquisa que compreende um método que abrange tudo com a lógica de planejamento incorporando abordagens específicas à coleta de dados e à análise de dados”. Para o autor (2001), esse método pode incluir tanto estudos de caso único quanto múltiplos, assim como abordagens quantitativas e qualitativas de pesquisa, abordando, nesse tipo de investigação, o estudo aprofundado de um fenômeno no seu contexto real.

Hernández, Fernández e Baptista (2006, apud OCHOA, 2011, p. 72) afirmam que “...um estudo de caso constitui um método para aprender a respeito de uma instância complexa, baseado em um entendimento compreensivo desta instância como um ‘todo’ e seu contexto, mediante dados e informações obtidos por descrições e análises extensivas” (Tradução nossa)<sup>24</sup>.

Gil (2009, p. 5) salienta que “...os estudos de caso envolvem etapas de formulação e delimitação do problema, da seleção da amostra, da determinação dos procedimentos para coleta e análise de dados, bem como dos modelos para sua interpretação”.

A partir de Yin (2001), Hernández, Fernández e Baptista (2006, apud OCHOA, 2011) e Gil (2009), entende-se que estudo de caso é um tipo de pesquisa que busca entender,

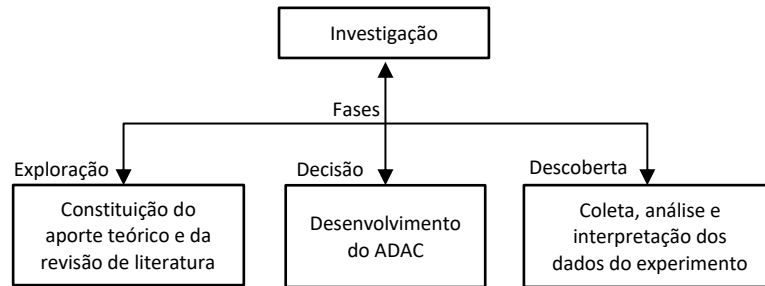
---

<sup>24</sup> Tradução nossa de: “...un estudio de caso constituye un método para aprender respecto a una instancia compleja, basado en un entendimiento comprehensivo de esta instancia como un ‘todo’ y su contexto, mediante datos e información obtenidos por descripciones y análisis extensivos”.

caracterizar uma determinada instância, a partir do delineamento das etapas de pesquisa: definição do problema, coleta e análise dos dados.

Esta investigação foi estruturada em três fases, seguindo Lüdke e André (1986), de acordo com a opção metodológica já referenciada, que são: a exploração, decisão e a descoberta. O esquema da Figura 23 apresenta uma síntese da condução da investigação.

Figura 23 – Síntese das etapas da investigação realizada



Fonte: Elaborado pelo autor.

A fase de exploração constituiu-se pelo desenvolvimento do referencial teórico desta investigação com as temáticas: competências matemáticas do engenheiro; avaliações da aprendizagem; análise dos erros. A segunda fase, de decisão, foi composta pelo estudo e pela escolha das melhores práticas para a definição do ambiente computacional, que deu suporte à avaliação a ser realizada por estudantes de engenharia, atendendo aos objetivos da pesquisa, que levou ao desenvolvimento da Avaliação Diagnóstica Auxiliada por Computador (ADAC), fundamentada no referencial teórico da primeira fase. A terceira fase, de descoberta, é a etapa da coleta de dados obtidos pelas avaliações realizadas por estudantes de engenharia da Ulbra e a análise dos dados visando validar o ADAC, identificando as dificuldades que estes estudantes possuem na resolução de problemas com a temática Derivadas.

Silva e Menezes (2001) afirmam que:

...a interpretação dos fenômenos e a atribuição de significados são básicas no processo de pesquisa qualitativa. Não requer o uso de métodos e técnicas estatísticas. O ambiente natural é a fonte direta para a coleta de dados e o pesquisador é o instrumento-chave. É descritiva. Os pesquisadores tendem a analisar seus dados indutivamente. O processo e seu significado são os focos principais da abordagem.

A presente pesquisa foi desenvolvida conforme as etapas descritas a seguir:

- levantamento bibliográfico, que, segundo Martins (2000, p. 28), “...trata-se de um estudo para conhecer as contribuições científicas sobre o tema, tendo como objetivo recolher, selecionar, analisar e interpretar as contribuições teóricas existentes sobre o fenômeno pesquisado”. O referencial teórico foi desenvolvido com as temáticas: competências e competências matemáticas para engenheiros, considerando que o



ADAC desenvolvido é para o público de estudantes de engenharia; análise de erros, que subsidiou o desenvolvimento dos itens (questões) do ADAC; avaliação, buscando identificar o tipo de avaliação conveniente para o ADAC a ser construído, bem como, os tipos de itens adequados à avaliação a ser desenvolvida.

- análise documental das diretrizes curriculares para cursos de engenharia e dos planos de ensino das disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral dos cursos de engenharia das universidades: Universidade Luterana do Brasil (Ulbra); Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (PUCRS); Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS); Universidade do Vale do Rio dos Sinos (Unisinos).
- implementação do sistema *Avaliação Diagnóstica Auxiliada por Computador* (ADAC), em um sistema Web, com as seguintes ações:
  - 1) desenvolvimento de uma matriz de referência com a identificação das competências matemáticas do egresso de engenharia para a resolução de problemas envolvendo os conceitos de Derivadas e os conceitos matemáticos necessários, como álgebra (ordem das operações, produtos notáveis, propriedade distributiva; operações com polinômios, frações algébricas), potenciação e radiciação (operações com potências e raízes e simplificação), equações não polinomiais, representação algébrica das funções notáveis (função linear, quadrática, cúbica, trigonométricas seno e cosseno, exponencial, logarítmica e raiz), representação algébrica das cônicas (círculo e elipse), conceito de variação, conceito de valor, característica de ponto crítico, cálculo das derivadas, aplicações das derivadas;
  - 2) articulação das competências importantes para o desenvolvimento dos conceitos com Derivadas na sequência de atividades encadeadas no ADAC, envolvendo compreensão do fenômeno, interpretação do problema, aplicação dos esquemas de resolução de um problema;
  - 3) desenvolvimento de uma sequência de problemas encadeados para elaboração da Avaliação Diagnóstica Auxiliada por Computador (ADAC), a partir da matriz de referência, articulando os conceitos de Derivadas e suas aplicações juntamente com os conceitos prévios importantes para o desenvolvimento da temática. O ADAC foi dividido em dois testes: *Resolução de problemas* (envolvendo resolução de problemas com os conceitos de Derivadas) e *Matemática* (envolvendo conhecimentos algébricos);
- teste piloto do ADAC, com cinco estudantes de engenharia que realizaram os dois testes. Os testes preliminares apresentaram problemas no encadeamento das questões,

levando a uma reformulação do sistema e a uma reorganização da sequência dos itens de avaliação;

- realização de uma experiência, utilizando o ADAC construído, com uma amostra de 43 alunos de cursos das disciplinas de Cálculo, efetivamente matriculados em cursos de engenharia da Universidade Luterana do Brasil, sendo que 34 responderam à avaliação *Resolução de problemas* e 30 responderam à avaliação *Matemática*. É importante salientar que 25 alunos responderam aos dois testes;
- análise dos dados coletados no experimento, com análise do banco de dados fornecido pelo ADAC e pelas entrevistas realizadas com os estudantes participantes do experimento, e questionário para coleta de informações gerais para determinar o perfil dos estudantes participantes do experimento e validação do ADAC (Apêndice A).

A confrontação das informações obtidas pelo ADAC com as entrevistas visou validar a capacidade do sistema de identificar as dificuldades dos participantes da pesquisa e, por meio da triangulação dos dados, encadear e contextualizar os resultados obtidos, para responder às seguintes questões:

- quais conceitos e competências, necessários para a resolução de problemas com a temática de Derivadas, trabalhados nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral nos cursos de Engenharias, não são devidamente compreendidos?
- As dificuldades que os estudantes participantes do experimento, alunos de engenharia da Universidade Luterana do Brasil, possuem em relação à resolução de problemas com a temática de Derivadas e suas aplicações ficam evidenciadas pelo ADAC desenvolvido?
- As tecnologias digitais auxiliam a identificação das dificuldades dos estudantes de engenharia relativas aos conceitos de Derivadas e a resolução de problemas com a temática referida, podendo ser utilizadas como um instrumento para a autoavaliação?

A seguir, realiza-se uma explanação de atividades com resolução de problemas com Derivadas, que fundamenta a organização da sequência dos itens de avaliação do ADAC.

#### 4.4 ATIVIDADES COM RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COM DERIVADAS

Schroeder e Lester (1989) categorizaram três classes os trabalhos e pesquisas que trabalham com resolução de problemas: a) ensino sobre resolução de problemas; b) para a resolução de problemas; e c) através da resolução de problemas. Na primeira classe, estão os trabalhos voltados para os modelos de resolução de problemas, como as etapas propostas por

George Polya e métodos semelhantes; na segunda classe, a aprendizagem dos conceitos matemáticos está fortemente relacionada com as capacidades para resolver os problemas; na terceira classe, a resolução de problemas não é o objetivo, mas o meio para a aprendizagem da matemática.

Independentemente do modelo de ensino para a resolução de problemas, o indivíduo que desenvolveu a capacidade ou a competência de resolver problemas de uma determinada natureza deve ser capaz de organizar seus esquemas e utilizá-los de modo racional para solucionar a mesma classe de situações que se apresenta.

Avaliações sobre a efetividade da aprendizagem têm seu foco na identificação e verificação do conhecimento, pela comprovação, no avaliado, da capacidade de acessar e utilizar fatos e conceitos, assim como o uso de métodos e processos adequados à situação dada. Nesta pesquisa, o objeto de observação são os erros dos alunos e, dados o caráter e o ambiente de pesquisa, os problemas foram selecionados e adaptados pela possibilidade de fragmentação em problemas menores, com o objetivo de identificar se ocorre um erro e em qual etapa da resolução do problema. O particionamento e os desdobramentos, que seguem da situação-problema original, são realizados em modelo análogo às etapas propostas por Polya para a resolução de problemas.

Segundo Polya (1946), primeiramente os problemas devem ser entendidos e avaliados quanto à possibilidade de resolvê-los, dadas as condições e informações disponíveis. Em seguida, deve-se estabelecer a conexão entre a situação identificada e os esquemas disponíveis para a resolução do mesmo, buscando, nos seus conhecimentos prévios, situações para a resolução de problemas com solução conhecida. Caso não haja solução que abarque o todo, deve-se particionar o problema, buscando soluções adequadas às partes. Depois de identificados os conhecimentos, métodos e procedimentos a serem utilizados, deve-se traçar a estratégia, buscando provar que está correta a solução. Por fim, é necessário verificar o resultado e, se possível, validá-lo, por meio de um método ou procedimento distinto do utilizado.

No desenvolvimento do ADAC, foram escolhidas três situações-problema envolvendo situações de valor e variação, que são: o projeto de uma montanha-russa, que utiliza duas funções para definir parte do seu traçado; a temperatura de um objeto em um congelador que tem sua porta aberta; a trajetória de uma bola chutada para a frente e para o alto.

Os problemas foram separados em questões que abordam conceitos de Derivadas, propondo situações para verificar se o estudante faz a distinção entre valoração direta da função e da função derivada, aplicação da derivada para identificar a compreensão das características de variação da função em um ponto e o significado da derivada segunda.

O trabalho realizado por Cury (2003) aponta que “a maioria dos problemas é decorrente da falta de pré-requisitos, especialmente quanto aos assuntos relacionados à álgebra do Ensino Fundamental e Médio”, como propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, simplificação de expressões algébricas, fatoração, produtos notáveis e resolução de equações polinomiais

As situações em que há necessidade de cálculos algébricos que envolvam simplificações das operações algébricas, da propriedade distributiva, simplificações de frações algébricas, potenciação e radiciação são tratadas em problemas em separado, em uma avaliação denominada *Matemática*.

Devido ao caráter da pesquisa e à necessidade de validação do ADAC, o experimento foi desenvolvido em duas etapas. Na primeira, foram realizadas as duas avaliações do ADAC, com orientações visando esclarecer a necessidade do participante responder com base no seu conhecimento, descartando respostas arbitrárias, sem lógica, ou não fundamentada no seu conhecimento. A segunda etapa consistiu na validação do método de avaliação diagnóstica implementado no ADAC, verificando o grau de concordância entre o relatório do ADAC e as respostas aos itens verificados em entrevista posterior à realização da avaliação computacional.

#### 4.5 EXPERIMENTO

Foi realizado um experimento com 34 estudantes das disciplinas presenciais de Cálculo III, dos cursos de engenharia da ULBRA, que foram convidados a participar da pesquisa e, desse modo, identificar suas dificuldades na resolução de problemas envolvendo o conceito de derivadas.

Como o ADAC foi implementado<sup>25</sup> em um sistema computacional com acesso livre via Web e interface responsiva, não há nenhum tipo de restrição, seja de acesso, seja de equipamento. Sendo assim, os alunos foram orientados a acessarem o ADAC no endereço <http://www.webart7.com.br/sites/adac/avaliacao/>.

Durante a aula presencial na instituição, os alunos foram apresentados ao ADAC e foram orientados a responder às avaliações com base nos seus conhecimentos pessoais. Atenção especial foi dada em relação à resposta aleatória aos itens, pois, sendo uma avaliação diagnóstica, é necessário que as respostas reflitam o conhecimento real do respondente.

Os alunos foram orientados a responder as avaliações *Resolução de problemas e Matemática* e, após análise dos dados e avaliação das suas respostas, foi realizada a entrevista,

---

<sup>25</sup> Implementado está utilizado no sentido de desenvolver, aplicar e avaliar.

apresentando questionamentos sobre o pensamento utilizado para alguns dos itens de avaliação, a fim de verificar as razões para a resposta incorreta, com o objetivo de validar o ADAC.

Mesmo sendo orientados a responder às duas avaliações, alguns alunos responderam somente a uma delas, totalizando 34 alunos para a *Resolução de problemas* e trinta para a avaliação *Matemática*, no período de 24 de setembro a 22 de outubro de 2018.

O ADAC armazena o nome e o e-mail declarados na página de login e somente os administradores podem acessar os relatórios de desempenho dos respondentes. Para preservar as identidades dos alunos, os respondentes foram identificados com a letra A seguida da numeração de 1 a 39.

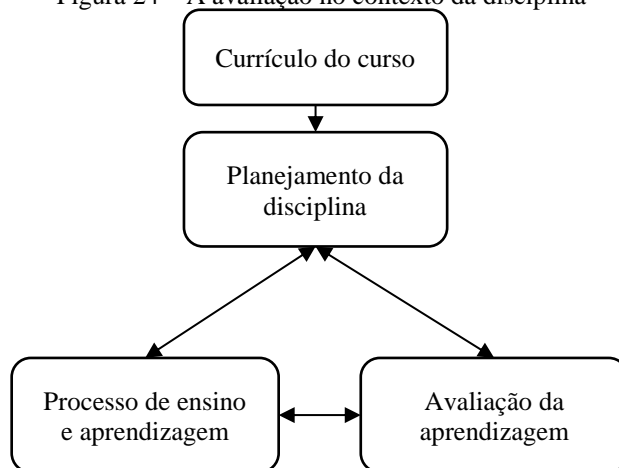
## 5 AMBIENTE DE PESQUISA

Na articulação dos saberes, dentro de um contexto, as habilidades e competências se manifestam e, se valendo da observação do indivíduo e seus registros, é possível avaliar a aprendizagem, tanto na sua efetividade como nas dificuldades associadas aos resultados equivocados.

Entende-se que a avaliação somativa, ao término do processo, visa verificar o conjunto de conhecimentos desenvolvidos no aluno e a avaliação em uma abordagem formativa ou diagnóstica torna-se um recurso pedagógico útil e necessário, que auxilia o professor na sua ação pedagógica, assim como o aluno na autogestão da sua formação.

A Figura 24 apresenta a relação da avaliação dentro do contexto de uma disciplina, de acordo com Russel e Airasian (2014, p. 305), podendo ser formativa, somativa ou ambas, ocorrendo em vários momentos e de várias maneiras durante o período de sua formação.

Figura 24 – A avaliação no contexto da disciplina



Fonte: Adaptado de Russel e Airasian (2014, p. 305).

É usual a aplicação da avaliação diagnóstica no início do módulo instrucional com o objetivo de identificar as dificuldades dos estudantes que impactarão no alcance dos objetivos definidos, permitindo a organização e o planejamento, por parte dos docentes, para a tomada de ações didáticas que propiciem que os objetivos sejam alcançados.

A pesquisa desenvolvida com a avaliação diagnóstica destina-se a alunos que já cursaram a disciplina de Cálculo, que apresenta o conceito de Derivadas, com o objetivo de identificar as dificuldades dos estudantes de engenharia na resolução de problemas envolvendo o conceito de Derivadas, de modo que, dentro da autogestão do conhecimento, o estudante conheça as suas dificuldades e tome atitudes para o desenvolvimento das competências necessárias ao exercício da sua futura profissão.

Para a realização da pesquisa, foi desenvolvido um sistema de avaliação diagnóstica implementado em um sistema computacional denominado ADAC (Avaliação Diagnóstica Auxiliada por Computador) para atender ao objetivo proposto. A especificação do funcionamento para atender às necessidades, sua implementação e funcionalidades do ADAC são descritas na sessão subsequente.

## 5.1 AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA AUXILIADA POR COMPUTADOR – ADAC

A palavra “diagnóstico” origina-se dos termos gregos, *dia* (através de) e *gnosis* (conhecer), ou seja, “conhecer através de”, que é a compreensão por meio da interpretação de algo. Na medicina, diagnóstico é a ação de identificar uma doença ou enfermidade pelos seus sintomas ou sinais. Na educação, a prática de diagnosticar está relacionada com o desenvolvimento cognitivo, afetivo e motor dos educandos em sua aprendizagem (LUCKESI, 2011).

A avaliação diagnóstica na educação não tem o caráter de medição do conhecimento para classificação, aprovação ou reprovação do indivíduo, em função de critérios estabelecidos, mas procura, por intermédio de sinais e/ou características, identificar problemas cognitivos ou falhas de aprendizagem, de maneira que o professor e o aluno possam desenvolver ações para a melhora do processo de ensino-aprendizagem.

Ressalta-se que as competências e habilidades inadequadamente desenvolvidas requerem ações que busquem sanar as dificuldades que o estudante apresenta, de forma que o levem ao exercício pleno das suas capacidades. Essas ações reforçam a afirmação de Luckesi (2000) sobre o ato de avaliar, que implica em dois processos articulados e indissociáveis: diagnosticar e decidir.

Na área da saúde há esforços no desenvolvimento de *Computer-aided diagnosis* (Diagnósticos auxiliados por computador – DAC) para a identificação de enfermidades. O diagnóstico é realizado através da comparação dos sintomas apresentados pelos pacientes com os sintomas de casos de enfermidades conhecidas, que estão armazenados em um banco de dados. Há iniciativas que utilizam redes probabilísticas para a formulação de hipóteses diagnósticas, as quais permitem inferir uma provável enfermidade quando não se identifica um caso cujos sintomas remetam a uma exata situação conhecida.

A ideia de um DAC para a educação visa identificar quais dificuldades interferem no desenvolvimento de determinadas competências ou habilidades, através da análise das ações de estudantes durante o desenvolvimento das soluções dos problemas. Segundo Luckesi (2011a),

a conduta de quem raciocina matematicamente pode ser observada pelas respostas explícitas dadas às situações-problema apresentadas aos estudantes.

Com o objetivo de identificar as dificuldades dos estudantes de engenharias na resolução de problemas com a temática de Derivadas, estabeleceu-se como o sistema deveria se comportar para poder realizar as inferências necessárias, de acordo com o objetivo proposto.

Para o desenvolvimento de um software ou sistema, utiliza-se o documento denominado Definição de Requisitos de Sistema (DRS), no qual os especialistas do negócio ou usuários do sistema ou programa definem as situações das possíveis entradas e saídas de dados. Desse modo, os desenvolvedores dividem em partes menores o que se apresenta como um problema computacional para, então, desenvolverem o algoritmo solução.

Apresenta-se um resumo do DRS para o ADAC e as soluções adotadas, atendendo às definições para qualidade de software apresentadas na Norma ISO/IEC 9126-1 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2003).

Entendendo que características funcionais são as relacionadas com o que o sistema deve entregar ao usuário, mediante os dados de entrada, e as características não funcionais as relacionadas com as qualidades e restrições do sistema, que não estão relacionadas com as funcionalidades de maneira direta, apresentam-se, primeiramente, as características não funcionais utilizadas para a definição da infraestrutura necessária ao desenvolvimento do sistema, bem como as soluções adotadas.

- Sistema multiplataforma, ou seja, não deve ser limitado ou restrito a um tipo de dispositivo informático ou a um determinado sistema operacional. Para atender a esse requisito, foi definido que o sistema seria uma aplicação Web.
- Como aplicação WEB multiplataforma, definiu-se que a interface seja responsiva, isso quer dizer que o conteúdo apresentado deve se adaptar ao tamanho e formato da tela do dispositivo utilizado.
- Baixo custo de implementação, levando a escolha pela hospedagem da aplicação em servidores com sistema operacional GNU/Linux pela característica de uso livre, reduzindo os custos de implantação, pois não necessita de licenças de softwares.
- A capacidade de transferir o produto para outros ambientes computacionais, denominada portabilidade. A opção pelo GNU/Linux com a característica de portabilidade levou à escolha da linguagem PHP e banco de dados relacional (MySQL), permitindo a instalação ou migração para outros servidores Web com relativa facilidade.



As características funcionais são as que definem como o sistema deve se comportar, quais dados são aceitos e quais entregas são realizadas. Para o ADAC, as definições funcionais definidas pelo pesquisador para atender as necessidades da pesquisa são:

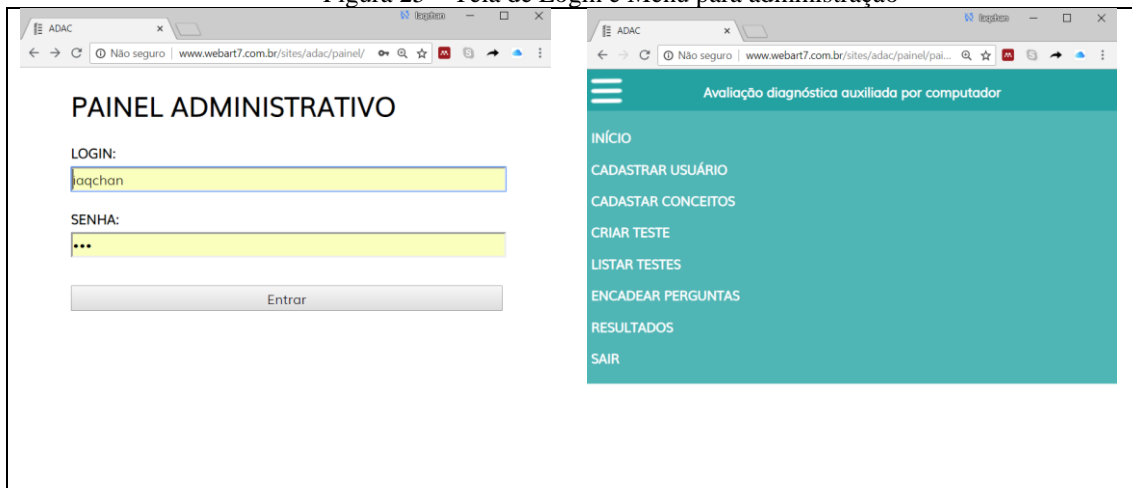
- cadastro de usuário com as informações de *login*, *senha*, *e-mail* e *tipo* (administrador e avaliador);
- o usuário avaliador tem a permissão de cadastrar, modificar e excluir (somente as avaliações que cadastrou); o usuário administrador tem as permissões de cadastrar, modificar e excluir todas e qualquer avaliação, assim como cadastrar e excluir usuários;
- na exclusão de um usuário, o administrador que excluiu o avaliador passa a ser o responsável por todas as avaliações do usuário excluído. Somente o usuário administrador pode elevar o cadastro de um usuário avaliador para administrador;
- o sistema deve permitir o cadastro e modificação/exclusão de avaliações, de itens de avaliação, de conceitos e a organização da sequência de apresentação dos itens de avaliação;
- os campos para cadastro da avaliação são: *Nome*, *Descrição* e *Usuário responsável* (selecionável entre os usuários cadastrados);
- os itens de avaliação podem ser do tipo primário ou secundário, com os primários sempre iniciando uma sequência. No caso de mais de um item primário em uma mesma avaliação, o sistema seleciona aleatoriamente um deles;
- os itens de avaliação são de *múltipla escolha do tipo resposta única* e *resposta fechada*. O item de resposta fechada deve aceitar um valor numérico inteiro como resposta correta e o item de múltipla escolha tipo resposta única deve permitir cadastro de múltiplas opções, sem restrição de quantidade, com somente uma opção correta;
- os campos dos itens de avaliação são: *Tipo* (primária/secundária), *Pergunta* (com o enunciado texto), *Imagem* (associada ao enunciado e possibilidade de dimensionamento da largura em pixels, mantendo a proporção altura/largura), *Tipo de resposta* (fechada/múltipla escolha), *Resposta* (com valor numérico para tipo fechada e texto da resposta para múltipla escolha), *Imagem* (associada à resposta do tipo múltipla escolha com dimensionamento da largura), *Conceito* (menu de seleção com lista de conceitos previamente cadastrados);
- o cadastro dos conceitos é realizado com somente um campo denominado *Conceito*;

- o sistema deve permitir o encadeamento dos itens de avaliação pela associação das respostas a outros itens;
- respostas sem itens de avaliação associados devem ter um marcador de fim de avaliação;
- o sistema deve verificar a consistência das avaliações, verificando respostas sem encadeamento, sem conceito associado e loop de sequenciamento;
- para realizar a avaliação, basta preencher o *Nome* e o *E-mail*, que receberá o resultado da avaliação realizada, não necessita tela de cadastro e não precisa de controle de nomes ou e-mails repetidos;
- o sistema deve registrar o horário de início e fim da avaliação, bem como o tempo dispendido na resolução de cada pergunta;
- o sistema não deve permitir voltar a uma questão respondida. Caso o respondente tente voltar para a tela anterior pelo navegador, deve continuar a apresentar a questão atual;
- ao término de cada avaliação, o sistema deve informar isso na tela e enviar um e-mail com o relatório de desempenho, contendo os conceitos envolvidos na avaliação e a contabilização dos erros;
- o sistema deve computar as respostas corretas como “0” e as incorretas como “-1”; ao término da avaliação, o sistema contabiliza os erros de acordo com os conceitos cadastrados, informando quais conceitos o respondente apresentou dificuldades durante a resolução das questões da situação-problema;
- o sistema deve fornecer relatórios que permitam, ao responsável pela avaliação, verificar a sequência de perguntas, as respostas selecionadas pelo respondente e as dificuldades do respondente identificadas no ADAC.

Com base nestas definições, foi desenvolvido o ADAC, disponível em <http://www.webart7.com.br/sites/adac/avaliacao>, e programado pela bolsista do CNPq Caroline Santos dos Reis, aluna do curso de Ciência da Computação da Ulbra Canoas.

A Figura 25 apresenta a tela de *login* para a administração do sistema e acesso às telas para cadastro de usuários, conceitos, avaliações, a tela para encadeamento dos itens de avaliação e a tela de relatórios para acompanhamento das avaliações. Por se tratar de atividades de administração, a serem acessadas em um computador, a característica de responsividade não está aplicada a elas, ficando essa característica restrita às telas de avaliação, para que possam ser utilizadas em dispositivos móveis, como celulares e *tablets*.

Figura 25 – Tela de Login e Menu para administração



Fonte: ADAC<sup>26</sup>, 2018.

A tela de cadastro de usuário (Figura 26) permite o cadastro, edição de permissão de acesso e exclusão dos usuários. Os campos para cadastro dos usuários administrativos são *Nome*, *E-mail*, *Login* e *Senha*.

Figura 26 – Tela de Cadastro de usuário

ID:	Nome:	Login:	E-mail:	Ações:
1	Iaqchan Homa	iaqchan	iaqchan@hotmail.com	
2	Caroline Reis	carol	caroline_s_reis@icloud.com	

Fonte: ADAC<sup>27</sup>, 2018.

A tela de cadastro (Figura 27) de conceitos exige somente um nome ou descrição breve do conceito ou procedimento do objeto de avaliação. É possível excluir e editar a descrição dos conceitos que serão associados às respostas dos itens de avaliação e que serão a base para geração do relatório de dificuldades do respondente. Sendo assim, o texto deve ser conciso e claro quanto ao que se refere.

<sup>26</sup> Disponível em: <<http://www.webart7.com.br/sites/adac/painel>> Acesso em jul. 2018.

<sup>27</sup> Disponível em: <<http://www.webart7.com.br/sites/adac/painel>> Acesso em jul. 2018.

Figura 27 – Tela de Cadastro de conceitos

ID	Conceito	Ações
1	Identificação do modelo	
2	Interpretação do problema	
3	Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis	
4	Representação geométrica e linguagem natural das cônicas	
5	Representação algébrica das funções notáveis	
6	Representação algébrica das cônicas	
8	Uso das derivadas	
9	Álgebra potenciação	
10	Interpretação de resultado	
11	Cálculo das derivadas	

Fonte: ADAC<sup>28</sup>, 2018.

A Figura 28 apresenta a tela para cadastro da avaliação com os campos *nome* e *seleção do usuário responsável* já previamente cadastrados. Após o cadastro da avaliação, é possível incluir os itens de avaliação.

Figura 28 – Telas de Cadastro de itens e Encadeamento de Itens

Fonte: ADAC<sup>29</sup>, 2018.

A tela para gerenciamento dos itens de avaliação destina-se ao cadastro, modificação e exclusão, apresentada na Figura 29. A inclusão de novo item realiza-se por meio do botão *inserir perguntas*. A edição e exclusão utiliza os ícones lápis e lixeira, respectivamente, assim como nas demais telas de gerenciamentos de objetos.

<sup>28</sup> Disponível em: <<http://www.webart7.com.br/sites/adac/painel>> Acesso em jul. 2018.

<sup>29</sup> Disponível em: <<http://www.webart7.com.br/sites/adac/painel>> Acesso em jul. 2018.

Figura 29 – Tela para Gerenciamento de itens

Nome do teste: Resolução de Problemas

Inserir perguntas +

Perguntas cadastradas:

Primárias:

ID	Pergunta	Ações
1	Uma criança chuta uma bola parada no chão de modo que ela vai para frente e para cima. Qual gráfico melhor representa a trajetória aproximada da bola do momento em que é chutada até quando ela toca o solo novamente?	

Secundárias:

ID	Pergunta	Ações
2	Então trajetória aproximada da bola do momento em que é chutada até quando ela toca o solo novamente tem a forma:	
3	Então trajetória aproximada da bola do momento	

Fonte: ADAC<sup>30</sup>, 2018.

O cadastro de itens (Figura 30) inicia pela seleção do tipo (primário/secundário), o enunciado da questão e, se necessário, sua imagem, informando a largura em pixels para uma melhor visualização e padronização da imagem a ser apresentada durante a avaliação. Após visualizar e decidir o tamanho adequado da imagem, inicia-se o cadastro das respostas, que é semelhante ao cadastro da pergunta do item, mas com um campo extra que associa a resposta a um conceito, já cadastrado previamente, e a um marcador, para identificar a resposta correta.

Figura 30 – Tela de Cadastro de itens

Inserir Questões

\* TIPO DE PERGUNTA: Primária

\* PERGUNTA: Descrição do conteúdo da questão

IMAGEM: Escolher arquivo Nenhum arquivo selecionado

LARGURA IMAGEM (PIX): 300 Visualizar Tamanho

RESPOSTAS +

TIPO DE RESPOSTA: Adicionar Posteriormente Criar pergunta

TIPO DE RESPOSTA: Objetiva

RESPOSTA 1:

RESPOSTA CERTA:

\* TEXTO RESPOSTA:

\* CONCEITO ASSOCIADO: Selecionar o Conceito

IMAGEM RESPOSTA: Escolher arquivo Nenhum arquivo selecionado

LARGURA IMAGEM (PIX): Visualizar Tamanho

Fonte: ADAC<sup>31</sup>, 2018.

O campo *conceito associado* de cada resposta incorreta deve estar associado ao conceito ou procedimento equivocado utilizado, presente no distrator, ou seja, o conceito associado à dificuldade do respondente na resolução do problema.

<sup>30</sup> Disponível em: <<http://www.webart7.com.br/sites/adac/painel>> Acesso em jul. 2018.

<sup>31</sup> Disponível em: <<http://www.webart7.com.br/sites/adac/painel>> Acesso em jul. 2018.

A Figura 31 apresenta a tela de *Encadeamento* de itens, na qual a sequência de apresentação dos itens de avaliação é realizada de acordo com o encadeamento lógico definido pelo autor da avaliação.

A definição da sequência de apresentação permite explorar o desenvolvimento da resolução da situação-problema, mesmo que o respondente cometa um equívoco ou não saiba responder. A apresentação dos itens de avaliação é definida pela organização das perguntas e respostas pelo autor da avaliação, podendo ser exploradas situações para verificar as dificuldades associadas aos erros cometidos. Por exemplo, nos itens para as dificuldades associadas com as representações gráficas e algébricas das funções, apresenta-se uma pergunta sobre a representação gráfica de uma situação-problema. Caso o aluno selecione um gráfico incorreto, é possível dar continuidade explorando sua resposta. Desse modo, o sistema encaminha para uma pergunta sobre a representação algébrica relativa ao gráfico selecionado. Então, mesmo que o aluno não saiba o modelo correto, pode-se avaliar se o mesmo transita entre as representações gráficas e algébricas da função selecionada.

Figura 31 – Tela de encadeamento de itens e tela de Relatórios

**ID pergunta:** 92

**Tipo de pergunta:** Secundária

**Texto pergunta:** Determine se a afirmação é verdadeira ou falsa. Responda com base em seus conhecimentos e não escolha uma resposta ao acaso. Lembre-se que essa avaliação é para que você identifique suas dificuldades.

**Imagem pergunta:**

$$\frac{1}{3x^2} = 3x^{-2}$$

**RESPOSTAS:**

**ID resposta:** 434

**Texto resposta:** Verdadeira

**Imagem resposta:**

**Encadear pergunta:**

94 - Determine se a afirmação é verdadeira ou falsa. Responda com base em seus conhe

Salvar

Fonte: ADAC<sup>32</sup>, 2018.

Na tela de relatórios (Figura 32), o professor responsável pela avaliação tem acesso aos resultados individuais dos respondentes, com informação da sequência de apresentação dos itens e as respostas dadas para cada pergunta.

<sup>32</sup> Disponível em: <<http://www.webart7.com.br/sites/adac/painel>> Acesso em jul. 2018.

Figura 32 – Tela de Relatórios

**Resultado da avaliação diagnóstica**

← Voltar

Nome usuário: \_\_\_\_\_

Conceito:	Score:
Álgebra potenciação	-2
Equações não polinomiais	-3
Expressões algébricas (frações algébricas)	-2
Expressões algébricas (ordem das operações)	-3
Expressões algébricas (propriedade distributiva da multiplicação)	-1
Expressões algébricas (radiciação)	-3
Expressões algébricas (simplificação com frações)	-3

ID:	Pergunta:	Resposta:	Tempo:	Ação:
56	Determine se a afirmação é verdadeira ou falsa. Responda com base em seus conhecimentos e não escolha uma resposta ao acaso. Lembre-se que essa avaliação é para que você identifique suas dificuldades.  $3 + (2 - b) \cdot a = 5a - ab$	"Falsa" ✓	00:02:25	🗑️
57	Determine se a afirmação é verdadeira ou falsa. Responda com base em seus conhecimentos e não escolha uma resposta ao acaso. Lembre-se que essa avaliação é para que você identifique suas dificuldades.  $(5x + 3y) + (4x + 2y) \cdot 2 = 13x + 7y$	"Falsa" ✗	00:02:33	🗑️

Fonte: ADAC<sup>33</sup>, 2018.

A seguir, apresentam-se os tipos de itens de avaliação utilizados e os itens desenvolvidos segundo a matriz de referência para a resolução de problemas envolvendo a temática de Derivadas.

## 5.2 TIPOS DE ITENS DE AVALIAÇÃO

Diferente das avaliações para verificar a aprendizagem, de acordo com os objetivos propostos em um módulo de ensino-aprendizagem ou em uma disciplina de um curso, a avaliação diagnóstica proposta nesta investigação busca identificar as dificuldades dos respondentes que levaram ao erro durante a resolução de problemas, com o fim de realizar uma avaliação diagnóstica que sirva para o aluno conhecer suas dificuldades e, dessa forma, possa buscar saná-las e auxiliie o professor a organizar seu planejamento didático.

O acompanhamento do raciocínio, métodos e procedimentos utilizados pode ser realizado mediante a análise da produção matemática durante a resolução de um problema, sendo possível identificar as dificuldades e os conhecimentos inadequados pela análise dos erros que se apresentam na solução realizada. Mas, em uma avaliação computacional, dependendo do tipo de item de avaliação, o acompanhamento automatizado por um sistema informático é mais complexo.

<sup>33</sup> Disponível em: <<http://www.webart7.com.br/sites/adac/painel>> Acesso em jul. 2018.

Itens abertos permitem que o estudante manifeste sua capacidade de expressão, criatividade e nível de compreensão acerca de assuntos variados, de simples a complexos, possibilitando a identificação tanto do grau de conhecimento quanto das dificuldades do respondente, sem proporcionar o benefício de sugestões ou alternativas dadas *a priori*, como nos itens de múltiplas opções (MONTEIRO; ALVES; MELLO, 2018). Mas as correções manuais de questões abertas são mais demoradas e estão sujeitas a aspectos subjetivos do avaliador. Já em sistemas computacionais, a sua correção automática apresenta problemas na leitura/interpretação da produção escrita e na comparação com parâmetros de correção não exatos e padronizados.

Para a avaliação diagnóstica proposta, a correção e identificação automática pelo sistema sobre as dificuldades do estudante de engenharia é característica essencial, pois fornece resposta imediata ao estudante. Sendo o ADAC um sistema de avaliação computacional, optou-se pelo uso de itens dos tipos múltiplas opções, falso/verdadeiro e resposta única.

Os itens do tipo falso/verdadeiro foram utilizados em questões que os conteúdos avaliados apresentam dificuldades na construção de distratores<sup>34</sup> ou quando o objeto de verificação requer uma resposta dicotômica.

Apresenta-se como exemplo a verificação do uso adequado das propriedades que permitem a decomposição e simplificação quando o radicando é produto de fatores, questionando se a igualdade  $\sqrt{121x^4y^2} = 11x^2y$  é falsa ou verdadeira. Exemplo semelhante se aplica quando o radicando é a soma de termos e se questiona se a igualdade  $\sqrt{x^2 + y^2} = x + y$  é falsa ou verdadeira, verificando se o respondente não utiliza equivocadamente procedimento semelhante ao primeiro exemplo, mas que não se aplica para o radicando com a soma de termos. Em ambos, não há muitas possibilidades para a construção de distratores, como em um item de múltiplas opções. Logo, itens do tipo falso/verdadeiro são mais adequados.

Os itens de múltiplas opções tipo resposta única foram utilizados em situações que apresentam possibilidades de construção de distratores com diferentes origens, viabilizando a identificação das dificuldades associadas a cada distrator disponível como opção de resposta.

Ressalta-se a preocupação relativa ao uso de itens de múltipla escolha nas avaliações psicométricas, pois esses itens encorajam o respondente a fazer a escolha aleatória de uma resposta, levando ao acerto casual ou ao erro casual do item, já que o respondente tem consciência de que uma das opções disponíveis para escolha é a resposta correta.

---

<sup>34</sup> Distrator é uma resposta errada, mas plausível, e relacionada com um algum nível de conhecimento, de modo que o respondente com baixo desempenho a escolha.



Espinoza e Gardezabal (2010) e Monteiro, Alvez e Mello (2018) apresentam estudos sobre o uso da penalização em itens de múltipla escolha, de modo que a questão respondida incorretamente afeta o score final do respondente, fazendo com que ele não encare o ato que responder um item como uma loteria, no qual não há risco na tentativa de acertar o *prêmio*<sup>35</sup>.

Segundo os mesmos autores, a penalização por respostas incorretas leva ao aumento das omissões, ou seja, das respostas em branco e, conseqüentemente, melhora a qualidade da informação sobre o domínio do respondente sobre assunto avaliado, pois o ele tende a responder somente os itens em que o seu grau de certeza é maior. Ressalta-se que o grau de certeza é uma percepção pessoal e subjetiva do respondente sobre o seu conhecimento em relação ao item, não tendo relação com o acerto do mesmo.

Considerando que as respostas em uma avaliação com penalização são dadas quando há um alto grau de certeza do respondente, as respostas corretas se apresentam como uma evidência em relação ao domínio do respondente sobre o objeto de avaliação, assim como as respostas erradas estão fortemente associadas à existência de problemas ou dificuldades, pois nessa situação, segundo Rico (1998), o erro não aparece sem razão, mas advém de um marco conceitual consistente, baseado em seus conhecimentos prévios.

Em avaliações computacionais, geralmente, os itens de avaliação de múltipla escolha se apresentam como sendo do tipo escolha forçada, ou seja, uma opção é correta e as demais opções de resposta estão relacionadas a uma possível resposta certa, denominadas distratores. Dessa forma, o respondente é forçado a escolher a resposta correta dentre as disponíveis. Nas avaliações com penalidade ao omitir uma resposta, deixando-a em branco, considera-se, de maneira indireta, o desconhecimento ou uma incerteza sobre o objeto de avaliação.

Considerou-se que, em um contexto de autoavaliação, é imprescindível que haja a possibilidade de que o aluno consiga expressar que seu conhecimento é inadequado ou inexistente para a situação dada, ou mesmo que externar que não compreendeu o enunciado, por meio da seleção de uma opção que represente sua percepção sobre o seu conhecimento relativo ao objeto de avaliação.

Também se levou em consideração que, em uma perspectiva de autogestão da aprendizagem, o estudante realiza a avaliação diagnóstica de maneira voluntária. Assim, a possibilidade de escolha aleatória da resposta é considerada baixa, ou seja, no processo de autoconhecimento dos seus saberes, situação na qual o maior interessado é o próprio avaliado, foram desconsideradas as probabilidades de erro ou acerto casual do item.

---

<sup>35</sup> Realce do pesquisador.

Desse modo, as perguntas apresentam respostas adequadas às situações nas quais o enunciado não é compreendido ou o respondente não tem certeza, ou não sabe como proceder. Como exemplo, tem-se, na Figura 33, um item de múltiplas opções do tipo certo/errado, com as opções *Não tenho certeza* e *Não sei*.

Entende-se que, se o respondente acredita ter uma noção sobre o objeto de avaliação, ou identifique parte do que seria a sua solução, a opção *Não tenho certeza* é mais adequada que a opção *Não sei*, que seria para a situação na qual o respondente realmente não sabe como proceder. Apesar de ambas serem pontuadas no sistema como erradas, cada uma apresenta uma caracterização distinta da percepção do respondente sobre o seu conhecimento, diminuindo a probabilidade de escolha aleatória da resposta.

A construção da avaliação com conteúdo de matemática básica apresentou dificuldades na elaboração de distratores para itens de múltiplas opções com resposta única. Por isso, optou-se pelo uso de itens do tipo certo/errado, apresentando uma afirmação que o respondente deve responder se está correta ou não.

Figura 33 – Questão do tipo certo/errado.

23

Determine se a afirmação é verdadeira ou falsa. Responda com base em seus conhecimentos e não escolha uma resposta ao acaso. Lembre-se que essa avaliação é para que você identifique suas dificuldades.

$$\frac{\frac{4x}{3} - x}{2x - \frac{5x}{3}} = 1$$

Verdadeira  
 Falsa  
 Não tenho certeza  
 Não sei

Responder

Fonte: ADAC<sup>36</sup>, 2018.

Este item, em particular, apresenta uma restrição matemática, de maneira que a afirmação é verdadeira para  $x \neq 0$ , mas a dificuldade a ser identificada é em relação às operações com frações algébricas, e não quanto às restrições matemáticas. Portanto, para efeito

<sup>36</sup> Disponível em: <<http://www.webart7.com.br/sites/adac/avaliacao>> Acesso em jul. 2018.

de avaliação sobre as dificuldades, considera-se a primeira dificuldade ou a mais abrangente. Optou-se pelo uso de frações algébricas, em detrimento das frações numéricas, pois impossibilita o uso de calculadoras para resolução, forçando o uso dos procedimentos algébricos para a resolução do item.

O outro tipo de item utilizado nas avaliações computacionais é o de múltipla escolha com resposta única. Itens desse tipo requerem mais de uma opção de resposta, sendo que, excetuando a resposta correta, as demais devem ser opções plausíveis relacionadas com algum conhecimento construído com bases pouco sólidas, que geram concepções ou levam a inferências equivocadas sobre o objeto de avaliação (KILPATRICK; GÓMEZ; RICO, 1998; MONTEIRO; ALVES; MELLO, 2018; RABELO, 2013).

Na Figura 34 apresenta-se um dos itens da avaliação *Resolução de problemas* com múltipla opção tipo resposta única. O item é uma adaptação do tipo asserção-razão, com algumas opções apresentando duas afirmações em que a segunda justifica a primeira. Além da opção correta e dos distratores, há uma opção caso o respondente não saiba como proceder.

Figura 34 - Item múltipla opção tipo resposta única

Considerando que em sua trajetória a bola primeiro sobe e depois desce de acordo com a função abaixo, para  $h$  a altura e  $d$  a distância na horizontal tendo como  $d=0$  o ponto onde a bola foi chutada. Quando a bola estiver a 7,1m de distância, ela estará

$$h(d) = \frac{-d^2 + 16d}{12}$$

- subindo porque  $h(7,1)$  é positivo.
- descendo porque  $h(7)-h(7,1)$  é negativo.
- descendo porque  $h'(7,1)$  é negativo.
- subindo porque  $h'(7,1)$  é positivo.
- calcular  $h'(d)$ .
- Não está subindo nem descendo porque é ponto de máximo.
- Não sei o que fazer.

Fonte: ADAC<sup>37</sup>, 2018.

<sup>37</sup> Disponível em: <<http://www.webart7.com.br/sites/adac/avaliacao>> Acesso em jul. 2018.

Verifica-se, neste item, que é necessária a compreensão das características de valor e variação no ponto  $d = 7,1$ , de maneira que seja obrigatória a verificação das opções disponíveis. Dentre as sete possíveis, as duas últimas permitem que o aluno expresse mais claramente a sua situação de desconhecimento, caso não saiba responder, evitando a escolha de uma opção qualquer, evitando o erro ou acerto casual do item e, conseqüentemente, melhorando a qualidade da informação sobre o conhecimento do aluno.

### 5.3 AS AVALIAÇÕES DO ADAC

Para estudos envolvendo o tema de resolução de problemas, convém apresentar a distinção e o entendimento de como a resolução de problemas é abordada na educação. Schroeder e Lester (1989) apresentam como a resolução de problemas é abordada de três maneiras nessa área: ensino *sobre* resolução de problemas, ensino *para* a resolução de problemas e ensino *através* da resolução de problemas.

No ensino *sobre* a resolução de problemas, as aulas são voltadas à aprendizagem dos métodos semelhantes ao apresentado por Polya; no ensino *para* a resolução de problemas, o foco é o conhecimento matemático, atribuindo importância à capacidade de utilizá-la. No ensino *através* da resolução de problemas, não há o propósito único de ensinar matemática, mas de levar o aluno a compreender e transformar situações reais e concretas em problemas matemáticos (SCHROEDER; LESTER JR, 1989).

Para Echeverría e Pozo (1998), o objetivo da aprendizagem da resolução de problemas é a aquisição do hábito de propor-se a resolver questões como uma forma de aprendizagem. Desse modo, independentemente de como a resolução de problemas é abordada, o indivíduo que desenvolve a competência de resolver problemas de uma determinada natureza deve ser capaz, de alguma maneira, de acessar, organizar e utilizar seus conhecimentos de maneira lógica, para dar respostas a situações semelhantes que se apresentem.

Para a pesquisa, a resolução de problemas adquire a função de instrumento de avaliação sobre o qual é realizada a análise das evidências sobre as dificuldades envolvidas na resolução de problemas com a temática Derivadas.

A avaliação sobre resolução de problemas foi desenvolvida para ser aplicada por um sistema de avaliação computacional e foi estruturalmente organizada segundo o esquema de resolução proposto por G. Polya (1985), que consiste em: compreensão do problema, elaboração de um plano, execução do plano, verificação e análise da solução do problema

proposto. Dessa forma, o problema central é subdividido em problemas menores, permitindo a análise das habilidades e conteúdos envolvidos em cada etapa, durante a resolução do mesmo.

Para a presente pesquisa, fez-se necessário delimitar o conjunto de competências e habilidades para a resolução de problemas com a temática de Derivadas, objeto de avaliação do ADAC. A

Figura 35 apresenta um resumo das competências e habilidades identificadas nas DCN para os Cursos de Graduação em Engenharia e pelos órgão certificadores dos cursos de engenharia, como o EUR-ACE e o ABET, e pelo projeto Tuning-AHELO, da OECD, nas quais se identifica direta e indiretamente a matemática.

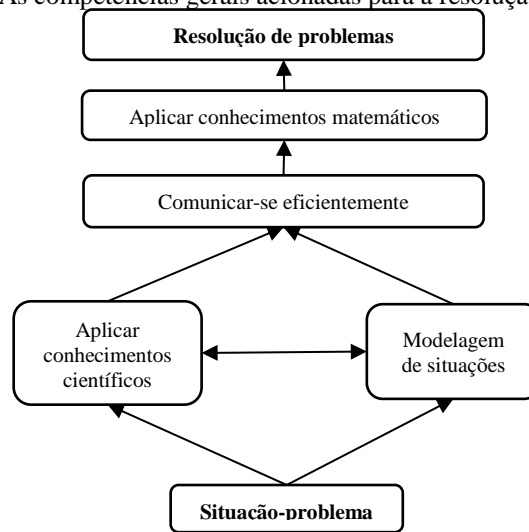
Figura 35 - Competências e habilidades para profissionais de engenharia que requerem conhecimento matemático

<b>Competências</b>	<b>Habilidades e competências</b>
Modelagem de situações	Ler, interpretar e identificar os dados relevantes; Representar matematicamente a situação-problema.
Aplicar conhecimentos científicos	Identificar métodos e algoritmos matemáticos adequados a situação-problema.
Comunicar-se eficientemente	Comunicar-se transitando entre a linguagem natural e as representações matemáticas e vice-versa.
Aplicar conhecimentos matemáticos	Executar cálculos utilizando da Matemática Básica.
Resolução de problemas	Modelagem de situações; Aplicar conhecimentos científicos; Comunicar-se eficientemente; Aplicar conhecimentos matemáticos; Interpretar os resultados dentro do contexto da situação-problema.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Considerando o esquema para a resolução de problemas como proposto por Polya e as competências e habilidades envolvidas na resolução de um problema matemático, pode-se organizar o relacionamento dessas competências, como mostra o diagrama da Figura 36. Essa organização não é rígida, mudando de acordo com a classe de problemas trabalhado, mas o diagrama é considerado adequado para as situações-problema envolvendo funções reais, com o particionamento e organização da situação que se apresenta em problemas menores.

Figura 36 – As competências gerais acionadas para a resolução de problemas



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para a pesquisa, as competências e habilidades necessárias para a resolução dos problemas foram organizadas em conteúdos matemáticos que, se não dominados pelo aluno, podem levá-lo a responder incorretamente ao item de avaliação. Sendo assim, cada distrator foi desenvolvido levando em conta os tipos de erro baseados no conhecimento matemático, segundo a classificação de Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987), estando estes associados a um conceito ou procedimento que, provavelmente, se encontra indevidamente formalizado no aluno. Considera-se como uma provável dificuldade pois, em algumas situações, é difícil determinar com precisão a causa do erro e, como Radatz afirma que “o mesmo problema pode dar origem a erros de fontes diferentes, e o mesmo erro pode surgir de diferentes processos de resolução de problemas” (1979, p. 170).

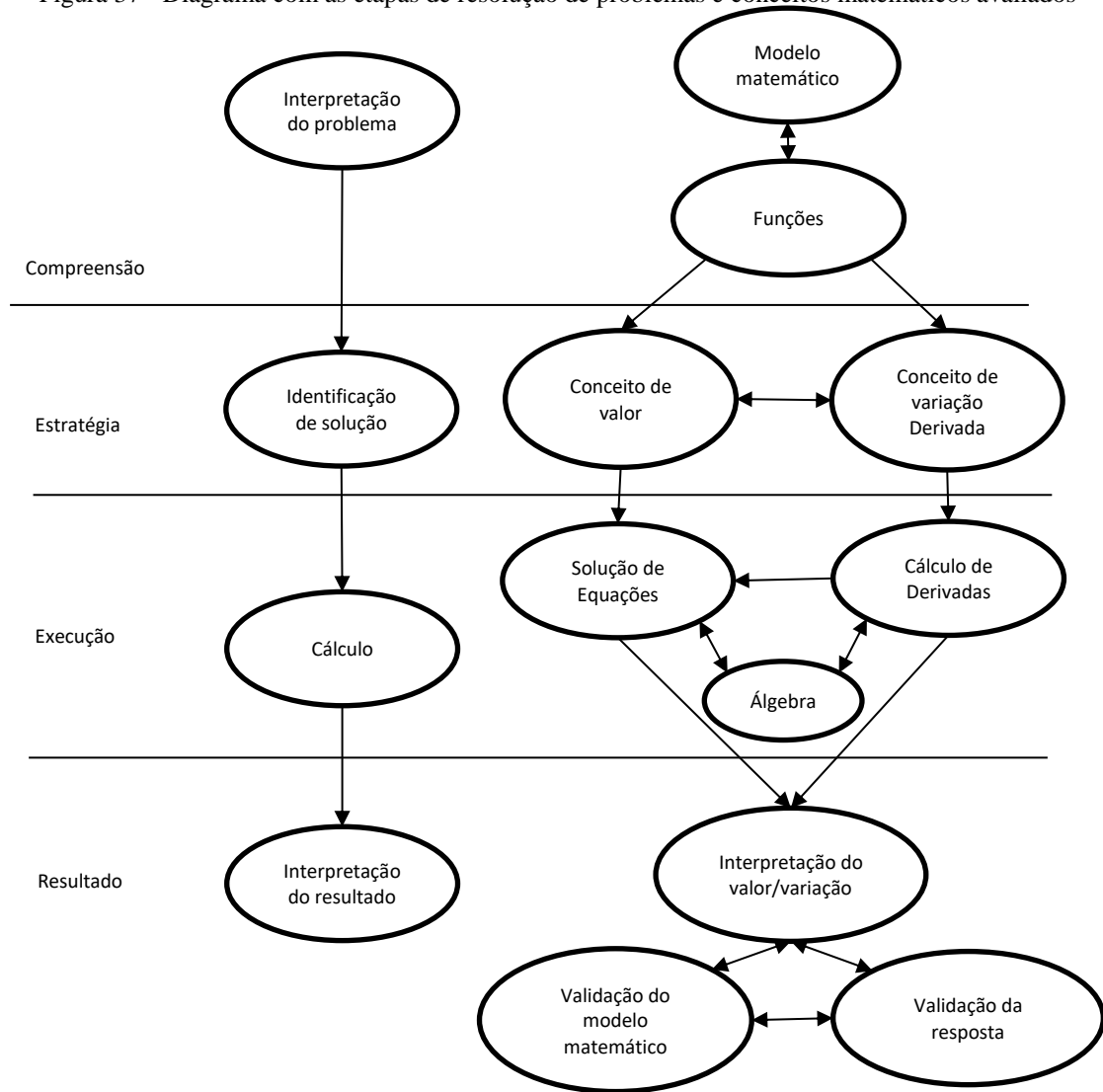
Apesar desses e de outros problemas, a análise das respostas do aluno, com foco nos erros, pode fornecer informações fundamentais sobre seu conhecimento, permitindo ações individuais e/ou coletivas protagonizadas, respectivamente, pelo aluno ou pelo professor, para que ocorra a aprendizagem significativa e a formação dos conceitos matemáticos necessários à resolução de problemas.

Ressalta-se que, nesse processo de regulação da aprendizagem antes da tomada de ações para minorar as dificuldades dos alunos, é imprescindível a identificação das mesmas, sendo este o foco da pesquisa realizada.

Entende-se que a resolução de problemas envolvendo o conceito de Derivadas demanda o acionamento de estruturas matemáticas relacionadas ao conceito de função e suas características de valor e variação, a mobilização de conhecimentos de matemática básica, necessários para a realização dos cálculos, o cálculo das Derivadas, assim como a interpretação

dos resultados dentro do contexto da situação-problema. A Figura 37 apresenta um diagrama com as etapas para a resolução do problema, as ações do resolvidor e os conhecimentos e habilidades matemáticas necessárias à resolução de problemas.

Figura 37 - Diagrama com as etapas de resolução de problemas e conceitos matemáticos avaliados



Fonte: Elaborado pelo autor.

Desse modo, para identificar as dificuldades relacionadas à resolução de problemas que envolvem o conceito de Derivadas, apresenta-se ao aluno uma situação-problema particionada em problemas menores que requerem, para sua solução, o domínio de determinados conteúdos matemáticos. Essa organização permite, em primeira instância, verificar a capacidade na resolução do subproblema; caso este seja incorretamente respondido, verificar a causa do erro e, por consequência, permite inferir a dificuldade do respondente, por meio do conceito associado à resposta incorreta.

Como o *distrator* é uma resposta errada, a escolha desse pelo respondente é evidência de que o conhecimento equivocado utilizado para construção do distrator, que o torna plausível,

foi considerado pelo respondente como sendo possível e verdadeiro, podendo esse erro ser considerado como um indicador da dificuldade do respondente relativo ao conceito<sup>38</sup> associado.

A categorização de Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987), baseada no conhecimento matemático, apresenta seis categorias descritivas para classificação dos erros: dados incorretamente utilizados, interpretação incorreta da linguagem, inferências logicamente inválidas, teoremas ou definições distorcidas, falta de verificação da solução e erros técnicos. Para o ADAC desenvolvido, é importante buscar identificar se o estudante possui falta de conhecimento científico da temática. Neste sentido, incluiu-se essa categoria na classificação dos erros dos itens do ADAC, além das seis categorias de Hadar, Zaslavsky e Inbar.

A Figura 38 apresenta os tipos de erros associados aos distratores e os conceitos, cadastrados no ADAC como a provável dificuldade do aluno.

Figura 38 – Conceitos cadastrados e a classificação dos erros

<b>Conceitos / Habilidades</b>	<b>Tipos de erros</b>
Interpretação do enunciado	Dados incorretamente utilizados
Modelagem do problema	Dados incorretamente utilizados
Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis	Interpretação incorreta da linguagem
Representação geométrica e linguagem natural das cônicas	Interpretação incorreta da linguagem
Representação algébrica das funções notáveis	Interpretação incorreta da linguagem
Representação algébrica das cônicas	Interpretação incorreta da linguagem
Relação de dependência	Dados incorretamente utilizados
Conceito de valor	Inferências logicamente inválidas
Conceito de variação derivada primeira	Inferências logicamente inválidas
Característica de ponto crítico	Inferências logicamente inválidas / Teoremas ou definições distorcidas
Interpretação de derivada segunda	Inferências logicamente inválidas / Teoremas ou definições distorcidas
Cálculo das derivadas	Erros técnicos / Teoremas ou definições distorcidas
Derivadas regra da cadeia	Erros técnicos / Teoremas ou definições distorcidas
Cálculo de limite	Erros técnicos / Teoremas ou definições distorcidas
Expressões algébricas (ordem das operações)	Erros técnicos / Teoremas ou definições distorcidas
Expressões algébricas (propriedade distributiva da multiplicação)	Erros técnicos / Teoremas ou definições distorcidas
Expressões algébricas (frações algébricas)	Erros técnicos / Teoremas ou definições distorcidas
Expressões algébricas (simplificação com frações)	Erros técnicos / Teoremas ou definições distorcidas
Equações não polinomiais	Erros técnicos / Teoremas ou definições distorcidas
Expressões algébricas (radiciação)	Erros técnicos / Teoremas ou definições distorcidas
Expressões algébricas (potenciação)	Erros técnicos / Teoremas ou definições distorcidas
Verificação do resultado no contexto	Erros técnicos / Teoremas ou definições distorcidas

Fonte: Elaborada pelo autor.

<sup>38</sup> Os conteúdos considerados conceituais, segundo Coll (2000), podem ser considerados como conceitos, fatos e princípios.



Para uma melhor identificação das dificuldades dos alunos, a avaliação diagnóstica foi dividida em duas:

- *Matemática*, que avalia as dificuldades em álgebra: potenciação, radiciação, fatoração, simplificação, propriedade distributiva da multiplicação em relação a adição, ordem das operações, frações algébricas, polinômios e solução de equações polinomiais e não polinomiais.
- *Resolução de problemas*, que tem seu foco na interpretação e modelagem gráfica de um problema; conversões entre as representações gráficas, algébricas e a linguagem natural; distinção entre as situações de valoração da função e variação da função; cálculo e aplicação das derivadas; interpretação do resultado. Para a avaliação *Resolução de problemas*, as situações-problema foram selecionadas e adaptadas, tendo em vista a possibilidade de fragmentação em problemas menores, com o objetivo de identificar as dificuldades nas diferentes etapas da resolução do problema.

### 5.3.1 Teste Diagnóstico de Matemática

Na avaliação *Matemática*, os itens têm como objetivo identificar a existência de dificuldades, especificamente, as relacionadas à álgebra, desenvolvidas na Educação Básica, pois as pesquisas realizadas por Cury (2003), Feltes (2007), Pochulu (2009) e Ferreira (2005) apontam essa como a causa mais relevante dos erros matemáticos no Ensino Superior.

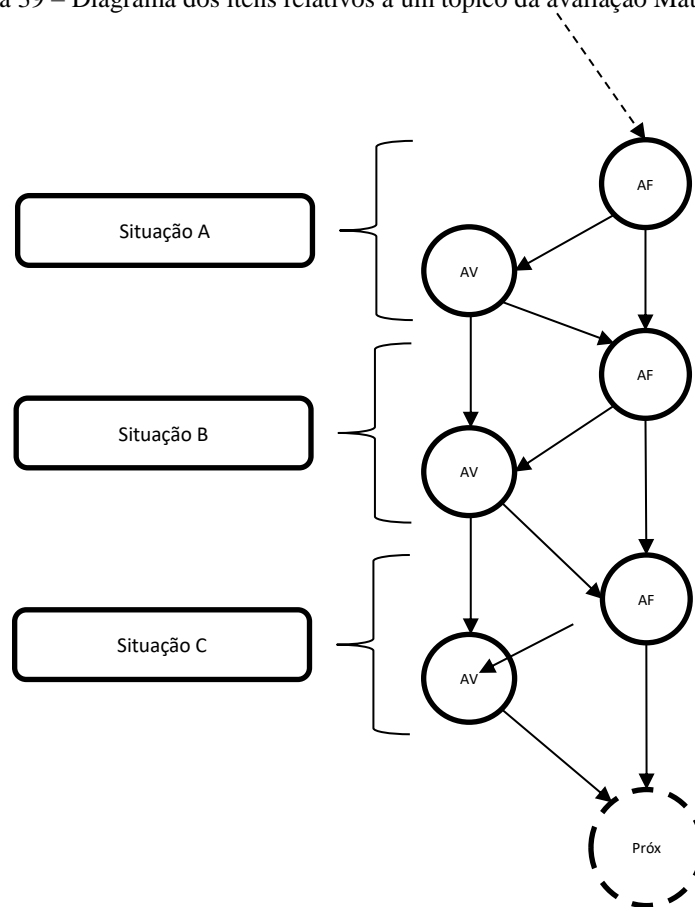
Os itens de avaliação de *Matemática* foram organizados com a sequência: expressões algébricas, aplicação da propriedade distributiva da multiplicação sobre a adição e subtração, simplificações algébricas, operações com frações algébricas, equações não polinomiais (exponenciais, trigonométricas, logarítmicas), radiciação e potenciação.

Os itens do tipo falso/verdadeiro são compostos de um enunciado que apresenta uma igualdade ou uma desigualdade, de modo a verificar a existência de dificuldade em relação ao objeto de avaliação. A parte textual do enunciado é semelhante para todos os itens da avaliação *Matemática* e reforçam a necessidade de seleção da resposta embasada nos conhecimentos, evitando a seleção ao acaso. O texto do enunciado dos itens é sempre o mesmo: *Determine se a igualdade (desigualdade) é verdadeira ou falsa. Responda com base em seus conhecimentos. Não escolha ao acaso uma resposta, lembre-se que esta avaliação é para identificar as suas dificuldades.*

Cada tópico avaliado contém três pares de itens (A, B, C), compostos de uma afirmação falsa (AF) e uma afirmação verdadeira (AV), para o mesmo objeto de avaliação, totalizando seis itens, que são apresentados conforme os erros e acertos do respondente,

A avaliação por tópicos é organizada conforme a Figura 39 e inicia com uma afirmação falsa (AF). Caso o tópico seja respondido incorretamente, ou se for selecionada uma das alternativas *Não tenho certeza* ou *Não sei*, o ADAC encaminha para outra afirmação falsa (AF) e, respondendo corretamente, o ADAC encaminha para uma afirmação verdadeira (AV) do mesmo tipo, confirmando o conhecimento relativo ao tópico avaliado.

Figura 39 – Diagrama dos itens relativos a um tópico da avaliação Matemática



Fonte: Elaborada pelo autor.

Essa organização possibilita a apresentação de três a seis itens, dependendo dos erros e acertos do respondente ao tópico avaliado. Apresenta-se, a seguir, cada item de avaliação relativos aos tópicos da avaliação Matemática.

Os itens de M1 a M6 verificam as dificuldades relativas às operações matemáticas em expressões algébricas, ou seja, se é do conhecimento do respondente a ordem das operações, assim como as devidas propriedades das operações envolvidas. Na Figura 40, os itens M1 e

M2, com as assertivas falsas (AF) e verdadeiras (AV), apresentam expressões algébricas (EA) com as operações da adição e da multiplicação.

Figura 40 – Itens AF e AV para a ordem das operações

Item M1 – AF			
$3 + (2 - b) \cdot a = 5a - ab$			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Direcionamento
a)	Verdadeiro	EA ordem das operações	M3
b)	<b>Falso</b>	EA ordem das operações	M2
c)	Não tenho certeza	EA ordem das operações	M3
d)	Não sei	EA ordem das operações	M3
Item M2 – AV			
$(5x + 3y) + (4x + 2y) \cdot 2 = 13x + 7y$			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Direcionamento
a)	<b>Verdadeiro</b>	EA ordem das operações	M4
b)	Falso	EA ordem das operações	M3
c)	Não tenho certeza	EA ordem das operações	M3
d)	Não sei	EA ordem das operações	M3

Fonte: Elaborada pelo autor.

Os itens M3 e M4 (Figura 41) trabalham com a multiplicação e potenciação. O item M3 (AF) verifica se o respondente identifica como sendo incorreto realizar a multiplicação antes da potenciação e o item M4 (AF) reescreve a potência como um produto de fatores e opera a multiplicação com um dos fatores.

Figura 41 – Itens AF e AV para a ordem das operações

Item M3 – AF			
$2(3a + b)^2 = (6a + 2b)^2$			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Direcionamento
a)	Verdadeiro	EA ordem das operações	M5
b)	<b>Falso</b>	EA ordem das operações	M4
c)	Não tenho certeza	EA ordem das operações	M5
d)	Não sei	EA ordem das operações	M5
Item M4 – AV			
$3(y + x)^2 = (3y + 3x)(y + x)$			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Direcionamento
a)	<b>Verdadeiro</b>	EA ordem das operações	M6
b)	Falso	EA ordem das operações	M5
c)	Não tenho certeza	EA ordem das operações	M5
d)	Não sei	EA ordem das operações	M5

Fonte: Elaborada pelo autor.

O item M5 (Figura 42) apresenta o desenvolvimento incorreto da expressão, com a operação da subtração realizada antes da multiplicação do seno, e o item M6 (AV) apresenta o desenvolvimento correto da expressão algébrica, que aparenta ser o produto de dois monômios.

Ressalta-se que a afirmação verdadeira só é apresentada se o respondente identifica o erro da afirmação falsa apresentada primeiro, sendo um item para corroborar a não dificuldade com o objeto de avaliação, que, no caso, são as expressões algébricas.

Figura 42 – Itens M5 e M6 para a ordem das operações

Item M5 – AF			
$12 - 5 \operatorname{sen}(2x) = 7 \operatorname{sen}(2x)$			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Direcionamento
a)	Verdadeiro	EA ordem das operações	M7
<b>b)</b>	<b>Falso</b>	EA ordem das operações	M6
c)	Não tenho certeza	EA ordem das operações	M7
d)	Não sei	EA ordem das operações	M7
Item M6 – AV			
$a + b \cdot 2 - b = a + b$			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Direcionamento
<b>a)</b>	<b>Verdadeiro</b>	EA ordem das operações	M7
b)	Falso	EA ordem das operações	M7
c)	Não tenho certeza	EA ordem das operações	M7
d)	Não sei	EA ordem das operações	M7

Fonte: Elaborada pelo autor.

Para Brum e Cury (2013), a aplicação correta da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e erros na manipulação algébrica são problemas que surgem no Ensino Fundamental e podem perdurar até o Ensino Superior. Os itens de M7 a M12 verificam as dificuldades relativas à propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

O item M7 (Figura 43) apresenta uma afirmação falsa, com o produto de dois monômios, que pode ser associada aos produtos notáveis como sendo o produto da soma pela diferença de dois termos. Mas se considera que o erro envolvido é a aplicação incorreta da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. O item M8 apresenta a distributiva da multiplicação sobre a adição pela esquerda, de maneira correta.

Figura 43 – Itens AF e AV para a propriedade distributiva da multiplicação

Item M7 – AF			
$(x - y)(-x + y) = -x^2 - y^2$			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Direcionamento
a)	Verdadeiro	EA propriedade distributiva da multiplicação	M9
<b>b)</b>	<b>Falso</b>	EA propriedade distributiva da multiplicação	M8
c)	Não tenho certeza	EA propriedade distributiva da multiplicação	M9
d)	Não sei	EA propriedade distributiva da multiplicação	M9
Item M8 – AV			
$(3xy^2 - xy) \frac{x}{y} = (3x^2y - x^2)$			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Direcionamento
<b>a)</b>	<b>Verdadeiro</b>	EA propriedade distributiva da multiplicação	M10
b)	Falso	EA propriedade distributiva da multiplicação	M9
c)	Não tenho certeza	EA propriedade distributiva da multiplicação	M9
d)	Não sei	EA propriedade distributiva da multiplicação	M9

Fonte: Elaborada pelo autor.

O item M9 (Figura 44) é uma afirmação falsa com uma manipulação algébrica incorreta, com uma multiplicação à direita e uma à esquerda da soma, desenvolvidas de forma equivocada. Apesar de envolver uma simplificação, considera-se somente a dificuldade pelo uso inadequado da propriedade da distributiva da multiplicação em relação à subtração. O item 10 pode ser identificado como uma fatoração, mas é possível também aplicar a propriedade

distributiva da multiplicação sobre a subtração à esquerda da igualdade, verificando que a afirmação é correta.

Figura 44 – Itens M9 e M10 para a propriedade distributiva da multiplicação

Item M9 – AF			
$2\left(\frac{x}{4} - \frac{y}{9}\right) 3 = \frac{x}{2} - \frac{y}{3}$			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Direcionamento
a)	Verdadeiro	EA propriedade distributiva da multiplicação	M11
b)	<b>Falso</b>	EA propriedade distributiva da multiplicação	M10
c)	Não tenho certeza	EA propriedade distributiva da multiplicação	M11
d)	Não sei	EA propriedade distributiva da multiplicação	M11
Item M10 – AV			
$x^2 + 2xy - x - 2y = -x(1 - x) + 2y(x - 1)$			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Direcionamento
a)	<b>Verdadeiro</b>	EA propriedade distributiva da multiplicação	M12
b)	Falso	EA propriedade distributiva da multiplicação	M11
c)	Não tenho certeza	EA propriedade distributiva da multiplicação	M11
d)	Não sei	EA propriedade distributiva da multiplicação	M11

Fonte: Elaborada pelo autor.

O item M11 (Figura 45) apresenta o produto de dois monômios diferentes, descaracterizando-o como produto notável pelo desenvolvimento da operação com o produto somente dos termos semelhantes. O item M12 apresenta o produto entre dois monômios de modo correto, mas com os termos desordenados, de modo que o resultado ( $zw - kw + zy - ky$ ) difere somente na organização dos termos obtidos pela multiplicação ordenada termo a termo, da esquerda para a direita ( $wz - wk + yz - yk$ ).

Figura 45 – Itens M11 e M12 para propriedade distributiva da multiplicação em relação a adição

Item M11 – AF			
$(2x + y)(x + 3y) = 2x^2 + 3y^2$			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Direcionamento
a)	Verdadeiro	EA propriedade distributiva da multiplicação	M13
b)	<b>Falso</b>	EA propriedade distributiva da multiplicação	M12
c)	Não tenho certeza	EA propriedade distributiva da multiplicação	M13
d)	Não sei	EA propriedade distributiva da multiplicação	M13
Item M12 – AV			
$(w + y)(z - k) = zw - kw + zy - ky$			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Direcionamento
a)	<b>Verdadeiro</b>	EA propriedade distributiva da multiplicação	M13
b)	Falso	EA propriedade distributiva da multiplicação	M13
c)	Não tenho certeza	EA propriedade distributiva da multiplicação	M13
d)	Não sei	EA propriedade distributiva da multiplicação	M13

Fonte: Elaborada pelo autor.

Os itens de M13 a M18 avaliam as possíveis dificuldades nas simplificações algébricas. O item M13 (Figura 46) apresenta uma expressão algébrica com a simplificação incorreta de somente um dos termos do numerador. Este é um erro comum no Ensino Fundamental (NOTARI, 2002), que, por vezes, perdura até o nível superior, pois os estudantes não veem a divisão da soma como algo similar à propriedade distributiva da multiplicação sobre

a adição, na qual a divisão deve ser operada em cada termo. O item M14 é uma simplificação correta e envolve mais de uma variável no denominador.

Figura 46 – Itens M13 e M14 para a simplificação algébrica

Item M13 – AF			
$\frac{6x^2 + 2y^2}{6} = x^2 + 2y^2$			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Direcionamento
a)	Verdadeiro	EA simplificação algébrica	M15
b)	Falso	EA simplificação algébrica	M14
c)	Não tenho certeza	EA simplificação algébrica	M15
d)	Não sei	EA simplificação algébrica	M15
Item 14 – AV			
$\frac{8yx^2 - 4y^3x}{2xy} = 4x - 2y^2$			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Direcionamento
a)	<b>Verdadeiro</b>	EA simplificação algébrica	M16
b)	Falso	EA simplificação algébrica	M15
c)	Não tenho certeza	EA simplificação algébrica	M15
d)	Não sei	EA simplificação algébrica	M15

Fonte: Elaborada pelo autor.

O item M15 (Figura 47) apresenta uma simplificação incorreta, pois há uma soma de termos no denominador, e o item M16 apresenta uma simplificação correta, que requer a devida fatoração para identificá-la como uma afirmação verdadeira. Esses itens requerem a compreensão das regras formais que regem as transformações necessárias para a correta simplificação e, no caso de errá-las, são evidências de dificuldades associadas ao tema, inclusive referente a conhecimentos prévios como a fatoração.

Figura 47 – Itens M15 e M16 para a simplificação algébrica

Item M15 – AF			
$\frac{4(x - y)}{k + (x - y)} = \frac{4}{k}$			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Direcionamento
a)	Verdadeiro	EA simplificação algébrica	M17
b)	Falso	EA simplificação algébrica	M16
c)	Não tenho certeza	EA simplificação algébrica	M17
d)	Não sei	EA simplificação algébrica	M17
Item M16 – AV			
$\frac{4x - 2xy}{(2 - y)^4} = \frac{x}{2}$			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Direcionamento
a)	<b>Verdadeiro</b>	EA simplificação algébrica	M18
b)	Falso	EA simplificação algébrica	M17
c)	Não tenho certeza	EA simplificação algébrica	M17
d)	Não sei	EA simplificação algébrica	M17

Fonte: Elaborada pelo autor.

O item M17 (Figura 48) apresenta uma expressão algébrica que não pode ser simplificada e, o item M18, uma simplificação correta, mas que não cancela o denominador para um dos termos, para alguns alunos essa simplificação é incorreta.

Figura 48 – Itens M17 e M18 para simplificação algébrica

Item M17 – AF			
$\frac{3x + 2y}{x + 2} = 3 + y$			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Direcionamento
a)	Verdadeiro	EA simplificação algébrica	M19
b)	<b>Falso</b>	EA simplificação algébrica	M18
c)	Não tenho certeza	EA simplificação algébrica	M19
d)	Não sei	EA simplificação algébrica	M19
Item M18 – AV			
$\frac{8x^2 - yx}{x^2} = 8 - \frac{y}{x}$			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Direcionamento
a)	<b>Verdadeiro</b>	EA simplificação algébrica	M19
b)	Falso	EA simplificação algébrica	M19
c)	Não tenho certeza	EA simplificação algébrica	M19
d)	Não sei	EA simplificação algébrica	M19

Fonte: Elaborada pelo autor.

Os itens de M19 a M24 verificam a existência de dificuldades associadas a realizações de operações com frações algébricas. O item M19 apresenta a soma de frações algébricas operada indevidamente, de modo que, se o aluno utiliza da generalização equivocada do produto para a soma de frações, ele incorre no erro apresentado, executando a soma dos numeradores e dos denominadores em procedimento semelhante a multiplicação de frações. O item M20 apresenta a soma de frações algébricas executada de maneira correta realizando o mínimo múltiplo comum antes da soma.

Figura 49 – Itens M19 e M20 para a operações com frações algébricas

Item M19 – AF			
$\frac{5}{y} + \frac{2}{x} = \frac{7}{x + y}$			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Direcionamento
a)	Verdadeiro	EA frações algébricas	M21
b)	<b>Falso</b>	EA frações algébricas	M 20
c)	Não tenho certeza	EA frações algébricas	M21
d)	Não sei	EA frações algébricas	M21
Item M20 – AV			
$\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = \frac{2x + y}{4}$			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Direcionamento
a)	<b>Verdadeiro</b>	EA frações algébricas	M22
b)	Falso	EA frações algébricas	M21
c)	Não tenho certeza	EA frações algébricas	M21
d)	Não sei	EA frações algébricas	M21

Fonte: Elaborada pelo autor.

Os itens de M21 a M27 verificam dificuldades nas operações com frações algébricas. Na Figura 50 os itens M21 e M22 apresentam a operação de divisão com frações algébricas como parte da solução das equações que estabelecem a relação entre  $x$  e  $y$ , sendo o item M21 uma AF com o processo algébrico isolando o  $x$  a esquerda, mas operando a divisão  $6/3$ ; no item M22, uma AV, o procedimento para a divisão de frações é corretamente realizado .

Figura 50 – Itens AF e AV para operações com frações algébricas

Item M21 – AF			
$3x = \frac{y}{6} \Rightarrow x = \frac{y}{6} \Rightarrow x = \frac{y}{2}$			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Direcionamento
a)	Verdadeiro	EA frações algébricas	M23
b)	Falso	EA frações algébricas	Item 22
c)	Não tenho certeza	EA frações algébricas	M23
d)	Não sei	EA frações algébricas	M23
Item M22 – AV			
$\frac{2}{3}x = \frac{y}{6} \Rightarrow x = \frac{y}{2} \Rightarrow x = \frac{y}{4}$			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Direcionamento
a)	Verdadeiro	EA frações algébricas	M24
b)	Falso	EA frações algébricas	M23
c)	Não tenho certeza	EA frações algébricas	M23
d)	Não sei	EA frações algébricas	M23

Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Figura 51 os itens M23 e M24 apresentam variações dos problemas aplicados na pesquisa de Ferreira e Brumatti (2005) relativos a divisão de expressões algébricas. O item M23 apresenta o procedimento equivocado da transformação da divisão em um produto de frações e o item M24, a operação correta da divisão de expressões algébricas. Ressalta-se que as divisões de expressões algébricas apresentam restrições matemáticas, nos casos que as divisões são válidas somente para  $x \neq 0$ , que não foram objeto de avaliação desses itens.

Figura 51 – Itens M23 e M24 para operações com frações algébricas

Item M23 – AF			
$\frac{\frac{x}{4} - 1}{\frac{3}{4} - x} = \left(\frac{x}{4} - 1\right) \cdot \left(\frac{4}{3} - \frac{2}{x}\right)$			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Direcionamento
a)	Verdadeiro	EA frações algébricas	M25
b)	Falso	EA frações algébricas	M24
c)	Não tenho certeza	EA frações algébricas	M25
d)	Não sei	EA frações algébricas	M25
Item M24 – AV			
$\frac{\frac{4x}{3} - x}{2x - \frac{5x}{3}} = 1 \text{ para } x \neq 0$			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Direcionamento
a)	Verdadeiro	EA frações algébricas	M25
b)	Falso	EA frações algébricas	M25
c)	Não tenho certeza	EA frações algébricas	M25
d)	Não sei	EA frações algébricas	M25

Fonte: Elaborada pelo autor.

Os itens de M25 a M30 apresentam equações não polinomiais que requerem a identificação e uso das operações inversas das operações exponenciais, logarítmicas e trigonométricas para a resolução das mesmas. Os itens M25 e M26 (Figura 52) são equações exponenciais, sendo o item M25 uma afirmação incorreta com o desenvolvimento equivocado da solução e, o item M26, a solução correta com o uso da operação de logaritmos.



Figura 52 – Itens M25 e M26 para solução de equações não polinomiais

Item M25 – AF			
$3^x - 2 = 7 \Rightarrow x = \sqrt[3]{5}$			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Direcionamento
a)	Verdadeiro	Solução de equações não polinomiais	M27
b)	<b>Falso</b>	Solução de equações não polinomiais	M26
c)	Não tenho certeza	Solução de equações não polinomiais	M27
d)	Não sei	Solução de equações não polinomiais	M27
Item M26 – AV			
$5^x = 4 \Rightarrow x = \frac{\log 4}{\log 5}$			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Direcionamento
a)	<b>Verdadeiro</b>	Solução de equações não polinomiais	M28
b)	Falso	Solução de equações não polinomiais	M27
c)	Não tenho certeza	Solução de equações não polinomiais	M27
d)	Não sei	Solução de equações não polinomiais	M27

Fonte: Elaborada pelo autor.

Os itens M27 e M28 (Figura 53) são equações trigonométricas, sendo o item M27 uma AF no qual o argumento da função seno é tratado de maneira indevida na resolução da equação. O item M28 apresenta a solução correta da equação com o uso do arcocosseno como operação inversa do cosseno e realizando devidamente a ordem das operações para isolar  $y$ .

Figura 53 – Itens M27 e M28 para solução de equações não polinomiais

Item M27 – AF			
$\text{sen } 2y = 3 \Rightarrow y = \arcsen \frac{3}{2}$			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Direcionamento
a)	Verdadeiro	Solução de equações não polinomiais	M29
b)	<b>Falso</b>	Solução de equações não polinomiais	M28
c)	Não tenho certeza	Solução de equações não polinomiais	M29
d)	Não sei	Solução de equações não polinomiais	M29
Item M28 – AV			
$\cos (3 - y) = 5 \Rightarrow y = 3 - \arccos 5$			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Direcionamento
a)	<b>Verdadeiro</b>	Solução de equações não polinomiais	M30
b)	Falso	Solução de equações não polinomiais	M29
c)	Não tenho certeza	Solução de equações não polinomiais	M29
d)	Não sei	Solução de equações não polinomiais	M29

Fonte: Elaborada pelo autor.

Os itens M29 e M30 (Figura 54) exploram situações, semelhantes as funções trigonométricas, para verificar dificuldades em soluções de equações logarítmicas. O item M29 apresenta uma manipulação indevida do argumento e o item M30 apresenta o correto desenvolvimento da solução da equação logarítmica com o uso adequado da exponencial.

Figura 54 – Itens M29 e M30 para solução de equações não polinomiais

Item M29 – AF			
$\ln(y + 2) = 5 \Rightarrow \ln y = 3$			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Direcionamento
a)	Verdadeiro	Solução de equações não polinomiais	M31
b)	<b>Falso</b>	Solução de equações não polinomiais	M30
c)	Não tenho certeza	Solução de equações não polinomiais	M31
d)	Não sei	Solução de equações não polinomiais	M31
Item M30 – AV			
$5 = \ln(4y) \Rightarrow y = \frac{e^5}{4}$			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Direcionamento
a)	<b>Verdadeiro</b>	Solução de equações não polinomiais	M31
b)	Falso	Solução de equações não polinomiais	M31
c)	Não tenho certeza	Solução de equações não polinomiais	M31
d)	Não sei	Solução de equações não polinomiais	M31

Fonte: Elaborada pelo autor.

Os itens de M31 a M36 verificam a existência de dificuldades relativas à aplicação da operação e aplicação das propriedades dos radicais. Um erro comum é a inferência errônea de que a raiz enésima da soma é a soma das raízes enésimas, levando ao desenvolvimento equivocado como do item M31 (Figura 55). O item M32 apresenta uma igualdade que requer a aplicação de duas propriedades, a raiz enésima do produto é igual ao produto das raízes enésimas e, a raiz enésima de um número elevado à enésima potência é o próprio número.

Figura 55 – Itens M31 e M32 para radiciação

Item 31 – AF			
$\sqrt{x^2 + y^2} = x + y$			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Direcionamento
a)	Verdadeiro	EA radiciação	M33
b)	<b>Falso</b>	EA radiciação	M32
c)	Não tenho certeza	EA radiciação	M33
d)	Não sei	EA radiciação	M33
Item 32 – AV			
$x\sqrt{xy} = \sqrt{x^3y}$			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Direcionamento
a)	<b>Verdadeiro</b>	EA radiciação	M34
b)	Falso	EA radiciação	M33
c)	Não tenho certeza	EA radiciação	M33
d)	Não sei	EA radiciação	M33

Fonte: Elaborada pelo autor.

Os itens M33 e M34 (Figura 56) requerem o uso das mesmas propriedades do item M32, sendo que os dois itens apresentam o correto uso e aplicação das propriedades, mas o item M33 é incorreto pois apresenta uma desigualdade não válida.

Figura 56 – Itens M33 e M34 para radiciação

Item M33 – AF			
$\sqrt{9(x+y)^2} \neq 3x + 3y$			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Direcionamento
a)	Verdadeiro	EA radiciação	M35
b)	<b>Falso</b>	EA radiciação	M34
c)	Não tenho certeza	EA radiciação	M35
d)	Não sei	EA radiciação	M35
Item M34 – AV			
$\sqrt{121 x^4 y^2} = 11x^2 y$			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Direcionamento
a)	<b>Verdadeiro</b>	EA radiciação	M36
b)	Falso	EA radiciação	M35
c)	Não tenho certeza	EA radiciação	M35
d)	Não sei	EA radiciação	M35

Fonte: Elaborada pelo autor.

Os itens M35 e M36 (Figura 57) o radicando apresenta a razão de dois termos, nesse caso a raiz enésima da razão é igual à razão entre as raízes enésimas. Em ambos os itens as propriedades são aplicadas corretamente, mas o item M35 é incorreto pois afirma uma desigualdade entre os termos.

Figura 57 – Itens M35 e M36 para radiciação

Item M35 – AF			
$\sqrt{\frac{16x^2}{2}} \neq 2x\sqrt{2}$			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Direcionamento
a)	Verdadeiro	EA radiciação	M37
b)	<b>Falso</b>	EA radiciação	M36
c)	Não tenho certeza	EA radiciação	M37
d)	Não sei	EA radiciação	M37
Item M36 – AV			
$\sqrt{\frac{x^3}{4y^2}} = \frac{x}{2y}\sqrt{x}$			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Direcionamento
a)	<b>Verdadeiro</b>	EA radiciação	M37
b)	Falso	EA radiciação	M37
c)	Não tenho certeza	EA radiciação	M37
d)	Não sei	EA radiciação	M37

Fonte: Elaborada pelo autor.

Os itens de M37 a M42 têm como objeto de avaliação as dificuldades relativas ao uso adequado das operações e as propriedades da potenciação. Nos itens M37 e M38 (Figura 58) o expoente negativo está aplicado somente no termo literal, sendo que no item M37 a manipulação algébrica é realizada de maneira incorreta e, no item M38 a manipulação algébrica está correta com a reescrita do expoente negativo e fracionário.

Figura 58 – Itens M37 e M38 para potenciação

Item M37 – AF			
$\frac{1}{3x^2} = 3x^{-2}$			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Direcionamento
a)	Verdadeiro	EA potenciação	M39
b)	<b>Falso</b>	EA potenciação	M38
c)	Não tenho certeza	EA potenciação	M39
d)	Não sei	EA potenciação	M39
Item M38 – AV			
$4x^{-\frac{5}{3}} = \frac{4}{\sqrt[3]{x^5}}$			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Direcionamento
a)	<b>Verdadeiro</b>	EA potenciação	M40
b)	Falso	EA potenciação	M39
c)	Não tenho certeza	EA potenciação	M39
d)	Não sei	EA potenciação	M39

Fonte: Elaborada pelo autor.

O item M39 (Figura 59) apresenta um erro comum gerado pela inferência incorreta com soma dos expoentes em uma generalização da propriedade do produto de potências de mesma base. No item M40 esta propriedade é devidamente aplicada realizando os produtos das potências.

Figura 59 – Itens AF e AV para potenciação

Item M39 – AF			
$x^2 + x^3 = x^5$			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Direcionamento
a)	Verdadeiro	EA potenciação	M41
b)	<b>Falso</b>	EA potenciação	M40
c)	Não tenho certeza	EA potenciação	M41
d)	Não sei	EA potenciação	M41
Item M40 – AV			
$4a^4 5a^3 = 20a^7$			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Direcionamento
a)	<b>Verdadeiro</b>	EA potenciação	M42
b)	Falso	EA potenciação	M41
c)	Não tenho certeza	EA potenciação	M41
d)	Não sei	EA potenciação	M41

Fonte: Elaborada pelo autor.

Outro erro comum aparece no item M41 (Figura 60) não identificando como sendo o quadrado da diferença de dois termos e realizando a operação da potência em cada um dos termos. O item M42, apresenta uma igualdade correta com uma potência cúbica.

Figura 60 – Itens AF e AV para potenciação

Item M41 – AF			
$(x - y)^2 = x^2 + y^2$			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Direcionamento
a)	Verdadeiro	EA potenciação	Fim
<b>b)</b>	<b>Falso</b>	EA potenciação	M42
c)	Não tenho certeza	EA potenciação	Fim
d)	Não sei	EA potenciação	Fim
Item M42 – AV			
$(x - 1)^3 = -(1 - x)^3$			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Direcionamento
<b>a)</b>	<b>Verdadeiro</b>	EA potenciação	Fim
b)	Falso	EA potenciação	Fim
c)	Não tenho certeza	EA potenciação	Fim
d)	Não sei	EA potenciação	Fim

Fonte: Elaborada pelo autor.

O teste diagnóstico de Matemática com os conceitos de álgebra possui 42 itens que são apresentados ao respondente, conforme o desempenho do mesmo durante a realização da avaliação e definidos pelas regras de encadeamento apresentadas no início do capítulo .

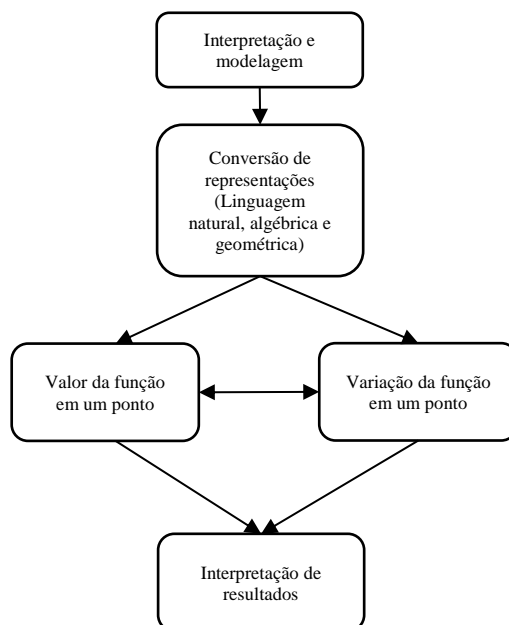
### 5.3.2 Resolução de problemas

Para a construção da avaliação diagnóstica *Resolução de problemas* foram idealizadas três situações contextualizadas para explorar o desenvolvimento de problemas matemáticos envolvendo as habilidades, conceitos e procedimentos apresentados na matriz de referência para identificar as dificuldades dos alunos durante a resolução dos problemas. As situações idealizadas foram:

- o projeto de uma montanha-russa que se utiliza de duas funções para definir parte do seu traçado;
- a trajetória de uma bola chutada para a frente e para o alto;
- a análise da temperatura de uma solução em um congelador que tem sua porta aberta em dado momento.

Os desdobramentos destas situações-problema em subproblema para avaliação das dificuldades que ocorrem em cada etapa proposta por Polya (1946) para a resolução de problemas, ou seja, cada situação foi dividida avaliando as capacidades e competências em Interpretação e modelagem; conversão de representações; identificação e execução dos métodos e algoritmos necessários para a resolução do problema; verificação dos resultados dentro do contexto do problema.

O modelo de resolução, verificando as dificuldades em cada uma das etapas para a resolução do problema, foi organizado de acordo com o diagrama apresentado na Figura 61.

Figura 61 – Organização da avaliação *Resolução de problemas*

Fonte: Elaborada pelo autor.

Em *interpretação e modelagem* identifica-se as dificuldades associadas a interpretação do enunciado do problema e identificação do modelo gráfico (função quadrática, função exponencial, função polinomial envolvendo as funções cúbica e quadrática).

No bloco *conversão de representações* são verificadas a existência de dificuldades relativas a conversões entre as representações gráfica, algébrica e a linguagem natural (identificando a denominação da função).

Nos blocos *Valor da função em um ponto* e *Variação da função em um ponto*, objetiva-se verificar se o aluno é capaz de distinguir qual das duas informações é solicitada, qual das variáveis o problema solicita o cálculo, a dependente ou a independente, e se apresenta dificuldades na solução das equações. Além disso, no bloco *Variação da função em um ponto* solicita-se o cálculo da derivada primeira, com o objetivo de identificar se o estudante apresenta dificuldades no uso das regras de derivada, e questionamentos para verificar a compreensão da característica de variação nula e sua relação com os pontos críticos da função.


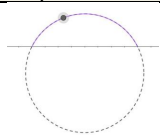
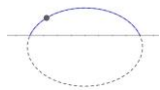

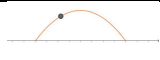
O bloco *Interpretação de resultados no contexto* analisa se o aluno verifica o resultado do seu cálculo executado dentro do contexto da situação-problema, procurando evidências que para o aluno o cálculo é um mero procedimento desprovido de sentido.

### 5.3.2.1 Situação Problema 1

Na situação-problema 1 (P1), apresentada na Figura 62, o objeto de avaliação é a modelagem do problema, que neste caso se limita a verificar se o respondente identifica a parábola como sendo o modelo gráfico da situação que se apresenta. Os conceitos ou procedimentos associados com as opções incorretas indicam uma possível dificuldade relacionada com a escolha da mesma. Em P1, as opções não corretas são os modelos gráficos das funções cônicas, que também apresentam trajetórias curvas, sendo consideradas distratores, pois o estudante pode identifica-las como sendo possíveis trajetórias para a bola.

Apesar de se tratar de uma situação comum do cotidiano, a trajetória do lançamento de um objeto não é algo que seja observado em detalhes por todos. O propósito deste item de avaliação é dar um início à sequência de atividades para a resolução da situação-problema.

Figura 62 – Pergunta 1 da Situação Problema 1

Pergunta 1 - P1			
		Uma criança chuta uma bola parada no chão de modo que ela vai para frente e para cima. Qual gráfico melhor representa a trajetória aproximada da bola do momento em que é chutada até quando ela toca o solo novamente?	
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Direcionamento
a)		Modelagem do problema	P2
b)		Modelagem do problema	P2
c)		Modelagem do problema	P2
d)		<b>Modelagem do problema</b>	<b>P3</b>
e)	Entendo o problema, mas não sei qual é.	Modelagem do problema	P4
f)	Não entendi o que pede.	Interpretação do enunciado	P4

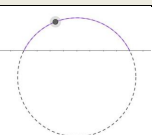
Fonte: Elaborada pelo autor.

Os itens aos quais o aluno pode responder são apresentados de acordo com a organização da sequência definida pelo autor da avaliação, neste caso os distratores direcionam para o item P2. O modelo correto, com a representação da função quadrática, leva ao item P3 e, as alternativas *Entendo o problema, mas não sei qual é* e *Não entendi o que pede* encaminham para o item P4, que apresenta o modelo correto de P1 dando prosseguimento a outras perguntas sobre a situação-problema.

O item P2 (Figura 63) tem como objeto de avaliação a conversão do modelo gráfico para a linguagem natural, identificando se o respondente desconhece a correta denominação da

função para o modelo escolhido em P1, que neste caso é *segmento de arco*. As opções incorretas redirecionam para o item P6 que avalia as dificuldades na identificação das denominações dos gráficos das funções. A alternativa *Não sei o nome* encaminha para o item P4, que dá prosseguimento na avaliação.

Figura 63 – Pergunta 2 da situação-problema 1

Pergunta 2 – P2			
		Então trajetória selecionada tem a forma:	
Opção	Resposta	Dificuldade identificada	Direcionamento
a)	da função linear	Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis	P6
b)	da função quadrática	Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis	P6
c)	da função cúbica	Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis	P6
d)	da função exponencial	Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis	P6
e)	da função raiz	Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis	P6
f)	<b>de um segmento de arco</b>	<b>Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis</b>	<b>P5</b>
g)	Não sei o nome	Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis	P4

Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Figura 64 apresenta-se o item P3 com enunciado e opções idênticas ao item P2, porém com a opção correta definida de acordo com o modelo gráfico selecionado em P1. Por se originar da escolha da parábola como modelo gráfico, a opção correta é a função quadrática e, como em P2, as opções incorretas encaminham para P6 que busca comprovar dificuldades nas denominações dos modelos gráficos.

Figura 64 – Pergunta 3 da situação-problema 1

Pergunta 3 – P3			
Então trajetória aproximada da bola do momento em que é chutada até quando ela toca o solo novamente tem a forma:			
Opção	Resposta	Dificuldade identificada	Direcionamento
a)	da função linear	Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis	P6
<b>b)</b>	<b>da função quadrática</b>	<b>Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis</b>	<b>P4</b>
c)	da função cúbica	Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis	P6
d)	da função exponencial	Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis	P6
e)	da função raiz	Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis	P6
f)	de um segmento de arco	Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis	P6
g)	Não sei o nome	Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis	P4

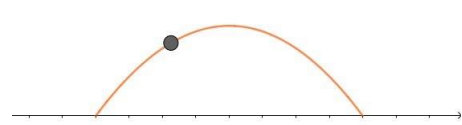
Fonte: Elaborada pelo autor.

Ainda dentro da conversão de representações, após denominar o modelo gráfico da situação-problema o aluno é encaminhado para itens que solicitam o modelo algébrico de acordo com a denominação selecionada, sendo encaminhado para P4 ou P5. O item P4 (Figura 65) é sequência da opção *função quadrática* de P3 e também das alternativas *Entendo o problema, mas não sei qual é* ou *Não entendi o que pede* de P1. Estes encaminhamentos são assim definidos pois entende-se uma dificuldade não pode ser impeditivo na avaliação de outras competências relacionadas aos outros conceitos e procedimentos envolvidos na resolução de problemas, deste modo o item P4 apresenta o modelo gráfico e a denominação correta da



situação e solicita a representação algébrica; depois é dada a sequência da avaliação encaminhando para P8.

Figura 65 – Pergunta 4 da situação-problema 1

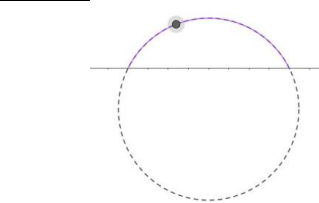
Pergunta 4 – P4			
		<p>A trajetória da bola tem a forma de uma função é uma quadrática. A função que melhor expressa a altura (h) em relação e a distância (d) com <math>d=0</math> o ponto onde a bola é chutada será a:</p>	
Opção	Resposta	Dificuldade identificada	Direcionamento
a)	$d = k h^2$ , para $k \in \mathbb{R}_+$	Relação de dependência	P8
b)	$h = k d^2$ , para $k \in \mathbb{R}_+$	Representação geométrica e algébrica das funções notáveis	P8
c)	$d = -k h^2$ , para $k \in \mathbb{R}_+$	Relação de dependência	P8
d)	$h = -k d^2$ , para $k \in \mathbb{R}_+$	Representação geométrica e algébrica das funções notáveis	P8
e)	$d = -k h^2 + w h$ , para $k, w \in \mathbb{R}_+$	Relação de dependência	P8
f)	$h = -k d^2 + w d$ , para $k, w \in \mathbb{R}_+$	<b>Representação geométrica e algébrica das funções notáveis</b>	P8
g)	Não sei qual a função	Representação geométrica e algébrica das funções notáveis	P8

Fonte: Elaborada pelo autor.

O item P4 solicita a representação algébrica da parábola que descreve a função da altura em relação a distância horizontal da bola em relação ao ponto inicial. Entre os distratores há alternativas com relações de dependência equivocadas apresentando representações algébricas com a distância dada em relação a altura e transformações equivocadas da função quadrática considerando  $h=0$  em  $d=0$ .

O item P5 (Figura 66) é sequência do item P2 para a alternativa que define a trajetória da bola como um segmento de arco e verifica se o respondente identifica a representação correta para o modelo gráfico apresentado, que neste caso é a circunferência de centro transladado:  $(d - a)^2 + (h + b)^2 = k$  para  $k, a, b \in \mathbb{R}_+$ .

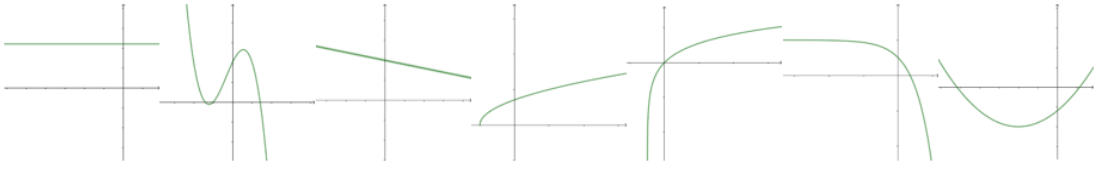
Figura 66 – Pergunta 5 da situação-problema 1

Pergunta 5 – P5			
		<p>Para a trajetória da bola na forma de um segmento de arco. A função que melhor expressa a relação entre a altura (h) e distância (d) com <math>d=0</math> o ponto onde a bola é chutada será a:</p>	
Opção	Resposta	Dificuldade identificada	Direcionamento
a)	$d^2 + h^2 = k$ para $k \in \mathbb{R}_+$	Representação geométrica e linguagem natural das cônicas	P6
b)	$\frac{d^2}{a^2} + \frac{h^2}{b^2} = 1$ para $a, b \in \mathbb{R}_+$	Representação geométrica e linguagem natural das cônicas	P6
c)	$\frac{d^2}{a^2} - \frac{h^2}{b^2} = 1$ para $a, b \in \mathbb{R}_+$	Representação geométrica e linguagem natural das cônicas	P6
d)	$(d - a)^2 + (h + b)^2 = k$ para $k, a, b \in \mathbb{R}_+$	<b>Representação geométrica e linguagem natural das cônicas</b>	<b>P8</b>
e)	Não sei qual a função	Representação geométrica e linguagem natural das cônicas	P6

Fonte: Elaborada pelo autor.

O item P6 (Figura 67) apresenta as funções notáveis transformadas (constante, linear, quadrática, cúbica, raiz, logarítmica, exponencial) e solicita a denominação das mesmas. Este item é apresentado na sequência das alternativas incorretas dos itens P2, P3, P5.

Figura 67 – Pergunta 6 da situação-problema 1

Pergunta 6 – P6			
			
Escolha a opção que apresenta a sequência correta dos nomes das funções notáveis transformadas.			
Opção	Resposta	Dificuldade identificada	Direcionamento
a)	Constante, cúbica, linear, logarítmica, exponencial, raiz, quadrática	Representação geométrica e algébrica das funções notáveis	P8
b)	Linear, cúbica, constante, logarítmica, raiz, exponencial, quadrática	Representação geométrica e algébrica das funções notáveis	P8
c)	<b>Constante, cúbica, linear, raiz, logarítmica, exponencial, quadrática</b>	<b>Representação geométrica e algébrica das funções notáveis</b>	P8
d)	Constante, cúbica, linear, raiz, exponencial, logarítmica, parabólica	Representação geométrica e algébrica das funções notáveis	P8
e)	Não sei todos os nomes	Representação geométrica e algébrica das funções notáveis	P8

Fonte: Elaborada pelo autor.

Após a etapa de identificação do modelo e as conversões de representação, os encaminhamentos convergem para o item P8 (Figura 68) que analisa se o respondente entende o significado do resultado de  $h(9)$ . Neste caso os distratores  $a$  e  $d$  apresentam a interpretação de que o resultado de  $h(9)$  está relacionado a variação da altura enquanto as alternativas  $b$  e  $c$  tem a interpretação correta associando o resultado a altura da bola em relação ao solo, mas a opção  $b$  é um distrator que apresenta o valor da altura para o cálculo equivocado de  $h(9)$  como sendo  $\frac{(-9)^2 + 16 \times 9}{12}$ .

Figura 68 – Pergunta 8 da situação-problema 1

Pergunta 8 – P8			
$h(d) = \frac{-d^2 + 16d}{12}$		Com a função dada para a trajetória aproximada da bola. Qual o significado de $h(9)$ ?	
Opção	Resposta	Dificuldade identificada	Direcionamento
a)	A bola está a descendo.	Conceito de variação	P10
b)	A bola está a 18,75m do chão	EA potenciação	P10
c)	<b>A bola está a 5,25m do chão</b>	<b>Conceito de valor</b>	<b>P7</b>
d)	A bola está a subindo.	Conceito de variação	P10
e)	Não entendi o que é pedido.	Interpretação do enunciado	P10
f)	Não sei fazer	Interpretação do enunciado	P10

Fonte: Elaborada pelo autor.

O item P7 (Figura 69) está sendo apresentado após P8, pois primeiro foi realizado o cadastro dos itens e depois o encadeamento durante o qual identificou-se que o item P7 ajudaria na solução de P8 pois seu enunciado associa o cálculo da altura com a distância, logo seu encadeamento e sua apresentação estão posteriores a P8.

O distrator  $a$  apresenta uma solução numérica equivocada caso  $h(17)$  seja calculado como  $\frac{(-17)^2 + 16 \times 17}{12}$ . O cálculo da altura para a distância de 17m é -1,4146, mas uma altura negativa não faz sentido, logo a alternativa  $b$  está associada a problemas de interpretação do

resultado assim como a alternativa *c* que apresenta o módulo do resultado de *b*. A resposta correta seria a opção *e* que afirma que o resultado numérico calculado não permite realizar uma afirmação sobre a altura da bola. As alternativas *f* e *g* estão associados a dificuldades na interpretação do problema.

Figura 69 – Perguntas 7 da situação-problema 1

Pergunta 7 – P7			
$h(d) = \frac{-d^2 + 16d}{12}$		Com base na função dada identifique a quantos metros de altura se encontra a bola quando a projeção horizontal da bola estiver distante 17m do ponto inicial.	
Opção	Resposta	Dificuldade identificada	Direcionamento
a)	46,75	EA potenciação	P10
b)	-1,4146	Verificação do resultado no contexto	P10
c)	21,5	EA potenciação	P10
d)	1,4146	Verificação do resultado no contexto	P10
e)	<b>Não é possível afirmar, pelo resultado calculado.</b>	<b>Verificação do resultado no contexto</b>	<b>P10</b>
f)	Não entendi o que é pedido.	Interpretação do problema	P10
g)	Não sei fazer	Interpretação do problema	P10

Fonte: Elaborada pelo autor.

Os itens P7 e P8 encaminham para o item P10 que solicita o cálculo da derivada da função que apresenta a alternativa *d* como correta e as alternativas *a*, *b* e *c* como distratores com desenvolvimento equivocado na simplificação do cálculo da derivada, evidenciando dificuldades algébricas.

Figura 70 – Pergunta 10 da situação-problema 1

Pergunta 10 – P10			
$h(d) = \frac{-d^2 + 16d}{12}$		Considerando a função abaixo, para <i>h</i> a altura e <i>d</i> a distância. A derivada de <i>h</i> ( <i>d</i> ) é dada pela função:	
Opção	Resposta	Dificuldade identificada	Direcionamento
a)	$\frac{\partial h}{\partial d} = -\frac{d}{6} + 16$	EA simplificação	P11
b)	$\frac{\partial h}{\partial d} = -d + \frac{8}{6}$	EA simplificação	P11
c)	$h'(d) = -\frac{2d + 16}{12}$	EA simplificação	P11
d)	$\frac{\partial h}{\partial d} = -\frac{d}{6} + \frac{4}{3}$	<b>Cálculo derivada</b>	<b>P11</b>
e)	Não sei calcular	Cálculo derivada	<b>P11</b>

Fonte: Elaborada pelo autor.

O item P10 encaminha para o item P11 (Figura 71) que solicita a interpretação do resultado da derivada em um ponto. O objetivo é verificar se o respondente compreende que o resultado está associado a variabilidade da função em um ponto e qual o significado do valor numérico em relação às variáveis envolvidas que neste caso, tem a opção *d* como a correta. O distrator *a* está associado a interpretação equivocada do resultado da derivada ao valor da função em um ponto, a alternativa *b* está associado a interpretação de variação decrescente por ter um valor menor que 1 e a alternativa *c*, apesar de ter a interpretação correta da variação crescente ela associa as unidades distância e tempo; e a alternativa *e* apresenta a ideia de valor médio.

Figura 71 – Pergunta 11 da situação-problema 1

Pergunta 11			
$h(d) = \frac{-d^2 + 16d}{12}$		A função $h(d)$ que estabelece a relação entre a altura da bola e a distância (projeção horizontal), tem como derivada a função $h'(d)$ . Pode-se interpretar o significado de $h'(7,1)=0,15$ como:	
Opção	Resposta	Dificuldade identificada	Direcionamento
a)	A bola está a uma altura de 0,15m.	Conceito de valor	P9
b)	$h'(7,1) < 1$ , logo a bola está descendo.	Conceito de variação	P9
c)	A bola está subindo a 0,15 m/s	Verificação do resultado no contexto	P9
d)	<b>A bola está subindo a 0,15 m por m</b>	Verificação do resultado no contexto	S1
e)	em 8,1m de distância a bola estará 0,15m mais alta que em 7,1m de distância	Conceito de variação	P9
f)	Não tem cálculo a ser realizado	Conceito de variação	S1
g)	Não sei o significado	Conceito de variação	S1

Fonte: Elaborada pelo autor.

Quando P11 é respondido incorretamente o encaminhamento é realizado para a próxima situação-problema, se respondido corretamente o encaminhamento ocorre para P9 (Figura 72) que questiona sobre a condição da variação da altura, no ponto 7,1. Neste caso os distratores *a*, *b*, *c* e *f* apresentam justificativas equivocadas e o distrator *e* uma resposta incompleta.

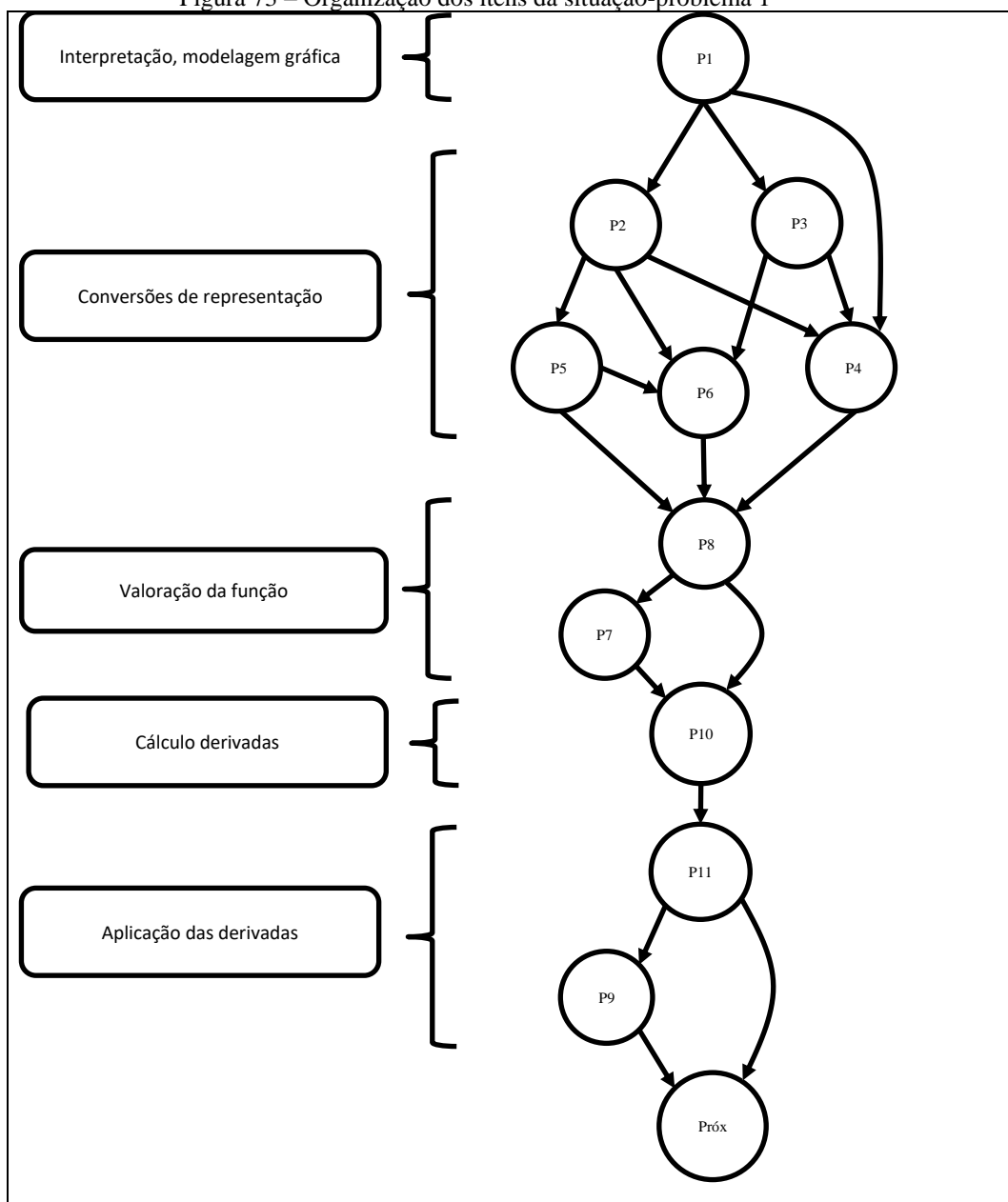
Figura 72 – Pergunta 9 da situação-problema 1

Pergunta 9			
$h(d) = \frac{-d^2 + 16d}{12}$		Considerando que em sua trajetória a bola primeiro sobe e depois desce de acordo com a função abaixo, para $h$ a altura e $d$ a distância. Quando a bola estiver a 7,1m de distância, ela estará subindo ou descendo?	
Opção	Resposta	Dificuldade identificada	Direcionamento
a)	subindo porque $h(7,1)$ é positivo.	Conceito de valor	S1
b)	descendo porque $h(7)-h(7,1)$ é negativo.	Conceito de variação	S1
c)	descendo porque $h'(7,1)$ é negativo.	Conceito de variação	S1
d)	<b>subindo porque <math>h'(7,1)</math> é positivo.</b>	<b>Conceito de variação</b>	<b>S1</b>
e)	calcular $h'(d)$	Conceito de variação	S1
f)	Não está subindo nem descendo porque é ponto de máximo.	Característica de ponto crítico	S1
g)	Não sei o que fazer.	Interpretação do enunciado	S1

Fonte: Elaborada pelo autor.

Como as perguntas são selecionadas pelos encaminhamentos cadastrados nas respostas das perguntas, os alunos podem passar por sequências distintas de perguntas de acordo com suas opções de resposta. A Figura 73 apresenta os possíveis encaminhamentos da situação-problema 1 na forma de um grafo onde cada aresta representa um possível direcionamento. Também se apresenta a esquerda as etapas associadas aos itens de avaliação.

Figura 73 – Organização dos itens da situação-problema 1

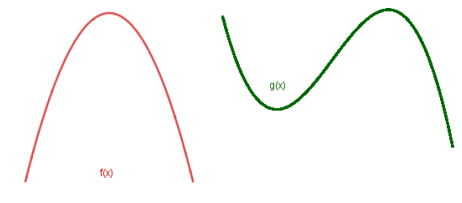


Fonte: Elaborada pelo autor.

### 5.3.2.2 Situação-problema 2

Na situação-problema 2 (S1), apresentada na Figura 74, não é solicitado o modelo gráfico, o mesmo é fornecido no enunciado, sendo a conversão entre a representação gráfica e a linguagem natural o objeto de avaliação, que neste caso se resume a verificar se o respondente identifica a denominação das curvas apresentadas. Como nos itens da situação-problema 1, a opção indicada em **negrito** apresenta a opção.

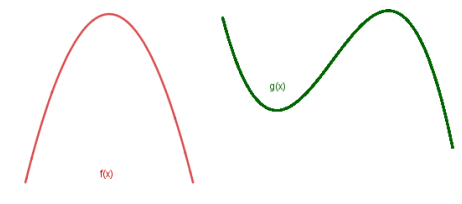
Figura 74 – Pergunta 2 da Situação-problema 2

Situação-problema 2 - S1			
Um engenheiro está projetando uma montanha-russa utilizando 2 funções para definir o traçado de um trecho dela. Determine pelo desenho quais as funções utilizadas.			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Direcionamento
a)	Parábola e Seno	Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis	S2
b)	Parábola e Cosseno	Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis	S2
c)	<b>Quadrática e Cúbica</b>	<b>Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis</b>	S2
d)	Quadrática e Seno	Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis	S2
e)	Não sei o nome de um dos gráficos	Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis	S3
f)	Não sei o nome dos gráficos	Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis	S3

Fonte: Elaborada pelo autor.

Em S1 a alternativa correta e os distratores encaminham para S2 que solicita as representações algébricas das funções apresentadas em S1. Para as opções *Não sei o nome de um dos gráficos* ou *Não sei o nome dos gráficos*, o respondente é encaminhado para S3. No item S2 (Figura 75) os modelos gráficos não apresentam referência aos eixos ou informações adicionais sobre alguma translação, logo espera-se que o aluno identifique a função pela sua característica, ressalta-se que a função cúbica apresentada difere da representação de  $x^3$ . O gráfico da parábola é trabalhado nas disciplinas de matemática do Ensino Fundamental e as alternativas verificam se o respondente identifica a correta representação algébrica referente a reflexão horizontal da função quadrática. As alternativas para a representação algébrica de  $g(x)$  são as funções trigonométricas presentes nos distratores *a*, *b* e *c*, as demais alternativas apresentam a função cúbica como opções, mas tendo a opção *d* como sendo a correta. Todos os distratores identificam provável problema com as representações das funções.

Figura 75 – Pergunta 2 da Situação-problema 2

Pergunta 2 – S2			
As representações algébricas das funções são respectivamente:			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Direcionamento
a)	$f(x) = -x^2 + a$ $g(x) = -sen(x)$	Representação geométrica e algébrica das funções notáveis	S3
b)	$f(x) = -x^2 + a$ $g(x) = cos(x)$	Representação geométrica e algébrica das funções notáveis	S3
c)	$f(x) = x^2 + a$ $g(x) = -sen(x)$	Representação geométrica e algébrica das funções notáveis	S3
d)	$f(x) = x^2 + a$ $g(x) = x^3$	Representação geométrica e algébrica das funções notáveis	S3
e)	$f(x) = -x^2$ $g(x) = -x^3 + ax$	<b>Representação geométrica e algébrica das funções notáveis</b>	S3
f)	$f(x) = -x^2$ $g(x) = x^3 + ax$	Representação geométrica e algébrica das funções notáveis	S3
g)	Não sei qual o gráfico	Representação geométrica e algébrica das funções notáveis	S3
h)	Tenho dúvidas de qual é o gráfico	Representação geométrica e algébrica das funções notáveis	S3

Fonte: Elaborada pelo autor.

O item S3 ( Figura 76) apresenta um enunciado para avaliar dificuldades na compreensão do uso das derivadas para solução da situação apresentada. Para uma transição suave é preciso que as derivadas sejam a mesma em um ponto. Considera-se que os distratores  $a$  e  $c$ , indicam que não há a compreensão do conceito de valor da função e sua aplicação, dada a situação exigida no problema. O distrator  $d$  utiliza as derivadas das funções e atende a condição de transição suave, mas em uma situação particular que não em *descidas acentuadas*, logo considera-se que há dificuldades na interpretação do problema.

Figura 76 – Pergunta 3 da Situação-problema 2

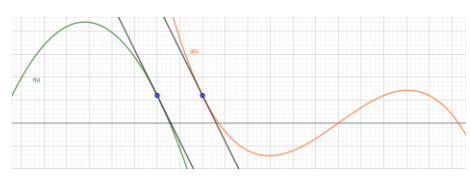
Pergunta 3 – S3			
Em uma montanha-russa o carrinho deve proporcionar sensações fortes, para isso o traçado explora situações de descidas acentuadas e velocidades altas. Para evitar trancos e sobressaltos as transições entre as curvas têm de ser suaves, ou seja, sem uma mudança brusca na trajetória. Para isso é necessário que seja atendida a condição:			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Direcionamento
a)	$f(x_1) = g(x_1)$	Conceito de valor	S4
b)	$f'(x_1) = g'(x_1)$	<b>Conceito de variação; derivada primeira</b>	<b>S4</b>
c)	$\begin{cases} f(x_1) = 0 \\ g(x_1) = 0 \end{cases}$	Conceito de valor	S4
d)	$\begin{cases} f'(x_1) = 0 \\ g'(x_1) = 0 \end{cases}$	Conceito de variação; derivada primeira	S4
e)	Não sei qual a condição	Modelagem do problema	S4
f)	Não entendi o que fazer	Interpretação do enunciado	S4

Fonte: Elaborada pelo autor.

Na sequência de S3 apresenta-se S4 que afirma que para uma transição suave é necessário que ambas as funções tenham a mesma inclinação, inclusive utiliza como imagem suporte, retas tangentes as funções. Como informação para delimitar o ponto de transição exige-se que a inclinação de descida seja de  $2m/m$ , ou seja, uma variação de  $-2m/m$ . Tem-se que

o enunciado solicita os pontos que atendem essa condição, logo as opções *a*, *b*, *e* e *f* que valoram as funções e as funções derivadas em 2 e -2, indicam dificuldades nos conceitos de valor e de variação respectivamente. O distrator *c* e *g* apresentam as funções, e não suas derivadas, indicando o uso equivocado do valor da função em um ponto para identificar os pontos com a mesma inclinação nas funções.

Figura 77 – Pergunta 4 da Situação-problema 2

Pergunta 4 – S4			
Para uma transição suave é necessário que a inclinação no ponto de união das curvas seja a mesma. A montanha-russa deve proporcionar a máxima emoção e o carrinho não pode ficar em um trilho com inclinação maior do que 2 senão ele cai, ou seja, a inclinação máxima de descida é de no máximo 2m na vertical para cada 1m na horizontal. Para as funções $f(x_1)$ e $g(x_2)$ para determinar o valor de $x_1$ e $x_2$ que atendem essa condição, devemos solucionar:			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Direcionamento
a)	$f(2) = g(2)$	Conceito de valor	S5
b)	$f'(2) = g'(2)$	Conceito de variação; derivada primeira	S5
c)	$\begin{cases} f(x_1) = 2 \\ g(x_2) = 2 \end{cases}$	Conceito de valor	S5
d)	$\begin{cases} f'(x_1) = 2 \\ g'(x_2) = 2 \end{cases}$	Conceito de variação; derivada primeira	S5
e)	$f(-2) = g(-2)$	Conceito de valor	S5
f)	$f'(-2) = g'(-2)$	Conceito de variação; derivada primeira	S5
g)	$\begin{cases} f(x_1) = -2 \\ g(x_2) = -2 \end{cases}$	Conceito de valor	S5
h)	$\begin{cases} f'(x_1) = -2 \\ g'(x_2) = -2 \end{cases}$	<b>Conceito de variação; derivada primeira</b>	S5
i)	Entendi, mas não sei o que fazer	Conceito de variação; derivada primeira	S5
j)	Não entendi o que fazer	Interpretação do enunciado	S5

Fonte: Elaborada pelo autor.

O item S5 apresenta em seu enunciado a condição para a transição suave entre as curvas, solicitando o cálculo da derivada da função  $g(x)$  e apresentando os desenvolvimentos do cálculo da derivada como alternativas. O distrator *a* apresenta uma simplificação equivocada, o distrator *b* não aplica a regra da cadeia e os distratores *c* e *d* apresentam respectivamente a operação de potenciação incorreta e a operação da multiplicação aplicada antes da potenciação. Os distratores e a opção correta encaminham para S6 que também requer o cálculo das derivadas.

Nas opções *f* e *g* o respondente tem a possibilidade de externar suas dificuldades no cálculo das derivadas ao não identificar a alternativa correta, neste caso o encaminhamento é para S7 que verifica os conceitos de derivadas.



Figura 78 – Pergunta 5 da Situação-problema 2

Pergunta 5 – S5			
Para evitar trancos e sobressaltos as transições entre as curvas têm de ser suaves, ou seja, a inclinação no ponto de união das curvas tem de ser a mesma, logo $f'(x_1)$ e $g'(x_2)$ devem ter o mesmo valor. Para as funções $f(x_1)$ e $g(x_2)$ devemos primeiro determinar a derivada das funções. Para a $g(x)$ dada, a $g'(x_2)$ será:			
$g(x_2) = -\left(\frac{x_2 - 40}{10}\right)^3 + 7\frac{(x_2 - 40)}{10}$			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Direcionamento
a)	$g(x_2) = -(x_2 - 4)^3 + 7(x_2 - 4)$ $\frac{\partial g}{\partial x} = -3(x_2 - 4)^2 + 7$ $\frac{\partial g}{\partial x} = -3(x_2)^2 + 24x_2 - 41$	EA simplificação com frações	S6
b)	$g(x_2) = -\left(\frac{x_2}{10} - \frac{40}{10}\right)^3 + \frac{7}{10}(x_2 - 40)$ $\frac{\partial g}{\partial x} = -3\left(\frac{x_2}{10} - 4\right)^2 + \frac{7}{10}$ $\frac{\partial g}{\partial x} = -3(x_2)^2 - \frac{12}{5}x_2 - \frac{472}{100}$	EA simplificação com frações	S6
c)	$g(x_2) = -\left(\frac{(x_2)^3}{10^3} - 4^3\right) + \frac{7x_2 - 280}{10}$ $\frac{\partial g}{\partial x} = -\left(\frac{3(x_2)^2}{10^3}\right) + \frac{7}{10}$ $\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{3(x_2)^2}{1000} + \frac{7}{10}$	EA potenciação	S6
d)	$g(x_2) = -\left(\frac{x_2 - 40}{10}\right)^3 + \frac{7}{10}(x_2 - 40)$ $\frac{\partial g}{\partial x} = -3\left(\frac{x_2 - 40}{10}\right)^2 \left(\frac{1}{10}\right) + \frac{7}{10}$ $\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{3}{10}\left(\frac{x_2 - 40}{10}\right)^2 + \frac{7}{10}$ $\frac{\partial g}{\partial x} = \left(\frac{-3x_2 + 120}{100}\right)^2 + \frac{7}{10}$	EA potenciação	S6
e)	$g(x_2) = -\frac{(x_2 - 40)^3}{1000} + \frac{7x_2 - 28}{10}$ $\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{3(x_2 - 40)^2}{1000} + \frac{7}{10}$ $\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{3}{1000}(x_2)^2 + \frac{6}{25}x_2 - \frac{41}{10}$	Cálculo da derivada	S6
f)	Não sei calcular a derivada	Cálculo da derivada	S7
g)	Tenho dúvidas de qual solução está correta	Cálculo da derivada	S7

Fonte: Elaborada pelo autor.

O item S6 (Figura 79) solicita que seja determinada a altura no ponto onde a derivada é -2, para isto é necessário primeiro calcular o ponto e depois o valor da função no ponto calculado.

Os distratores *b* e *c* apresentam os cálculos de  $f(-2)$  indicando a falta de compreensão da aplicação do cálculo do valor da função na situação-problema, sendo que o resultado de *c* é obtido quando há um erro na operação da potenciação. O distrator *d* apresenta o cálculo do ponto que satisfaz  $f'(x) = -2$ , ou seja, o problema é parcialmente resolvido pois não foi calculado o valor da função no ponto, neste caso não foi realizada a devida verificação e interpretação do resultado do problema.

Figura 79 – Pergunta 6 da Situação-problema 2

Pergunta 6 – S6			
Parte do trajeto da montanha-russa que relaciona a altura com a posição horizontal do carrinho é dado por $f(x_1)$ , determine qual a altura do carrinho quando ele estiver no ponto onde a inclinação é de -2.			
$f(x_1) = -\left(\frac{x_1 + 6}{4}\right)^2 + 22$			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Direcionamento
a)	6m	Interpretação do problema	S7
b)	21m	Conceito de valor	S7
c)	23m	EA potenciação	S7
d)	10m	Verificação do resultado no contexto	S7
e)	Não sei o que fazer	Interpretação do enunciado	S7
f)	Não entendi o que fazer	Interpretação do enunciado	S7

Fonte: Elaborada pelo autor.

O item S7 (Figura 80) indica os pontos de máximo e mínimo da função e solicita a identificação das características de valor e de variação nos pontos que tem como resposta correta a alternativa *c*. O distrator *a* e *e* apresentam a primeira derivada das funções igual a zero, característica válida para os pontos críticos apresentados, mas com as derivadas segundas incorretas. O distratores *b* e *d* têm a derivada primeira diferentes de zero e as derivadas segundas iguais a zero, todos os distratores indicam desconhecimento das características de variação da função em seus pontos críticos.

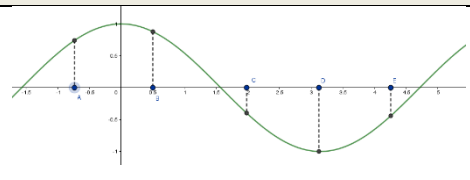
Figura 80 – Pergunta 7 da Situação-problema 2

Pergunta 7 – S7			
A montanha-russa projetada tem uma parte que é submersa em uma piscina artificial. Considerando o trajeto apresentado sabe-se que o ponto mais baixo e mais alto tem as seguintes características.			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Direcionamento
a)	$\begin{cases} f'(a) = 0; f''(a) > 0 \\ g'(b) = 0; g''(b) < 0 \end{cases}$	Característica de ponto crítico	S8
b)	$\begin{cases} f'(a) < 0; f''(a) = 0 \\ g'(b) > 0; g''(b) = 0 \end{cases}$	Característica de ponto crítico	S8
c)	$\begin{cases} f'(a) = 0; f''(a) < 0 \\ g'(b) = 0; g''(b) > 0 \end{cases}$	<b>Característica de ponto crítico</b>	S8
d)	$\begin{cases} f'(a) > 0; f''(a) = 0 \\ g'(b) < 0; g''(b) = 0 \end{cases}$	Característica de ponto crítico	S8
e)	$\begin{cases} f'(a) = 0; f''(a) = 0 \\ g'(b) = 0; g''(b) = 0 \end{cases}$	Característica de ponto crítico	S8
f)	Não sei as características em a e b	Característica de ponto crítico	S8
g)	Não sei o significado de $f''(x)$	Interpretação de derivada segunda	S8

Fonte: Elaborada pelo autor.

O item S7 encaminha para S8 (Figura 81) que avalia as dificuldades relativas aos conceitos de valor e variação solicitando a identificação do ponto que atende as condições de  $f(x) < 0$  e  $f'(x) > 0$ . A função nos pontos A e B são positivos, sendo distratores associados a problemas na compreensão do conceito de valor da função e, os pontos C e D, apresentam característica de variação decrescente e nula respectivamente, estando associados com dificuldades na interpretação da derivada primeira com a variação da função em um ponto.

Figura 81 – Pergunta 8 da Situação-problema 2

Pergunta 8 – S8			
De acordo a função apresentada identifique qual ponto apresenta as seguintes características: $f(x) < 0, f'(x) > 0$			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Direcionamento
a)	A	Conceito de valor	S9
b)	B	Conceito de valor	S9
c)	C	<b>Conceito de variação; derivada primeira</b>	<b>S9</b>
d)	D	Conceito de variação; derivada primeira	S9
e)	E	Conceito de variação; derivada primeira	S9
f)	Não sei qual a resposta	Conceito de variação; derivada primeira	Próx problema

Fonte: Elaborada pelo autor.

O item S9 (Figura 82) verifica se há o entendimento sobre a variação da derivada primeira solicitando a identificação do ponto que atende as condições de  $f'(x) > 0$  e  $f''(x) > 0$ . Segundo Cantoral (2013, p. 217) a derivada não deve ser entendida exclusivamente como o limite do quociente incremental, mas como a mudança, de crescimento ou decrescimento. Considerando a condição  $f'(x) > 0$ , tem-se os pontos B, C e D não atendem, sendo distratores associados a dificuldades do conceito de variação, o ponto A atende a primeira condição, mas possui  $f''(x) < 0$ , estando associado a problemas com a interpretação da derivada segunda.

Figura 82 – Pergunta 9 da Situação-problema 2

Pergunta 9 – S9			
De acordo a função apresentada identifique qual ponto apresenta as seguintes características: $f'(x) > 0, f''(x) > 0$			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Direcionamento
a)	A	Interpretação de derivada segunda	S10
b)	B	Conceito de variação	S10
c)	C	Conceito de variação	S10
d)	D	Conceito de variação	S10
e)	E	<b>Interpretação de derivada segunda</b>	S10
f)	Nenhum ponto tem essa característica	Conceito de variação	S10
g)	Não sei qual o ponto	Conceito de variação	Próx problema
h)	Não sei o significado de $f''(x)$	Interpretação de derivada segunda	Próx problema

Fonte: Elaborada pelo autor.

Se no item S9 são verificados os conceitos de derivada primeira e segunda, em S10 verifica-se as dificuldades de cálculo e interpretação dos resultados das derivadas. Neste item S10 é definida a função  $f(x)$  e solicitado o ponto que atende as condições  $f(x) < 0, f'(x) > 1$  e  $f''(x) < 0$ , para isso o respondente tem que calcular as derivadas primeira e segunda e valorar os pontos dados e verificar qual atende as condições.

Pela função todos os pontos dados são menores que zero e todos os distratores estão associados a dificuldades no cálculo das derivadas, exceto a alternativa g que está relacionada a interpretação do problema. O item S10 finaliza a situação-problema 2 e todos os encaminhamentos são para a próxima situação-problema.

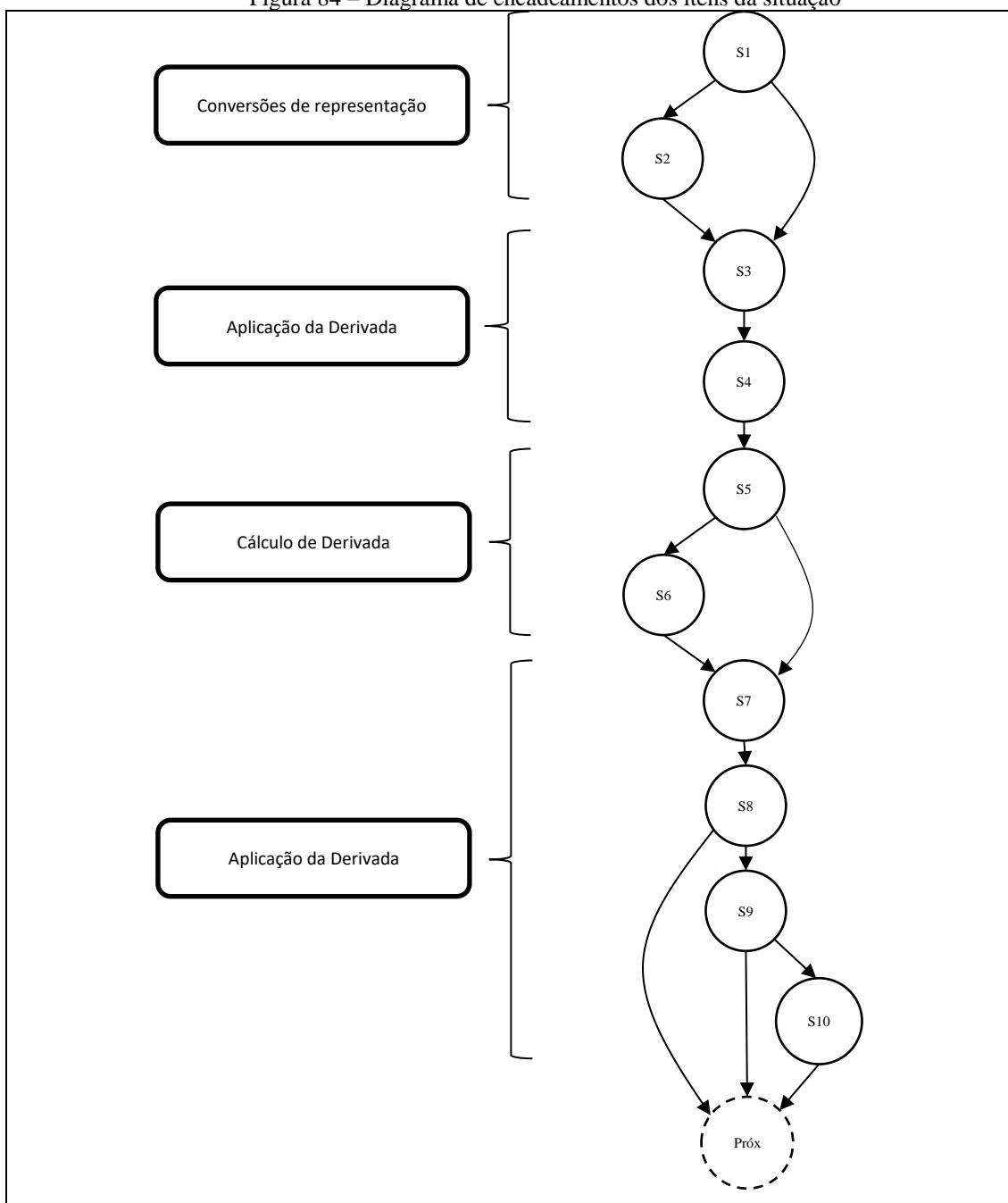
Figura 83 – Pergunta 10 da Situação-problema 2

Pergunta 10 – S10			
Para $x_1 = -0,5; x_2 = 0; x_3 = 0,5; x_4 = 1,5; x_5 = 3$ e a função $f(x) = \sin(2x) - 1$ qual dos pontos apresenta a seguinte característica $f(x) < 0, f'(x) > 1$ e $f''(x) < 0$ .			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Direcionamento
a)	x1	Cálculo da derivadas	Próx problema
b)	x2	Cálculo da derivadas	Próx problema
c)	<b>x3</b>	<b>Cálculo da derivadas</b>	<b>Próx problema</b>
d)	x4	Cálculo da derivadas	Próx problema
e)	x5	Cálculo da derivadas	Próx problema
f)	Nenhum dos pontos atendem as características	Cálculo da derivadas	Próx problema
g)	Não sei o que fazer	Interpretação do enunciado	Próx problema

Fonte: Elaborada pelo autor.

Como na situação-problema 1 a situação 2 possibilita sequencias diferentes de perguntas, de acordo com o desempenho do aluno. A Figura 84 apresenta o diagrama de encadeamento dos itens da situação-problema 2.

Figura 84 – Diagrama de encadeamentos dos itens da situação



Fonte: Elaborada pelo autor.

#### 5.3.2.4 Situação-problema 3

A situação-problema 3 é um problema contextualizado com uma situação que envolve a identificação, como o modelo, da função exponencial, sua representação gráfica e algébrica, as características de valor e variação em um ponto. A convergência da função exponencial em um dos extremos, permite explorar o cálculo do valor e da variação no infinito verificando coerências entre os valores calculados e a compreensão do fenômeno.

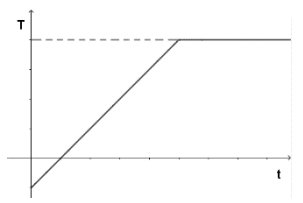
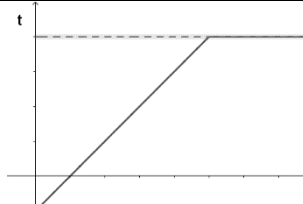
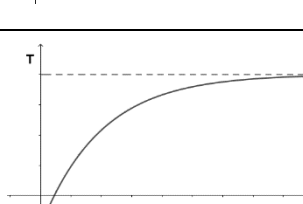
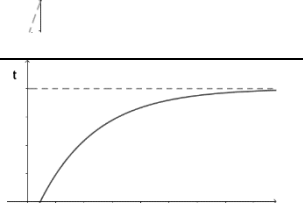

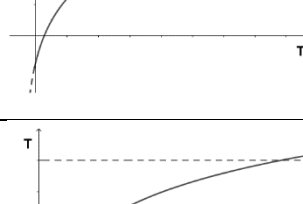
Apresenta-se na Figura 85 o item Q1 da situação-problema 3 que permite verificar se o respondente apresenta dificuldades com a modelagem do problema, ao solicitar a representação gráfica do modelo para o problema que relaciona a temperatura em relação ao tempo, necessitando identificar as variáveis como dependente e independente e a correta relação entre elas.

A opção indicada em negrito apresenta a opção correta e o conceito ou procedimento associado. Este item apresenta dois modelos gráficos como distratores, um é a função composta com a função linear e a constante e o outro apresenta a função logarítmica estando as duas associadas a dificuldade relacionadas a identificação do modelo.

Para cada um dos três gráficos tem-se duas alternativas, uma delas apresentando de maneira equivocada a relação entre as variáveis temperatura e tempo, ou seja, modelos com o tempo dado pela temperatura. Tais distratores consideram que o respondente tem dificuldades em identificar a relação de dependência entre as variáveis e talvez até mesmo não compreendendo o que seja a relação de dependência entre as variáveis.

Os distratores encaminham para itens que solicitam a denominação do modelo em linguagem natural e em seguida a representação algébrica do modelo, mesmo que este seja o incorreto para a situação dada, permitindo deste modo verificar dificuldades na conversão das representações do modelo. Os distratores com a relação de dependência equivocada e as alternativas *Tenho dúvidas de qual é o gráfico* e *Não sei qual o gráfico* encaminham para Q5 que apresenta o modelo gráfico correto da função exponencial e solicita o modelo algébrico.

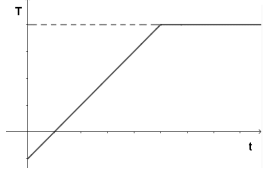
Figura 85 – Item 1 da Situação-problema 3

<b>Item 1 – Q1</b>			
Um litro de uma solução que tem seu ponto de solidificação de $-10^{\circ}\text{C}$ é colocado no congelador de um refrigerador doméstico a uma temperatura de $-5^{\circ}\text{C}$ de modo que ela permanece em estado líquido mesmo depois de ter sua temperatura estabilizada em $-5^{\circ}\text{C}$ . Se em um instante qualquer, considerado como tempo inicial $t_0=0$ , a porta do congelador é aberta e assim permanecer, qual o gráfico que melhor representa a temperatura (T) da solução em relação ao tempo (t)?			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Direcionamento
a)		Modelagem do problema	Q2
b)		Relação de dependência	Q5
c)		Modelagem do problema	Q3
d)		Relação de dependência	Q5
e)		Relação de dependência	Q5
f)		Modelagem do problema	Q4
g)	Tenho dúvidas de qual é o gráfico	Modelagem do problema	Q5
h)	Não sei qual o gráfico	Modelagem do problema	Q5

Fonte: Elaborada pelo autor.

O item Q2 (Figura 86) é a sequência para o modelo da função composta com uma parte linear e uma parte constante selecionado em Q1. Mesmo não sendo o modelo correto, o item Q2 verifica se o respondente tem dificuldades em denominar a função em linguagem natural. As opções de resposta encaminham para o item Q5, que apresenta o modelo gráfico correto e solicita a identificação do modelo algébrico da exponencial.

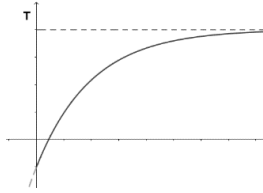
Figura 86 – Item Q2 da situação-problema 3

Item 2 – Q2			
O gráfico da variação da Temperatura em relação ao tempo é a representação:			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Direcionamento
a)	<b>da função linear até um ponto e depois uma função constante</b>	<b>Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis</b>	<b>Q5</b>
b)	da função quadrática	Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis	Q5
c)	da função exponencial	Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis	Q5
d)	da função raiz	Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis	Q5
e)	da função logarítmica	Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis	Q5
f)	Não sei o nome	Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis	Q5

Fonte: Elaborada pelo autor.

O item Q3 (Figura 87) apresenta o modelo correto da função exponencial, e verifica se o respondente tem dificuldades em identificar a denominação da mesma. Após o item Q3 o sistema direciona para o item Q5, que solicita a identificação do modelo algébrico da exponencial.

Figura 87 - Item Q3 da situação-problema 3

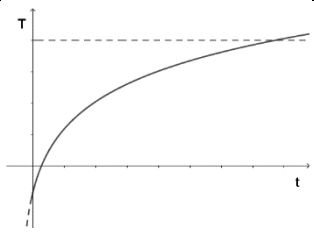
Item 3 – Q3			
O gráfico da variação da Temperatura em relação ao tempo é a representação:			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Direcionamento
a)	da função linear até um ponto e depois uma função constante	Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis	Q5
b)	da função quadrática	Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis	Q5
c)	<b>da função exponencial</b>	<b>Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis</b>	<b>Q5</b>
d)	da função raiz	Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis	Q5
e)	da função logarítmica	Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis	Q5
f)	Não sei o nome	Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis	Q5

Fonte: Elaborada pelo autor.



O item Q4 (Figura 88) apresenta o modelo da função logarítmica, selecionado em Q1, que mesmo não sendo o modelo correto, permite verificar se o respondente tem dificuldades em denominar a mesma. Os encaminhamentos de Q4 são para o item Q5, que apresenta o modelo gráfico correto e solicita a identificação do modelo algébrico exponencial.

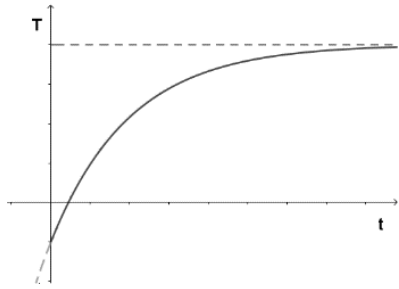
Figura 88 - Item Q4 da situação-problema 3

Item 4 – Q4			
O gráfico da variação da Temperatura em relação ao tempo é a representação:			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Direcionamento
a)	da função linear até um ponto e depois uma função constante	Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis	Q5
b)	da função quadrática	Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis	Q5
c)	da função exponencial	Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis	Q5
d)	da função raiz	Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis	Q5
e)	<b>da função logarítmica</b>	<b>Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis</b>	<b>Q5</b>
f)	Não sei o nome	Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis	Q5

Fonte: Elaborada pelo autor.

O item Q5 Figura 89 apresenta o modelo gráfico correto da exponencial e solicita o modelo algébrico. Para as alternativas são apresentados os modelos algébricos para os três modelos gráficos de Q1, incluindo os distratores que apresentam a relação de dependência entre as variáveis equivocada. Os modelos da função composta e da função logarítmica são associados a problemas de representação algébrica pois o modelo gráfico correto é apresentado no enunciado. Os modelos que apresentam a relação do tempo dado em função da temperatura estão associados a dificuldades em estabelecer a relação entre as variáveis.

Figura 89 - Item Q5 da situação-problema 3

Item 5 – Q5			
		<p>A função algébrica que relaciona a Temperatura (T) em relação ao tempo (t) para uma temperatura inicial <math>T_0 = -5^\circ\text{C}</math> e uma temperatura ambiente <math>T_A = 20^\circ\text{C}</math> pode ser expressa por:</p>	
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Direcionamento
a)	$\begin{cases} T(t) = k \cdot t - 5; t \leq a \\ T(t) = 20; t > a \end{cases}$ , $p/a, k \in \mathbb{R}_+$	Representação geométrica e algébrica das funções notáveis	Q6
b)	$\begin{cases} t(T) = k \cdot T - 5; T \leq a \\ t(T) = 20; T > a \end{cases}$ , $p/a, k \in \mathbb{R}_+$	Representação geométrica e algébrica das funções notáveis	Q6
c)	$T(t) = 20 - 25e^{-kt}$ , para $k \in \mathbb{R}_+$	<b>Representação geométrica e algébrica das funções notáveis</b>	<b>Q6</b>
d)	$t(T) = 20 - 25e^{-kT}$ , para $k \in \mathbb{R}_+$	Relação de dependência	Q6
e)	$T(t) = k \ln(t + 1) - 5$ , para $k \in \mathbb{R}_+$	Representação geométrica e algébrica das funções notáveis	Q6
f)	$t(T) = k \ln(T + 1) - 5$ , para $k \in \mathbb{R}_+$	Relação de dependência	Q6
g)	Não sei qual a função	Representação geométrica e algébrica das funções notáveis	Q6

Fonte: Elaborada pelo autor.

O item Q6 (Figura 90) apresenta o modelo algébrico para a situação-problema e solicita que seja determinado o tempo para que a solução atinja a temperatura de  $8^\circ\text{C}$ . O distrator *a* apresenta o resultado para desenvolvimento equivocado da solução da equação  $8 = 20 - 25e^{-0,0558t}$  estando associado a dificuldades na solução de equações não polinomiais, o distrator *c* com o resultado de  $T(8)$  está associado a dificuldades na interpretação do enunciado e uso incorreto dos dados, as opções *d* e *e* diferenciam as dificuldades em interpretação das dificuldades na solução de equações.

Figura 90 - Item Q6 da situação-problema 3

Item 6 – Q6			
<p>Para a função dada que representa a temperatura (T) em Celsius em relação ao tempo (t) em minutos, em quanto tempo leva para a temperatura da solução chegar a <math>8^\circ\text{C}</math>?</p> $T(t) = 20 - 25e^{-0,0558t}$			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Direcionamento
a)	8,60	Equação não polinomiais	Q7
b)	<b>13.15</b>	<b>Equação não polinomiais</b>	<b>Q7</b>
c)	4	Conceito de valor	Q7
d)	Não entendi o que é pedido	Interpretação do enunciado	Q7
e)	Não sei calcular	Equação não polinomiais	Q7

Fonte: Elaborada pelo autor.

O item Q7 (Figura 91) permite avaliar dificuldades com o cálculo de limites, caso o respondente não saiba como calcular ou não entenda o que é solicitado, o encaminhamento se dá para Q10, e nas demais opções para Q8 com outro item envolvendo o cálculo de limites.

A solução ao item Q7 pode ser obtido pela compreensão do fenômeno em uma situação do cotidiano, entendendo que depois de muito tempo a solução terá a temperatura do ambiente, por isso o enunciado está na forma do cálculo de limites com  $x$  tendendo ao infinito.

Os distratores  $a$ ,  $b$  e  $d$  apresentam resultados para cálculos equivocados de limites, o distrator  $d$  está associado a ideia intuitiva de potências com expoente que tendem ao infinito. O cálculo de limites é fundamental ao cálculo, mas caso haja problemas com a notação o respondente tem a alternativa  $f$  para seleção e a alternativa  $g$  para problemas com o cálculo de limites, com ambas encaminhando para o item Q10.

Figura 91 - Item Q7 da situação-problema 3

<b>Item 7 – Q7</b>			
Para a função $T$ que representa a temperatura ( $T$ ) em Celsius em relação ao tempo ( $t$ ) em minutos, determine:			
$T = \lim_{t \rightarrow \infty} (20 - 25e^{-0,0558t})$			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Direcionamento
a)	$T = -5$	Cálculo de limite	Q8
b)	$T = 0$	Cálculo de limite	Q8
c)	<b><math>T = 20</math></b>	<b>Cálculo de limite</b>	<b>Q8</b>
d)	$T = 25$	Cálculo de limite	Q8
e)	$T$ diverge para $\infty$	Cálculo de limite	Q8
f)	Não entendi o que é pedido	Interpretação do enunciado	Q10
g)	Não sei calcular	Cálculo de limite	Q10

Fonte: Elaborada pelo autor.

O item Q8 (Figura 92) solicita o valor da derivada de  $T(t)$  quando  $t$  tende ao infinito. Como no item Q7 as alternativas apresentam nos distratores resultados decorrentes de equívocos algébricos envolvendo o cálculo de limites. As duas últimas alternativas,  $e$  e  $f$ , são associadas respectivamente a problemas de interpretação e de cálculo de limites, com encaminhamento para o item Q10.

Figura 92 – Item Q8 da situação-problema 3

<b>Item 8 – Q8</b>			
Para a função dada que representa a temperatura ( $T$ ) em Celsius em relação ao tempo ( $t$ ) em minutos, determine a taxa de variação instantânea quando $t$ tende ao infinito.			
$T(t) = 20 - 25e^{-0,0558t}$			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Direcionamento
a)	$\lim_{t \rightarrow \infty} T'(t) = -5$	Cálculo de derivadas	Q9
b)	$\lim_{t \rightarrow \infty} T'(t) = 0$	<b>Cálculo de limite</b>	Q9
c)	$\lim_{t \rightarrow \infty} T'(t) = 20$	Cálculo de derivadas	Q9
d)	$\lim_{t \rightarrow \infty} T'(t) = 25$	Cálculo de derivadas	Q9
e)	Não entendi o que é pedido	Interpretação do enunciado	Q10
f)	Não sei calcular	Cálculo de limite	Q10

Fonte: Elaborada pelo autor.

O item Q9 (Figura 93) avalia a compreensão do resultado do cálculo da derivada quando  $t$  tende ao infinito. O enunciado fornece o resultado numérico do cálculo do limite e a função  $T(t)$ , que é desnecessária para o que é solicitado, mas exige que o respondente separe as informações relevantes e utilize-as adequadamente. Os distratores  $a$  e  $b$  são baseados no uso

equivocado das informações em  $T(t)$ , a alternativa *d* questiona a informação de que a derivada da função tende a zero no infinito e está associada ao uso incorreto das informações em  $T(t)$ .

Figura 93 - Item Q9 da situação-problema 3

<b>Item 9 – Q9</b>			
Para a função dada que representa a temperatura ( $T$ ) em Celsius em relação ao tempo ( $t$ ) em minutos, qual o significado da derivada de $T(t)$ quando $t$ tende ao infinito			
$T(t) = 20 - 25e^{-0,0558t} ; \lim_{t \rightarrow \infty} T'(t) = 0$			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Direcionamento
a)	A temperatura da solução está constante em $0^{\circ}\text{C}$	Conceito derivadas, derivada primeira	Q10
<b>b)</b>	<b>A temperatura da solução está constante em <math>20^{\circ}\text{C}</math></b>	<b>Conceito derivadas, derivada primeira</b>	<b>Q10</b>
c)	A temperatura da solução está constante em $25^{\circ}\text{C}$	Conceito derivadas, derivada primeira	Q10
d)	O limite para $t$ tendendo ao infinito não pode ser 0	Conceito derivadas, derivada primeira	Q10
e)	A variação da temperatura da solução está aumentando de maneira constante	Conceito derivadas, derivada primeira	Q10
f)	Não entendi o que é pedido	Interpretação do enunciado	Próx
g)	Não sei	Interpretação do enunciado	Próx

Fonte: Elaborada pelo autor.

O item Q10 (Figura 94) finaliza a situação-problema 3 e direciona para os itens que avaliam o cálculo de derivadas. Este item solicita a variação da temperatura no instante zero, para isso é necessário o cálculo da derivada seguido da valoração em  $t=0$ , o distrator *b* apresenta o resultado para  $T(0)$  e os distratores *c* e *d* apresentam resultados para cálculos equivocados da derivada. As alternativas *e* e *f* são associadas a problemas de interpretação e cálculo da derivada respectivamente.

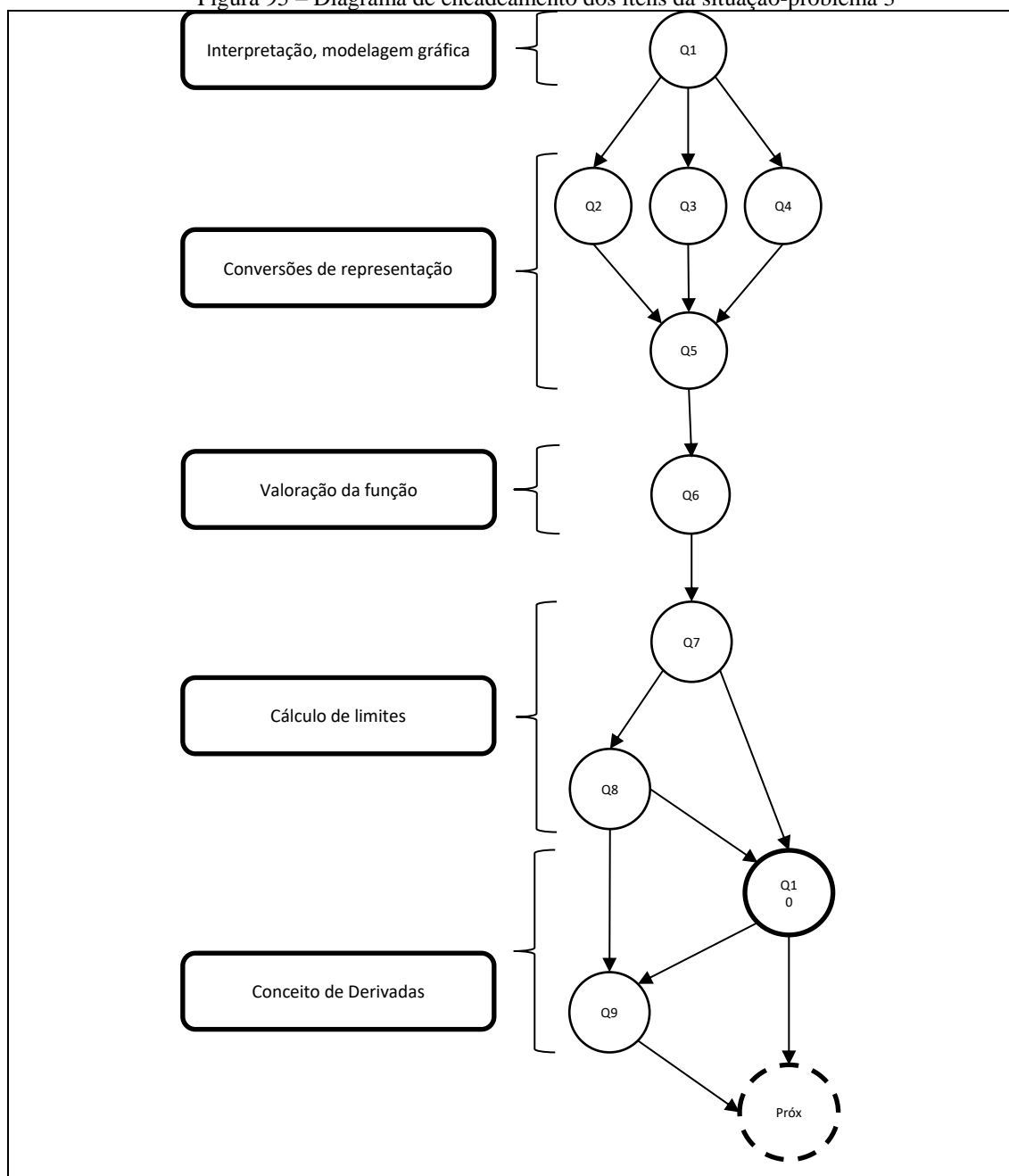
Figura 94 - Item Q10 da situação-problema 3

<b>Item 10 – Q10</b>			
Para a função dada que representa a temperatura ( $T$ ) em Celsius em relação ao tempo ( $t$ ) em minutos, qual o significado de $T'(0)$ ?			
$T(t) = 20 - 25e^{-0,0558t}$			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Direcionamento
a)	A temperatura da solução está variando a $1,4^{\circ}\text{C}/\text{min}$	Cálculo de derivadas	Cálculo Derivadas
b)	A temperatura da solução está variando a $-5^{\circ}\text{C}/\text{min}$	Cálculo de derivadas	Cálculo Derivadas
c)	A temperatura da solução está variando a $-0,3^{\circ}\text{C}/\text{min}$	Ordem das operações	Cálculo Derivadas
d)	A temperatura da solução está variando a $25^{\circ}\text{C}/\text{min}$	Cálculo de derivadas	Cálculo Derivadas
e)	Não entendi o que é pedido	Interpretação do enunciado	Cálculo Derivadas
f)	Não sei calcular	Cálculo de derivadas	Cálculo Derivadas

Fonte: Elaborada pelo autor.

A Figura 95 apresenta o diagrama resumido do encadeamento dos itens da situação-problema 3, no qual se verifica as possibilidades de direcionamento de acordo com as respostas durante a execução da avaliação.

Figura 95 – Diagrama de encadeamento dos itens da situação-problema 3



Fonte: Elaborada pelo autor.

### 5.3.3 Cálculo de Derivadas

Após as situações-problema 1, 2, 3 apresenta-se a avaliação de dificuldades relativas ao cálculo da derivada primeira, em particular as derivadas de funções compostas e a aplicação da regra da cadeia. Ressalta-se que estes itens foram especificamente desenvolvidos para avaliar dificuldades relativas aos métodos e procedimentos para o cálculo da derivada, em particular, a derivação de funções compostas com a aplicação da regra da cadeia.

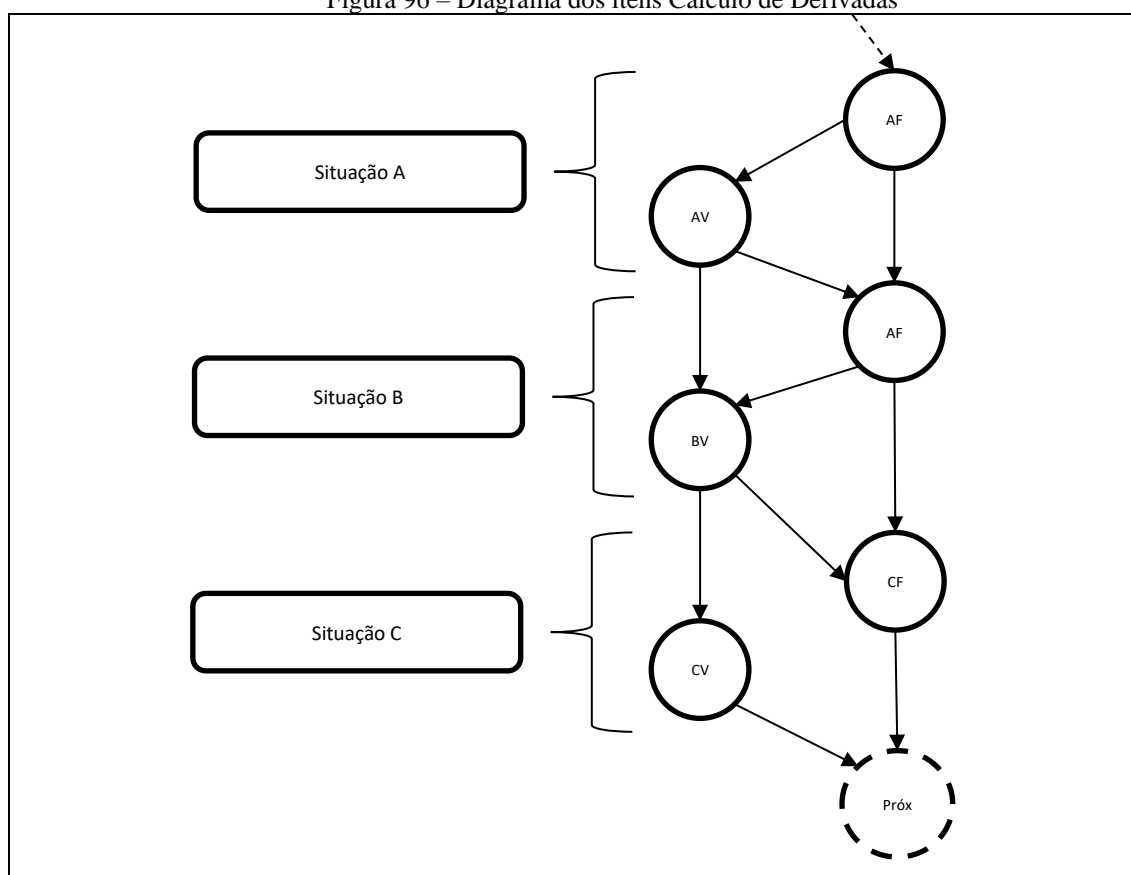
Autores como Cottrill (1999), Cury (2003) e Rezende (2003) afirmam que os erros relativos a derivada e a regra da cadeia, ou a derivada da função composta, estão relacionados

com a identificação das funções componentes, com muitos alunos derivando somente a função mais *externa*. A não compreensão da regra da cadeia, e os procedimentos algébricos, segundo Rezende (2003) tornam-se obstáculos para a integração de funções sendo um conhecimento necessário ao próprio desenvolvimento da competência matemática no uso do Cálculo Diferencial e Integral.

Como os itens da avaliação *Matemática*, esta avaliação também utiliza itens de múltiplas opções do tipo Verdadeiro/Falso acrescidas das opções *Não tenho certeza* e *Não sei* para que o estudante tenha a opção de externar suas dificuldades em relação ao item, evitando a escolha aleatória da resposta.

Os itens de avaliação são organizados dois a dois em uma sequência de três pares conforme a Figura 96. Os itens são identificados pelas letras A, B e C, que designam tipos diferentes situações nas quais se aplica a regra da cadeia, seguido de V ou F, para denominá-las como afirmações verdadeiras ou falsas respectivamente.

Figura 96 – Diagrama dos itens Cálculo de Derivadas



Fonte: Elaborada pelo autor.

A avaliação inicia com uma afirmação falsa e, caso o estudante selecione como verdadeira a afirmação ou *Não tenho certeza* ou *Não sei*, ele será encaminhado para outra afirmação falsa com outro tipo de situação. Caso selecione a opção *Falso*, o respondente será direcionado para uma afirmação verdadeira do mesmo tipo para verificar a inexistência de dificuldades relativas a esse tipo de situação.

O enunciado das questões de múltipla escolha do tipo falso/verdadeiro reforça a necessidade de não seleção aleatória de resposta e relembra que os itens objetivam a autoavaliação. Como na avaliação Matemática o enunciado dos itens para a avaliação é o mesmo para todos: *Determine se a igualdade é verdadeira ou falsa. Responda com base em seus conhecimentos, não escolha ao acaso uma resposta. Lembre-se que essa avaliação é para identificar as suas dificuldades.*

Apresenta-se na Figura 97 os itens D1 e D2 com a derivada primeira de funções compostas por potências de polinômios. Sendo o item D1 uma AF com encaminhamento para o item D3, e o item D2 uma AV com encaminhamento para o item D4.

Figura 97 – Itens D1 e D2 do cálculo de derivadas

<b>Item D1 – AF</b>			
$\frac{\partial}{\partial x}(5x^2 + x^3)^2 = 2(10x + 3x^2)$			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Direcionamento
a)	Verdadeiro	Derivadas regra da cadeia	D3
b)	<b>Falso</b>	<b>Derivadas regra da cadeia</b>	D2
c)	Não tenho certeza	Cálculo da derivadas	D3
d)	Não sei	Cálculo da derivadas	D3
<b>Item D2 – AV</b>			
$\frac{\partial}{\partial x}\left(4x^5 - \frac{x^3}{3}\right)^2 = 2\left(4x^5 - \frac{x^3}{3}\right)(20x^4 - x^2)$			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Direcionamento
a)	<b>Verdadeiro</b>	<b>Derivadas regra da cadeia</b>	D4
b)	Falso	Derivadas regra da cadeia	D3
c)	Não tenho certeza	Cálculo da derivadas	D3
d)	Não sei	Cálculo da derivadas	D3

Fonte: Elaborada pelo autor.

Os itens 3 e 4 (Figura 98) de avaliação apresentam funções trigonométricas tendo polinômios como argumento. O item D3 é incorreto pois é realizada a derivação do cosseno e do argumento em um método equivocado da regra da cadeia, é comum também o aluno somente derivar a função trigonométrica ignorando o argumento. No item D4 a derivação está com a regra da cadeia devidamente aplicada com a multiplicação da derivada da tangente pela derivada do argumento.

Figura 98 – Itens D3 e D4 do cálculo de derivadas

Item D3 – AF			
$\frac{\partial}{\partial x}(x^3 - \cos(x^2)) = 3x^2 + \text{sen}(2x)$			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Direcionamento
a)	Verdadeiro	Derivadas regra da cadeia	D5
<b>b)</b>	<b>Falso</b>	<b>Derivadas regra da cadeia</b>	D4
c)	Não tenho certeza	Cálculo da derivadas	D5
d)	Não sei	Cálculo da derivadas	D5
Item D4 – AV			
$\frac{\partial}{\partial x}(\tan(x^3 + 2x)) = (3x^2 + 2) \sec^2(x^3 + 2x)$			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Direcionamento
<b>a)</b>	<b>Verdadeiro</b>	<b>Derivadas regra da cadeia</b>	D6
b)	Falso	Derivadas regra da cadeia	D5
c)	Não tenho certeza	Cálculo da derivadas	D5
d)	Não sei	Cálculo da derivadas	D5

Fonte: Elaborada pelo autor.

Os itens D5 e D6 (Figura 99) apresentam funções compostas envolvendo funções exponenciais. Assim como nas funções trigonométrica, dois erros são comuns, como a derivada da função exponencial é o produto dela mesma pela derivada do expoente, alguns alunos ou simplesmente copiam novamente a exponencial ignorando a derivada do expoente ou derivam o expoente, mantendo-o como expoente fazendo algo como  $e^{du}$ .

Figura 99 – Itens D5 e D6 do cálculo de derivadas

Item D5 – AF			
$\frac{\partial}{\partial x} e^{x^3+2} = e^{3x^2}$			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Direcionamento
a)	Verdadeiro	Conceito de valor	fim
<b>b)</b>	<b>Falso</b>	Conceito de valor	fim
c)	Não tenho certeza	Conceito de variação	fim
d)	Não sei	Conceito de variação	fim
Item D6 – AV			
$\frac{\partial}{\partial x} e^{x^2+1} = 2x e^{x^2+1}$			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Direcionamento
<b>a)</b>	<b>Verdadeiro</b>	Conceito de valor	fim
b)	Falso	Conceito de valor	fim
c)	Não tenho certeza	Conceito de variação	fim
d)	Não sei	Conceito de variação	fim

Fonte: Elaborada pelo autor.

Foram apresentados os 72 itens de avaliação e os erros técnicos ou de conceito associados aos seus distratores. No capítulo a seguir são realizadas as análises do banco de dados do ADAC para validação dos itens e seus distratores.



## 6 ANÁLISE DE DADOS

O ADAC foi implementado em um sistema computacional, estando disponível em <http://www.webart7.com.br/sites/adac/avaliacao> e, sendo uma avaliação computacional, os alunos puderam realizar as atividades fora da instituição, após serem instruídos em sala de aula sobre os objetivos da pesquisa e como deveriam responder à avaliação.

Nas instruções dadas em sala de aula, foi reforçada a necessidade de respostas fundamentadas no conhecimento, não selecionando aleatoriamente as opções disponíveis da questão. Caso não identificasse uma resposta válida para o seu conhecimento, que usasse as opções do tipo *não sei* mais adequadas. Um dos receios era de que os alunos ignorassem a recomendação de não seleção aleatória de resposta, pois responder ao acaso, sem reflexão e sem um planejamento de como resolver a questão proposta, é usual nas avaliações seletivas, dada a probabilidade de acerto com a seleção aleatória de resposta.

A seguir, apresentam-se as análises realizadas com os dados coletados no banco de dados do ADAC e as respostas ao questionário, para traçar o perfil dos estudantes participantes do experimento, com o objetivo de validar as dificuldades associadas aos distratores.

### 6.1 PERFIL DOS PARTICIPANTES

Participaram do experimento 39 alunos regularmente matriculados no segundo semestre de 2018 nos cursos de engenharias da Universidade Luterana do Brasil do campus Canoas, sendo que 34 deles responderam à avaliação *Resolução de problemas*, 30 à avaliação Matemática e 25 destes às duas avaliações, produzindo 1.647 respostas armazenadas no banco de dados do sistema, as quais foram analisadas para validar o ADAC dentro do objetivo proposto.

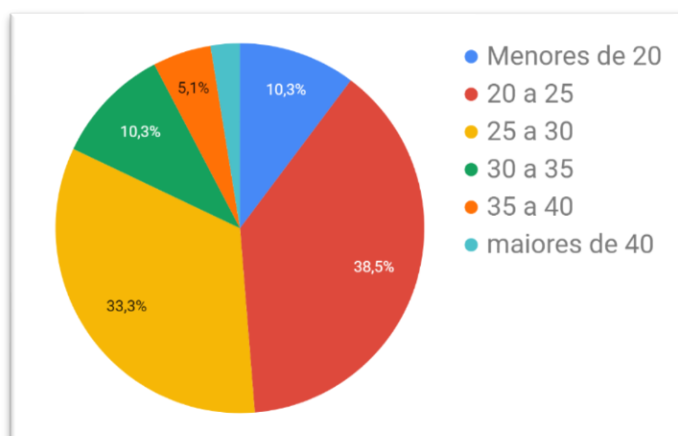
Para entender as perspectivas e a percepção do estudante sobre a avaliação diagnóstica, foi apresentado um questionário após as avaliações serem realizadas, pois se entende ele como parte integrante do processo de avaliação, no qual sua história é fator relevante no desempenho.

Para o questionário eletrônico, foi utilizado o *Google Forms* com itens de resposta curta, para levantamento do perfil do participante: informações pessoais e sobre o seu desempenho na disciplina de Cálculo, seu comportamento como aluno, a sua percepção sobre o ADAC, a relevância dos conteúdos avaliados e o que ele atribuiu como razão para suas dificuldades matemáticas.

A seguir, apresentam-se os dados sobre o perfil dos participantes do experimento para cada uma das informações solicitadas. Na Figura 100 apresenta-se a distribuição dos alunos em

faixas etárias de 5 anos, podendo ser identificado que 58% dos participantes têm idade superior a 25 anos, que sugere a existência de um período, entre Ensino Médio e o Ensino Superior, no qual o aluno esteve fora de uma instituição de ensino.

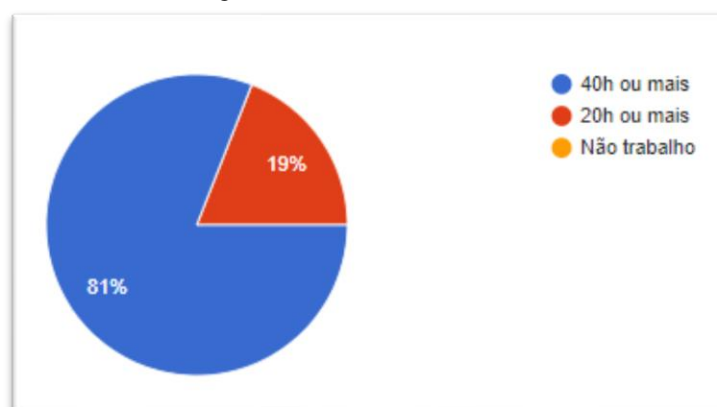
Figura 100 – Faixa etária dos participantes



Fonte: A pesquisa.

Pelo questionário, todos os participantes trabalham com jornadas de meio turno ou turno integral. Na Figura 101 verifica-se que 81% dos alunos têm uma jornada de quarenta ou mais horas semanais e 19% trabalham em meio turno, com vinte ou mais horas semanais. O aluno que estuda na ULBRA trabalha durante o dia e frequenta as aulas à noite. Considera-se que o estudante que trabalha acaba tendo menos tempo de dedicação aos estudos.

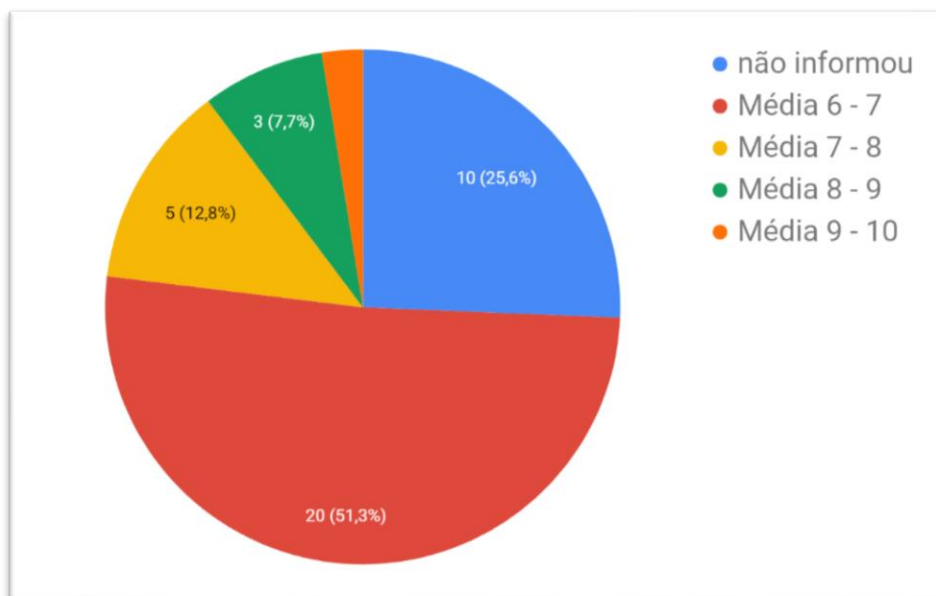
Figura 101 – Jornada de trabalho



Fonte: A pesquisa.

Na Figura 102 observa-se que 50% dos participantes foram aprovados na disciplina de Cálculo 1, com médias entre 6 e 7. A aprovação com médias próximas da mínima, que é 6, na universidade em que os respondentes desta amostra estudam, pode ser uma justificativa para o desempenho do grupo na avaliação *Resolução de problemas*.

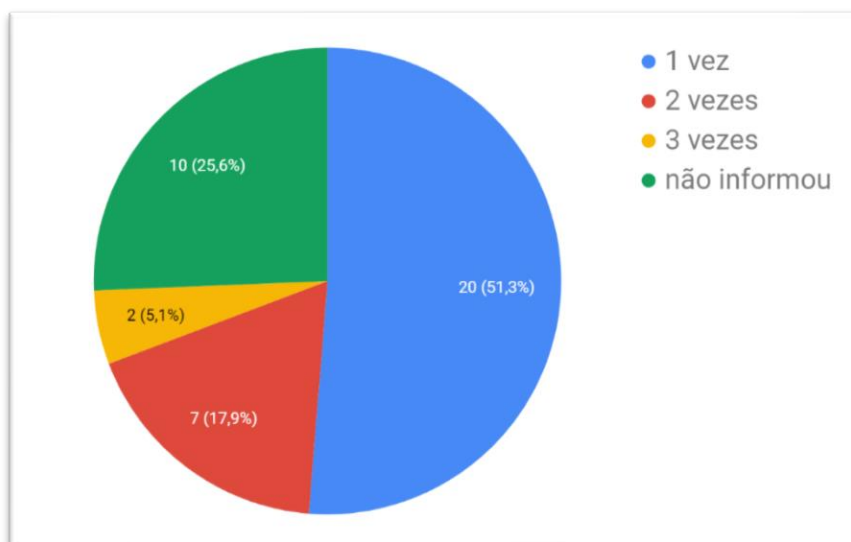
Figura 102 – Média para a disciplina de Cálculo



Fonte: A pesquisa.

Considerou-se relevante saber se alguns dos participantes cursaram mais de uma vez a disciplina Cálculo 1. Como é possível observar na Figura 103, aproximadamente 23% dos participantes cursaram mais de uma vez essa disciplina, o que sugere dificuldades desses alunos com os conteúdos da disciplina.

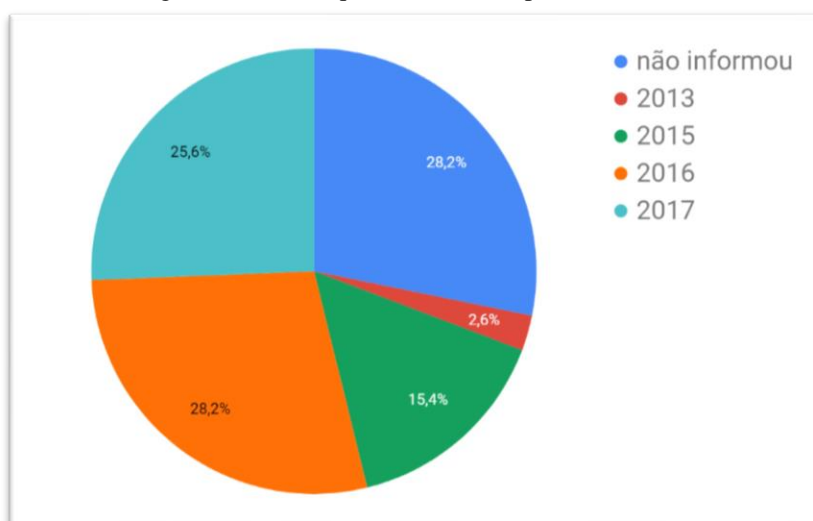
Figura 103 – Número de vezes que os alunos cursaram a disciplina Cálculo 1



Fonte: A pesquisa.

Era pré-requisito que o participante do experimento já tivesse cursado a disciplina de Cálculo 1, pois os conteúdos desenvolvidos nessa disciplina são os avaliados pelo ADAC. Na Figura 104 verifica-se que 53% dos alunos a cursaram entre 2016 e 2017.

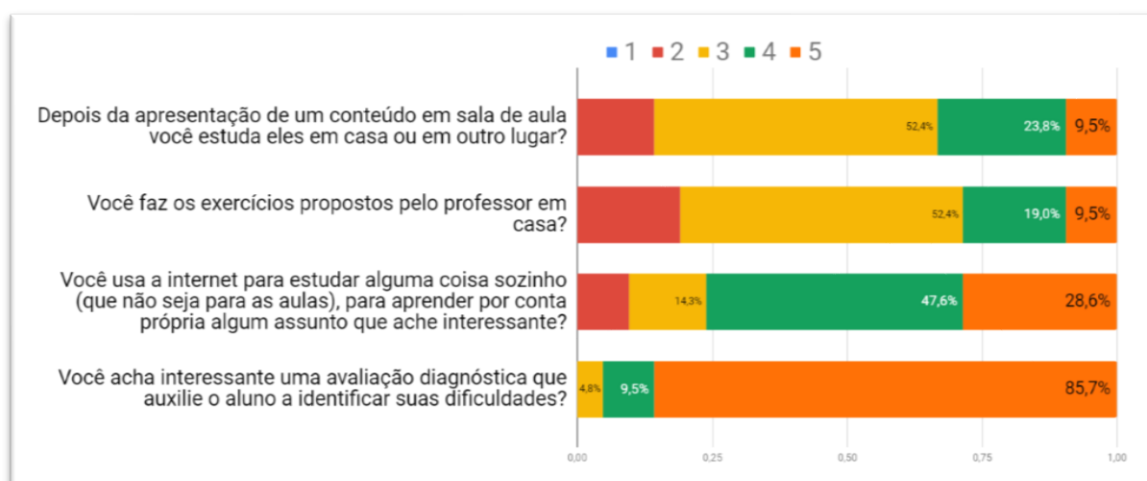
Figura 104 – Ano que cursou a disciplina de Cálculo



Fonte: A pesquisa.

Para entender o comportamento dos participantes em relação às suas atividades de estudo, o questionário apresentou uma série de perguntas (Figura 105), com uma escala de medida de 5 pontos, com 1 para *nada* e 5 para *muito*, para expressar o grau de envolvimento do aluno com os estudos e se concorda com a importância da avaliação diagnóstica na identificação das suas dificuldade matemáticas.

Figura 105 – Perguntas sobre o envolvimento do aluno com os estudos e a importância do ADAC



Fonte: A pesquisa.

Quanto ao grau de envolvimento dos alunos com os estudos após as aulas, revisando a matéria e realizando os exercícios propostos, verifica-se que aproximadamente 52,4% dos alunos consideram seu empenho mediano (3) e 33,3%, consideram mais que mediano (4 e 5).

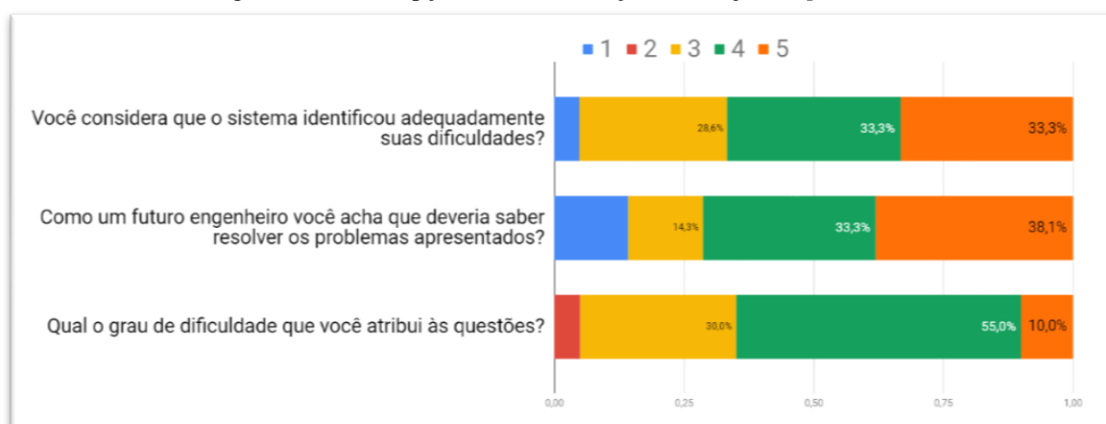
Quanto ao uso da internet para estudos de assuntos que não são das disciplinas de formação, 76,2% dos alunos marcaram como 4 e 5 na escala, indicando que, para os participantes desta pesquisa, a internet é um canal de acesso ao conhecimento. Indicando um perfil

Quanto à avaliação diagnóstica, praticamente 95% dos alunos sinalizaram com um alto grau de importância da mesma como uma ferramenta auxiliar na identificação das suas dificuldades matemáticas.

Quanto à qualidade e capacidade da avaliação *Resolução de problemas*, 95,2% dos participantes consideraram entre média e muito alta. Essa percepção sobre a capacidade de avaliação do ADAC é informação relevante e pertinente que, de certo modo, indicam o alcance dos objetivos da pesquisa.

Para a pergunta “*Como futuro engenheiro você acha que deveria saber resolver os problemas apresentados?*”, 71% dos alunos marcaram a parte alta da escala (4 e 5), que demonstra uma escolha adequada dos problemas propostos para compor o banco de itens do ADAC. Mesmo com a maioria dos alunos entendendo que deveriam saber resolver os problemas propostos, 55% atribuem uma dificuldade alta (4) para os itens de avaliação, conforme Figura 106.

Figura 106 – Percepção sobre a avaliação *Resolução de problemas*



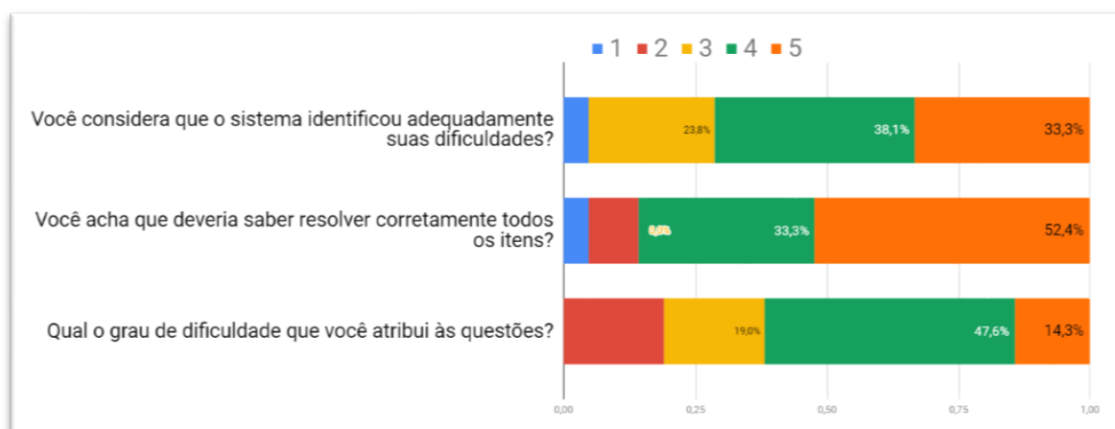
Fonte: A pesquisa.

Na Figura 107, apresentam-se as perguntas e o resumo das respostas dos participantes sobre a avaliação *Matemática*. A qualidade e a capacidade de identificar as dificuldades matemáticas também foi considerada por 71% dos participantes entre alta e muito alta (4 a 5), com uma distribuição muito semelhante à da avaliação *Resolução de problemas*.

Quanto aos itens da avaliação, 33% dos alunos concordam e 52% deles concordaram plenamente que deveriam saber resolver os itens. Em relação à dificuldade dos itens, 47% dos

alunos consideraram como alta (4), com alguns atribuindo seus erros a um ensino fraco, tanto no Ensino Fundamental quanto Ensino Médio, a falta de estudo, e erros por distração.

Figura 107 - Percepção sobre a avaliação *Matemática*



Fonte: A pesquisa

Os dados provenientes do questionário de perfil identificam alunos trabalhando 40 horas semanais, aprovados com média entre 6 e 7 na disciplina de Cálculo 1 e que não ingressaram no Ensino Superior logo após terminarem o Ensino Médio.

## 6.2 CATEGORIAS DE ANÁLISE DOS DADOS

Considerando os dados coletados na experiência, provenientes do banco de dados do ADAC, e o grupo do experimento, com as características dos seus integrantes, definiu-se duas categorias de análise: uma que valida o ADAC como ferramenta de avaliação diagnóstica e outra que analisa as dificuldades dos participantes que realizaram o experimento. A análise do grupo, apesar de não ser o foco da pesquisa, fornece informação importante devido à característica particular do grupo ser composto por graduandos dos cursos de engenharia da Universidade Luterana do Brasil.

Deste modo, as categorias de análise foram definidas em:

- **validação do ADAC como ferramenta avaliativa diagnóstica**, com a análise dos dados produzidos pelos participantes do experimento e armazenados pelo ADAC, pois as respostas aos itens de avaliação são carregadas de informação sobre os conhecimentos, competências e habilidades do respondente que são mobilizados para a resolução dos problemas propostos. Desse modo, considerando que a escolha de uma resposta errada é uma evidência da existência de dificuldades em relação às habilidades ou competências necessárias para a resolução do problema proposto, a análise das escolhas dos respondentes para as perguntas buscou validar essas evidências como a prova das

dificuldades matemáticas do respondente em relação ao objeto de avaliação dos itens em questão;

- **identificação das dificuldades do grupo participante na resolução de problemas envolvendo derivadas**, pela análise das respostas verificando, em um enfoque coletivo, os erros mais recorrentes do grupo de participantes e as dificuldades associadas aos erros.

### 6.3 VALIDAÇÃO DO ADAC

Com o objetivo de responder à pergunta de pesquisa “*Como implementar<sup>39</sup> um sistema de avaliação diagnóstica que possibilite identificar as dificuldades para a resolução de problemas envolvendo o conceito de Derivadas em alunos de Engenharia?*”, realizou-se um experimento com alunos dos cursos de engenharia da Universidade Luterana do Brasil com o objetivo de *investigar um modelo de avaliação diagnóstica fundamentado na análise de erro, executável em um sistema de avaliação computacional que identifica as dificuldades dos alunos de engenharias na resolução de problemas envolvendo os conceitos de Derivadas.*

Foram analisadas as 1.647 respostas armazenadas no banco de dados do ADAC, buscando validar os itens de avaliação e, por consequência, o ADAC como um sistema diagnóstico eficiente para identificar as dificuldades dos alunos de engenharia na resolução de problemas com Derivadas.

Antes das análises dos itens individualmente, apresentam-se as informações gerais dos itens das duas avaliações para uma visão global segundo o propósito a que se destinam. Na Tabela 1 tem-se as informações sobre as avaliação *Matemática*, na qual verifica-se: 844 respostas aos itens apresentados aos 30 participantes; 428 respostas corretas, equivalendo a 51% das respostas; 416 respostas não corretas, distribuídas entre respostas erradas e respostas do tipo *não sei*, correspondentes a 49%. O percentual de respostas erradas evidencia, no grupo participante, a existência de dificuldades relacionadas aos conteúdos de Álgebra desta avaliação, que são estudados nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio.

Destaca-se que as respostas não corretas são o foco das análises e, considerando o universo de 416 respostas incorretas da avaliação *Matemática*, tem-se que as respostas do tipo *não sei* representam 35,5% destas, sendo uma proporção considerável, que permite inferir que, em uma avaliação diagnóstica, elas são importante fonte de informação sobre os conhecimentos do alunos, pois estes externam, de maneira direta e explícita, seu conhecimento sobre o objeto de avaliação, atribuindo um maior grau de precisão à inferência sobre a dificuldades dos respondentes.

---

<sup>39</sup> Implementar está sendo utilizado no sentido de desenvolver, aplicar e avaliar.

Na tabela 1 apresenta-se informações gerais sobre os resultados de cada item da avaliação *Matemática* do ADAC.

Tabela 1 – Informações gerais da avaliação *Matemática*

Item	n° itens				% itens			Tempo médio de resposta dos itens		
	Errados	Não sei	Certos	Total	Errados	Não sei	Certos	Errados	Não sei	Certos
M1	3	1	26	30	10%	3%	87%	00:32	00:27	00:59
M2	2	0	24	26	8%	0%	92%	00:59		00:36
M3	3	0	3	6	50%	0%	50%	00:22		00:28
M4	13	2	12	27	48%	7%	44%	01:07	00:19	00:49
M5	3	3	12	18	17%	17%	67%	00:13	00:31	00:25
M6	6	0	18	24	25%	0%	75%	00:36		00:25
M7	11	0	19	30	37%	0%	63%	00:31		00:35
M8	5	6	8	19	26%	32%	42%	00:37	00:35	00:47
M9	2	7	13	22	9%	32%	59%	00:13	00:38	00:49
M10	2	2	17	21	10%	10%	81%	00:28	01:26	00:53
M11	5	1	7	13	38%	8%	54%	00:17	00:10	00:53
M12	0	0	24	24	0%	0%	100%			00:41
M13	8	1	21	30	27%	3%	70%	00:22	00:09	00:24
M14	6	2	13	21	29%	10%	62%	00:28	00:12	00:28
M15	5	3	9	17	29%	18%	53%	00:18	00:07	00:26
M16	14	5	3	22	64%	23%	14%	01:40	01:09	01:12
M17	8	7	12	27	30%	26%	44%	00:26	00:56	00:40
M18	6	1	8	15	40%	7%	53%	00:28	00:32	00:27
M19	7	6	17	30	23%	20%	57%	00:23	00:25	00:31
M20	2	0	15	17	12%	0%	88%	00:23		00:30
M21	6	8	1	15	40%	53%	7%	01:08	00:21	00:35
M22	4	0	12	16	25%	0%	75%	02:00		01:11
M23	10	7	1	18	56%	39%	6%	00:24	00:07	00:27
M24	4	2	7	13	31%	15%	54%	01:39	00:18	01:35
M25	6	11	13	30	20%	37%	43%	00:30	00:33	00:55
M26	3	6	4	13	23%	46%	31%	01:30	00:11	00:40
M27	7	14	5	26	27%	54%	19%	00:51	00:24	00:36
M28	5	3	1	9	56%	33%	11%	00:41	00:16	00:36
M29	5	14	10	29	17%	48%	34%	00:31	00:22	00:32
M30	2	6	3	11	18%	55%	27%	00:54	04:33	00:31
M31	18	3	9	30	60%	10%	30%	00:21	00:06	00:37
M32	5	1	3	9	56%	11%	33%	00:12	00:11	00:48
M33	16	4	7	27	59%	15%	26%	00:32	00:14	00:28
M34	1	0	9	10	10%	0%	90%	00:08		00:24
M35	9	6	6	21	43%	29%	29%	00:29	00:40	00:32
M36	0	7	8	15	0%	47%	53%		00:40	00:20
M37	20	5	5	30	67%	17%	17%	00:10	00:14	00:34
M38	0	0	5	5	0%	0%	100%			00:21
M39	16	1	8	25	64%	4%	32%	00:12	04:18	00:14
M40	2	0	11	13	15%	0%	85%	00:11		00:27
M41	8	1	10	19	42%	5%	53%	00:23	00:19	00:28
M42	10	2	9	21	48%	10%	43%	00:27	00:19	00:53
<b>Totais</b>	<b>268</b>	<b>148</b>	<b>428</b>	<b>844</b>	<b>32%</b>	<b>18%</b>	<b>51%</b>	<b>00:36</b>	<b>00:41</b>	<b>00:38</b>

Fonte: A pesquisa.

A Tabela 2 apresenta as informações da avaliação *Resolução de problemas*, com a participação de 34 alunos que produziram 803 respostas, das quais tem-se 260 respostas corretas, representando 32%, e 543 respostas não corretas, sendo 167 do tipo *não sei* e 376 respostas incorretas. No geral, o grupo respondeu incorretamente a 68% dos itens de avaliação, evidenciando que o grupo apresentou dificuldades relacionadas com as habilidades e competências necessárias para a resolução dos problemas selecionados.

Considerando o universo das respostas incorretas, as respostas do tipo *não sei* representam 31%, mantendo quase a mesma proporção que na avaliação *Matemática*, corroborando a importância desta opção de resposta em avaliações diagnósticas, que permite que o aluno externar explicitamente seus conhecimentos e habilidades avaliadas.



Tabela 2 – Informações gerais da avaliação *Resolução de problemas*

Item	n° item				% item			Tempo médio de resposta dos itens		
	Errados	Não_sei	Certos	Total	Errados	Não_sei	Certos	Errados	Não_sei	Certos
P1	5	0	29	34	15%	0%	85%	00:52		00:53
P2	2	0	3	5	40%	0%	60%	00:22		00:45
P3	8	1	20	29	28%	3%	69%	00:32	00:30	00:41
P4	10	9	2	21	48%	43%	10%	01:05	01:30	01:37
P5	1	2	0	3	33%	67%	0%	00:29	00:42	
P6	7	1	5	13	54%	8%	38%	01:08	01:12	01:55
P7	12	2	3	17	71%	12%	18%	01:40	00:54	02:08
P8	14	3	17	34	41%	9%	50%	01:51	01:17	01:50
P9	3	0	1	4	75%	0%	25%	03:03		01:18
P10	23	3	8	34	68%	9%	24%	01:38	03:02	01:30
P11	18	12	4	34	53%	35%	12%	01:19	01:52	01:51
S1	28	2	4	34	82%	6%	12%	01:16	01:31	00:51
S2	26	3	3	32	81%	9%	9%	00:59	02:15	01:45
S3	7	21	6	34	21%	62%	18%	00:38	00:50	01:12
S4	14	17	3	34	41%	50%	9%	01:02	01:25	02:31
S5	17	15	2	34	50%	44%	6%	03:09	03:26	02:11
S6	19	0	0	19	100%	0%	0%	01:39		
S7	20	10	4	34	59%	29%	12%	01:14	01:01	02:08
S8	21	9	4	34	62%	26%	12%	01:17	01:54	01:04
S9	13	8	4	25	52%	32%	16%	00:43	01:02	00:55
S10	10	1	6	17	59%	6%	35%	02:45	00:35	04:56
Q1	17	2	4	23	74%	9%	17%	01:42	01:11	02:08
Q2	0	0	8	8	0%	0%	100%			00:21
Q3	3	0	1	4	75%	0%	25%	00:47		00:14
Q4	1	0	0	1	100%	0%	0%	00:15		
Q5	9	10	4	23	39%	43%	17%	01:09	00:46	01:29
Q6	7	7	9	23	30%	30%	39%	01:53	03:56	01:57
Q7	16	3	4	23	70%	13%	17%	01:12	00:21	00:24
Q8	2	1	1	4	50%	25%	25%	00:34	00:07	00:17
Q10	11	8	4	23	48%	35%	17%	01:13	00:35	01:10
Q9	1	0	2	3	33%	0%	67%	00:04		00:27
D1	9	7	18	34	26%	21%	53%	00:52	00:54	01:25
D2	6	1	11	18	33%	6%	61%	01:42	03:54	00:40
D3	8	3	12	23	35%	13%	52%	00:43	00:10	00:28
D4	0	4	19	23	0%	17%	83%		00:14	00:24
D5	3	1	11	15	20%	7%	73%	00:16	00:16	00:23
D6	5	1	24	30	17%	3%	80%	00:11	00:33	00:19
<b>Totais</b>	<b>376</b>	<b>167</b>	<b>260</b>	<b>803</b>	<b>47%</b>	<b>21%</b>	<b>32%</b>	<b>01:11</b>	<b>01:18</b>	<b>01:18</b>

Fonte: A pesquisa.

### 6.3.1 Análise dos itens de avaliação

A validade do ADAC foi definida, nesta pesquisa, pela qualidade e validade dos seus itens de avaliação, ou seja, a capacidade de identificar as prováveis dificuldades dos respondentes. Desse modo, apresentam-se as seguintes considerações:

- as opções do tipo *não sei* (*não sei; não tenho certeza; tenho dúvidas qual é; não entendi*), quando selecionadas, representam de maneira clara a dificuldade do respondente em relação ao objeto de avaliação do item;
- respondentes que selecionam respostas erradas do mesmo tipo evidenciam sua dificuldade em relação às dificuldades matemáticas associadas;
- cada distrator foi desenvolvido levando em consideração a classificação de erros de Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987), com a definição das dificuldades associadas aos erros fundamentada nas pesquisas já realizadas sobre a Análise dos Erros.

Para uma melhor compreensão das análises, são apresentados os conceitos e habilidades matemáticas cadastrados no ADAC (Figura 108) e as etapas para a resolução de problemas.

Figura 108 – Conceitos e habilidades avaliados nas etapas de resolução de problemas.

Etapa	Ações	Conceitos / Habilidades cadastrados no ADAC
Compreensão	Interpretação do problema	Interpretação do enunciado
		Modelagem do problema
		Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis
		Representação geométrica e linguagem natural das cônicas
		Representação algébrica das funções notáveis
		Representação algébrica das cônicas
Estratégia	Identificação da Solução	Relação de dependência
		Conceito de valor
		Conceito de variação; derivada primeira
		Característica de ponto crítico
Execução	Cálculo matemático	Conceito de derivada segunda
		Cálculo das derivadas
		Derivadas regra da cadeia
		Cálculo de limite
		Expressões algébricas (propriedade distributiva da multiplicação)
		Expressões algébricas (ordem das operações)
		Expressões algébricas (frações algébricas)
		Expressões algébricas (simplificação com frações)
		Solução de equações não polinomiais
		Expressões algébricas (radiciação)
Expressões algébricas (potenciação)		
Resultado	Interpretação do resultado	Verificação do resultado no contexto do problema

Fonte: Elaborado pelo autor.

As análises se iniciam pela avaliação *Matemática*, que verifica as habilidades matemáticas relativas a Álgebra consideradas conhecimentos *a priori* para a *Resolução de problemas*.

### 6.3.2 Avaliação Matemática

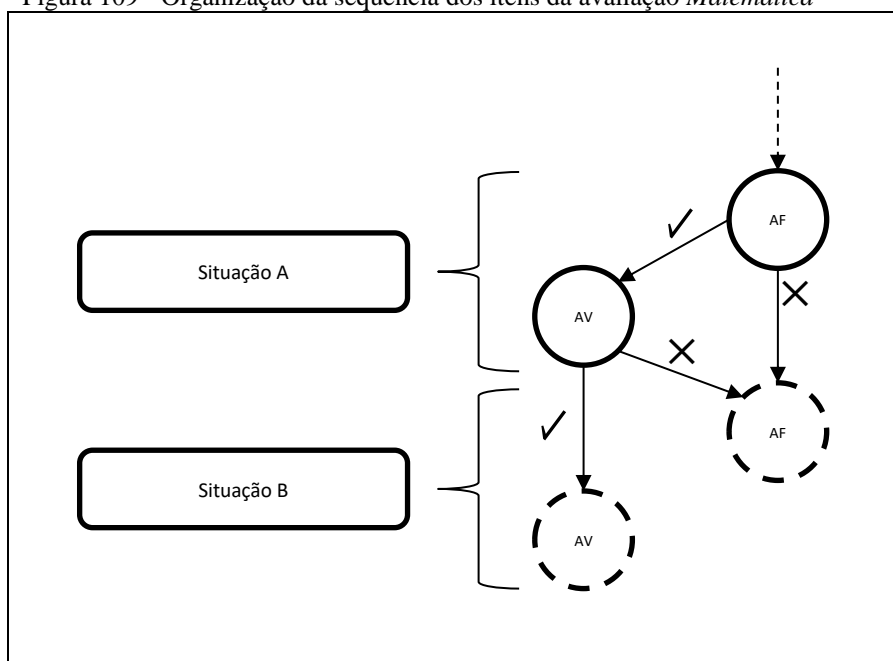
A avaliação *Matemática* é organizada em sete conteúdos, apresentados em uma sequência composta de seis itens encadeados, de modo que, de acordo com desempenho do respondente durante a avaliação, o ADAC pode apresentar de três a seis desses itens por conteúdo. Os itens de avaliação verificam a existência de dificuldades relativas a operações e manipulações algébricas e, segundo Cury e Konzen, a maior parte dos erros cometidos por alunos de Cálculo é:

... decorrente da falta de pré-requisitos, especialmente quanto aos assuntos relacionados à Álgebra do ensino fundamental e médio, como propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, simplificação de expressões algébricas, fatoração, produtos notáveis e resolução de equações polinomiais (CURY; KONZEN, 2006, p. 1).

Complementando a avaliação *Resolução de problemas*, os itens da avaliação *Matemática* exploram situações que requerem a aplicação correta da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, simplificações de expressões algébricas, fatoração e resolução de equações algébricas.

Para melhor compreensão da análise, reapresenta-se a organização da sequência dos itens da avaliação *Matemática* na Figura 109. Os itens foram desenvolvidos aos pares, apresentando uma afirmação falsa (AF) e uma afirmação verdadeira (AV) relativas ao que envolve o mesmo conceito, de maneira que os alunos que acertam uma AF são direcionados para uma AV do mesmo tipo, visando confirmar se o respondente sabe o que seria correto. Os alunos que erram uma AF são direcionados para a AF do próximo par de itens. Caso o aluno acerte uma AV, será apresentado a outra AV do próximo par de itens e, se errar, ele é direcionado para a AF do próximo par de itens.

Figura 109 - Organização da sequência dos itens da avaliação *Matemática*



Fonte: Elaborado pelo autor.

Desta maneira, para cômputo dos erros e acertos para inferência sobre as dificuldades, tem-se as seguintes situações de respostas para os pares de itens do mesmo tipo: AF e AV certos; AF certo e AF errado e AF errado. Como são contabilizados somente os erros, para um grupo de 6 itens de um conteúdo ou conceito avaliado, as quantidades são de 1, 2 ou 3. Considera-se que duas ou mais respostas erradas são evidências de dificuldades com o objeto de avaliação.

O número de itens respondidos incorretamente, ou seja, a soma das respostas erradas e das respostas do tipo *não sei* dos participantes que realizaram a avaliação Matemática é

apresentado na Tabela 3. As quantidades estão organizadas pelos conteúdos cadastrados no ADAC como dificuldades associadas às respostas erradas dos itens de avaliação.

Tabela 3 – Número de erros por conteúdo

Participante	Expressões algébricas (potenciação)	Expressões algébricas (ordem das operações)	Expressões algébricas (propriedade distributiva da multiplicação em relação a adição)	Expressões algébricas (simplificação com frações)	Expressões algébricas (frações algébricas)	Equações não polinomiais	Expressões algébricas (radiciação)
A1	1	1	2	2	3	3	3
A2	0	1	0	1	0	1	0
A3	3	1	1	2	0	1	1
A4	3	0	0	2	0	3	1
A5	3	1	2	2	2	3	1
A6	1	1	0	2	1	2	1
A7	2	2	2	3	3	3	3
A8	2	1	0	0	2	3	3
A9	3	0	3	3	3	3	3
A11	0	0	1	1	0	2	0
A12	3	2	1	3	2	3	3
A13	3	0	1	3	3	3	3
A14	2	3	3	3	3	3	3
A15	2	1	1	3	2	3	3
A16	3	0	2	2	1	3	3
A17	3	1	0	2	3	3	3
A18	2	1	1	1	3	3	2
A19	1	0	1	2	0	3	3
A20	3	0	3	3	2	3	3
A21	1	2	1	3	1	3	3
A22	1	0	0	1	0	2	0
A23	3	1	1	2	3	3	3
A24	3	3	1	2	1	2	3
A25	3	2	2	3	3	3	3
A26	2	1	0	2	0	3	3
A35	0	2	1	3	3	3	3
A36	3	3	3	3	3	3	3
A37	3	3	3	3	3	3	1
A38	3	2	2	2	3	3	3
A39	3	1	3	2	3	3	3

Fonte: A pesquisa.

Para uma análise global da avaliação *Matemática* e o grupo de participantes, apresenta-se na

Tabela 4 uma consolidação da informação da Tabela 3 com o número de alunos que responderam incorretamente a pelo menos um item, a dois ou mais itens e a três itens. Tomando como referência os alunos que responderam incorretamente a três itens abordando o mesmo conteúdo, somente dois conteúdos estão abaixo de 30%, ordem das operações e a propriedade distributiva da multiplicação sobre a adição. Observa-se, também, que uma proporção considerável de alunos errou em, pelo menos, um item para todos os conceitos, mas se considera que alguns erros podem ser provenientes de engano ou distração. Logo, para o aluno, sua preocupação deve ser com os conteúdos que ele errou duas ou mais vezes.

Tabela 4 – Número de alunos com respostas erradas por conteúdo matemático

Número de alunos que	erram 1 item ou mais		erram 2 itens ou mais itens		erraram 3 itens	
Expressões algébricas (potenciação)	27	90%	22	73%	18	60%
Expressões algébricas (ordem das operações)	22	73%	10	33%	6	20%
Expressões algébricas (propriedade distributiva da multiplicação sobre a adição)	23	77%	12	40%	8	27%
Expressões algébricas (simplificação com frações)	29	97%	25	83%	14	47%
Expressões algébricas (frações algébricas)	23	77%	19	63%	15	50%
Solução de equações não polinomiais	30	100%	28	93%	25	83%
Expressões algébricas (radiciação)	27	90%	22	73%	22	73%

Fonte: A pesquisa.

Nos itens da avaliação *Matemática*, o enunciado envolve uma igualdade, ou desigualdade, de expressões matemáticas, sendo estas uma AV ou uma AF. Os erros explorados na construção nas afirmações falsas são os erros técnicos (HADAR; ZASLAVSKY; INBAR, 1987) que incluem erros de manipulações algébricas elementares.

Na Figura 110 apresenta-se o conjunto de 6 itens com as igualdades de expressões algébricas envolvendo a ordem das operações básicas. Esse conjunto de itens foi apresentado a trinta alunos, com 22 deles errando pelo menos um item e dez respondendo incorretamente a dois ou mais itens, correspondendo a 33% dos participantes.

Figura 110 - Itens de avaliação para a expressões algébricas (ordem das operações)

Item	Tipo de afirmação	Enunciado do item
M1	AF	$3 + (2 - b) \cdot a = 5a - ab$
M2	AV	$(5x + 3y) + (4x + 2y) \cdot 2 = 13x + 7y$
M3	AF	$2(3a + b)^2 = (6a + 2b)^2$
M4	AV	$3(y + x)^2 = (3y + 3x)(y + x)$
M5	AF	$12 - 5 \operatorname{sen}(2x) = 7 \operatorname{sen}(2x)$
M6	AV	$a + b \cdot 2 - b = a + b$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Pela Tabela 5, a sequência M1/M2 apresenta um baixo percentual de erro, mas, mesmo envolvendo somente adição e multiplicação, quatro alunos responderam incorretamente (A7, A14, A36, A37) e, olhando o desempenho individual dos mesmos, verifica-se que A14, A36 e A37 responderam incorretamente a mais dois itens do conjunto. Dos 26 alunos encaminhados para M2, dois alunos, A1 e A24, responderam incorretamente, com A1 errando somente este item, que sugere um erro por distração, e A24 errando dois outros itens.

Tabela 5 – Número de respostas não corretas para a *Ordem das operações*

	Total de respostas	erradas	não sei	Total incorretas	% incorretas
<b>M1</b>	30	3	1	4	13
<b>M2</b>	26	2	0	2	8
<b>M3</b>	6	3	0	3	50
<b>M4</b>	27	13	2	15	56
<b>M5</b>	18	3	3	6	33
<b>M6</b>	24	6	0	6	25

Fonte: A pesquisa.

O percentual de erros para M3 e M4 sobe para 50% e sugere dificuldades na ordem das operações, quando envolve a multiplicação e a potenciação. Pela lógica de apresentação, o item M3 foi respondido por seis alunos, dos quais três consideraram correto aplicar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, antes da potenciação, uma generalização equivocada operada pelos alunos do Ensino Fundamental e Médio (FELTES, 2007) que perdura no Ensino Superior. O item M4, com o maior percentual de erros, foi respondido incorretamente por treze alunos, sugerindo dificuldades na identificação da potência como o produto de dois termos, no qual é possível aplicar a propriedade associativa e a distributiva da multiplicação em relação à adição.

O item M5 apresenta uma expressão trigonométrica e foi respondido incorretamente por seis alunos, três afirmando ser verdadeira a igualdade e três declarando não saber se estava correta. Supõem-se que o erro e as dúvidas sejam porque os alunos, habituados com as operações aritméticas, realizem primeiro a soma dos números, ignorando a precedência da multiplicação sobre a adição.

O item M6 teve seis alunos o identificando como uma igualdade inválida, pois o hábito de indicar o produto de polinômios sem parênteses (CURY, 2003) faz com que os alunos identifiquem como incorreta a igualdade, pois os mesmos interpretam como um produto de dois binômios.

Apesar de serem expressões algébricas simples, as respostas incorretas aos itens evidencia dificuldades nas manipulações algébricas elementares, que se refletem nas operações algébricas mais complexas, envolvendo várias operações, como os demais itens da avaliação *Matemática*.

Pelas situações apresentadas e as respostas dos alunos a elas, o conjunto de itens foi considerado adequado para a avaliação das dificuldades relativas à ordem das operações.

Os itens para avaliar dificuldades na aplicação da propriedade distributiva da multiplicação sobre a adição, Figura 111, trazem situações diversas, dentre as quais a generalização equivocada do produto de dois binômios (M7, M11) e operações de multiplicação à direita e à esquerda.

Figura 111 - Itens de avaliação para a EA (propriedade distributiva da multiplicação sobre a adição)

Item	Tipo de afirmação	Enunciado do item
M7	AF	$(x - y)(-x + y) = -x^2 - y^2$
M8	AV	$(3xy^2 - xy) \frac{x}{y} = (3x^2y - x^2)$
M9	AF	$2\left(\frac{x}{4} - \frac{y}{9}\right) 3 = \frac{x}{2} - \frac{y}{3}$
M10	AV	$x^2 + 2xy - x - 2y = -x(1 - x) + 2y(x - 1)$
M11	AF	$(2x + y)(x + 3y) = 2x^2 + 3y^2$
M12	AV	$(w + y)(z - k) = zw - kw + zy - ky$

Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 111 apresenta os números de resposta para o conjunto de itens para *Expressões algébricas (propriedade distributiva da multiplicação)*. Chamou atenção o item M12 com nenhuma resposta errada, sendo que o mesmo é semelhante a M7 e M11, com, respectivamente, 37% e 46% de respostas erradas. Analisando o conjunto de itens, tem-se que 24 alunos responderam aos itens M7 e M12, com seis alunos (A1, A3, A13, A16, A21, A38) errando M7 e acertando M12. Isso sugere uma generalização equivocada quando os termos são iguais nos dois binômios, como é o caso de M7.

Para M12, com os termos do binômio diferentes, os alunos realizam corretamente a operação. Logo, esses estudantes têm conhecimento e sabem aplicar a propriedade da distributiva da multiplicação sobre a adição, mas, ao mesmo tempo, têm uma regra própria para o produto de binômios com termos iguais. Isso também pode ser observado pela quantidade de erros de M11.

O item M8, com 58% de respostas erradas, mostra que, mesmo sabendo que a igualdade em M7 está errada, mais da metade dos alunos direcionados para M8 não identificam que ela apresenta uma igualdade correta – talvez por ela envolver uma simplificação algébrica.

Tabela 6 – Itens de avaliação para a EA (propriedade distributiva da multiplicação sobre a adição)

	Total de respostas	n° erradas	n° não sei	Total incorretas	% incorretas
M7	30	11	0	11	37
M8	19	5	6	11	58
M9	22	2	7	9	41
M10	21	2	2	4	19
M11	13	5	1	6	46
M12	24	0	0	0	0

Fonte: A pesquisa.

Pela lógica de encadeamento, M9 é apresentado para os que erram M7 ou M8. Talvez por apresentar uma simplificação algébrica como M8, 30% dos alunos declararam não saber se a mesma é correta. O item M10 é o que apresenta o menor número de erros, depois de M12, mas é o que contém uma multiplicação à direita dos dois binômios. Mesmo assim, dois alunos erraram e dois não souberam que a afirmação era verdadeira.

Apesar dos itens M8 e M9 deixarem dúvidas se os erros são devido a dificuldades nas simplificações algébricas, devendo ser revistos ou substituídos, considera-se que o conjunto dos itens é adequado ao evidenciar as dificuldades do grupo em relação à aplicação da propriedade distributiva da multiplicação sobre a adição.

Para avaliar as dificuldades nas simplificações algébricas, Figura 112, foram construídos os itens verificando se os alunos estabelecem as relações de equivalência entre a fração dada e o resultado obtido pela simplificação.

Figura 112 - Itens de avaliação para a Expressões algébricas (simplificação algébrica)

Item	Tipo de afirmação	Enunciado do item
M13	AF	$\frac{6x^2 + 2y^2}{6} = x^2 + 2y^2$
M14	AV	$\frac{8yx^2 - 4y^3x}{2xy} = 4x - 2y^2$
M15	AF	$\frac{4(x - y)}{k + (x - y)} = \frac{4}{k}$
M16	AV	$\frac{4x - 2xy}{(2 - y)4} = \frac{x}{2}$
M17	AF	$\frac{3x + 2y}{x + 2} = 3 + y$
M18	AV	$\frac{8x^2 - yx}{x^2} = 8 - \frac{y}{x}$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Os percentuais de respostas erradas dos itens na Tabela 7 apontam que parte do grupo apresenta dificuldades em relação ao conteúdo. O item M16, com 86% de respostas erradas, é uma evidência para essa afirmação.

Tabela 7 - Número de respostas não corretas para Expressões algébricas (simplificação algébricas)

	Total de respostas	n° erradas	n° não sei	Total incorretas	% incorretas
M13	30	8	1	9	30
M14	21	6	2	8	38
M15	17	5	3	8	47
M16	22	14	5	19	86
M17	27	8	7	15	56
M18	15	6	1	7	47

Fonte: A pesquisa.

Em relação aos erros nas simplificações de frações algébricas, Notari (2002) identifica a simplificação de apenas um dos termos de uma soma do numerador ou do denominador como erros cometidos pelos alunos do Ensino Médio e Superior.

As afirmações verdadeiras M14 e M18 têm, respectivamente, 38% e 47% de respostas erradas e reduzido número de respostas do tipo *não sei*, ou seja, os alunos têm conceitos equivocados que consideram corretos sobre as simplificações, não identificando os itens como AV. O item M16, com 86% de respostas incorretas, quatorze respostas erradas e cinco respostas do tipo *não sei*, sugere dificuldades em identificar os fatores comuns para poder simplificar a



fração algébrica. O item M17, com 56% de respostas incorretas – oito respostas erradas e sete do tipo *não sei* –, é semelhante a M13, com os alunos simplificando os termos do numerador com o denominador pela semelhança e ignorando a operação de soma.

Ressalta-se que a fatoração não é avaliada separadamente da simplificação. Portanto, os itens são considerados adequados ao objetivo de identificar as dificuldades dos estudantes nas simplificações de expressões algébricas.

Para avaliar as dificuldades nas operações com frações algébricas, Figura 113, foram desenvolvidos os itens de M19 a M24. São exploradas as operações de soma, divisão de frações e solução de equações de primeiro grau. Considerando o grupo de participantes e o conteúdo avaliado, na

Tabela 4 verifica-se que dezenove alunos erraram dois ou mais itens do conjunto, indicando a falta de domínio nas operações com frações algébricas por 63% do grupo.

Figura 113 - Itens de avaliação para a Expressões algébricas (fração algébricas)

Item	Tipo de afirmação	Enunciado do item
M19	AF	$\frac{5}{y} + \frac{2}{x} = \frac{7}{x+y}$
M20	AV	$\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = \frac{2x+y}{4}$
M21	AF	$3x = \frac{y}{6} \Rightarrow x = \frac{y}{6} \Rightarrow x = \frac{y}{2}$
M22	AV	$\frac{2}{3}x = \frac{y}{6} \Rightarrow x = \frac{y}{2} \Rightarrow x = \frac{y}{4}$
M23	AF	$\frac{\frac{x}{4}-1}{\frac{3}{4}-\frac{x}{2}} = \left(\frac{x}{4}-1\right) \cdot \left(\frac{4}{3}-\frac{2}{x}\right)$
M24	AV	$\frac{\frac{4x}{3}-x}{2x-\frac{5x}{3}} = 1 \text{ para } x \neq 0$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Acompanhando o desempenho do grupo, na Tabela 8, observa-se que M19 (AF) é respondido incorretamente por treze alunos, que são direcionados para M21 (AF), com 93% de respostas erradas, e depois para M23 (AF), com 94% de respostas erradas. Pelo banco de dados, foi possível identificar doze alunos que responderam incorretamente a essa sequência de itens AF, indicando que esse grupo apresenta grandes dificuldades para realizar operações com frações.

Analisando a sequência das três AV, M20, M22 e M24, pelo banco de dados identificou-se que sete alunos acertaram os três itens. Pela Tabela 8, verifica-se que os itens M20, M22 e M24 tiveram respectivamente 12%, 25% e 46% de respostas erradas, com um

aumento percentual conforme o grau de dificuldade dos itens foi aumentando e, consequentemente, um direcionamento gradual dos itens AV para os itens AF.

Tabela 8 - - Número de respostas não corretas para Expressões algébricas (frações algébricas)

	Total de respostas	n° erradas	n° não sei	Total incorretas	% incorretas
<b>M19</b>	30	7	6	13	43
<b>M20</b>	17	2	0	2	12
<b>M21</b>	15	6	8	14	93
<b>M22</b>	16	4	0	4	25
<b>M23</b>	18	10	7	17	94
<b>M24</b>	13	4	2	6	46

Fonte: A pesquisa.

Esse conjunto de itens se mostrou eficiente na identificação das dificuldades matemáticas relativas a operações com frações algébricas, ao apresentar situações às quais os alunos não responderam corretamente, incorrendo nos erros identificados por Notari (2002).

As equações não polinomiais (exponenciais, trigonométricas e logarítmicas) foram avaliadas pelos itens M25 a M30, apresentados na

. Ressalta-se que o grupo teve o pior desempenho nesses itens, conforme os resultados da

Tabela 4, na qual identifica-se que todos os participantes erraram pelo menos um dos itens, 28 alunos responderam incorretamente a dois ou mais itens e 25 alunos erraram três itens.

Figura 114 - Itens de avaliação para a Equações não polinomiais

Item	Tipo de afirmação	Enunciado do item
<b>M25</b>	AF	$3^x - 2 = 7 \Rightarrow x = \sqrt[3]{5}$
<b>M26</b>	AV	$5^x = 4 \Rightarrow x = \frac{\log 4}{\log 5}$
<b>M27</b>	AF	$\text{sen } 2y = 3 \Rightarrow y = \text{arcsen } \frac{3}{2}$
<b>M28</b>	AV	$\cos (3 - y) = 5 \Rightarrow y = 3 - \text{arccos } 5$
<b>M29</b>	AF	$\ln(y + 2) = 5 \Rightarrow \ln y = 3$
<b>M30</b>	AV	$5 = \ln(4y) \Rightarrow y = \frac{e^5}{4}$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Para o par de itens M25 e M26, que solicitam a solução de uma equação exponencial, 26 alunos responderam incorretamente a um dos dois itens. O par de itens M27 e M28 tiveram, respectivamente, 81% e 89% de respostas erradas – o que evidencia as dificuldades do grupo nas resoluções de equações trigonométricas. Os itens M29 e M20 apresentaram 66% e 73% de respostas erradas.

Outra informação relevante sobre os conhecimentos dos alunos em relação à solução de equações não polinomiais pode ser inferida pela relação entre as respostas do tipo *não sei* e as respostas erradas. Excetuando o item M28, os demais têm o dobro ou mais de respostas *não sei*, na comparação com o número de respostas erradas.

A opção *não sei* não pode ser considerada um distrator, pois não traz uma situação que um aluno com pouco conhecimento pode considerar como verdadeiro. Quando o aluno afirma *não sei*, ele mostra que não tem conhecimento sobre o objeto de avaliação, afirmando e assumindo que não tem ideia do que é certo ou errado ou do que fazer.

Esse grupo de itens reafirma a importância das opções do tipo *não sei* nas avaliações diagnósticas, pois elas permitem ao aluno mostrar às partes interessadas, tanto ele quanto o professor, seu conhecimento sobre objeto de avaliação.

Tabela 9 - Número de respostas não corretas para Equações não polinomiais

	Total de respostas	n° erradas	n° não sei	Total incorretas	% incorretas
<b>M25</b>	30	6	11	17	57
<b>M26</b>	13	3	6	9	69
<b>M27</b>	26	7	14	21	81
<b>M28</b>	9	5	3	8	89
<b>M29</b>	29	5	14	19	66
<b>M30</b>	11	2	6	8	73

Fonte: A pesquisa.

A Figura 113 apresenta os itens com expressões matemáticas envolvendo a radiciação com generalizações equivocadas, como M31, e desigualdades falsas, como M33 e M35. Analisando o grupo de participantes pela

Tabela 4, observa-se também um baixo desempenho, com 27 alunos (73%) respondendo incorretamente a pelo menos um dos itens. Pelo banco de dados, identificou-se que nove alunos responderam incorretamente à sequência de itens M31, M33 e M35, indicando dificuldades desse grupo de estudantes.

Figura 115 - Itens de avaliação para a Expressões algébricas (radiciação)

Item	Tipo de afirmação	Enunciado do item
<b>M31</b>	AF	$\sqrt{x^2 + y^2} = x + y$
<b>M32</b>	AV	$x\sqrt{xy} = \sqrt{x^3y}$
<b>M33</b>	AF	$\sqrt{9(x + y)^2} \neq 3x + 3y$
<b>M34</b>	AV	$\sqrt{121 x^4 y^2} = 11x^2 y$
<b>M35</b>	AF	$\sqrt{\frac{16x^2}{2}} \neq 2x\sqrt{2}$
<b>M36</b>	AV	$\sqrt{\frac{x^3}{4y^2}} = \frac{x}{2y}\sqrt{x}$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Fato interessante pôde ser observado analisando o desempenho do aluno A26, que acertou todos os itens de frações algébricas, respondeu não saber resolver todas as equações não polinomiais e respondeu incorretamente a todos os itens de radiciação. Esse comportamento sugere domínio em frações algébricas, falta de conhecimento para as equações não polinomiais e um conhecimento equivocado para radiciação.

Os dados da Tabela 10 mostram que dezoito alunos responderam incorretamente ao item M31, ou seja, 70% dos alunos entendem equivocadamente que a raiz quadrada da soma é a soma das raízes. A lógica de encadeamento acabou apresentando o item M32 para os nove alunos que responderam que M31 era falso, mas seis desses nove alunos não souberam que M32 apresenta uma igualdade verdadeira.

A desigualdade em M33 foi respondida por 27 alunos com dezesseis respostas incorretas e quatro respostas *não sei*, com um total de vinte respostas incorretas (74%). O item M34 foi respondido por dez alunos, com uma resposta errada. Logo, a compreensão de que a raiz enésima do produto é igual ao produto das raízes enésimas parece não ser problema, e sim a sua generalização equivocada para a soma, como em M31.

O item M35 teve nove respostas erradas e seis respostas *não sei*, totalizando 71% de respostas incorretas. Ressalta-se que os alunos que responderam a M35 foram, na maioria, os alunos que erraram a desigualdade de M33.

O item M36 teve 47% de respostas incorretas, mas com o fato interessante de que as todas as respostas incorretas são do tipo *não sei*. Considerando que os alunos que acertaram M34 e M35 são os que responderam M36, não fica claro o motivo das sete respostas *não sei*, podendo as dificuldades ocorrerem devido à fração algébrica como radicando. Apesar das dúvidas em relação a M36, considerando a sequência dos itens apresentados e os erros dos alunos, é possível afirmar que esse conjunto de itens atende a seu objetivo para a avaliação das dificuldades em expressões algébricas com a operação da radiciação.

Tabela 10 - Número de respostas não corretas para Expressões algébricas (radiciação)

	Total de respostas	n° erradas	n° não sei	Total incorretas	% incorretas
<b>M31</b>	30	18	3	21	70
<b>M32</b>	9	5	1	6	67
<b>M33</b>	27	16	4	20	74
<b>M34</b>	10	1	0	1	10
<b>M35</b>	21	9	6	15	71
<b>M36</b>	15	0	7	7	47

Fonte: A pesquisa.

A Figura 116 apresenta os itens com expressões matemáticas envolvendo a potenciação. O grupo de participantes teve um baixo desempenho, com 27 alunos (73%) respondendo incorretamente a pelo menos um item e 22 respondendo incorretamente a dois ou mais itens.

Figura 116 - Itens de avaliação para a Expressões algébricas (potenciação)

Item	Tipo de afirmação	Enunciado do item
M37	AF	$\frac{1}{3x^2} = 3x^{-2}$
M38	AV	$4x^{-\frac{5}{3}} = \frac{4}{\sqrt[3]{x^5}}$
M39	AF	$x^2 + x^3 = x^5$
M40	AV	$4a^4 5a^3 = 20a^7$
M41	AF	$(x - y)^2 = x^2 + y^2$
M42	AV	$(x - 1)^3 = -(1 - x)^3$

Fonte: Elaborado pelo autor.

O número de respostas erradas observado para o item M37, na Tabela 11, mostra que vinte alunos (83%) responderam incorretamente ao item, que foi desenvolvido para verificar se os alunos se confundem ao considerar que a parte numérica e a literal estão elevados à mesma potência, mesmo que estejam sem parênteses. Fato que se comprova pelos resultados, pois 83% aplicaram a regra mudando o termo elevado à potência do denominador para o numerador e trocando o sinal da potência, mas ignorando que a potência está aplicada somente ao  $x$ . Verificasse, também, que os cinco que acertaram M37 também responderam a M38 corretamente, tendo 100% de acerto na situação explorada pelo par de itens.

O item M39, apresentado para os 25 alunos que responderam incorretamente a M37, também foi respondido incorretamente por dezesseis deles, que consideraram correto que a soma de potências de mesma base opera como o produto de potências de mesma base, deixando notório o uso de teoremas ou definições distorcidas (HADAR; ZASLAVSKY; INBAR, 1987).

O item M40, apresentando a operação correta de potências, foi respondido corretamente por onze de treze alunos e somente dois (A4 e A39) responderam que as operações estavam erradas. Analisando os dados de A4, verificou-se que o mesmo errou duas simplificações de frações algébricas e duas potenciações, incluindo M40. Já o aluno A39 errou três operações com a propriedade distributiva, duas simplificações, três frações algébricas, três radiciações e três potenciações. Os dados sugerem que A4 apresenta dificuldades mais acentuadas com potenciação e A34 tem dificuldades nas operações e manipulações algébricas no geral.

A generalização equivocada de que a potência da soma é a soma das potências leva a identificar o erro que se apresenta em M41 como correto (FELTES, 2007), com oito de dezenove alunos errando o item. O item M42, com 57% de respostas erradas, apresenta uma situação não usual, requer uma manipulação mais elaborada e, talvez por isso, a mesma não foi identificada como estando correta.

Cruzando algumas respostas, identificou-se que dois alunos que responderam corretamente a M3, identificando como errada a propriedade distributiva sobre a potência, afirmaram que M42 é falsa – talvez por identificarem situação semelhante. Isso evidencia a falta de conhecimento sobre as propriedades de potência, assim como operações algébricas que justificam M42 como correta. Talvez, para o objetivo proposto, o item M42 não seja adequado, devendo ser revisto, com uma possível alteração para  $((-1)(x + 1))^3 = -(x + 1)^3$ .

Tabela 11 - - Número de respostas não corretas para Expressões algébricas (potenciação)

	Total de respostas	n° erradas	n° não sei	Total incorretas	% incorretas
M37	30	20	5	25	83
M38	5	0	0	0	0
M39	25	16	1	17	68
M40	13	2	0	2	15
M41	19	8	1	9	47
M42	21	10	2	12	57

Fonte: A pesquisa.

Mesmo com o item M38 não tendo nenhuma resposta incorreta, o conjunto de itens para avaliar as dificuldades relativas a potenciação foi considerado adequado ao objetivo proposto.

### 6.3.3 Análise da avaliação Resolução de problemas

Para uma visão dos erros dos participantes em relação aos conteúdos avaliados, apresenta-se na Tabela 12 a quantidade de respostas incorretas, dada pela soma das respostas erradas com as do tipo *não sei* de cada participante. Essas respostas incorretas foram agrupadas conforme os conteúdos e conceitos cadastrados na avaliação *Resolução de problemas* do ADAC.

Tabela 12 – Quantidade de respostas erradas por dificuldades cadastradas no ADAC

Participante	Interpretação do enunciado	Modelagem do problema	Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis	Representação geométrica e linguagem natural das cônicas	Representação algébrica das funções notáveis	Representação algébrica das cônicas	Relação de dependência	Conceito de valor	Conceito de variação derivada primeira	Característica de ponto crítico	Interpretação de derivada segunda	Cálculo das derivadas	Derivadas regra da cadeia	Cálculo de limite	Expressões algébricas (ordem das operações)	Expressões algébricas (simplificação com frações)	Equações não polinomiais	Expressões algébricas (potenciação)	Verificação do resultado no contexto
A1	0	0	1	0	2	0	0	0	2	2	0	1	3	0	0	1	0	1	0
A2	0	1	2	0	2	0	0	0	2	0	0	1	0	1	0	0	1	1	2
A3	2	1	1	0	2	0	0	1	4	1	0	2	2	1	0	1	0	2	0
A4	0	0	1	0	1	0	1	2	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A5	1	0	1	0	2	0	0	1	3	1	0	1	2	0	0	1	0	0	1
A6	0	1	1	0	2	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	2
A7	1	1	1	0	2	0	0	1	1	2	0	1	3	0	0	0	0	0	0
A8	0	1	2	0	2	0	1	3	2	2	0	2	0	1	0	2	0	1	0
A9	1	1	1	0	2	0	0	0	3	1	0	2	1	0	0	0	0	0	1
A10	2	0	2	0	2	0	0	1	3	1	0	2	1	1	0	0	1	0	0
A11	0	0	1	0	0	0	0	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
A12	1	1	2	0	1	0	1	0	3	1	0	3	1	1	0	0	0	0	1
A13	0	2	1	1	2	0	0	2	4	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1
A14	2	1	0	0	2	0	0	1	1	1	0	2	2	0	0	1	0	0	1
A15	0	1	1	0	1	0	0	0	4	1	0	3	1	0	0	0	0	0	0
A16	0	2	2	0	3	0	0	2	3	1	0	2	1	1	0	2	1	0	0
A17	0	2	2	0	1	1	0	0	4	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0
A18	0	1	1	0	2	0	0	1	2	1	0	2	2	0	0	0	0	1	1
A19	0	2	1	0	3	0	0	2	3	1	0	3	1	0	0	1	0	1	1
A20	3	2	1	0	2	1	0	1	2	1	1	1	0	1	0	1	0	2	1
A21	1	1	1	0	2	0	1	1	4	1	0	1	0	1	0	1	0	2	0
A22	0	1	1	0	2	0	0	1	2	1	0	0	0	1	0	1	0	2	2
A23	1	0	3	0	1	0	0	0	4	1	0	3	1	0	0	1	0	0	0
A24	0	2	0	0	1	0	2	1	1	0	0	3	0	1	0	1	1	1	1
A25	2	0	3	0	3	0	0	1	4	1	0	2	2	0	0	1	1	0	0
A26	1	2	2	0	2	1	0	2	3	1	0	0	0	1	0	1	1	2	0
A27	1	0	3	0	1	0	0	1	1	1	0	1	2	0	0	1	0	1	1
A28	0	1	1	0	3	0	1	4	0	0	0	2	0	1	0	2	0	1	0
A29	0	0	1	0	3	0	1	1	4	1	0	2	1	1	0	1	1	2	0
A30	3	1	2	1	1	0	1	1	2	1	0	1	3	0	0	1	0	1	2
A31	0	1	3	0	2	0	1	1	1	1	1	4	2	1	0	1	0	1	0
A32	0	0	3	0	1	0	1	2	4	1	0	3	0	1	0	2	0	0	1
A33	1	2	2	0	2	0	0	1	4	1	0	2	1	1	0	2	1	0	0
A34	0	0	1	0	1	0	3	2	2	1	0	1	1	0	1	1	0	3	1

Fonte: A pesquisa.

Na Tabela 13 contabiliza-se o número alunos que responderam incorretamente aos itens agrupados por conteúdos e conceitos cadastrados no ADAC. A primeira coluna contém o número de alunos que erraram pelo menos um item; a segunda traz o número de alunos que erraram dois ou mais itens; e a terceira coluna apresenta a proporção percentual da relação entre a primeira e a segunda coluna.

Tabela 13 - Número de participantes que responderam incorretamente aos itens da avaliação *Resolução de problemas* agrupados pelos conteúdos e conceitos avaliados pelo ADAC

Dificuldades avaliadas pelo ADAC	n° de alunos que erram pelo menos 1 item	n° de alunos que erram 2 ou mais itens	%
Interpretação do enunciado	15	6	18
Modelagem do problema	23	8	24
Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis	32	14	41
Representação geométrica e linguagem natural das cônicas	2	0	0
Representação algébrica das funções notáveis	33	23	68
Representação algébrica das cônicas	3	0	0
Relação de dependência	11	2	6
Conceito de valor	27	10	29
Conceito de variação derivada primeira	32	26	76
Característica de ponto crítico	29	3	9
Interpretação de derivada segunda	4	0	0
Cálculo das derivadas	30	18	53
Derivadas regra da cadeia	22	10	29
Cálculo de limite	18	0	0
Expressões algébricas (ordem das operações)	1	0	0
Expressões algébricas (simplificação com frações)	24	5	15
Equações não polinomiais	9	0	0
Expressões algébricas (potenciação)	20	7	21
Verificação do resultado no contexto	17	4	12

Fonte: A pesquisa.

Ressalta-se que algumas dificuldades aparecem somente em um ou dois itens de avaliação, assim como, pelo redirecionamento que o ADAC realiza, de acordo com as respostas dos alunos, alguns conceitos foram menos apresentados que outros e as devidas considerações são realizadas nas análises individuais dos itens.

Uma visão do grupo de participantes é obtida com os dados da Tabela 13, na qual se observa quantidades expressivas de alunos que erraram dois ou mais itens em *conceito de variação (primeira derivada)* e *representações algébricas das funções notáveis*, com 76% e 68%, respectivamente.

Para a *Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis*, quase todos os alunos erraram em, pelo menos, um item e quatorze erraram dois ou mais itens, evidenciando as dificuldades na identificação e denominação das funções pela sua representação gráfica. Associado a isso, contabilizou-se que 33 alunos erraram pelo menos um item e 23 erraram dois ou mais itens, selecionando distratores associados a dificuldades na *Representação algébrica das funções notáveis*.

Para a etapa de compreensão na resolução de problemas envolvendo derivadas, considera-se imprescindível o conceito de funções e a capacidade de representação da mesma em todas as formas. Ressalta-se que o importante não é a conversão entre as representações, mas a compreensão e domínio do objeto matemático pelas suas representações.

Os resultados apontam para a falta de domínio do conceito de funções e a não compreensão do conceito de variabilidade, ao observar a quantidade de alunos que erraram pelo menos um item com resposta associada a dificuldades no *conceito de valor* e *conceito de variação (derivada primeira)*: 27 e 32 alunos, respectivamente. Levando em conta os que


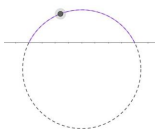
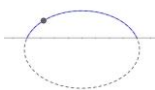




erraram dois ou mais itens, tem-se dez alunos para o *conceito de valor* e 26 alunos para o *conceito de derivada (derivada primeira)*. Esses números reforçam as prováveis dificuldades do grupo em relação à compreensão da função de uma variável independente.

A análise individual dos itens através do banco do ADAC buscou verificar se as opções de respostas foram consideradas plausíveis, ou seja, se os alunos as selecionaram considerando como verdadeira em função da falta de domínio dos conceitos matemáticos envolvidos ou habilidades necessárias. O número de alunos que selecionaram um distrator não é o fator de validação do mesmo. Deste modo, um único respondente que selecionou um distrator, pela falta de conhecimento ou habilidade associada a este, o valida como instrumento de diagnóstico.

O item P1, Figura 117 – Pergunta 1 da Situação-Problema 1, foi respondido corretamente por 29 alunos e incorretamente por cinco (A13, A17, A20, A26, A30), os quais identificaram como corretas as respostas que apresentam os segmentos de arco como sendo a trajetória da bola.

Figura 117 – Pergunta 1 da Situação-Problema 1

Pergunta 1 - P1			
		<p>Uma criança chuta uma bola parada no chão de modo que ela vai para frente e para cima. Qual gráfico melhor representa a trajetória aproximada da bola do momento em que é chutada até quando ela toca o solo novamente?</p>	
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Nº de Respostas
a)		Modelagem do problema	1
b)		Modelagem do problema	2
c)		Modelagem do problema	2
<b>d)</b>		<b>Modelagem do problema</b>	<b>29</b>
e)	Entendo o problema, mas não sei qual é.	Modelagem do problema	0
f)	Não entendi o que pede.	Interpretação do enunciado	0

Fonte: A pesquisa.

Para outros itens sobre a *Modelagem do problema*, os alunos A13, A17 também responderam não saber qual é o modelo e os alunos A20, A26 selecionaram o modelo errado em outros itens. Essas respostas são atribuídas à falta de conhecimento científico sobre os

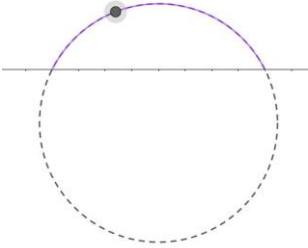
fenômenos envolvidos, gerando dificuldades em identificar os modelos gráficos que representam as situações problema.

Como alguns alunos responderam P1 selecionando os distratores para a trajetória da bola, descrevendo uma curva na forma de segmento de arco, considera-se o item adequado ao objetivo proposto. Pela lógica de sequenciamento, o ADAC redireciona esses alunos para itens que verificam se os mesmos realizam adequadamente as conversões de representação em linguagem natural e algébrica das cônicas.

O item P2, Figura 63, foi apresentado para os cinco alunos que selecionaram as opções  $a, b, c$  de P1. Os alunos A17, A20, A26 responderam corretamente, indicando que a imagem representa um segmento de arco, e dois alunos (A13, A30) denominaram a imagem como sendo uma função linear. Esses dois alunos (A13, A30) também responderam incorretamente aos itens P6 e S1, caracterizando dificuldades na *Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis*.

A organização da sequência P1, P2 para as cônicas permitiu verificar que três alunos, apesar de terem errado P1, sabiam a denominação correta. Além do número reduzido de alunos que responderam a P2, nenhum dos 29 alunos que acertaram P1 foram avaliados sobre dificuldades com as cônicas, fato a ser revisto na organização dos itens.

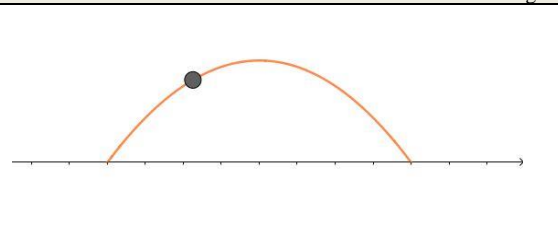
Figura 118 – Pergunta 2 da Situação-problema 1

Pergunta 2 – P2			
		Esta trajetória tem a forma:	
Opção	Resposta	Dificuldade identificada	Nº de Respostas
a)	da função linear	Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis	2
b)	da função quadrática	Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis	0
c)	da função cúbica	Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis	0
d)	da função exponencial	Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis	0
e)	da função raiz	Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis	0
f)	<b>de um segmento de arco</b>	Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis	<b>3</b>
g)	Não sei o nome	Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis	0

Fonte: A pesquisa.

Apesar de a maioria selecionar o modelo correto em P1, nove dos 29 alunos que responderam a P3, Figura 64, não sabiam o nome correto da trajetória selecionada, com oito deles (A1, A12, A23, A27, A31, A32, A33, A8) respondendo incorretamente ao item e um aluno (A25) selecionando a opção *não sei*.

Figura 119 – Pergunta 3 da Situação-problema 1

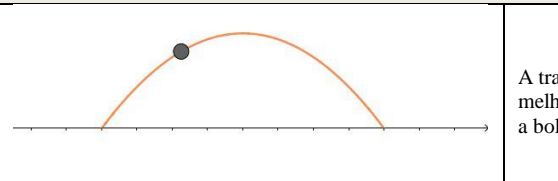
Pergunta 3 – P3			
		Então trajetória aproximada da bola do momento em que é chutada até quando ela toca o solo novamente tem a forma	
Opção	Resposta	Dificuldade identificada	Nº de Respostas
a)	da função linear	Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis	1
b)	<b>da função quadrática</b>	<b>Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis</b>	<b>20</b>
c)	da função cúbica	Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis	1
d)	da função exponencial	Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis	1
e)	da função raiz	Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis	1
f)	de um segmento de arco	Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis	4
g)	Não sei o nome	Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis	1

Fonte: A pesquisa.

Todos os alunos que responderam incorretamente ou declararam não saber o nome da função responderam incorretamente a mais dois ou três itens semelhantes, fato que sugere a existência de dificuldades na *Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis* para esses alunos. Como cada um dos distratores teve pelo menos uma resposta associada, considera-se o item adequado ao objetivo proposto.

O item P4, Figura 65, foi apresentado para os 21 alunos que acertaram ou que declararam não saber o nome da função em P3. Dos 21 alunos que responderam P3, nove (A3, A5, A9, A14, A15, A16, A19, A22, A29) declararam não saber qual era a representação algébrica da parábola.

Figura 120 – Pergunta 4 da Situação-problema 1

Pergunta 4			
		A trajetória da bola tem a forma de uma função é uma quadrática. A função que melhor expressa a altura (h) em relação e a distância (d) com d=0 o ponto onde a bola é chutada será a:	
Opção	Resposta	Dificuldade identificada	Nº de Respostas
a)	$d = k h^2$ , para $k \in \mathbb{R}_+$	Relação de dependência	4
b)	$h = k d^2$ , para $k \in \mathbb{R}_+$	Representação geométrica e algébrica das funções notáveis	4
c)	$d = -k h^2$ , para $k \in \mathbb{R}_+$	Relação de dependência	2
d)	$h = -k d^2$ , para $k \in \mathbb{R}_+$	Representação geométrica e algébrica das funções notáveis	0
e)	$d = -k h^2 + w h$ , para $k, w \in \mathbb{R}_+$	Relação de dependência	0
f)	<b><math>h = -k d^2 + w d</math>, para <math>k, w \in \mathbb{R}_+</math></b>	<b>Representação geométrica e algébrica das funções notáveis</b>	2
g)	Não sei qual a função	Representação geométrica e algébrica das funções notáveis	9

Fonte: A pesquisa.

Os distratores exploram três erros no modelo algébrico: em relação ao gráfico da trajetória; a relação de dependência entre as variáveis; a concavidade da parábola; e as translações. No estudo das funções quadráticas, elas são apresentadas na forma

$f(x) = x^2$ , que é introjetada no aluno, o que parece justificar as oito respostas concentradas nas opções  $a$  e  $b$  que representam parábolas com a concavidade *para cima*.

As opções  $a$  e  $b$  foram selecionadas por 8 alunos (A1, A4, A7, A10, A18, A24, A25, A28) e dentre esses oito estudantes, sete (A1, A4, A7, A10, A18, A24, A28) responderam incorretamente ou declararam não saber o modelo algébrico em pelo menos mais um outro item que avalia a conversão entre as representações geométrica e algébrica.

A opção  $c$ , com duas respostas (A21, A34), tem como erro principal a relação de dependência entre as variáveis, relacionando a distância em função da altura. Lembramos que a opção  $a$ , com quatro respostas, também apresenta esse erro. Pelo banco de dados, identificou-se que o aluno A34 respondeu errado a mais dois itens que indicam as dificuldades dele em estabelecer a relação de dependência entre as variáveis.

A fala dos alunos participantes sobre o item P4 demonstra suas dificuldades nas representações algébricas. O aluno A7 selecionou a opção  $d = kh^2$ , para  $k \in \mathbb{R}_+$  e sua fala, ao ser questionado sobre o item P4, foi:

- *A7: eu acho que eu erreí porque eu não pensei em posição de bola, nem nada.*
- *Pesquisador: Por que você selecionou  $d = kh^2$ , para  $d$  a distância, se a gente quer a função que expressa a altura, quem dependente de quem? A altura depende de  $d$  ou  $d$  depende de  $h$ ?*
- *A7: o que eu penso é que a distância depende de  $d$  e a altura é  $h$ .*
- *Pesquisador: Foi isso que você pensou?*
- *A7: sim*

O aluno A7 não conseguiu nem ao menos formar um pensamento sobre a relação de dependência, assim como desconsiderou a condição  $d=0$ .

O aluno A5 selecionou a opção  $k = kd^2$ , para  $k \in \mathbb{R}_+$  e sua fala foi:

- *Pesquisador: O item P4 pedia a forma algébrica. Você identificou corretamente que era uma parábola, uma função quadrática, e eu pedi a forma algébrica. O que você pensou quando escolheu isso? Você identifica o erro?*
- *A5: ...eu não tinha certeza o que era o  $k$  ali.*
- *Pesquisador: Uma parábola com concavidade para baixo o que deveria ser o  $k$ ?*
- *A5: seria o  $a$ ? ....ele tinha que ser, no caso negativo.*
- *Pesquisador: E ele está negativo?*
- *A5: Não, ele não tá negativo, mas, dentre as opções, ela foi a que mais se encaixou.*

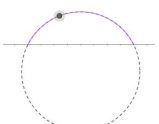
- *Pesquisador: ...a gente trabalha muito as funções protípicas, sem transformação, sem translação, sem simetria. É isso que você acaba sabendo? As funções propotípicas? E não trabalha bem quando ela está pra cima, pra baixo, invertida, refletida – você tem problemas com isso?*
- *A5: Acredito que sim.*

O aluno A5 tem as noções de representação da função quadrática e a concavidade, mas a sua visão da função, em sua forma algébrica, se resume à forma prototípica. Outro detalhe importante é que, ao ser indagado sobre  $k$ , o aluno respondeu: “*Seria o  $a$ ?*”, que deixa claro que ele se recorda da notação  $ax^2$  para a função quadrática. Outro ponto importante é que, mesmo sabendo que a concavidade negativa tem um coeficiente negativo, A5 afirma que foi a opção que melhor se encaixou. Verifica-se, na Figura 65, que não há nenhuma resposta para a opção  $d$ .

Ressalta-se que, para o item P4, somente dois alunos responderam corretamente (A6, A11), sendo que os mesmos apresentam uma contagem baixa de respostas erradas (Tabela 13), caracterizando domínio na resolução de problemas.

O item P5 foi apresentado para os três alunos (A17, A20, A26) que responderam corretamente ao item P2, com dois deles selecionando a opção *não sei* e somente um aluno (A26) escolhendo a opção  $a$ , que é a equação da circunferência, mas que não atende à restrição de  $d=0$ . Semelhante à situação P4, a opção  $a$  apresenta a forma prototípica da circunferência, com o aluno ignorando as translações dadas tanto pelo gráfico quanto pela informação do enunciado,  $d=0$ .

Figura 121 – Pergunta 5 da Situação-problema 1

Pergunta 5 – P5			
		Para a trajetória da bola na forma de um segmento de arco. A função que melhor expressa a relação entre a altura ( $h$ ) e distância ( $d$ ) com $d=0$ o ponto onde a bola é chutada será a:	
Opção	Resposta	Dificuldade identificada	Nº de Respostas
a)	$d^2 + h^2 = k$ para $k \in \mathbb{R}_+$	Representação geométrica e linguagem natural das cônicas	1
b)	$\frac{d^2}{a^2} + \frac{h^2}{b^2} = 1$ para $a, b \in \mathbb{R}_+$	Representação geométrica e linguagem natural das cônicas	0
c)	$\frac{d^2}{a^2} - \frac{h^2}{b^2} = 1$ para $a, b \in \mathbb{R}_+$	Representação geométrica e linguagem natural das cônicas	0
d)	$(d - a)^2 + (h + b)^2 = k$ para $k, a, b \in \mathbb{R}_+$	<b>Representação geométrica e linguagem natural das cônicas</b>	<b>0</b>
e)	Não sei qual a função	Representação geométrica e linguagem natural das cônicas	2

Fonte: A pesquisa.

O item P6, respondido por treze alunos, apresenta uma concentração de respostas nos itens  $c$  e  $d$ , que se diferenciam pela quinta e sexta função, evidenciando as dificuldades em diferenciar as respectivas funções transformadas. Esses equívocos, assim como os dos itens P4 e P5, podem ser categorizados como interpretação incorreta da linguagem (HADAR;

ZASLAVSKY; INBAR, 1987), com os alunos só representando as funções nas suas formas algébricas, sem transformações.

Figura 122 – Pergunta 6 da Situação-problema 1

Pergunta 6 – P6			
Escolha a opção que apresenta a sequência correta dos nomes das funções notáveis transformadas.			
Opção	Resposta	Dificuldade identificada	Nº de Respostas
a)	Constante, cúbica, linear, logarítmica, exponencial, raiz, quadrática	Representação geométrica e algébrica das funções notáveis	1
b)	Linear, cúbica, constante, logarítmica, raiz, exponencial, quadrática	Representação geométrica e algébrica das funções notáveis	0
c)	<b>Constante, cúbica, linear, raiz, logarítmica, exponencial, quadrática</b>	<b>Representação geométrica e algébrica das funções notáveis</b>	5
d)	Constante, cúbica, linear, raiz, exponencial, logarítmica, parábola	Representação geométrica e algébrica das funções notáveis	6
e)	Não sei todos os nomes	Representação geométrica e algébrica das funções notáveis	1

Fonte: A pesquisa.

Esse item atendeu ao objetivo proposto, haja visto que foram selecionadas as outras opções incorretas, além da opção *d*, mas se pode desenvolver outros itens para identificar equívocos em outras funções, além da logarítmica e a exponencial.

O item P7 foi respondido por dezessete alunos, com somente três respostas corretas. As opções *a* e *c* apresentam resultados decorrentes de erros matemáticos nos quais os cálculos

realizados foram  $h(17) = \frac{(-17)^2 + 16 \cdot 17}{12}$  e  $h(17) = \frac{-17 + 16 \cdot 17}{12}$ , respectivamente.

Figura 123 – Perguntas 7 da Situação-problema 1

Item 7 – P7			
$h(d) = \frac{-d^2 + 16d}{12}$		Com base na função dada identifique a quantos metros de altura se encontra a bola quando a projeção horizontal da bola estiver distante 17m do ponto inicial.	
Opção	Resposta	Dificuldade identificada	Nº de Respostas
a)	46,75	EA potenciação	3
b)	-1,4146	Verificação do resultado no contexto	6
c)	21,25	EA potenciação	1
d)	1,4146	Verificação do resultado no contexto	2
e)	<b>Não é possível afirmar, pelo resultado calculado.</b>	<b>Verificação do resultado no contexto</b>	<b>3</b>
f)	Não entendi o que é pedido.	Interpretação do enunciado	1
g)	Não sei fazer	Interpretação do enunciado	1

Fonte: A pesquisa.

A opção *b*, com seis respostas, é o resultado para  $h(17) = \frac{-(-17)^2 + 16 \cdot 17}{12}$ , que tem como resultado  $-1,4146m$ . Isto significa que a bola estaria *enterrada* no solo, não sendo uma resposta considerada válida dentro do contexto do problema. A opção *c*, selecionada por dois alunos, é o resultado obtido em *b* transformado em um valor positivo, ou seja, os alunos usaram uma lógica própria para transformar o resultado do cálculo em um resultado coerente, com o valor

positivo para uma altura, sendo um erro associado a dificuldades com a interpretação do resultado.

Pelos resultados da avaliação *Matemática*, os erros decorrentes de manipulações algébricas equivocadas seriam esperados e considera-se os distratores *a* e *c* adequados ao objetivo proposto. Os erros dos distratores *b* e *d* são semelhantes na sua natureza. Podemos verificar, pela fala do aluno A6, que selecionou a opção *b*, como ele procede após a realização de um cálculo:

- *Pesquisador: ...por que a opção b está errada? Porque uma altura negativa significa que a bola está enterrada no chão. Você tem o hábito de verificar a sua resposta no contexto do problema, ou você só calcula e escreve o resultado no final?*
- *A5: Antes disso, eu tinha o hábito de calcular e responder, não dava bola pro resultado. Depois que eu fiz isso aí e olhei as respostas e a sua explicação em aula, comecei a ter o hábito de ver a resposta pra ver se tá certo com o enunciado do problema.*

A fala do aluno A5 mostra o comportamento usual dos alunos, que têm por hábito dar como resposta o valor do cálculo numérico, sem considerar o contexto em que o mesmo está inserido. As opções do item P7 mostraram-se adequadas para a identificação das dificuldades associadas.

O item P8 foi apresentado aos 34 alunos, com metade deles respondendo incorretamente ao item. Dos dezessete alunos que erraram, oito selecionaram as opções *a* e *d*, associando  $h(9)$  com a variação da função em um ponto; os seis alunos que selecionaram a opção *b* chegaram ao resultado de 18,75m calculando  $h(9) = \frac{(-9)^2 + 16 \cdot 9}{12}$ , um erro técnico (HADAR; ZASLAVSKY; INBAR, 1987), ao elevar o sinal negativo ao quadrado.

Esses mesmos alunos cometeram erros similares na avaliação matemática, corroborando os resultados de Cury (CURY, 2003; CURY; KONZEN, 2006) sobre as dificuldades dos alunos do nível superior.

Figura 124 – Pergunta 8 da Situação-problema 1

Pergunta 8 – P8			
$h(d) = \frac{-d^2 + 16d}{12}$		Com a função dada para a trajetória aproximada da bola. Qual o significado de $h(9)$ ?	
Opção	Resposta	Dificuldade identificada	Nº de Respostas
a)	A bola está a descendo.	Conceito de variação	3
b)	A bola está a 18,75m do chão	EA potenciação	6
c)	<b>A bola está a 5,25m do chão</b>	<b>Conceito de valor</b>	<b>17</b>
d)	A bola está a subindo.	Conceito de variação	5
e)	Não entendi o que é pedido	Interpretação do problema	3
f)	Não sei fazer	Interpretação do problema	0

Fonte: A pesquisa.

O item P10 foi apresentado aos 34 participantes, com dezenove deles selecionando a opção *c*, que é semelhante à resposta correta,  $h'(d) = \frac{-2d+16}{12}$ . Colocar o sinal negativo do primeiro termo na frente de toda a fração é um erro técnico, mas pode ser decorrente de uma distração, e não da falta de conhecimento sobre as propriedades das operações envolvidas; a simplificação de somente um dos termos do numerador com o denominador, opção *b*, apresenta um resultado proveniente de um erro de simplificação.

Figura 125 – Pergunta 10 da Situação-problema 1

Pergunta 10			
$h(d) = \frac{-d^2 + 16d}{12}$		Considerando a função abaixo, para $h$ a altura e $d$ a distância. A derivada de $h(d)$ é dada pela função:	
Opção	Resposta	Dificuldade identificada	Nº de Respostas
a)	$\frac{\partial h}{\partial d} = -\frac{d}{6} + 16$	EA simplificação	0
b)	$\frac{\partial h}{\partial d} = -d + \frac{8}{6}$	EA simplificação	4
c)	$h'(d) = -\frac{2d + 16}{12}$	EA simplificação	19
d)	$\frac{\partial h}{\partial d} = -\frac{d}{6} + \frac{4}{3}$	<b>Cálculo derivada</b>	<b>8</b>
e)	Não sei calcular	Cálculo derivada	3

Fonte: A pesquisa.

Os erros técnicos que se apresentam nesses distratores se assemelham aos erros algébricos apresentados nos itens da avaliação *Matemática*. Pela quantidade de respostas para o distrator *c*, o item P10 deve ser revisto, pois a semelhança da opção *c* com a resposta correta sem simplificação pode ser o motivador da quantidade de alunos que a selecionaram, estando mais vinculada a uma distração do que a dificuldades algébricas.

Ao ser indagado sobre o erro, o aluno A5 identificou rapidamente o sinal e sua fala deixa claro que:

- A5: *...foi um erro de atenção na hora da pressa ... bateu um desespero ali e acabei não prestando atenção.*

A substituição por  $h'(d) = -\frac{d+8}{6}$  é uma opção. Acredita-se que, assim, o aluno dará mais atenção às simplificações e ao sinal negativo, não escolhendo a resposta mais parecida com seus cálculos.



O item P11 foi apresentado aos 34 participantes e teve doze respostas (A10, A12, A15, A17, A19, A20, A23, A25, A26, A29, A31, A33) para a opção *g*, do tipo *não sei*. Essa quantidade de respostas erradas aponta que parte do grupo de respondentes (35%) não tem bem formado o conceito de derivadas.

Observa-se que seis alunos (A4, A5, A6, A13, A16, A28) selecionaram a opção *a*, com a interpretação de  $h'(x)$  com a altura da bola. A opção *c*, com onze respostas, difere da opção correta, *d*, somente pelas unidades de medida das suas variáveis. Portanto, mesmo tendo sido apresentadas no enunciado como variáveis de medidas lineares, tal informação foi ignorada.

Figura 126 – Pergunta 11 da Situação-problema 1

Pergunta 11			
$h(d) = \frac{-d^2 + 16d}{12}$		A função $h(d)$ que estabelece a relação entre a altura da bola e a distância (projeção horizontal), tem como derivada a função $h'(d)$ . Pode-se interpretar o significado de $h'(7,1) = 0,15$ como:	
Opção	Resposta	Dificuldade identificada	Nº de Respostas
a)	A bola está a uma altura de 0,15m.	Conceito de valor	6
b)	$h'(7,1) < 1$ , logo a bola está descendo.	Conceito de derivadas	1
c)	A bola está subindo a 0,15 m/s	Verificação do resultado no contexto	11
d)	<b>A bola está subindo a 0,15 m por m</b>	Verificação do resultado no contexto	4
e)	em 8,1m de distância a bola estará 0,15m mais alta que em 7,1m de distância	Conceito de derivadas	0
f)	Não tem cálculo a ser realizado	Conceito de derivadas	0
g)	Não sei o significado	Conceito de derivadas	12

Fonte: A pesquisa.

Para o item P11, o distrator *e* não foi respondido por nenhum dos alunos. Acredita-se que os mesmos não associem a derivada com a variação da variável dependente para a variação de uma unidade da variável independente, e o pesquisador se questiona se esse distrator permanece como uma opção de resposta. O item P11 foi considerado adequado, trazendo em seus distratores, exceto a opção *e*, situações que apontam para a falta de domínio dos conceitos avaliados.

Os itens P9 e P11 são semelhantes e, dos quatro alunos que responderam a P11 afirmando que a bola estaria subindo, três (A1, A7, A8) responderam a P9 afirmando que a bola não estaria subindo nem descendo, pois 7,1 é o ponto de máximo da função.

Para tentar identificar a origem do erro, tem-se a fala do aluno A7 sobre sua resposta ao item P9:

- *A7: ... na hora eu fiz um cálculo e, no meu ver, a bola estava caindo de volta. Não desculpa! Ela parecia estar no vértice, no ponto de máximo de mínimo. Foi isso que pensei, que ela não estaria nem subindo nem caindo...*

Na entrevista, o Aluno A7 não se recordava direito do que tinha feito, mas, pela fala, ele não usou o conceito de derivadas para determinar se ela estaria subindo ou descendo. Acredita-se que os alunos tenham calculado o valor da função no ponto e comparado com

valores próximos a ele, mas, como a função apresenta uma variação pequena no ponto 7,1, os alunos pensaram ser o ponto de máximo.

O item P9 foi apresentado a poucos alunos, que parecem tê-lo solucionado calculando o valor da função no ponto e comparado com valores próximos dele, não utilizando os conceitos de derivada para solucioná-lo. A falta de informação não permite realizar inferências sobre os outros distratores, por isso, estuda-se uma alteração na sequência de apresentação que permita uma melhor avaliação do item.

Figura 127 – Pergunta 9 da Situação-problema 1

Pergunta 9			
$h(d) = \frac{-d^2 + 16d}{12}$		Considerando que em sua trajetória a bola primeiro sobe e depois desce de acordo com a função abaixo, para $h$ a altura e $d$ a distância. Quando a bola estiver a 7,1m de distância, ela estará subindo ou descendo?	
Opção	Resposta	Dificuldade identificada	Nº de Respostas
a)	subindo porque $h(7,1)$ é positivo.	Conceito de valor	0
b)	descendo porque $h(7)-h(7,1)$ é negativo.	Conceito de variação	0
c)	descendo porque $h'(7,1)$ é negativo.	Conceito de variação	0
d)	<b>subindo porque <math>h'(7,1)</math> é positivo.</b>	Conceito de variação	<b>1</b>
e)	calcular $h'(d)$	Conceito de variação	0
f)	Não está subindo nem descendo porque é ponto de máximo.	Característica de ponto crítico	3
g)	Não sei o que fazer.	Interpretação do enunciado	0

Fonte: A pesquisa.

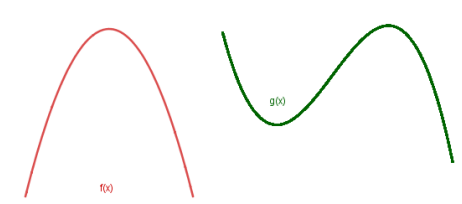
O item S1 inicia a Situação-problema 2 e foi apresentado aos 34 participantes, dos quais 22 identificaram a função  $g(x)$  como uma função trigonométrica tipo seno ou cosseno. Como visto na análise da Situação-problema 1 e na Tabela 12, a conversão entre as representações é uma das dificuldades do grupo pesquisado, com todos os 34 alunos respondendo incorretamente a pelo menos um item e 26 alunos respondendo incorretamente a dois ou mais itens associados a dificuldades em *Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis*.

As falas dos alunos A7 e A16 revelam que eles só prestaram atenção à característica marcante, não aos detalhes:

- Pesquisador: *Você prestou atenção nos extremos da  $g(x)$ ?*
- A7: *Pior... que não prestei atenção*
- Pesquisador: *Você só olhou no geral a curva, o sobe-desce?*
- A7: *Isto! Foi falta de atenção mesmo.*
- Pesquisador: *A função verde é uma senoidal?*
- A16: *Eu não consultei nada. Pelo que eu me lembro, pra mim, isso é um seno.*
- Pesquisador: *E essa parte aqui debaixo?*
- A16: *se é positivo ou negativo?*
- Pesquisador: *O seno tem isso aqui que continua?*

- A16: ... verdade, ele ficaria até aqui. Isso eu não notei
- Pesquisador: então é aquela visão da função padrão. Não se enxerga os detalhes.
- A16: Sim. Eu não observei isso

Figura 128 - Pergunta 1 da Situação-problema 2

Situação-problema 2 - S1			
Um engenheiro está projetando uma montanha russa utilizando 2 funções para definir o traçado de um trecho dela. Determine pelo desenho quais as funções utilizadas.			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Nº de Respostas
a)	Parábola e Seno	Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis	6
b)	Parábola e Cosseno	Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis	10
c)	<b>Quadrática e Cúbica</b>	<b>Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis</b>	8
d)	Quadrática e Seno	Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis	8
e)	Não sei o nome de um dos gráficos	Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis	2
f)	Não sei o nome dos gráficos	Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis	0

Fonte: A pesquisa.

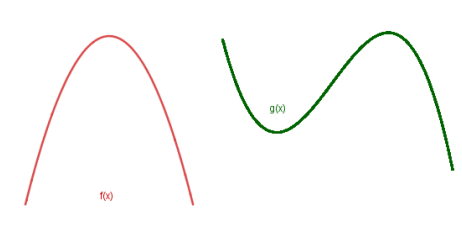
O item S1 atende ao propósito, trazendo situações para as quais o participante responde equivocadamente, sinalizando as dificuldades associadas ao erro cometido. O número de respostas erradas para S1 sinaliza as dificuldades nas identificações e nas conversões de representação das funções.

O número de respostas erradas de S2, associado à representação algébrica das funções trigonométricas, é condizente com o número de respostas erradas de S1. O item S2 foi apresentado a 32 alunos, dos quais 23 selecionaram opções com representações algébricas das funções trigonométricas, ignorando a forma assimétrica de  $g(x)$  e os extremos da função que não condizem com as funções seno ou cosseno.

A opção *d* foi selecionada por três alunos (A13, A24, A31) e dois deles (A13, A31) responderam incorretamente a outro item que avalia as dificuldades na *representação geométrica e algébrica das funções notáveis*.

Esse item, em conjunto com os demais do mesmo tipo, atende ao propósito de identificar dificuldades dos alunos nas conversões entre as representações, principalmente na identificação das funções trigonométricas, como apontam os resultados do item.

Figura 129 – Pergunta 2 da Situação-problema 2

Pergunta 2 – S2			
As representações algébricas das funções são respectivamente:			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Nº de Respostas
a)	$f(x) = -x^2 + a$ $g(x) = -sen(x)$	Representação geométrica e algébrica das funções notáveis	10
b)	$f(x) = -x^2 + a$ $g(x) = cos(x)$	Representação geométrica e algébrica das funções notáveis	8
c)	$f(x) = x^2 + a$ $g(x) = -sen(x)$	Representação geométrica e algébrica das funções notáveis	5
d)	$f(x) = x^2 + a$ $g(x) = x^3$	Representação geométrica e algébrica das funções notáveis	3
e)	$f(x) = -x^2$ $g(x) = -x^3 + ax$	<b>Representação geométrica e algébrica das funções notáveis</b>	<b>3</b>
f)	$f(x) = -x^2$ $g(x) = x^3 + ax$	Representação geométrica e algébrica das funções notáveis	0
g)	Não sei qual o gráfico	Representação geométrica e algébrica das funções notáveis	1
h)	Tenho dúvidas de qual é o gráfico	Representação geométrica e algébrica das funções notáveis	3

Fonte: A pesquisa.

O item S3 foi submetido aos 34 alunos, sendo necessária a interpretação da situação e a identificação do uso das derivadas para a solução adequada do problema. O item teve seis respostas corretas, dadas pelos alunos A1, A4, A6, A11, A20 e A26, sete respostas incorretas e 21 do tipo *não sei*, indicando a falta de conhecimento dos respondentes para montar as estratégias para a solução do problema. Ressalta-se que as opções do tipo *não sei* se mostraram eficientes ao proporcionar ao aluno a possibilidade de externar suas dificuldades na modelagem da situação-problema.

Para justificar essa quantidade de respostas do tipo *não sei*, faz-se as seguintes considerações. Nas aulas de cálculo é reforçada a condição de continuidade da função no ponto  $x_1$ , para que função seja derivável no ponto  $x_1$  e, a seguir, é definida a derivada como o limite da razão incremental, ou seja,  $f'(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$ , devendo, para isso, ser verificada a igualdade dos limites laterais:

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Toda essa demonstração algébrica deve ser compreendida, de maneira intuitiva: que a variação da função em torno do ponto  $x_1$  deve ser a mesma à esquerda e à direita do ponto  $x_1$ , para que exista a  $f'(x_1)$ , ou seja, geometricamente, a inclinação antes do ponto e depois do ponto tende para o mesmo valor.

Todo esse pensamento define matematicamente o que é uma curva suave, sem variações bruscas em um ponto, como exigido na Situação-problema 2, mas “o preço pago pela clareza e precisão do rigor é a total separação do mundo de nossos sentidos” (REIS, 2001, p. 68), de modo que mais da metade dos alunos não tem ideia da condição matemática para a transição suave entre as curvas da montanha-russa, levando-os a selecionar as opções do tipo *não sei*. Deste modo, o item S3 é considerado adequado ao propósito, ao apresentar distratores que mostram as ideias equivocadas dos alunos sobre a condição matemática para uma curva suave em um ponto.

Figura 130 – Pergunta 3 da Situação-problema 2

Pergunta 3 – S3			
Em uma montanha russa o carrinho deve proporcionar sensações fortes, para isso o traçado explora situações de descidas acentuadas e velocidades altas. Para evitar trancos e sobressaltos as transições entre as curvas têm de ser suaves, ou seja, sem uma mudança brusca na trajetória. Para isso é necessário que seja atendida a condição:			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Nº de Respostas
a)	$f(x_1) = g(x_1)$	Conceito de valor	2
b)	$f'(x_1) = g'(x_1)$	Conceito de variação; derivada primeira	6
c)	$\begin{cases} f(x_1) = 0 \\ g(x_1) = 0 \end{cases}$	Conceito de valor	1
d)	$\begin{cases} f'(x_1) = 0 \\ g'(x_1) = 0 \end{cases}$	Conceito de variação; derivada primeira	4
e)	Não sei qual a condição	Modelagem do problema	15
f)	Não entendi o que fazer	Interpretação do enunciado	6

Fonte: A pesquisa.

O enunciado do item S4 apresenta a condição necessária para transição suave entre as curvas, com apoio da imagem com as retas tangentes aos gráficos, sendo necessário o conhecimento da relação entre as derivadas e a reta tangente. As opções *a*, *b*, *e* e *f*, com o valor da função ou de sua derivada no ponto 2 ou -2, foram selecionadas por cinco alunos. As opções *c* e *g*, com outras cinco respostas, determinam os valores de  $x_1$  e  $x_2$  quando as funções são respectivamente iguais a 2 e -2.

A opção *d*, com quatro respostas, é um sistema com as derivadas das funções igualadas a 2. Neste caso, a aplicação do conceito de derivadas está correta, mas é ignorada a informação *inclinação máxima de descida*, assim como o gráfico do enunciado, ou seja, há discrepância entre a informação fornecida e como o aluno a utiliza.

Para S3 tem-se três respostas corretas (A4, A6, A11), quatorze respostas incorretas e dezessete respostas do tipo *não sei*, as quais apontam para dificuldades em discernir qual procedimento matemático soluciona a situação proposta. Ou seja, os respondentes não sabem se devem calcular a função no ponto, a derivada da função no ponto, determinar o ponto para o qual função assume um valor ou determinar o ponto para o qual a derivada da função assume um valor. Logo, o item mostra-se adequado em identificar as dificuldades dos alunos na

resolução de problemas envolvendo as derivadas, evidenciando dificuldades na identificação da solução, na etapa estratégica da Resolução de problemas.

Figura 131 – Pergunta 4 da Situação-problema 2

<b>Pergunta 4 – S4</b>			
Para uma transição suave é necessário que a inclinação no ponto de união das curvas seja a mesma. A montanha russa deve proporcionar a máxima emoção e o carrinho não pode ficar em um trilho com inclinação maior do que 2 senão ele cai, ou seja, a inclinação máxima de descida é de no máximo 2m na vertical para cada 1m na horizontal. Para as funções $f(x_1)$ e $g(x_2)$ para determinar o valor de $x_1$ e $x_2$ que atendem essa condição, devemos solucionar:			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	N° de Respostas
a)	$f(2) = g(2)$	Conceito de valor	2
b)	$f'(2) = g'(2)$	Conceito de variação; derivada primeira	2
c)	$\begin{cases} f(x_1) = 2 \\ g(x_2) = 2 \end{cases}$	Conceito de valor	3
d)	$\begin{cases} f'(x_1) = 2 \\ g'(x_2) = 2 \end{cases}$	Conceito de variação; derivada primeira	4
e)	$f(-2) = g(-2)$	Conceito de valor	0
f)	$f'(-2) = g'(-2)$	Conceito de variação; derivada primeira	1
g)	$\begin{cases} f(x_1) = -2 \\ g(x_2) = -2 \end{cases}$	Conceito de valor	2
h)	$\begin{cases} f'(x_1) = -2 \\ g'(x_2) = -2 \end{cases}$	<b>Conceito de variação; derivada primeira</b>	3
i)	Entendi, mas não sei o que fazer	Conceito de variação; derivada primeira	14
j)	Não entendi o que fazer	Interpretação do enunciado	3

Fonte: A pesquisa.

O item S5 solicita a derivada da função que requer o uso da regra da potência, uma das mais simples e utilizadas nas aulas de Cálculo, e a regra da cadeia. Os distratores foram construídos apresentando o desenvolvimento da solução linha a linha, empregando operações algébricas equivocadas, com o objetivo de identificar dificuldades nas manipulações de expressões algébricas.

Para o item S5, identifica-se doze respostas na opção g, com os respondentes afirmando não saber qual a solução correta, isto é, tendo dúvidas em alguma parte do desenvolvimento da solução; dezessete respostas incorretas, nas quais se identifica operações algébricas de simplificação e potenciação executadas incorretamente; e duas respostas corretas.

A proporção de 50% dos alunos respondendo incorretamente ao item S5, com a escolha de distratores com erros algébricos, reforça os resultados da avaliação *Matemática*, que apresentou índices de 73% para a potenciação e 83% para a simplificação algébrica, de alunos que erraram dois ou mais itens. Pelos resultados, considera-se o item S5 como adequado ao objetivo proposto.

Figura 132 – Pergunta 5 da Situação-problema 2

<b>Pergunta 5 – S5</b>			
Para evitar trancos e sobressaltos as transições entre as curvas têm de ser suaves, ou seja, a inclinação no ponto de união das curvas tem de ser a mesma, logo $f'(x_1)$ e $g'(x_2)$ devem ter o mesmo valor. Para as funções $f(x_1)$ e $g(x_2)$ devemos primeiro determinar a derivada das funções. Para a $g(x_2)$ dada, a $g'(x_2)$ será:			
$g(x_2) = -\left(\frac{x_2 - 40}{10}\right)^3 + 7\frac{(x_2 - 40)}{10}$			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Nº de Respostas
a)	$g(x_2) = -(x_2 - 4)^3 + 7(x_2 - 4)$ $\frac{\partial g}{\partial x_2} = -3(x_2 - 4)^2 + 7$ $\frac{\partial g}{\partial x_2} = -3(x_2)^2 + 24x_2 - 41$	EA simplificação com frações	3
b)	$g(x_2) = -\left(\frac{x_2}{10} - \frac{40}{10}\right)^3 + \frac{7}{10}(x_2 - 40)$ $\frac{\partial g}{\partial x_2} = -3\left(\frac{x_2}{10} - 4\right)^2 + \frac{7}{10}$ $\frac{\partial g}{\partial x_2} = -3(x_2)^2 - \frac{12}{5}x_2 - \frac{472}{100}$	EA simplificação com frações	3
c)	$g(x_2) = -\left(\frac{(x_2)^3}{10^3} - 4^3\right) + \frac{7x_2 - 280}{10}$ $\frac{\partial g}{\partial x_2} = -\left(\frac{3(x_2)^2}{10^3}\right) + \frac{7}{10}$ $\frac{\partial g}{\partial x_2} = -\frac{3(x_2)^2}{1000} + \frac{7}{10}$	EA potenciação	2
d)	$g(x_2) = -\left(\frac{x_2 - 40}{10}\right)^3 + \frac{7}{10}(x_2 - 40)$ $\frac{\partial g}{\partial x_2} = -3\left(\frac{x_2 - 40}{10}\right)^2 \left(\frac{1}{10}\right) + \frac{7}{10}$ $\frac{\partial g}{\partial x_2} = -\frac{3}{10}\left(\frac{x_2 - 40}{10}\right)^2 + \frac{7}{10}$ $\frac{\partial g}{\partial x_2} = \left(\frac{-3x_2 + 120}{100}\right)^2 + \frac{7}{10}$	EA potenciação	9
e)	$g(x_2) = -\frac{(x_2 - 40)^3}{1000} + \frac{7x_2 - 280}{10}$ $\frac{\partial g}{\partial x_2} = -\frac{3(x_2 - 40)^2}{1000} + \frac{7}{10}$ $\frac{\partial g}{\partial x_2} = -\frac{3}{1000}(x_2)^2 + \frac{6}{25}x_2 - \frac{41}{10}$	Cálculo da derivada	2
f)	Não sei calcular a derivada	Cálculo da derivada	3
g)	Tenho dúvidas de qual solução está correta	Cálculo da derivada	12

Fonte: A pesquisa.

O item S6, Figura 133, requer a solução em duas etapas: primeiro, determinar o valor de  $x_1$  para  $f'(x_1) = -2$ ; e, depois, o cálculo da função para este valor de  $x_1$ . Verifica-se que nenhum dos respondentes acertou esse item, com somente dois alunos (A2, A6) resolvendo parcialmente o item, selecionando a opção *d*, calculando  $x_1 = 10$ , mas não calculando  $f(10)$ , ou seja, não verificaram se o resultado do cálculo atendia ao solicitado.

O item S6 foi apresentado a dezenove alunos, com dezessete deles entendendo que deveriam valorar a função com  $x_1 = -2$ , opções *b* e *c*, indicando problemas na identificação da estratégia a ser utilizada. Uma hipótese para isso é o hábito de utilizar apenas os valores fornecidos no enunciado, na função dada, sem verificar se a mesma atende ao que é solicitado; mas também pode ser entendido como uma inferência logicamente inválida.

A opção *c*, com sete respostas, é resultado da valoração da função com  $x_1 = -2$ , associado a um erro na manipulação algébrica:

$$f(-2) = -\left(\frac{-2+6}{4}\right)^2 + 22$$

$$f(x_1) = -\left(\frac{4}{4}\right)^2 + 22$$

$$f(x_1) = -1^2 + 22$$

$$f(x_1) = 23$$

O erro de caráter técnico (HADAR; ZASLAVSKY; INBAR, 1987) é evidência da falta de domínio ou atenção nas manipulações algébricas. Por ser uma habilidade necessária, de natureza operatória, anterior à aprendizagem do conceito de funções, considera-se a mesma essencial ao desenvolvimento do pensamento matemático. Logo, optou-se por associar o erro a dificuldades em *expressões algébricas*, e não ao *conceito de valor da função*. Complementando Radatz (1979), quando afirma que o mesmo problema pode dar origem a diferentes erros, e o mesmo erro pode surgir de diferentes processos de solução, tem-se que *um erro pode ser a concatenação de uma série de erros*, ficando difícil estabelecer a distinção das causas principais do erro.

A concentração de respostas nas opções *b* e *c* e a inexistência de respostas do tipo *não sei* mostra a convicção dos respondentes em uma solução completamente equivocada. Entende-se que o item evidencia as dificuldades dos alunos em relação aos conceitos associados aos distratores, sendo o item S6 considerado adequado ao objetivo proposto.

Figura 133 – Pergunta 6 da Situação-problema 2

Pergunta 6 – S6			
Parte do trajeto da montanha russa que relaciona a altura com a posição horizontal do carrinho é dado por $f(x_1)$ , determine qual a altura do carrinho quando ele estiver no ponto onde a inclinação é de $-2$ .			
$f(x_1) = -\left(\frac{x_1+6}{4}\right)^2 + 22$			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Nº de Respostas
a)	6m	Interpretação do problema	0
b)	21m	Conceito de valor	10
c)	23m	EA potenciação	7
d)	10m	Verificação do resultado no contexto	2
e)	Não sei o que fazer	Interpretação do enunciado	0
f)	Não entendi o que fazer	Interpretação do enunciado	0

Fonte: A pesquisa.

A análise do item S7 evidencia a falta do conceito de derivadas, em particular da segunda derivada no ponto, pois o maior número de respostas está concentrado na opção *a*, apresentando a condição da primeira derivada igual a zero, que está correto, mas com a aparente associação da segunda derivada com o valor da função no ponto. O distrator *b* é a segunda opção com mais respostas: sete, no total. Acredita-se que os alunos relacionaram a primeira



derivada com a característica de valos da função e a segunda derivada com a variação nula nos pontos solicitados.

Nota-se, também, que dez alunos responderam explicitamente que não sabiam as características da função nos pontos  $a$  e  $b$ . Todos os distratores foram selecionados por pelo menos um respondente e, considerando que cada um deles está associado ao conhecimento do aluno sobre o objeto de avaliação, pode-se afirmar que o item atende ao objetivo proposto, identificando a falta de conhecimento sobre as características dos pontos solicitados.

Figura 134 – Pergunta 7 da Situação-problema 2

Pergunta 7 – S7			
<p>A montanha russa projetada tem uma parte que é submersa em uma piscina artificial. Considerando o trajeto apresentado, sabe-se que o ponto mais baixo e mais alto tem as seguintes características.</p>			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Nº de Respostas
a)	$\begin{cases} f'(a) = 0; f''(a) > 0 \\ g'(b) = 0; g''(b) < 0 \end{cases}$	Característica de ponto crítico	11
b)	$\begin{cases} f'(a) < 0; f''(a) = 0 \\ g'(b) > 0; g''(b) = 0 \end{cases}$	Característica de ponto crítico	1
c)	$\begin{cases} f'(a) = 0; f''(a) < 0 \\ g'(b) = 0; g''(b) > 0 \end{cases}$	<b>Característica de ponto crítico</b>	<b>4</b>
d)	$\begin{cases} f'(a) > 0; f''(a) = 0 \\ g'(b) < 0; g''(b) = 0 \end{cases}$	Característica de ponto crítico	7
e)	$\begin{cases} f'(a) = 0; f''(a) = 0 \\ g'(b) = 0; g''(b) = 0 \end{cases}$	Característica de ponto crítico	1
f)	Não sei as características em a e b	Característica de ponto crítico	9
g)	Não sei o significado de $f''(x)$	Interpretação de derivada segunda	1

Fonte: A pesquisa.

O item S8 requer a interpretação gráfica das condições algébricas definidas pelo enunciado. Semelhante ao item S7, o item S8 solicita que se identifique o ponto que satisfaz as condições  $f(x) < 0$  e  $f'(x) < 0$ .

A fala do respondente A5 permite identificar a confusão entre a função negativa e o  $x$  negativo, que levam os alunos a selecionarem o ponto A:

- Pesquisador: Qual desses pontos tem a  $f(x) < 0$ ? Tem vários pontos...
- A5: Este aqui ó. (apontando para o ponto A)
- Pesquisador: O ponto A? Este ponto tem um  $x$  menor que zero, mas a  $f(x)$  é o  $y$ . Então, são estes pontos (apontando para C, D, E). Então você confunde o  $x$  com o  $y$ .
- Pesquisador: E  $f'(x) < 0$ ? Qual desses pontos tem a  $f'(x) < 0$ ?
- A5: (pensa e sinaliza com a cabeça que não sabe)
- Pesquisador: ... o B e o C, que é onde está decrescente. Então você ainda faz uma confusão quando é a função e quando é a primeira derivada.

- A5: *Sim.*

As onze respostas na opção *d* remetem à hipótese das condições,  $f(x) < 0$ ,  $f'(x) < 0$ , com as duas menores que zero, fazendo os alunos selecionarem o ponto de mínimo da função, ignorando completamente a característica de variabilidade nula em D.

A fala do aluno A29 mostra a confusão entre o ponto onde a função é negativa e a primeira derivada negativa, levando a seleção do ponto D:

- *Pesquisador: Qual desses pontos tem a  $f(x) < 0$ ?*
- A5: *Os pontos C, D e E*
- *Pesquisador: Qual desses pontos tem a  $f'(x) < 0$ ?*
- A5: *Não sei dizer, acredito que seja o D.*
- *Pesquisador: O D? O que é uma  $f'(x) < 0$ ?*
- A5: *Que naquele ponto ele tá abaixo de zero... naquele instante.*

Todos as opções foram selecionadas por pelo menos um aluno. Assim, de algum modo, esses distratores estão associados com a maneira equivocada de pensar do aluno. Considera-se o item S8 adequado ao objetivo proposto de identificar as dificuldades relativas aos conceitos de valor e variação da função em um ponto.

Figura 135 – Pergunta 8 da Situação-problema 2

Pergunta 8 – S8			
De acordo a função apresentada identifique qual ponto apresenta as seguintes características: $f(x) < 0, f'(x) < 0$			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Nº de Respostas
a)	A	Conceito de valor	6
b)	B	Conceito de valor	4
c)	C	<b>Conceito de variação; derivada primeira</b>	<b>4</b>
d)	D	Conceito de variação; derivada primeira	11
e)	E	Conceito de variação; derivada primeira	0
f)	Não sei qual a resposta	Conceito de variação; derivada primeira	9

Fonte: A pesquisa.

O item S9 continua a avaliação da interpretação gráfica das Derivadas, solicitando a identificação dos pontos que atendem à condição  $f'(x) > 0, f''(x) > 0$ . O número de respostas do tipo *não sei* mostra que parte do grupo não tem o conceito e as treze respostas incorretas evidenciam as dificuldades em identificar, no ponto selecionado, pelo menos uma das condições dadas pelo enunciado.

Figura 136 – Pergunta 9 da Situação-problema 2

Pergunta 9 – S9			
De acordo a função apresentada identifique qual ponto apresenta as seguintes características: $f'(x) > 0, f''(x) > 0$			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Nº de Respostas
a)	A	Interpretação de derivada segunda	3
b)	B	Conceito de variação; derivada primeira	4
c)	C	Conceito de variação; derivada primeira	1
d)	D	Conceito de variação; derivada primeira	2
e)	E	Interpretação de derivada segunda	4
f)	Nenhum ponto tem essa característica	Conceito de variação; derivada primeira	3
g)	Não sei qual o ponto	Conceito de variação; derivada primeira	8
h)	Não sei o significado de $f''(x)$	Interpretação de derivada segunda	0

Fonte: A pesquisa.

Realizando uma análise conjunta dos itens S7, S8 e S9, identificou-se, pelo banco de dados, que nenhum dos 34 alunos respondeu corretamente aos três itens e 21 alunos responderam incorretamente a pelo menos um deles. A Tabela 14 mostra um alto percentual de alunos que não sabem ou responderam incorretamente a dois e três itens. Tais resultados evidenciam as dificuldades do grupo pesquisado relativas ao conceito de derivadas, em particular em relação à interpretação gráfica da derivada em um ponto.

Tabela 14– Número das respostas não corretas dos itens S7, S8 e S9

	S7 ou S8 ou S9		S7 e S8		S8 e S9		S7 e S8 e S9	
<b>Número de alunos que responderam aos itens</b>	34		34		25		25	
Responderam incorretamente ou declararam não saber a resposta a um dos itens	34	100%	28	82%	18	72%	18	72%
Responderam incorretamente a um dos itens	21	62%	13	38%	10	40%	8	32%

Fonte: A pesquisa.

Quanto à qualidade dos itens, a análise conjunta deles não permite afirmar que são capazes de identificar as dificuldades, pois a natureza dos erros não se confirmou, ao analisar o desempenho dos respondentes para os três itens. É fato que existem dificuldades associadas ao conceito de Derivadas e suas representações gráficas, sendo necessário incluir outros itens para uma avaliação pontual e melhor identificação das causas.

Outra possibilidade é agrupar a dificuldade em um conceito mais abrangente, como Conceito de Derivadas, ou Conceito de variabilidade, não distinguindo entre a primeira derivada, a segunda derivada e as características de ponto crítico.

Dos dezessete alunos que responderam a S10, Figura 137, seis selecionaram a opção correta, um declarou não saber o que fazer e dez selecionaram as opções erradas. O distrator  $a$ ,

com cinco respostas, tem x1 como uma opção válida, quando a segunda derivada é calculada de maneira incorreta.

Figura 137 – Pergunta 10 da Situação-problema 2

<b>Pergunta 10 – S10</b>			
Para $x_1 = -0,5$ ; $x_2 = 0$ ; $x_3 = 0,5$ ; $x_4 = 1,5$ ; $x_5 = 3$ e a função $f(x) = \text{sen}(2x) - 1$ qual dos pontos apresenta a seguinte característica $f(x) < 0$ , $f'(x) > 1$ e $f''(x) < 0$ .			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Nº de Respostas
a)	x1	Cálculo das derivadas	5
b)	x2	Cálculo das derivadas	1
c)	<b>x3</b>	<b>Cálculo das derivadas</b>	<b>6</b>
d)	x4	Cálculo das derivadas	0
e)	x5	Cálculo das derivadas	2
f)	Nenhum dos pontos atendem as características	Cálculo das derivadas	2
g)	Não sei o que fazer	Interpretação do enunciado	1

Fonte: A pesquisa.

Este erro origina-se da generalização equivocada da derivada das funções seno e cosseno, nas quais o aluno só *lembra* da alternância entre as funções nas suas derivadas, esquecendo da troca de sinal para a derivada do cosseno. A Figura 138 mostra o cálculo dos pontos para a função, a derivada da função e a segunda derivada da função calculada errada.

Figura 138 – Cálculo das Derivadas nos pontos.

$x$	$f(x) < 0$	$f'(x) > 1$	$f''(x) < 0$
	$f(x) = \text{sen}(2x) - 1$	$f'(x) = 2\text{cos}(2x)$	$f''(x) = 4\text{sen}(2x)$
<b>-0,5</b>	<b>-1,84147</b>	<b>1,080605</b>	<b>-3,36588</b>
<b>0</b>	-1	2	0
<b>0,5</b>	-0,15853	1,080605	3,365884
<b>1,5</b>	-0,85888	-1,97998	0,56448
<b>3</b>	-1,27942	1,920341	-1,11766

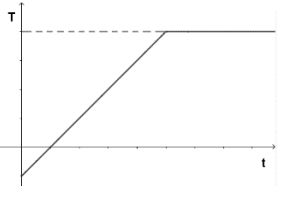
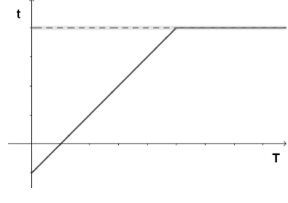
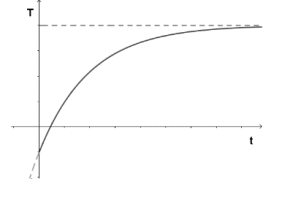
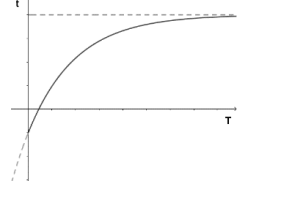
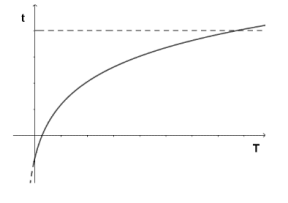
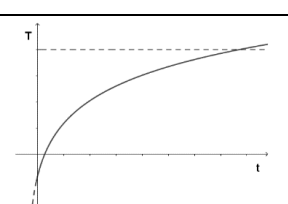
Fonte: Elaborado pelo autor.

Pelos dados apresentados para o item S10, considera-se o mesmo adequado aos objetivos propostos, pois se verifica que alguns alunos selecionaram os distratores com erro no cálculo das derivadas.

Devido a um erro no sistema, que ocorreu durante a realização do experimento, dos 34 participantes da avaliação *Resolução de problemas*, somente 23 foram submetidos à Situação-problema 3. Por essa razão, optou-se por realizar as análises dos itens com o grupo de respondentes a descartar os dados produzidos pelos onze alunos que não responderam à Situação-problema 3.

O item Q1 verifica dificuldades relativas à relação de dependência entre as variáveis, com itens que estabelecem o tempo dado em relação à temperatura e a modelos equivocados para a situação-problema.

Figura 139 – Item 1 da Situação-problema 3

<b>Item 1 – Q1</b>			
Um litro de uma solução que tem seu ponto de solidificação de $-10^{\circ}\text{C}$ é colocado no congelador de um refrigerador doméstico a uma temperatura de $-5^{\circ}\text{C}$ de modo que ela permanece em estado líquido mesmo depois de ter sua temperatura estabilizada em $-5^{\circ}\text{C}$ . Se em um instante qualquer, considerado como tempo inicial $t_0=0$ , a porta do congelador é aberta e assim permanecer, qual o gráfico que melhor representa a temperatura ( $T$ ) da solução em relação ao tempo ( $t$ )?			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Nº de Respostas
a)		Modelagem do problema	8
b)		Relação de dependência	3
c)		Modelagem do problema	4
d)		Relação de dependência	4
e)		Relação de dependência	1
f)		Modelagem do problema	1
g)	Tenho dúvidas de qual é o gráfico	Modelagem do problema	2
h)	Não sei qual o gráfico	Modelagem do problema	0

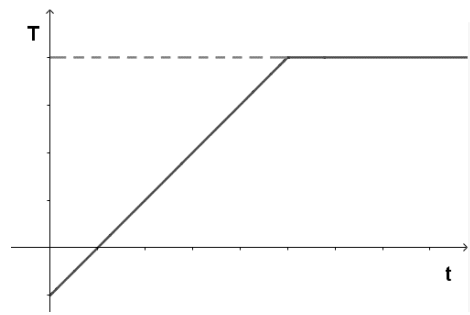
Fonte: A pesquisa.

As opções *b*, *d* e *e* totalizaram oito respostas incorretas, com as variáveis invertidas nos eixos. Como os gráficos aparecem aos pares, a escolha por um dos gráficos com as variáveis trocadas evidencia problemas na compreensão da relação de dependência entre elas, sendo esse um distrator importante para a compreensão do pensamento do aluno.

Considerando os modelos gráficos, como a representação da variação linear da temperatura, que depois se estabiliza em uma função constante, tem-se onze respostas concentradas nas opções *a* e *b*, que demonstram uma visão simplista do fenômeno e a falta de conhecimento científico para identificar o modelo correto.

Em relação ao item, considera-se o mesmo adequado, pois possibilitou identificar a falta de conhecimento científico sobre o fenômeno da variação da temperatura, que se refletiu nos resultados com somente quatro respostas corretas.

Figura 140 – Item Q2 da Situação-problema 3

Item 2 – Q2			
O gráfico da variação da Temperatura em relação ao tempo é a representação:			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Nº de Respostas
a)	da função linear até um ponto e depois uma função constante	Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis	8
b)	da função quadrática	Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis	0
c)	da função exponencial	Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis	0
d)	da função raiz	Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis	0
e)	da função logarítmica	Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis	0
f)	Não sei o nome	Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis	0

Fonte: A pesquisa.

O item Q2 é apresentado para os alunos que selecionaram a opção *a* de Q1, tendo sido apresentado aos oito alunos (A2, A3, A6, A19, A20, A24, A26, A33) que souberam identificar a opção correta para descrever a representação gráfica da função.

Assim como na Situação-problema 1, mesmo que seja selecionado o modelo inadequado à situação que se apresenta, o respondente é direcionado para um item que tem por objetivo verificar dificuldades na identificação e nomenclatura da função selecionada. A sequência Q1, Q2 mostra que os alunos não têm dificuldades na identificação da função linear e a constante, talvez por serem as mais trabalhadas no Ensino Fundamental. O item Q2 não se apresenta como sendo muito eficaz ao seu propósito e estuda-se a alteração na sequência de apresentação dos itens, direcionando as respostas para Q3 e eliminando Q2.

O item Q3, diferentemente de Q2, apresenta a função exponencial transformada, e requer que o aluno a identifique pela sua forma e pela sua assíntota. Os distratores são os nomes de funções que também são representadas por curvas, funções que, apesar da forma parecida, têm características específicas que as diferenciam.

Apesar do número reduzido de alunos submetidos ao item Q3, torna-se aparente as dificuldades dos mesmos em denominar o gráfico selecionado em Q1, pois cada um dos diferentes distratores foi selecionado por um dos respondentes. Logo, Q3 é considerado adequado ao objetivo proposto.

Figura 141 - Item Q3 da Situação-problema 3

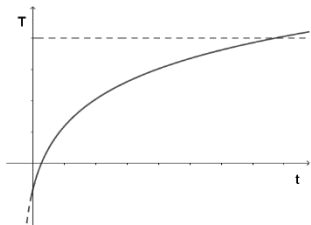
Item 3 – Q3			
O gráfico da variação da Temperatura em relação ao tempo é a representação:			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Nº de Respostas
a)	da função quadrática	Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis	1
b)	<b>da função exponencial</b>	<b>Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis</b>	<b>1</b>
c)	da função raiz	Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis	1
d)	da função logarítmica	Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis	1
e)	Não sei o nome	Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis	0

Fonte: A pesquisa.

Com somente um aluno respondendo ao item Q4, a análise do mesmo não pôde ser realizada quanto aos outros distratores, mas acompanhando o desempenho do único respondente, A16, verifica-se que o aluno acertou P3, identificando a parábola como a trajetória da bola chutada, e errou S1, identificando a função cúbica como sendo a função seno. Entende-se que A16 possui um conhecimento básico sobre funções e insuficiente para identificar as funções transformadas, portanto o item Q4 contribuiu na identificação de dificuldades do aluno A16, relativas a conversões de representação.

Deste modo, mesmo com uma única resposta, considera-se o item Q4 adequado ao objetivo proposto, pois traz uma situação que gera dúvidas, como em P6 e Q3, nos quais foi verificado que os alunos se confundem com as representações das funções exponencial e logarítmica transformadas.

Figura 142 - Item Q4 da Situação-problema 3

Item 4 – Q4			
O gráfico da variação da Temperatura em relação ao tempo é a representação:			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Nº de Respostas
a)	da função quadrática	Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis	0
b)	da função exponencial	Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis	0
c)	da função raiz	Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis	1
d)	da função logarítmica	<b>Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis</b>	<b>0</b>
e)	Não sei o nome	Representação geométrica e linguagem natural das funções notáveis	0

Fonte: A pesquisa.

O item Q5 foi apresentado a todos os 23 alunos, independente do modelo selecionado em Q1, e solicita a identificação do modelo algébrico para o gráfico apresentado. Mesmo informando o gráfico correto, cinco alunos selecionaram a opção *a*, com o modelo algébrico da função definida em trechos como uma função linear até um ponto e, após, uma função constante.

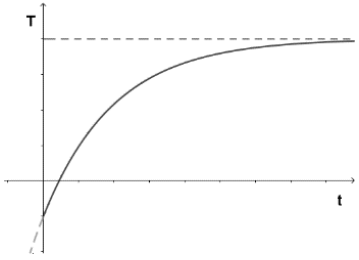
As opções são apresentadas aos pares, com três representações algébricas para o gráfico do enunciado. Cada par tem uma representação algébrica com a relação entre as variáveis invertida. Dessa maneira, o aluno que escolhe essas representações tem, efetivamente, a compreensão equivocada sobre como as variáveis se relacionam. As opções *d* e *f* apresentam as variáveis trocadas na representação algébrica e foram, respectivamente, respondidas por A34 e A24, sendo que esses alunos cometeram o mesmo erro ao responderem aos itens Q1 e P4, sendo os únicos dos onze alunos que cometeram o mesmo erro em outros dois itens.

Ainda para Q5, dez alunos declararam não saber qual a representação algébrica do gráfico, nove responderam incorretamente e somente quatro responderam de modo correto. Tais resultados evidenciam que o grupo participante do experimento tem dificuldades, em diferentes níveis, com a conversão entre as representações algébricas e as representações gráficas das funções exponenciais e logarítmicas, quando estas não estão na sua forma prototípica.

Este item mostrou-se adequado ao ADAC ao identificar e apresentar diferentes erros que os alunos selecionaram, evidenciando as diversas dificuldades matemáticas associadas aos distratores.



Figura 143 - Item Q5 da Situação-problema 3

Item 5 – Q5			
		<p>A função algébrica que relaciona a Temperatura (T) em relação ao tempo (t) para uma temperatura inicial <math>T_0 = -5^\circ\text{C}</math> e uma temperatura ambiente <math>T_A = 20^\circ\text{C}</math> pode ser expressa por:</p>	
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Nº de Respostas
a)	$\begin{cases} T(t) = k \cdot t - 5; t \leq a \\ T(t) = 20; t > a \end{cases}$ , $p/a, k \in \mathbb{R}_+$	Representação geométrica e algébrica das funções notáveis	5
b)	$\begin{cases} t(T) = k \cdot T - 5; T \leq a \\ t(T) = 20; T > a \end{cases}$ , $p/a, k \in \mathbb{R}_+$	Representação geométrica e algébrica das funções notáveis	0
c)	$T(t) = 20 - 25e^{-kt}$ , para $k \in \mathbb{R}_+$	<b>Representação geométrica e algébrica das funções notáveis</b>	<b>4</b>
d)	$t(T) = 20 - 25e^{-kT}$ , para $k \in \mathbb{R}_+$	Relação de dependência	1
e)	$T(t) = k \ln(t + 1) - 5$ , para $k \in \mathbb{R}_+$	Representação geométrica e algébrica das funções notáveis	2
f)	$t(T) = k \ln(T + 1) - 5$ , para $k \in \mathbb{R}_+$	Relação de dependência	1
g)	Não sei qual a função	Representação geométrica e algébrica das funções notáveis	10

Fonte: A pesquisa.

O item Q6 requeria a solução da equação  $T(t) = 8$  e foi respondida corretamente por nove alunos; quatro selecionaram a opção *c*, calculando  $T(8)$  – acredita-se que pela falta de compreensão do solicitado e sua relação com o conceito de funções (conceito de valor); seis declararam não saber calcular; um declarou não ter entendido o solicitado, caracterizando dificuldades na interpretação do enunciado; e três alunos selecionaram a opção *a*, que é obtida ao se cometer erros algébricos durante o cálculo da equação exponencial:

$$8 = 20 - 25e^{-0,0558t}$$

$$25e^{-0,0558t} = 12$$

$$e^{-0,0558t} = \frac{12}{25}$$

$$\ln e^{-0,0558t} = 0,48 \quad (*)$$

$$0,0558t = 0,48 \quad (*)$$

$$t = 8,60$$

(\*) erros algébricos

De um modo geral, quando os alunos se deparam com equações exponenciais, apresentam dificuldades em realizar as manipulações necessárias para isolar a incógnita no expoente. Os resultados de Q6 reafirmam as dificuldades do grupo na resolução de equações não polinomiais, identificadas na avaliação *Matemática*. Nessa perspectiva, considera-se o item Q6 adequado aos objetivos propostos, ao identificar as diferentes dificuldades dos alunos na sua resolução de equações não polinomiais.

Figura 144 - Item Q6 da Situação-problema 3

Item 6 – Q6			
Para a função dada que representa a temperatura (T) em Celsius em relação ao tempo (t) em minutos, em quanto tempo leva para a temperatura da solução chegar a 8°C?			
$T(t) = 20 - 25e^{-0,0558t}$			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Nº de Respostas
a)	8,60	Equação não polinomiais	3
<b>b)</b>	<b>13.15</b>	<b>Equação não polinomiais</b>	<b>9</b>
c)	4	Conceito de valor	4
d)	Não entendi o que é pedido	Interpretação do enunciado	1
e)	Não sei calcular	Equação não polinomiais	6

Fonte: A pesquisa.

Como professor das disciplinas de Cálculo, o pesquisador se depara com “narizes torcidos” e “caras feias” quando o assunto “limites” surge em sala de aula. Por isso, ao desenvolver o ADAC, foram incluídos itens com o referido conteúdo.

O item Q7 apresenta distratores construídos com base em erros algébricos identificados em sala de aula e que se apresentaram como dificuldades dos alunos participantes. O erro mais comum é o aluno pensar que, se o expoente vai ao infinito, então a expressão toda também vai ao infinito. Isso se observa nas quatorze respostas na opção *e*. Optou-se por associar esse erro ao cálculo de limite, mas é evidente a falta de interpretação do resultado, pois a temperatura de um refrigerador não pode ir para o infinito.

Figura 145 - Item Q7 da Situação-problema 3

Item 7 – Q7			
Para a função T que representa a temperatura (T) em Celsius em relação ao tempo (t) em minutos, determine:			
$T = \lim_{t \rightarrow \infty} (20 - 25e^{-0,0558t})$			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Nº de Respostas
a)	T = -5	Cálculo de limite	2
b)	T = 0	Cálculo de limite	0
<b>c)</b>	<b>T = 20</b>	<b>Cálculo de limite</b>	<b>4</b>
d)	T = 25	Cálculo de limite	0
e)	T diverge para $\infty$	Cálculo de limite	14
f)	Não entendi o que é pedido	Interpretação do enunciado	1
g)	Não sei calcular	Cálculo de limite	2

Fonte: A pesquisa.

Situações como essa sinalizam a necessidade de uma evolução do ADAC, com a possibilidade de associar mais de uma dificuldade por distrator, com um valor ponderado, ou seja, mudar do modelo dicotômico *tem/não tem* para uma escala de valores que represente a probabilidade da existência das dificuldades associadas por distrator e dotando o ADAC de um modelo probabilístico para a inferência das dificuldades do respondente.

Quando o estudante calcula os termos separadamente, ignorando as operações da expressão, isto é, ele interpreta que  $e^{-0,0558t}$  tende a zero *retirando* do cálculo e restando somente  $20 - 25$ . Essa solução é representada na opção *a* com dois alunos selecionando essa alternativa.

Nesse item, as respostas identificadas foram: dezesseis incorretas, decorrentes de erros técnicos e definições distorcidas (HADAR; ZASLAVSKY; INBAR, 1987); duas respostas *não sei calcular*; uma *não entendi* e quatro corretas. O item Q7 deixa evidente as dificuldades do grupo em manipulações algébricas associadas ao cálculo de limites, sendo considerado adequado para a identificação das dificuldades dos alunos no cálculo de limites.

Na organização da sequência de apresentação, somente os que acertaram o item Q7 responderam aos itens Q8 e Q9. Dessa forma, os dois itens têm um número reduzido de respondentes, pois somente quatro alunos acertaram a Q7. O item Q8 objetiva verificar a existência de dificuldades no cálculo das derivadas associadas ao cálculo de limites.

Tendo respondido corretamente Q7, parte-se do pressuposto que os alunos têm conhecimentos sobre o cálculo de limites no infinito. A opção *a* de Q8 é obtida pelo mesmo erro de cálculo da opção *a* do item Q7, ou seja, além calcular equivocadamente a derivada, também, incorre em um erro técnico.

Figura 146 – Item Q8 da Situação-problema 3

<b>Item 8 – Q8</b>			
Para a função dada que representa a temperatura (T) em Celsius em relação ao tempo (t) em minutos, determine a taxa de variação instantânea quando t tende ao infinito.			
$T(t) = 20 - 25e^{-0,0558t}$			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Nº de Respostas
a)	$\lim_{t \rightarrow \infty} T'(t) = -5$	Cálculo de derivadas	1
b)	$\lim_{t \rightarrow \infty} T'(t) = 0$	<b>Cálculo de limite</b>	<b>1</b>
c)	$\lim_{t \rightarrow \infty} T'(t) = 20$	Cálculo de derivadas	1
d)	$\lim_{t \rightarrow \infty} T'(t) = 25$	Cálculo de derivadas	0
e)	Não entendi o que é pedido	Interpretação do enunciado	1
f)	Não sei calcular	Cálculo de limite	0

Fonte: A pesquisa.

O aluno que selecionou a opção *c* executou o mesmo cálculo de Q7, não derivando a função, ou derivando com uma generalização equivocada, na qual a derivada da função exponencial é a própria função exponencial fazendo  $T'(t) = T(t)$ . O item Q8 apresenta, nos seus distratores, os erros cometidos por aqueles com pouco ou nenhum domínio do objeto matemático avaliado, sendo considerado adequado ao objetivo proposto.

O item Q9, Figura 93, avalia a compreensão do conceito de derivadas, solicitando a interpretação de  $\lim_{t \rightarrow \infty} T'(t) = 0$ . O aluno A34, que acertou Q7, respondeu incorretamente ao item Q9, ou seja, apesar de saber calcular corretamente, o estudante não tem a compreensão do significado do seu cálculo. O item Q9 foi respondido por poucos alunos, o que impede realizar uma análise mais precisa sobre os distratores. Também se considera que é possível respondê-lo interpretando a situação-problema, sem que seja necessário o conceito de derivadas, pois a solução acabará com a temperatura próxima da temperatura ambiente. Logo, este item não é

considerado adequado para identificar a existência de dificuldades na interpretação do conceito de derivadas.

Figura 147 - Item Q9 da Situação-problema 3

<b>Item 9 – Q9</b>			
Para a função dada que representa a temperatura (T) em Celsius em relação ao tempo (t) em minutos, qual o significado da derivada de T(t) quando t tende ao infinito			
$T(t) = 20 - 25e^{-0,0558t} ; \lim_{t \rightarrow \infty} T'(t) = 0$			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Nº de Respostas
a)	A temperatura da solução está constante em 0°C	Conceito derivadas, derivada primeira	0
b)	<b>A temperatura da solução está constante em 20°C</b>	<b>Conceito derivadas, derivada primeira</b>	<b>2</b>
c)	A temperatura da solução está constante em 25°C	Conceito derivadas, derivada primeira	1
d)	O limite para t tendendo ao infinito não pode ser 0	Conceito derivadas, derivada primeira	0
e)	A variação da temperatura da solução está aumentando de maneira constante	Conceito derivadas, derivada primeira	0
f)	Não entendi o que é pedido	Interpretação do enunciado	0
g)	Não sei	Interpretação do enunciado	0

Fonte: A pesquisa.

O item Q10, Figura 94, foi respondido corretamente por quatro dos 23 alunos; sete calcularam  $T(0)$ , selecionando a opção *b*; um aluno calculou a derivada da função como  $T'(t) = 20 - 25e^{-0,0558t} \cdot 0,0558$ , realizou a subtração antes das demais operações e selecionou a opção *c*; três alunos calcularam  $T'(t) = 25e^{-0,0558t}$ , selecionando a opção *d*; oito alunos selecionaram as opções *não sei*.

Os resultados apontam para diferentes equívocos no raciocínio dos alunos, que os levaram a selecionar os distratores de Q10, sendo a situação mais recorrente o uso indiscriminado dos valores do enunciado direto na função dada, não identificando a necessidade de uma adequação da função a ser utilizada – no caso, o cálculo da derivada. Desse modo, considera-se o item Q10 adequado ao propósito do ADAC.

Figura 148 - Item Q10 da Situação-problema 3

<b>Item 10 – Q10</b>			
Para a função dada que representa a temperatura (T) em Celsius em relação ao tempo (t) em minutos, qual o significado de $T'(0)$ ?			
$T(t) = 20 - 25e^{-0,0558t}$			
Opção	Resposta	Conceito ou procedimento associado	Nº de Respostas
a)	<b>A temperatura da solução está variando a 1,4°C/min</b>	<b>Cálculo de derivadas</b>	<b>4</b>
b)	A temperatura da solução está variando a -5°C/min	Cálculo de derivadas	7
c)	A temperatura da solução está variando a -0,3°C/min	Ordem das operações	1
d)	A temperatura da solução está variando a 25°C/min	Cálculo de derivadas	3
e)	Não entendi o que é pedido	Interpretação do enunciado	5
f)	Não sei calcular	Cálculo de derivadas	3

Fonte: A pesquisa.

Na sequência da avaliação *Resolução de problemas*, os alunos são direcionados para os itens que avaliam a existência de dificuldades no cálculo de derivadas, em específico com a regra da cadeia e operações algébricas. Na Figura 97 apresentam-se os seis itens para o cálculo

de derivadas, com a regra da cadeia para funções polinomiais, trigonométricas e exponenciais compostas, com a sequência de apresentação igual à da avaliação *Matemática*,

Figura 149 – Itens de avaliação para o cálculo de derivadas

Item	Tipo de afirmação	Enunciado do item
D1	AF	$\frac{\partial}{\partial x} (5x^2 + x^3)^2 = 2(10x + 3x^2)$
D2	AV	$\frac{\partial}{\partial x} \left(4x^5 - \frac{x^3}{3}\right)^2 = 2 \left(4x^5 - \frac{x^3}{3}\right) (20x^4 - x^2)$
D3	AF	$\frac{\partial}{\partial x} (x^3 - \cos(x^2)) = 3x^2 + \text{sen}(2x)$
D4	AV	$\frac{\partial}{\partial x} (\tan(x^3 + 2x)) = (3x^2 + 2) \sec^2(x^3 + 2x)$
D5	AF	$\frac{\partial}{\partial x} e^{x^3+2} = e^{3x^2}$
D6	AV	$\frac{\partial}{\partial x} e^{x^2+1} = 2x e^{x^2+1}$

Fonte: Elaborado pelo autor.

A Tabela 15 apresenta a contagem de respostas não corretas, ou seja, o número das respostas erradas e as *não sei* e *não tenho certeza*, o número de respostas por item e a relação percentual entre as repostas incorretas e o número de repostas por item.

Tabela 15 – Contabilização das respostas não corretas para o cálculo das derivadas

	Total de respostas	erradas	não sei	Total de incorretas	% incorretas
<b>D1</b>	34	9	7	16	47%
<b>D2</b>	18	6	1	7	39%
<b>D3</b>	23	8	3	11	48%
<b>D4</b>	23	0	4	4	17%
<b>D5</b>	15	3	1	4	27%
<b>D6</b>	30	5	1	6	20%

Fonte: A pesquisa

Nota-se, na Tabela 15, que as afirmações falsas D1, D3 e D5 têm uma proporção maior de respostas erradas, quando comparadas com as respostas incorretas para as afirmações verdadeiras D2, D4 e D6. Acredita-se que os alunos identificam como corretas as AF porque essas apresentam os erros mais comuns, como apontados por Cury (2003), nos quais: os alunos não identificam as funções componentes da função composta; apresentam dificuldades com os argumentos das funções trigonométricas, às vezes confundido com um produto; a generalização equivocada, com o cálculo da derivada das duas funções ao mesmo tempo.

Os itens D5 e D6 apresentam o menor número de respostas erradas. Considerou-se a hipótese de o argumento da função exponencial ser mais evidente que o das demais funções, não causando tanta confusão quando comparado com o argumento das funções trigonométricas e polinomiais compostas. O conjunto de itens para avaliação de dificuldades no cálculo das derivadas aplicando a regra da cadeia foi considerado adequado ao ADAC. Ressalta-se que o conjunto de itens foi retirado da avaliação *Matemática* e incluído na avaliação

*Resolução de problemas*, permitindo que a avaliação *Matemática* possa ser utilizada pelos alunos que ainda não cursaram a disciplina de Cálculo 1, que apresenta o conceito de Derivadas.

No dados consolidados apresentado na Tabela 13, no início da seção, verifica-se que dos 34 alunos que responderam à sequência para o cálculo de derivadas (regra da cadeia), 22 alunos responderam incorretamente a pelo menos um item e, dentre eles, dez responderam incorretamente a dois ou mais itens, representando 29% do total de alunos participantes. Cabe ressaltar que as respostas do tipo *não sei* contabilizam como dificuldades no *Cálculo de Derivadas*, e não em *Derivadas Regra da Cadeia*.

Analisando em conjunto as dificuldades identificadas como *Cálculo de derivadas* e as *Derivadas Regra da cadeia*, trinta alunos erraram pelo menos uma questão e 26 alunos tiveram dois ou mais erros, totalizando 76% dos participantes do experimento com a avaliação *Resolução de problemas*. Esse percentual evidencia que, mesmo aprovados nas disciplinas de Cálculo I, onde são apresentados a esses conteúdos, os alunos continuam com dificuldades no cálculo de Derivadas.

Em se tratando da resolução de problemas, ficou evidente que os alunos apresentam dificuldades na identificação e na representação de funções, o que dificulta o discernimento do uso da função ou da sua derivada. Os resultados apontam para um procedimento padrão, utilizando os dados fornecidos no enunciado, valorando indiscriminadamente as funções sem avaliar a necessidade ou não do uso da derivada da função.

#### 6.4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Para os graduandos dos cursos de engenharias, a resolução de problemas matemáticos é uma das competências a serem desenvolvidas durante sua formação, sendo necessário o que as DCN dos cursos de graduação em Engenharia definem como competência e habilidade geral de *identificar, formular e resolver problemas de engenharia* (BRASIL, 2002). Para tal, é necessária a mobilização conjunta de outras competências e habilidades, apresentadas na Figura 150.

Figura 150 – Conhecimentos e habilidades matemáticas integrantes das competências gerais

<b>Competências</b>	<b>Habilidades e competências</b>
Modelagem de situações	Ler, interpretar e identificar os dados relevantes; Representar matematicamente a situação-problema.
Aplicar conhecimentos científicos	Identificar métodos e algoritmos matemáticos adequados a situação-problema.
Comunicar-se eficientemente	Comunicar-se transitando entre a linguagem natural e as representações matemáticas e vice-versa.
Aplicar conhecimentos matemáticos	Acessar e utilizar de algoritmos e procedimentos matemáticos; Executar cálculos matemáticos.
Resolução de problemas	Modelagem de situações; Aplicar conhecimentos científicos; Comunicar-se eficientemente; Aplicar conhecimentos matemáticos; Interpretar os resultados dentro do contexto da situação-problema.

Fonte: Elaborado pelo autor.

As avaliações *Matemática* e *Resolução de problemas* foram desenvolvidas para verificar as dificuldades matemáticas que são determinantes para desenvolver as competências necessárias para a resolução de problemas, em específico envolvendo as Derivadas. Os resultados apontam que os itens e a sua organização permitiram a identificação das dificuldades matemáticas associadas às habilidades e competências gerais avaliadas, ao apresentarem questões com opções de resposta com equívocos de conceito e erros algébricos, que foram selecionados pelos alunos participantes do experimento.

Como Pochulu (2009) afirma, não basta dizer ao aluno qual é o caminho correto ou qual a solução. Como sujeito ativo do seu processo de aprendizagem, o aluno deve participar de forma efetiva da superação das suas dificuldades geradoras dos erros matemáticos durante a resolução dos problemas. Deve-se, então, tornar o erro um objeto observável ao aluno, de maneira que ele possa interagir e, eventualmente, superá-lo (PINTO, 2000). Nessa perspectiva, o ADAC pode ser considerado válido como uma avaliação do aluno e para o aluno, dentro do contexto da autogestão do conhecimento, no qual o ele é o protagonista do seu processo de aprendizagem, sendo uma ferramenta útil para que ele identifique suas dificuldades matemáticas. Nesta pesquisa, a ferramenta é direcionada aos alunos dos cursos de graduação em engenharia, na avaliação das suas competências na resolução de problemas envolvendo as Derivadas.

O ADAC é válido como um instrumento para a autoavaliação, ao permitir que o aluno tome ciência do seu conhecimento sobre as Derivadas e suas aplicações, após ter cursado as disciplinas de Cálculo. No entanto, a fala do aluno A18, que se estendeu para além das perguntas

sobre os motivos dos erros, nos itens respondidos por ele, traz uma possibilidade de uso do ADAC no início do curso de graduação:

- **A18:** *se tivesse essa autoavaliação no início da disciplina ... mas ela em partes, por exemplo, a parte de derivadas, a parte de graficação, a parte da leitura da expressão, antes de cada cálculo, seria interessante até pra rever as principais dificuldades. Como eu comentei, passei muita dificuldade nos três cálculos, devido a uma coisa, por exemplo, essa ideia de identificar, como resolver, como moldar a equação ... a função, para conseguir resolvê-la, adaptar, fazer as manipulações algébricas.. Se tivesse uma revisão antes facilitaria muito para compreender a resolução dos problemas também, para interpretar melhor o problema.*
- **Pesquisador:** *A maioria das instituições têm um curso de nivelamento, um curso de revisão, e a maioria dos alunos não fazem. Quando você entrou na universidade, você sabia que tinha dificuldade de matemática ou só depois que começou a ir mal é que você se deu conta disso?*
- **A18:** *Eu só fiquei sabendo depois de iniciar a cadeira, de começar, quando chegou o momento de resolver as equações é que a gente começa a notar as dificuldades.*
- **Pesquisador:** *Então, agora vou fazer uma pergunta hipotética. Se tivesse tudo isso no início do teu primeiro Cálculo, na primeira semana do Cálculo 1, você se matricularia numa revisão?*
- **A18:** *... sem fazer avaliação...*
- **Pesquisador:** *(interrompendo A18) ... você não sabe que tem problemas, você faria assim mesmo a revisão, a matrícula ou não? O que você acha?*
- **A18:** *...não, se eu não tivesse o conceito de não enxergar essa minha dificuldade, não faria. Até pela relação de tempo. A gente se sente hoje com uma carga horária de trabalho, a gente acaba tendo o tempo que tem e, como faz várias cadeiras durante o semestre... e a gente procura deixar o tempo livre pras cadeiras. Então, a gente acaba optando por curso de nivelamento ... e essas coisas assim... acaba por deixar, só se necessário, só que ...*
- **Pesquisador:** *(interrompendo A18) ... necessário é só depois que a casa caiu (risos).*
- **A18:** *(risos) só depois que a casa caiu, exatamente. Então, só que, por exemplo, tu vê que a casa vai cair antes, então tu consegue te preparar antes, né...*

A fala do aluno A18 traça o perfil dos alunos das engenharias como pessoas que trabalham, sem muito tempo livre, que reservam seu tempo útil para as disciplinas obrigatórias, que não sabem de suas dificuldades matemáticas, mas que, se soubessem antes de cursar as



disciplinas, se matriculariam nas disciplinas de revisão e pré-cálculo que as instituições disponibilizam como formas de minorar as dificuldades dos alunos.

Segundo Godoy e Almeida (2017), há uma relação entre as reprovações nas disciplinas de Cálculo e a evasão nos cursos de Engenharias. Logo, uma avaliação diagnóstica, como o ADAC, seguida de revisões de matemática básica podem atuar positivamente na diminuição das reprovações nas disciplinas de Cálculo e, por consequência, na evasão dos cursos de engenharia.

Como informação secundária das análises dos dados, tem-se que o desempenho dos participantes desta investigação corrobora os resultados das pesquisas de Cavasotto (2010), Cury (2003; 2006), Ferreira e Brumatti (2005), que apontam os problemas com os conteúdos da Educação Básica, tais como simplificação, fatoração, potenciação, radiciação e resolução de equações, como as principais causas dos erros na resolução de questões de Cálculo.

Ao término das análises das avaliações, verificou-se um número significativo de respostas incorretas, principalmente na avaliação *Matemática*. Os itens da avaliação *Matemática* requeriam a aplicação de regras e propriedades algébricas estudadas no Ensino Fundamental e Médio, devendo esses serem dominados pelo aluno ao ingressar no Ensino Superior. Mas, pelos resultados da pesquisa realizada, ficaram evidentes as dificuldades matemáticas do grupo com a maioria dos conceitos avaliados.

Mesmo considerando que o erro pode acontecer por distração, ainda permanecem altos os percentuais de alunos, ao se considerar somente os que responderam incorretamente a dois ou mais itens por conteúdo avaliado, sugerindo que o grupo apresenta maiores dificuldades matemáticas relativas a Álgebra: simplificações, operações com frações, potenciação, radiciação e resolução de equações não polinomiais.

Ressalta-se que, na avaliação *Resolução de problemas*, o desempenho geral do grupo evidencia problemas nas conversões de representações, com os alunos sendo capazes somente de identificar as funções nas suas formas protípicas, ou seja, as funções são identificadas quando não sofrem nenhuma transformação, seja na forma gráfica ou algébrica. Sendo o objeto matemático acessado pela sua representação, pode-se inferir que alguns alunos não têm estruturado o conceito de funções. Isto se reflete nas estratégias utilizadas para resolver os problemas envolvendo Derivadas, com um número considerável de alunos – 76% – que responderam incorretamente aos itens de avaliação para os quais era necessário distinguir entre usar a função ou a derivada da função, para resolução do problema.

A importância da compreensão do objeto matemático em um todo, e não por suas partes, levou ao questionamento sobre a necessidade de segmentação e distinção entre as formas

de representação de funções, assim como a diferenciação das cônicas em relação às demais funções, podendo todas elas ser identificadas como *representações de funções*, para efeito de cadastro e de informação para um direcionamento do aluno nos seus estudos.

Outro ponto, em relação à segmentação dos conteúdos na identificação das dificuldades, é relativo à distinção entre o *Cálculo de Derivadas* e *Derivadas Regra da Cadeia* e à segmentação do *Conceito de Derivadas* em *Interpretação de derivada segunda* e *Ponto crítico*. Os motivos que levam o aluno a escolher determinado opção de resposta às vezes não são claros, para a associação da dificuldade do aluno com o distrator. Tendo em vista que as dificuldades associadas ao distrator compõem o relatório de desempenho do aluno, que planejará suas ações de acordo com essas informações e, independentemente da distinção entre *Cálculo de Derivadas* e *Derivadas Regra da cadeia*, as ações e o conteúdo a serem estudados são os mesmos, considera-se o agrupamento de conceitos afins que envolvam o mesmo conteúdo a ser estudado.

Na análise individual dos itens de avaliação, os resultados mostram que itens do tipo certo/errado foram eficazes na identificação das dificuldades relacionadas com a Álgebra. O estudo dos erros em matemática realizados por Cury (2003), Cury e Konzen (2006), Brum e Cury (2013), Baldino e Cabral (1997), Feldes (2007) e Notari (2002) possibilitaram o desenvolvimento dos itens para avaliação *Matemática*, com a identificação das dificuldades associadas aos itens provenientes dos trabalhos dos referidos autores.

Excetuando os itens M12 e M38 da avaliação *Matemática*, e o item S6 da avaliação *Resolução de problemas*, todos os demais itens foram respondidos incorretamente por pelo menos um aluno. Ressalta-se que o objetivo principal da análise dos dados consistia em verificar a qualidade e a validade dos itens, assim como a organização dos mesmos para a avaliação diagnóstica denominada como ADAC. Logo, não era objetivo principal da pesquisa quantificar os alunos que erraram ou acertaram os itens, mas validar os itens e seus distratores. Isso considerando que, se um aluno responde incorretamente utilizando seu conhecimento, então existe alguma dificuldade relativa aos conceitos, procedimentos, ou na mobilização conjunta desses, que o levaram a considerar o distrator, ou item, como correto.

Sendo assim, a seleção de um distrator o torna válido ao propósito a que se destina quando o erro utilizado na sua construção é o motivo pelo qual o respondente o selecionou. Compreende-se que, na avaliação diagnóstica, o aluno não é avaliado pelo que sabe, mas pelo que não sabe. Por isso, é essencial que a avaliação possibilite obter a máxima informação sobre o respondente, motivo pelo qual cada resposta errada deve ser avaliada de maneira a identificar a razão da escolha da mesma.

Os dados armazenados no banco de dados do ADAC diferem da produção escrita na sua forma, mas também são carregados de informação sobre o conhecimento do aluno. Compreende-se que o item de múltipla escolha, de certa maneira, guia o aluno, ao restringir as opções para a expressão do seu conhecimento, mas a inclusão das opções de respostas *não sei*, *não entendi*, *não sei fazer*, *não tenho certeza*, permitiu que os alunos afirmassem categoricamente que seu conhecimento é inadequado em relação ao objeto de avaliação.

Um dos receios era de que as opções de respostas do tipo *não sei*, não fossem consideradas ou não fossem selecionadas pelos alunos participantes do experimento, frente ao fato de eles estarem habituados à seleção aleatória da opção de resposta, conhecida como “chute”, quando não sabem a resposta correta em avaliações seletivas, como as realizadas durante os cursos de formação. Os resultados mostram que os participantes não hesitaram em utilizá-las, representando 19% de todas as respostas analisadas, validando-as como uma importante fonte de informação sobre o conhecimento do aluno, ao declarar explicitamente a inadequação do conhecimento sobre o objeto de avaliação.

## CONCLUSÃO

A avaliação diagnóstica não tem o caráter de medição do conhecimento para classificação, aprovação ou reprovação do indivíduo, em função de critérios estabelecidos, mas procura, por meio de sinais e/ou características, identificar problemas cognitivos ou falhas de aprendizagem, de maneira que o professor e o aluno possam desenvolver ações para a melhora do processo de ensino-aprendizagem. Nesta pesquisa, a avaliação diagnóstica foi desenvolvida para ser utilizada pelos alunos como uma autoavaliação, parte integrante do seu processo de autogestão do conhecimento.

Considera-se que a pesquisa realizada levou a uma resposta positiva para o objetivo geral de investigar *um modelo de avaliação diagnóstica fundamentado na análise de erro, executável em um sistema de avaliação computacional que identifica as dificuldades dos alunos de engenharias na resolução de problemas envolvendo os conceitos de Derivadas*. Os objetivos específicos também foram alcançados, possibilitando a identificação das dificuldades dos participantes do experimento na resolução de problemas com Derivadas.

A lista de *Conceitos* do ADAC foi elaborada com base nas competências e habilidades matemáticas que os alunos de engenharia necessitam para a resolução de problemas com Derivadas, resultado do objetivo específico *definição da matriz de referência, fundamentada nas competências e habilidades, de acordo com o perfil dos egressos de um curso de engenharia e o conteúdo do Cálculo com o tema Derivadas*. Essas competências e habilidades matemáticas estão, de maneira direta ou indireta, vinculadas com as competências gerais identificadas pelo estudo conjunto dos critérios e padrões definidos pelas DCN e os critérios para os cursos de graduação em engenharia do ABET, EUR-ACE e o projeto Tuning-AHELO, que são:

- identificar, formular e resolver problemas de engenharia;
- conhecimento e compreensão dos princípios científicos e matemáticos subjacentes à engenharia;
- capacidade em aplicar conhecimentos matemáticos, científicos, tecnológicos e instrumentais à engenharia;
- conduzir experimentos e ter a capacidade de interpretar resultados;
- capacidade de comunicar-se eficientemente nas formas escrita, oral e gráfica.

O objetivo específico de *investigar itens de avaliação para compor o banco de questões do sistema de avaliação diagnóstica, fundamentado na teoria de erros* foi alcançado com o estudo das pesquisas realizadas sobre análise do erro e o desenvolvimento dos itens de avaliação e seus distratores, resultando em 79 itens de avaliação, com 37 itens para a avaliação *Resolução de problemas* e 42 para a avaliação *Matemática*.

O sistema de avaliação computacional denominado ADAC, as avaliações *Matemática* e *Resolução de problemas*, o experimento realizado e os dados produzidos por ele são resultados do objetivo específico de *implementar (desenvolver, aplicar e avaliar) o ADAC, realizando um experimento com estudantes de Engenharia, matriculados nas disciplinas de Cálculo, da Universidade Luterana do Brasil*. A validação dos itens e seus distratores, cujas análises foram realizadas no capítulo anterior, permite afirmar que o ADAC funcionou satisfatoriamente, identificando as dificuldades matemáticas dos participantes do experimento para a resolução de problemas envolvendo Derivadas.

As sugestões das alterações com o agrupamento dos conceitos *Derivadas Regra da Cadeia* com *Cálculo de Derivadas* e *Interpretação de derivada segunda* e *Ponto crítico* com *Conceito de Derivadas* serão realizadas no ADAC, que será disponibilizado para as turmas de Cálculo da ULBRA nos próximos semestres. A avaliação *Matemática* será divulgada entre os professores da disciplina de Cálculo 1, para que incentivem os alunos a verificarem seus conhecimentos matemáticos necessários para o desenvolvimento da disciplina e, se necessário, os orientem a cursar a disciplina de nivelamento, considerada como um pré-cálculo e disponibilizado sem custo para os estudantes da ULBRA, caso tenham interesse em revisar os conceitos considerados importantes para o bom desempenho na disciplina de Cálculo.

Considera-se que o tema da pesquisa realizada possui potencial para futuros trabalhos, buscando melhorias nas métricas para indicar as prováveis dificuldades matemáticas dos alunos dos cursos de graduação em engenharia. Como explicado nas análises dos itens, alguns distratores apresentam mais de um conceito ou erro técnico, mas, atualmente, o ADAC só permite a declaração e cadastro de um conceito por distrator. Durante o desenvolvimento do experimento, estudou-se a possibilidade de cadastrar mais de uma dificuldade por distrator, utilizando uma valoração ponderada, ou seja, mudando do modelo dicotômico *tem/não tem* para uma escala de valores que represente a

probabilidade da existência das dificuldades associadas por distrator e dotando o ADAC de um modelo probabilístico para a inferência das dificuldades do respondente.

Considerando a validação do ADAC como um instrumento para a autoavaliação do aluno, tem-se a validação funcional, obtida pela análise dos dados e a comprovação das dificuldades matemáticas observadas nos participantes, e a validação da importância do instrumento de autoavaliação dada por 85,7% dos alunos na entrevista de perfil.

Como informação secundária, mas importante para o planejamento das aulas de Cálculo da ULBRA, verificou-se, pelos resultados, que parte do grupo não possui um domínio adequado das conversões entre as representações de função, interferindo na compreensão do objeto matemático, a função de uma variável, com a formação limitada dos conceitos de valor e variação em um ponto. Estas dificuldades conceituais acabam impactando na identificação e uso de estratégias para a resolução de problemas, como observado em parte do grupo.

Os resultados também mostram dificuldades nas operações algébricas que resultaram no número de respostas incorretas na avaliação *Matemática*. Desse modo, o ADAC se mostrou útil ao pesquisador e professor das disciplinas de Cálculo da ULBRA, para conhecer as dificuldades de seus estudantes e, com isto, poder realizar um planejamento didático para suas aulas. Também, objetivou que os estudantes conheçam suas reais dificuldades e possam gerenciar seus estudos, melhorando seu desempenho nas disciplinas de Cálculo e outras afins.

Em linhas gerais, os resultados encontrados validaram o ADAC desenvolvido e considera-se que a pesquisa realizada com a avaliação diagnóstica é de interesse e contribui para a Área de Avaliação em Educação Matemática com a temática Derivadas e suas Aplicações.

## REFERÊNCIAS

\_\_\_\_\_. **Dicionário Brasileiro da Língua Portuguesa**. São Paulo: Editora Melhoramentos, 1975.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR ISO/IEC 9126-1Brasil, 2003. p. 1–21.

BALDINO, R. R.; CABRAL, T. C. B. Erro do significado ou significado do erro? In: **I Simpósio de Educação e Ensino**. São José do Rio Preto. p. 1–20.

BARICHELLO, L. **Análise de resoluções de problemas de Cálculo Diferencial em um ambiente de interação escrita**. 2008. Universidade Estadual Paulista, [s. l.], 2008.

BARUFI, M. C. B. **A construção / negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral**. 1999. Universidade de São Paulo, [s. l.], 1999.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. São Paulo: Contexto, 2002.

BIEMBENGUT, M. S. Modelaje matemático en la enseñanza de matemática en la ingeniería: posibilidades y dificultades. **Ingenium Revista de la Facultad de Ingeniería**, [s. l.], v. 16, n. 31, p. 93–107, 2015.

BORASI, R. **Towards a Reconceptualization of the Role of Errors in Education: The Need for New Metaphors**, 1988.

BORASI, R. Students' Constructive Uses of Mathematical Errors: A Taxonomy. In: **Annual Meeting of the American Educational Research Association**. San Francisco.

BORASI, R. **Reconceiving Mathematics Instruction: A Focus on Errors**. Norwood: NJ: Ablex Publishing, 1996.

BRASIL. Lei N° 9.394, de 20 de dezembro de 1996. In: , 1996.

BRASIL. CNE/CES 1362/20012001. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES1362.pdf>>. Acesso em: 31 maio. 2015.

BRASIL. Diretrizes Curriculares Nacionais do Curso de Graduação em Engenharia. **Diário Oficial da União**, [s. l.], v. Secção 1, p. 32, 2002. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES112002.pdf>>

BRASIL. **Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Guia de Elaboração e Revisão de Itens**. Brasília: MEC, 2010.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Guia de Elaboração e Revisão de Itens - Banco Nacional de itens - ENADE**. Brasília: MEC, 2011.

BROUSSEAU, G.; WERNER, T.; DAVIS, R. B. Observing student at work. In: CHRISTIANSEN, B.; HOWSON, A. G.; MOTTE (Eds.). **Perspective on Mathematics Education**. [s.l.] : Dordrecht: Reidel Publishing Company, 1986.

BRUM, L. D.; CURY, H. N. Análise de erros em soluções de questões de Álgebra: Uma pesquisa com alunos do Ensino Fundamental. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, [s. l.], v. 4, n. 1, p. 45–62, 2013.

BUNK, G. La transmisión de las competencias en la formación y perfeccionamiento profesionales de la RFA. **Revista Europea de Formación Profesional**, [s. l.], v. 1, p. 8–14, 1994. Disponível em: <[http://dialnet.unirioja.es/servlet/dfichero\\_articulo?codigo=131116](http://dialnet.unirioja.es/servlet/dfichero_articulo?codigo=131116)>

CABRAL, T. C. B.; BALDINO, R. R. **Cálculo Infinitesimal para um curso de Engenharia**, 2008. Disponível em: <<http://www.abenge.org.br/revista/index.php/abenge/article/view/31>>. Acesso em: 31 maio. 2015.

CANTORAL, R. **Teoría Socioepistemológica de la Matemática educativa**. México: Editorial Gedisa S.A., 2013.

CAVASOTTO, M. Dificuldades na Aprendizagem do Cálculo: O que os erros cometidos pelos alunos podem informar. [s. l.], v. 2, p. 146, 2010.

COLL, C. et al. **Os Conteúdos da Reforma. Ensino-aprendizagem de Conceitos, Procedimentos e Atitudes**. Porto Alegre: Artes Médicas, 2000.

COTTRILL, J. F. **Students' understanding of the concept of chain rule in first year calculus and the relation to their understanding of composition of functions**. 1999. Faculty of Purdue University, [s. l.], 1999. Disponível em: <<http://homepages.ohiodominican.edu/~cottrilj/thesis.pdf>>

COUTINHO, L. A Terceira Revolução Industrial e Tecnológica: As grandes Tendências de Mudança. **Revista Economia e Sociedade**, Campinas, v. 1, n. 1, p. 69–87, 1992.

CURY, H. N. Novas experiências de ensino e avaliação em Cálculo Diferencial e Integral. In: **Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia**. Natal. v. 27p. 786 – 791.

CURY, H. N. Análise de erros em cálculo diferencial e integral: resultados de investigações em cursos de engenharia. **Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia**, Rio de Janeiro, 2003. Disponível em: <<http://www.abenge.org.br/cobenges-antiores/2003/2003--xxxi-cobenge-rio-de-janeiro-rj>>. Acesso em: 16 out. 2014.



CURY, H. N. **Análise de Erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos.** Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2007.

CURY, H. N. **Retrospectiva histórica e perspectiva atuais da análise de erros em Educação Matemática,** 2009.

CURY, H. N. **Erros na aprendizagem de Matemática - Relatos de pesquisas e reflexões.** Santa Maria: Centro Universitário Franciscano, 2016.

CURY, H. N.; KONZEN, B. Classificação E Análise De Erros Em Álgebra. In: **IX Encontro Gaúcho de Educação Matemática.** Caxias do Sul: UCS, 2006.

DEPRESBITERIS, L.; TAVARES, M. R. **O desafio da avaliação da aprendizagem: Dos fundamentos a uma proposta inovadora.** São Paulo: EPU, 1989.

DEPRESBITERIS, L.; TAVARES, M. R. **Diversificar é preciso: instrumentos e técnicas de avaliação de aprendizagem.** São Paulo: Senac, 2009.

DOLZ, J.; BROCKART, J.-P. A noção de competência: qual é sua pertinência para o estudo da aprendizagem das ações da linguagem? In: **O enigma da competência em educação.** [s.l.] : Artmed, 2004. p. 33.

ECHEVERRÍA, M. del P. P.; POZO, J. I. Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender. In: POZO, J. I. (Ed.). **A solução de problemas: aprender a resolver, resolver a aprender.** Porto Alegre: Artmed, 1998.

ESPINOSA, M. P.; GARDEAZABAL, J. Optimal correction for guessing in multiple-choice tests. **Journal of Mathematical Psychology**, [s. l.], v. 54, n. 5, p. 415–425, 2010. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.jmp.2010.06.001>>

FELTES, R. Z. Análise de erros em Potenciação e radiciação: um estudo com alunos de Ensino Fundamental e Médio. [s. l.], p. 1–136, 2007. Disponível em: <<http://tardis.pucrs.br/dspace/bitstream/10923/3108/1/000388459-Texto+Completo-0.pdf>>

FERNANDES FILHO, O. P. O desenvolvimento cognitivo e a reprovação no curso de engenharia. **XXIX Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia**, Campinas, p. 15–22, 2001. Disponível em: <<http://www.abenge.org.br/CobengeAnteriores/2001/trabalhos/MTE006.pdf>>. Acesso em: 9 nov. 2014.

FERREIRA, D. H. L.; BRUMATTI, R. N. M. Dificuldades em matemática em um curso de engenharia elétrica. **Horizontes**, [s. l.], v. 27, n. 1, p. 51–60, 2005.

FLORES, J. G. La evaluación de competencias laborales. **Educación XX1**, [s. l.], v. 10, n. 0, p. 83–106, 2007. Disponível em: <<http://revistas.uned.es/index.php/educacionXX1/article/view/297>>

GARNICA, A. V. M. Erros e leitura positiva: Proposta, exercícios e possibilidades. In: **I Jornada Educação Matemática**. Passo Fundo.

GIL, A. C. **Estudo de Caso**. São Paulo: Atlas, 2009.

GODOY, E. V.; ALMEIDA, E. De. A evasão nos cursos de Engenharia e a sua relação com a Matemática : uma análise a partir do COBENGE. **Educação Matemática Debate**, [s. l.], v. 1, n. 3, p. 339–361, 2017.

HADAR, N. M.; ZASLAVSKY, O.; INBAR, S. An Empirical Classification Model for Errors in High School Mathematics. **Journal for Research in Mathematics Education**, [s. l.], v. 18, n. 1, p. 3–14, 1987.

KILPATRICK, J.; GÓMEZ, P.; RICO, L. **Educación Matemática**. [s.l: s.n.]. Disponível em: <papers3://publication/uuid/7CAE486A-932C-4F0E-BC11-3982B0D985F7>

LANNIN, J. K.; BARKER, D. D.; TOWNSEND, B. E. How students view the general nature of their errors. **Educational Studies in Mathematics**, [s. l.], v. 66, n. 1, p. 43–59, 2007.

LE BOTERF, G. **Ingeniería de las competencias**. [s.l: s.n.]. v. 4

LOPES, A. Algumas reflexões sobre a questão do alto índice de reprovação nos cursos de Cálculo da UFRGS. **Matemática Universitária**, [s. l.], n. 26/27, p. 123–146, 1999. Disponível em: <<http://matematicauniversitaria.ime.usp.br/>>. Acesso em: 9 nov. 2014.

LUCKESI, C. C. O que é mesmo o ato de avaliar a aprendizagem? **Pátio**, [s. l.], v. 12, n. Fev/Mar, 2000.

LUCKESI, C. C. **Avaliação da aprendizagem componente do ato pedagógico**. 1. ed. São Paulo: Cortez, 2011.

LÜDKE, H. A.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Evolução da Pesquisa em Educação**. São Paulo: EPU, 1986.

MARTINS, G. de A. **Manual para a elaboração de monografias e dissertações**. 2. ed. São Paulo.

MATAI, P. H. L. dos S.; MATAI, S. ENSINO COOPERATIVO: O Conhecimento das Competências. **Revista de Ensino de Engenharia**, [s. l.], v. 24, n. 2, p. 27–34, 2005.

MENDES, O. M. Avaliação formativa no ensino superior: Reflexões e alternativas possíveis. [s. l.], 2005.

MONTEIRO, F. F.; ALVES, C. B.; MELLO, B. A. Efeito da penalização em itens dicotômicos no ensino de Física. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, [s. l.], v. 40, n. 2, p. e-2401, 2018.

MOREN, E. B. da S.; DAVID, M. M. M. S.; MACHADO, M. da P. L. Diagnostico e Analise de Erros em Matematica. **Caderno de Pesquisas**, [s. l.], n. 83, p. 43–51, 1992.

NAKAO, OSVALDO SHIGUERU; BORGES, M. N.; SOUZA, EDUARDO PINHEIRO DE; GRIMONI, J. A. Mapeamento de Competências dos Formandos da Escola Politécnica da USP. **Revista de Ensino de Engenharia**, [s. l.], v. 31, n. 1, p. 31–39, 2003.

NOTARI, A. M. **Simplificação de frações aritméticas e algébricas : Um diagnóstico comparativo dos procedimentos**. 2002. Pontifícia Universidade Católica – São Paulo, [s. l.], 2002.

OCHOA, J. A. V. **La comprensión de la tasa de variación para una aproximación al concepto de derivada. Una análise desde la teoría de Pirie y Kieren**. 2011. Universidad de Antioquia, [s. l.], 2011. Disponível em:  
<<http://www.rc.unesp.br/gpimem/downloads/teses/lacompresion-tasadevariacion.pdf>>

OECD. **A Tuning-AHELO Conceptual Framework of Expected/Desired learning Outcomes in Engineering**. 2011. Disponível em: <<http://www.oecd.org/edu/skills-beyond-school/43160507.pdf>>. Acesso em: 8 jun. 2017.

OLIVEIRA, M. M. De. **Como fazer pesquisa qualitativa**. 3. ed. Rio de Janeiro: Vozes, 2007.

PERRENOUD, P. Construir as Competências desde a Escola. [s. l.], p. 90, 1999. a.

PERRENOUD, P. **Avaliação: da excelência à regulação das aprendizagens-entre duas lógicas**. Porto Alegre: Artmed, 1999. b.

PINTO, J. J. M. S. **Métodos infinitesimais de Análise Matemática**. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2000.

PISA. Student performance in mathematics, reading and science (Vol.1). **PISA 2012 results: What students know and can do**, [s. l.], v. 1, p. 1–564, 2014. Disponível em:  
<<https://www.oecd.org/pisa/aboutpisa/9-How-PISA-D-measures-math-literacy.pdf>>. Acesso em: 19 ago. 2017.

POCHULU, M. Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la matemática en alumnos que ingresan a la universidad. **Revista Iberoamericana de Educación**, [s. l.], p. 1–15, 2009. Disponível em:  
<<http://www.cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/eudoxus/article/viewArticle/347>>

POLYA, G. **How to Solve It**, 1946. Disponível em:  
<<http://www.jstor.org/stable/3609122?origin=crossref>>

POLYA, G. O ensino por meio de problemas. **Revista do Professor de Matemática**, [s. l.], v. 7, p. 11–16, 1985. Disponível em:

<[http://ucbweb.castelobranco.br/webcaf/arquivos/13381/6450/TRProblemas\\_02.pdf](http://ucbweb.castelobranco.br/webcaf/arquivos/13381/6450/TRProblemas_02.pdf)>. Acesso em: 31 mar. 2017.

RABELO, M. L. **Avaliação Educacional: fundamentos, metodologia e aplicações no contexto brasileiro**. Rio de Janeiro: Editora da ULBRA, 2013.

RADATZ, H. Error Analysis in Mathematics Education. **Journal for Research in Mathematics Education**, [s. l.], v. 10, n. 3, p. 163–172, 1979.

RADATZ, H. Students' Errors in the Mathematical Learning Process: a Survey\*. **For the Learning of Mathematics**, [s. l.], v. 1, n. 1, p. 16–20, 1980.

REIS, F. da S. **A tensão entre rigor e intuição no ensino de cálculo e análise: A visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos**. 2001. Faculdade de Educação, [s. l.], 2001.

REZENDE, W. M. **O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica**. 2003. Universidade de São Paulo, [s. l.], 2003. Disponível em: <[http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-27022014-121106/publico/WANDERLEY\\_REZENDE.pdf](http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-27022014-121106/publico/WANDERLEY_REZENDE.pdf)>. Acesso em: 1 nov. 2014.

RICO, L. Errores en el aprendizaje de las matemáticas. In: KILPATRICK, J.; GÓMEZ, P.; RICO, L. (Eds.). **Educación Matemática**. Bogotá.

RUSSEL, M. K.; AIRASIAN, P. W. **Avaliação em sala de aula**. 7. ed. Porto Alegre: Mc Graw Hill, 2014.

SCHROEDER, T. L.; LESTER JR, F. K. Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving. In: **New Directions for Elementary School Mathematics**. [s.l.] : NCTM, 1989. p. 31–41.

SIEGEL, M.; BORASI, R.; FONZI, J. Supporting Students' Mathematical Inquiries through Reading. **Journal for Research in Mathematics Education**, [s. l.], v. 29, n. 4, p. 378–413, 1998. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/749857>>

SILVA, E. L. Da; MENEZES, E. M. **Metodologia da Pesquisa e Elaboração de Dissertação**. 3. ed. Florianópolis.

TRIVIÑOS, A. N. da S. **Introdução à pesquisa em ciências sociais: a pesquisa qualitativa em educação**. São Paulo: Atlas, 2008.

UFRGS. **Plano de Ensino - Cálculo e Geometria Analítica I – A**. 2010. Disponível em: <<http://www.mat.ufrgs.br/~dmpa/disciplinas/planos/planos2010/101MAT01353.pdf>>. Acesso em: 29 ago. 2017.

ULBRA. **Ementas do Curso de Matemática Licenciatura**. 2017. Disponível em:  
<<http://www.ulbra.br/upload/c7c920b8e17f092d1a3fedee14575a9f.pdf?1504017695>>.  
Acesso em: 29 ago. 2017.

YIN, R. K. **Estudo de caso: Planejamento e Métodos**. Porto Alegre: Bookman, 2001.

ZUFFO, A. J. **A info era – o imenso desafio do futuro**. [s.l: s.n.].

## APÊNDICES

**APÊNDICE A – Termo de consentimento e livre esclarecido**

## TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

**1. IDENTIFICAÇÃO DO PROJETO DE PESQUISA**

Título do Projeto: Avaliação Diagnóstica Auxiliada por Computador: Identificação das dificuldades referentes ao Cálculo Diferencial de alunos de Cursos de Engenharia para a resolução de problemas

Área do Conhecimento: Ciências Humanas	Número de Participantes: 40	Total:40
---	--------------------------------	----------

Curso: Programa de pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática	Unidade: Canoas
---	-----------------

Projeto Multicêntrico	<input type="checkbox"/>	Sim	<input checked="" type="checkbox"/>	Não	<input type="checkbox"/>	Nacional	<input type="checkbox"/>	Internacional	Cooperação Estrangeira	<input type="checkbox"/>	Sim	<input checked="" type="checkbox"/>	Não
-----------------------	--------------------------	-----	-------------------------------------	-----	--------------------------	----------	--------------------------	---------------	------------------------	--------------------------	-----	-------------------------------------	-----

Patrocinador da pesquisa: -

Instituição onde será realizado: Universidade Luterana do Brasil

Nome dos pesquisadores e colaboradores: Agostinho Iaqchan Ryokiti Homa

Você está sendo convidado (a) para participar do projeto de pesquisa acima identificado. O documento abaixo contém todas as informações necessárias sobre a pesquisa que estamos fazendo. Sua colaboração neste estudo será de muita importância para nós, mas se desistir, a qualquer momento, isso não causará nenhum prejuízo para você.

**2. IDENTIFICAÇÃO DO PARTICIPANTE DA PESQUISA**

Nome:	Data de Nasc.:	Sexo:
Nacionalidade:	Estado Civil:	Profissão:
RG:	CPF/MF:	Telefone:
Endereço:		E-mail:

**3. IDENTIFICAÇÃO DO PESQUISADOR RESPONSÁVEL**

Nome: Agostinho Iaqchan Ryokiti Homa	Telefone: 51 99802-1620
Profissão: Professor	Registro no Conselho N°:
E-mail: iaqchan@ulbra.br	
Endereço: R 12 de outubro 475, Porto Alegre	

Eu, participante da pesquisa, abaixo assinado(a), após receber informações e esclarecimento sobre o projeto de pesquisa, acima identificado, concordo de livre e espontânea vontade em participar como voluntário(a) e estou ciente:

### **1. Da justificativa e dos objetivos para realização desta pesquisa.**

As disciplinas que apresentam o Cálculo Diferencial e Integral estão entre as com maior índice de reprovação. Estudos realizados analisando os erros matemáticos dos estudantes apontam para a relevância do estudo sobre quais as dificuldades matemáticas dos alunos de Engenharias na resolução de problemas com a temática de Derivadas.

### **2. Do objetivo de minha participação.**

A participação voluntária do estudante, realizando a avaliação diagnóstica e a entrevista com o pesquisador, tem por objetivo validar o sistema de Avaliação Diagnóstica Auxiliada por Computador que servirá para que os alunos de Engenharias verifiquem suas dificuldades matemáticas na resolução de problemas com a temática de Derivadas. Comprometendo-me a responder as questões da avaliação com base somente nos meus conhecimentos matemáticos não selecionando respostas ao acaso.

### **3. Do procedimento para coleta de dados.**

Será realizada a pesquisa com a participação dos alunos da Engenharias em duas etapas, na primeira etapa o aluno realizará uma avaliação diagnóstica em um sistema computacional, resolvendo problemas envolvendo a temática de derivadas.

O participante deverá responder as perguntas utilizando do seu conhecimento matemático e, caso não saiba ou não tenha certeza, deverá selecionar a opção correspondente que melhor indicar a situação. O objetivo é que ao término da avaliação, o participante tenha um resumo sobre suas dificuldades matemáticas e conceitos necessários para a resolução de problemas com o tema de Derivadas.

Na segunda etapa será realizada uma entrevista com os participantes para verificar e validar as dificuldades identificadas pelo sistema de avaliação, para esse objetivo serão revistas as questões da avaliação que o participante errou para verificar se os motivos do erro são os mesmos dos identificado pelo sistema computacional. As entrevistas ocorrerão em horário agendado entre o participante e o pesquisador ocorrendo o atendimento individualizado em sala fechada nas dependências do programa de pós-graduação que o pesquisador está vinculado localizado na mesma instituição do participante.

### **4. Da utilização, armazenamento e descarte das amostras.**

As informações obtidas da base de dados e das entrevistas serão utilizadas para validar o sistema diagnóstico auxiliado por computador para a tese de doutorado do pesquisador e será replicada em publicações científicas da área de pesquisa. A confidencialidade dos participantes será mantida e em caso de

### **5. Dos desconfortos e dos riscos.**

A avaliação diagnóstica é baseada na WEB permitindo que o aluno participe utilizando qualquer dispositivo computacional, até mesmo o celular, em qualquer lugar. Deste modo não há a exposição entre os pares que possa causar constrangimento durante a execução da avaliação. Os dados do respondente só serão acessados pelo pesquisador através de usuário e senha de administração do site e pelo aluno que recebe o relatório final por e-mail fornecido pelo próprio aluno no início da avaliação. As entrevistas ocorrerão em sala fechada nas dependências do programa de pós-graduação, que o pesquisador está vinculado, pertencente a mesma instituição dos participantes. Quaisquer desconfortos que algum participante tiver em relação ao seu próprio desempenho e que que forem identificados durante a pesquisa serão considerados e, se o participante desejar, suas informações serão desconsideradas na análise dos dados.



## **6. Dos benefícios.**

A pesquisa objetiva estudar e desenvolver uma avaliação diagnóstica auxiliada por computador permitindo que o estudante identifique suas dificuldades relacionadas com os conteúdos matemáticos que afetam sua aprendizagem. Dentro de uma perspectiva de auto regulação da aprendizagem, o estudo proposto permitirá que os estudantes, após identificarem suas dificuldades, tenham a possibilidade de tomarem ações para superarem suas dificuldades. Bem como, os professores, conhecendo as dificuldades dos estudantes podem realizar planejamentos de acordo com a realidade que estarão atuando, beneficiando e qualificando o processo de ensino e aprendizagem.

## **7. Da isenção e ressarcimento de despesas.**

A minha participação é voluntária e isenta de despesas e não receberei ressarcimento porque não terei despesas na participação da pesquisa que será realizada durante as

## **8. Da forma de acompanhamento e assistência.**

O pesquisador estará disponível para dirimir as dúvidas em relação à pesquisa, seus métodos e procedimentos. Os resultados individuais da avaliação estarão disponíveis durante todo o período podendo ser requisitado ao pesquisador a qualquer momento.

## **10. Da liberdade de recusar, desistir ou retirar meu consentimento.**

Tenho a liberdade de recusar, desistir ou de interromper a colaboração nesta pesquisa no momento em que desejar, sem necessidade de qualquer explicação. A minha desistência não causará nenhum prejuízo à minha saúde ou bem-estar físico emocional.

## **11. Da garantia de sigilo e de privacidade.**

Os resultados obtidos durante este estudo serão mantidos em sigilo, mas concordo que sejam divulgados em publicações científicas, desde que meus dados pessoais não sejam mencionados.

## **12. Da garantia de esclarecimento e informações a qualquer tempo.**

Tenho a garantia de tomar conhecimento e obter informações, a qualquer tempo, dos procedimentos e métodos utilizados neste estudo, bem como dos resultados finais, desta pesquisa. Para tanto, poderei consultar o **pesquisador responsável**. Em caso de dúvidas não esclarecidas de forma adequada pelo(s) pesquisador (es), de discordância com os procedimentos, ou de irregularidades de natureza ética poderei ainda contatar o **Comitê de Ética em Pesquisa em Seres Humanos da ULBRA Canoas(RS)**, com endereço na Rua Farroupilha, 8001 – Prédio 14 – Sala 224, Bairro São José, CEP 92425-900 - telefone (51) 3477-9217, e-mail [comitedeetica@ulbra.br](mailto:comitedeetica@ulbra.br)

Declaro que obtive todas as informações necessárias e esclarecimento quanto às dúvidas por mim apresentadas e, por estar de acordo, assino o presente documento em duas vias de igual conteúdo e forma, ficando uma em minha posse.

\_\_\_\_\_( ), \_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_.

\_\_\_\_\_  
Pesquisador Responsável pelo Projeto

\_\_\_\_\_  
Participante da Pesquisa e/ou Responsável

APÊNDICE B – Questionário de perfil do participante e percepção da avaliação

## Perfil do participante e percepção da avaliação

### Perfil do Participante

---

Estas perguntas são para conhecer você e sua vida escolar

1. Nome \*

---

2. E-mail \*

---

3. Qual sua idade? \*

---

4. Você trabalha quantas horas por semana? \*

*Marcar apenas uma oval.*

40h ou mais

20h ou mais

Não trabalho

5. Você fez o Ensino Médio em \*

*Marcar apenas uma oval.*

colégio público

colégio particular

6. Qual ano terminou o Ensino Médio? \*

---

7. Qual ano você começou o seu curso de graduação? \*

---

**8 Qual seu curso de graduação? \***

Marque todas que se aplicam.

- Engenharia Ambiental e Sanitária
- Engenharia Civil
- Engenharia de Produção
- Engenharia Elétrica
- Engenharia Mecânica
- Engenharia Mecânica Automotiva
- Engenharia Química
- Outro: \_\_\_\_\_

**9. Qual Ano/Semestre você fez a disciplina de Cálculo 1 \***

Marcar apenas uma oval.

- 2018/1
- 2017/2
- 2017/1
- 2016/2
- 2016/1
- 2015/2
- 2015/1
- 2014/2
- 2014/1
- Antes de 2014

**10. Qual a sua média? \***

Marcar apenas uma oval.

- 10
- 9
- 8
- 7
- 6

**11. Você teve que fazer a prova de substituição de grau? \***

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não

12. **Você fez mais de uma vez a disciplina de Cálculo 1? \***

*Marcar apenas uma oval.*

Não

Sim

13. **O conteúdo de derivadas é importante no seu curso? \***

*Marcar apenas uma oval.*

	1	2	3	4	5	
Pouco importante	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	Muito importante

14. **Porque você acha isso?**

\_\_\_\_\_

15. **Depois da apresentação de um conteúdo em sala de aula você estuda eles em casa ou em outro lugar? \***

*Marcar apenas uma oval.*

	1	2	3	4	5	
Não estudo	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	Reviso e estudo

16. **Você faz os exercícios propostos pelo professor em casa? \***

*Marcar apenas uma oval.*

	1	2	3	4	5	
Não faço nenhum	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	Faço todos

17. **Você usa a internet para estudar alguma coisa sozinho (que não seja para as aulas), para aprender por conta própria algum assunto que ache interessante? \***

*Marcar apenas uma oval.*

	1	2	3	4	5	
Nunca, pois preciso que alguém me explique.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	Sempre, sobre vários assuntos.

18. **Você acha interessante uma avaliação diagnóstica que auxilie o aluno a identificar suas dificuldades? \***

*Marcar apenas uma oval.*

	1	2	3	4	5	
Pouco	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	Muito

## Sobre a avaliação Resolução de problemas

---

As perguntas são referentes a sua percepção sobre a avaliação com as questões de Resolução de problemas envolvendo o conceito de derivadas.

19. **Você considera que o sistema identificou adequadamente suas dificuldades? \***

*Marcar apenas uma oval.*

1	2	3	4	5		
Não identificou	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	Identificou corretamente

20 **Como um futuro engenheiro você acha que deveria saber resolver os problemas apresentados? \***

*Marcar apenas uma oval.*

1	2	3	4	5		
Não, não vejo porque saber todas	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	Sim, deveria saber resolver todas

21. **Qual o grau de dificuldade que você atribui às questões?**

*Marcar apenas uma oval.*

1	2	3	4	5		
Fácil	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	Difícil

22. **A que você atribui suas dificuldades? (Pode marcar mais de uma opção) \***

*Marque todas que se aplicam.*

- Disciplina de cálculo 1 não foi adequadamente ministrada pelo professor
- Disciplina de cálculo 1 não foi adequadamente aprendida
- Não entendo bem o que são as derivadas
- Errei por distração
- Não sei o motivo
- Outro: \_\_\_\_\_

23. **Faça um comentário sobre a avaliação**

---



---



---



---



---

## Sobre a avaliação Matemática

---

As perguntas são referentes a sua percepção sobre a avaliação com as questões de Matemática básica.

24. **Você considera que o sistema identificou adequadamente suas dificuldades? \***

Marcar apenas uma oval.

1	2	3	4	5		
Não identificou	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	Identificou corretamente

25. **Você acha que deveria saber resolver corretamente todos os itens? \***

Marcar apenas uma oval.

	1	2	3	4	5	
Não, não vejo porque saber todas	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	Sim, deveria saber resolver todas

26. **Qual o grau de dificuldade que você atribui às questões? \***

Marcar apenas uma oval.

1	2	3	4	5		
Fácil	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	Difícil

27. **A que você atribui suas dificuldades? (Pode marcar mais de uma opção) \***

Marque todas que se aplicam.

- Ensino Fundamental/Médio fraco
- Falta de estudo
- Errei por distração
- Não sei o motivo
- Outro: \_\_\_\_\_

28. **Faça um comentário sobre a avaliação Matemática**

---



---



---



---



---