UNIVERSIDADE LUTERANA DO BRASIL

PRÓ-REITORIA ACADÊMICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

O ESTUDO DE FUNÇÕES NO ENSINO MÉDIO: UMA INVESTIGAÇÃO SOB A PERSPECTIVA DO ENFOQUE ONTOSSEMIÓTICO DO CONHECIMENTO E DA INSTRUÇÃO MATEMÁTICA

VALMIR NINOW

Canoas, 2019

UNIVERSIDADE LUTERANA DO BRASIL

PRÓ-REITORIA ACADÊMICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

VALMIR NINOW

O ESTUDO DE FUNÇÕES NO ENSINO MÉDIO: UMA INVESTIGAÇÃO SOB A PERSPECTIVA DO ENFOQUE ONTOSSEMIÓTICO DO CONHECIMENTO E DA INSTRUÇÃO MATEMÁTICA

Tese apresentada no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil para obtenção do título de Doutor em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Carmen Teresa Kaiber

Canoas, 2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação – CIP

N716e Ninow, Valmir.
O estudo de funções no Ensino Médio : uma investigação sob a perspectiva do enfoque ontossemiótico do conhecimento e da instrução matemática / Valmir Ninow. – 2019.
209 f. : il.

Tese (doutorado) – Universidade Luterana do Brasil, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Canoas, 2019.
Orientadora: Profa. Dra. Carmen Teresa Kaiber.

1. Funções. 2. Ensino Médio. 3. Enfoque ontossemiótico. 4. Idoniedade didática. 5. Educação matemática. I. Kaiber, Carmen Teresa. II. Título.

CDU 517.5

Bibliotecária responsável – Heloisa Helena Nagel – 10/981

VALMIR NINOW

O ESTUDO DE FUNÇÕES NO ENSINO MÉDIO: UMA INVESTIGAÇÃO SOB A PERSPECTIVA DO ENFOQUE ONTOSSEMIÓTICO DO CONHECIMENTO E DA INSTRUÇÃO MATEMÁTICA

Orientadora: Profª. Dr.ª Carmen Teresa Kaiber

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Ensino de Ciências e Matemática

Área de Concentração: Ensino e Aprendizagem em Ensino de Ciências e Matemática

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr.ª Eleni Bisognin- Universidade Franciscana (UNIFRA)

Prof. Dr.ª Maria Elaine Santos Soares- Instituto Federal Sul-Rio-Grandense (IFSul)

Prof.ª Dr.ª Claudia Lisete Oliveira Groenwald - Universidade Luterana do Brasil (ULBRA)

Prof. Dr. Arno Bayer- Universidade Luterana do Brasil (ULBRA)

AGRADECIMENTOS

À minha orientadora, professora Dra. Carmen Teresa Kaiber, pelo carinho, amizade, dedicação e paciência que sempre teve comigo. Agradeço suas contribuições e orientações, pois sem ela este trabalho não teria sido realizado.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil, pelos conhecimentos compartilhados, pelas críticas, sugestões e contribuições nas disciplinas do Doutorado, que muito auxiliaram no desenvolvimento deste estudo.

Aos professores, Dra. Eleni Bisognin, Dra. Maria Elaine Santos Soares, Dra. Claudia Lisete Oliveira Groenwald e Dr. Arno Bayer, pelas contribuições na qualificação, com observações e sugestões enriquecedoras para a pesquisa.

Aos colegas do PPGECIM, pelos conhecimentos compartilhados, trabalhos e estudos realizados e, especialmente, pelas amizades construídas.

À Direção da escola em que esta pesquisa foi realizada, por autorizarem a aplicação do conjunto de atividades, e aos alunos, pela dedicação e participação.

À minha família, que sempre me apoiou e incentivou, para seguir estudando e pela compreensão que tiveram nos muitos momentos em que não pude estar presente. Em especial, a minha esposa, Dra. Clarissa de Assis Olgin, por toda ajuda nos momentos difíceis, pelos momentos de estudo, finais de semana de discussões, pela paciência em ler, ouvir e fazer sugestões neste trabalho.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela bolsa de doutorado, que viabilizou o desenvolvimento desta pesquisa.

De nada adianta provocações de mudanças no processo de ensino/aprendizagem que não discutam a maneira como o jovem aprende e como constrói o seu conhecimento. Qualquer proposta de educação deve considerar, em primeiro plano, o aluno, suas necessidades, expectativas, interesses, aspirações e possibilidades (BARRETO, 2009).

RESUMO

Apresentam-se neste trabalho os resultados, análises e reflexões em torno de uma investigação que teve como objetivo o desenvolvimento e a aplicação de uma proposta de estudos com foco no ensino e aprendizagem de Funções no Ensino Médio, sob a perspectiva do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (EOS). A proposta de estudo buscou retomar, aprofundar e desenvolver conceitos, definições e procedimentos pertinentes a Funções, contemplando os seguintes tópicos: Função, Função Afim, Função Quadrática, Função Modular, Função Exponencial, Função Logarítmica e Funções Trigonométricas. O trabalho foi planejado e desenvolvido levando em consideração as indicações postas nos documentos oficiais, o currículo da escola, pesquisas na área, os significados de referência do objeto matemático Função e os aportes teóricos e metodológicos do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática. No que se refere à estrutura dos materiais de estudos, os mesmos eram compostos por conjuntos de situações-problema para cada tópico estudado, materiais construídos no Power Point, objetos de aprendizagem, vídeos pré-selecionados e uso do *software* Geogebra, além de, atividades de construção, manipulação e resolução de problemas. A proposta de estudo foi implementada junto a um grupo de 26 estudantes de um primeiro ano do Ensino Médio de uma Escola da Rede Privada de Educação do Município de Farroupilha/RS ao longo do ano de 2018. Os estudantes realizaram o trabalho em sala de aula, no laboratório de informática e em ambientes fora da escola. Buscando captar e registrar os dados produzidos ao longo da investigação, a pesquisa contou com a observação participante do pesquisador, questionários aplicados aos estudantes, a produção dos mesmos no desenvolvimento das atividades, articulados no contexto de uma pesquisa de base qualitativa. A análise produzida a partir da aplicação da proposta de estudo foi realizada, tomando como referência os componentes e indicadores da Idoneidade Didática, nível de análise proposto no âmbito do EOS. Assim, produziu-se uma análise voltada para a idoneidade do material produzido e disponibilizado, no que se refere a sua potencialidade frente à produção de conhecimentos, no âmbito das temáticas abordadas, dos recursos utilizados e da sua consonância e pertinência ao que está estabelecido nos documentos oficiais nacionais e ao currículo da escola e para os significados pessoais alcançados pelos estudantes frente ao material de estudo. As análises produzidas apontaram que a proposta atende aos pressupostos estabelecidos pelo EOS, no que se refere às dimensões epistêmica e cognitiva. O domínio progressivo de situações-problema envolvendo os diferentes tipos de funções e a utilização de diferentes formas de representação dos objetos matemáticos, bem como o estabelecimento de relações, se constituíram em pontos fortes na implementação da proposta junto aos estudantes. As maiores fragilidades foram encontradas no desenvolvimento e apresentação de argumentação matemática no enfrentamento de situações-problema e na produção de sínteses, tanto no que se refere ao material produzido como nos significados atribuídos e manifestados pelos estudantes. Já as dimensões interacional, emocional, ecológica e mediacional atingiram altas idoneidades em grande parte dos seus componentes e indicadores, ressaltando-se as interações entre os estudantes, com o material e com o professor/pesquisador, bem como o interesse no estudo e a diversidade de recursos utilizados. Considera-se que a proposta de estudos envolvendo Funções contemplou os componentes e indicadores da Idoneidade Didática do Enfoque Ontossemiótico de modo satisfatório e possibilitou aos estudantes uma forma de estudo diferenciada, onde cada um tem teve a possibilidade de seguir o seu ritmo de aprendizagem, retomando, aprofundando e desenvolvendo conceitos, noções, definições e procedimentos, visando à superação de eventuais conflitos e obstáculos no aprendizado de Funções.

Palavras-chave: Funções; Ensino Médio; Enfoque Ontossemiótico; Idoneidade Didática.

ABSTRACT

This paper presents the results, analyzes and reflections on an investigation that aimed the development, application and the proposal of studies focusing on teaching and learning Functions in High School, from the perspective of the Ontosemiotic Approach from the knowledge and mathematical instruction (OSA). The study proposal sought to resume, deepen and develop concepts, definitions and procedures relevant to Functions, covering the following topics: Function, Affine Function, Quadratic Function, Modular Function, Exponential Function, Logarithmic Function and Trigonometric Functions. The work was planned and developed taking into consideration the indications given in the official documents, the school curriculum, research in the area, the reference meanings of the mathematical object Function and the theoretical and methodological contributions of the Ontosemiotic approach from the knowledge and mathematical instruction. Regarding the structure of the study materials, they were composed of problem situation sets for each topic studied, Power Point-built materials, learning objects, pre-selected videos and use of Geogebra software, as well as, construction activities, handling and problem solving. The study proposal was implemented with a group of 26 first year high school students from a private school network in the city of Farroupilha / RS, in 2018. The students performed the work both in class in the computer lab and out-of-school environments. Seeking to capture and record the data produced throughout the investigation, the research had the participant observation of the researcher, questionnaires applied to students, their production in the development of activities, articulated in the context of a qualitative research. The analysis produced from the application of the study proposal was performed taking as reference the components and indicators of Didactic Suitability, level of analysis proposed within the scope of the OSA. Thus, an analysis focused on the suitability of the material produced and made available, regarding its potentiality in relation to the production of knowledge in the scope of the themes addressed, the resources used and their consonance and relevance to what is established in the national official documents and the school curriculum, as well as for the personal meanings achieved by the students regarding the study material. The analyzes produced showed that the proposal meets the assumptions established by the Ontosemiotic Approach, regarding epistemic and cognitive dimensions. The progressive mastery of problem situations involving the different types of functions and the use of different forms of representation of mathematical objects, as well as the establishment of relationships, were strengths in the implementation of the proposal with the students. The greatest weaknesses were found in the development and presentation of mathematical argumentation in coping with problem situations and in the production of syntheses, both regarding the material produced and the meanings attributed and manifested by the students. The interactional, emotional, ecological and mediational dimensions, on the other hand, reached high reputations in most of its components and indicators, highlighting the interactions between students, with the material and also with the teacher / researcher, as well as the interest in the study and diversity of resources used. It is considered that the proposal of studies involving Functions has satisfactorily addressed the components and indicators of the Ontosemiotic Approach Didactic Suitability and allowed students a different form of study, where each student has had the possibility to follow their learning pace, resuming, deepening and developing concepts, notions, definitions and procedures, aiming at overcoming any conflicts and obstacles in the learning of Functions

Keywords: Functions. High School. Ontosemiotic Approach. Didactic Suitability

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Quando se observa o currículo de Matemática do Ensino Médio, em relação aos conteúdos a serem desenvolvidos, tomando como referência os documentos oficiais editados pelo Ministério da Educação, a partir da promulgação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (BRASIL, 1996), Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 1999), Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL 2002), Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006) e Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018), percebe-se um conteúdo que é basilar para o desenvolvimento da Matemática no Ensino Médio e Cursos Superiores da área científica e tecnológica: Funções.

Com relação ao estudo desse conteúdo, Kaiber (2002) pondera que a introdução do conceito de Função junto aos estudantes, em muitos casos, baseia-se na ideia elementar de par ordenado e no estabelecimento de relações entre conjuntos. Destaca, ainda, que, aliada à organização linear do currículo de Matemática, essa abordagem transformou o estudo de Funções, no Ensino Médio e nos primeiros semestres dos cursos universitários da área científica e tecnológica, em algo formal e abstrato, trazendo dificuldades no entendimento de ideias, noções e conceitos sobre esses conteúdos. Considera-se que, atualmente, os apontamentos da autora ainda são válidos, embora se reconheça que há uma tentativa crescente de atribuir significados ao estudo de Funções considerando, principalmente, aplicações, o que pode ser percebido, particularmente, em recomendações curriculares e em livros didáticos atuais.

Com o intuito de identificar e buscar possíveis soluções para as dificuldades, tanto do ensino quanto da aprendizagem de Funções, pesquisadores e professores buscam desenvolver estratégias para modificar esse cenário, incorporando, nas práticas pedagógicas, a inserção de tecnologias que auxiliam na construção e interpretação de gráficos e tabelas, a apresentação e a resolução de situações-problema que se aproximam da realidade e do cotidiano dos estudantes e a utilização de diferentes metodologias. Porém, percebe-se que, apesar das investigações, reflexões e mudanças acerca do processo de ensino e aprendizagem de Funções, ainda há espaços para investigações e análises sobre questões que envolvem o ensino, a aprendizagem e as dificuldades enfrentadas pelos estudantes na compreensão, assimilação e aplicações desse conteúdo, buscando novas perspectivas para o tratamento de tais questões.

Pondera-se, neste contexto, sobre a importância e necessidade de se olhar para o estudo de Funções no Ensino Médio, considerando a complexidade de relações que o conceito de Função como objeto mental exige, sendo necessário lançar um olhar não só para aspectos históricos e epistemológicos envolvidos, mas também sobre aspectos cognitivos, afetivos, mediacionais e interacionais, como caminho para a compreensão das formas mais pertinentes de organizar e desenvolver o conteúdo junto aos estudantes.

Ressalta-se ainda que o estudo de Funções não é apenas importante no âmbito da própria Matemática, mas, também, necessário para resolver situações-problema que envolvam outras áreas do conhecimento, como a Biologia, Química, Física, Matemática Financeira, entre outras, em que surgem temas os quais podem ser desenvolvidos e ampliados, tais como: queda livre de um corpo, movimento uniforme e uniformemente variado, crescimento de uma colônia de bactérias, quantidade de medicamentos na corrente sanguínea, rendimentos financeiros, consumo doméstico de energia, entre outros.

Pondera-se, ainda, que a aquisição de conceitos em torno das Funções não necessita somente do desenvolvimento prévio de ideias básicas de regularidade, existência de variável, dependência e generalização, mas sim, de um trabalho que possibilite ao estudante transitar entre a concepção de variável discreta e contínua e a atribuição de significados a variáveis que assumam valores no universo dos números reais (KAIBER, 2002).

Os argumentos apresentados sobre Funções, sua importância no âmbito escolar e questões sobre seu ensino e aprendizagem evidenciam a necessidade da elaboração de instrumentos de trabalho que direcionem, aprofundem e fortaleçam aspectos referentes ao conhecimento sobre o tema. Dessa maneira, entende-se que o Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática- EOS (GODINO; BATANERO, 1994; GODINO; CONTRERAS; FONT, 2006; D'AMORE; FONT; GODINO, 2007; GODINO; FONT, 2007; GODINO; BATANERO; FONT, 2007; FONT; PLANAS; GODINO, 2010) fornece elementos teóricos e metodológicos que servem de orientação tanto para a avaliação de processos de ensino e aprendizagem quanto para sua ampliação, organização e (re)estruturação, podendo, assim, contribuir para a elaboração de uma proposta de trabalho que favoreça tanto a professores em sua atividade docente, como a apropriação de conceitos, ideias, noções e procedimentos, por parte dos alunos, com relação ao conteúdo de Função, considerando-se que esse enfoque fornece ferramentas que possibilitam analisar aspectos cognitivos, epistemológicos, mediacionais, interacionais, normativos e ecológicos do pensamento, da linguagem e das situações em que a atividade matemática ocorre.

Nesse contexto, a investigação aqui apresentada foi desenvolvida em uma perspectiva qualitativa e teve como objetivo investigar a organização e desenvolvimento de um projeto educativo para a Matemática, no Ensino Médio, na perspectiva do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática, tendo como foco o estudo de Funções.

Assim, este trabalho apresenta a organização, o desenvolvimento e a análise da investigação proposta e está estruturado em seis capítulos. O primeiro, refere-se à contextualização da investigação, onde são destacadas as motivações e as justificativas para desenvolvê-la, bem como a questão norteadora e os objetivos. Os capítulos dois e três se referem aos aspectos teóricos que embasam a investigação, sendo eles: as Funções no Ensino Médio e o Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática. O quarto capítulo apresenta os aspectos metodológicos nos quais a investigação se embasa, assim como os instrumentos de coleta de dados, o lócus e sujeitos de pesquisa. No quinto capítulo, apresenta-se a proposta de intervenção com foco nas Funções no Ensino Médio, discutindo sua estrutura, os recursos utilizados e os tópicos desenvolvidos. Já o sexto capítulo aborda as análises produzidas sob a perspectiva do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática, tanto da proposta, no que se refere à sua constituição, como também da sua implementação junto a um grupo de estudantes do 1ª ano do Ensino Médio de uma escola da Rede Privada de Educação do Município de Farroupilha.

As Considerações Finais encerram a apresentação da tese retomando aspectos da pesquisa, buscando realizar uma análise/reflexão sobre o trabalho desenvolvido e sugerindo possíveis melhorias na proposta. Em seguida, apresentam-se as Referências, Apêndices e Anexos.

1 CONTEXTUALIZANDO A PESQUISA: JUSTIFICATIVA E OBJETIVOS[1]

Ao término da Licenciatura em Matemática, no ano de 2009, e início da vida docente, neste mesmo ano, muitas inquietações acompanhavam o meu dia-a-dia e o meu fazer pedagógico. Entendia que os conhecimentos desenvolvidos ou adquiridos durante os anos cursando Matemática não eram suficientes e adequados para lidar com as situações que ocorrem, dentro de uma sala de aula, e nem para compreender a complexidade dos processos que envolvem o ensino e a aprendizagem da Matemática.

Assim, buscando respostas às muitas inquietações, no ano de 2010, iniciei a Especialização em Educação Matemática na Universidade Luterana do Brasil (ULBRA), com a expectativa de sanar lacunas, aprimorar a minha formação e os processos de ensino e aprendizagem da Matemática. Durante esse período, cursei distintas disciplinas, as quais permitiram desenvolver novos pontos de vista sobre a Educação e auxiliaram na busca por novas metodologias e estratégias que pudessem ser utilizadas dentro de sala de aula.

Aos poucos, fui mudando a forma de apresentar e desenvolver os conteúdos que eram trabalhados nas turmas do Ensino Médio em que atuava. Porém, um conteúdo específico me chamava a atenção devido à sua complexidade, variedade de aplicações e que trazia, para os estudantes, dificuldades na compreensão de seus conceitos: o de Funções.

Assim, durante a especialização, busquei aprofundar os conhecimentos sobre o tema e desenvolver materiais que pudessem ser utilizados em sala de aula. Observei que um dos temas envolvendo Função no qual os estudantes apresentavam dificuldades com relação à apropriação e aplicação de conceitos era o de Funções Trigonométricas.

Dessa forma, buscando novas formas de abordar esses conceitos, desenvolvi uma sequência didática apoiada em elementos da Teoria das Situações Didáticas de Brousseau com respaldo, também, em pesquisas da área de Educação Matemática.

[1] A parte do texto que apresentam as experiências e ações pessoais do autor serão redigidas em 1ª pessoa.

Também utilizei recursos das tecnologias digitais, mais especificamente o *software* GeoGebra.

Para tanto, desenvolvi um conjunto de dez atividades que abordavam as Funções Seno e Cosseno a partir do Ciclo Trigonométrico, estudando suas características, propriedades e representação gráfica.

Por meio da aplicação do conjunto de atividades, foi possível perceber que os estudantes puderam se apropriar de conceitos, discutir, criar e testar estratégias de resolução de problemas, organizar os dados e aplicar os conceitos envolvendo essa temática em distintas situações. Foi possível, também, perceber que o *software* GeoGebra pode ser uma ferramenta eficaz, auxiliando na ampliação e aprofundamento das ideias e conceitos envolvendo as Funções Trigonométricas Seno e Cosseno (NINOW, 2011).

Os resultados alcançados na especialização abriram caminhos para a realização de novas pesquisas. Assim, no ano seguinte, ingressei no Mestrado pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECIM) da Universidade Luterana do Brasil, no qual foi possível desenvolver novos trabalhos com os conteúdos de Funções. Porém, nesse período, meu olhar voltou-se para as Funções Afim e Quadrática, além do estudo dos Movimentos Retilíneo Uniforme e Uniformemente Variado e suas relações. Tais conceitos foram retomados no âmbito do Ensino Médio, aprofundados e desenvolvidos por meio de Projetos de Trabalho (MORA, 2003), bem como elementos da Modelagem Matemática, da Resolução de Problemas e das Tecnologias da Informação e Comunicação.

Resultados alcançados e apresentados em Ninow (2014) apontaram que a integração de diferentes recursos, procedimentos e metodologias favorece a apropriação de conceitos e ideias, por parte dos estudantes, envolvendo esses conteúdos, permitindo que os mesmos possam realizar pesquisas, coletar e organizar dados, realizar cálculos, construir gráficos, tabelas, modelar e simular situações diversas e resolver problemas de diferentes áreas do conhecimento, do cotidiano e do mundo do trabalho.

Porém, mesmo com as pesquisas realizadas, com o emprego de diferentes metodologias e com os trabalhos embasados em diferentes referencias teóricos, ainda ficaram questões que não foram devidamente abordadas, compreendidas e solucionadas com relação às Funções.

Buscando superar tais dificuldades, vislumbrou-se a possibilidade de continuar investigando as Funções, desenvolvendo novas propostas embasadas em construtos teóricos que pudessem dar conta da complexidade das relações que se estabelecem entre os componentes do processo de ensino e aprendizagem: professor, estudantes, conteúdo e meio educativo, tal como listado em Lemos (2017). Assim, surgiu a possibilidade da investigação que será aqui apresentada e que toma o Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (EOS) como aporte teórico e metodológico.

Andrade e Kaiber (2012) destacam que o EOS é um aporte teórico e metodológico que pode orientar, tanto a avaliação como a estruturação de processos de ensino da Matemática, pois trata e aproxima questões referentes ao próprio conhecimento, ampliando a visão e o conceito do objeto matemático, bem como atribui a esses significados institucionais e pessoais, apontando a pertinência e relevância das ações realizadas, dos conhecimentos apresentados e dos recursos utilizados em um processo de ensino e aprendizagem de Matemática.

Assim, encontrou-se no EOS um campo fértil para a discussão e reflexão em torno dos objetos matemáticos, da negociação de significados atribuídos a esses no âmbito escolar e as possíveis articulações em projetos educacionais.

Nesse contexto, considerou-se pertinente desenvolver um trabalho com Funções no âmbito da Matemática no Ensino Médio, buscando promover uma aprendizagem que atenda às necessidades desse nível de ensino, desenvolvendo a compreensão de definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos sobre o tema, construídos a partir de novos conceitos e de estruturas já existentes. Além disso, o trabalho procura validar as intuições, desenvolver a abstração, o raciocínio, a resolução de problemas, a investigação, a análise e compreensão de fatos da realidade, estimulando o trabalho em grupo e o desenvolvimento de competências e habilidades as quais qualifiquem os estudantes para aplicar seus conhecimentos em situações práticas. Entende-se que, para praticar essa forma de educação, é indispensável fornecer aos alunos oportunidades para o trabalho que vai além da mera memorização e repetição.

Assim, busca-se a possibilidade de organizar um projeto educativo com foco em Funções, tomando como referência os aportes teórico e metodológicos do EOS, o qual considera o processo de ensino e aprendizagem multidimensional, com influências e implicações de caráter epistemológico (conteúdo de ensino), cognitivo (o sujeito que aprende), interacional (relações entre os sujeitos envolvidos no processo), mediacional (elementos que concorrem para mediação entre os envolvidos e o próprio conteúdo de ensino), normativo (normas e contratos que se estabelecem no sistema educativo) e ecológico (o ambiente onde o processo se desenvolve).

Nesse contexto, surge o problema desta investigação: **Como desenvolver um projeto educativo para o Ensino Médio, relativo ao objeto matemático Funções, tomando como referência os pressupostos do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática?**

Na busca por elementos ou evidências as quais possibilitassem responder à questão norteadora, estabeleceu-se como objetivo geral da pesquisa: **investigar a organização e desenvolvimento de um projeto educativo para a Matemática no Ensino Médio, na perspectiva do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática, tendo como foco o estudo de Funções.**

Para alcançar o objetivo geral da pesquisa, foram traçados os seguintes objetivos específicos:

- investigar a organização de um projeto educativo, tomando como referência componentes e indicadores da Idoneidade Didática na perspectiva do EOS, com foco no estudo do objeto Funções, a ser desenvolvido no Ensino Médio.
- investigar a aplicação e a avaliação do projeto educativo desenvolvido junto a uma turma do primeiro ano do Ensino Médio regular de uma escola do Município de Farroupilha/RS.

Com o intuito de alcançar os objetivos estabelecidos e responder à questão norteadora, organizou-se uma proposta de estudos, estruturada e desenvolvida por meio de materiais de estudos que aliam e articulam diferentes recursos e metodologias, tais como: as tecnologias digitais, a resolução de situações-problema, objetos de aprendizagem, vídeos *online* e matérias de estudo no *PowerPoint* em torno do desenvolvimento, retomada e aprofundamento de conceitos, procedimentos e definições contemplados em sete tópicos referente a Funções, abordados no primeiro ano do Ensino Médio, sendo eles: Função, Função Afim, Função Quadrática, Função Modular, Função Exponencial, Função Logarítmica e Função Trigonométrica.

Destaca-se que tal proposta de estudos foi articulada ao Plano de Estudos da Escola onde foi desenvolvida e implementada, respeitando sua organização, objetivos educacionais e filosofia de trabalho.

No que segue, apresentam-se os aspectos teóricos que embasaram a constituição da proposta e o desenvolvimento da investigação referente ao objeto Matemático Função e ao Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática.

2 O OBJETO MATEMÁTICO FUNÇÃO

Este capítulo contempla aspectos sobre o desenvolvimento de ideias e conceitos referentes à Função. Incialmente, são apresentados aspectos históricos e epistemológicos. Na sequência, são destacados os obstáculos epistemológicos associados à evolução do conceito Função, os níveis de compreensão, considerações sobre dificuldades em seu ensino, as Funções nos documentos oficiais e, por fim, aspectos de resultados de pesquisas realizadas envolvendo essa temática.

2.1 ASPECTOS DO DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO E EPISTEMOLÓGICO SOBRE FUNÇÃO

O desenvolvimento histórico do conceito de Função ocorreu de maneira lenta e progressiva, levando séculos para atingir a forma como se apresenta atualmente. Para Zuffi (2001, p. 15), esse desenvolvimento compreende três fases:

> A Antiguidade, momento em que são verificados alguns casos de dependência entre duas quantidades, sem destacar, ainda, as noções gerais de quantidades variáveis e de funções. A Idade Média, onde visualizamos as noções funcionais expressas sob forma geométrica e mecânica, em que cada caso concreto de dependência entre duas quantidades era representado, preferencialmente, através de um gráfico ou por uma descrição verbal. E, por fim, o período Moderno, no qual começam a prevalecer expressões analíticas de funções, sendo, no final do século XVII, o momento mais intenso no desenvolvimento da noção de função, aproximando da que atualmente conhecemos.

Ruiz (1994), em seus estudos, estabeleceu que, durante esses períodos, as ideias ou noções em torno do desenvolvimento do conceito de função estavam entrelaçadas por diferentes momentos ou épocas históricas. Assim, estabeleceram-se seis noções histórico-epistemológicas sobre esse tema: Função como correspondência; Função como relação entre grandezas; Função como representação gráfica; Função como expressão analítica; Função como correspondência arbitrária; Função a partir da Teoria de Conjuntos.

Na sequência, serão apresentados aspectos relevantes sobre cada um desses entendimentos.

2.1.1 Função como Correspondência

Segundo Ruiz (1994) e Parra Urrea (2015), a Matemática Antiga se desenvolveu nas civilizações do Egito, Mesopotâmia, China e Índia. Nesse período, a ideia abstrata de variável não existia e surgiram as primeiras manifestações contendo, implicitamente, a noção de Função. Diversas evidências da época, como marcas em restos ósseos, colaboraram para a ideia de contar, gerando uma correspondência entre um conjunto dado de objetos e uma sequência de números, tendo a noção de função suas raízes no desenvolvimento do conceito de número (PARRA URREA, 2015).

Os Matemáticos Babilônios, de acordo com Ruiz (1994), estavam interessados em cálculos astronômicos e realizaram uma compilação das efemérides do sol, da lua e dos planetas. Realizaram estudos de problemas de variações contínuas, tais como a luminosidade da lua, em intervalos de tempo iguais aos períodos de visibilidade de um planeta, em relação com o ângulo que forma com o sol. Segundo essa autora, esse povo, para realizar cálculos, utilizava tabelas sexagesimais de quadrados e de raízes quadradas, de cubos e de raízes cúbicas, de potências sucessivas de um número dado, de forma análoga a nossas atuais tabelas de logaritmos.

De acordo com Ruiz (1994) e Parra Urrea (2015), esses matemáticos desenvolveram valores de $n^2 + n$ para valores naturais de n. Conheciam a soma da progressão geométrica $1+ 2+ 2^2+...$, para sucessivos termos, assim como a soma da série dos quadrados $1^2 +2^2 + 3^2 + 4^2 +\cdots+ n^2$ para distintos valores de n. Essas tabelas estão dispostas em duas colunas, de forma análoga às construídas por estudantes para qualquer função $f(x)$ (RUIZ, 1994).

Assim, segundo Ruiz (1994), o desenvolvimento da noção de função surgiu, implicitamente, na forma de correspondências numéricas definidas por operações aritméticas, sendo que, durante esse período, não erram utilizadas letras para representar quantidades variáveis. Porém, não se pode assegurar que esses matemáticos babilônicos expressaram resultados de maneira geral pois, nas tabelas, só existem estudos de casos particulares, sem nenhuma formalização genérica (PARRA URREA, 2015).

Porém, Boyer (2003) destaca que o fato de nenhuma formulação geral dessas tabelas ter sido preservada não significa, necessariamente, que não houvesse consciência, no antigo pensamento pré-helênico, da generalidade dessas regras ou princípios. Se não houvesse, de uma forma ou de outra, uma regra geral, seria muito difícil explicar a analogia entre diferentes problemas do mesmo tipo.

Para Ruiz (1994), o que faltou, nesse período histórico, foi uma palavra para dar o significado de função, pois a mesma estava lá, sendo claramente representada pelas muitas tabelas de elementos correspondentes dos diferentes fenômenos ou conjuntos estudados. Assim, de acordo com o autor, é possível reconhecer instâncias específicas da ideia geral do objeto de função, sendo um anacronismo usar o termo função para citar certas correspondências. É assim que, durante o período antigo, sob a ideia de tabelas de correspondência provenientes de fenômenos naturais, uma noção intuitiva do objeto matemático função pode ser vislumbrada (RUIZ, 1994).

2.1.2 Função como Relação entre Grandezas

Conforme Ruiz (1994), durante a era babilônica, um autêntico "instinto de funcionalidade" é presumido, já que uma função não é apenas uma fórmula, mas uma relação mais geral, a qual associa elementos de dois conjuntos. Dessa relação estabelecida, nas tabelas dos cálculos, os babilônicos procuravam utilizar elementos da aritmética em suas observações mais difíceis de medir, além de não se limitarem a uma simples tabulação de dados empíricos, pois usaram interpolações e extrapolações em busca de regularidades.

Parra Urrea (2015) salienta que os gregos, de igual forma, trabalharam com problemas que tinham implícita a noção de função, porém não chegaram a reconhecê-la, nem simbolizá-la. Já no início do século II a.C., os astrônomos iniciaram o uso das frações e o desenvolvimento de tabelas de senos e cossenos, similares às utilizadas atualmente, surgindo, dessa forma, a trigonometria.

Além disso, segundo a autora, as ideias de mudança e quantidade variáveis eram conhecidas pelos estudiosos helênicos. Os problemas de movimento e da continuidade do infinito haviam sido examinados desde a época de Heráclito e de Zenón, sendo que uma grande parte da filosofia natural aristotélica estava voltada para o estudo dessas questões. De acordo com Ruiz (1994), é possível afirmar que, no pensamento helénico, existia uma ideia primitiva do objeto matemático função, contida nas noções de mudança e relação entre magnitudes variáveis.

Já Roratto (2009) salienta que as ideias iniciais em torno do conceito de função, na Matemática grega, são enquadradas como um estudo protomatemático, no qual conceito se caracteriza por estudos sobre relações entre magnitudes geométricas variáveis. Foi nesse período que surgiu à ideia de incógnita, dando um passo significativo para o desenvolvimento da teoria das equações e proporções, porém limitou completamente o desenvolvimento do conceito de função uma vez que este exige caracterizar a mudança em termos de variável e não de incógnita. A noção de magnitude apresenta uma concepção de Matemática estática, que se tornou um obstáculo na era grega, para estabelecer o conceito de função (CARVAJAL; ORTIZ, 2014).

Para Parra Urrea (2015), durante a época antiga, não existia o interesse por estudar função como objeto matemático, pois a Matemática estava orientada ao estudo de magnitudes físicas e geométricas, consideradas como tangíveis, e que poderiam ser mensuradas com instrumentos típicos da época.

2.1.3 Função como Representação Gráfica

De acordo com Parra Urrea (2015), durante a Idade Média, foram desenvolvidos estudos de fenômenos naturais como calor, luz, densidade, distância e velocidade média de movimento. A partir de indagações envolvendo esses fenômenos, foi estabelecida implicitamente, a noção de quantidades variáveis independentes e dependentes. Para essa autora, a noção de função se associou ao estudo de mudanças, em particular do movimento que, implicitamente, era definido por uma descrição verbal de suas propriedades específicas, mediante representações gráficas. Porém, durante essa época, não se estabeleceu o objeto matemático função por meio de uma expressão algébrica.

Segundo Ruiz (1994) e Parra Urrea (2015), a evolução do conhecimento de função, na Idade Média, se beneficiou das contribuições das escolas de filosofia natural de Oxford e Paris. Filósofos como Grosseteste e Bacon afirmavam que a Matemática é o principal instrumento para estudar e explicar fenômenos naturais. Também “coisas” mensuráveis foram concebidas como quantidades contínuas, incluindo o tempo e, portanto, a razão, entre essas quantidades, foi expressa por meio das relações entre pontos, linhas e superfícies. Durante esse período, a linguagem usada para expressar as relações de funcionalidade foi verbal ou geométrica.

Na Idade Média, foram desenvolvidos dois métodos que, segundo Ruiz (1994), são relevantes para expressar relações funcionais, os quais serão apresentados a seguir.

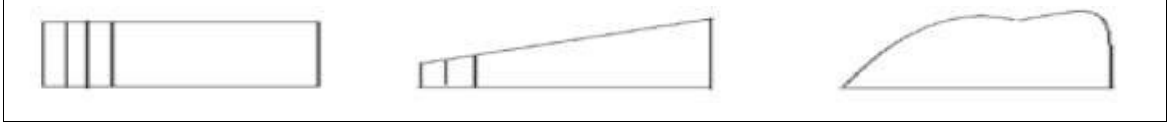
- A álgebra de palavras: nela a generalização é obtida usando letras do alfabeto para quantidades variáveis e operações expressas em termos de variáveis; pode-se, assim, falar do surgimento da álgebra incorporada para o surgimento de uma simbologia.
- O método geométrico: é aquele no qual a representação gráfica e a tentativa de conexão entre a álgebra e a geometria são apresentadas.

Parra Urrea (2015) salienta que, nesse período, no que diz respeito às representações geométricas, segundo a obra "Tractatus de latitudinibus formarum", de Nicolas Oresme (1320-1382), as funções aparecem desenhadas pela primeira vez, traduzindo para o plano o que os geógrafos faziam na esfera até então, mantendo os nomes utilizados, chamando longitude e latitude o que agora nomeamos como abscissa e ordenada.

Para essa pesquisadora, Oresme tinha por objetivo representar, por uma figura, as intensidades de uma qualidade que depende de outra. De maneira semelhante ao pensamento grego, estabeleceu, de diferentes maneiras, a noção de número e magnitude. A primeira, associada ao conjunto de unidades, enquanto a segunda se referia ao mensurável. De acordo com Ruiz (1994), Oresme aponta que tudo o que é mensurável, exceto os números, pode ser imaginado como uma forma de quantidade contínua, de modo que se pode inferir que o mesmo interpretou a noção de número diferente da noção de magnitude.

Ruiz (2014) e Parra Urrea (2015) salientam que Oresme utilizava a continuidade dos segmentos para representar as mudanças na intensidade das magnitudes qualitativas e assim poder descrever, comparar e analisar tais dependências. Nesse sentido, as concepções de proporcionalidade entre grandezas e a relação de dependência qualitativa representada por meio de uma figura que descreve a quantidade de uma determinada qualidade em relação a outra da qual ela depende podem ser visualizadas na Figura 1.

Figura 1 - Representação de variações de quantidades dependentes



Fonte: Ruiz (1994).

Assim, por meio dessas representações, Oresme deu um passo importante para a invenção da Geometria Analítica e a introdução do movimento na Geometria, aspectos que não eram considerados na Matemática grega (PARRA URREA, 2015). Ainda, conforme essa autora, foi possível, nesse período, olhar para a descrição das leis que regem os fenômenos reais e realizar uma grande aproximação para as grandezas contínuas a fim de poder representá-las ou imaginá-las em uma linha reta, que mais tarde seria defínida com maior detalhe e formalidade por Descartes e Fermat.

2.1.4 Função como Expressão Analítica

Com o desenvolvimento da Álgebra, Fermat (1601- 1665) e a Descartes (1596-1650), descobriram as representações analíticas e o início da Geometria Analítica como um método de expressão das relações numéricas, das dimensões, das formas e propriedades dos objetos geométricos, utilizando, essencialmente, o método de coordenadas (RUIZ, 1994).

Já Boyer (2003) relata que Descartes enunciou que, quando uma equação contém duas grandezas desconhecidas, há um local correspondente e o ponto final de uma dessas grandezas descreve uma linha reta ou curva. De acordo com o autor, essa proposição é uma das afirmações mais relevantes na história da Matemática, já que introduz a ideia de uma variável algébrica.

Outro matemático que contribuiu para a ideia de função como expressão analítica foi Viéte, o qual foi o precursor do uso de letras para representar as variáveis, estabelecendo as grandezas conhecidas como consoantes e as desconhecidas como vogais. Já Descartes utilizou as últimas letras do alfabeto para as incógnitas e as primeiras para os coeficientes, tal como na atualidade são utilizadas (PARRA URREA, 2015).

Segundo Parra Urrea (2015), Descartes buscava liberar a Geometria do excesso de figuras, mas também, buscava dar sentido à Álgebra por meio da Geometria, estabelecendo que uma curva é construída por equações algébricas. Desenvolveu, assim, a ideia de função na forma analítica e estabeleceu que uma equação de x e y é uma forma de mostrar uma dependência entre quantidades variáveis, de modo que o valor de uma delas poderá ser calculado a partir dos correspondentes valores da outra variável.

Para Ruiz (1994), Galileo (1564- 1642) contribuiu para a construção da noção de função e introduziu as representações numéricas nas representações gráficas e expressou as leis do movimento, às quais ele incorporou a linguagem da teoria das proporções, dando um sentido de variação direta ou indiretamente proporcional, linguagem que ocultava aspectos de variação contínua.

Já Fermat (1601- 1665) visualizou a arbitrariedade em que parâmetros e variáveis se unem para formar expressões algébricas, estando a representação gráfica condicionada a como se relacionam os elementos da representação algébrica. Concluiu, também, que uma equação com duas incógnitas é uma expressão algébrica das propriedades de uma curva e se preocupava mais com expressão simbólica do que com a gráfica, contribuído, assim, com elementos importantes para o desenvolvimento do conceito de função como uma expressão algébrica (PARRA URREA, 2015).

Oliveira (1997) salienta que Leibniz e Newton estabeleceram modelos conceituais de situações físicas reais, permitindo estabelecer modelos matemáticos os quais relacionavam variáveis como aceleração, distância, velocidade, tempo. Assim, foi a partir dos estudos de Newton que Função passou a ser considerada um objeto matemático, o qual era visto como uma ferramenta fundamental que se usa, mas que não é objeto de estudo em si mesmo. Não considerava gráficos de funções como um agregado estático, mas sim como uma trajetória descrita por um ponto em movimento, o qual pode ser expresso mediante uma fórmula (OLIVEIRA, 1997).

De acordo com Ruiz (1994), Leibniz (1646- 1716) foi o primeiro matemático a usar a palavra função, a qual foi utilizada para referir-se a quaisquer quantidades variáveis de um ponto a outro de uma curva. Introduziu, também, palavras como constante, variável, coordenadas e parâmetro. Porém, de acordo com Lacasta e Pascual (1998), Leibniz não utilizava o conceito de função como é compreendido na atualidade, pois entendia que uma curva era formada por um número infinito de seções retas infinitamente pequenas.

Outro matemático que contribuiu para o desenvolvimento do conceito de Função foi Jean Bernoulli o qual, no ano de 1718, considerou-a pela primeira vez como uma expressão analítica e propôs a letra φ para designar a característica de una função, escrevendo o argumento sem o uso de parênteses: $\varphi\ x$ (RUIZ, 1994).

No século XVIII, Euler (1707- 1783) definiu o objeto matemático do seguinte modo: “uma função de uma grandeza variável é uma expressão analítica composta de qualquer forma que seja dessa quantidade e de números ou quantidades constantes” (RUIZ, 1994). De acordo com a autora, para dar a essa definição a maior generalidade possível, Euler admitiu valores reais e imaginários para o argumento e salientava que uma função poderia ser conceituada como uma expressão analítica se fosse obtida mediante operação aritmética de potencias ou raízes. Esse matemático também estabeleceu as funções algébricas e transcendentes, além de ser o primeiro a representar a notação de função por $f(x)$ (PARRA URREA, 2015).

Já Lacasta e Pascual (1998) destacam que Euler considerava que, a cada expressão analítica, correspondia um gráfico cartesiano, e que expressões analíticas que, de entrada, pareciam diferentes, podiam ter a mesma representação gráfica. Porém, gráficos diferentes correspondiam a expressões analíticas diferentes.

Ainda, segundo Lacasta e Pascual (1998), em 1755, Euler publicou a seguinte definição: “Se certas quantidades dependem de outras, de tal maneira que se essas outras variam, estas quantidades variam também, portanto chama-se essas quantidades de função das últimas” (LACASTA; PASCUAL, 1998, p. 12). Essa denominação tem a máxima amplitude e contém, nela mesma, todas as maneiras pelas quais uma quantidade pode ser determinada por outras. Assim, x designa uma quantidade variável, então as outras quantidades que dependem de x de qualquer maneira, ou que estão determinadas por x, se chamam funciones de x” (LACASTA; PASCUAL, 1998, p. 12).

Essas diferentes definições ou concepções contribuíram para a evolução do conceito do objeto matemático Função e segundo Youschkevitch (1976), só foram possíveis por meio do crescimento impetuoso do cálculo matemático, da álgebra simbólica-literal e da expansão do conceito de número. Ainda, de acordo com o autor, os avanços permitiram, também, o desenvolvimento da notação simbólica e a resolução de equações, bem como a diferenciação entre números e quantidades, tornando essa última cada vez mais abstrata.

2.1.5 Função como Correspondência Arbitrária

Durante o século XIX, foram criadas as condições necessárias para o tratamento das funções como correspondências arbitrárias. Segundo Youschkevitch (1976), nesse período, Cauchy (1827) deu a seguinte definição: quando quantidades variáveis estão de tal forma ligadas entre si que, sendo dado os valores de algumas, se pode determinar os valores de todas as outras, imagina-se essas diversas quantidades expressas por meio de algumas dentre elas, as quais recebem então o nome de variáveis independentes e as quantidades restantes expressas por meio de variáveis independentes, são chamadas de funções dessas variáveis.

Já segundo Boyer (2003), o significado de função como correspondência arbitraria é definido amplamente por Dirichlet, em 1837, o qual afirmava que, se uma variável y está relacionada a outra variável x, de tal forma que um valor numérico é atribuído a x, existe uma regra segundo a qual um único valor de y é determinado. Então diz-se que y é uma função da variável dependente de x (BOYER, 2003), sendo que, essa definição se aproxima muito da atualmente adotada no âmbito da Teoria dos Conjuntos.

De acordo com Lacasta e Pascual (1998), a partir da definição estabelecida por Dirichet e dos trabalhos desse matemático, pela primeira vez, considerou-se uma função como correspondência arbitrária, revelando-se o primeiro exemplo explícito de uma função que não é dada por uma expressão analítica, nem tem um gráfico ou curva que a represente, o que deu à noção de função um significado independente do conceito de expressão analítica.

Ruiz (1994) salienta que, posteriormente, Riemann, em 1858, desenvolveu a seguinte definição para Função: "Se dirá que *y* é uma função de *x,* se a todo valor determinado de *x* corresponde um valor determinado de *y*, qualquer que seja a forma de relação que une *x* a *y"* (RUIZ, 1994, p. 123).

Essa autora destaca que, para alcançar esses avanços nas definições, os matemáticos necessitaram deixar de lado as falsas evidências da intuição e as limitações da expressão analítica, incorporando novos elementos e deixando outros para trás.

2.1.6 Função a partir da Teoria dos Conjuntos

Segundo Ruiz (1994), à medida em que a Matemática avança, torna-se cada vez mais abstrata, o mesmo acontecendo com a noção e definição de Função, sendo que o desenvolvimento no campo da álgebra abstrata e topologia dá origem a novas definições sobre esse tema.

Parra Urrea (2015) destaca que, em 1939, o grupo Bourbaki definiu a função como uma correspondência entre dois conjuntos de uma maneira similar àquela dada por Dirichlet em 1837. Eles propuseram a definição de função a partir de três signos, F (gráfico da função), f (a função) e $f\ (x)$ (a imagem da função), sendo que, posteriormente, o uso de F foi deixado de lado. Ainda na visão do grupo Bourbaki, f é usado para designar a função (correspondência) de diferentes naturezas. Também pode ser designado como uma aplicação pois, a partir da explicação da "função como uma máquina", dada pelo grupo, pode-se entender f como uma aplicação na qual entra um número A, sendo aplicado f sobre A, para resultar em um valor B (PARRA URREA (2015).

Ruiz (1994) salienta que o grupo Bourbaki estabeleceu o uso do signo $f(x)$ como valor específico ou imagem, sendo essa uma expressão numérica ou algébrica e definiram função como uma correspondência, estimulando a entrada e o uso do signo para designá-la. Assim, pode-se perceber, nesta perspectiva, uma predominância de expressões algébricas e passou a entender-se $f\ (x)$ como um objeto com o qual se pode operar, analisar, manipular, mas, principalmente, com o qual se pode determinar a função ou caracterizá-la.

A partir dos avanços no campo da Matemática, novas definições foram sendo desenvolvidas para o conceito de Função, muitas das quais ainda podem ser encontradas em livros de Álgebra da atualidade. É certo que as noções mais primitivas eram muito mais intuitivas. Na atualidade, possuem um alto grau de formalização, o que as torna muito mais abstratas. Ruiz (1994) pondera que uma definição para função esteja construída de maneira logicamente formalizada. Ela obscurece seu significado essencial como uma atribuição de variáveis, perdendo seu caráter dinâmico para se tornar algo mais estático.

No que segue, são apresentados obstáculos epistemológicos ligados ao desenvolvimento histórico do conceito de Função.

2.2 OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS ASSOCIADOS À EVOLUÇÃO DO CONCEITO DE FUNÇÃO

Martins e Abreu-Bernardeso (2013) salientam que o conhecimento científico progride mediante rupturas epistemológicas sucessivas, marcadas por dificuldades ou barreiras que impedem a formação de um espírito científico. Esses entraves foram denominados por Bachelard (1996) como obstáculos epistemológicos, os quais podem ser entendidos como hábitos intelectuais incrustados no conhecimento não questionado, que bloqueiam o processo de construção de novos saberes.

Conforme Bachelard (1996), a aprendizagem de novos ideários acontece a partir da desconstrução de um conhecimento anterior e isso é possível apenas com a superação dos obstáculos epistemológicos. Ao ultrapassá-los, o conhecimento progride, passando de um estado pré-científico, influenciado pelos sentidos e feedbacks imediatos, a um método científico com base no status científico (BACHELARD, 1996).

Para esse autor, a cultura científica deve começar com uma limpeza intelectual e afetiva, substituindo o saber fechado e estático por um conhecimento aberto e dinâmico, permitindo, assim, que o espírito científico tenha condições de evoluir. Por conseguinte, a ciência é determinada como algo em construção ou em reconstrução.

Essas construções científicas permitem que diferentes conceitos sofram mudanças ao longo do seu desenvolvimento, fato esse ocorrido com o conceito de função, o qual passou por modificações ao longo da história, desde as civilizações antigas até a atualidade.

Ruiz (1994) pondera que, por meio das diferentes concepções e momentos históricos, é possível identificar obstáculos epistemológicos ligados ao desenvolvimento desse conceito, dos quais se podem destacar, ligados à concepção estática, da dissociação existente entre medida e números, da razão e proporção, da homogeneidade das proporções, da concepção geométrica das variáveis, da concepção algébrica e da concepção mecânica de curva.

No quadro da Figura 2, apresentam-se as principais características desses obstáculos, apresentados pelo autor.

Figura 2 - Obstáculos epistemológicos relacionados ao conceito de Função

Obstáculo	Descrição/Características
Concepção estática	A ideia mais primitiva de função estava contida nas noções de mudança e de relação entre grandezas variáveis. Não obstante, os matemáticos, durante muito tempo, observavam os entes matemáticos como algo "estático". Consideravam as grandezas físicas e as proporções entre elas como algo diferente das igualdades estritamente numéricas. Essa concepção de "variabilidade", como característica exclusiva das grandezas físicas, pode ser considerada como um obstáculo para o desenvolvimento do conceito de função.
Dissociação existente entre	Atualmente se associa, naturalmente, a qualquer quantidade uma grandeza, uma certa medida numérica, mas, para o pensamento grego, grandezas e números eram objetos bem distintos. Os números eram sempre discretos, enquanto que as

quantidade e números	grandezas eram contínuas. Essa profunda dissociação conduzia a não-observação de leis físicas como funções matemáticas.
Razão e proporção	Desde os gregos até o século XV, a proporção era representada de forma discursiva e não como uma igualdade escrita em forma de fração. O aspecto funcional da proporção permaneceu completamente oculto, por seu caráter estritamente escalar. Por isso, considera-se como um obstáculo epistemológico para o desenvolvimento da noção de variável e para a noção de função.
Homogeneidade das proporções	A homogeneidade conduzia sempre a comparar medidas da mesma natureza e isso impedia de encontrar, de forma significativa, dependências entre variáveis de diferentes magnitudes, germe de toda relação funcional.
Concepção geométrica das variáveis	Os gregos construíram uma Álgebra Geométrica, cujos elementos primários resultaram nos segmentos de reta. Eles definiram todas as operações do cálculo. As somas interpretavam como a soma de segmentos, a diferença como a eliminação de uma parte do segmento, igual ao segmento subtraído, e a multiplicação de segmentos conduzia à construção de uma representação bidimensional. Já o produto de três segmentos dava um paralelepípedo e não poderiam considerar um número maior de fatores. A divisão era possível somente se a dimensão do dividendo era maior que a do divisor. Assim, o obstáculo criado com essa indefinição chegou até Descartes e Fermat. Para Descartes, o produto de duas ou mais variáveis não se identifica com áreas e volumes, mas estabelece um isomorfismo entre os segmentos e os números reais. A soma, diferença, produto e quociente de segmentos é sempre outro segmento. Portanto, o conceito de variável adquiriu outro significado e começaram a estudar as propriedades dos pontos de uma curva por meio das relações entre as coordenadas dos mesmos.
Concepção algébrica	No século XVIII, a função de uma quantidade variável foi definida como uma expressão analítica composta, de alguma maneira, por essa quantidade variável e números ou quantidades constantes. Chegou-se a pensar que as únicas relações dignas de estudo eram aquelas que podiam ser descritas por meio de expressões analíticas e a função se constituía em obstáculos, visto que a ideia de correspondência arbitrária foi surgindo na mente dos matemáticos. Mas era necessário que surgissem novas ferramentas, como a teoria dos conjuntos e o desenvolvimento formal e definitivo dos números reais.
Concepção mecânica de curva	A princípio, as curvas não foram consideradas como gráficos de uma relação funcional, mas tomadas como trajetórias de pontos em movimento. Essa concepção permaneceu nas ideias de Galileu, Torricelli, Roberval e Newton. Não eram vistas como conjuntos de pontos que satisfazem condições especificas dadas por uma relação funcional.

Fonte: adaptado de Ruiz (1994).

Na sequência, apresentam-se os níveis de compreensão do conceito de função.

2.3 NÍVEIS DE COMPREENSÃO DO CONCEITO DE FUNÇÃO

No que se refere ao estudo de Funções, Kaiber (2002) pondera que a introdução do conceito de Função, junto aos estudantes, baseia-se na ideia elementar de par ordenado e no estabelecimento de relações entre conjuntos. Destaca, ainda, que, aliada à organização linear do currículo de Matemática, essa abordagem transformou o estudo de Funções, no Ensino Médio e nos primeiros semestres dos cursos Universitários da área científica e tecnológica, em algo abstrato e formal. Considera-se que, atualmente, os apontamentos da autora ainda são válidos, apesar de se reconhecer que há uma tentativa de atribuir significado ao estudo de Funções considerando, principalmente, aplicações, o que pode ser percebido, particularmente, em recomendações curriculares e em livros didáticos atuais.

A autora salienta ainda que, considerando o grau de complexidade das diferentes concepções e definições que o objeto Função abrange, é necessário não apenas o desenvolvimento prévio das ideias básicas de regularidade, existência de variável, dependência e generalização, mas também um trabalho que possibilite ao estudante transitar entre a concepção de variável discreta e contínua e a atribuição de significados a variáveis que assumam valores no universo dos números reais.

Por sua vez, Tinoco (1998) considera que as ideias/noções/conceitos de Função devem ser abordados ou desenvolvidos por diferentes estágios, tendo seu início no Ensino Fundamental e serem ampliados, aprofundados e efetivados de maneira formal no Ensino Médio.

Já Bergeron e Herscovics (1982) propõem um modelo que considera diferentes níveis para a compreensão do conceito de Função, os quais refletem uma visão, por um lado, epistemológica, por outro, estruturalista. Assim, essa compreensão passa por quatro níveis: a compreensão intuitiva, a matematização inicial, a abstração e a formalização. Cada um desses níveis apresenta características gerais próprias, que vão desde a utilização do conhecimento informal do cotidiano, passando pela organização e quantificação das primeiras noções intuitivas, pela generalização, a qual possibilita que o conceito se destaque do procedimento efetuado para alcançá-lo, até a utilização da linguagem simbólica a qual caracteriza a formalização (KAIBER, 2002)

Para Bergeron e Herscovics (1982), no nível de compreensão intuitiva, não está envolvido, propriamente, o conceito de Função, mas sim um conceito ou uma ideia prévia. Consideram que a noção intuitiva de função aparece muito cedo nos estudantes, tendo, como ponto de partida, operações e casualidade, resultantes da abstração física e reflexiva, sendo o mesmo constituído por conhecimentos informais, caracterizado pela utilização de conceitos prévios, baseado em percepções visuais, ações espontâneas e aproximações nada refinadas.

O nível de matematização inicial é o primeiro passo para a organização e quantificação das primeiras noções intuitivas. Essas ideias intuitivas, associadas a conhecimentos prévios, constituem a primeira construção do conceito de Função. Muitas vezes, nesse nível, o conceito é confundido com o procedimento que leva à sua construção. Porém, está presente o reconhecimento de variáveis dependentes e independentes, a construção e interpretação de gráficos cartesianos simples associados a situações concretas, e o reconhecimento do domínio analisado, de acordo com o contexto.

Já a abstração é o nível em que o conceito se destaca do procedimento que levou à sua construção. Evidencia-se pela generalização, invariância do objeto matemático e reversibilidade das transformações. Caracteriza-se pela relação funcional, que começa a ser entendida, independentemente do contexto, e pode ser representada por meio de expressões analíticas e de gráficos cartesianos.

O nível de formalização caracteriza-se pela utilização da linguagem simbólica, justificação lógica das operações e descontextualização, desde que a abstração tenha ocorrido previamente.

Cada um desses níveis de compreensão do conceito de função, segundo Tinoco (1998), possui características próprias, as quais passam a ser descritas no quadro da Figura 3.

Figura 3 - Descrição dos níveis de compreensão do conceito de Função.

Compreensão Intuitiva	**Matematização Inicial**	**Abstração**	**Formalização**
• Reconhecimento de dependência (não quantificada). • Estabelecimento de leis de formação simples e visuais. • Construção e interpretação de tabelas e gráficos de coluna e setor.	• Quantificação das leis. • Reconhecimento de variáveis dependentes e independentes. • Interpretação de gráficos cartesianos. • Construção de gráficos cartesianos simples. • Reconhecimento do Domínio (analisado no contexto).	• Escrita de expressões analíticas. • Distinção entre equações e funções. • Construção e interpretação de gráficos convencionais e não convencionais. • Caracterização de relações funcionais.	• Utilização de linguagem simbólica: F: A→B, y = f(x) • Domínio e imagem independente de contextos. • Classificação. • Operações com funções.

Fonte: adaptado de Tinoco (1998).

Levando-se em consideração os elementos norteadores ou os descritores estabelecidos para cada nível de compreensão, os significados de referência do objeto Função, propostos por Godino et. al (2006), os níveis de análise do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática, bem como os componentes e indicadores que compõem as ferramentas de análise didática do EOS, foi pensada, organizada, estruturada e elaborada uma sequência de atividades envolvendo as Funções, buscando, assim, a construção de problemas e atividades que possibilitassem o trânsito pelos diferentes níveis de compreensão das ideias, noções e conceitos envolvendo essa temática.

2.4 CONSIDERAÇÕES SOBRE FUNÇÕES E DIFICULDADES EM SEU ENSINO

Muitos educadores, em sua prática docente, têm a oportunidade de verificar as dificuldades que os estudantes possuem com relação ao estudo das Funções e questionam-se sobre quais conhecimentos permanecem ao término do Ensino Médio e início do Ensino Superior. Por outro lado, pesquisadores têm investigado essa questão e buscam possíveis estratégias ou soluções para amenizar esse problema, o que pode ser verificado nas pesquisas realizadas por Maranhão (1996), Costa (1997), Oliveira (1997), Tinoco (1998), Almeida e Brito (2005), Ardenghi (2008), Nascimento (2009), Pires (2009), Delgado (2010), Rosenbaum (2010) e Damasco Neto (2010), Barreto (2011), Dizotti (2012) e Magarinus (2013), os quais trazem profundas inquietações sobre o assunto.

Muitos desses autores ressaltam que as dificuldades em torno da apropriação de ideias/conceitos se devem à complexidade matemática em torno das noções de Funções. Com relação a esses aspectos, Artigue (1998) estabeleceu quatro dificuldades, definindo-as como se vê a seguir.

- Dificuldades na identificação daquilo que realmente é uma função e de sucessões como um caso de função. Habitualmente, os estudantes, quando utilizam critérios para comprovar o caráter funcional de um objeto matemático, não o correspondem necessariamente com a definição formal da noção de função, e sim como função-fórmula.
- Dificuldades para superar uma concepção puramente processual da noção de função e tornando-se capaz de relacionar, de maneira complexa, suas dimensões de processo e de objeto, para desenvolver uma concepção procedimental: surge quando os estudantes precisam considerar funções iguais, definidas por processos equivalentes, porém diferentes.
- Dificuldades para relacionar os diferentes registros semióticos que permitem representar e trabalhar com funções: isso resulta da conversão entre os registros de representação, fundamentalmente na conversão de um registro

gráfico para um algébrico, bem como das dificuldades ligadas ao uso de informações que se referem a diferentes noções, mas dentro do mesmo registro.

- Dificuldades para transcender o pensamento numérico e algébrico: os estudantes não percebem, realmente, qual o interesse e a utilidade do pensamento funcional.

Para Maranhão (1996), as dificuldades encontradas pelos estudantes estão relacionadas ao fato de o ensino de funções ser proposto de modo a contemplar uma grande quantidade de informações sem conexões e que não lhes trazem significado. Barreto (2011), concorda com esses aspectos, relatando que esses temas geralmente são tratados de forma independente, sem conexão alguma entre eles e com poucas situações em que se fazem referências às aplicações da Matemática às outras Ciências. Ainda, segundo o autor, devido à sua abrangência, as funções apresentam um número elevado de dificuldades, concepções diversas e múltiplas representações, fazendo-se necessário compreender o sentido que esse conceito pode assumir em diferentes contextos, quais significados o aluno pode produzir e de que formas isso se desenvolve no ambiente escolar.

Delgado (2010) salienta, ainda, que a assimilação do conceito de função pelo aluno, exige dele um poder de abstração acentuado, devido ao fato de possuir representatividade em diferentes campos do conhecimento e

> [...] isso traz aos estudantes uma dificuldade adicional, pois não estão acostumados, em sua maioria, a trabalhar conteúdos que exigem abstração. O desenvolvimento do conceito de função é complexo porque exige, também, o domínio de muitos sub-conceitos, tais como: variáveis dependente e independente; domínio, contradomínio e imagem; crescimento ou decrescimento; representação gráfica discreta ou contínua (DELGADO, 2010, p. 47).

Além disso, de acordo com o autor, muitos pesquisadores relatam que os alunos encontram dificuldades em relação à articulação envolvendo a forma algébrica e a geométrica de representar uma função. Constataram que a passagem da forma gráfica para a algébrica apresenta maior obstáculo do que a passagem da forma algébrica para a gráfica. Também concluíram que os estudantes apresentam dificuldades nas tarefas de interpretação das informações contidas em representações gráficas.

Já para Barreto (2011), muitos alunos têm dificuldades, na compreensão do conceito de variável, em lidar com expressões algébricas e, ainda mais, em expressar relações generalizadas, pois comumente não sentem a necessidade de generalização, sugerindo que o estudo das funções deveria iniciar a partir de representações numéricas, gráficas e contextualizadas, que são mais intuitivas e possuem um apelo mais visual, tal como apontado por Bergeron e Herscovics (1982).

Ainda conforme o autor, as funções podem ser entendidas como um conceito que trata de problemas de variação e quantificação de fenômenos, ou seja, como o estudo de relações entre grandezas que variam (variáveis dependente e independente). Tendo em vista essa noção, esse autor destaca aspectos importantes de serem desenvolvidos na escola, tais como os apresentados a seguir.

- Os de natureza algébrica: onde se deve priorizar a ideia de relação que está por trás do conceito de função, valorizando os aspectos mais intuitivos e relacionais e dando menor ênfase às equações e expressões algébricas.
- As diferentes formas de representação: podem ser representadas por tabelas, gráficos, regras verbais, regras matemáticas, bem como modelos e, quando desenvolvidas de forma articulada, levam a uma compreensão mais abrangente do conceito, assim como do problema ou situação que pode estar sendo representada.
- A aplicação a problemas e situações da vida e de outras ciências: o estudo das funções pode ser associado a noções históricas do conceito de função e deve servir de instrumento para estudar fenômenos e situações das outras ciências, constituindo-se um meio de descrição, explicação, previsão e, quando possível, controle.
- Articulação com outros tópicos da própria Matemática: o estudo das funções pode ser articulado com as progressões, com sequências obtidas através da recursividade, sucessões geométricas e outras definidas por recorrência e de domínio discreto (BARRETO, 2011).

Por sua vez, Magarinus (2013) destaca que os professores devem possibilitar aos alunos o contato com várias formas de representação de Funções e articulá-las permanentemente, podendo representá-las através da relação entre dois conjuntos mediante diagrama de flechas, tabelas, gráficos, algebricamente ou através da representação verbal. Dessa forma, busca-se a compreensão dos conceitos matemáticos relacionadas à noção de representação, sendo necessário que o indivíduo tenha contato com diferentes formas de representar um mesmo objeto de estudo e transitar por elas.

Além da transição entre as diversas formas de representar uma função, Trindade e Moretti (2000), argumentam que o professor deve explorar a representação verbal de funções e salientam que

> [...] os alunos devem ser estimulados a descreverem, em linguagem corrente, a lei que rege um fenômeno e a apresentarem argumentos que justifiquem a validade da lei para qualquer caso, para, então, representá-la em linguagem algébrica ou geométrica. A utilização da linguagem oral e escrita auxilia o aluno a organizar o próprio raciocínio, a fazer a passagem de uma forma de representação para a outra e explicitação das noções de variável, dependência, regularidade e generalizações (TRINDADE e MORETTI, 2000, p. 43-44).

Esses autores, também, chamam a atenção o para potencial que a representação gráfica possui para o aprendizado das funções, destacando que alguns aspectos são melhor explorados por esse tipo de representação. Também salientam que, na prática, os alunos, a partir da representação algébrica de uma função, constroem uma tabela de valores e depois traçam o gráfico da função.

Com relação ao uso de tabelas, Barreto (2011) indica que seu uso favorece a generalização, pois os alunos percebem que todas as informações numéricas da tabela se resumem na última linha. Quando se introduzem variáveis em tabelas para expressar relações generalizadas, os alunos adquirem prática em escrever expressões algébricas.

Nesse sentido, Ponte (1990) afirma que, para que o aluno seja capaz de construir tabelas, calcular valores numéricos, desenvolver um sentido quantitativo e adquirir sensibilidade para aproximações aceitáveis e inaceitáveis, deve-se oportunizar um trabalho com números provenientes de contextos da vida real. Dessa maneira, os alunos podem compreender melhor o significado das funções em relação aos casos concretos. Para o autor, a grande ênfase dada à terminologia abstrata, às técnicas e algoritmos não se constitui em uma ferramenta prática para lidar com situações interessantes, interiores ou exteriores à Matemática, constituindo-se meramente em um vocabulário que se memoriza sem compreender e valorizar.

Ainda, segundo Ardenghi (2008, p. 65), o professor deve dar início ao estudo de funções

> [...] abordando a passagem da linguagem natural para tabelas e vice-versa; propondo gráficos e tabelas que representam funções, propor atividades nos quadros algébricos e geométricos com as respectivas mudanças, levando em conta as concepções prévias dos alunos sobre esse conceito de função, quando de sua apresentação, e que fiquem atentos com as imagens que são formadas pelos alunos sobre esse conceito; que os professores realizem um trabalho especial de acompanhamento com alunos que apresentavam pouco domínio dos conteúdos anteriores ao ensino de funções; que possibilite a

> troca de informações entre os alunos; que o professor utilize linguagens menos formais, que possam ser acessíveis aos alunos, no início da apresentação do conceito de função, e que fique atento às diversas representações existentes no conceito de função, oferecendo atividades de tratamento e conversão das mesmas.

Almeida e Brito (2005) sugerem que o estudo de funções seja feito por meio de situações que evidenciem seu caráter dinâmico, permitindo ao aluno compreender o conceito de variável, expressar a relação de dependência entre duas variáveis e identificar, entre elas, a variável dependente e independente, garantindo, assim, a aprendizagem do conceito de função, dos diferentes tipos de função e dos conceitos que se relacionam com o estudo desse tema.

Com relação à ideia de variável, Barreto (2011) salienta que a compreensão desse conceito implica a capacidade de integrar seus diferentes aspectos, sendo necessário simbolizá-los, manipulá-los e interpretá-los. Colaborando com o autor, Delgado (2010, p. 37) salienta que, para entender uma variável,

> [...] é preciso reconhecer e identificar, em um problema, a presença de algo desconhecido, que pode ser determinado ao serem consideradas as restrições e condições dadas no enunciado. É necessário interpretar o símbolo que representa a variável como um valor específico e ter condições de encontrá-lo a partir de operações e manipulações algébricas e aritméticas. Compreender a variável como número genérico implica em ser capaz de reconhecer padrões em sequências numéricas ou geométricas, em famílias de problemas, e encontrar, ou deduzir, regras e métodos gerais que descrevem esses problemas. E, para entender as variáveis em uma relação funcional, deve-se reconhecer nos problemas, a correspondência e dependência das variáveis envolvidas e sua variação conjunta, independentemente da representação dada, a qual pode ser verbal, algébrica, tabular ou gráfica.

Levando-se em conta esses aspectos mencionados, tanto com relação às dificuldades encontradas para o ensino e aprendizagem das funções quanto pelas diferentes formas de representá-las, entende-se que é indispensável que os educadores busquem outras estratégias de apresentar, desenvolver e trabalhar esse tema, buscando articular, de forma permanente, as diversas formas de representação, superando, assim, as dificuldades na compreensão das ideias/conceitos em torno das Funções, mudando a ênfase, o ponto de vista e as abordagens, podendo contribuir para amenizar ou até mesmo solucionar alguns problemas vivenciados por professores e alunos com relação a esse tema.

2.5 AS FUNÇÕES NOS DOCUMENTOS OFICIAIS

Conforme destacam os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 1999) e as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (OCNEM) (BRASIL, 2002), o ensino da Matemática pode contribuir para que os alunos desenvolvam habilidades e competências relacionadas à representação, compreensão, comunicação, investigação e contextualização sociocultural. Torna, assim, indispensável a escolha de conteúdos os quais permitam que o aluno, ao sair da educação básica, tenha condições de usar a Matemática para

> [...] resolver problemas práticos do quotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico (BRASIL, 2006, p, 69).

Dessa forma, a escolha de um conteúdo ou tema deve ser de forma cuidadosa e criteriosa, permitindo uma articulação lógica entre diferentes ideias, conceitos, aplicações e resolução de situações-problema os quais possibilitem maior significação para a aprendizagem (BRASIL, 2002).

Um desses temas de interesse, destacados pelos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, referem-se a funções, pois a mesma

> [...] desempenha um papel importante para descrever e estudar, através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos, tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. Cabe, portanto, ao ensino do Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações-problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática (BRASIL, 1999, p. 43).

Essas colocações sugerem ao professor a elaboração de atividades que permitam aos alunos observarem e explorarem o conceito de função em diversas áreas do conhecimento, sendo que seu estudo pode ser iniciado com uma exploração qualitativa das relações entre duas grandezas em diferentes situações: idade e altura; área do círculo e raio; tempo e distância percorrida; tempo e crescimento populacional; tempo e amplitude de movimento de um pêndulo (BRASIL, 2006).

Além disso, segundo esse documento,

> [...] é interessante provocar os alunos para que apresentem outras tantas relações funcionais e que, de início, esbocem qualitativamente os gráficos que representam essas relações, registrando os tipos de crescimento e decrescimento (mais ou menos rápido). É conveniente solicitar aos alunos que expressem, em palavras, uma função dada de forma algébrica, por exemplo, $f(x) = 2x + 3$, como a função que associa a um dado valor real o seu dobro, acrescido de três unidades; isso pode facilitar a identificação, por parte do aluno, da ideia de função em outras situações, como, por exemplo, no estudo da cinemática, em Física. É importante destacar o significado da representação gráfica das funções, quando alteramos seus parâmetros, ou seja, identificar os movimentos realizados pelo gráfico de uma função quando alteramos seus coeficientes (BRASIL, 2006, p.72).

As Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 2002) salientam que o estudo das funções permite que o aluno adquira a linguagem algébrica, indispensável para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, possibilitando a construção de modelos descritivos de fenômenos e conexões da Matemática com outras áreas do conhecimento. Dessa maneira, os problemas de aplicação devem introduzir o estudo de funções, servindo de contexto e motivação para a aprendizagem dos conceitos envolvidos neste tema. Assim, a ênfase desse estudo deve estar no conceito de função e em suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções. Ainda, de acordo com o esse documento, os

> [...] problemas de aplicação não devem ser deixados para o final desse estudo, mas devem ser motivo e contextos para o aluno aprender funções. A riqueza de situações envolvendo funções permite que o ensino se estruture permeado de exemplos do cotidiano, das formas gráficas que a mídia e outras áreas do conhecimento utilizam para descrever fenômenos de dependência entre grandezas. O ensino, ao deter-se no estudo de casos especiais de funções, não deve descuidar de mostrar que o que está sendo aprendido permite um olhar mais crítico e analítico sobre as situações descritas (BRASIL, 2002, p.121).

Por outro lado, os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 1999) chamam a atenção para o fato de que, após a definição de função, o estudo de conjuntos e relações é abandonado, uma vez que, para a análise dos diferentes tipos de função, esse estudo é desnecessário. O documento destaca que o ensino pode ser iniciado diretamente pela noção de função para descrever situações de dependência entre duas grandezas. Além disso, salientam que a linguagem excessivamente formal deve ser moderada e, em determinados momentos, deixada de lado.

Já as Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (OCNEM) (BRASIL, 2006) argumentam que o estudo de funções pode prosseguir com os diferentes modelos, os quais podem ser tomados de diferentes áreas do conhecimento (queda livre, movimento uniforme e uniformemente acelerado, crescimento de bactérias, quantidade de medicamento, rendimentos financeiros e consumo de energia elétrica). Salienta, também, que

> [...] sempre que possível, os gráficos das funções devem ser traçados a partir de um entendimento global da relação de crescimento/decrescimento entre as variáveis. A elaboração de um gráfico por meio da simples transcrição de dados tomados em uma tabela numérica não permite avançar na compreensão do comportamento das funções (BRASIL, 2006, p. 72).

Além disso, esse documento aponta que o “professor deve ficar atento ao fato de que os alunos identificam sistematicamente, de forma equivocada, crescimento com proporcionalidade direta e decrescimento com proporcionalidade inversa” (BRASIL, 2006, p. 73). É interessante, também, que o professor apresente e aborde situações do quotidiano para ilustrar esses diferentes tipos de crescimento e decrescimento de grandezas.

Com relação às funções, os documentos oficiais apontam que o estudo desse tema deve prosseguir com os diferentes modelos, dos quais destaca o linear, quadrático, exponencial, logarítmico e trigonométrico, entre outros. Também fornecem indicações de como deve ser abordado cada modelo e suas características mais relevantes.

Com relação ao modelo linear ($f(x) = a.x$) e proporcionalidade direta, o OCNEM (BRASIL, 2006) argumenta que esses devem ser colocadas em estreita relação, buscando evidenciar que a proporcionalidade direta é um importante e particular modelo de crescimento, sendo interessante discutir o modelo de decrescimento com proporcionalidade inversa ($f(x) = a/x$).

Mencionam, também, que, em alguns momentos, deve ser trabalhada a função afim ($f(x) = a.x + b$). Sobre esse aspecto, no Parâmetro Curricular Nacional (PCN), encontra-se que

> [...] um exemplo interessante para que os alunos expressem e generalizem relações entre números é solicitar que adivinhem a regra, para transformar números, inventada pelo professor, como: um aluno fala 3 e o professor responde 8, outro fala 5 e o professor 12, para o 10, o professor responde 22, para o 11, responde 24 etc.; o jogo termina quando concluírem que os números respondidos é o dobro do pensado, acrescentando 2 unidades, ou o número respondido é sempre o dobro do consecutivo do pensado. Poderão também discutir as representações $y = 2x + 2$ ou $y = 2\,(x + 1)$ e a equivalência entre elas (BRASIL, 1998, p. 118).

Já o estudo da função quadrática, segundo o OCNEM (BRASIL, 2006), pode ser motivado via problemas de aplicação, nos quais é necessário encontrar um ponto de máximo, coordenadas do ponto de máximo e mínimo e zeros da função. Tal estudo pode ser realizado de forma que o aluno consiga estabelecer as relações entre o gráfico e os coeficientes de sua expressão algébrica, evitando-se a memorização de regras. Aponta, também, que o trabalho

> [...] com a forma fatorada ($f(x) = a. (x - m)^2 + n$) pode ser um auxiliar importante nessa compreensão. Nesse estudo, também é pertinente deduzir a fórmula que calcula os zeros da função quadrática (a fórmula de Baskara) e a identificação do gráfico da função quadrática com a curva parábola, entendida esta como o lugar geométrico dos pontos do plano, que são equidistantes de um ponto fixo (o foco) e de uma reta (a diretriz) (BRASIL, 2006, p. 73).

De acordo com o PCN+ Ensino Médio (BRASIL, 2002), as funções exponencial e logarítmica são utilizadas para descrever e representar a variação de duas grandezas em que o crescimento da variável independente é muito rápido, sendo aplicadas, principalmente, na Matemática Financeira, crescimento de populações, pH de substâncias. Explicita, também, que a resolução de equações logarítmicas e exponenciais pode ter sua ênfase diminuída ou suprimida dependendo das condições e dos objetivos traçados.

A OCNEM (BRASIL, 2006, p. 93) aponta que, antes de se realizar um estudo das funções trigonométricas, é necessário desenvolver

> [...] a trigonometria, a qual deve anteceder a abordagem das funções seno e co-seno e tangente, priorizando as relações métricas no triângulo retângulo e as leis do seno e do co-seno, como ferramentas essenciais a serem adquiridas pelos alunos no ensino médio. Na introdução das razões trigonométricas seno e co-seno, inicialmente para ângulos com medida entre 0^0 e 90^0, deve-se ressaltar que são as propriedades de semelhança de triângulos que dão sentido a essas definições; segue-se, então, com a definição das razões para ângulos de medida entre 90^0 e 180^0. A partir das definições e de propriedades básicas de triângulos, devem ser justificados os valores de seno e co-seno relativos aos ângulos de medida 30^0, 45^0 e 60^0.

Após esse trabalho inicial com a trigonometria, deve-se dar início ao estudo das funções trigonométricas, buscando fazer com que o aluno entenda que são extensões das razões trigonométricas. É importante, também, dar aos alunos a oportunidade de traçar gráficos referentes às funções trigonométricas e que essas sejam associadas aos fenômenos que apresentam comportamento periódico (BRASIL, 2006).

Outro aspecto importante mencionado no OCNEM (BRASIL, 2006) são as progressões aritmética e geométrica, as quais devem ser definidas como funções afim e exponencial, em que o domínio é o conjunto dos números naturais e não devem ser tratadas como um tópico independente, em que o aluno não as reconhece como funções já estudadas.

Analisando os apontamentos contidos nesses documentos oficiais, percebe-se que todo o aprendizado que pode ser desenvolvido perde seu sentido, se não for explicitada para os alunos a importância que estes possuem no cotidiano e para as demais áreas do conhecimento.

2.5.1 Base Nacional Comum Curricular

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que os estudantes devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica (BRASIL, 2018). Foi organizada e estruturada para todas as áreas do conhecimento, levando em consideração os componentes curriculares, os princípios éticos, políticos e estéticos das Diretrizes e Bases da Educação Nacional (BRASIL, 2018). A partir do que preconizam esses documentos, foram estabelecidas dez competências gerais que se inter-relacionam e perpassam todos os componentes curriculares, sobrepondo-se e interligando-se na construção de conhecimentos e habilidades, bem como na formação de atitudes e valores (BRASIL, 2018).

Competência, na BNCC, é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho, ou seja, os estudantes devem aprender a resolver problemas, a trabalhar em equipe com base em propósitos que direcionam para a formação humana integral e a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva (BRASIL, 2018).

Já com relação à Matemática para o Ensino Médio, esse documento propõe a consolidação, a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens desenvolvidas no Ensino Fundamental. Salienta que, nessa nova etapa, os conhecimentos devem ser explorados de forma inter-relacionada, a fim de possibilitar que os estudantes construam uma visão mais integrada da Matemática, sem perder de vista a perspectiva de sua aplicação à realidade (BRASIL, 2018).

A BNCC reitera que, no Ensino Médio,

> [...] o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, conforme anteriormente anunciado. Nesse contexto, quando a realidade é a referência, é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos estudantes do Ensino Médio, envolvidos em diferentes graus dados por suas condições socioeconômicas, pelos avanços tecnológicos, pelas exigências

> do mercado de trabalho, pela potencialidade das mídias sociais, entre outros (BRASIL, 2018, p. 518).

Dessa forma, de acordo com o documento, a área de Matemática e suas Tecnologias possui a responsabilidade de aproveitar todo o potencial já desenvolvido pelos estudantes nos anos anteriores, para promover ações que estimulem e provoquem seus processos de reflexão e de abstração e que deem sustentação a modos de pensar criativos, analíticos, indutivos, dedutivos e sistêmicos, bem como que favoreçam a tomada de decisões orientadas pela ética e o bem comum (BRASIL, 2018).

Mas, para que esses propósitos se concretizem, é necessário que os estudantes possam

> [...] desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, argumentar, comunicar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados (BRASIL, 2018, p. 518).

Portanto, os estudantes devem desenvolver competências que envolvam os aspectos a seguir.

- Raciocínio- é necessário que os estudantes possam, em interação com seus colegas e professores, investigar, explicar e justificar os problemas resolvidos, com ênfase nos processos de argumentação matemática.
- Representação- pressupõe a elaboração de registros para evocar um objeto matemático.
- Comunicação- os estudantes precisam apresentar e justificar seus resultados, interpretar os resultados dos colegas e interagir com eles.
- Argumentação- formulação e testagem de conjecturas, com a apresentação de justificativas (BRASIL, 2018).

Com base nesses destaques, o documento salienta que as aprendizagens previstas para o Ensino Médio são fundamentais para o letramento matemático dos estudantes, possibilitando que os mesmos aprofundem e ampliem as habilidades já trabalhadas ou adquiridas durante o percurso do Ensino Fundamental. Permite, também, a apropriação de ferramentas para compreender a realidade e propor as ações de intervenção especificada para essa etapa (BRASIL, 2018).

Considerando esses pressupostos, a área de Matemática e suas Tecnologias deve garantir aos estudantes o desenvolvimento de competências e habilidades específicas para os campos da Aritmética, Álgebra, Geometria, Probabilidade e Estatística, Grandezas e Medidas, sendo que a Base Nacional Comum Curricular apresenta competências e habilidades relacionadas a cada um dos campos (BRASIL, 2018).

Porém, como o foco da pesquisa está voltado para o campo da Álgebra, mais especificamente relacionado ao conteúdo de Funções, optou-se por destacar apenas as competências e habilidades propostas pela BNCC envolvendo esse tema, bem como os conteúdos específicos relacionados, os quais são apresentados no quadro da Figura 4.

Figura 4 - Competências, habilidades e conteúdos sobre Funções na BNCC

Competências	Habilidades	Conteúdos
Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.	**(EM13MAT101)** Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.	Função, Função Polinomial do 1ª e 2ª grau (Afim e Quadrática) Composta, Exponencial, Logarítmica e Trigonométrica.
Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.	**(EM13MAT302)** Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1ª ou 2ª graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.	Função Afim e Quadrática
	(EM13MAT303) Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.	Função Afim e Exponencial
	(EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.	Função Exponencial
	(EM13MAT305) Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.	Função Logarítmica

	(EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de Álgebra e Geometria.	Função Trigonométrica
	(EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas, no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e Geometria Dinâmica.	Função Afim
Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.	**(EM13MAT402)** Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e Geometria Dinâmica, entre outros materiais.	Função Quadrática
	(EM13MAT403) Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica, expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.	Função Exponencial e Logarítmica
	(EM13MAT404) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.	Função Afim, Composta, Quadrática, Exponencial, Logarítmica e Trigonométrica.
	(EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar, algebricamente, essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.	Função Afim

Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.	**(EM13MAT502)** Investigar relações entre números expressos em tabelas, para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar, algebricamente, essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo y = ax^2	Função Quadrática
	(EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.	Função Quadrática
	(EM13MAT507) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.	Função Afim
	(EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.	Função Exponencial

Fonte: adaptado de BRASIL (2018).

De acordo com a BNCC (BRASIL, 2018), as possibilidades de organização curricular das aprendizagens propostas são múltiplas, bem como a possibilidade de se adotar outras organizações, recorrendo tanto às habilidades definidas neste documento quanto a outras que possam ser necessárias e que contemplem especificidades e demandas próprias dos sistemas de ensino e das escolas. Além disso, é importante que os saberes matemáticos sejam fundamentados em diferentes bases, de modo a assegurar a compreensão de fenômenos do próprio contexto cultural do indivíduo e das relações interculturais (BRASIL, 2018).

Assim, cabe ressaltar que, quando foi planejada, organizada e constituída a proposta de intervenção com foco no estudo das Funções, apresentada nesta investigação, a Base Nacional Comum Curricular estava em processo de formulação, análise e reformulação, porém o que se tinha disponível da mesma, assim como o que está posto nos documentos oficiais vigentes, foram considerados em sua constituição.

Pondera-se, também, que este documento não apresentou significativas mudanças, no que se refere às competências e habilidades a serem desenvolvidas no estudo de Funções no Ensino Médio, se comparados com o que está preconizado nos Parâmetros curriculares Nacionais e outros documentos oficiais. Porém, é possível perceber, na BNCC para o Ensino Médio, um menor detalhamento com relação aos conteúdos, ficando a cargo das instituições de ensino organizarem os mesmos, de acordo com as habilidades propostas no documento. Entende-se, assim, que os pressupostos apresentados nas versões preliminares desse documento estão, em grande parte, sendo atendidos ou em consonância com a proposta de intervenção desenvolvida.

2.6 FUNÇÕES: PESQUISAS REALIZADAS

Visando aprofundar os estudos em torno das discussões e investigações desenvolvidos sobre o conteúdo matemático Função, voltou-se o olhar para as investigações realizadas no Brasil, bem como em outros países da América do Sul e da Europa a partir do ano de 2000. Buscou-se, em um primeiro momento, teses ou dissertações que se apoiaram no Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática como aporte teórico ou metodológico, voltadas para o ensino e aprendizagem de Funções. Em seguida, realizou-se uma pesquisa, buscando teses e dissertações também voltadas para esse conteúdo, embasadas em outros referencias teóricos, mas que poderiam auxiliar ou indicar caminhos para a elaboração/construção desta proposta de intervenção.

2.6.1 As Funções e o Enfoque Ontossemiótico

Na busca por trabalhos que pudessem auxiliar ou indicar caminhos para a elaboração, construção e implementação da proposta de estudos com foco no ensino e aprendizagem do objeto matemático Funções, foram identificadas três pesquisas que tomaram como aporte teórico e metodológico os pressupostos do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática, as quais se entendeu serem relevantes para a pesquisa a ser desenvolvida. No quadro da Figura 5, apresentam-se os trabalhos identificados.

Figura 5 - Pesquisas sobre Funções na Perspectiva do EOS

Ano	Título	Tipo	Autor
2016	Evaluación de los Conocimientos Didáctico-Matemáticos de futuros Profesores de Matemáticas al hacer Transformaciones de las Representaciones de una Función.	Tese	Tulio Rafael de Armas Amaya
2015	Significados pretendidos por el Currículo de Matemáticas Chileno sobre la noción de Función.	Tese	Yocelyn Elizabeth Parra Urrea

2015	Objetos Personales Matemáticos y Didácticos del Profesorado y Cambio Institucional: el caso de la contextualización de funciones.	Tese	Ana Beatriz Ramos De Pacia

Fonte: a pesquisa.

No que segue, apresentam-se elementos relacionados ao embasamento teórico e metodológico dos trabalhos mencionados, destacando-se, também, seus resultados.

Amaya (2016) desenvolveu sua investigação junto a 56 futuros professores do programa de Licenciatura em Matemática da Universidade de Sucre, durante quatro semestres consecutivos. Buscou avaliar a faceta epistêmica dos conhecimentos didático-matemáticos desses futuros educadores ao realizarem transformações nas representações de uma função. A pesquisa se embasa nos fundamentos no modelo do conhecimento didático-matemático proposto por Godino (2009), inserindo-se em um marco metodológico misto, pois se combinam técnicas e métodos de investigação qualitativos e quantitativos.

Para o diagnóstico das informações, realizou uma análise comparativa das médias e associações das respostas dadas pelos estudantes. Para tal, utilizou tabelas de contingência e do coeficiente qui-quadrado de Pearson. Caracterizou, também, as configurações cognitivas, os processos e os elementos matemáticos primários que emergiram dos professores, ao dar suas respostas aos diferentes itens/tarefas do questionário, os quais foram analisados por meio das configurações do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática.

O autor salienta, ainda, que, por meio do conjunto de atividades propostas, foram encontradas, nas respostas dos participantes, características distintas do conhecimento comum do conteúdo, enquanto as configurações cognitivas, processos e elementos matemáticos primários encontrados são pobres e ligeiramente heterogêneos, sendo que um pequeno grupo apresentou evidências distintas do conhecimento avançado e especializado do conteúdo e, em um contexto mais amplo, limitações sérias foram encontradas na produção de representações de uma função, no estabelecimento de congruências entre seus elementos e no momento de decidir sobre a pertinência processual, bem como na combinação de elementos equivalentes nas diferentes representações, evidenciando a necessidade de se fortalecer esse conhecimento.

Para Amaya (2016), a formação recebida pelos futuros professores apresenta sérias lacunas com relação ao conhecimento ampliado do conteúdo e seu conhecimento especializado do conteúdo, além da carência de saberes específicos do conteúdo Função, o que prejudica o reconhecimento de elementos em uma situação funcional e na transformação necessária dos conhecimentos institucionais no planejamento das aulas, nas explicações durante a aula ou na análise das produções dos alunos. Salienta-se que esses aspectos são necessários para uma adequada transposição didática desse conceito e para facilitar sua compreensão pelos alunos e orientar adequadamente uma aula.

Parra Urrea (2015), em sua investigação, buscou reconstruir o significado holístico da noção de função. Para tanto, realizou uma revisão histórico-epistemológica-didática do desenvolvimento desse objeto Matemático. Com a ajuda de ferramentas do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática, mais especificamente a ferramenta epistêmica, caracterizou o significado pretendido pelo currículo chileno a partir das práticas matemáticas propostas pelos programas de estudo e pelos livros didáticos desse país.

Em seu estudo, buscou avaliar a representatividade dos significados pretendidos pelo currículo de Matemática sobre a noção de função frente ao significado holístico de referência dessa noção. Para tanto, realizou um estudo sistemático do tipo histórico-epistemológico para: identificar as configurações epistémicas que estão associadas a um significado parcial do objeto função; organizar os significados parciais para a reconstrução do significado holístico dessa noção; estudar e caracterizar o tipo de configuração epistémico-didáticas proposta pelos programas de estúdio quando abordam a noção de função; estudar e analisar os tipos de configurações epistémico-didáticas desenvolvidas nos livros didáticos; analisar o vínculo entre os significados pretendidos pelos planos de ensino frente aos significados pretendidos nos livros didáticos e desenvolver um estudo de correspondência entre os significados pretendidos pelo currículo chileno a respeito do significado holístico de referência sobre a noção de função.

Essa autora salienta que essa investigação possibilitou avaliar a representatividade e a riqueza matemática dos significados pretendidos pelo currículo chileno, mostrando, também, novos saberes a respeito da caracterização dos conhecimentos que os futuros professores deveriam ter para questionar idoneamente as aprendizagens sobre a noção de Função. Afirma, também, que o estudo por meio da idoneidade epistémica permitiu perceber que o currículo chileno se baseia fundamentalmente no conceito de função como uma relação entre variáveis. Assim, é necessário efetuar investigações curriculares que voltem a atenção para a adequação dos significados pretendidos a respeito do significado holístico de função.

Já Ramos de Pacia (2015) desenvolveu sua pesquisa sob o marco teórico do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática, cujo objetivo central foi analisar o papel que os professores desempenham na introdução de mudanças no processo instrucional. Mais especificamente, investigar o papel que desempenham os objetos pessoais, matemáticos e didáticos dos professores na incorporação de situações contextualizadas no processo de ensino e aprendizagem das funções, no curso "Introdução à Matemática", da Faculdade de Ciências Económicas e Sociais da Universidade de Carabobo, Venezuela, bem como analisar as competências dos estudantes na resolução de situações contextualizadas envolvendo as Funções.

A autora justifica a pesquisa pelo fato de o estudo das Funções ser desenvolvido pelos professores, junto aos estudantes, de forma descontextualizada. Ressalta, também, a necessidade de se mudar essa prática, para que os mesmos se apropriem de ideias ou conceitos relativos a esse conteúdo, permitindo, assim, que os alunos possam aplicá-los em situações-problema característicos da futura prática profissional.

Buscando modificar esse panorama, a pesquisadora desenvolveu e implementou um "Seminário-Oficina", cujo objetivo era proporcionar ao corpo docente a discussão sobre a possibilidade (ou não) de introduzir a abordagem contextualizada no ensino de Funções. O seminário foi organizado por sessões em que, antes de cada momento, o planejamento anterior era exposto e, posteriormente, eram realizados comentários sobre o mesmo. Após o desenvolvimento das atividades, foram selecionados certos segmentos argumentativos, os quais foram analisados, levando em conta o consenso alcançado, os critérios de adequação utilizados pelos professores e as práticas que fazem parte dos significados pessoais, matemáticos e didáticos do corpo docente.

Segundo essa autora, após o término do seminário, foram analisadas as práticas discursivas dos professores e dos estudantes, segundo a Teoria da Ação Comunicativa de Habermas e por meio dos critérios da idoneidade didática propostos pelo Enfoque Ontossemiótico. Por meio das análises produzidas, foi possível perceber que o estudo do significado pretendido para o objeto função, na instituição investigada, corresponde a um ensino descontextualizado e que, mesmo perdendo coerência em relação ao modelo formalista, ainda mantém a maioria de suas características.

Outro aspecto mencionado é que, ao analisar as competências dos docentes na resolução de situações contextualizadas envolvendo Funções, os mesmos não incorporaram práticas que permitam resolver tais problemas não rotineiros, os quais necessitam, para sua resolução, de conhecimentos advindos desse objeto matemático. Esse baixo nível de competência se produz, principalmente, quando os professores interpretam gráficos de situações-problema e realizam conversões de uma forma de representação de uma função para outra.

Ramos de Pacia (2015) argumenta que, ao analisar as competências dos alunos em relação à resolução de situações contextualizadas envolvendo o significado global do objeto função, os mesmos não assimilaram práticas adequadas, as quais permitissem que fossem resolvidos problemas rotineiros envolvendo esse conteúdo.

Por fim, argumenta que o Enfoque Ontossemiótico tinha sido utilizado, até então, apenas para analisar uma prática específica, mas não havia sido usado para analisar uma unidade. Pondera, ainda, que o mesmo possui ferramentas, critérios e níveis de análise que são considerados relevantes e de grande operabilidade e versatilidade para analisar uma prática específica, bem como para avaliar os significados pretendidos em uma unidade de um livro de texto (uso global).

A análise desses três trabalhos foi relevante, pois mostrou as diferentes possibilidades de se utilizar o Enfoque Ontossemiótico para desenvolver, estruturar, analisar e validar uma proposta de trabalho com um tema específico ou geral.

3 ENFOQUE ONTOSSEMIÓTICO DO CONHECIMENTO E DA INSTRUÇÃO MATEMÁTICA (EOS)

A Educação Matemática tem por objetivo específico o estudo de fatores que condicionam os processos de ensino e aprendizagem da Matemática e o desenvolvimento de programas que visam à melhoria desses modelos, buscando, assim, tornar essa área de pesquisa um sistema interativo que pesquisa, desenvolve e prática (GODINO, 2008). Para tanto, segundo o autor, é necessário que a mesma leve em consideração as contribuições e aspectos de diversas áreas como a Psicologia, a Pedagogia, a Filosofia e a Sociologia, além de basear-se numa análise da natureza dos conteúdos matemáticos e seu desenvolvimento cultural e pessoal.

Tomando como referência esses aspectos, o grupo de pesquisa "Teoría y Metodología de Investigación en Educación Matemática", liderado pelo Prof. Juan Godino (GODINO, BATANERO e FONT, 2008; GODINO, CONTRERAS e FONT, 2006; GODINO, FONT e WILHELMI, 2008; FONT, PLANAS e GODINO, 2010; GODINO, RIVAS e ARTEAGA, 2012)[2], desenvolveu o Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (EOS), o qual constitui, de acordo com os autores, em um enfoque unificado da cognição e instrução matemática que busca comparar e articular pressupostos teóricos de teorias existentes na Educação Matemática, tais como Teoria das Situações Didáticas (TSD) (BROUSSEAU, 1978, 1986), Teoria Antropológica do Didático (TAD) (CHEVALLARD, 1985), Teoria dos Campos Conceituais (TCC) (VERGNAUD, 1990), Teoria dos Registros de Representações Semióticas (DUVAL, 1995, 1996), Dialética Instrumento-Objeto e Jogo de Marcos (DIO- JM) (DOUADY, 1986), entre outras, assim como superar os dilemas existentes entre os diversos paradigmas que competem entre si (realismo-pragmatismo, cognição individual-institucional, construtivismo-condutismo, entre outros). Segundo Godino, Batanero e Font (2008), para que isso seja possível, é necessário dispor de algumas ferramentas conceituais e metodológicas de distintas áreas, como a Semiótica, a Antropologia e a Ecologia, articuladas de maneira coerente com disciplinas como a Psicologia e a Pedagogia, que tradicionalmente consistem no ponto de referência imediato para a Educação Matemática.

---

[2] Os trabalhos citados referentes ao grupo de pesquisa liderado do Juan Godino estão disponíveis em: http://www.ugr.es/local/jgodino.

3.1 ORIGENS E MOTIVAÇÕES

Godino (2012) destaca que o Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (EOS) teve sua origem a partir dos estudos do grupo de pesquisa “Teoría y Metodología de Investigación en Educación Matemática[3]” da Universidade de Granada, na Espanha, no início dos anos 90. O EOS, de acordo com o autor, é o resultado da análise de fundamentos, questões e métodos de distintos marcos teóricos da Didática da Matemática e da Didática Fundamental da Matemática, além da aplicação de distintas ferramentas teóricas que surgiram a partir de trabalhos experimentais desenvolvidos pelo autor e demais pesquisadores como Carmen Batanero, Vicenç Font, Ángel Contreras, Miguel Wilhelmi e Núria Planas.

Para Godino (2012), essa variedade de teorias utilizadas como aportes teóricos para o ensino e aprendizagem da Matemática levou o grupo de pesquisadores a conjecturar sobre a necessidade de esclarecê-las, compará-las e articulá-las. Assim, a partir de reflexões epistemológicas sobre a Matemática, com base nas teorias já existentes, surgiram as questões iniciais do EOS: O que é um objeto matemático? Qual o significado de um objeto matemático (número, derivada, média, ...) em um determinado contexto ou quadro institucional? (GODINO, 2012).

Segundo o autor, os problemas iniciais abordados pelo EOS estavam relacionados a questões epistemológicas básicas, que buscam especificar e explicar a natureza do objeto matemático e sua emergência a partir de práticas matemáticas. Mais tarde, após essas primeiras reflexões, desenvolveram uma ontologia matemática explícita (tipos de objetos e processos matemáticos), a ser descrita em termos operacionais, bem como o significado do objeto matemático, tanto do ponto de vista institucional quanto pessoal.

Assim, conforme Godino et al. (2006), o grupo buscava a construção de um enfoque que articulasse o conhecimento matemático e a instrução matemática, com pressupostos antropológicos e socioculturais, um modelo cognitivo embasado na semiótica e um modelo instrucional, com bases sócio-construtivistas. Na Figura 6, destacam-se ideias referentes às teorias que embasam o desenvolvimento e a estruturação do EOS.

---

[3] Grupo de pesquisa coordenado pelo Professor Doutor Juan Díaz Godino (GODINO, 2002, 2008, 2012).

Figura 6 - Contribuições de teorias para a estruturação do EOS

AUTOR	TEORIA	CONTRIBUIÇÃO
Brousseau (1978,1986)	Teoria das Situações Didáticas	Significado de Objeto Matemático. Correspondência entre um objeto matemático e a classe de situações da qual emerge e que lhe dá sentido. Para cada objeto matemático, existe uma situação matemática (ou uma coleção de situações) cuja resolução deu origem e sentido a esse objeto; portanto, a aprendizagem escolar do objeto deve partir de tais situações, ou de adaptações apropriadas para as mesmas.
Wittgenstein (1953)	Filosofia da Matemática (Abordagem Antropológica)	Objetos matemáticos (cuja natureza não se explicita) são emergentes das práticas matemáticas. Jogo de linguagem, como elementos contextuais que relativizam os significados dos objetos matemáticos e lhes atribuem uma natureza funcional. Os objetos matemáticos que intervêm das práticas matemáticas e os emergentes das mesmas seguem o jogo de linguagem de que participam.
Peirce (1963)	Filosofia da Matemática (Abordagem Pragmática)	Objetos matemáticos (cuja natureza não se explicita) emergem das práticas matemáticas (intérprete, representante, objeto)
Chevallard (1985)	Teoria Antropológica da Didática	Por meio da TAD, são incorporados os conceitos de prática matemática, objeto matemático, relação institucional e pessoal ao objeto, fundamentando os fenômenos didático-matemáticos (ecologia dos saberes matemáticos).
Douady (1986)	Dialética Instrumento-Objeto e Jogo de Marcos	Incorporação da dualidade instrumento-objeto. Os conceitos matemáticos, por um lado, permitem a ação (instrumento); por outro lado, são vistos como entidades reutilizáveis em processos semelhantes e que podem ser parte de um discurso mais geral (objeto). A distinção instrumento-objeto pode ser interpretada em termos de subsistema de práticas operatórias e discursivas entre as quais se estabelecem relações dialéticas de mútua interdependência (conceitos, propriedades, procedimentos matemáticos).
Vergnaud (1990)	Teoria dos Campos Conceituais	Destaca as noções de esquemas, conceitos e teoremas em ação. Noção de significado como uma resposta a uma situação dada. Conceitos e teoremas devem ser colocados em jogo na solução de situações dadas. Conceitos-como-instrumento e conceitos-como-objeto (referente, significado e significante).
Ullman (1962) e Kutschera (1979)	Teorias Realistas e Pragmatistas (Filosofia)	Significado dos objetos matemáticos sob perspectivas pragmáticas e realistas. Concebe o significado como uma relação convencional entre sinais e entidades concretas, independentemente de signos linguísticos, apresentando, assim, um realismo conceitual.
Ernest (1991)	Pressupostos Ontológicos do Construtivismo Social	Objetos matemáticos devem ser considerados como símbolos de unidades culturais, emergentes de um sistema de uso ligado às atividades de resolução de problemas realizados por certos grupos de pessoas e que evoluem ao longo do tempo.
Hjelemslev (1963)	Teoria da Linguagem	Análise do significado linguístico dos objetos matemáticos, mas também dos próprios objetos (situações-problema, procedimentos, conceitos, proposições, argumentos, entre outros). Noção de função de signo como dependência entre um texto e seus componentes e entre os próprios componentes. Correspondências (relações de dependência ou função) entre um

		antecedente (expressão, significante, representante) e um consequente (conteúdo ou significado representado), estabelecidas por um sujeito (pessoal ou institucional) de acordo com um certo critério ou código de correspondência.
Blumer (1969)	Interacionismo Simbólico	"Objeto matemático" é qualquer entidade ou coisa à qual nos referimos, da qual falamos, seja real, imaginária ou de qualquer outro tipo, que intervém de algum modo na atividade matemática.
Duval (1995)	Teoria dos Registros de Representações Semióticas	Natureza mental (das representações internas) para o conhecimento matemático e que atribui um papel essencial nos processos de formação e compreensão das representações mentais (noesis) da linguajem, em suas diversas manifestações. Utilização de diversos sistemas de representação semiótica, suas transformações e conversões, para a semiose (produção e compreensão de representações materiais) que não é espontâneo e seu domínio deve ser um dos objetivos do ensino. Tipos de funções discursiva e meta-discursivas da linguagem discursiva, diferenciação funcional e coordenação de registros.

Fonte: traduzido e adaptado de Godino et al. (2006) e Godino (2012).

Ressalta Godino (2002) que, após o estudo de diferentes teorias de distintas áreas do conhecimento, o grupo passou a elaborar ferramentas que auxiliassem no ensino e aprendizagem da Matemática. Para o autor, essa construção foi realizada em três etapas, as quais foram refinadas progressivamente durante todo o processo, as quais passam a ser descritas na sequência.

Na primeira etapa, de acordo com Godino, Batanero e Font (2008), entre os anos de 1993 a 1998, foram desenvolvidas e refinadas progressivamente, as noções de "significado institucional e pessoal de um objeto matemático" (entendidos em termos de sistemas de práticas, nos quais o objeto é determinante para sua realização), bem como a sua relação com a noção de compreensão. Essas ideias estão centradas na investigação dos conhecimentos matemáticos institucionalizados, porém não se desconsidera o sujeito individual a quem é dirigido o processo educativo.

Ainda, de acordo com Godino (2012), foi nesse período que foram propostos, como noção básica para a análise epistémica e cognitiva, os sistemas de práticas manifestadas por um sujeito perante uma certa classe de situações-problema, sendo que, para isso, é necessária a interpretação das entidades conceituais envolvidas, bem como as situações problemáticas e os próprios meios expressivos e argumentativos que desencadeiam processos interpretativos.

Na segunda etapa, após 1998, Godino, Batanero e Font (2008) passaram a considerar necessária a elaboração de modelos ontológicos e semióticos mais detalhados. Assim, desenvolveram uma ontologia suficientemente rica, que pudesse descrever a atividade matemática e seus processos de comunicação.

Complementam os autores que, nesse período, foi necessário estudar, com maior profundidade e amplitude, as relações dialéticas entre o pensamento (as ideias matemáticas), a linguagem matemática (sistemas de signos) e as situações-problema cuja resolução necessita desses recursos. Assim, buscaram desenvolver uma ontologia e uma semiótica que pudessem estudar e analisar os processos de interpretação dos sistemas de signos matemáticos envolvidos no processo de interação didática.

Na terceira etapa, Godino, Contreras e Font (2006) e Godino, Batanero e Font (2008) voltaram-se para o estudo de modelos teóricos sobre a instrução Matemática e, a partir das limitações da Teoria das Situações Didáticas, desenvolvidas por Brousseau, propuseram a distinção de seis dimensões, com suas respectivas trajetórias, em um processo de Ensino e Aprendizagem da Matemática: epistêmica (relativa ao conhecimento institucional), docente (funções do professor), discente (funções do aluno), mediacional (relativa ao uso de recursos didáticos), cognitiva (génese de significados pessoais) e emocional (que contempla as atitudes, emoções, entre outras, dos alunos, relativas ao estudo da Matemática).

De acordo com os autores, o modelo ontológico e semiótico da cognição, desenvolvido e ampliado ao longo dessas três etapas, proporciona critérios que possibilitam a identificação das possíveis trajetórias epistêmicas e cognitivas e a adoção da "negociação de significados" como noção chave para a gestão das trajetórias didáticas. Sendo que, “a aprendizagem Matemática é concebida como o resultado dos padrões de interação entre os distintos componentes de tais trajetórias (GODINO; BATANERO; FONT, 2008, p. 11).

Portanto, durante estes três períodos, os autores buscaram desenvolver ferramentas teóricas que pudessem ser utilizadas para analisar, conjuntamente, o pensamento matemático, os objetos matemáticos que o acompanham, as situações e os fatores que condicionam seu desenvolvimento. Além disso, consideram “as facetas do conhecimento matemático que podem ajudar a confrontar e articular distintos enfoques de investigação sobre o ensino e a aprendizagem e avançar na direção de um modelo unificado da cognição e instrução matemática” (GODINO; BATANERO; FONT, 2008, p. 11).

A seguir, busca-se apresentar uma síntese dos pressupostos e noções que compõem o EOS, bem como os níveis de análise (ferramentas) utilizados para desenvolver, descrever, analisar e avaliar as práticas em um processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

3.2 ASPECTOS TEÓRICOS DO EOS

Segundo Godino (2012), o Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (EOS) é o resultado de um processo de reflexão que tem por objetivo analisar as relações entre o pensamento, a linguagem e as situações em que a atividade matemática ocorre. Além disso, segundo o autor, é o resultado da análise e tentativa de unificar diferentes pressupostos sob aspectos ontológicos, epistemológicos, cognitivos e instrucionais em Didática da Matemática e trata, especificamente, do conhecimento matemático e da instrução necessária para seu desenvolvimento.

Ressalta, ainda, que esse enfoque busca qualificar o processo de ensino e aprendizagem, assumindo concepções pragmáticas realistas sobre o significado dos objetos matemáticos, cujo significado depende do contexto e concepções antropológicas e semióticas do conhecimento matemático, tanto do ponto de vista institucional quanto pessoal (GODINO, 2012). O EOS apresenta como principais características: a articulação das facetas institucionais e pessoais do conhecimento matemático, a atribuição de um papel-chave à atividade de resolução de problemas e a incorporação coerente de pressupostos pragmáticos e realistas sobre o significado dos objetos matemáticos (GODINO; BATANERO; FONT, 2008).

Dessa forma, o ponto de partida do EOS, segundo Godino, Batanero e Font (2008), é a organização de uma ontologia dos objetos matemáticos que considere e articule três aspectos da Matemática: como atividade de resolução de problemas socialmente compartilhada, como linguagem simbólica e como sistema conceitual logicamente organizado. Assim, diante de uma determinada situação-problema definem-se conceitos de prática, objeto matemático e significado, com a finalidade de tornar evidente o conhecimento matemático (ANDRADE e KAIBER, 2012).

Segundo Andrade e Kaiber (2012, p. 3), “a partir do EOS, a noção de objeto matemático é ampliada, a fim de descrever a atividade matemática, seus produtos resultantes e os processos de comunicação matemática”. Assim, os “objetos matemáticos não são apenas conceitos, mas qualquer entidade ou coisa sobre a qual nos referimos ou falamos, seja real, imaginária ou de qualquer outro tipo que intervenha de algum modo, na atividade matemática" (GODINO, 2012, p. 238). Também, de acordo com Andrade e Kaiber (2012), pode-se entender que conceitos, propriedades, procedimentos e representações podem ser denominados objetos matemáticos.

Segundo Andrade e Kaiber (2012), o conhecimento, para Godino, está ligado ao estabelecimento de funções semióticas que são o produto de uma diversidade de conhecimentos que podem ser estabelecidos em diferentes circunstâncias, sejam elas preestabelecidas ou não. Assim, "entende-se que falar de representação (significado e compreensão) em Matemática implica, necessariamente, falar de conhecimento matemático" (ANDRADE; KAIBER, 2012, p. 3).

Já a compreensão, dentro do Enfoque Ontossemiótico, é vista como uma competência de entender as normas que regem a prática (ANDRADE; KAIBER, 2012). E a prática matemática, nessa visão, é toda ação ou expressão realizada para resolver problemas matemáticos, comunicar a outros a solução obtida, validar ou generalizar para outros contextos e problemas (GODINO; BATANERO; FONT, 2008). Ponderam, ainda, que essas práticas envolvem objetos ostensivos (símbolos e gráfios) e não ostensivos, que são representados pela forma textual, oral, gráfica e, inclusive, por meio de gestos.

Dessa forma, os significados internalizados pelos alunos dependem dos que são pretendidos, associados aos sistemas de práticas planejadas por um processo particular de instrução, bem como os significados efetivamente utilizados na instrução, e daqueles que são avaliados (GODINO; BATANERO; FONT, 2008).

Preocupados em qualificar o processo de ensino e aprendizagem da Matemática, Godino (2012, 2014), Font, Planas, Godino (2010), Godino Bataner e Font (2008), Godino, Font e Wilhelmi (2008), Godino, Contreras e Font (2006) elaboraram cinco níveis de análise didática que podem ser utilizados em um processo de estudo para descrever, explicar e avaliar as interações e práticas educativas que podem estar presentes nas salas de aula de Matemática. A Figura 7 apresenta os níveis de análise do EOS.

Figura 7 - Organização em níveis de análise do EOS

Fonte: Font, Planas e Godino (2010, p. 92).

Essa representação dos níveis de análise do EOS pode ser lida de modo ascendente, considerando-se, inicialmente, um sistema de práticas matemáticas do qual emergem objetos e processos matemáticos. Os quatro primeiros níveis de análise servem de ferramentas para uma didática descritivo-explicativa, enquanto o quinto nível se baseia nos quatro níveis anteriores e constitui uma síntese orientada para avaliar se as atividades implementadas são idôneas ou adequadas, visando à identificação de melhoras do processo de ensino e aprendizagem (FONT; PLANAS; GODINO, 2010). Assim, Andrade e Kaiber (2012, p. 4) destacam que "o primeiro e o segundo nível de análise são fundamentais para a organização do ensino, enquanto que o terceiro e o quarto nível voltam-se para implementação da prática e, por último, o quinto nível serve para melhorar o processo de ensino e reestruturá-lo". A Figura 8 apresenta as principais características dos níveis de análise didática do EOS.

Figura 8 - Características dos níveis de análise didática do EOS

Níveis de Análise	**Características**
Sistemas de Práticas	Planificação e implementação de um processo de estudo de uma noção, conceito ou conteúdo matemático, bem como as práticas relacionadas a esse processo.
Configurações de Objetos e Processos	Centrados nos objetos matemáticos e nos processos que intervêm na realização das práticas e o que emerge delas. Têm a finalidade de descrever a complexidade das práticas como fator explicativo dos conflitos semióticos produzidos em sua realização.
Trajetórias Didáticas	Consideram as interações entre professor e estudantes. Objetivam a identificação e descrição das interações, relacionando-as com a aprendizagem dos estudantes (trajetória cognitiva).
Dimensões Normativas	Referem-se ao sistema de normas relacionadas a convenções, hábitos, costumes, leis, diretrizes curriculares que regulam o processo de ensino e aprendizagem e que condicionam as configurações e trajetórias didáticas.
Idoneidade Didática	Necessitam da reconstrução de um significado de referência para os objetos matemáticos e didáticos pretendidos. Essa noção é desdobrada em seis dimensões e pode se constituir em uma síntese orientada à identificação de potenciais melhoras do processo de estudo.

Fonte: Godino, Batanero e Font (2008, p. 25-26).

No que segue, discutem-se, com mais profundidade, elementos que compõem os cinco níveis de análise didáticos do EOS, pois os mesmos constituem uma ampliação progressiva da capacidade de análise dos processos de ensino e aprendizagem da Matemática.

3.2.1 Sistema de Práticas

Godino, Batanero e Font (2008) consideram prática matemática como toda ação, manifestação ou expressão (verbal, gráfica, gestual, etc.) realizada por alguém para resolver problemas matemáticos, comunicar a outros a solução obtida, validá-la ou generalizá-la a outros contextos e problemas. Para os autores, os objetos matemáticos não equivalem apenas a conceitos, mas a qualquer entidade ou coisa à qual nos referimos, ou da qual falamos, seja real, imaginária ou de qualquer outro tipo, que intervenha, de alguma maneira, na atividade matemática.

Esses objetos matemáticos, segundo Godino, Contreras e Font (2006), podem ser objetos ostensivos, os quais são públicos e podem ser mostrados a outros (símbolos, notações e gráficos) e objetos não ostensivos, os quais não são perceptíveis por si mesmos e são representados pela forma textual, oral e por meio de gestos. Através desses sistemas de práticas surgem novos objetos que dão conta de sua organização e estrutura (tipos de problemas, linguagens, procedimentos, definições, proposições e argumentação), dando origem, assim, de acordo com Godino, Batanero e Font (2008), ao sistema de práticas que realiza uma pessoa (significado pessoal) ou que é compartilhado no âmbito de uma instituição (significado institucional), para ser utilizado na resolução de um tipo de situação-problema.

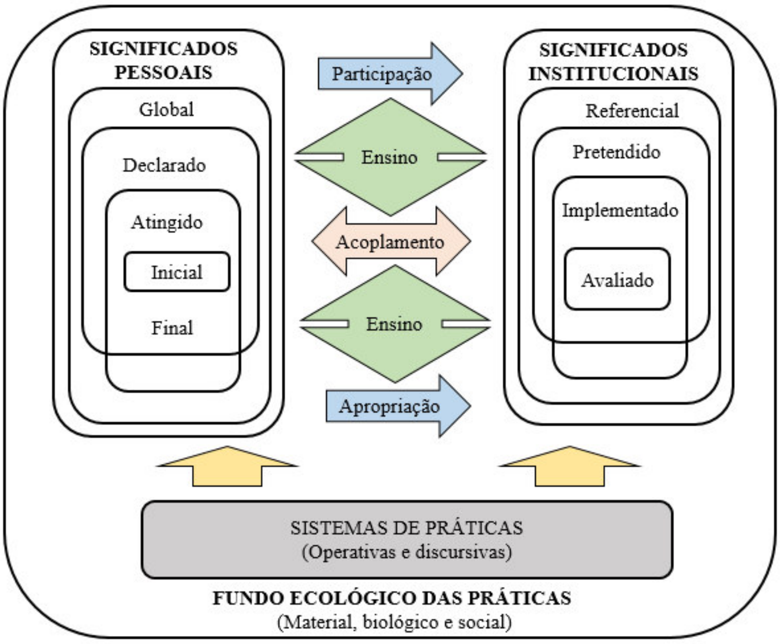
De acordo com os autores, a relatividade socioepistêmica e cognitiva dos significados e sua utilização na análise didática os levou a introduzir uma tipologia básica de significado. Com relação aos significados institucionais, os autores consideram quatro tipos:

- **implementado**: num processo de estudo específico, é o sistema de práticas efetivamente implementadas pelo docente;
- **avaliado**: sistema de práticas que o docente utiliza para avaliar a aprendizagem;
- **pretendido:** sistema de práticas incluídas no planejamento do processo de estudo;

- **referencial:** sistema de práticas utilizado como referência para elaborar o significado pretendido. Numa instituição de ensino concreta, esse significado de referência será uma parte do significado holístico do objeto matemático, sendo que a determinação do significado global do objeto necessita de um estudo histórico-epistemológico sobre a sua origem e evolução, assim como considera o contexto de uso do mesmo (GODINO; BATANERO; FONT, 2008). Já com relação ao significado pessoal, os autores, destacam três tipos:
- **global:** corresponde à totalidade do sistema de práticas pessoais, que é capaz de manifestar potencialmente o sujeito em relação a um objeto matemático;
- **declarado:** refere-se às práticas efetivamente expressadas por meio das avaliações propostas, incluindo-se, tanto as corretas quanto as incorretas desde o ponto de vista institucional;
- **atingido:** corresponde às práticas manifestadas, que são coerentes com a pauta institucional estabelecida. Na análise da variação dos significados pessoais que têm lugar num processo de estudo, nos interessa a este trabalho considerar tanto os significados iniciais (prévios) dos estudantes, como aqueles alcançados no final do processo.

No esquema apresentado na Figura 9, os autores buscam ilustrar as relações entre o ensino e a aprendizagem, interligando os significados pessoais e institucionais de um objeto matemático.

Figura 9 - Tipos de significados institucionais e pessoais



Fonte: Godino, Batanero e Font (2008, p. 13).

Observando as características dos tipos de objetos e as relações estabelecidas na Figura 8, percebe-se que os significados pessoais e os institucionais modelam o processo de ensino e aprendizagem de um objeto matemático. Já o ensino implica a participação do estudante na comunidade de práticas que suporta os significados institucionais, e a aprendizagem pressupõe a apropriação, pelo estudante, dos referidos significados" (GODINO; BATANERO; FONT, 2008).

A seguir, serão discutidos e apresentados aspectos teóricos propostos pelo EOS, referentes aos objetos e aos processos matemáticos.

3.2.2 Configuração de Objetos e Processos Matemáticos

No EOS, segundo Godino, Contreras e Font (2006), é ampliada a visão sobre o objeto matemático, a fim de descrever a atividade Matemática, seus resultados e os processos de comunicação, conforme já destacado, uma vez que, nessa perspectiva, os objetos matemáticos podem ser conceitos, propriedades, procedimentos e representações, ou seja, qualquer entidade ou coisa sobre a qual alguém se refere ou fala, real ou imaginária, envolvida na atividade matemática.

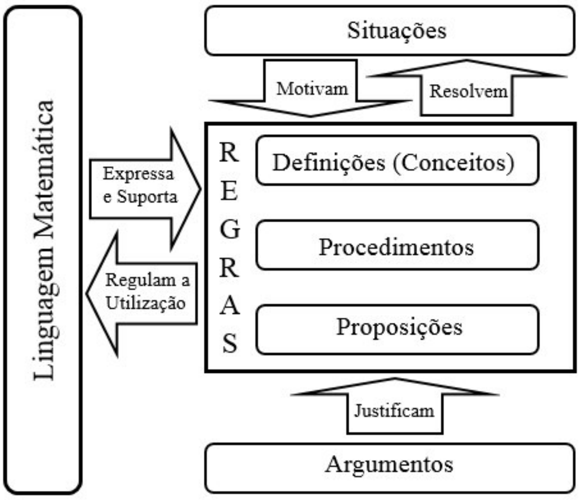
Godino, Batanero e Font (2008) salientam que os objetos passam a ser entendidos ou percebidos como unidades culturais que surgem de um sistema de significados de uso e que se modificam, de acordo com a necessidade. Destacam, ainda, que dos sistemas de práticas matemáticas surgem novos objetos, com sua organização e estrutura. Nesse contexto, os autores propõem uma tipologia para os objetos matemáticos, que denominam como sendo primários:

- **linguagem:** são considerados os termos, expressões, notações, gráficos, entre outros, em seus diversos registros **(**escrito, oral, gestual);
- **situações-problema:** são as aplicações extra-matemáticas, exercícios, etc.;
- **conceitos/definição:** introduzidos mediante definições ou descrições (reta, ponto, número, média, função, etc.);
- **proposições:** são enunciados sobre conceitos ou soluções para as situações-problema, entre outros;
- **procedimentos**: são os algoritmos, operações, técnicas de cálculo, etc.;

- **argumentos:** são os enunciados usados para validar ou explicar as proposições e procedimentos, dedutivos ou de outro tipo (GODINO; BATANERO; FONT, 2008).

Para os autores, esses seis objetos articulam-se formando configurações epistémicas. Essas relações podem ser observadas no esquema apresentado na Figura 10.

Figura 10 - Articulações entre os objetos matemáticos primários



Fonte: adaptado e traduzido de Godino at. al (2006).

Os autores salientam que esees seis tipos de entidades primárias ampliam a tradicional distinção entre entidades conceituais e procedimentais, ao considerá-las insuficientes para descrever os objetos que intervêm e emergem da atividade matemática. Assim, as situações-problemas são a origem ou razão de ser da atividade. Já a linguagem representa as demais entidades, servindo de instrumento para a ação e, por fim, os argumentos justificam os procedimentos e proposições que relacionam os conceitos entre si. Ressaltam, ainda, que:

> Em cada caso esses objetos estarão relacionados entre si formando configurações, definidas como as redes de objetos que intervêm e emergem dos sistemas de práticas e suas relações. Essas configurações podem ser epistêmicas (redes de objetos institucionais) ou cognitivas (redes de objetos pessoais). Os sistemas de práticas e as configurações são propostos como ferramentas teóricas para descrever a constituição desses objetos e relações (configurações) em sua dupla versão: pessoal e institucional (GODINO; BATANERO; FONT, 2008, p.15).

Segundo Godino (2002) e Godino, Batanero e Font (2008), no modelo proposto pelo EOS, são considerados, para os objetos matemáticos, cinco facetas ou dimensões duais que, juntamente com a noção de função semiótica, podem descrever e relacionar uma variedade de noções cognitivas propostas em diversas teorias, as quais são: **pessoal e institucional, ostensivo e não ostensivo, expressão e conteúdo, extensivo e intensivo, unitário e sistêmico**. A seguir são detalhadas e especificadas as referidas dualidades segundo esses autores.

- **pessoal- institucional**: se os sistemas de práticas são específicos de uma pessoa, são considerados “objetos pessoais” (concepções, esquemas, representações pessoais); se são compartilhados no âmbito de uma instituição, são considerados “objetos institucionais”. Destacam, ainda, que a “cognição pessoal” é o resultado do pensamento e a ação do sujeito individual diante de uma certa classe de problemas, enquanto a “cognição institucional” é o resultado do diálogo, o convênio e a regulação no âmbito de um grupo de indivíduos que formam uma comunidade de prática;
- **ostensivo- não ostensivo**: entendem como ostensivo qualquer objeto que é público e que, portanto, pode ser mostrado a outro. Os objetos institucionais e pessoais têm uma natureza não ostensiva, ou seja, não perceptíveis por si mesmos. Ponderam que essa classificação entre ostensivo e não ostensivo é relativa ao jogo de linguagem que participam, pois um objeto ostensivo pode ser pensado ou imaginado por um sujeito ou estar implícito no discurso matemático;
- **expressão- conteúdo:** antecedente e consequente de qualquer função semiótica. A atividade matemática e os processos de construção e uso dos objetos matemáticos se caracterizam por serem essencialmente relacionais. Os distintos objetos não devem ser concebidos como entidades isoladas, senão colocados em relação uns com os outros. A relação se estabelece por meio de funções semióticas, entendidas como uma relação entre um antecedente (expressão, significante) e um consequente (conteúdo, significado), estabelecida por um sujeito (pessoa ou instituição), de acordo com um certo critério ou código de correspondência;
- **extensivo- intensivo (exemplar- tipo):** são utilizados para explicar uma das características básicas da atividade matemática, o uso de elementos genéricos. Essa dualidade permite centrar a atenção na dialética entre o particular e o geral que, sem dúvida, é uma questão-chave na construção e aplicação do conhecimento matemático. Salientam, também, que os termos extensivo e intensivo não são considerados sinônimos de geral e particular. Recebem essa denominação para ressaltar o caráter situado que possuem, já que um mesmo

objeto pode ser considerado intensivo em determinada situação e extensivo em outra;

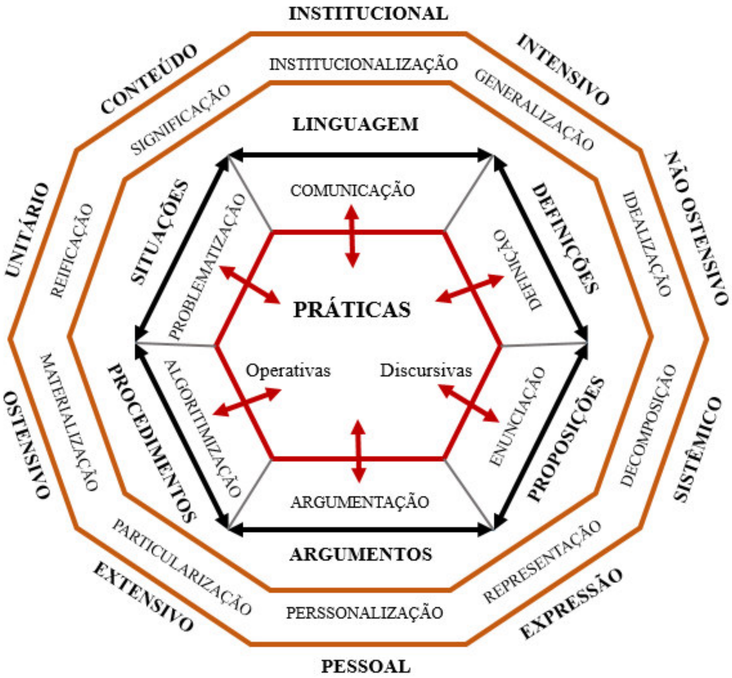
- **unitário-sistêmico:** em algumas circunstâncias, os objetos matemáticos participam como entidades unitárias (que, supostamente, são conhecidas previamente); já em outras intervêm como sistemas que devem ser decompostos para seu estudo. No estudo da adição e subtração, nos anos finais do ensino fundamental, o sistema de numeração decimal (dezenas, centenas, ...) por exemplo, é considerado como algo conhecido e, em consequência, como entidades unitárias (elementares). Esses mesmos objetos, no primeiro ano da educação primária, devem ser considerados de maneira sistêmica para sua aprendizagem.

Godino, Batanero e Font (2008) ponderam que essas facetas podem ser agrupadas em duplas que se complementam dialeticamente, podendo ser aplicáveis como atributos distintos aos objetos primários e secundários, dando lugar a distintas 'versões' dos referidos objetos através dos seguintes processos cognitivos/epistêmicos:

- institucionalização-personalização;
- generalização-particularização;
- análise/decomposição-síntese/reificação;
- materialização/concreção-idealização/abstração;
- expressão/representação-significação.

Na Figura 11, Godino, Batanero e Font (2008) buscaram representar, de forma sucinta, as diferentes noções teóricas apresentadas sobre os objetos matemáticos e os sistemas de práticas.

Figura 11 - Modelo Ontossemiótico dos Conhecimentos Matemáticos



Fonte: Godino, Batanero e Font (2008, p. 18).

Para Godino, Batanero e Font (2008), no EOS, a atividade matemática ocupa lugar central e sua modelização ocorre em termos de sistema de práticas operativas e discursivas. Dessas práticas emergem distintos tipos de objetos matemáticos, que estão relacionados entre si, formando configurações. Dessa forma, os objetos que intervêm nas práticas matemáticas e os emergentes das mesmas, segundo o jogo de linguagem do qual participam, podem ser considerados desde as cinco facetas ou dimensões duais. Essas noções teóricas constituem uma resposta operativa ao problema ontológico da representação e significação do conhecimento matemático.

Godino, Batanero e Font (2008) salientam que as relações de dependência entre os objetos podem ser de três tipos:

- **representacional**: é quando um objeto é colocado no lugar de outro para um determinado propósito;
- **instrucional**: é quando um objeto usa outro ou outros como instrumento;
- **estrutural**: quando dois ou mais objetos compõem um sistema do qual emergem novos objetos.

Destacam, também, que os objetos emergentes dos sistemas de práticas podem ser diferentes, pois dependem das práticas didáticas utilizadas no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

Na sequência, apresentam-se aspectos e características que envolvem a configuração e as trajetórias didáticas.

3.2.3 Configurações e Trajetórias Didáticas

No trabalho apresentado por Godino, Contreras e Font (2006) e Godino, Batanero e Font (2008), fica evidente que o modelo teórico que vem sendo desenvolvido pode ser aplicado, de maneira geral, em outros campos do saber, particularmente aos saberes didáticos. Salienta que os problemas terão naturezas distintas e, a partir dessas observações, levantam os seguintes questionamentos:

> • Que conteúdo devemos ensinar em cada contexto e circunstância?
> • Como adequar o tempo para distribuir os distintos componentes e facetas do conteúdo a ser ensinado?
> • Que modelo de processo de estudo devemos implementar em cada circunstância?
> • Como planejar, controlar e avaliar o processo de estudo e aprendizagem?
> • Que fatores condicionam o estudo e a aprendizagem? ... (GODINO; BATANERO; FONT, 2008, p.20).

Os autores, ao levarem em consideração essas questões, evidenciam que as ações (práticas didáticas) colocadas em jogo, sua sequenciação (processos didáticos) e os objetos emergentes de tais sistemas de práticas (objetos didáticos) serão distintas com relação à solução dos problemas matemáticos**.**

Assim, com relação ao processo de ensino e aprendizagem de um conteúdo matemático, Godino, Contreras e Font (2006) e Godino, Batanero e Font (2008) os consideram como um processo estocástico multidimensional composto de seis subprocessos, com suas respectivas trajetórias e estados potenciais:

- **epistêmico:** é o caminho, representa a distribuição dos significados institucionais implementados ao longo do tempo. Os problemas, ação, linguagem, definições, propriedades, argumentos vão acontecendo em uma determinada ordem no processo de ensino;
- **docente:** é responsável pela distribuição das tarefas, ou seja, é toda a ação do professor no processo de instrução;
- **discente:** ações realizadas por estudantes;
- **mediacional**: é a distribuição dos recursos tecnológicos utilizados (livros, notas, manipuláveis, software, etc;
- **cognitivas**: consiste nos significados pessoais dos estudantes;

- **emocionais**: refere-se aos estados emocionais (atitudes, valores, emoções e sentimentos) de cada aluno sobre os objetos matemáticos e o seu processo de estudo (GODINO; CONTRERAS; FONT, 2006).

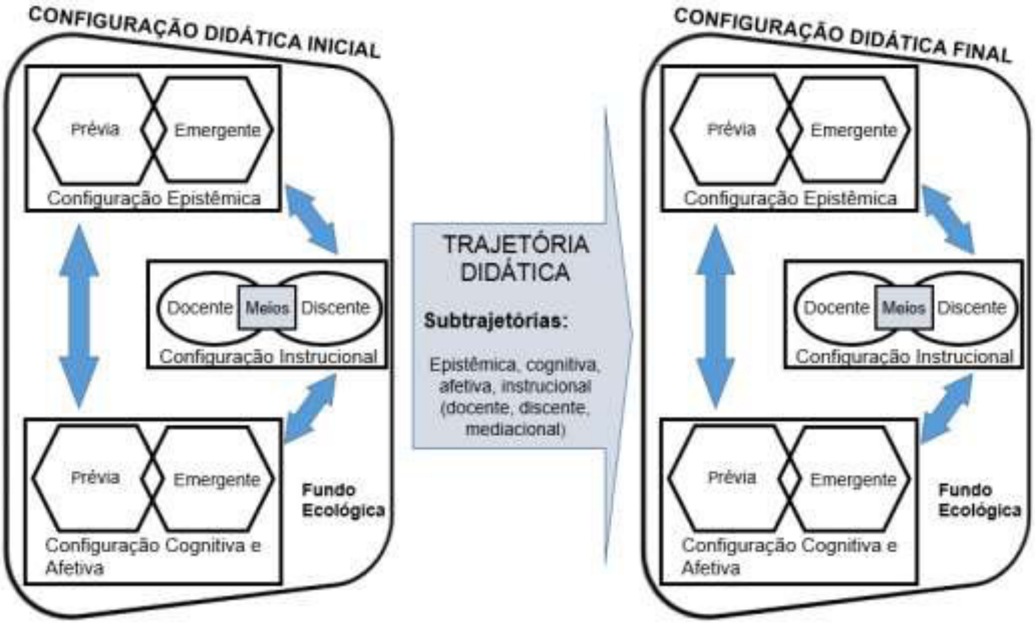
Godino, Batanero e Font (2008, p.20) propõem como unidade primária de análise didática a Configuração Didática, que é constituída pelas interações entre o professor e o aluno a respeito de um objeto ou conteúdo matemático, os quais utilizam recursos materiais específicos. É concebida como uma realidade organizacional, um sistema aberto à interação com outras configurações das trajetórias didáticas das quais faz parte. O processo de instrução sobre um conteúdo ou tema matemático se desenvolve num determinado tempo, mediante uma sequência de configurações didáticas.

Ainda, segundo esses autores, uma configuração didática está associada a uma configuração epistêmica, isto é,

> [...] a uma tarefa, os procedimentos requeridos para sua solução, linguagens, conceitos, proposições e argumentações, os quais podem estar sob a responsabilidade do professor, dos estudantes ou distribuídas entre eles. Associada a uma configuração epistêmica, haverá uma *configuração instrucional*, que é constituída pela rede de objetos docentes, discentes e mediacionais, colocados em jogo a propósito de um problema ou uma tarefa matemática. A descrição das aprendizagens que vão sendo construídas ao longo do processo se realiza mediante as *configurações cognitivas*, rede de objetos que interagem e emergem dos sistemas de práticas pessoais que se acionam na implementação de uma configuração epistêmica (GODINO; BATANERO; FONT, 2008, p.21).

Todas essas interações podem ser observadas na Figura 12.

Figura 12 - Interações Didáticas



Fonte: Godino, Batanero e Font (2008, p.21).

Godino, Contreras e Font (2006) também destacam quatro tipos de configurações didáticas teóricas de referência no que se refere às interações, sendo elas:

- **magistral**: refere-se ao modelo tradicional de ensinar Matemática, o qual ocorre por meio da apresentação do conteúdo pelo professor, através de conceitos, definições e proposições, seguido de exercícios e aplicações;
- **a-didática**: ocorre quando o aluno/ou um grupo de alunos assumem a responsabilidade do trabalho matemático autônomo, explorando, formulando e comunicando a solução de problemas;
- **dialógica**: se estabelece pela conversa entre o docente e os discentes ao propor uma determinada tarefa;
- **pessoal**: ocorre no momento em que o estudo é realizado de maneira individual pelo aluno fora do ambiente de sala de aula.

Portanto, esse nível, segundo Godino, Contreras e Font (2006), pode ser definido como um segmento de atividade didática (ensino e aprendizagem) que se distribui entre os momentos de início e término de uma tarefa ou situação-problema, incluindo as ações dos alunos, do professor e os meios usados para abordar o estudo.

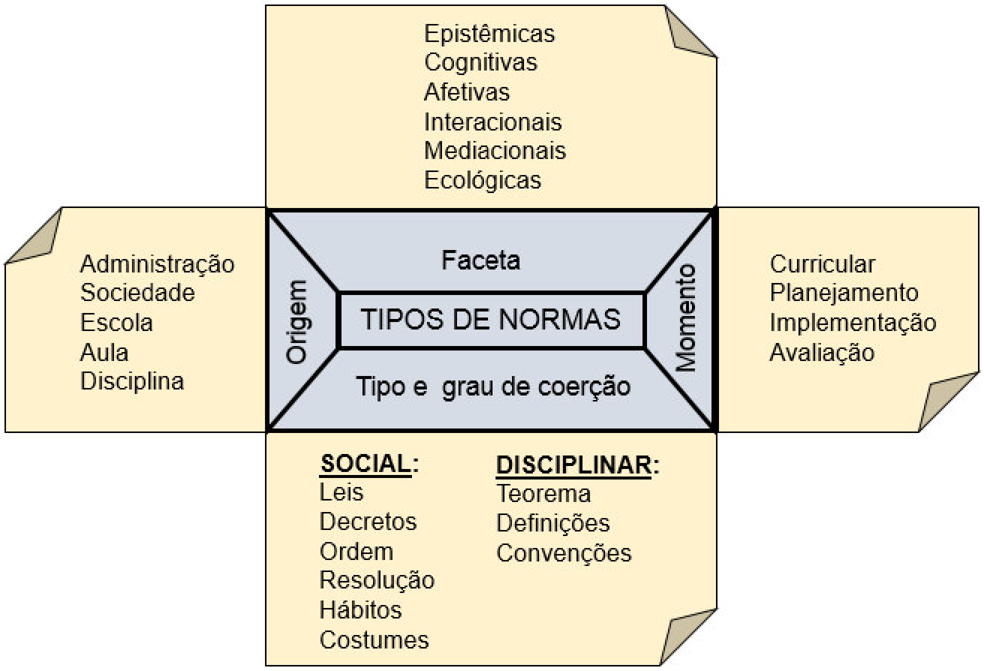
Na sequência, serão apresentados aspectos sobre conjunto de normas e regras que regulam um processo de estudo matemático por meio do que denominam como dimensão normativa.

3.2.4 Dimensão Normativa

Conforme Godino (2012), a dimensão normativa é um sistema de regras, hábitos e normas que restringem e dão suporte às práticas matemáticas e didáticas, além de generalizar as noções de contrato didático e normas sócio-matemáticas. Ou ainda, de acordo com Godino, Batanero e Font (2008), são as normas, hábitos e convenções que regulam o funcionamento da aula de Matemática, concebida como "microssociedade", que condiciona em maior ou menor medida os conhecimentos que constroem os estudantes. O foco de atenção do EOS está, principalmente, relacionado às interações entre professor e estudantes quando abordam o estudo de temas matemáticos específicos.

Ainda, conforme Godino, Contreras e Font (2006), toda atividade social deve ser regulada por regras, combinações e convenções que envolvem aspectos explícitos e implícitos. Da mesma forma, o processo de ensino e aprendizagem e os comportamentos do professor e dos estudantes devem estar regulamentados por normas, hábitos e costumes. Esses aspectos, segundo os autores, formam a dimensão normativa de um processo de estudo matemático. Para tanto, os autores propõem seis diferentes facetas para a dimensão normativa (epistêmica, cognitiva, interacional, mediacional, afetiva e ecológica). A Figura 13 apresenta os diferentes tipos de normas e suas possíveis interações.

Figura 13 - Dimensão Normativa e os tipos de normas



Fonte: Godino, Batanero e Font (2008, p.22).

De acordo com Godino, Batanero e Font (2008, p. 22), a identificação das diferentes facetas da dimensão normativa permite:

- avaliar a pertinência das intervenções dos professores e alunos, considerando o conjunto de normas e sua tipologia, que condicionam o ensino e a aprendizagem;
- sugerir trocas nos tipos de normas, as quais ajudam a melhorar o funcionamento e controle dos sistemas didáticos, com vistas a uma evolução dos significados pessoais frente aos significados institucionais pretendidos.

No que segue, apresentam-se elementos que compõem a noção de idoneidade didática para um processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

3.2.5 Idoneidade Didática

Segundo Godino, Font e Wilhelmi (2008), para aplicar a noção de idoneidade didática, necessita-se de uma reconstrução do significado de referência para os objetos matemáticos e didáticos pretendidos, sendo que a primeira pergunta a ser feita diz respeito à caracterização de tais significados.

Já em Godino (2012), a Idoneidade Didática pode ser utilizada como um critério geral de adequação e pertinência das ações dos educadores, do conhecimento posto em jogo e dos recursos utilizados no processo de estudo matemático, servindo de guia para a análise e reflexão sistemática que fornece critérios para a melhoria progressiva do processo de ensino e aprendizagem.

Para Godino, Batanero e Font (2008) e Godino, Contreras e Font (2006), a idoneidade didática de um processo de instrução, levando-se em consideração as configurações docentes e discentes, se define como a articulação coerente e sistêmica de seis componentes relacionados entre si, os quais passam a ser apresentados na sequência:

- **idoneidade epistêmica:** se refere ao grau de representatividade dos significados institucionais implementados ou pretendidos com relação a um significado de referência. Por exemplo, o ensino da adição, nos anos iniciais, pode ser limitado à aprendizagem de rotinas e exercícios de aplicação de algoritmos (baixa adequação), ou considerar os diferentes tipos de situações aditivas e incluir a justificação dos algoritmos (alta adequação);
- **idoneidade cognitiva:** expressa o grau em que os significados pretendidos ou implementados estão na área de desenvolvimento potencial dos alunos, bem como o grau de proximidade entre os significados pessoais atingidos e os pretendidos ou implementados, ou seja, expressa o grau de proximidade dos significados implementados frente aos significados pessoais iniciais dos estudantes;
- **idoneidade interacional:** um processo de ensino e aprendizagem terá maior adequação, do ponto de vista interacional, se as configurações e trajetórias didáticas permitirem, por um lado, identificar conflitos semióticos potenciais e, por outro lado, resolver os conflitos que são produzidos durante o processo de ensino;

- **idoneidade mediacional:** expressa o grau de disponibilidade e adequação dos recursos materiais necessários para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem;
- **idoneidade emocional**: refere-se ao grau de implicação (envolvimento, interesse, motivação, etc) do aluno no processo de estudo. Está relacionada a fatores que dependem da instituição e fatores que dependem do aluno e da sua história escolar prévia;
- **idoneidade ecológica:** grau em que o processo de estudo se ajusta ao projeto educacional, à escola, à sociedade e ao ambiente em que se desenvolve.

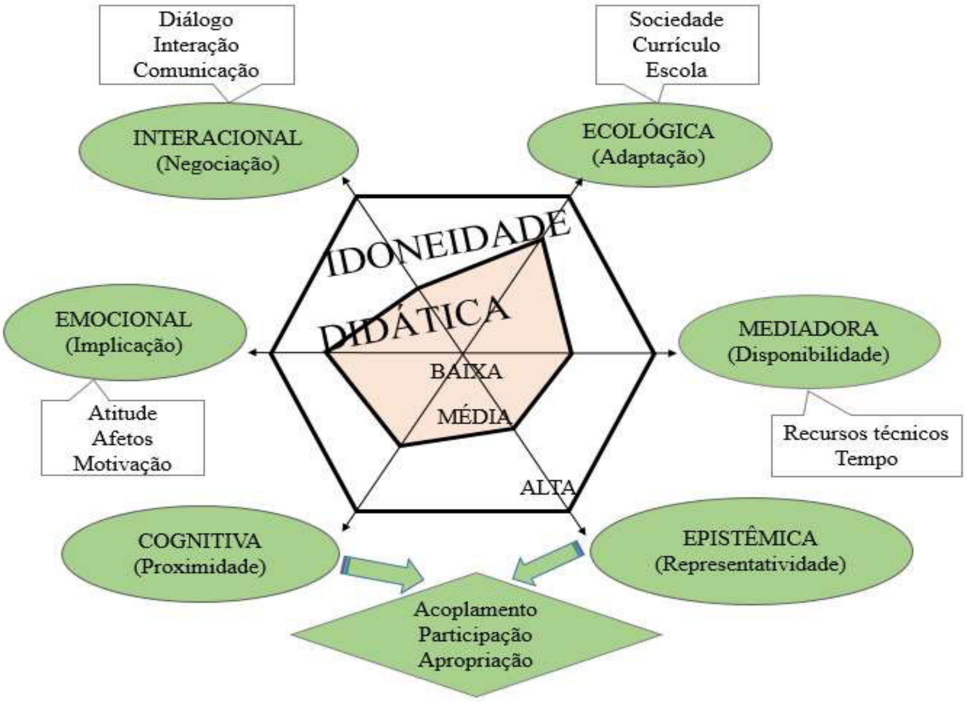
A idoneidade de uma dimensão não garante a idoneidade global do processo de ensino e aprendizagem. Salientam que estas idoneidades

> [...] devem ser integradas considerando as interações entre as mesmas. Isso requer abordar a adequação didática como critério sistêmico de apropriação e pertinência com relação ao projeto educativo global (GODINO et al., 2005). Entretanto, essa adequação deve ser interpretada como relativa às circunstâncias temporais e contextuais instáveis, o que requer uma atitude de reflexão e investigação por parte do professor e demais agentes que compartilham a responsabilidade do projeto educativo (GODINO; BATANERO; FONT, 2008, p. 24).

Os autores também consideram úteis todas essas noções para a análise de projetos e experiências de ensino, sendo que os distintos elementos podem interagir entre si, o que sugere a extraordinária complexidade dos processos de ensino e aprendizagem. Atingir uma alta idoneidade em uma dimensão, como a epistêmica por exemplo, pode requerer uma das capacidades cognitivas que o estudante não possui, para a qual está direcionado o ensino. Uma vez obtido um certo equilíbrio entre as dimensões epistêmica e cognitiva, é necessário que a trajetória didática otimize a identificação e solução de conflitos semióticos. Os recursos técnicos e o tempo disponível também interatuam com as situações-problema, a linguagem, entre outros aspectos relevantes em um processo de ensino e aprendizagem.

Os autores organizaram os critérios da Idoneidade Didática através do esquema apresentado na Figura 14. Representaram, mediante um hexágono regular, a idoneidade correspondente a um processo de estudo pretendido ou programado, no qual se supõe um grau máximo das adequações parciais e o hexágono irregular inscrito corresponde às idoneidades efetivamente atingidas na realização de um processo de estudo implementado.

Figura 14 - Componentes da Idoneidade Didática



Fonte: Godino, Batanero e Font, 2008.

Para Godino, Batanero e Font (2008, p. 25), as ferramentas descritas

> [...] podem ser aplicadas à análise de um processo pontual de estudo implementado numa aula, ao planejamento ou ao desenvolvimento de uma unidade didática ou a um nível global, como pode ser o desenvolvimento de um curso ou de uma proposta curricular. Também podem ser úteis para analisar aspectos parciais de um processo de estudo, como um material didático, um livro texto, respostas dos estudantes a tarefas específicas, ou “incidentes didáticos” pontuais.

Assim, considerando o exposto, concorda-se com os autores, quando destacam que as ideias, noções e ferramentas teóricas desenvolvidas pelo EOS permitem realizar diferentes tipos de análises dos processos de estudo matemático, contribuindo, cada uma delas, com informações úteis para o planejamento, desenvolvimento, implementação e avaliação de tais processos.

Na sequência, considerando a pertinência e a importância dos estudos desenvolvidos por Godino e seus colaboradores em torno do Enfoque Ontosemiótico do Conhecimento e a Instrução Matemática (EOS), bem como os estudos e ideias apresentadas por Andrade (2014), a qual buscou ampliar e refinar as noções em torno da Idoneidade Didática, produzindo *Ferramentas de Análise*, as quais serão passam apresentadas na sequência.

3.2.5.1 Ferramentas de Análise

Godino (2011) e Godino, Rivas e Arteaga (2012), em suas pesquisas, desenvolveram componentes e indicadores para a noção de Idoneidade Didática os quais podem auxiliar no desenvolvimento e ampliação de processos de ensino e aprendizagem da Matemática, bem como serem utilizados como guias para a avaliação das ações formativas planificadas ou efetivamente implantadas.

Andrade (2014), por sua vez, organizou os componentes e indicadores propostos por esses autores e passou a denominá-los Ferramentas de Análise. Para tanto, levou em consideração as características, componentes e indicadores das dimensões que compõem a Idoneidade Didática, com o intuito de captar aspectos essências do processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Assim, a autora desenvolveu as Ferramentas de Análise Epistêmica (FAE), Cognitiva (FAC), Ecológica (FAECO), Emocional (FAEMO), Interacional (FAI) e Mediacional (FAM), as quais serão apresentadas a seguir.

Os componentes e indicadores que constituem a denominada Ferramenta de Análise Epistêmica (FAE), propostos por Godino (2011) e refinados por Andrade (2014), são apresentados no quadro da Figura 15.

Figura 15 – Ferramenta de Análise Epistêmica (FAE)

Componentes	Indicadores
Situações-problema	a) apresenta-se uma mostra representativa e articulada de situações de contextualização, exercícios e aplicações; b) propõem-se situações de generalização de problemas (problematização).
Linguagem	a) uso de diferentes modos de expressão matemática (verbal, gráfica, simbólica), tradução e conversão entre as mesmas; b) nível de linguagem adequado aos estudantes; c) propõem situações de expressão matemática e interpretação.
Regras (definições, proposições, procedimentos)	a) as definições e procedimentos são claros e corretos e estão adaptados ao nível educativo a que se dirigem; b) apresentam-se enunciados e procedimentos fundamentais do tema para o nível educativo dado; c) propõem-se situações nas quais os estudantes tenham que generalizar ou negociar definições, proposições ou procedimentos.
Argumentos	a) as explicações, comprovações e demonstrações são adequadas ao nível educativo a que se dirigem; b) promovem-se situações nas quais os estudantes tenham que argumentar.
Relações	a) os objetos matemáticos (problemas, definições, proposições) se relacionam e se conectam entre si.

Fonte: Godino (2011); Andrade (2014, p. 104).

Godino (2011), ao propor os cinco elementos advindos das entidades primárias que caracterizam o modelo epistêmico no EOS (situações-problema, linguagem, regras, argumentos e relações), buscou relacionar esses elementos entre si e com a atividade matemática. Destaca, ainda, que um ponto central para se conseguir uma alta idoneidade epistêmica é a seleção e adaptação de situações-problema, pois as mesmas são um meio de contextualizar, comunicar e generalizar as ideias matemáticas e uma das principais maneiras de se fazer matemática.

O autor também destaca a importância das diversas formas de representações, meios de expressão, definições, proposições, procedimentos e justificativas das mesmas. Argumenta, ainda, que as atividades propostas devem proporcionar aos estudantes diversas maneiras de abordar e representar os conteúdos em estudo, bem como propiciar que os mesmos conjecturem, interpretem, justifiquem e apresentem soluções. Porém, ressalta que se deve prestar atenção às conexões entre as distintas partes do conteúdo matemático, pois os mesmos não podem ser tratados como entidades separadas.

Segundo Andrade (2014), a Ferramenta de Análise Cognitiva (FAC) tem como objetivo verificar se os significados pretendidos pelo docente estão na zona de desenvolvimento potencial dos estudantes. Caso não estejam, o professor deve organizar uma instrução que permita tal aproximação.

Godino (2011), para compor os componentes da idoneidade cognitiva, denominada por Andrade (2014) como Ferramenta de Análise Cognitiva (FAC), levou em consideração os conhecimentos prévios dos estudantes, as adaptações curriculares e o processo de ensino e aprendizagem. Dessa forma, organizaram-se, conforme quadro da Figura 16, os componentes raciocínio lógico, leitura/interpretação e análise/síntese, buscando, assim, estabelecer indicadores que identifiquem o desenvolvimento cognitivo dos estudantes e auxiliem no processo de ensino e aprendizagem da Matemática

Figura 16 - Ferramenta de Análise Cognitiva (FAC)

Componentes	Indicadores
Raciocínio Lógico	a) propõem-se situações que possibilitem observar, analisar, raciocinar, justificar ou provar ideias; b) promovem-se situações onde os alunos tenham que coordenar as relações previamente criadas entre os objetos (problema, definições, informações).
Leitura/ Interpretação	a) apresentam-se situações de expressão matemática e interpretação em que os estudantes possam pensar, analisar e refletir sobre as informações; b) propõem-se situações de leitura e interpretação adequadas ao nível dos estudantes; c) apresentam-se situações que possibilitem analisar ou referir-se a um mesmo objeto matemático, considerando diferentes representações.
Análise/Síntese	a) propõem-se situações de particularização e generalização de problemas; b) promovem-se situações nas quais os estudantes tenham que relacionar objetos matemáticos (problema, definições, informações) de forma específica ou ampla.

Fonte: Godino (2011); Andrade (2014, p. 106).

Segundo Andrade (2014), para ampliar e aprofundar os indicadores da FAC, foram levados em consideração as entidades primárias do modelo epistêmico, a apropriação e compreensão dessas entidades, as diferenças individuais entre os sujeitos envolvidos no processo e se os conteúdos pretendidos/implementados estão adequados ao nível dos estudantes. Salienta, também, a importância de incorporar, na análise, componentes propostos por Godino (2011), como os conhecimentos prévios, as adaptações curriculares necessárias e as avaliações realizadas para se obter uma visão ampla da situação de instrução proposta.

Andrade (2014) considerou como componentes para constituir a Ferramenta de Análise Ecológica (FAECO) a escola, o currículo e a sociedade, buscando atender as expectativas e contemplar um plano de ação formativo para aprender Matemática considerando o entorno no qual a mesma é desenvolvida. Os componentes e indicadores que constituem essa ferramenta podem ser observados no quadro da Figura 17.

Figura 17 - Ferramenta de Análise Ecológica (FAECO)

Componentes	Indicadores
Escola	a) espaço de desenvolvimento e aprendizagem envolvendo experiências contempladas nesse processo (aspectos culturais, cognitivos, afetivos, sociais e históricos); b) constitui-se em espaço que possibilita o uso de metodologias, recursos diversificados e tecnologia; c) ambiente que incentiva a formação de valores e pensamento crítico.
Currículo	a) o ensino está adaptado às orientações da escola, aos documentos oficiais; b) apresentam-se situações de problematização e contextualização, realizando conexões com outros conteúdos; c) valoriza-se a pluralidade cultural dos alunos; d) os conteúdos e a avaliação atendem as diretrizes curriculares; e) o ensino é coerente com o nível educativo a que se dirige.
Sociedade	a) percebe-se a valorização de aspectos da vida dos estudantes no ambiente escolar; b) percebe-se a presença da comunidade no processo de escolarização promovida pela escola.

Fonte: Godino (2011); Andrade (2014, p. 107).

Andrade (2014) ressalta que a utilização da FAECO possibilita uma análise sobre as possíveis conexões e limitações entre o processo educativo e o entorno no qual ele se desenvolve, possibilitando reflexões e melhorias no processo de instrução.

Já Godino (2011), referente a essa dimensão, entende que tudo que está fora da sala de aula ou em seu entorno pode condicionar a atividade que está sendo desenvolvida (sociedade, a escola, a pedagogia e a didática). O autor ressalta, ainda, que o processo de estudo ocorre em um contexto educacional definido por metas e valores que devem ser considerados e respeitados. As metas e valores devem ser interpretados e especificados nos planos e projetos da escola ou nos departamentos que coordenam as ações na instituição. Nesse contexto, de acordo com o autor, o professor é parte de uma comunidade de estudo e investigação que fornece conhecimentos úteis sobre práticas matemáticas e didáticas voltadas ao ensino e aprendizagem e sua aplicação.

De acordo com Godino (2011), a resolução de qualquer situação ou problema matemático está intimamente associada ao envolvimento afetivo do sujeito, no qual entra em jogo não apenas práticas operatórias e discursivas para encontrar uma resposta, como também a mobilização de cresças, atitudes, emoções e valores que influenciam e condicionam a resposta cognitiva exigida.

Assim, a partir dessas concepções, Andrade (2014) apresentou a Ferramenta de Análise Emocional (FAEMO), a qual visa à realização de uma análise do processo de ensino e aprendizagem como um todo, buscando, segundo a autora, indicadores que enfatizem o envolvimento dos estudantes no processo de ensino, mediante configurações didáticas. Para tal, considerou como componentes de análise a motivação/interesse, o envolvimento e as crenças/atitudes, conforme apresentado no quadro da Figura 18.

Figura 18 - Ferramenta de Análise Emocional (FAEMO)

Componentes	Indicadores
Motivação/ Interesse	a) incentiva-se o trabalho cooperativo; b) propõem-se situações adaptadas ao nível educativo dos alunos, levando em consideração seus interesses.
Envolvimento	a) apresentam-se configurações didáticas que proporcionam o envolvimento dos estudantes; b) estimulam-se as relações entre professor-aluno, aluno-aluno, professor-professor para qualificar o processo de ensino e aprendizagem.
Crenças/Atitudes	a) promove-se um trabalho que supere a visão da Matemática como algo difícil e acessível a poucos.

Fonte: Godino (2011); Andrade (2014, p. 107).

Lemos (2017) considera pertinente a utilização da FAEMO para análise das situações propostas no processo de ensino e aprendizagem, afirmando que as mesmas possibilitam o envolvimento dos estudantes, se foram planejadas e desenvolvidas considerando o interesse dos mesmos. Ressalta também, que esses fatores devem ser considerados essenciais para, minimamente, se pensar em atingir os estudantes.

Já a Ferramenta de Análise Interacional (FAI), de acordo com Andrade (2014), busca estabelecer relações entre os envolvidos no processo e o conhecimento (professor-aluno, aluno-aluno e aluno-conhecimento), visando perceber, resolver ou minimizar os conflitos semióticos que ocorrem no processo instrucional.

Segundo a autora, na elaboração dos componentes e indicadores interacionais, quadro da Figura 19, foram tomados como referência os princípios sócio-construtivistas assumidos pelo EOS, que, segundo Godino (2011), é uma característica da Teoria das Situações Didáticas, em que as situações de ação, comunicação e validação são entendidas como momentos adidáticos no processo de estudo, ou seja, os estudantes são protagonistas na construção do conhecimento pretendido ou planejado.

Figura 19 - Ferramenta de Análise Interacional (FAI)

Componentes	Indicadores
Diálogo/ Comunicação	a) propõem-se momentos de discussão coletiva; b) há espaço para intervenção docente e discente; c) promovem-se oportunidades de discussão/superação dos conflitos semióticos através da argumentação.
Interação	a) propõem-se situações que ampliem as relações de comunicação com outros alunos, com o professor, com o material de ensino; b) organizam-se situações para identificação e resolução de conflitos semióticos mediante interpretação de significados.
Autonomia	a) propõem-se momentos em que os discentes assumam a responsabilidade do estudo; b) apresentam-se situações que possibilitem ao estudante raciocinar, fazer conexões, resolver problemas e comunicá-los.

Fonte: Godino (2011); Andrade (2014, p. 109).

Para Andrade (2014), a Ferramenta de Análise Interacional possibilita uma verificação das interações existentes em um processo de ensino e aprendizagem. Já para Godino (2011), essas interações (estudante/estudante/professor) podem provocar reflexões a partir dos conhecimentos uns dos outros e, assim, alcançar níveis mais elevados de compreensão, possibilitando espaços para que os mesmos possam desenvolver ferramentas, compartilhar experiências, fazer interações, realizar compreensões, tornando esse espaço um ambiente construtivista propício para a construção do conhecimento matemático. Para o autor, os professores precisam proporcionar espaços ou ambientes de aprendizagem nos quais o processo de construção possa surgir. Os professores devem ser capazes de prever onde e como antecipar os entendimentos e habilidades dos estudantes que estão surgindo.

Já com relação à Ferramenta de Análise Mediacional (FAM) proposta por Andrade (2014), Godino (2011) propõe como componentes e indicadores os recursos tecnológicos, salientando que devem ser consideradas, também, as condições ambientais da sala de aula, a relação aluno e professor e o tempo destinado ao ensino e à aprendizagem. Levando em consideração esses pressupostos, Andrade (2014) propôs dois componentes para a Ferramenta, recursos didáticos e tempo didático, conforme apresentado no quadro da Figura 20.

Figura 20 - Ferramenta de Análise Mediacional (FAM)

Componentes	Indicadores
Recursos Didáticos	a) evidencia-se a presença de materiais adequados ao desenvolvimento do processo de ensino e adaptados ao nível educativo a que se dirigem; b) há uma diversificação de recursos para auxiliar no processo de ensino, tais como: audiovisuais, material concreto, livros, entre outros; c) propõe-se a organização e experimentação de situações práticas.
Tempo didático	a) apresentam-se situações de ensino que contemplam diversas modalidades (estudo pessoal, cooperativo, tutorial, presencial); b) evidencia-se organização do tempo para intervenção docente, trabalho autônomo dos estudantes e momentos de discussão; c) dedica-se um tempo maior para o desenvolvimento dos conhecimentos, caso os estudantes apresentem dificuldade de compreensão.

Fonte: Godino (2011); Andrade (2014, p. 109).

Segundo Andrade (2014), a Ferramenta pode ser utilizada para analisar a disponibilidade e a adequação dos recursos necessários para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem da Matemática por meio de materiais concretos, recursos e tempo.

Já Godino (2011) salienta que um dos principais recursos a serrem utilizados para melhoria do processo de ensino e aprendizagem da Matemática é o uso de tecnologias, a qual é uma ferramenta essencial para a aprendizagem de Matemática e as escolas devem assegurar que todos os alunos tenham acesso a ela. Os professores podem utilizar o potencial tecnológico para desenvolver a compreensão dos alunos, estimular o interesse e aumentar a sua proficiência em Matemática. Quando a tecnologia é utilizada estrategicamente, pode fornecer acesso à matemática para todos os estudantes, possibilitando, assim, melhorias na qualidade da educação matemática (GODINO, 2011).

Na sequência, são apresentadas algumas interações entre as Ferramentas de Análises segundo as ideias de Godino (2011).

3.2.5.2 Interação entre as Ferramentas de Análises

De acordo com Godino (2011), os componentes e indicadores das idoneidades, acima apresentados, não podem ser considerados fatores independes, pois ocorrem interações entre os mesmos. O autor cita como exemplo, o uso de recursos tecnológicos, os quais permitem que sejam abordados determinados tipos de problemas e as configurações de objetos e processos correspondentes, os quais acarretam novas formas de representação, argumentação, generalizações, entre outros. Da mesma forma, podem ser verificadas mudanças nas interações entre o professor e os estudantes, entre o interesse e a motivação, bem como em todo o processo de aprendizagem (GODINO, 2011).

No quadro da Figura 21, apresentam-se alguns componentes e indicadores relativos as interações entre as distintas ferramentas.

Figura 21 - Interação entre as Ferramentas

COMPONENTES	INDICADORES
Epistêmica-Ecológica	a) O currículo propõe o estudo de problemas de âmbitos variados, como a escola, a vida cotidiana e o trabalho.
Epistêmica-Cognitiva-Afetiva	a) O conteúdo de estudo (fenômenos explorados em diferentes áreas do conhecimento, formulando e justificando conjecturas) tem sentido para os estudantes nos distintos níveis e graus. b) Os estudantes têm confiança em suas habilidades para enfrentar problemas difíceis e mantêm sua perseverança, mesmo quando a tarefa é complexa. c) Estimula-se os estudantes a refletirem sobre seu raciocínio durante o processo de resolução de problemas, de maneira tal que são capazes de aplicar e adaptar as estratégias que desenvolveram em outros problemas e contextos. d) As tarefas que os professores selecionaram para avaliar são representativas das atividades pretendidas.
Epistêmica-Cognitiva-Mediacional	a) Os usos de recursos tecnológicos induzem a trocas positivas no conteúdo de ensino, nos modos de interação, na motivação e na aprendizagem dos estudantes.
Cognitiva-Afetiva-Interacional	a) As explicações dadas pelos estudantes incluem argumentos matemáticos e racionais, não somente descrição de procedimentos. b) Incluem-se conteúdos motivadores, com adaptações razoáveis e apropriadas, que promovem o acesso e a realização de todos os estudantes.
Ecológica-Instrucional	a) O professor é compreensivo e dedicado a seus estudantes. b) O professor conhece e entende profundamente a Matemática que ensina e é capaz de usar esse conhecimento com flexibilidade em suas tarefas de ensino. c) O professor tem amplas oportunidades e apoio para incrementar e atualizar frequentemente seus conhecimentos didático- matemáticos.

Fonte: Adaptado de Godino (2011).

Godino (2011) destaca, também, que a inter-relação entre as distintas ferramentas pode auxiliar na concepção, implementação e avaliação de processos de ensino e aprendizagem de Matemática, ou seja, as interações podem auxiliar o professor na melhoria da prática em sala de aula e levar o estudante a ser capaz de utilizar seus conhecimentos matemáticos para resolver problemas. Porém, o autor salienta que nem todo o grupo de estudantes consegue alcançar o mesmo nível de desenvolvimento e compreensão dos conteúdos abordados. Para amenizar esses problemas, uma estratégia seria dividir a classe em pequenos grupos, de acordo com as próprias trajetórias de aprendizagem, adaptando a educação aos diferentes níveis de habilidades dos envolvidos no processo (GODINO, 2011). Essa estratégia é incorporada a um trabalho por meio de problemas, que podem ser resolvidos segundo os diferentes níveis de compreensão.

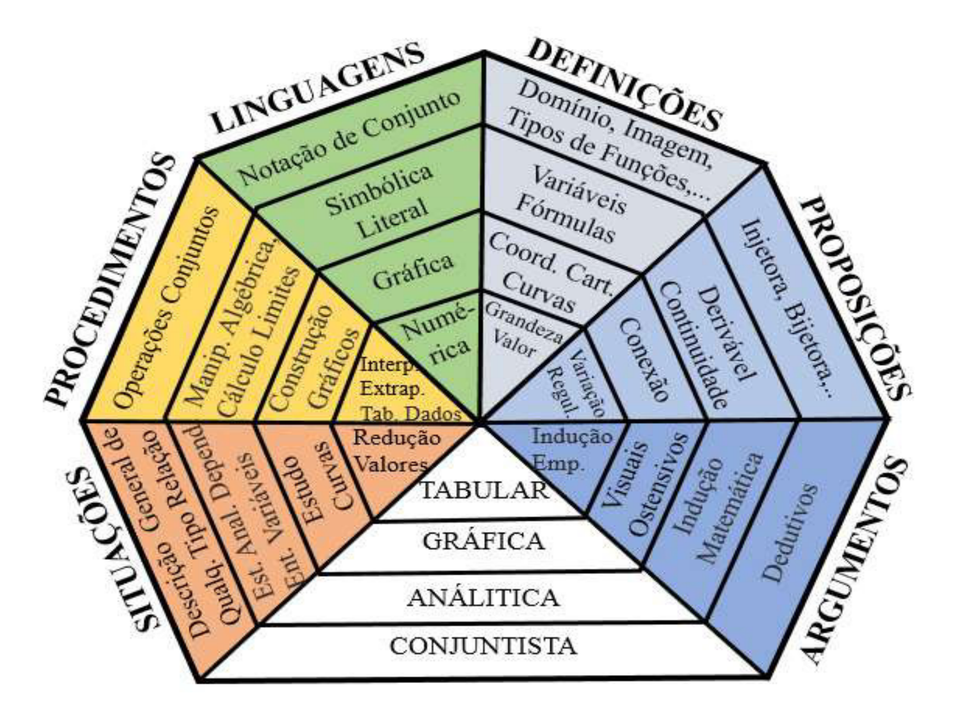
3.2.6 Significado de Referência do Objeto Matemático Função segundo o EOS

De acordo com Godino et. al (2006), as diferentes concepções epistemológicas sobre funções, desenvolvidas ao longo da história, são um bom exemplo da diversidade de sistemas de práticas, contextos de uso e da pluralidade de significados parciais desse conteúdo. Salienta, também, que a reconstrução dos significados de função é um primeiro passo para o entendimento dos processos de ensino pretendidos ou implementados, sendo necessária para a elaboração de regras ou critérios que sirvam de norteadores para a avaliação e aprimoramento contínuo de todo o processo de ensino e aprendizagem de Funções.

Ainda, segundo esses autores, no EOS, essas concepções epistemológicas são entendidas em termos de subsistemas de práticas institucionais ligadas a contextos particulares de uso e de objetos emergentes, podendo serrem caracterizadas como configurações epistêmicas (tipos de problemas, linguagem, definições, proposições, procedimentos e argumentos). Cada uma dessas configurações, bem como suas práticas associadas, pode modelar aspectos parciais do objeto Função, desempenhar o papel de significado global ou ser o referencial em uma investigação específica.

Godino et. al (2006), embasados na análise histórica, epistemológica e didática, ligada às concepções sobre Funções, apresentadas por Ruiz (1994), consideraram que a evolução desse objeto matemático pode ser organizada em quatro configurações epistêmicas: tabular, gráfica, analítica e conjuntista. A Figura 22 destaca as configurações epistêmicas de Funções.

Figura 22 - Configuração Epistêmica de Função



Fonte: adaptado de Godino et. al (2006).

Essa disposição expressa a progressiva ampliação dos sistemas de práticas matemáticas associados à noção de função, desde abordagens implícitas/intuitivas até formalizações mais gerais mediante a teoria dos conjuntos. As noções, características e elementos relacionados à configuração de Função podem ser utilizadas como significado institucional de referência para analisar, melhorar e implantar um processo de estudo.

Godino et. al (2006) salienta que as quatro configurações epistêmicas que podem resumir, de certa forma, o desenvolvimento da noção de função, foram transpostas para os livros didáticos mediante dois tipos de configurações epistêmicas: os formais (intramatemáticos) e os empíricos (extramatemáticos). O primeiro caso tem como referência a configuração conjuntista, enquanto o segundo, é referente à combinação das configurações tabular, gráfica e analítica. Para Godino et. al (2006), na prática escolar atual (significados pretendidos e implementados), as configurações epistêmicas, que também podem ser entendidas como parciais (tabular, gráfica, analítica e conjuntista) geralmente não aparecem simultaneamente e normalmente estão focadas em aplicações voltadas para a solução de problemas extramatemáticos.

4 ASPECTOS METODOLÓGICOS

A metodologia é um processo que busca organizar o pensamento reflexivo do sujeito que vai do empírico e desse para o concreto, até a ocorrência e organização de novos conhecimentos (DIZOTTI, 2008). Nessa perspectiva, a metodologia é tratada como uma organização do pensamento reflexivo e investigativo. Tais características estão na base da investigação aqui apresentada, o que leva a mesma a seguir os pressupostos de uma abordagem qualitativa.

No que se refere a uma pesquisa na área da Educação, a abordagem qualitativa busca compreender de que forma os estudantes, em um determinado contexto, agem e articulam seus pensamentos, sendo que o pesquisador pode ter contato direto com o dia-a-dia dos alunos e com a situação que está sendo investigada, tornando viável a compreensão e interpretação dos fatos. A apresentação dos dados coletados deve ser predominantemente descritiva, onde as relações entre as pessoas são importantes sendo, portanto, relatadas as falas, apresentados fotografias, desenhos e documentos produzidos pelos estudantes, entre outros (DIZOTTI, 2008).

Segundo Garnica (2004, p. 86), uma pesquisa qualitativa caracteriza-se pela:

> (a) transitoriedade de seus resultados; (b) impossibilidade de uma hipótese a priori, cujo objetivo da pesquisa será comprovar ou refutar; (c) não neutralidade do pesquisador que, no processo interpretativo, vale-se de suas perspectivas e filtros vivenciais prévios, dos quais não consegue se desvencilhar; (d) a constituição de suas compreensões dá-se não como resultado, mas numa trajetória em que essas mesmas compreensões e também os meios de obtê-las podem ser (re)configuradas; (e) impossibilidade de estabelecer regulamentações em procedimentos sistemáticos, prévios, estáticos e generalistas.

Além disso, a preocupação do pesquisador, na pesquisa qualitativa, não é com a representatividade numérica do grupo pesquisado, mas com o aprofundamento da compreensão de um grupo social, uma organização, uma instituição, conforme apontado por Goldenberg (1999). Segundo o autor, essa abordagem também consiste em descrições detalhadas de situações com o objetivo de compreender os indivíduos em seus próprios termos.

Já Bogdan e Biklen (1994) dão destaque às características da pesquisa qualitativa, as quais estão em consonância com o modelo de investigação proposto. Apresentam-se, aqui, cinco aspectos essenciais em uma pesquisa qualitativa, apontados pelos autores.

A pesquisa qualitativa tem o ambiente natural como fonte direta de dados e o pesquisador como seu principal instrumento, o que se constitui na primeira característica desse tipo de pesquisa. Na investigação realizada, tanto o ambiente da sala de aula como os demais ambientes da escola se caracterizaram como apropriados para a obtenção dos dados durante o trabalho.

A predominância de dados descritivos é outro aspecto que caracteriza as investigações qualitativas, sendo que eles vão emergir das observações e registros realizados, das conversas entre professor/estudante e estudante/estudante, da produção e desenvolvimento dos estudantes no ambiente de ensino e aprendizagem, entre outros de mesma natureza.

O terceiro aspecto ressalta o fato de que o processo deve ser mais importante que o produto. Nesse sentido, foram analisados o desenvolvimento das atividades, os procedimentos e os conhecimentos de domínio dos estudantes, bem como os que estavam se desenvolvendo, assim como as atitudes, as trocas e interações ocorridas durante todo o desenvolvimento das atividades.

O quarto aspecto aponta para o significado que as pessoas atribuem às coisas, o que foi valorizado pela atenção dada aos relatos dos estudantes, suas reflexões, descobertas e frustrações sobre o trabalho em desenvolvimento. Por fim, os autores salientam que, na pesquisa qualitativa, a análise dos dados tende a seguir um processo indutivo, o que é uma característica da análise aqui produzida.

Porém, no âmbito do EOS, Godino et al (2013) ponderam que a investigação educativa separada da prática pode não levar em consideração a influência dos contextos sobre a natureza dos resultados, ou seja, não identificar de forma adequada as restrições e condicionantes que envolvem a investigação. Nesse contexto, e considerando o tipo de investigação proposta, optou-se por tomar como referência, na investigação, os aportes da Investigação Baseada no Design (IBD), a qual busca superar a lacuna entre as investigações científicas e as práticas educativas (GODINO et al, 2013).

De acordo com os autores, a IBD contempla o design, as análises de estratégias e ferramentas instrucionais, sendo que o design instrucional e a investigação são interdependentes, ou seja, uma investigação não contempla somente a fase de design, mas também a experimentação e a avaliação de resultados.

Segundo Godino et al (2014), a Investigação Baseada no Design possui cinco características, sendo elas:

- o objetivo central do design em torno das aprendizagens e o desenvolvimento de teorias de aprendizagens estão interligados;
- o desenvolvimento e a investigação são ciclos contínuos de design, implementação e análise;
- leva em consideração teorias que podem ser compartilhadas e designers instrucionais para comunicar implicações relevantes;
- a investigação deve explicar como funcionam os designs, informando sobre as interações que refinam a compreensão das questões envolvidas na aprendizagem;
- o desenvolvimento e a implementação devem se basear em métodos que possam ser documentados e permitam conectar os processos de intervenção com os resultados.

Essas características apontadas pelos autores podem nortear uma proposta de estudo projetada para um ambiente de aprendizagem, a qual precisa contemplar atividades, materiais, ferramentas e outros elementos que apoiam a aprendizagem.

Godino et al (2014) consideram quatro fases para a Investigação Baseada no Design:

- estudo preliminar das dimensões epistêmica–ecológica, cognitiva–afetiva e instrucional;
- design da trajetória didática, seleção dos problemas, justificação e análise a priori dos mesmos, com indicações dos comportamentos esperados dos estudantes e a planificação das intervenções do professor;
- implementação da trajetória didática, observação das interações entre os sujeitos, os recursos e avaliação da aprendizagem;
- avaliação retrospectiva, que segue um contraste entre o previsto e o observado, também refletindo sobre as normas e a Idoneidade Didática.

Os autores destacam, ainda, que, em cada uma das fases, se deve levar em consideração as dimensões epistêmica, cognitiva, afetiva, interacional e ecológica. Assim, no âmbito das dimensões epistêmicas e ecológica, são determinados os significados institucionais postos em jogo no processo. As dimensões cognitiva e afetiva estão relacionadas aos significados pessoais dos estudantes. Já a dimensão

Interacional está voltada às interações entre professor, estudante, material e às negociações de significados que ocorrem durante o processo.

4.1 ETAPAS DA INVESTIGAÇÃO

A organização e desenvolvimento da investigação foi estruturada em cinco etapas. Na primeira, ocorreram pesquisas e aprofundamento em torno dos aportes Teóricos e Metodológicos do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática, desenvolvido por Godino (2002, 2008, 2010, 2011, 2012, 2013) e demais pesquisadores do EOS. Também foi desenvolvida a revisão da literatura sobre o trabalho com Funções em periódicos da área de Educação Matemática, em Tese e Dissertações. Além disso, foram realizadas leituras e análises nos documentos que contêm orientações curriculares para o Ensino Médio, como Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 1999), Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL 2002), Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006) e Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018). Destaca-se que a Base Nacional Comum Curricular do Ensino Médio, apesar de apresentar versões preliminares, só passou a vigorar no ano de 2018, quando os sistemas de ensino passaram a incorporá-la a seus currículos. Por esse motivo, nesta tese a mesma foi tomada como aporte para possível correção de rumo na proposta de estudo, embora a mesma não esteja na base do trabalho desenvolvido.

Na segunda etapa, houve um aprofundamento sobre pesquisas em torno de questões epistemológicas e didáticas dos conceitos a serem desenvolvidos, bem como na tomada de decisões sobre estratégias, metodologias e recursos a serem utilizados no trabalho junto aos estudantes.

A partir das pesquisas realizadas nas duas primeiras etapas, foi desenvolvida a terceira etapa da investigação, centrada na estruturação, organização e desenvolvimento da proposta de estudos, a qual se organizou em torno do tema Funções. Buscou-se, assim, proporcionar atividades com graus de complexidade distintos os quais propiciassem aos estudantes um ambiente adequado para o desenvolvimento de habilidades e competências que os tornem mais autônomos durante o processo de ensino e aprendizagem, tal como preconizado pelos documentos curriculares oficias e alinhado com a proposta da Escola.

Já na quarta etapa, ocorreu a aplicação da proposta de intervenção junto a um grupo de 26 estudantes de uma turma do primeiro ano do Ensino Médio de uma escola da rede Privada de Educação do Munícipio de Farroupilha, Rio Grande do Sul, local de regência do professor/pesquisador.

A última etapa da investigação diz respeito à organização dos dados coletados, à análise dos resultados, bem como às reflexões e encaminhamentos advindos do trabalho desenvolvido. No quadro da Figura 23, apresenta-se uma síntese das ações realizadas em cada uma das etapas.

Figura 23 - Etapas e ações da investigação

Etapas	Ações
1ª – Busca por referenciais	- Estudo exploratório de referenciais que poderiam embasar a investigação. - Aprofundamento teórico em torno do EOS. - Estudo de documentos oficiais referentes ao trabalho Funções no Ensino Médio.
2ª – Estudo e planejamento da proposta	- Investigação de questões epistemológicas, didáticas e metodológicas em torno de Funções. - Definição dos temas a serem desenvolvidos. - Estabelecimento de estratégias e metodologias a serem utilizadas na proposta de intervenção.
3ª – Construção da proposta	- Articulação de recursos e metodologias em torno da proposta. - Construção dos materiais de estudo considerando os aportes teóricos e metodológicos do EOS, bem como os significados de referência, os níveis de compreensão dos conceitos de Função e o que está preconizado nos documentos oficiais. - Finalização da Proposta de Estudos sobre Funções.
4ª – Aplicação da proposta	- Apresentação da proposta à equipe diretiva da escola. - Apresentação da proposta ao grupo de estudantes. - Investigação do perfil dos estudantes por meio de questionário. - Realização das atividades em sala de aula e no laboratório de informática.
5ª – Organização e análise dos resultados	- Organização dos dados coletados junto aos estudantes. - Análise dos resultados sob a perspectiva do EOS. - Análise da proposta sob a perspectiva do EOS.

Fonte: a pesquisa.

Levando-se em consideração as etapas apresentadas, no quadro, sobre a investigação (Figura 23) e as fases propostas pela Investigação Baseada no Design (GODINO et al, 2013), entende-se que a 1ª e 2ª etapas se referem ao Estudo Preliminar, tendo em vista que contemplam os estudos em torno do objeto matemático e seus significados de referência, os objetivos instrucionais, busca por referenciais e por respaldos em documentos oficiais. Já a 3ª etapa se refere ao Design, que consiste em estabelecer as trajetórias instrucionais, selecionando e organizando atividades e recursos, levando em consideração as normas do ambiente em que será implantado o projeto educacional, a natureza do objeto em estudo e os referencias teóricos que norteiam a investigação. A fase de Implementação consiste no desenvolvimento do experimento, ou seja, a proposta sendo colocada em prática junto aos alunos (4ª etapa), quando se buscou recolher dados, materiais produzidos pelos estudantes, esquemas e informações interpretativos. A última, a fase de Avaliação Retrospectiva, contempla às análises dos dados alcançados e coletados com o experimento (5ª etapa), cujo objetivo está em apresentar uma argumentação em torno dos dados e expressar evidências sobre o grau de Idoneidade Didática alcançada.

A seguir, apresentam-se os instrumentos de pesquisa utilizados na investigação.

4.2 INSTRUMENTOS DE INVESTIGAÇÃO

Em consonância com as características e objetivos desta investigação, os procedimentos e instrumentos de pesquisa adotados pelo professor/pesquisador foram:

- observação do desenvolvimento das atividades com registro em diário de campo do professor/pesquisador;
- aplicação de dois questionários denominados Instrumento de Investigação I (Apêndice A) e Instrumento de Investigação II (Apêndice B).
- análise das produções dos estudantes com base no EOS.

A avaliação do processo de ensino e aprendizagem, fundamentada pelos referenciais que guiaram o desenvolvimento da investigação, ocorreu durante todo o processo de implementação e desenvolvimento da proposta de estudo junto aos estudantes. A observação sistemática do trabalho realizado pelos estudantes se constituiu em importante fonte de dados, o que foi possível a partir da participação ativa do observador/pesquisador. Dessa maneira, os fatos são percebidos e interpretados sem intermediação ou intervenções, ou seja, buscou-se observar e captar as manifestações e detalhes das ações dos estudantes no estudo proposto, realizando imediatamente, sempre que possível, os registros das evidências percebidas no diário de campo e, logo após a análise e reflexões sobre os mesmos.

Foram aplicados, junto aos estudantes, dois questionários, sendo que o Instrumento de Investigação I foi aplicado no primeiro encontro, com o objetivo de traçar o perfil dos estudantes e identificar suas expectativas ou angústias sobre o trabalho envolvendo Funções. Já o Instrumento de Investigação II foi aplicado no último encontro, visando captar a opinião a respeito da proposta, as principais facilidades ou dificuldades encontradas no desenvolvimento da mesma, bem como possíveis críticas, sugestões ou melhorias.

Com relação às produções dos estudantes durante os estudos propostos, essas foram realizadas por meio de registros manuscritos, contendo anotações e resoluções de atividades sobre cada um dos sete tópicos abordados na proposta. Assim, foi possível contar com um conjunto de instrumentos de investigação ao longo da aplicação da proposta, tal como apresentado anteriormente.

Destaca-se, também, que as produções dos estudantes realizadas no *software* GeoGebra (software utilizado na realização de atividades e tarefas) foram encaminhadas para o professor/pesquisador por meio de *e-mail*, *pen drive* ou impressas. Já as atividades desenvolvidas no papel, em horário extraescolar, eram entregues na aula seguinte.

O conjunto de atividades envolvendo os sete tópicos sobre Funções (Função, Função Afim, Função Quadrática, Função Modular, Função Exponencial, Função Logarítmica e Função Trigonométrica, as quais serão detalhadas em seguida) abrangeu trabalhos a serem realizados com papel e lápis, bem como no *software* GeoGebra, buscando, assim, integrar diferentes formas de abordar esses temas, com níveis diferenciados de exigência nas questões propostas.

Esse conjunto de instrumentos de investigação foi utilizado de forma integrada, buscando, assim, uma coleta de dados que refletisse o desenvolvimento, as realizações, os entendimentos e os equívocos advindos da proposta. No que segue, apresenta-se o lócus e os sujeitos participantes da investigação.

4.3 LÓCUS E SUJEITOS PARTICIPANTES DA PESQUISA

A investigação foi desenvolvida junto a um grupo de 26 estudantes do primeiro ano do Ensino Médio do Colégio Nossa Senhora de Lourdes, localizado no município de Farroupilha, Rio Grande do Sul, no ano de 2018, aos quais foram propostos conjuntos de atividades envolvendo o estudo de Funções.

O município de Farroupilha está localizado a, aproximadamente, 100 km da capital do Estado do Rio Grande do Sul. Pertence à região da Serra Gaúcha, nordeste do Estado, e possui uma área territorial de 359,30 Km², com uma estimativa de 71.570 habitantes (IBGE, 2018).

O Colégio Nossa Senhora de Lourdes pertencente à rede Privada de Educação do Munícipio de Farroupilha. Está localizado, no centro da cidade, e atende, há 102 anos, aos estudantes oriundos de todo o município, oferecendo a comunidade a Educação Infantil, Turno Integral, Ensino Fundamental I e II e Ensino Médio. É constituído, por 3 edificações, contando com 20 salas de aulas, Laboratório de Informática e de Ciências, Sala de 3D, Auditório, Biblioteca, Ginásio de Esportes, além de Sala de Professores, Secretaria, Direção, sala de Atendimento Especializado, sala de audiovisual, entre outros.

Todas as salas de aulas possuem um computador, duas lousas digitais, quadro branco e acesso livre a *internet,* sendo que cada professor pode conectar o material didático nas plataformas do Sistema de Ensino adotado pela Escola, bem como a uma grande variedade de programas/*softwares* que podem ser acessados e manipulados diretamente nas lousas digitais.

Já o Laboratório de Informática possuí 23 notebooks, que também podem ser utilizados nas salas de aula e demais ambientes, de acordo com a necessidade. Esse local conta com um profissional da área de TI (Tecnologias da Informação), que tem como função auxiliar os estudantes e os professores no desenvolvimento de seus trabalhos e pesquisas, além de realizar todas as manutenções e melhorias nos aparelhos disponíveis na escola.

Com relação aos materiais de Matemática, os mesmos estão alocados em uma sala que é utilizada para atendimentos a alunos com necessidades especiais. Estão disponíveis jogos matemáticos, sólidos geométricos, materiais manipuláveis, entre outros, os quais podem ser utilizados nos diversos ambientes da Instituição.

No ano de 2018, o colégio contava com 35 professores e 417 estudantes, os quais estavam distribuídos da seguinte forma: 57 na Educação Infantil, 177 no Ensino Fundamental I, 116 no Ensino Fundamental II e 67 no Ensino Médio.

Destaca-se que a investigação contou com a permissão da diretora da Instituição (Anexo A), autorização de pais e estudantes (Anexos B e C), tendo sido submetida ao Comitê de Ética em Pesquisa em Seres Humanos (CEP) e aprovada pelo parecer consubstanciado do CEP, número 1.871.876 de 2016.

A investigação foi realizada junto a uma turma de primeiro ano do Ensino Médio (turno da manhã), composta por 26 estudantes, dos quais 11 eram meninos e 15 meninas, com idade entre 15 e 16 anos. Destaca-se que, nesta pesquisa, os estudantes não estão citados pelo nome e, como o trabalho foi desenvolvido, em grande parte, em duplas, as mesmas foram denominados por letra maiúsculas do alfabeto (A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L e M). Já para indicar os estudantes em específico, será utilizada a letra “E”, seguida da letra maiúscula representando a dupla à qual pertence e de um número, um ou dois, que representam os estudantes da dupla referida. As informações transcritas dos estudantes não sofrerão correções ortográficas e serão apresentadas em fonte Arial 10, com um recuo de 4 centímetros. No que segue, apresentam-se os caminhos traçados e as estratégias estabelecidas na constituição das análises produzidas.

4.4 CAMINHOS PARA A ANÁLISE

O desenvolvimento e implantação da Proposta de Intervenção envolvendo o estudo das Funções, junto a uma turma de primeiro ano do Ensino Médio, foram analizados tomando como referência os trabalhos de Godino et al (2006), Godino, Batanero e Font (2008), Godino (2011) e Andrade (2014). Assim, as análises foram embasadas nos pressupostos estabelecidos pelo Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (EOS), mais especificamente, as noções, dimensões e níveis da Idoneidade Didática (epistêmica, cognitiva, interacional, mediacional, emocional e ecológica), considerando seus componentes e indicadores, como já destacado no capítulo anterior.

Ressalta-se que as dimensões epistêmica, ecológica e mediacional foram utilizadas com um olhar voltado para o material produzido (conjunto de atividades) e os objetos matemáticos envolvidos. Já as dimensões cognitiva, interacional e emocional para as ações e conhecimentos postos em jogo competiam aos estudantes.

Entendeu-se, também, ser necessário e pertinente realizar uma análise de cada um dos tópicos abordados na proposta no que se refere às dimensões Epistêmica, Cognitiva e Mediacional, tendo em vista que as mesmas apresentavam característica/especificidades relevantes, que necessitavam serem discutidas com um olhar mais atento e individualizado. Já para as dimensões Interacional, Emocional e Ecológica foi realizada uma análise geral da proposta, contemplando todos os tópicos, visto que as evidências percebidas nessas dimensões são semelhantes em toda a proposta.

Assim, por meio da dimensão epistêmica, foram analisados todos os tópicos do material produzido, considerando os componentes e indicadores da Ferramenta de

Análise Epistêmica (situações-problemas, linguagem, regras, argumentos e relações), buscando identificar o grau (Alta, Média ou Baixa) de idoneidade alcançado, de acordo com os pressupostos estabelecidos pelo EOS. Porém, para alcançar uma alta idoneidade epistêmica, foi necessário levar em consideração as conexões e interações entre os significados de referência, sendo que os conceitos, proposições e procedimentos precisaram de contextualização, o que foi realizado por meio de situações-problema, explicações e justificativas pertinentes e adequadas, apoiadas por todos os recursos expressivos e eficazes.

A dimensão cognitiva teve sua análise focada nos indicadores estabelecidos com base no material produzido para a proposta frente aos indicadores evidenciados pelos estudantes durante a realização dos estudos. Para isso, foram levados em consideração os componentes e indicadores da Ferramenta de Análise Cognitiva (raciocínio lógico, leitura/interpretação e análise/síntese), bem como os componentes e indicadores da Ferramenta de Análise Epistêmica (situações-problema, linguagem, regras, argumentos e relações). Entende-se que a análise a qual foi realizada por meio dessas duas dimensões permite interpretar, analisar e avaliar as aprendizagens e os conflitos semióticos apresentados pelos estudantes durante a realização dos estudos, os quais serão analisados a partir dos registros e produções dos estudantes e das observações do pesquisador, visando, assim, refletir e determinar o grau de idoneidade atingido no processo.

Já a dimensão mediacional foi contemplada nas análises dos materiais produzidos, no que se refere aos recursos utilizados frente aos componentes e indicadores da Ferramenta de Análise Mediacional (recursos e tempo didático), permitindo, assim, verificar as potencialidades e as fragilidades encontradas nos materiais de estudos produzidos.

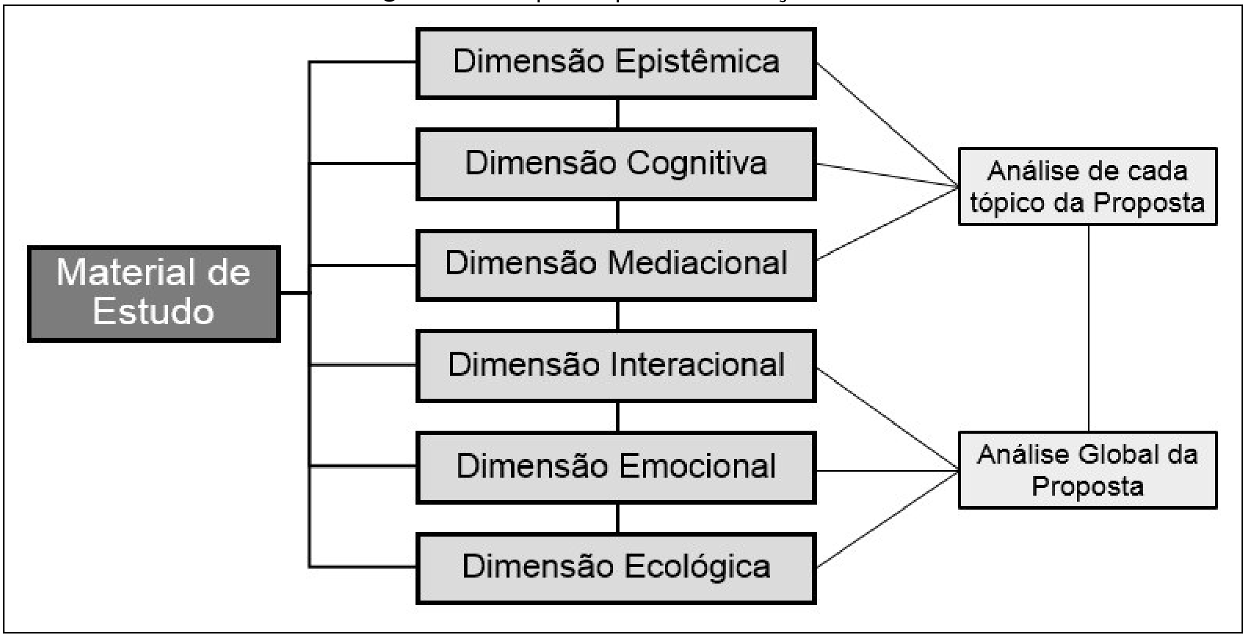
Por meio da dimensão interacional, foram analisadas as interações entre estudantes/pesquisador/material/recursos, considerando os componentes e indicadores da Ferramenta de Análise Interacional (diálogo/comunicação, interação e autonomia). Essa análise ocorreu por meio dos registros realizados e das observações, objetivando refletir e determinar o grau de idoneidade alcançado nas interações ocorridas e produzidas no desenvolvimento de todo o trabalho.

Na dimensão emocional, a análise produzida voltou-se para questões atitudinais dos estudantes frente a proposta desenvolvida, a qual será realizada por meio dos componentes e indicadores da Ferramenta de Análise Emocional (motivação/interesse, envolvimento e crenças/atitudes).

Novamente, na dimensão ecológica, a análise volta-se para o material produzido, buscando verificar a adequação dos significados institucionais de referência estabelecidos nos documentos oficiais e pela escola, bem como se estão presentes na proposta. Assim, a análise foi realizada levando em consideração os componentes e indicadores da Ferramenta de Análise Ecológica (currículo, escola e sociedade).

Desse modo, levando em consideração as noções, dimensões e graus da Idoneidade Didática apresentados como critérios para as análises dos resultados desta investigação, será produzida, dessa maneira, uma análise geral do grau de Idoneidade/adequação alcançada com a proposta de intervenção baseada nos pressupostos do EOS, ressaltando que as dimensões se relacionam e se conectam entre si, conforme esquema apresentado na Figura 24.

Figura 24 - Esquema para a realização da análise



Fonte: o autor.

No capítulo seguinte, apresenta-se a estrutura e a constituição da Proposta de Estudos envolvendo Funções aplicada junto a um grupo de estudantes do primeiro ano do Ensino Médio.

5 FUNÇÕES: A PROPOSTA DE ESTUDO

Apresenta-se, neste capítulo, a Proposta de Estudo sobre Funções. São destacados elementos da sua estrutura, temas abordados, objetivos, carga horária, recursos utilizados, bem como estratégias e procedimentos adotados na sua condução. Apresentam-se, também, exemplos dos diferentes tipos de tarefas e atividades desenvolvidas, posto que a íntegra da proposta se encontra em arquivo digital no Apêndice C. Porém, antes da apresentação da proposta, julga-se pertinente colocar em evidência aspectos do perfil dos estudantes que participaram do desenvolvimento da mesma. Esse perfil, aliado aos elementos teóricos sobre o trabalho com Funções e os advindos do EOS, contribuiu para a formatação final da proposta e, principalmente, para a sua condução.

5.1 SOBRE OS ESTUDANTES

Buscando identificar características dos sujeitos envolvidos na investigação, foi aplicado o Instrumento de Investigação I, o qual foi respondido por todos os estudantes da turma antes da implantação da proposta de estudos. O instrumento tinha por objetivo captar elementos sobre a trajetória dos estudantes na sua vida escolar, hábitos de estudos, visão do trabalho desenvolvido na Escola, suas aspirações e interesses e motivações.

Com a aplicação do instrumento de investigação foi possível identificar que nenhum dos estudantes foi reprovado, durante o percurso do Ensino Fundamental, e que os mesmos pretendem realizar o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) ao término do Ensino Médio e ingressar em uma Universidade. Já com relação ao curso superior que gostariam de realizar, sete estudantes (26,9%), apontaram Engenharias, seis estudantes (23,1%), Direito e quatro (15,4%), Arquitetura. Além deles, dois estudantes (7.7%), apontaram Medicina, dois (7,7%), Ciência da Computação e, os outros cinco estudantes (19,2%), tinham dúvida em relação ao que gostariam de cursar. Assim, foi possível perceber que metade do grupo pensa em fazer um curso da área científica tecnológica (Engenharia, Arquitetura e Ciência da Computação), pouco menos de um quarto buscam por um curso da área de Humanas (Direito) e menos que 10% a área da Saúde (Medicina).

Em relação ao ensino oferecido pela Escola, se comparado com outras instituições de ensino no município, 17 estudantes (65,4%) entenderam é melhor que as outras escolas, porém seis estudantes (23,1%) consideraram igual, sendo que três estudantes (11,5%) não responderam a esse questionamento. Com relação à importância que a Escola tem na sua formação, 24 (92,3%) consideraram importante e os outros dois (7,7%) entendem que é muito importante para suas formações. Já com relação a estudar e realizar as tarefas em casa, 8 estudantes (36,4%) responderam que, na maioria das vezes, as realizam e o restante dos estudantes as realizam às vezes. Em torno de uma hora diária foi o tempo que declararam dedicar aos estudos fora da Escola.

Quando questionados se conseguem entender os conteúdos e problemas abordados em sala de aula, seis (23,1%) salientaram que sempre entendem os conteúdos, 17 estudantes (65,4%) quase sempre entendem e três (11,5%) quase nunca entendem. Salienta-se que os estudantes que responderam que quase nunca entendem o conteúdo são os mesmos que, poucas vezes, realizam as atividades e estudos de casa, deixando para estudar para as avaliações somente na véspera das mesmas. Em outra questão, ao se buscar identificar quantos estudantes procuravam o auxílio do professor, vinte e dois estudantes (84,6%) responderam que, na maioria das vezes, procuram auxílio e o restante somente algumas vezes, (15,4%).

O questionário é finalizado com a solicitação de sugestões de como deveriam ser as aulas de Matemática. Aqui, praticamente todos os estudantes relataram que gostariam de ter aulas dinâmicas, menos cansativas, com o uso de instrumentos tecnológicos e em diferentes ambientes do colégio. Com relação ao uso das tecnologias, os estudantes já haviam trabalhado com o *software* Geogebra, no ano anterior, sendo que também já tinham realizado atividades no laboratório de informática e na sala de aula 3D.

5. 2 PROPOSTA DE ESTUDOS SOBRE FUNÇÕES

A Escola onde a pesquisa foi implementada adota material didático em formato de apostilas de um Sistema de Ensino, sendo cada material composto por dois capítulos com, aproximadamente, cinco módulos por capítulo. Os capítulos apresentam a teoria (conceitos, definições e proposições) e exercícios ou situações-problema resolvidos (procedimentos), enquanto que os módulos trazem um conjunto de atividades em forma de exercícios e problemas contextualizados para os estudantes resolverem, cabendo ao professor desenvolver com os mesmos os primeiros exercícios. As demais tarefas devem ser realizadas em casa, sendo que as resoluções das atividades estão disponíveis, para os alunos, no portal do Sistema de Ensino.

Com relação ao estudo de Funções, no primeiro ano do Ensino Médio, o mesmo está divido em sete capítulos (tópicos) e trinta e seis módulos, os quais devem ser trabalhados ao longo do ano, concomitante a outros conteúdos relativos a este ano escolar, de acordo com o currículo da escola e o material das apostilas. No quadro da Figura 25, apresenta-se um resumo dos tópicos e suas subdivisões envolvendo Funções, bem como os objetivos estabelecidos para os mesmos, de acordo com o material utilizado e o currículo da Escola.

Figura 25 - Tópicos e objetivos sobre Funções

TÓPICOS SOBRE FUNÇÕES	OBJETIVOS/CARGA-HORÁRIA PREVISTA
1. FUNÇÃO • Noção intuitiva de função. • Par ordenado e sua representação no plano cartesiano. • Definição de função. • Duas maneiras de representar função. •Lei de correspondência (ou formação). • O símbolo f(x). • Domínio, contradomínio e imagem de uma função. • Raiz ou zero de uma função. • Gráfico de uma função.	• Identificar, através de um diagrama, se uma relação é uma função. • Identificar, através de um gráfico, se uma relação é uma função. • Determinar o domínio de uma função definida em $\mathbb{R}$. • Compreender a importância do conceito de funções em situações do cotidiano. - Carga horária prevista de 5 horas-aula.
2. AFIM • Função polinomial do primeiro grau ou função afim. • Gráfico da função afim e da função constante. • Função linear – Proporcionalidade. • Termo independente ou coeficiente linear. • Interpretação geométrica da raiz da função do primeiro grau. • Crescimento e decrescimento de função. • Taxa de variação ou coeficiente angular. • Estudo dos sinais. • Inequações. • Inequações produto ou quociente. • Algumas aplicações práticas de função do primeiro grau.	• Descrever as características fundamentais da função do primeiro grau, relativas ao gráfico, crescimento / decrescimento, taxa de variação. • Identificar uma função linear a partir de sua representação gráfica. • Identificar os intervalos em que uma função do primeiro grau é positiva ou negativa, relacionando com a solução algébrica de uma inequação. • Representar, graficamente, funções do primeiro grau. • Reconhecer funções do primeiro grau crescentes ou decrescentes. • Utilizar a função linear para representar relações entre grandezas diretamente proporcionais. • Resolver inequação que envolva função do primeiro grau. • Resolver problemas que envolvam inequações do primeiro grau. • Resolver situação-problema que envolva função do primeiro grau.

	- Carga horária prevista de 6 horas-aula.
3. QUADRÁTICA • Função polinomial do segundo grau ou função quadrática. • Raízes da função do segundo grau. • Interpretação geométrica de raiz da função do segundo grau. • Gráfico de função do segundo grau. • Termo independente. • Eixo de simetria e vértice da parábola. • Domínio e conjunto imagem. • Máximos e Mínimos. • Inequação do segundo grau. • Estudo do sinal da função do 2o grau. • Inequação produto ou quociente. • Algumas aplicações práticas de função do segundo grau.	• Identificar leis matemáticas que expressem a relação de dependência entre duas grandezas. • Resolver situações-problema que envolvam as raízes de uma função do segundo grau. • Identificar uma função do segundo grau a partir de sua representação gráfica. • Representar graficamente funções do segundo grau. • Determinar os intervalos em que uma função do segundo grau é positiva ou negativa. • Construir o gráfico de uma função definida por partes. • Resolver problemas de máximos e mínimos que envolvam uma função do segundo grau. • Resolver uma inequação do segundo grau. • Resolver uma inequação produto ou quociente. • Resolver problemas que envolvam inequações do segundo grau. - Carga horária prevista de 8 horas-aula.
4. MODULAR • Módulo de um número real. • Função modular. • Gráfico de função modular. • Equação modular. • Inequação modular.	• Identificar uma função modular a partir do seu gráfico. • Construir o gráfico de uma função modular. • Resolver uma equação e uma inequação modular. • Resolver uma situação-problema utilizando o conceito de módulo. - Carga horária prevista de 4 horas-aula.
5. EXPONENCIAL • Equação exponencial. • Função exponencial. • Gráfico da função exponencial. • Crescimento ou decrescimento da função exponencial. • Inequação exponencial.	• Resolver uma equação exponencial. • Reconhecer a função exponencial e suas propriedades relativas ao crescimento ou decrescimento. • Construir o gráfico de uma função exponencial. • Identificar uma função exponencial com base em seu gráfico. • Resolver uma inequação exponencial. • Determinar uma função exponencial do tipo $f(x) = k$. • Resolver problemas que envolvam função exponencial. - Carga horária prevista de 5 horas-aula.
6. LOGARÍTMICA • Gráfico da função logarítmica. • Domínio e conjunto imagem da função logarítmica. • Crescimento ou decrescimento da função logarítmica. • Inequação logarítmica.	• Determinar o domínio de funções logarítmicas definidas em $\mathbb{R}$. • Reconhecer o gráfico de uma função logarítmica. • Identificar uma função logarítmica a partir do seu gráfico. • Construir o gráfico de uma função logarítmica. • Resolver problemas que envolvam uma função logarítmica. • Usar a função logarítmica para efetuar mudança de escala. • Resolver uma inequação logarítmica. - Carga horária prevista de 4 horas-aula.

7. TRIGONOMÉTRICAS • Função periódica. • Função seno e cosseno. • Domínio e conjunto imagem da função. • As funções seno e cosseno na modelagem de fenômenos.	• Reconhecer, na circunferência trigonométrica, a variação de sinais, crescimento, decrescimento das funções trigonométricas. • Identificar o período de uma função trigonométrica a partir de seu gráfico. •Identificar o domínio e o conjunto imagem de uma função trigonométrica a partir de seu gráfico e da lei que a define. • Construir o gráfico de uma função trigonométrica. • Resolver um problema do cotidiano utilizando informações de funções trigonométricas. - Carga horária prevista de 8 horas-aula.

Fonte: adaptado do Plano de Trabalho da Escola.

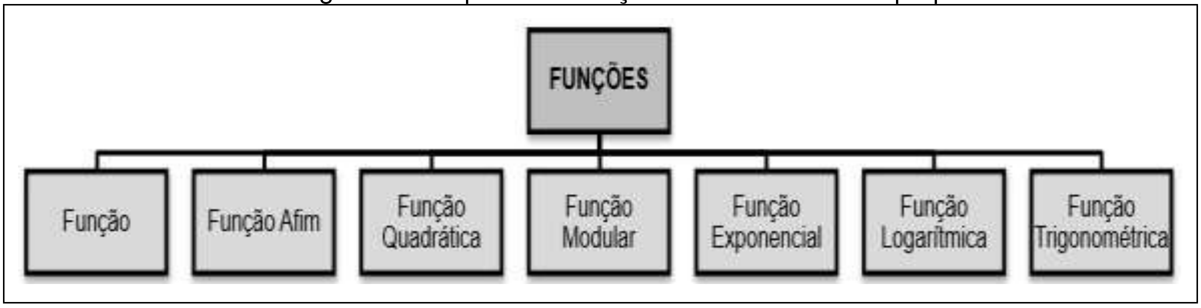
Tomando como ponto de partida o que está na Figura 24, a proposta de estudos desenvolvida contemplou os sete tópicos colocados em destaque, os quais foram planejados, desenvolvidos e organizados levando em consideração as orientações curriculares da Escola, indicações de documentos oficiais, livros didáticos, pesquisas na área voltadas para o ensino e a aprendizagem de Funções, os significados de referência para Funções, os níveis de compreensão propostos por Bergeron e Herscovics (1982), bem como os aportes teóricos e metodológicos do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática.

Essa proposta visou retomar, desenvolver e aprofundar conhecimentos relacionados ao tema Funções, buscando o estudo de aspectos relacionados: à compreensão dos conceitos envolvidos; aos encadeamentos conceituais sobre o tema; às validações intuitivas; à investigação; à análise e compreensão de fatos da realidade; à resolução de problemas; ao desenvolvimento do raciocínio lógico; à abstração; às demonstrações; ao trabalho em grupo; ao desenvolvimento de competências e habilidades as quais qualifiquem os estudantes para aplicar seus conhecimentos em situações práticas.

Assim, durante a elaboração da proposta, foram integrados diferentes recursos e procedimentos que pudessem potencializar a visualização, representações gráficas, manipulações, o estabelecimento de relações, conjecturas, análises, sínteses e a construção de argumentações. Dessa forma, buscava-se criar condições favoráveis para a interação entre os estudantes, o conteúdo e o professor, ou seja, para que ocorressem múltiplas relações no processo de ensino e aprendizagem das Funções.

Na Figura 26, apresentam-se os tópicos desenvolvidos na proposta de estudos sobre Funções.

Figura 26 - Tópicos de Funções desenvolvidos na proposta



Fonte: o autor.

No âmbito da proposta e visando potencializar o processo de ensino e aprendizagem do tema Funções, para cada um dos tópicos apresentados foram construídos ou selecionados um conjunto de materiais de estudos visando retomar, aprofundar e desenvolver ideias, noções, conceitos, definições, proposições e procedimentos em torno dessa temática para o primeiro ano do Ensino Médio.

Assim, para melhor explicitar a organização dos materiais de estudos, no que segue, inicialmente, apresenta-se, na Figura 27, uma síntese do que foi desenvolvido, especificando as estratégias e os recursos utilizados.

Figura 27 - Quadro síntese sobre os materiais de estudos

Tópico sobre Funções	Conceitos, definições, proposições e procedimentos abordados	Estratégias e Recursos utilizados
Função	• Noções básicas para o desenvolvimento do conceito de função: existência de variáveis, relação de dependência, representações. • Noção intuitiva de função a partir de situações-problema e formas de representação em uso. • A noção de função como relação entre conjuntos. • Estabelecimento de leis de formação simples e visuais. • Estabelecimento do domínio e do conjunto imagem no contexto. • Formas de representação de funções: língua natural, algébrica, tabular, figural e gráfica. • Construção e interpretação de tabelas e gráficos convencionais e não convencionais. • Identificação de Função crescente, decrescente e constante, por meio de gráficos, lei de formação e a partir de situações-problema. • Determinação e interpretação do zero da função no contexto da situação-problema. • Interpretação do sinal da Função na situação-problema abordada.	• Para desenvolver o estudo em torno de Função, foram propostas, inicialmente, situações-problema elementares envolvendo a relação funcional, cujo objetivo era retomar ideias, noções e conceitos já trabalhados no ano anterior, • Abordaram-se situações-problema de domínio discreto e contínuo, buscando determinar a existência de variáveis, a relação de dependência entre grandezas, a lei de formação e as diferentes formas de representação e comunicação de uma função. • Com relação aos recursos utilizados para o desenvolvimento de conceitos, definições, proposições e procedimentos, foram articuladas situações-problema, exercícios, objetos de aprendizagem, vídeos com exemplos resolvidos, material de estudo no *PowerPoint* e aplicações e construções no *software* Geogebra.

Afim **Quadrática** **Modular** **Exponencial** **Logarítmica** **Trigonométrica**	• Determinação e interpretação do zero da função no contexto da situação-problema (Função Afim e Quadrática). • Formas de representação de funções: língua natural, algébrica, tabular e gráfica. • Interpretação do sinal da Função na situação-problema abordada. • Construção e interpretação de tabelas e gráficos, de acordo com a situação-problema enfrentada. • Identificação e análise do crescimento e decrescimento de uma função a partir de situações contextualizadas. • Interpretação e determinação do domínio e conjunto imagem, de acordo com a situação abordada. • Determinação e análise do valor máximo e mínimo de uma função quadrática. • Análise e interpretação das variações de uma função (deslocamentos na horizontal e vertical). • Interpretação e determinação do período de uma função trigonométrica (seno e cosseno). • Aplicações das Funções em diferentes situações intramatemáticas e extramatemáticas.	• Para introduzir cada um dos tópicos, foram utilizadas distintas situações-problema, por meio das quais eram desenvolvidas noções, ideias e conceitos. • Foram utilizados, também, objetos de aprendizagem desenvolvidos no *software* Geogebra, para que os estudantes pudessem movimentar, manipular, observar e analisar o comportamento das funções, bem como aprofundar noções em torno de cada tópico. • Os estudantes também utilizaram o *software* Geogebra para realizarem construções, interpretações e análises de gráficos, bem como comparar as construções manuais (lápis, régua e papel). • Para o desenvolvimento de conceitos, definições, proposições e procedimentos, foram articuladas situações-problema, exercícios, objetos de aprendizagem, vídeos com exemplos resolvidos, material de estudo no *PowerPoint, além de* aplicações e construções no Geogebra.

Fonte: o autor.

As construções desses materiais de estudo envolveram, para cada um dos tópicos, um conjunto de distintas situações-problema relacionadas a situações da realidade ou do conhecimento cotidiano dos estudantes, do mundo do trabalho, de outras áreas do conhecimento e questões da própria Matemática. Assim, buscou-se desenvolver as noções, conceitos, definições, proposições, procedimentos, argumentação e relações entre os objetos matemáticos em estudo, a partir de problemas contextualizados, apoiados por exemplos, construções no *PowerPoint* e no *Geogebra,* construções em lápis e papel, além de vídeos previamente selecionados e demonstrações.

Destaca-se, também, que o trabalho desenvolvido seguiu as orientações do Plano de Trabalho da Escola, cuja proposta foi implementada, não deixando de abordar os conceitos, definições e proposições nele contidos. Embora esse Plano de Trabalho estivesse apoiado em referenciais teóricos, esses não eram específicos da Matemática e, por entender-se essencial um trabalho com a Matemática que considere a essência e o desenvolvimento epistemológico dos objetos matemáticos, encontrou-se no EOS os pressupostos os quais se julgou pertinentes para nortear a proposta e desenvolver todo a trabalho. Considera-se, ainda, que o material utilizado do Sistema de Ensino adotado pela Escola tenha sido estruturado com base em referenciais, porém entende-se não ser função do professor apenas aplicá-lo, sem significá-lo no âmbito da própria trajetória profissional e do contexto no qual a Escola e os estudantes estão inseridas. Daí a busca por referenciais que permitissem situar e significar o que é preconizado pela Escola e está posto no Sistema de Ensino, pelas lentes do que a pesquisa em Educação Matemática tem apresentado sobre a Matemática, seu ensino e aprendizagem.

Assim, no quadro da Figura 28, Figura 29 e Figura 30 destacam-se exemplos de situações-problema contextualizados com uma série de encaminhamentos e questionamentos que visam resgatar, retomar, aprofundar e desenvolver conhecimentos relacionados aos temas em estudo. Tais situações-problema permearam todo o trabalho, sendo aplicadas, tanto para construção mais intuitiva de um conceito, como para sua apropriação, estabelecimento de relações, desenvolvimento de argumentações e trabalho com diferentes tipos de representações.

Figura 28- Exemplo de situações-problema envolvendo a noção de Função

O senhor Delfino foi à fotocopiadora ao lado de seu trabalho e deparou-se com a seguinte tabela:

Quantidade	Valor da cópia em preto e branco (R$)	Valor da cópia colorida (R$)
1	0, 09	
2	0, 18	2, 40
3	0, 27	3, 60
4		
5	0, 45	6, 00
6		7, 20
7	0, 63	
8		
9		
10	0, 90	12, 00

a) Quais as relações de dependência na tabela?
b) Quanto o senhor Delfino gastaria ao tirar nove cópias em preto e branco e ao tirar oito cópias coloridas?
c) Qual é o preço de cada cópia colorida?
d) O que você tem a dizer sobre a coluna da tabela referente aos valores da cópia em preto e branco?
e) O que você tem a dizer a respeito da coluna do valor da cópia colorida?
f) Do que depende o preço a ser pago por um cliente que for até a fotocopiadora?
g) Os valores expressos na coluna "Quantidade" dependem de alguma outra grandeza?
h) Quanto custariam 11 cópias em preto e branco? E 11 cópias coloridas?
i) Quanto custariam 12 cópias em preto e branco? E 12 cópias coloridas?
j) Qual a formula matemática que relaciona a quantidade e preço de cada tipo de impressão?
k) Qual o domínio e o conjunto imagem de cada uma das situações?

Fonte: adaptado de Oliveira (2015).

Figura 29 - Exemplos de situações-problema envolvendo Função

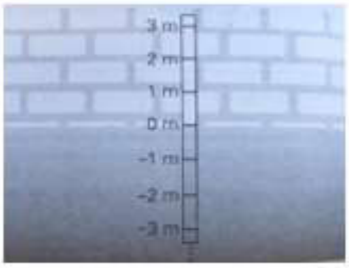
A) Um taxista de uma determinada cidade cobra por seus serviços uma taxa fixa pela solicitação do táxi, chamada bandeirada, mais um valor por km rodado. O valor da bandeirada é estipulado dependendo a hora do dia em que o táxi é chamado. Na tabela abaixo, percebe-se alguns valores a serem pagos pelos clientes que utilizam o serviço em horário de bandeirada 1 e de bandeirada 2:

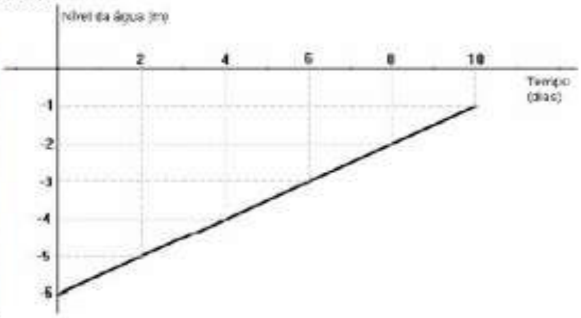
Km rodados	Valor com Bandeirada 1
0	R$ 1,20
1	R$ 2,20
2	R$ 3,20
3	
4	
5	R$ 6,20
10	
15	
20	

Km rodados	Valor com Bandeirada 2
0	
1	R$ 3,50
2	
3	
4	R$ 6,50
5	
10	R$ 12,50
15	
20	

Complete a tabela e responda as questões abaixo:
a) Do que depende o valor total a ser pago por uma corrida de táxi?
b) Quanto custa a bandeirada 1?
c) Quanto gastaria uma pessoa ao andar 4 km em bandeirada 1? E 20 km?
d) Quanto gastaria uma pessoa ao andar 3 km em bandeirada 2? E 15 km?
e) Qual o custo da bandeirada 2?
f) O que se pode dizer a respeito da variação dos preços na bandeirada 1?
g) O que se pode dizer a respeito da variação dos preços na bandeirada 2?
h) Qual é a formula Matemática que pode representar cada um dos casos?
i) Qual a variável dependente e independente em cada caso?
j) Qual o domínio e o conjunto imagem em cada caso?

B) A água que usamos em nossas casas vem de grandes represas que devem ser conservadas sempre limpas. Suas margens não devem ser povoadas, para que esgotos não sejam despejados em suas águas. Suponha que numa dessas represas o medidor do nível da água consista em uma barra graduada, perpendicular à superfície da água conforme a figura ao lado. O gráfico abaixo mostra o nível dessa represa em função do tempo, nos dez primeiros dias do mês de maio. Sendo 0 m o nível mínimo para o abastecimento da região servida pela represa e, supondo que o aumento do nível da água continue seguindo o padrão registrado nos dez primeiros dias, responda as perguntas.



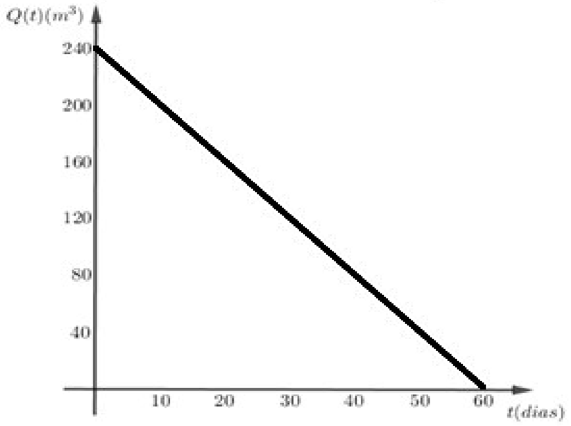


a) Qual a relação de dependência existente no gráfico? Explicite a variável dependente e a independente.
b) O que você entende pela expressão "em função do" presente no enunciado da situação problema?
c) A quantos metros (em relação ao mínimo necessário para que haja abastecimento) está o nível da água no dia 2 de maio? E no dia 4?
d) Qual era o nível nos dias 3 e 5?
e) Você percebe algum padrão na variação do nível da água? Qual?
f) Indique uma fórmula matemática que represente a variação do nível da água.
g) Em que dia do mês de maio o nível da água atingirá o mínimo necessário para o abastecimento da região?

Fonte: adaptado de A) Oliveira (2015) e B) Paiva (1995).

Figura 30 - Situações-problema envolvendo Funções

A) Em um reservatório de água de uma cidade, ocorreu o rompimento de um dos dutos e o vazamento pode ser representado pelo gráfico a seguir. Com base nas informações contidas no mesmo, determine ou construa o que se pede:



a) A expressão algébrica de Q(t): quantidade de água no reservatório (em metros cúbicos) em função de t (em dias decorridos desde o início do mês);
b) O zero da função e seu significado no contexto do problema;
c) o intercepto y e seu significado no contexto do problema;
d) O domínio da função. Justificando sua resposta;
e) O conjunto imagem. Justifique sua resposta;

B) Para colocar cerâmica nos cômodos de uma casa, um pedreiro precisa, inicialmente, conhecer a área de cada uma das peças. Com base nessa informação, faça o que é solicitado:
a) Se um cômodo tem 6m de lado, qual a sua área?
b) Se a área de um quarto é de 64 m ^{2}, qual a medida do seu lado?
c) A tabela a seguir relaciona a medida dos lados de cada cômodo com a área da superfície a ser revestida por cerâmica. Complete-a.

Medida do lado (L)	2	3		5		8,5	9,3	10	10,5
Área (A)			16		49				

d) A cada medida do lado do cômodo obtém-se um valor correspondente da área de cerâmica utilizada. Escreva como você obteve cada valor da tabela.
e) Em geral, você pode representar a medida de um lado qualquer do cômodo por L, e da área por A. Expresse uma relação entre estas duas medidas.
f) Alguma destas medidas depende da outra? Como é esta dependência?
g) Marque em uma folha cada um dos pares da tabela anterior. Você pode unir esses pontos? Por que?
h) Unindo os pontos, que tipo de gráfico você obtém? É possível obter este mesmo gráfico utilizando menos pontos? Justifique sua resposta?
i) Existe algum cômodo cuja medida do lado seja tal que seu perímetro e sua área são representados pelo mesmo número? Como este fato pode ser mostrado no gráfico?
j) Qual é o domínio e o conjunto imagem no contexto do problema? Justifique sua resposta.

Fonte: adaptado de A) Adami et al, (2015) e B) Souza (2013).

Como pode ser observado, as atividades buscavam contextualizar distintas situações, apoiadas por materiais de estudo complementares, conforme já mencionado, e que passam a ser detalhados.

Buscando a compreensão e apropriação por parte dos estudantes com relação aos diferentes conceitos trabalhados e considerando a complexidade de alguns deles, foram elaborados objetos de aprendizagem no *software* Geogebra, nos quais os estudantes poderiam, a partir da manipulação e movimentação de controles deslizantes, observar e analisar o comportamento dos gráficos e seus valores, buscando estabelecer relações para chegar aos conceitos, definições e proposições que estavam sendo abordadas, conforme destacado na Figura 31. Na mesma figura, é apresentada uma atividade envolvendo a Função Exponencial na qual, a partir do objeto apresentado no Geogebra, o estudante pode manipular os controles deslizantes, verificar e analisar o comportamento da função, determinar o crescimento e decrescimento da mesma, estabelecer o conjunto domínio e imagem, bem como justificar suas respostas.

Figura 31 – Atividade sobre Função Exponencial no Geogebra

Objeto1

1- O que podemos observar na função quando somamos ou subtraímos um valor “k” ao expoente “x” da função $y=2^{x+k}$, para $k \in \mathbb{R}$.

2- As funções são crescentes ou decrescentes? Justifique.

3- Qual é o domínio e o conjunto imagem das funções? Justifique.

Objeto 2

1- O que podemos observar na função quando multiplicamos um valor “K” ao expoente “x” da função $y=2^{x.k}$, para $k \in \mathbb{R}$ e $K \neq 0$.

2- As funções são crescentes ou decrescentes? Justifique.

3- Qual é o domínio e o conjunto imagem das funções? Justifique.

Objeto 3

1- O que podemos observar na função quando somamos ou subtraímos uma constante K na função $y=2^x+k$, para $k \in \mathbb{R}$.

2- As funções são crescentes ou decrescentes? Justifique.

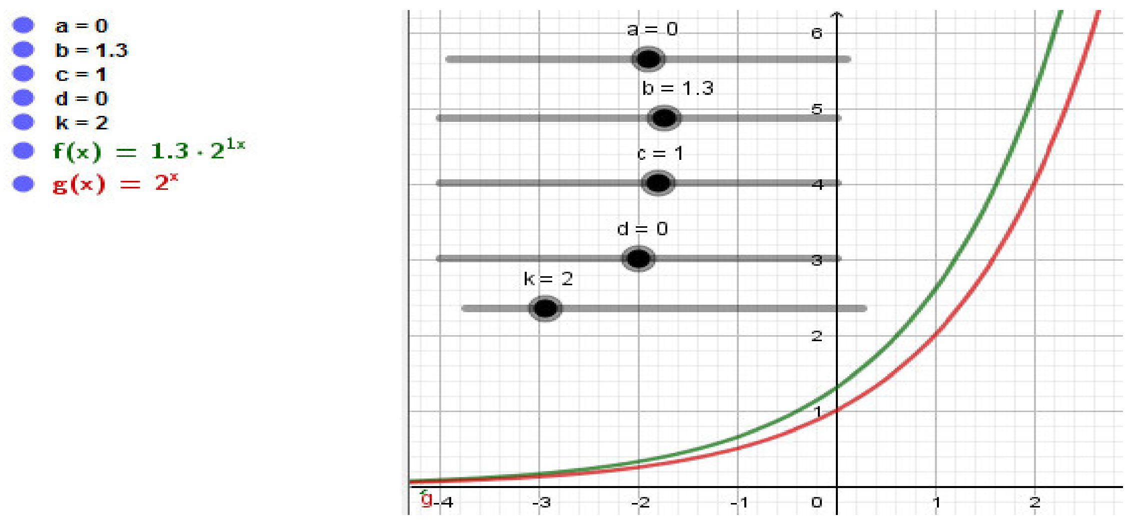
3- Qual é o domínio e o conjunto imagem das funções? Justifique.

Objeto 4

1- O que podemos observar na função quando somamos ou subtraímos um valor “k” ao expoente “x” da função $y=(1/2)^{x+k}$, para $k \in \mathbb{R}$.

2- As funções são crescentes ou decrescentes? Justifique.

3- Qual é o domínio e o conjunto imagem das funções? Justifique.

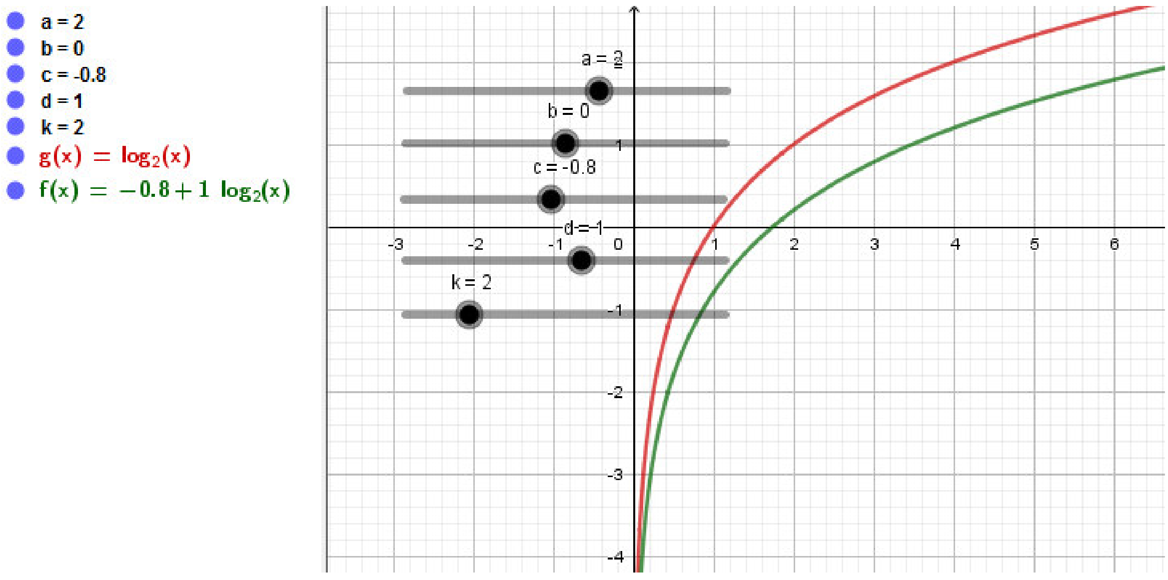


Fonte: Projeto de Estudo de Funções.

Já a Figura 32 apresenta uma atividade sobre Função Logarítmica em que os estudantes também utilizavam os controles deslizantes de um objeto no Geogebra para analisar o comportamento da função e tirar conclusões ou justificar o que estava sendo solicitado.

Figura 32 - Atividade sobre Função Logarítmica no Geogebra

Objeto 7
1- O que podemos observar na função quando somamos ou subtraímos uma constante K na função y=$k + \log_2 x$, para k∈ $\mathbb{R}$.
2- As funções são crescentes ou decrescentes? Justifique.
3- Qual é o domínio e o conjunto imagem das funções? Justifique.
Objeto 8
1- O que podemos observar na função quando somamos ou subtraímos um valor “k” ao expoente “x” da função y=$\log_2(x + k)$, para k∈ $\mathbb{R}$.
2- As funções são crescentes ou decrescentes? Justifique.
3- Qual é o domínio e o conjunto imagem das funções? Justifique.
Objeto 9
1- O que podemos observar na função quando multiplicamos um valor “K” ao expoente “x” da função y=$\log_2(x.k)$, para k∈ $\mathbb{R}$ e K≠ 0.
2- As funções são crescentes ou decrescentes? Justifique.
3- Qual é o domínio e o conjunto imagem das funções? Justifique.
Objeto 10
1- O que podemos observar na função quando somamos ou subtraímos uma constante K na função y=$k + \log_{1/2} x$, para k∈ $\mathbb{R}$.
2- As funções são crescentes ou decrescentes? Justifique.
3- Qual é o domínio e o conjunto imagem das funções? Justifique.



Fonte: Projeto de Estudo de Funções.

Foram desenvolvidas, também, atividades envolvendo as Funções Trigonométricas Seno e Cosseno, nas quais os estudantes poderiam manipular o objeto matemático construído no Geogebra para analisar as variações que ocorrem nessas funções, de acordo com as mudanças nos parâmetros (Figura 33).

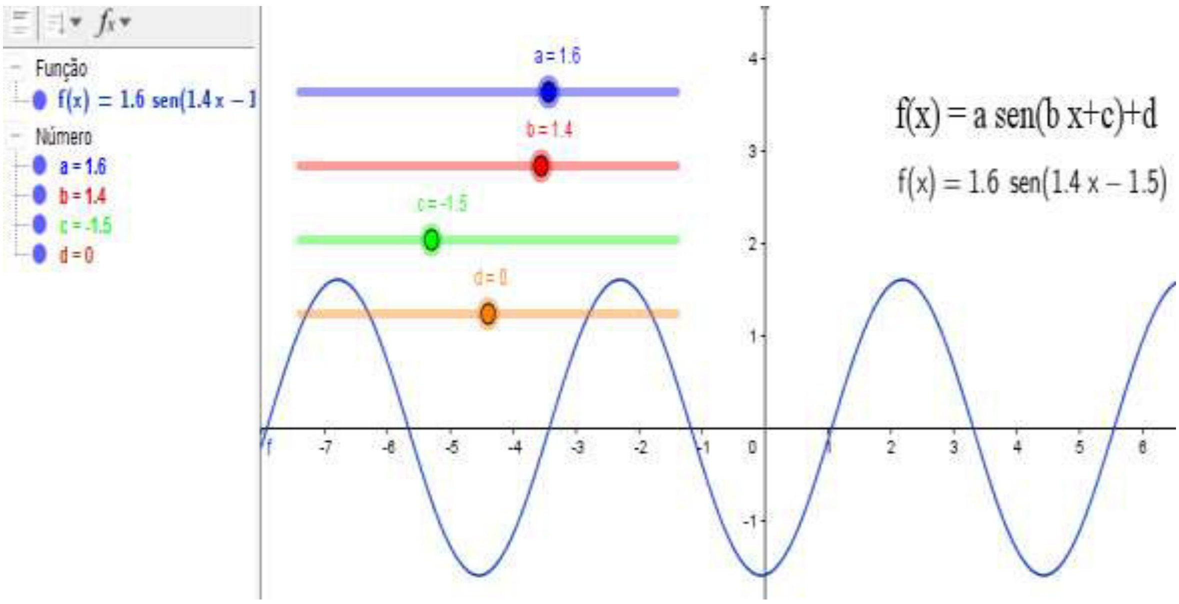
Figura 33 - Atividade sobre Função Trigonométrica no Geogebra

2- Construa no mesmo sistema cartesiano, no qual foi construído o gráfico da função f(x)= cos(x), os gráficos de f(x)= a+ cos(x), atribuindo para a variável "a" os valores -3, -2, 2 e 3.

Função	Domínio	Imagem	Período	Amplitude
y= cos (x)				
y= -3+ cos(x)				
y= -2+cos(x)				
y= 2+cos(x)				
y= 3+cos(x)				

a) Comparando os gráficos construídos. Qual a transformação (modificação) que ocorre entre o gráfico de f(x)= cos(x) para os outros gráficos?

b) O que mais você pode observar nestes gráficos com relação ao Domínio, Conjunto –Imagem e o Período destas funções trigonométricas?

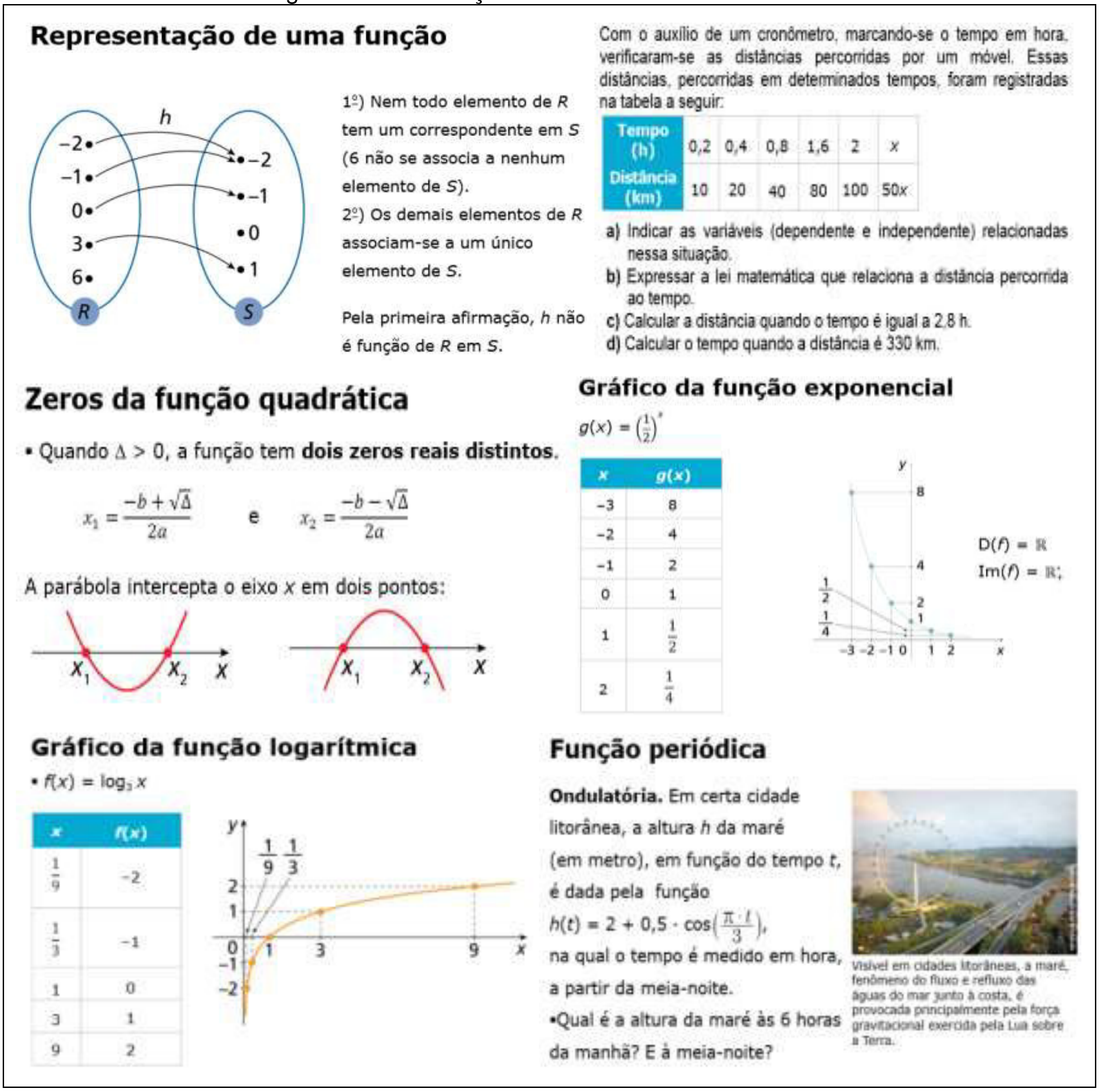


Fonte: Projeto de Estudo de Funções.

Destaca-se, nessas atividades, a preocupação em proporcionar aos estudantes um espaço onde os mesmos pudessem utilizar e desenvolver argumentação e fazer relações entre as diferentes formas de representação de um mesmo objeto, podendo, assim, utilizar diferentes linguagens para exemplificar o que estava sendo desenvolvido.

Outra estratégia empregada foi a construção de materiais no *PowerPoint* para cada um dos tópicos onde foram abordados conceitos, definições, propriedades e procedimentos de resolução de exercícios e situações-problema. Assim, os estudantes poderiam retomar e aprofundar cada um dos temas abordados em sala de aula. Na Figura 34, apresentam-se algumas telas desenvolvidas sobre os diferentes conteúdos envolvendo Funções.

Figura 34 - Construções de materiais no Power Point

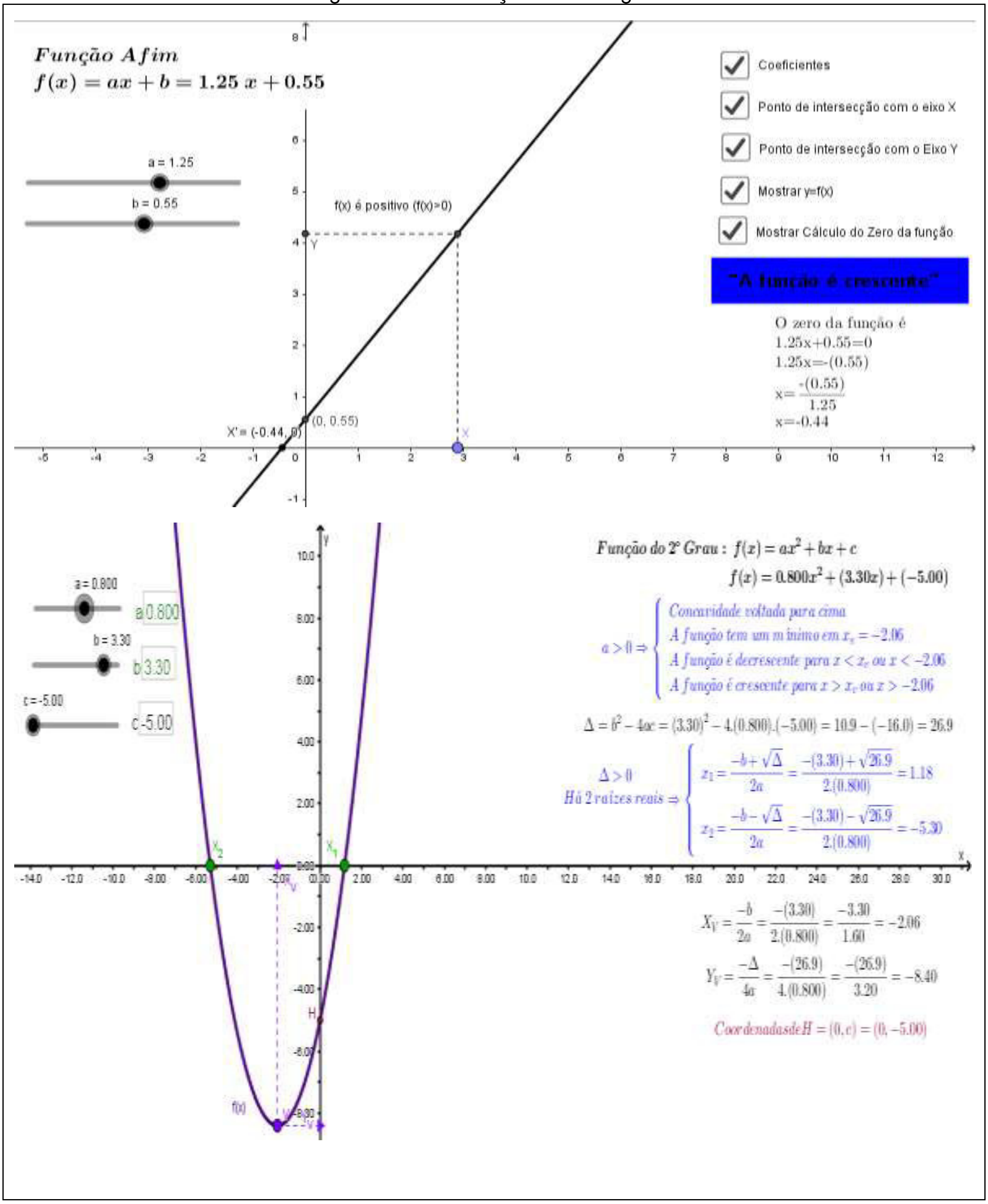


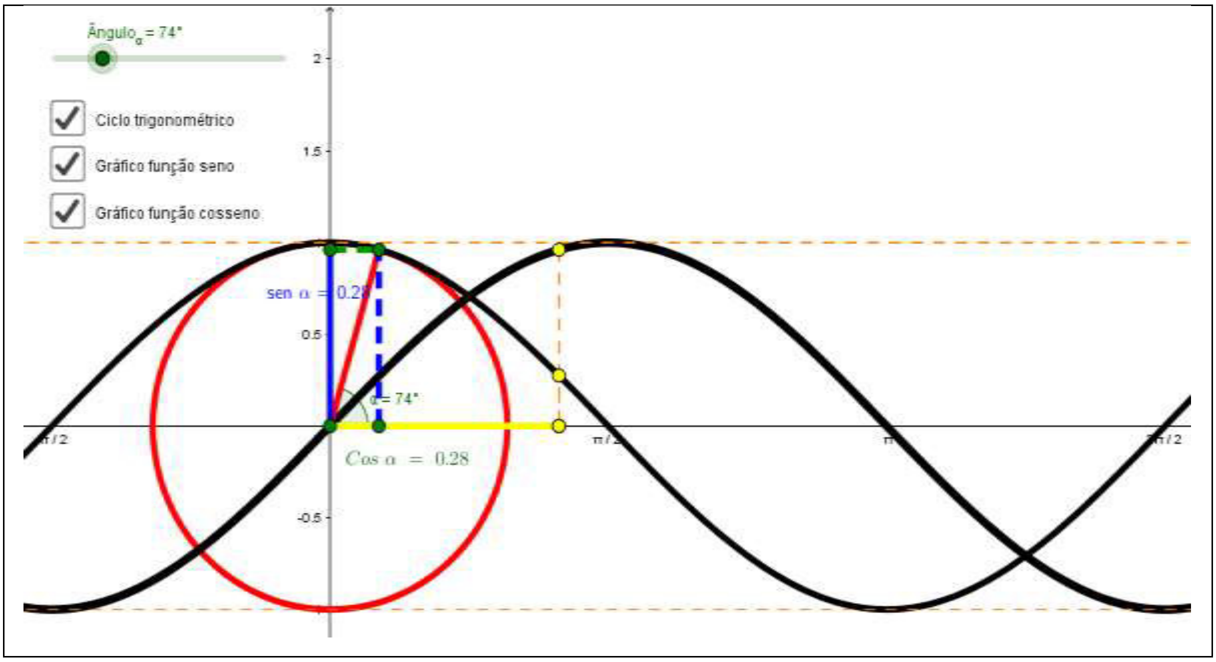
Fonte: Projeto de Estudo de Funções.

Destaca-se, ainda, que o material foi pensado e desenvolvido para que o estudante pudesse acompanhar as demonstrações, as justificativas, as relações e as construções, buscando deixar o mesmo interativo e dinâmico.

Nos materiais de estudos de cada tópico, optou-se por utilizar o *software* Geogebra, tanto para realizar atividades de construções, manipulação de objetos já construídos, como para a visualização, interpretação e análise de uma situação representada. Na Figura 35, pode-se observar objetos de aprendizagem construídos no programa.

Figura 35 - Construções no Geogebra



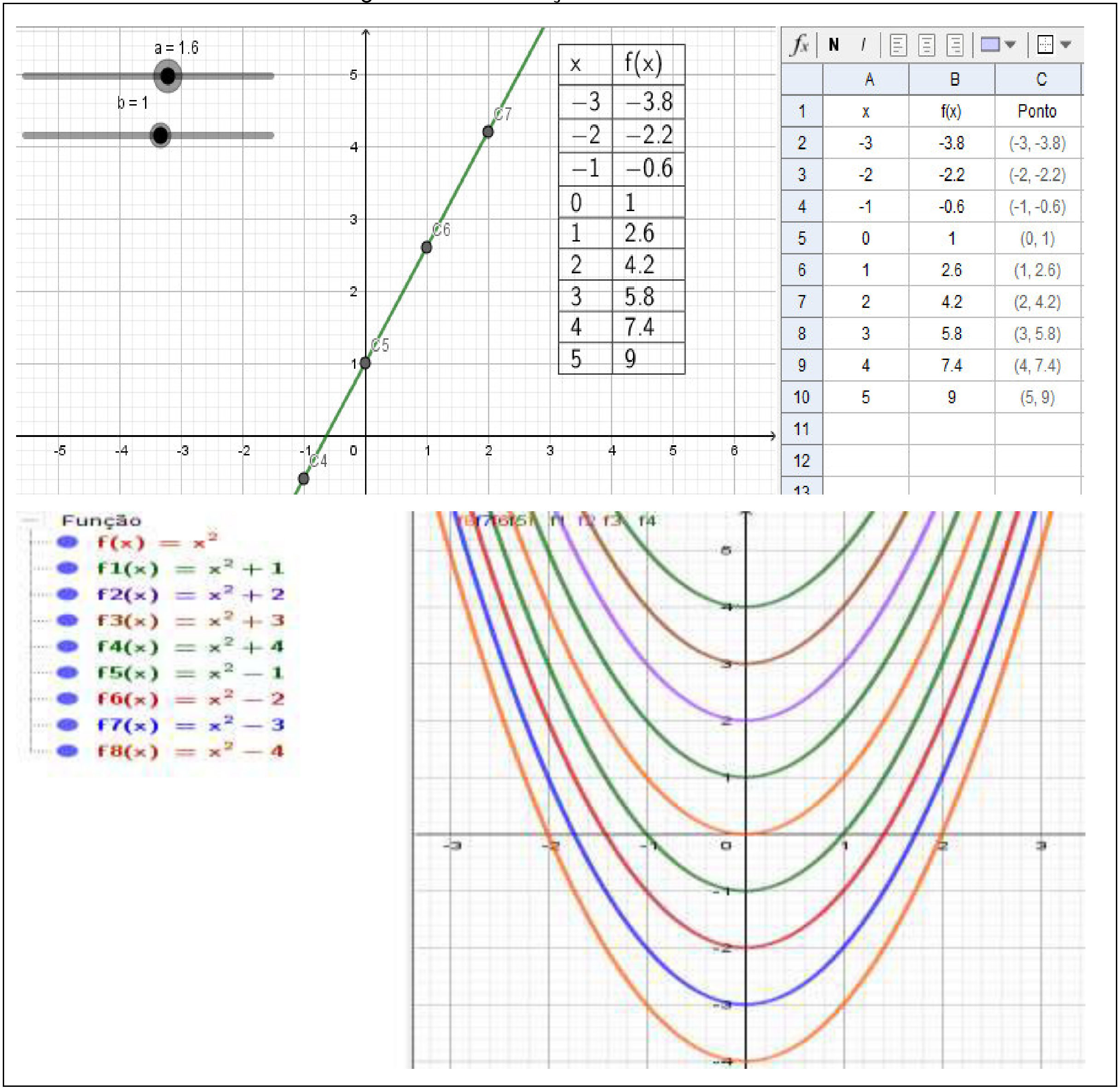


Fonte: o projeto de Estudo.

As imagens apresentadas destacam exemplos de construções de objetos realizadas no Geogebra, as quais têm como característica a possibilidade da movimentação, por meio de controles deslizantes, de pontos, linhas ou dos próprios objetos representados. Esse tipo de atividade tem por objetivo oportunizar aos estudantes a visualização, a experimentação, a verificação, a análise e a comprovação de definições e propriedades trabalhadas, buscando, assim, aprofundar, retomar e desenvolver conhecimentos relacionados a Funções.

Também foi oportunizado aos estudantes realizarem construções no Geogebra, visto que os mesmos já haviam trabalhado e manipulado esse *software* no ano letivo anterior ao da pesquisa. Na Figura 36, apresentam-se imagens das representações/construções realizadas pelos estudantes durante os estudos.

Figura 36 - Construções dos Estudantes

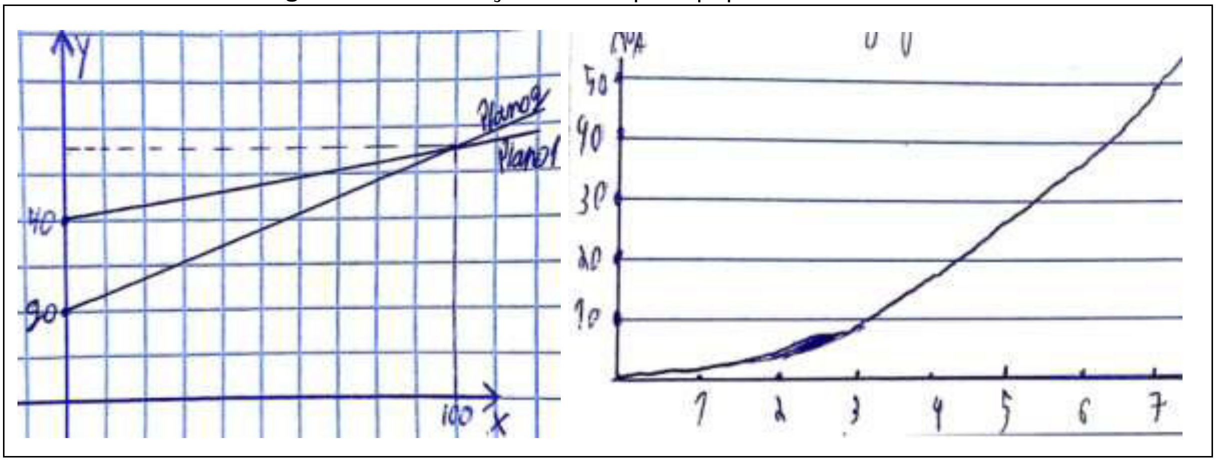


Fonte: a pesquisa.

Objetivou-se, com essas atividades, que os estudantes construíssem e representassem os objetos em estudo, considerando definições e propriedades envolvidas em cada um dos tópicos abordados. Assim, os mesmos puderam realizar o estudo por meio de tabelas, gráficos, construir e reconhecer famílias de funções, analisar o domínio, o conjunto imagem e outros conceitos e definições.

Em conjunto com as atividades no Geogebra, foram contempladas atividades de construções realizadas com lápis e papel, conforme ilustrado na Figura 37. Porém, foi dada maior ênfase à utilização do *software* Geogebra para realizar as representações gráficas.

Figura 37 - Construções com lápis e papel dos estudantes

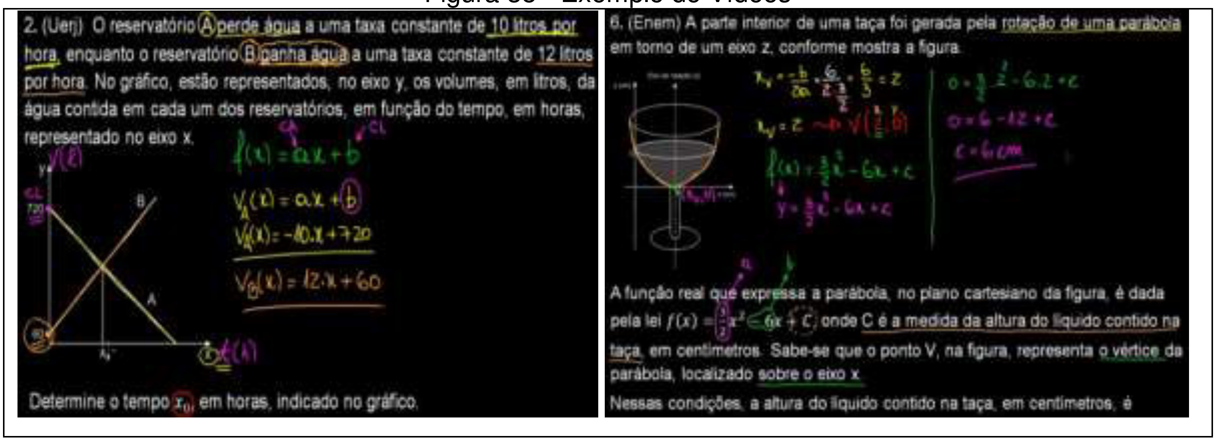


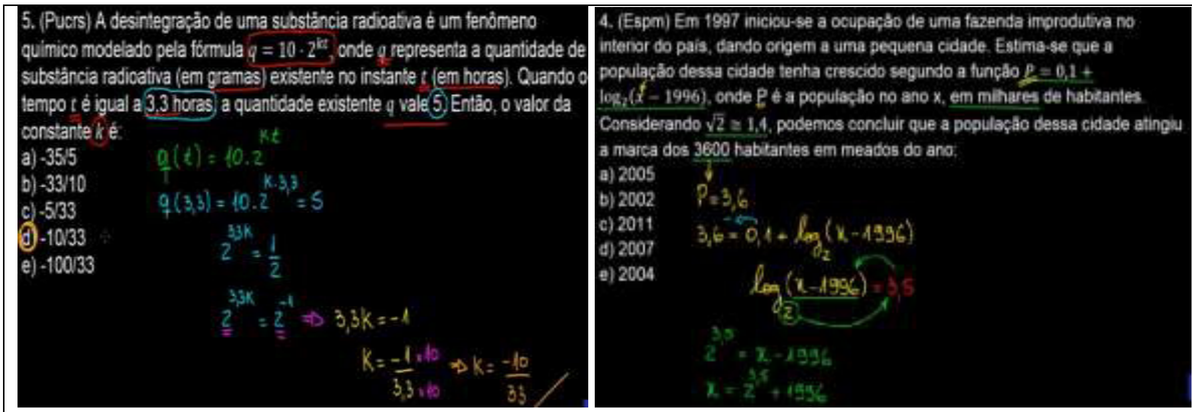
Fonte: a pesquisa.

Entende-se que atividades de construções com lápis e papel devem ser trabalhadas, articuladas ou não com o uso de um *software*, para o desenvolvimento de habilidades e competências específicas relacionadas ao conteúdo em estudo, bem como as relacionadas à capacidade de representação. Esses momentos de construção também são apropriados e oportunos para a retomada, aprofundamento e desenvolvimento de ideias e conceitos relacionados à razão e proporção, pois os estudantes necessitam utilizar uma escala adequada em cada um dos eixos, de acordo com a situação que está sendo trabalhada.

Outra estratégia empregada foi a utilização de vídeos previamente selecionados, quando se levou em consideração as características da proposta que estava sendo desenvolvida para as escolhas desse tipo de material de estudo. Assim, buscou-se, na web, mais especificamente em canais de livre acesso do *YouTube*, vídeos que abordassem os conceitos, definições e ideias que estavam sendo desenvolvidas, bem como exemplos, resoluções de atividades ou situações-problema, conforme exemplificado na Figura 38.

Figura 38 - Exemplo de Vídeos





Fonte: Ferretto (2017).

Os vídeos selecionados visavam auxiliar os estudantes na compreensão dos tópicos trabalhados, tanto no que diz respeito aos conceitos, as definições e as propriedades, bem como em procedimentos utilizados na resolução das situações-problema e nas construções realizadas.

Salienta-se, ainda, que os vídeos foram utilizados em distintos momentos para aprofundar ou retomar ideias, noções, conceitos, ou seja, conhecimentos em torno do que estava sendo estudado. O conjunto de vídeos selecionados foi extraído dos canais Oficina Resolve, Toda Matemática, Me Salva!, Unisinos, omatematico.com, Pense Vestibular, Waldematica, Ficou Mais Fácil, Bem Simples – Exatas, Maismatema+ica, entre outros.

Portanto, neste capítulo apresentou-se uma visão geral de como os materiais de estudos foram estruturados, os recursos utilizados e os caminhos empregados para a retomada, aprofundamento e o desenvolvimento dos conceitos, noções, ideias e propriedades envolvidas em cada um dos tópicos abordados. Ressalta-se o trabalho realizado a partir de diferentes perspectivas e estratégias, desenvolvido por meio de uma diversidade de recursos, situações-problema e atividades articuladas, com o intuito de potencializar o estudo envolvendo Funções.

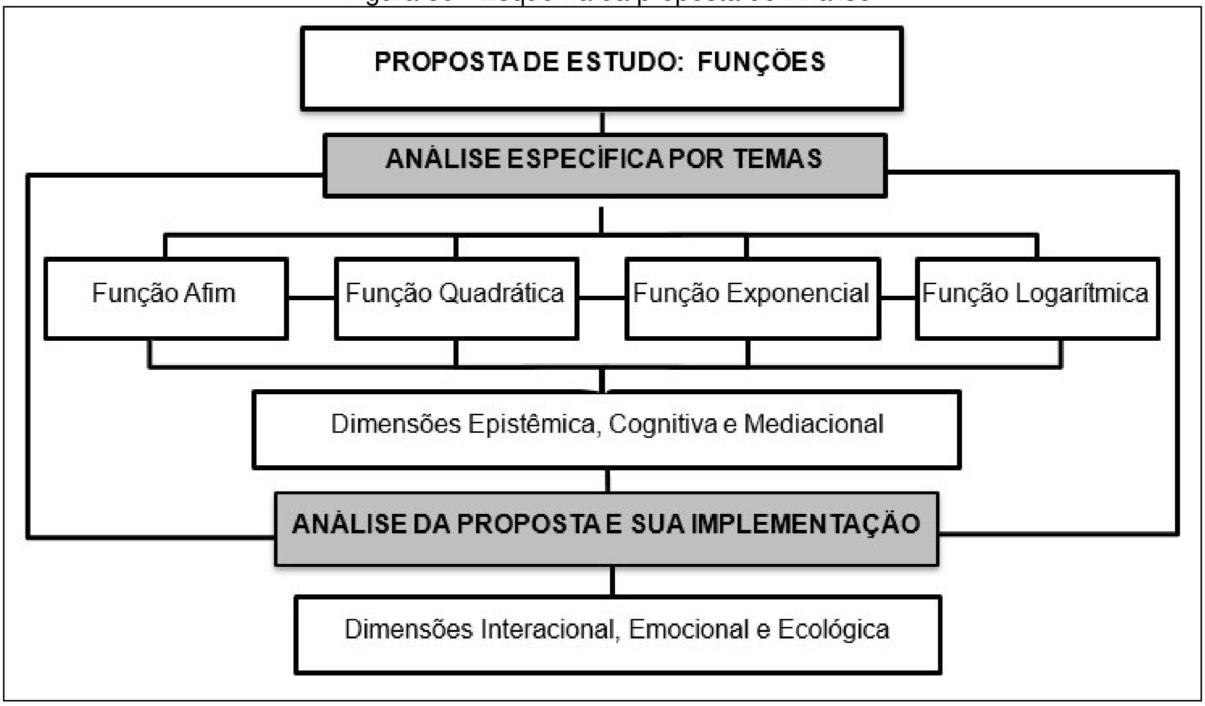
O capítulo seguinte é dedicado às análises dos materiais de estudos e à implementação dos mesmos junto a um grupo de estudantes frente aos pressupostos do EOS.

6 O ESTUDO DE FUNÇÕES: UMA ANÁLISE NA PERSPECTIVA DO EOS

Apresentam-se, neste capítulo, as análises produzidas a partir da aplicação da Proposta de Estudos envolvendo Funções que foi planejada, desenvolvida e aplicada junto a estudantes do 1ª ano do Ensino Médio, ao longo do ano de 2018, totalizando 60 horas-aula, considerando o plano de estudos da Escola. As análises tomam como referência as dimensões epistêmica, cognitiva, mediacional, interacional, emocional e ecológica da Idoneidade Didática, nível de análise do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática.

A proposta envolveu o estudo de sete tópicos - Função, Função Afim, Função Quadrática, Função Modular, Função Exponencial, Função Logarítmica e Função Trigonométrica, porém, são apresentadas, aqui, análises referentes a quatro desses tópicos: Função Afim, Função Quadrática, Função Exponencial e Função Logarítmica, considerando as dimensões epistêmica, cognitiva e mediacional da Idoneidade Didática do EOS. Já as dimensões interacional, emocional e ecológica são utilizadas para a análise tomando a proposta como um todo, considerando todos os tópicos e a implementação junto aos estudantes. Assim, a análise aqui apresentada está organizada considerando a **análise específica por temas** e **análise da proposta e sua implementação**, o que pode ser visto no quadro da Figura 39.

Figura 39 - Esquema da proposta de Análise



Fonte: o autor.

A seguir são apresentadas as análises epistêmica, cognitiva e mediacional referentes a cada tópico específico (análise por temas) e, na sequência, a análise da proposta e sua implementação (dimensões interacional, emocional e ecológica).

6.1 FUNÇÃO AFIM: UMA ANÁLISE DAS IDONEIDADES EPISTÊMICA, MEDIACIONAL E COGNITIVA

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 2002) salientam que o estudo de Funções permite que o aluno adquira a linguagem algébrica, indispensável para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, bem como a construção de modelos descritivos de fenômenos, possibilitando conexões da Matemática com outras áreas do conhecimento.

Ainda, de acordo com esse documento, os problemas de aplicação não devem ser deixados para o final desse estudo, mas ser motivo e contexto para o aluno aprender funções. Aponta que a riqueza de situações envolvendo funções permite que o ensino se estruture permeado de exemplos do cotidiano, além das formas gráficas que a mídia e outras áreas do conhecimento utilizam para descrever fenômenos de dependência entre grandezas. O ensino, ao deter-se no estudo de casos especiais de funções, não deve descuidar de mostrar que o que está sendo aprendido permite um olhar mais crítico e analítico sobre as situações descritas (BRASIL, 2002).

Alinhado a essa visão e levando em consideração os pressupostos do EOS, foi organizado e desenvolvido um projeto educativo que visa retomar, desenvolver e aprofundar conceitos e procedimentos pertinentes ao estudo de Funções. Para a estruturação dessa proposta, foi tomado como aporte teórico e metodológico o EOS, as orientações dos documentos oficiais, pesquisas na área e o que preconizam os livros didáticos.

Assim, apresenta-se, aqui, a análise produzida a partir de um conjunto de atividades envolvendo o estudo da Função Afim desenvolvido no primeiro ano do Ensino Médio. A proposta está estruturada a partir de diferentes estratégias, as quais buscam um estudo dinâmico, colaborativo, mas também individualizado, na qual se objetiva que cada estudante possa seguir seu ritmo de aprendizagem e dialogar com o professor e com os colegas de sala de aula.

Do conjunto de atividades desenvolvidas no âmbito do estudo da Função Afim, serão destacadas, para a análise, atividades que sejam representativas do trabalho realizado junto aos estudantes, bem como do trabalho por eles desenvolvido. Essas atividades objetivaram:

- utilizar diferentes linguagens: língua natural, algébrica, tabular e gráfica;
- interpretar o sinal da Função na situação-problema abordada;
- a construção e interpretação de tabelas e gráficos, de acordo com a situação-problema enfrentada;
- identificar e analisar o crescimento e decrescimento de uma função a partir de situações contextualizadas;
- interpretar e determinar o domínio e conjunto imagem, de acordo com a situação abordada;
- analisar e interpretar as variações de uma função (deslocamentos na horizontal e vertical).
- aplicar as Funções Afim em diferentes situações intramatemáticas e extramatemáticas.

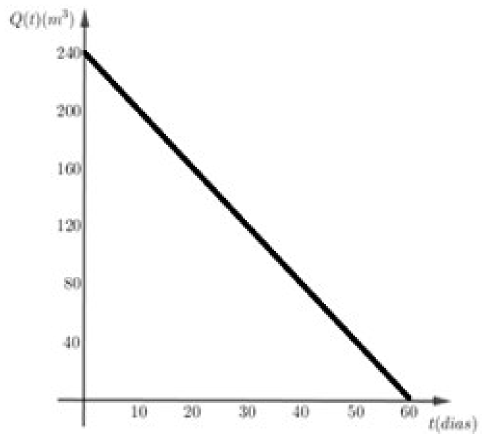
Na sequência, será apresentada a análise epistêmica do conjunto de atividades envolvendo a Função Afim, seguida da análise cognitiva e mediacional.

6.1.1 Função Afim: Análise da Idoneidade Epistêmica

Do conjunto de atividades envolvendo o estudo da Função Afim, foram selecionadas para análise situações as quais foram consideradas representativas do trabalho realizado, sendo que todo ele se encontra no Apêndice C. A primeira atividade apresentada (Figura 40), no que se refere aos componentes e indicadores epistêmicos, está relacionada a um reservatório de água com um vazamento, onde é solicitado que os estudantes determinassem a lei de formação e interpretassem a situação a partir de sua representação gráfica, buscando determinar o conjunto domínio e imagem, justificando os mesmos. Também foi solicitado a apresentação e análise das intersecções do gráfico da função com os eixos coordenados, juntamente com seus significados no contexto da situação-problema apresentada. Assim, os significados institucionais pretendidos referem-se à relação de dependência entre as grandezas envolvidas, o estabelecimento da lei de formação, o significado do zero da função e do intercepto y na situação-problema, bem como o estabelecimento do conjunto domínio e imagem no contexto da situação apresentada. A situação-problema foi apresentada na língua natural e a linguagem gráfica foi utilizada para auxiliar na representação da situação em estudo, estabelecendo, assim, uma relação entre as duas formas de expressar uma função.

Figura 40 - Exemplo de Atividades envolvendo Função Afim

Em um reservatório de água de uma cidade, ocorreu o rompimento de um dos dutos e o vazamento pode ser representado pelo gráfico a seguir. Com base nas informações contidas no mesmo, determine ou construa o que se pede:



a) A expressão algébrica de Q(t): quantidade de água no reservatório (em metros cúbicos) em função de t (em dias decorridos desde o início do mês);
b) O zero da função e seu significado no contexto do problema;
c) o intercepto y e seu significado no contexto do problema;
d) O domínio da função. Justificando sua resposta;
e) O conjunto imagem. Justifique sua resposta;

Fonte: adaptado de Adami et al, 2015.

Segundo Godino (2011), uma situação-problema deve ser abordada de diferentes maneiras e utilizada em diferentes contextos, possibilitando que os estudantes possam compreender as diferentes formas de se representar a mesma situação e os diferentes conceitos que podem ser desenvolvidos. Assim, destaca-se, na Figura 41, uma situação que aborda novamente o problema envolvendo o vazamento em um reservatório de água, porém é apresentada na língua natural e possibilita o uso da linguagem algébrica, gráfica e tabular, bem como retoma, aprofunda e desenvolve conceitos e definições em torno da lei de formação, zero da função, domínio, conjunto imagem.

Figura 41 - Atividades envolvendo vazamento de reservatório

Um reservatório de uma determinada cidade contém 240 m^3 de água. No início de um mês, um duto se rompeu é está vazando água a uma taxa de 4 m^3 por dia. Com base nessas informações, determine ou construa o que se pede:

a) A expressão algébrica de Q(t): quantidade de água no reservatório (em metros cúbicos) em função de t (em dias decorridos desde o início do mês);

b) O zero da função e seu significado no contexto do problema;

c) Uma tabela de valores;

d) O gráfico de Q(t);

e) O domínio da função. Justificando sua resposta;

f) O conjunto imagem. Justifique sua resposta;

Fonte: adaptado de Adami et al (2015).

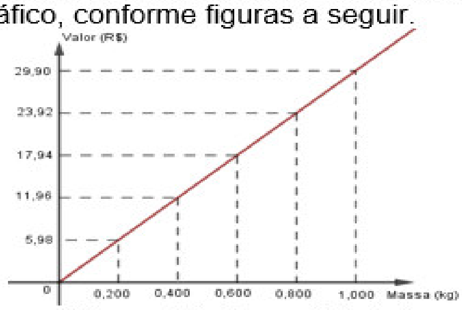
Por meio das atividades destacadas, busca-se que relações sejam estabelecidas e sejam apresentados argumentos em torno da justificativa para conclusões e observações encontradas com relação ao zero da função, domínio e conjunto imagem. Destaca-se, também, que a utilização das diferentes formas de representação leva a diferentes sentidos de conversão entre registros e diferentes tratamentos. Aponta-se novamente para a pertinência de se trabalhar uma mesma situação a partir de diferentes formas de apresentação da mesma.

Outra atividade utilizada (Figura 42) está relacionada a uma balança digital de um restaurante, a qual é utilizada para medir a massa de alimentos que cada cliente consome em uma determinada refeição.

Figura 42 - Atividades envolvendo balança digital

O mostrador digital de uma balança de um restaurante de uma determinada cidade mostra que o preço do quilograma da refeição custa R$ 29,90. Um cliente ao colocar seu prato sobre a balança, mediu a massa no prato de 0,400 kg e o valor a ser pago é de R$ 11,96. Com essas informações podemos construir um quadro com outros valores para a massa (m) a fim de obter os valores a serem pagos (v(m)) e depois representar essa situação por meio de um gráfico, conforme figuras a seguir.

Massa (kg)	Valor a ser pago (R$)
0,200	$29{,}90 \cdot 0{,}200 = 5{,}98$
0,400	$29{,}90 \cdot 0{,}200 = 11{,}96$
0,600	$29{,}90 \cdot 0{,}200 = 17{,}94$
0,800	$29{,}90 \cdot 0{,}200 = 23{,}92$
⋮	⋮
m	$29{,}90 \cdot m = 29{,}9\ m$



a) Com os valores apresentado na tabela e no gráfico estabeleça a lei de formação da função para a situação apresentada.
b) Estabeleça o domínio e o conjunto imagem. Explique o significado dos mesmos no contexto do problema.

Fonte: adaptado de Chavante e Prestes (2016).

Nesta situação-problema, são utilizadas a língua natural, além de representações tabular e gráfica, buscando propiciar aos estudantes a utilização de diferentes linguagens para analisar e resolver uma situação. Os significados institucionais pretendidos referem-se à relação de dependência entre as grandezas envolvidas e o estabelecimento da lei de formação, bem como o estabelecimento do conjunto domínio e imagem no contexto da situação-problema.

As situações apresentadas são apenas exemplos do conjunto de situações utilizadas para o estudo da Função Afim, as quais envolveram, também, estudos relacionados a juros simples, movimento retilíneo uniforme, progressão aritmética, valor de uma corrida de táxi, preço pago pelo consumo de energia e água, valor cobrado por serviços, entre outros. O projeto de estudo como um todo buscou atender e desenvolver os significados de referência estabelecidos pela instituição de ensino onde a investigação foi implementada.

Apresentam-se, na Figura 43, os componentes e indicadores epistêmicos evidenciados no conjunto de atividades envolvendo a Função Afim, com o indicativo do grau de idoneidade. Tal análise foi realizada a partir das práticas desenvolvidas com a aplicação da proposta, ou seja, embora a proposta tenha sido concebida considerando os pressupostos da Idoneidade Epistêmica, sua aplicação e desenvolvimento junto aos estudantes é que permitiu estabelecer o grau de idoneidade da mesma nos diferentes componentes.

Figura 43 - Análise Epistêmica: Função Afim

COMPONENTE SITUAÇÕES-PROBLEMA		
Indicadores	**Indicadores evidenciados**	**Idoneidade**
a) apresenta-se uma mostra representativa e articulada de situações de contextualização, exercícios e aplicações; b) propõem-se situações de generalização de problemas (problematização).	- As atividades propostas referem-se a um conjunto de situações-problema pertinentes ao estudo da Função Afim, apresentadas, predominantemente, em formato de problemas voltados para situações da realidade, do cotidiano ou de outras áreas do conhecimento, nas quais os estudantes necessitavam relacionar os conceitos, definições, leis, procedimentos e propriedades já estudadas ou em estudo. - No que se refere à generalização, foram propostas situações que possibilitam aos estudantes conjecturarem, justificarem, deduzirem, estabelecerem relações e leis de formação, identificando características e propriedades da Função Afim.	Alta
COMPONENTE LINGUAGEM		
Indicadores	**Indicadores evidenciados**	**Idoneidade**

a) uso de diferentes modos de expressão matemática (verbal, gráfica, simbólica), tradução e conversão entre as mesmas; b) nível de linguagem adequado aos estudantes; c) propõem situações de expressão matemática e interpretação.	- A linguagem utilizada está adequada ao nível dos estudantes, sendo apresentada na forma da língua natural e representações algébrica, simbólica, tabular e gráfica. - Foi possível identificar a presença das diferentes formas de representação e a conversão entre as mesmas, ficando claro quando as mesmas se referiam ao mesmo objeto em estudo.	Alta
COMPONENTE REGRAS		
Indicadores	**Indicadores evidenciados**	**Idoneidade**
a) as definições e procedimentos são claros e corretos e estão adequadas ao nível educativo a que se dirigem; b) apresentam-se enunciados e procedimentos fundamentais do tema para o nível educativo dado; c) proposta de situações onde os estudantes tenham que generalizar ou negociar definições, proposições ou procedimentos.	- Foi desenvolvida a definição de Função Afim, estabelecido: domínio, contradomínio, conjunto imagem, zero da função, sinal da função, a intersecção com os eixos, crescimento e decrescimento. - Nas atividades, as definições, proposições e procedimentos são trabalhados de forma clara e de acordo com o nível educativo dos estudantes. O estudo das propriedades e dos procedimentos foi desenvolvido por meio de situações em que os estudantes tivessem que observar, analisar, conjecturar, concluir e avaliar a partir de manipulações ou construções, buscando regularidades, particularidades e generalizações.	Alta
COMPONENTE ARGUMENTOS		
Indicadores	**Indicadores evidenciados**	**Idoneidade**
a) as explicações, comprovações e demonstrações são adequadas ao nível educativo a que se dirigem; b) promovem-se situações onde os estudantes tenham que argumentar.	- De modo geral, as atividades propunham momentos nos quais os estudantes necessitavam argumentar a partir de uma situação-problema dada, seja por meio da discussão de uma propriedade, de uma definição ou de uma lei de formação, ou, ainda, a partir de um conjunto de ações realizadas por eles para representar, construir e analisar o objeto em estudo. Porém, considera-se que deveria ter sido apresentado um conjunto maior de atividades de construção no Geogebra, bem como atividades inéditas, as quais possibilitassem aos estudantes desenvolverem autonomia com relação aos procedimentos e as estratégias de solução, bem como as justificativas adequadas para cada situação apresentada.	Média
COMPONENTE RELAÇÕES		
Indicadores	**Indicadores evidenciados**	**Idoneidade**
a) os objetos matemáticos (problemas, definições, proposições) se relacionam e se conectam entre si.	- Considera-se que foi possível estabelecer relações entre as propriedades dos objetos matemáticos em estudo, principalmente, as relações entre a lei de formação, a representação tabular e gráfica das situações. Porém, não ficou evidente a relação dos mesmos com o domínio e com o conjunto imagem no contexto de algumas situações em estudo. Ressalta-se, ainda, que não foram devidamente exploradas as relações entre o domínio e a imagem com os valores do intercepto x e y.	Média

Fonte: a pesquisa.

A partir dos aspectos destacados, é possível observar que os componentes e indicadores epistêmicos estão fortemente presentes nas atividades propostas, sendo que a análise buscou identificar em que medida se conseguiu implementar os mesmos no trabalho desenvolvido junto aos estudantes. Embora todo projeto de estudo tenha sido concebido buscando a idoneidade máxima em cada uma das idoneidades parciais, a dinâmica do trabalho nem sempre permitiu que fossem desenvolvidas de modo adequado atividades que relacionassem todos os indicadores epistêmicos.

Com relação às Situações-Problema (exemplos destacados nas Figuras 40, 41e 42), considerou-se sua representatividade alta, pelo fato de os conceitos em torno da Função Afim terem sido desenvolvidos por meio de situações de contextualização e aplicação relacionadas a situações do cotidiano, do mundo do trabalho e de outras áreas do conhecimento, o que levou, também, a considerar o componente Regras com alta representatividade, pois era necessário, para a resolução de cada situação-problema, lançar mão de diferentes conceitos, definições e procedimentos de resolução. Já o componente Argumentos foi considerado com idoneidade média, uma vez que nem todas as atividades exigiam dos estudantes uma solução que necessitasse uma justificativa ou comprovação. Nesse contexto, encontram-se atividades de caráter mais procedimental, que, embora exijam conhecimentos sobre o tema, levam as justificativas a ficarem implícitas.

Com relação a Linguagens, considerou-se a idoneidade alta, tendo em vista que foram utilizadas diferentes formas de representações no conjunto de atividades, como nos exemplos apresentados nas Figuras 40, 41 e 42, tanto em língua natural como representações algébrica, simbólica, gráfica e tabular. Essas diferentes formas de representação foram exploradas considerando as conversões e mudanças no seu sentido entre as mesmas, sempre que possível, conforme já destacado.

Já o componente Relações foi considerado com representatividade média, pois evidenciaram-se relações entre a lei de formação, a análise de gráficos e de tabelas por meio de exercícios e situações-problema. Contudo, para alcançar um grau alto de idoneidade, considera-se que teria sido necessário o estabelecimento das relações entre os objetos matemáticos em um número maior de situações-problema.

6.1.2 Função Afim: Análise da Idoneidade Mediacional

No que se refere aos componentes e indicadores mediacionais, foram utilizados como recursos didáticos na proposta de estudo, para retomar, aprofundar e desenvolver conceitos, ideia, noções e procedimentos em torno da Função Afim, vídeos, materiais em *PowerPoint, software* Geogebra, situações contextualizadas, problemas resolvidos e objetos de aprendizagem, buscando, assim, contemplar os diferentes níveis educativos e as diferentes maneiras de se adquirir conhecimento, bem como respeitar o tempo de aprendizagem de cada estudante e desenvolver um trabalho participativo e colaborativo. Todavia, não foram deixadas de lado momentos de intervenção educativa, quando esta se mostrou necessária e pertinente, respeitando as individualidades e o tempo de cada estudante.

No quadro da Figura 44, apresentam-se os componentes e indicadores mediacionais evidenciados no conjunto de atividades, juntamente com o indicativo do grau de idoneidade que se julgou pertinente.

Figura 44 - Síntese da análise Mediacional

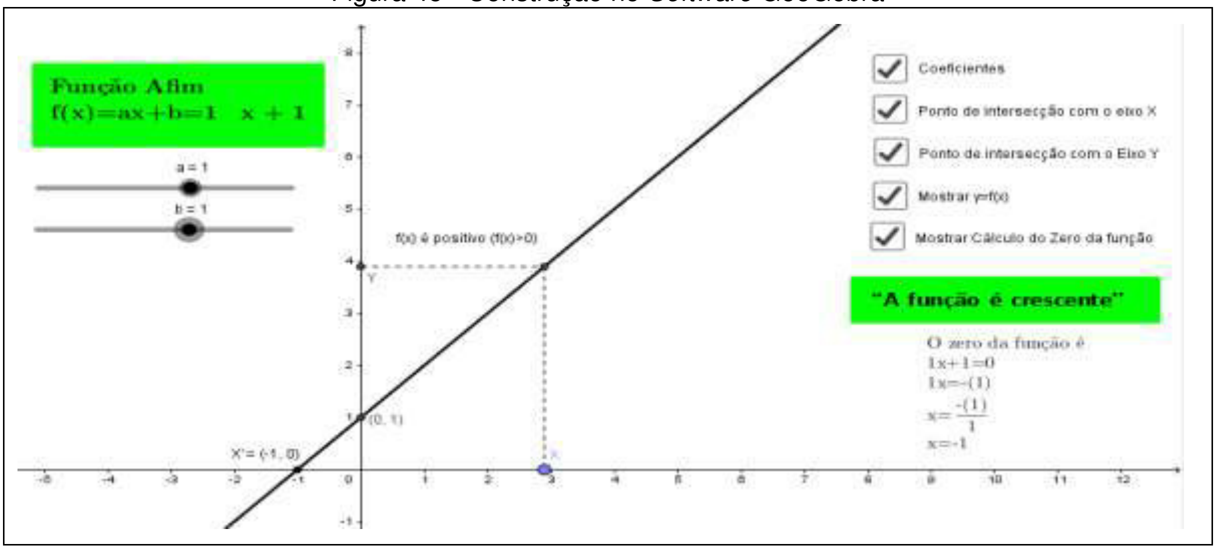
COMPONENTE RECURSOS DIDÁTICOS		
Indicadores	**Indicadores evidenciados**	**Idoneidade**
a) evidencia-se a presença de materiais adequados ao desenvolvimento do processo de ensino e adaptados ao nível educativo a que se dirigem; b) há uma diversificação de recursos para auxiliar no processo de ensino, tais como: audiovisuais, material concreto, livros, entre outros; c) propõe-se a organização e experimentação de situações práticas.	- Considera-se que o material de estudo proposto está adequado ao nível educativo em que se encontravam os estudantes, utilizando linguagem acessível, porém mantendo aspectos formais da Matemática. - No que se refere aos recursos, optou-se pela utilização do *software* Geogebra, para a construção de tabelas e gráficos e para a manipulação das mesmas, buscando possibilitar aos estudantes situações de experimentação, interpretação e validação. - Foram utilizados, ainda, vídeos, atividades online e objetos de aprendizagem a fim de oportunizar os estudantes retomarem, explorarem, aprofundarem e exercitarem o que estava sendo explorado.	Alta
COMPONENTE TEMPO DIDÁTICO		
Indicadores estabelecidos	**Indicadores evidenciados**	**Idoneidade**
a) apresentam-se situações de ensino que contemplam diversas modalidades (estudo pessoal, cooperativo, tutorial, presencial); b) evidencia-se a organização do tempo para intervenção docente, trabalho autônomo dos estudantes e momentos de discussão; c) dedica-se um tempo maior para o desenvolvimento dos conhecimentos, caso os	- A proposta apresenta um caráter predominantemente presencial, que privilegia simultaneamente o trabalho individual, a interação entre os estudantes, assim como com o professor/pesquisador. - Considera-se que o material auxiliou no desenvolvimento da autonomia dos estudantes, uma vez que os mesmos se tornam responsáveis pelo seu estudo, estabelecendo seu ritmo de estudo e aprendizagem. - As atividades propostas buscavam estimular nos estudantes a discussão sobre as características, propriedades e definições das Funções, visando à	Alta

estudantes apresentem dificuldade de compreensão.	reflexão e à negociação de significados referentes ao tema em estudo.	

Fonte: a pesquisa.

A partir da análise realizada, foi possível perceber que os componentes e indicadores mediacionais estão representados no material. No que se refere aos recursos, considerou-se uma alta idoneidade, pois se privilegiou o uso das tecnologias digitais, propondo situações de construção, interpretação e validação utilizando o *software* Geogebra (como exemplificado na Figura 45), bem como construções de tabelas e gráficos, com lápis e papel, quando os estudantes puderam comparar e analisar as diferentes formas de construção. O Geogebra é uma ferramenta que possibilita aliar a representação gráfica, algébrica e tabular, possibilitando, assim, que sejam realizadas conversões entre diferentes registros, o que permite ao estudante perceber um mesmo objeto a partir de diferentes representações. Permite, também, a visualização do comportamento da função, o que propicia a identificação de suas características, conduzindo a um estudo dinâmico, no qual os estudantes possam construir ou representar graficamente a situação em estudo a partir de seus conhecimentos. Assim, na medida que vão assimilando novos saberes, podem realizar mudanças ou reconstruções nas anteriormente realizadas. Ressalta-se que, mesmo que o *software* conte com recursos que facilitam realizar diferentes representações, é necessário que os estudantes tenham se apropriado dos conceitos ou definições envolvidos, para que o mesmo possa realizar manipulações e retirar informações úteis na solução da atividade trabalhada.

Figura 45 - Construção no *Software* GeoGebra



Fonte: a pesquisa.

Outro recurso utilizado no material foram pequenos vídeos, os quais apresentavam conceitos, definições, exemplos resolvidos ou situações-problema aplicadas em diferentes contextos. Os mesmos poderiam ser utilizados pelos estudantes, para a retomada e para confrontar as relações que tinham sido estabelecidas nas distintas atividades, buscando, assim, identificar características ou propriedades comuns do objeto em estudo.

No que se refere ao componente Tempo Didático, considera-se que a idoneidade alcançada foi alta, pois os materiais desenvolvidos e/ou selecionados buscavam possibilitar aos estudantes exercitarem a autonomia, respeitando o ritmo de estudo e de aprendizagem de cada um. Considera-se que a análise produzida permitiu refletir sobre as potencialidades e possíveis fragilidades dos recursos utilizados, o que possibilitou estabelecer um nível de idoneidade nos dois componentes. Assim, buscou-se trabalhar com a temática Função Afim de forma diferenciada, promovendo aos estudantes momentos de construção, manipulação, validação, retomada e aprofundamento de conceitos, ideias e definições em torno desse tema, buscando, também, estabelecer condições para a produção de argumentos e relações sobre as definições e propriedades que não tinham sido exploradas no ano anterior ou ainda não tinham sido assimiladas pelos estudantes.

6.1.3 Função Afim: Análise da Idoneidade Cognitiva

Com o objetivo de lançar um olhar para a aprendizagem dissente, bem como para os conflitos e as dificuldades encontradas e apresentadas durante o estudo da Função Afim, foi realizada uma análise cognitiva por meio dos componentes e indicadores da Ferramenta de Análise Cognitiva (raciocínio lógico, leitura/interpretação e análise/síntese). Entendeu-se, pertinente, também, realizar uma análise em torno dos significados institucionais e os significados declarados pelos estudantes. Assim, foram utilizados os componentes da Ferramenta de Análise Epistêmica (situações-problema, linguagens, regras, argumentos e relações) juntamente com as da Cognitiva, sendo estabelecidos para os componentes das duas Ferramentas significados de referência pretendidos com o material de estudo. Segundo Lemos (2017), busca-se, dessa forma, evidências do que os estudantes foram capazes de fazer/compreender/significar a partir de um conjunto de atividades e situações-problema propostos.

Na Figura 46, apresenta-se cada componente utilizado na análise cognitiva, identificando os significados estabelecidos e evidenciados no conjunto de atividades, juntamente com o indicativo do grau de idoneidade que se julgou adequado.

Figura 46 - Síntese da análise Cognitiva

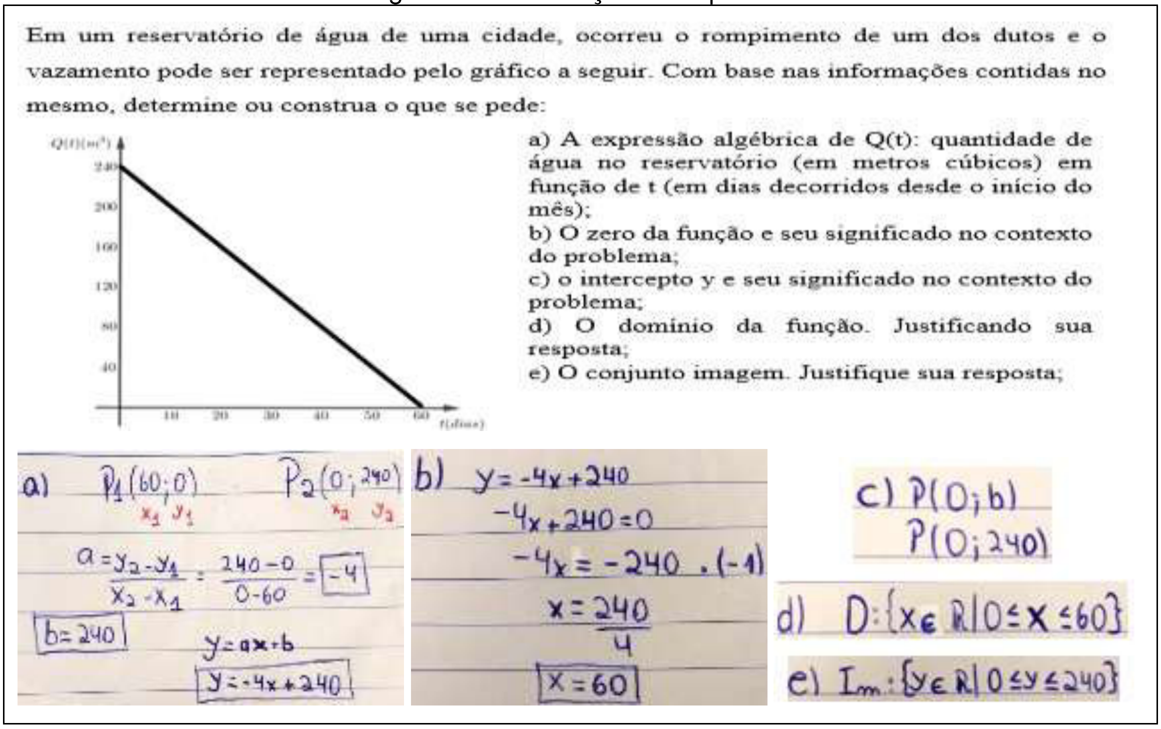
COMPONENTE SITUAÇÕES-PROBLEMA		
Significados pretendidos	**Significados declarados**	**Idoneidade**
a) Identificar, nas situações-problema, propostas nos diferentes contextos intramatemáticos e extramatemáticos a Função Afim. b) Resolver situações propostas utilizando os conceitos, definições e procedimentos relativos a Função Afim.	- Os estudantes não apresentaram dificuldades relativas à identificação de uma Função Afim, bem como de suas características nas diferentes situações-problema propostas. - A grande maioria dos estudantes conseguiu resolver corretamente as situações propostas por meio da utilização de procedimentos, definições e conceitos adequados.	Alta
COMPONENTE LINGUAGEM		
Significados pretendidos	**Significados declarados**	**Idoneidade**
a) Identificar e reconhecer o uso de diferentes modos de expressão matemática (verbal, gráfica, simbólica), tradução e conversão entre as mesmas. b) Reconhecer e utilizar a linguagem matemática adequada a cada situação.	- Os estudantes identificaram e utilizaram as diferentes formas de representação ou expressão matemática e a conversão entre as mesmas de forma adequada, porém apresentaram dificuldade em utilizar e compreender a forma simbólica. - Utilizaram diferentes formas de representar o domínio e o conjunto imagem da Função Afim, mesmo que em alguns casos os mesmos não tenham sido estabelecidos de forma correta no contexto da situação-problema. - Utilizaram a linguagem adequada a cada situação proposta.	Alta
COMPONENTE REGRAS (DEFINIÇÕES, PROPOSIÇÕES, PROCEDIMENTOS)		
Significados pretendidos	**Significados declarados**	**Idoneidade**
a) Reconhecer o que caracteriza uma Função Afim. b) Identificar situações envolvendo o crescimento e o decrescimento de uma Função Afim. c)Representar graficamente uma Função Afim e, a partir de sua representação gráfica, estabelecer a representação algébrica. d) Identificar o domínio e a imagem em situações envolvendo uma Função Afim. e) Calcular a raiz da função. f) Determinar a lei de formação de uma Função Afim dada por uma situação-problema.	- Considera-se que os estudantes reconheciam os elementos de uma função. - Não ocorreram equívocos na classificação referente ao crescimento ou decrescimento da função. - Não houve dificuldades na representação gráfica, porém apresentaram dificuldades na compreensão do conjunto domínio e imagem de situações-problema. - Utilizaram adequadamente os procedimentos matemáticos para o cálculo da raiz de uma função, bem como dos coeficientes da mesma, para determinar a lei de formação.	Média
COMPONENTE ARGUMENTOS		
Significados pretendidos	**Significados declarados**	**Idoneidade**

a) Identificar e justificar os conjuntos domínio e imagem na situação-problema. b) Identificar e justificar o crescimento e decrescimento de uma função, tanto pela representação algébrica, tabular ou gráfica, levando em consideração o contexto da situação-problema.	- Os estudantes identificaram e representavam matematicamente o conjunto domínio e imagem, porém não conseguiram justificar, por vezes, o que tais conjuntos ou intervalos representavam em cada situação. - Não apresentaram dificuldades em identificar o crescimento ou decrescimento a partir de uma representação gráfica, porém em alguns casos não utilizaram uma justificativa adequada para o crescimento ou decrescimento em um contexto ou em um intervalo solicitado. - Em sua grande maioria, as atividades em que era solicitada uma justificativa foram deixadas em branco.	Baixa
COMPONENTE RELAÇÕES		
Significados pretendidos	**Significados declarados**	**Idoneidade**
a) Compreender as relações entre as diferentes representações de uma Função Afim.	-Considera-se que os estudantes estabeleceram, de forma parcial, as relações entre as diferentes formas de representação de um mesmo objeto nas situações apresentadas, o que leva a considerar que ainda não tinham se apropriado de forma adequada das ideias ou conceitos da Função Afim.	Média
COMPONENTE RACIOCÍNIO LÓGICO		
Significados pretendidos	**Significados declarados**	**Idoneidade**
a) Observar e analisar a representação gráfica da Função Afim no plano cartesiano, buscando justificar o seu crescimento ou decrescimento. b) Analisar o conjunto domínio e imagem. c) Estabelecer estratégias para determinar a lei de formação de uma Função Afim.	- A partir da observação e análise do gráfico da função, os estudantes justificaram o crescimento ou decrescimento da mesma e representaram o domínio e o conjunto imagem das distintas situações. - Utilizaram os pontos encontrados para determinação dos coeficientes da função, buscando mostrar a respectiva lei de formação da mesma.	Alta
COMPONENTE LEITURA/INTERPRETAÇÃO		
Significados pretendidos	**Significados declarados**	**Idoneidade**
a) Ler e interpretar adequadamente as informações e situações propostas. b) Identificar, compreender e aplicar os conceitos e definições.	- Foram realizadas leituras adequadas do que era solicitado em cada situação-problema abordada. - Percebeu-se que os estudantes conseguiram compreender e aplicar, de forma adequada, os conceitos e definições pertinentes.	Alta
COMPONENTE ANÁLISE/SÍNTESE		
Significados pretendidos	**Significados declarados**	**Idoneidade**
a) Realizar síntese para expressar os conceitos construídos ou revisitados.	- Os estudantes apresentaram muitas dificuldades para realizar as sínteses solicitadas. Foi possível perceber que não tinham o hábito de fazer um apanhado geral das situações e conceitos trabalhados, o que fez com que o foco do trabalho se voltasse para essa construção.	Baixa

Fonte: a pesquisa.

Como apresentado, nas atividades envolvendo situações problema, os estudantes participantes da pesquisa não apresentaram dificuldades com relação à identificação de características de uma Função Afim nas diferentes situações-problema e demais atividades com o uso do Geogebra ou com lápis e papel. De modo geral, utilizaram definições e procedimentos adequados às situações, conforme pode ser observado na solução apresentada pela dupla B, em destaque na Figura 47.

Figura 47 – Resolução da dupla B



Em um reservatório de água de uma cidade, ocorreu o rompimento de um dos dutos e o vazamento pode ser representado pelo gráfico a seguir. Com base nas informações contidas no mesmo, determine ou construa o que se pede:

a) A expressão algébrica de Q(t): quantidade de água no reservatório (em metros cúbicos) em função de t (em dias decorridos desde o início do mês);
b) O zero da função e seu significado no contexto do problema;
c) o intercepto y e seu significado no contexto do problema;
d) O domínio da função. Justificando sua resposta;
e) O conjunto imagem. Justifique sua resposta;

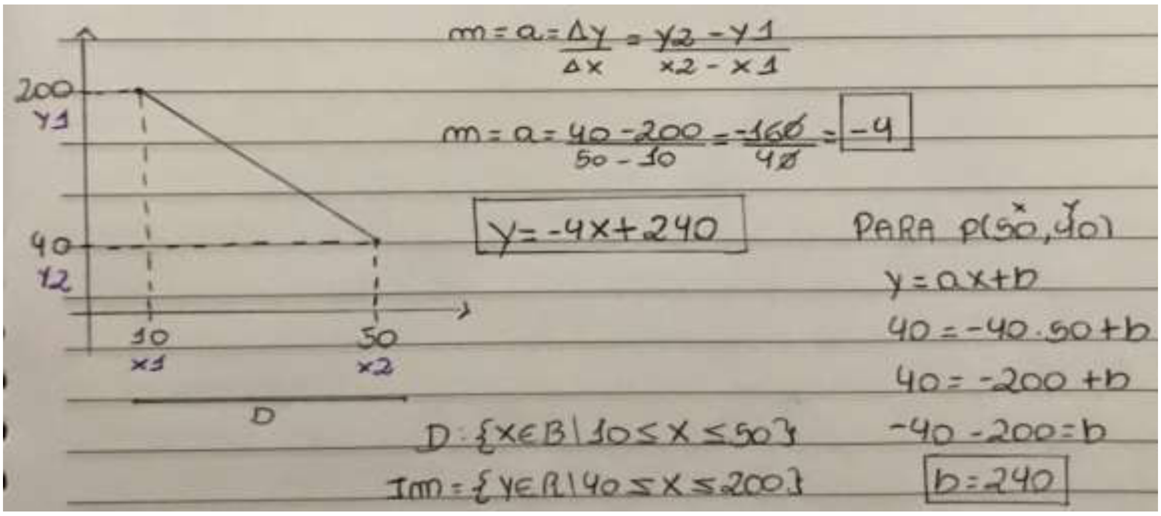
Fonte: atividade adaptada de Adami et al., 2015.

Para estabelecer a lei de formação, os estudantes utilizaram dois pontos pertencentes ao gráfico da função limitado pelos eixos coordenados, determinaram os valores para os coeficientes angular e linear, substituindo os mesmos na expressão algébrica "$f(x) = ax + b$" (Figura 47, item a).

Conjectura-se, assim, que essa dupla, embora não tenha utilizado as grandezas apresentadas no enunciado da questão, fez uma leitura satisfatória da situação proposta, utilizando conceitos, definições ou procedimentos de resolução adequados relacionados à Função Afim. Situações similares foram apresentadas por outras duplas de estudantes nessa situação e em outras, o que permitiu identificar a idoneidade no componente Situações-problema como alta. A mesma solução destacada apresentou elementos que permitiram considerar que o componente Linguagens atingiu um grau alto de idoneidade, visto que os estudantes utilizaram diferentes linguagens e representações matemáticas nas situações em estudo e realizaram conversões entre as mesmas.

Por outro lado, o componente Regras alcançou um grau médio de idoneidade, visto que os estudantes apresentaram dificuldades na compreensão e representação do conjunto domínio e imagem, conforme pode ser observado na resolução apresentada pelos estudantes da dupla F, os quais utilizaram, para solução da mesma questão, outros dois pontos no gráfico (Figura 48), os quais não estavam definidos ou visualmente destacados no gráfico. Com os pontos selecionados, realizaram uma construção, a qual representava, de forma errônea, a situação inicial, pois não considerava os intervalos [0, 10) no eixo x e (200, 240] no y. Utilizando as fórmulas "$a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$" e "$y = ax + b$", determinaram a lei de formação, que resultou correta.

Figura 48 – Resolução da dupla F



Fonte: a dupla F.

Mesmo que tenham chegado à expressão que representa a situação em estudo, não foi possível considerar a resolução correta. Como os pontos utilizados pertenciam ao domínio da função, chegaram à lei de formação correta, porém a representação errônea realizada conduziu a um erro na compreensão e representação do conjunto domínio e imagem da situação, o que também pode ser observado na Figura 48.

Esse tipo de solução foi utilizado para análise e discussões com o grupo de estudantes, retomando os conceitos envolvidos, abrindo espaço para os mesmos refletirem, apresentarem argumentos, tendo a oportunidade de atribuir novos significados aos conjuntos domínio e imagem envolvidos na questão.

Com relação ao componente Argumentos, entende-se que esse alcançou uma baixa idoneidade, pois foram propostas situações nas quais os estudantes necessitavam argumentar a partir da uma situação-problema dada, seja por meio da discussão de uma propriedade, uma definição ou uma lei de formação ou a partir de um conjunto de ações realizadas por eles para representar, construir ou argumentar sobre o objeto em estudo. Contudo, mesmo que a solução apresentada apontasse para o entendimento do que estava sendo solicitado (e aí pode-se dizer que os argumentos estão implícitos), não conseguiam utilizar argumentos ou justificativas adequadas expressando-se por escrito.

Nas respostas da dupla B de estudantes (apresentadas na Figura 47), é possível perceber que eles determinaram o zero da função e o intercepto y, o que, em princípio, encaminha para um entendimento de que os mesmos se apropriaram dos conceitos envolvidos, porém não conseguiram justificar ou argumentar qual era o significado desses conceitos na situação-problema abordada. Esse fato também foi percebido nas soluções apresentadas por outras duplas, sendo que, em grande parte, os estudantes não responderam ao que era solicitado em relação às justificativas, apenas destacando os pontos onde o gráfico intercepta o eixo das abcissas e das ordenadas, ou os intervalos do domínio e conjunto imagem, sem esclarecer sobre os seus significados.

Ao serem questionados sobre os motivos pelos quais não estavam justificando suas respostas, um dos estudantes relatou: “Não sei o que devo escrever, sei que o gráfico corta o eixo x e y. Isso já não é uma justificativa?”. Após essa discussão, quando novamente questionados sobre o significado do zero da função no contexto do problema ou sobre o que aconteceu no sexagésimo dia após o início do vazamento, os estudantes responderam que, no sexagésimo dia, o reservatório estaria vazio. Então, a dupla E perguntou: “É isso que temos que responder?”. Essas manifestações dos estudantes levaram ao entendimento de que, em muitas situações, os mesmos têm argumentos para justificar seus procedimentos, só não conseguem acioná-los e apresentá-los por escrito adequadamente.

Conjectura-se que esse procedimento dos estudantes, ao resolverem as situações propostas, pode estar relacionado ao trabalho que, via de regra, é realizado nas aulas de Matemática, quando as soluções se baseiam em procedimentos, como aplicação de algoritmos e regras.

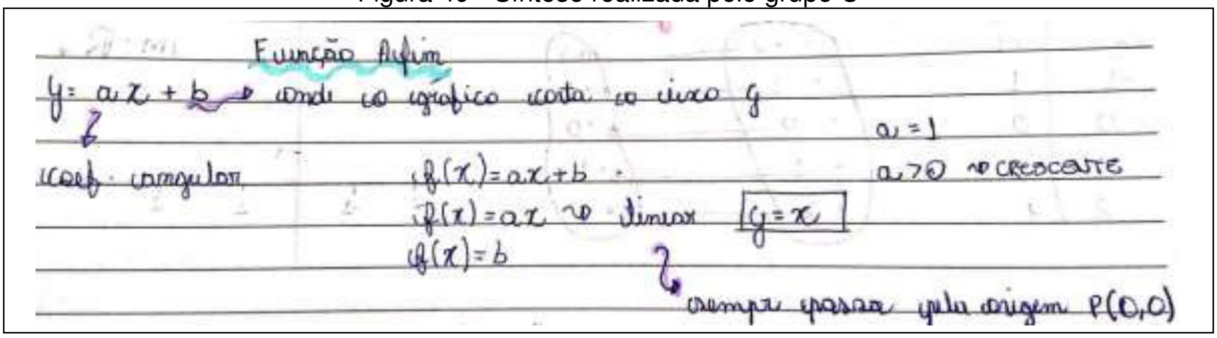
O componente Relações foi contemplado na proposta, todavia considera-se que se alcançou uma idoneidade média, pois os estudantes não conseguiram relacionar, de forma adequada, determinados conceitos e definições envolvendo a Função Afim, principalmente no que diz respeito ao domínio e conjunto imagem no contexto das situações-problema. Porém, estabeleceram relações pertinentes entre a lei de formação e a representação tabular e gráfica das situações apresentadas.

Entende-se que o componente cognitivo Raciocínio Lógico alcançou um grau alto de idoneidade, visto que os estudantes puderam observar, analisar, inferir, conjecturar e provar seus entendimentos e procedimentos referentes à solução das distintas situações-problema enfrentadas. Além do espaço de trabalho individual e em duplas, as discussões no grande grupo sobre questões que geraram conflitos se constituíram em espaço onde os estudantes puderam discutir e argumentar, ressignificando muitos conceitos.

No que se refere ao componente Leitura/Interpretação, entende-se que foi alcançado um alto grau de idoneidade, visto que a linguagem utilizada estava adequada ao nível dos estudantes e que as diferentes formas de representação de uma função se referiam ao mesmo objeto matemático em estudo. Dessa forma, os estudantes não apresentaram dificuldades relevantes no que diz respeito às situações de expressão matemática e de interpretação nas quais era necessário pensar, analisar, refletir e inferir sobre as informações contidas no problema para se chegar a uma solução.

Com relação ao componente Análise/Síntese, o grau de idoneidade foi baixo. Mesmo que as atividades encaminhassem soluções, tanto referentes à particularização como generalização, e relações entre os objetos matemáticos, de forma específica ou ampla, os estudantes apresentaram dificuldades em realizar uma síntese dos conceitos e definições abordados com relação à Função Afim, conforme pode ser observado na Figura 49.

Figura 49 - Síntese realizada pelo grupo C

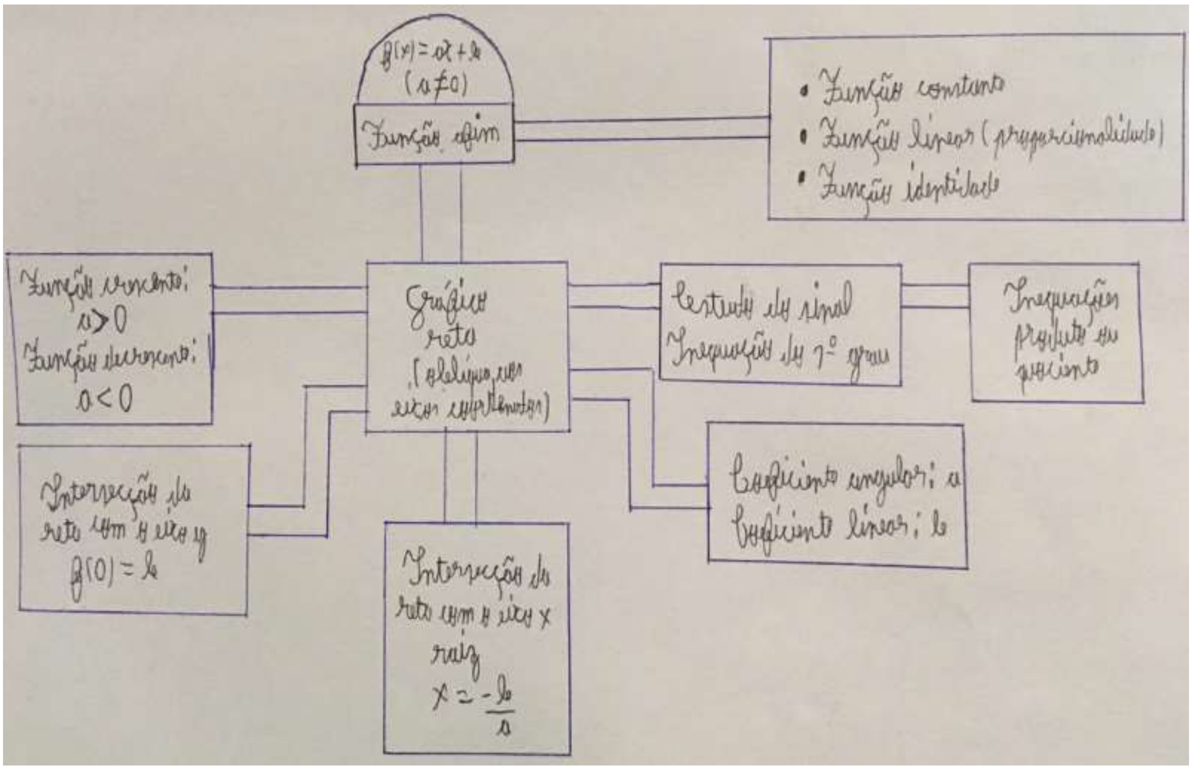


Fonte: a pesquisa.

Esse tipo de síntese foi utilizado para análise e discussões no grande grupo, retomando os conceitos envolvidos e possíveis formas de apresentação de uma síntese. Ao término das discussões e reflexões, as duplas retomaram as atividades relacionadas a sínteses. Em novos esquemas, eles elencaram os conceitos abordados de forma satisfatória, apresentando a forma genérica da Função Afim, particularizando as funções constante, linear e identidade, apresentando as condições para determinar se uma função é crescente ou decrescente, as regras matemáticas para determinar a raiz ou zero da função, os coeficientes da função, bem como o estudo do sinal e das inequações.

Novamente considera-se que os estudantes apresentaram dificuldades na realização desse tipo de tarefa, devido à falta de hábito de fazer um apanhado geral do que tinha sido abordado. Ressalta-se, também, que dois grupos (A e K), após as discussões realizadas, basearam as suas sínteses tomando como referência um mapa mental apresentado no final do material adotado pela escola, adequando-o para o estudo em questão, conforme pode ser observado no esquema realizado pela dupla A (Figura 50).

Figura 50 – Síntese realizada pela dupla A.



Fonte: a pesquisa.

Esses momentos de discussões permitiram perceber que os estudantes puderam ampliar e aprofundar ideias, conceitos e procedimentos relacionados ao objeto matemático Função Afim, consolidando significados já atribuídos, bem como atribuindo novos significados. Também foram ampliadas formas de representação e o desenvolvimento de argumentação justificada.

6.2 FUNÇÃO QUADRÁTICA: UMA ANÁLISE DAS IDEONEIDADES EPISTÊMICA, MEDIACIONAL E COGNITIVA

O estudo da Função Quadrática pode ser motivado via problemas de aplicação, em que é necessário encontrar certo ponto máximo, por exemplo, em problemas de determinação de área máxima. O estudo dessa função deve, também, ser realizado de maneira que o estudante consiga estabelecer relações entre aspectos do gráfico e os coeficientes de sua expressão algébrica, evitando, assim, a memorização de regras, sendo que o trabalho com a forma fatorada $f(x) = a. (x - m)^2 + n)$ pode ser uma maneira para sua compreensão. Nesse estudo, é pertinente deduzir a fórmula que determina os zeros da função quadrática, bem como a identificação do gráfico da função com a curva da parábola, entendida como o lugar geométrico dos pontos do plano que são equidistantes de um ponto fixo (o foco) e de uma reta (a diretriz) (BRASIL, 2006).

Assim, o material de estudo que trata especificamente do tema Função Quadrática foi planejado e estruturado objetivando retomar, aprofundar e desenvolver ideias, noções e conceitos associadas a essa temática, abordando definições, propriedades e relações, bem como, procedimentos associados à resolução de situações contextualizadas ou pertinentes e passíveis de serem encontradas ou enfrentadas pelos estudantes em diferentes contextos de suas vidas, quer seja na escola, no cotidiano, ou relacionadas a outras áreas do conhecimento.

Do conjunto de atividades desenvolvidas no âmbito do estudo da Função Quadrática, são destacadas, para a análise, atividades representativas do trabalho realizado. De modo análogo ao trabalho com a Função Afim, as atividades desenvolvidas objetivaram:

- utilizar diferentes linguagens, língua natural, algébrica, tabular e gráfica;
- interpretar o sinal da Função na situação-problema abordada;
- a construção e interpretação de tabelas e gráficos, de acordo com a situação-problema enfrentada;
- identificar e analisar o crescimento e decrescimento de uma função a partir de situações contextualizadas;
- interpretar e determinar o domínio e conjunto imagem, de acordo com a situação abordada;

- determinação e análise do valor máximo e mínimo de uma função quadrática, conforme a situação em estudo;
- análise e interpretação das variações de uma função (deslocamentos na horizontal e vertical);
- aplicar a Função Quadrática em diferentes situações intramatemáticas e extramatemáticas.

Na sequência, será apresentada a análise epistêmica da Função Quadrática, seguida das análises cognitiva e mediacional.

6.2.1 Função Quadrática: Análise da Idoneidade Epistêmica

Do conjunto de atividades envolvendo o estudo da Função Quadrática foram selecionadas situações-problema representativas para serem analisadas. Um primeiro exemplo de atividade está na Figura 51 e diz respeito à colocação de cerâmica nos diversos cômodos de uma casa. Essa atividade foi utilizada para introduzir o estudo da Função Quadrática, situando-se em nível de compreensão intuitiva, de matematização inicial e num estágio inicial de abstração da compreensão de conceitos e noções dessa função, tal como estabelecido pelos níveis de compreensão do conceito de Função apontado por Bergeron e Herscovics (1982).

Figura 51 - Exemplo de Atividades envolvendo Função Quadrática

Para colocar cerâmica nos cômodos de uma casa, um pedreiro precisa, inicialmente, conhecer a área de cada uma das peças. Com base nessa informação, faça o que é solicitado:
a) Se um cômodo tem 6m de lado, qual a sua área?
b) Se a área de um quarto é de 64 m ^{2}, qual a medida do seu lado?
c) A tabela a seguir relaciona a medida dos lados de cada cômodo com a área da superfície a ser revestida por cerâmica. Complete-a.

Medida do lado (L)	2	3		5		8,5	9,3	10	10,5
Área (A)			16		49				

d) A cada medida do lado do cômodo obtém-se um valor correspondente da área de cerâmica utilizada. Escreva como você obteve cada valor da tabela.
e) Em geral, você pode representar a medida de um lado qualquer do cômodo por L, e da área por A. Expresse uma relação entre estas duas medidas.
f) Alguma destas medidas depende da outra? Como é esta dependência?
g) Marque em uma folha cada um dos pares da tabela anterior. Você pode unir esses pontos? Por que?
h) Unindo os pontos, que tipo de gráfico você obtém? É possível obter este mesmo gráfico utilizando menos pontos? Justifique sua resposta?
i) Existe algum cômodo cuja medida do lado seja tal que seu perímetro e sua área são representados pelo mesmo número? Como este fato pode ser mostrado no gráfico?
j) Qual é o domínio e o conjunto imagem no contexto do problema? Justifique sua resposta.

Fonte: adaptado de Souza (2013).

Essa atividade é apresentada por meio da língua natural e da representação tabular, estabelecendo, assim, uma relação entre duas formas de expressar uma função, objetivando, também, apresentar e relacionar as possíveis medidas dos cômodos com a sua respectiva área. É solicitado aos estudantes que determinem a área dos cômodos, conforme a ocorrência de mudanças em suas dimensões, estabeleçam a relação de dependência entre as grandezas envolvidas, representem graficamente a situação e analisem as soluções frente ao problema, estabelecendo os conjuntos domínio e imagem no contexto da situação apresentada, justificando os mesmos.

De acordo com Godino (2012), é necessário apresentar uma grande variedade de situações-problema, que abordem distintos problemas, voltados para diferentes áreas do conhecimento e de situações do convívio ou do interesse dos estudantes. Tal abordagem permite que se transite entre diferentes contextos, o que possibilita lançar mão de diferentes formas de se representar uma mesma situação e de diferentes conceitos envolvidos.

Levando esses aspectos em consideração, destaca-se, na Figura 52, uma situação que aborda o preço dos ingressos de um show de um grupo musical, a qual é apresentada na língua natural e pela representação algébrica. Na atividade, busca-se desenvolver os significados institucionais relacionados a construção e análise de gráficos e de tabelas, o valor de uma função, as raízes ou zero da função, o vértice, os valores de máximo ou de mínimo, em quais intervalos a função é crescente ou decrescente, bem como o estabelecimento do conjunto domínio e imagem no contexto da situação apresentada, justificando os mesmos.

Figura 52 - Atividades envolvendo o preço do ingresso para um show de um grupo musical

Um empresário de um grupo musical está buscando determinar o preço x, em reais, do ingresso para o próximo show do grupo (se for alto, ele não conseguirá vender ingressos, e, se for baixo, pode ser que ele tenha prejuízo). Com base nos últimos espetáculos realizados pelo grupo, ele concluiu que o lucro L (ou prejuízo, se L < 0) de cada espetáculo, em reais, é dado $L(x) = -x^2 + 80x - 700$.

Responda as seguintes questões:

a) Represente por meio de uma tabela e graficamente a situação.

b) Qual é o lucro se o ingresso para o show for vendido a R$ 20,00?

c) Pode-se afirmar que o empresário tem prejuízo quando o valor do ingresso for um valor maior que R$ 40,00? Explique.

d) Para qual intervalo percebemos que o lucro cresce? E para qual intervalo é decrescente? Justifique suas respostas.

e) Qual é o valor do ingresso para que o empresário tenha lucro máximo? E qual é esse lucro?

f) O que acontece quando os ingressos são vendidos a um valor maior que R$ 70,00?

g) Qual é o lucro quando os ingressos forem vendidos a R$ 10,00 ou a R$ 70,00? Procure argumentos para justificar sua resposta.

g) Qual será o lucro se o ingresso for vendido a R$ 22,50?

h) Qual é o domínio e o conjunto imagem? Justifique.

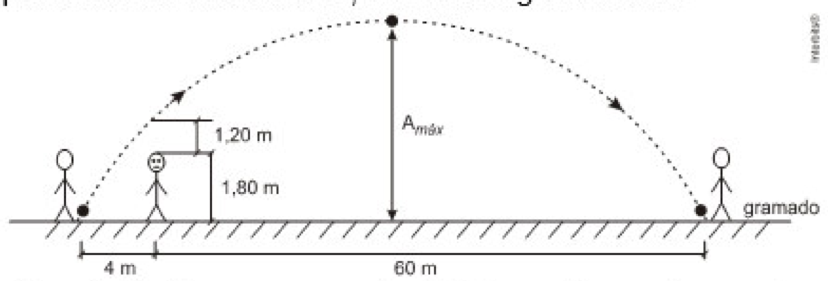
Fonte: Souza (2013).

Por meio dessa atividade, busca-se que relações sejam estabelecidas e sejam apresentados argumentos em torno da justificativa para conclusões e observações encontradas com relação ao zero da função, o vértice, domínio e conjunto imagem, crescimento e decrescimento, bem como o valor máximo e mínimo de uma função. Ademais, a discussão sobre lucro, prejuízo e o melhor valor para a venda de um produto produz uma reflexão que pode ser estendida a outras situações. Destaca-se, ainda, que a utilização das diferentes formas de representação leva a diferentes sentidos de conversão entre registros e diferentes tratamentos.

Outra atividade utilizada (Figura 53) está relacionada a um cruzamento de uma bola em um jogo de futebol, na qual um jogador chuta a bola para seu companheiro, passando por cima de um adversário, descrevendo, assim, uma trajetória em forma de arco de parábola até tocar o gramado. A mesma está inserida em um contexto onde se esperava que os estudantes já tivessem desenvolvido aspectos relacionados à abstração e à formalização, tal como apontado por Bergeron e Herscovics (1982).

Figura 53 - Atividades envolvendo um cruzamento de uma bola em um jogo de futebol

Em uma partida de futebol, um jogador, estando na lateral do campo, cruzou a bola para um companheiro de equipe o qual se encontrava na lateral oposta, a uma distância de 64 m. A bola passou 1,20 m acima da cabeça de um jogador, com 1,80 m de altura, da equipe adversária, o qual, nesse instante, estava a 4 m de distância do jogador que realizou o cruzamento, conforme figura abaixo.



Nessa situação, a bola descreveu uma trajetória em forma de arco de parábola até tocar o gramado, quando foi dominada pelo companheiro de equipe. Com base nessas informações, responda o que é solicitado.

a) Quais são os zeros ou raízes da função no contexto do problema? Justifique como você determinou esses valores?

b) Qual é a distância que a bola percorreu, em relação ao eixo das abscissas, para que a mesma atinja a altura máxima? Justifique como determinou essa distância.

c) Qual é a lei de formação que representa esta situação.

d) Qual é a altura máxima atingida pela bola? Justifique sua resposta.

e) Determine o domínio e o conjunto imagem no contexto da situação apresentada. Justifique sua resposta.

Fonte: adaptado de UFPB (2011).

Nessa situação-problema são utilizadas a língua natural e a representação gráfica, buscando propiciar aos estudantes utilizarem diferentes linguagens para analisar, representar e resolver uma situação. Os significados institucionais pretendidos com essa atividade referem-se à relação de dependência entre as grandezas envolvidas, o estabelecimento da lei de formação, a determinação das raízes e do "x" do vértice da função, por meio da análise gráfica e a realização do procedimento para determinar o valor do "y" do vértice (valor máximo), bem como o estabelecimento do conjunto domínio e imagem no contexto da situação-problema. Destaca-se, ainda, que uma situação como essa permite, com o recurso da tecnologia simular outras situações de trajetórias de diferentes objetos, em diferentes contextos.

As situações apresentadas são apenas exemplos do conjunto de situações utilizadas para o estudo da Função Quadrática, as quais envolveram, também, estudos relacionados ao movimento retilíneo uniformemente variado, ao lançamento de projéteis, a área e perímetro de figuras geométricas, a Matemática Financeira (lucro, receita e custo), o estudo de estruturas como o formato em arco, entre outros. O projeto de estudo como um todo buscou atender e desenvolver os significados de referência estabelecidos pela instituição onde a investigação foi implementada. A íntegra da proposta envolvendo a Função Quadrática está no Apêndice C.

Apresentam-se, na Figura 54, os componentes e indicadores epistêmicos evidenciados no conjunto de atividades, envolvendo a Função Quadrática, com o indicativo do grau de idoneidade. Tal como ocorreu com o trabalho com a Função Afim e as demais funções, a análise foi realizada a partir das práticas desenvolvidas com a aplicação da proposta. Assim, embora a proposta tenha sido concebida considerando os pressupostos da Idoneidade Epistêmica, sua aplicação e desenvolvimento junto aos estudantes é que permitiu estabelecer o grau de idoneidade da mesma nos diferentes componentes.

Figura 54 - Análise Epistêmica: Função Quadrática

COMPONENTE SITUAÇÕES-PROBLEMA		
Indicadores	**Indicadores evidenciados**	**Idoneidade**
a) apresenta-se uma mostra representativa e articulada de situações de contextualização, exercícios e aplicações; b) propõem-se situações de generalização de problemas (problematização).	- O conjunto de atividades proposto se refere a situações-problema pertinentes ao estudo da Função Quadrática apresentadas, predominantemente, em formato de problemas voltados para situações da realidade, do cotidiano, do trabalho ou de outras áreas do conhecimento (intramatemáticos e extramatematicos), nas quais os estudantes necessitavam relacionar conceitos, definições, leis, e propriedades, bem como utilizar procedimentos para a solução de cada atividade. Foram abordadas situações envolvendo movimento retilíneo uniformemente variado, lançamento de projéteis, área de figuras geométricas, Matemática Financeira (lucro, receita e custo), estudo de estruturas como o formato em arco, entre outras. - No que se refere à generalização, são propostas distintas situações que possibilitam aos estudantes	Alta

	conjecturarem, justificarem, deduzirem e estabelecerem relações e leis de formação, identificando características e propriedades da Função Quadrática.	
COMPONENTE LINGUAGEM		
Indicadores	**Indicadores evidenciados**	**Idoneidade**
a) uso de diferentes modos de expressão matemática (verbal, gráfica, simbólica), tradução e conversão entre as mesmas; b) nível de linguagem adequado aos estudantes; c) propõem situações de expressão matemática e interpretação.	- Aponta-se para a presença das diferentes formas de representação e conversão entre as mesmas, ficando clara a referência ao mesmo objeto matemático. Destaca-se também, os diferentes tratamentos realizados dentro de um mesmo registro. - A linguagem utilizada no conjunto de atividades sobre a temática estava adequada ao nível dos estudantes, sendo apresentada na forma da língua natural e representações algébrica, simbólica, tabular e gráfica.	Alta
COMPONENTE REGRAS		
Indicadores	**Indicadores evidenciados**	**Idoneidade**
a) as definições e procedimentos são claros e corretos e estão adaptados ao nível educativo a que se dirigem; b) apresentam-se enunciados e procedimentos fundamentais do tema para o nível educativo dado; c) proposta de situações onde os estudantes tenham que generalizar ou negociar definições, proposições ou procedimentos.	- Foram desenvolvidas a definição de Função Quadrática, estabelecido domínio, conjunto imagem, zero da função, vértice da função, estudo do sinal da função, a intersecção com os eixos, crescimento e decrescimento e valor máximo e mínimo de uma função. - Os enunciados eram claros e objetivos, apresentando a situação em estudo e desafiando os estudantes para a solução da mesma. - Nas atividades, os conceitos, definições e procedimentos são trabalhados de forma clara e de acordo com o nível educativo dos estudantes. - O estudo de noções, ideias, conceitos e procedimentos foram desenvolvidos por meio de situações- problema e atividades de manipulação no *software* Geogebra em que os estudantes necessitavam observar, analisar, conjecturar, concluir e avaliar, buscando regularidades, particularidades e generalizações.	Alta
COMPONENTE ARGUMENTOS		
Indicadores	**Indicadores evidenciados**	**Idoneidade**
a) as explicações, comprovações e demonstrações são adequadas ao nível educativo a que se dirigem; b) promovem-se situações onde os estudantes tenham que argumentar.	- As atividades propunham momentos nos quais os estudantes necessitavam analisar e argumentar a partir de uma situação-problema dada, seja por meio da discussão de um conceito, de uma definição, de uma representação, de uma lei de formação, ou, ainda, a partir de um conjunto de ações realizadas por eles para representar, construir e analisar o objeto em estudo. - Considera-se, porém, que deveria ter sido apresentado um conjunto maior de atividades onde os estudantes pudessem transitar pelas diferentes formas de representação de uma Função Quadrática e argumentar sobre as características das mesmas. - Entende-se que era necessário o desenvolvimento de atividades de construção e manipulação no Geogebra que os auxiliasse na compreensão do objeto em estudo. Também era pertinente apresentar um conjunto maior de atividades	Média

	inéditas, relacionadas à realidade dos estudantes, as quais possibilitassem aos mesmos desenvolverem autonomia com relação aos procedimentos e as estratégias de solução, proporcionando, assim, situações que os levassem a desenvolverem habilidades relacionadas a estabelecer justificativas adequadas para cada situação trabalhada.	
COMPONENTE RELAÇÕES		
Indicadores	**Indicadores evidenciados**	**Idoneidade**
a) os objetos matemáticos (problemas, definições, proposições) se relacionam e se conectam entre si.	- Considera-se que foi possível estabelecer relações entre as propriedades dos objetos matemáticos em estudo, principalmente, as relações entre a lei de formação, a representação tabular, gráfica das situações, bem como as relacionadas com o zero da função e o conjunto do domínio e imagem. Porém, essas relações poderiam ter sido melhor exploradas, principalmente com o uso do Geogebra e das construções com lápis e papel, de modo a permitir aos estudantes estabelecerem as relações entre os diferentes definições, conceitos e noções em torno da Função Quadrática.	Média

Fonte: a pesquisa.

A análise permitiu perceber que os componentes e indicadores epistêmicos estão presentes nas atividades propostas, embora nem todos com o grau máximo de idoneidade. Assim como na análise realizada para a Função Afim, o que se buscou foi identificar em que medida se conseguiu que os componentes e indicadores epistêmicos estivessem presentes no trabalho com a Função Quadrática. Embora o conjunto de atividades envolvendo a temática tenha sido concebido buscando o grau máximo de idoneidade em cada um dos componentes da Idoneidades Epistêmica nem sempre foi possível desenvolver, de modo satisfatório, as situações-problema e demais atividades, relacionando-as a todos os indicadores epistêmicos.

Com relação as Situações-problema (exemplos de atividades destacadas nas Figuras 51, 52 e 53), considerou-se o grau de representatividade como alto, sendo que os conceitos e noções em torno da Função Quadrática foram desenvolvidos por meio de distintas situações de contextualização e aplicação relacionadas ao cotidiano, ao trabalho e as outras áreas do conhecimento. Entende-se, que em decorrência da diversidade de situações apresentadas, o componente Regras também se fez presente com um grau de idoneidade alto pois, para a solução das situações, era necessária a utilização de diferentes conceitos, definições e procedimentos, os quais já haviam sido desenvolvidos ou estavam em processo de apropriação por parte dos estudantes.

Com relação a Linguagens, considerou-se a idoneidade alta, tendo em vista que foram utilizadas diferentes formas de representações (língua natural e representações algébrica, simbólica, gráfica e tabular). Essas diferentes formas de representação permitiram aos estudantes analisar as situações sob diferentes perspectivas, buscando os procedimentos apropriados a essas diferentes linguagens e representações.

O componente Argumentos atingiu uma idoneidade média, uma vez que nem todas as atividades exigiam dos estudantes soluções com justificativas ou comprovações do que estava sendo apresentado (o que exigiria argumentação justificada). Erram casos em que as atividades tinham um caráter mais procedimental, o que, embora exija conhecimentos sobre o tema, possibilita que possíveis justificativas fiquem implícitas.

Já, o componente Relações foi considerado com representatividade média, pois entende-se que poderiam ter sido desenvolvidas ou apresentadas, em maior quantidade, atividades diferenciadas, que explorassem, se possível, ao mesmo tempo e de forma mais significativa, as relações, representações, conceitos e definições do objeto Função Quadrática, permitindo, assim, que o estudante transitasse com maior segurança e flexibilidade entre as mesmas, identificando as características em qualquer situação-problema ou atividade que fossem enfrentar, seja no trabalho, no cotidiano ou em estudos posteriores.

6.2.2 Função Quadrática: Análise da Idoneidade Mediacional

Para o estudo da temática Função Quadrática foram utilizados, como recursos didáticos, a exploração de situações contextualizadas, vídeos pré-selecionados, materiais no *PowerPoint*, *software* Geogebra, problemas resolvidos e objetos de aprendizagem, visando retomar, aprofundar e desenvolver conceitos, definições, noções e procedimentos em torno desse tema, bem como contemplar os diferentes níveis educativos e as diferentes maneiras que cada estudante possui para desenvolver habilidades e adquirir conhecimentos. Buscou-se desenvolver um trabalho participativo e colaborativo, sem deixar de lado o trabalho individual e os momentos de interversão educativa, quando necessário, pertinente ou adequado.

No quadro da Figura 55, apresentam-se os componentes e indicadores mediacionais evidenciados no conjunto de atividades, juntamente com o indicativo da idoneidade que se julgou pertinente.

Figura 55 - Síntese da análise Mediacional

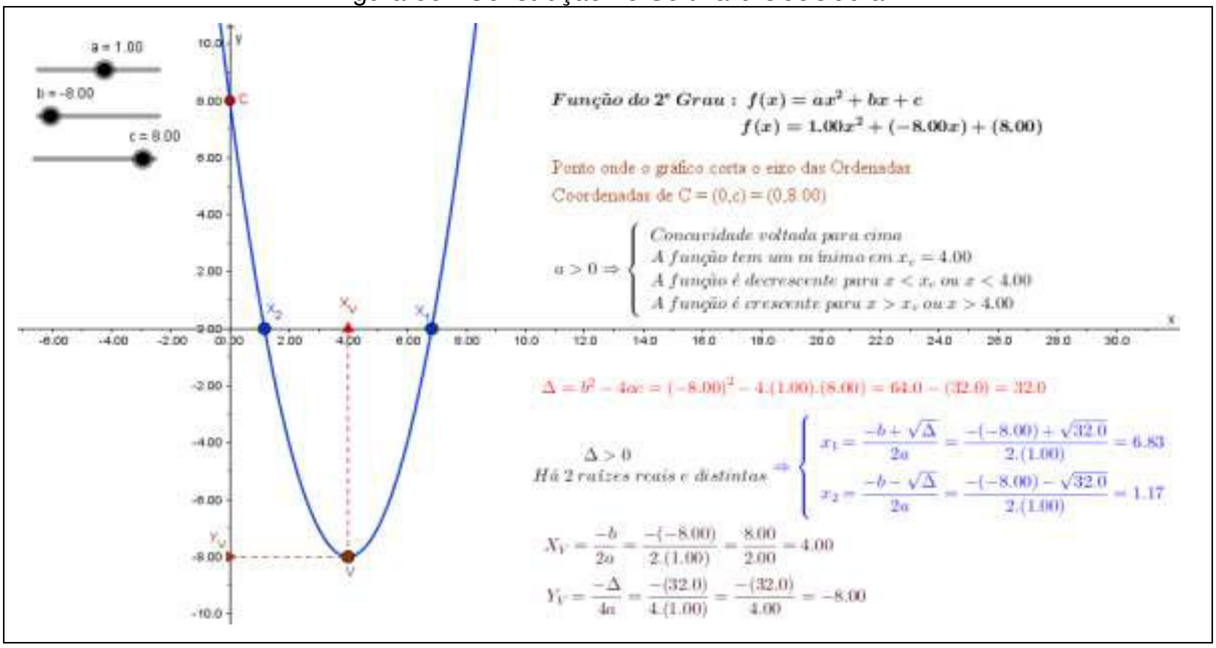
COMPONENTE RECURSOS DIDÁTICOS		
Indicadores	**Indicadores evidenciados**	**Idoneidade**
a) evidencia-se a presença de materiais adequados ao desenvolvimento do processo de ensino e adaptados ao nível educativo a que se dirigem; b) há uma diversificação de recursos para auxiliar no processo de ensino, tais como: audiovisuais, material concreto, livros, entre outros; c) propõe-se a organização e experimentação de situações práticas.	- Considera-se que o material desenvolvido e apresentado está adequado ao nível educativo em que se encontravam os estudantes, utilizando linguagem clara e acessível, mantendo o rigor e aspectos formais da Matemática. - No que se refere aos recursos, optou-se pela construção com lápis e papel de tabelas e gráficos, bem como a utilização do *software* Geogebra para a construção dos mesmos e para a manipulação e visualização das caracterizas de cada representação, buscando possibilitar aos estudantes distintas situações de experimentação, interpretação e validação. - Foram utilizados, ainda, vídeos, materiais construídos no PowerPoint e objetos de aprendizagem, a fim de oportunizar aos estudantes retomarem, explorarem, aprofundarem e exercitarem o que estava trabalhado.	Alta
COMPONENTE TEMPO DIDÁTICO		
Indicadores estabelecidos	**Indicadores evidenciados**	**Idoneidade**
a) apresentam-se situações de ensino que contemplam diversas modalidades (estudo pessoal, cooperativo, tutorial, presencial); b) evidencia-se a organização do tempo para intervenção docente, trabalho autônomo dos estudantes e momentos de discussão; c) dedica-se um tempo maior para o desenvolvimento dos conhecimentos, caso os estudantes apresentem dificuldade de compreensão.	- O conjunto de atividades e recursos utilizados para o estudo da Função Quadrática apresentava um caráter predominantemente presencial, que privilegia o trabalho individual ou em duplas, buscando, assim, a interação entre os diferentes grupos de estudantes, assim como com o professor. - As diferentes estratégias e os recursos utilizados possibilitavam que os estudantes realizassem estudos ou aprofundamentos sobre o tema em ambientes distintos, sem deixar de lado o objetivo da construção pessoal de conhecimentos. Assim, considera-se que o material auxiliava no desenvolvimento da autonomia dos dissentes, uma vez que os mesmos eram desafiados a se tornam responsáveis pelo estudo, estabelecendo ritmo de estudo e aprendizagem. - As atividades propostas buscavam estimular e desenvolver nos estudantes o hábito de discutir e analisar as características, propriedades e definições das Função Quadrática, visando a reflexão e a negociação de significados referentes a temática e o desenvolvimento de argumentação justificada.	Alta

Fonte: a pesquisa.

Por meio da análise produzida, foi possível perceber que os componentes e indicadores mediacionais estão representados no material desenvolvido para a temática Função Quadrática de modo satisfatório. No que se refere ao componente recursos, considerou-se sua idoneidade alta, pois se privilegiou o uso do *software* Geogebra para realizar construções, auxiliar na visualização, interpretação e para a validação (Figura 56). Godino (2011) aponta como essencial para uma alta idoneidade mediacional a utilização de recursos tecnológicos digitais no processo de ensino e aprendizagem, destacando o universo de possibilidades advindos dessa utilização para o ensino e, principalmente, para a aprendizagem.

O Geogebra é uma ferramenta que possibilita aliar a representação gráfica, algébrica e a tabular. Esses diferentes tipos de representação aliados, ainda, à movimentação dos objetos, permitida pelo *software,* abrem espaço para explorar e identificar características da função em estudo, bem como perceber ou realizar conversões entre diferentes registros, o que pode levar o estudante a perceber um mesmo objeto matemático a partir de diferentes representações e realizar tratamentos adequados e necessários para compreensão e domínio das situações apresentadas.

Figura 56 - Construção no *Software* GeoGebra



Fonte: a pesquisa.

O uso desse recurso tecnológico permite um estudo dinâmico, no qual os estudantes têm a oportunidade de construir ou representar graficamente a situação em estudo a partir de seus conhecimentos e, à medida que vão assimilando novas características e propriedades, possam realizar mudanças ou reconstruções. Ressalta-se que, mesmo que o *software* conte com recursos que facilitam realizar diferentes representações, é necessário que os estudantes se apropriem gradualmente dos conceitos, definições e procedimentos envolvidos, para que possam realizar manipulações e retirar informações úteis para a compreensão e solução da situação em estudo.

Para mostrar diferentes maneiras de se trabalhar com um mesmo objeto matemático, também lançou-se mão de outros recursos e procedimentos, como a construção, com lápis e papel, de tabelas e gráficos, nos quais os estudantes puderam comparar e analisar as diferentes formas de representação de um mesmo objeto matemático, aliando, assim, recursos convencionais, utilizados normalmente em sala de aula, com os advindos das tecnologias digitas.

Outro recurso utilizado, que auxiliou no processo de aprendizagem da Função Quadrática, foi a construção de um material no *PowerPoint*, o qual era composto por atividades contextualizadas, exercícios resolvidos, demonstrações e definições. Os mesmos foram disponibilizados para os estudantes, tanto em sala de aula, quanto em ambientes fora dela, possibilitando, assim, que os mesmos tivessem um material de consulta para os momentos de estudo ou quando surgiam dúvidas ou conflitos na solução de uma atividade.

Juntamente com os recursos apresentados, foram desenvolvidos objetos de aprendizagem, por meio dos quais os estudantes podiam se apropriar de conceitos, definições e ideias em torno da Função Quadrática, bem como, exercitar os procedimentos necessários para a solução e análise das diferentes atividades. Esses objetos, em sua grande maioria, foram elaborados para serem utilizados no Georgebra, onde os estudantes podiam manipular, modificar, analisar e visualizar as transformações, procedimentos que se entende necessários para uma boa compreensão desse tema.

Buscando diferentes maneiras de desenvolver o conteúdo, também foram selecionados vídeos de diferentes canais do *YouTube*, os quais apresentavam conceitos, definições, exemplos resolvidos ou situações-problema aplicadas em diferentes contextos. Os mesmos poderiam ser utilizados, pelos estudantes, para a retomada e para confrontar as relações que tinham estabelecido nas distintas atividades, buscando, assim, sempre, identificar características ou propriedades comuns do objeto em estudo.

No que se refere ao componente Tempo Didático, considera-se que a idoneidade alcançada foi alta, pois os materiais desenvolvidos para o estudo da Função Quadrática possibilitavam aos estudantes exercitarem a autonomia, respeitando o ritmo de estudo e de aprendizagem e as dificuldades que cada estudante apresentava durante o processo. Em casos com maior dificuldade na compreensão e apropriação dos conhecimentos, era dedicado um tempo maior, retomando-se aspectos necessários e retrabalhando com os diferentes recursos disponíveis, de acordo com a necessidade. Sempre que necessário, ocorriam discussões, tanto em pequenos grupos quanto no grande grupo, o que abria espaço para negociação de significados e solução de conflitos. Em tais momentos, intervenções pedagógicas se faziam presentes, sem deixar de lado a busca pelo trabalho autônomo dos estudantes.

Por fim, considera-se que a análise produzida permitiu lançar um olhar crítico e reflexivo para o material produzido e as estratégias e recursos utilizados, identificando potencialidades e fragilidades deles. Pondera-se que se buscou trabalhar com a temática Função Quadrática de forma diferenciada, possibilitando aos estudantes momentos de construção, manipulação, análise, validação, retomada e aprofundamento de conceitos, ideias e definições em torno desse tema, buscando, também, estabelecer condições para a produção de argumentos e relações sobre as definições e propriedades.

6.2.3 Função Quadrática: Análise da Idoneidade Cognitiva

Buscando analisar aspectos relacionados ao processo de aprendizagem dos estudantes e dos eventuais conflitos e dificuldades por eles enfrentados, durante a implementação do conjunto de atividades envolvendo o estudo do objeto Função Quadrática, foi realizada uma análise cognitiva, por meio dos componentes e indicadores da Ferramenta de Análise Cognitiva (raciocínio lógico, leitura/interpretação e análise/síntese), juntamente como os componentes da Ferramenta de Análise Epistêmica (situações-problema, linguagens, regras, argumentos e relações). O objetivo era de estabelecer o grau de idoneidade dos significados pessoais alcançados pelos estudantes frente aos significados institucionais de referência pretendidos com o material de estudo.

Na Figura 57, apresenta-se cada componente utilizado na Análise Cognitiva, identificando os significados pretendidos e os evidenciados no conjunto de atividades sobre a temática em questão, juntamente com o indicativo do grau de idoneidade que se julgou pertinente. Destaca-se que os dados e o entendimento sobre os significados declarados foram tomados com base na análise da produção dos estudantes a partir das atividades realizadas.

Figura 57 - Síntese da análise Cognitiva

COMPONENTE SITUAÇÕES-PROBLEMA		
Significados pretendidos	**Significados declarados**	**Idoneidade**
a) Identificar, nas situações-problema propostas nos distintos contextos intramatemáticos e extramatemáticos, a Função Quadrática. b) Resolver situações propostas, utilizando os conceitos, definições e procedimentos relativos à Função Quadrática.	- Os estudantes não apresentaram dificuldades relativas à identificação de uma Função Quadrática nos diferentes contextos. - Também não apresentaram dificuldades na identificação de elementos e de características nas distintas situações-problema propostas. - A maioria dos estudantes conseguiu resolver, corretamente, as situações propostas, por meio da utilização de procedimentos, definições e conceitos que já tinham sido desenvolvidos no nono ano do Ensino Fundamental, ou foram trabalhados e assimiladas durante o processo de estudo.	Alta
COMPONENTE LINGUAGEM		
Significados pretendidos	**Significados declarados**	**Idoneidade**
a) Identificar e reconhecer o uso de diferentes modos de expressão matemática (verbal, gráfica, simbólica) e realizar a tradução e conversão entre as mesmas. b) Reconhecer e utilizar a linguagem matemática adequada a cada situação.	- A grande maioria dos estudantes identificaram e utilizaram diferentes formas de representação ou expressão matemática, realizando, sempre que necessário, a conversão entre as mesmas de forma adequada. - Porém, apresentaram maior dificuldade em compreender e utilizar em distintos momentos a forma simbólica. - Utilizaram diferentes formas de representar o domínio e o conjunto imagem da Função Quadrática, mesmo que, em alguns casos, por erros de interpretação nas tabelas e gráficos, não tenham conseguido estabelecer, de forma correta, esses conceitos no contexto da situação-problema. Isso ocorreu, principalmente, em situações onde era solicitado, a partir da representação gráfica, determinar a lei de formação e retirar outros dados importantes para a representação do domínio e conjunto imagem. - Pode-se afirmar que, na maioria das situações, os estudantes utilizaram a linguagem adequada a cada situação.	Alta
COMPONENTE REGRAS (DEFINIÇÕES, PROPOSIÇÕES, PROCEDIMENTOS)		
Significados pretendidos	**Significados declarados**	**Idoneidade**
a) Reconhecer o que caracteriza uma Função Quadrática. b) Identificar situações envolvendo o crescimento e o decrescimento de uma Função Quadrática. c)Representar graficamente uma Função Quadrática e, a partir da mesma, estabelecer a representação algébrica, simbólica e tabular. d) Identificar o domínio e a imagem em situações	- Não ocorreram equívocos na classificação referente ao crescimento ou decrescimento da função. - Não houve dificuldades na representação gráfica e tabular, porém, as duplas F e L de estudantes apresentaram dificuldades na compreensão da representação simbólica. - As duplas F e K tiveram dificuldades de entendimento do conjunto domínio e imagem de situações contextualizadas, sendo que conseguiam representá-los, de forma adequada, apenas a partir da representação gráfica.	Média

envolvendo uma Função Quadrática. e) Calcular as raízes ou zeros da função. f) Determinar as coordenadas do vértice em distintas situações e interpretar o seu significado no contexto do problema (valor de máximo e mínimo). g) Determinar a lei de formação de uma Função Quadrática, dada por uma situação-problema.	- Utilizaram adequadamente os procedimentos matemáticos para o cálculo das raízes ou zeros da função, das coordenadas do vértice, mas apresentaram dificuldades para determinar a lei de formação a partir da interpretação e análise da representação gráfica da função.	
COMPONENTE ARGUMENTOS		
Significados pretendidos	**Significados declarados**	**Idoneidade**
a) Identificar e justificar os conjuntos domínio e imagem na situação-problema. b) Identificar e justificar o crescimento e decrescimento de uma função, tanto pela representação algébrica, tabular como gráfica, levando em consideração o contexto da situação-problema. c) Identificar e justificar o valor de máximo e mínimo, por meio da análise gráfica ou procedimentos, levando em consideração o contexto abordado.	- Os estudantes identificaram e representavam, matematicamente, o conjunto domínio e imagem, porém, por vezes, os representavam de forma errônea por erros de interpretação na representação gráfica, analisando de forma equivocada os intervalos de existência do conjunto domínio e imagem. - Não apresentaram dificuldades em identificar o crescimento ou decrescimento a partir de uma representação gráfica, porém, em alguns casos, não utilizaram uma justificativa adequada para o crescimento ou decrescimento em um contexto ou em um intervalo solicitado. - Os estudantes não apresentaram muitas dificuldades com relação à identificação das coordenadas do vértice como sendo ponto de máximo ou de mínimo. - Em algumas atividades em que era solicitada uma justificativa das informações ou valores encontrados por meio de procedimentos, a mesma não foi apresentada ou as respostas não foram satisfatórias, com o rigor matemático necessário.	Média
COMPONENTE RELAÇÕES		
Significados pretendidos	**Significados declarados**	**Idoneidade**
a) Compreender as relações entre as diferentes representações de uma Função Quadrática.	-Considera-se que os estudantes estabeleceram, de forma parcial, as relações entre as diferentes formas de representação de um mesmo objeto nas situações apresentadas, o que leva a considerar que ainda não tinham se apropriado, de forma adequada dos conceitos envolvendo a temática em estudo. Porém, identificavam e relacionavam adequadamente a representação algébrica, gráfica e tabular.	Média
COMPONENTE RACIOCÍNIO LÓGICO		
Significados pretendidos	**Significados declarados**	**Idoneidade**
a) Observar e analisar a representação gráfica da Função Quadrática no plano cartesiano, buscando justificar o seu crescimento ou decrescimento, bem como o ponto e valores de máximo e de mínimo. b) Analisar o conjunto domínio e imagem no contexto da situação-problema.	- A partir da observação e análise do gráfico da função e dos procedimentos utilizados para determinar valores ou pontos, os estudantes determinaram os intervalos de crescimento ou decrescimento, representaram de diferentes formas o domínio e o conjunto imagem das distintas situações, determinaram as coordenadas do vértice e os analisaram como sendo pontos de máximo ou de mínimo, de acordo com a situação em estudo e sua representação gráfica. - Identificaram e utilizaram pontos representados no gráfico ou em tabelas para a determinação dos	Alta

c) Estabelecer estratégias para determinar a lei de formação de uma Função Quadrática.	coeficientes da função, buscando mostrar a respectiva lei de formação da mesma.	
COMPONENTE LEITURA/INTERPRETAÇÃO		
Significados pretendidos	**Significados declarados**	**Idoneidade**
a) Ler e interpretar, adequadamente, as informações e situações propostas. b) Identificar, compreender e aplicar os conceitos e definições.	- Foram realizadas leituras adequadas do que era solicitado em cada situação-problema abordada. - Percebeu-se que os estudantes conseguiram compreender e aplicar, de forma adequada, os conceitos e definições pertinentes.	Alta
COMPONENTE ANÁLISE/SÍNTESE		
Significados pretendidos	**Significados declarados**	**Idoneidade**
a) Realizar síntese para expressar os conceitos construídos ou revisitados.	- Os estudantes apresentaram dificuldades para realizar as sínteses solicitadas. Foi possível perceber que ainda não tinham desenvolvido habilidades adequadas para realizar um apanhado geral das situações e conceitos abordados, o que fez com que o foco do trabalho novamente se voltasse para essa construção.	Média

Fonte: a pesquisa.

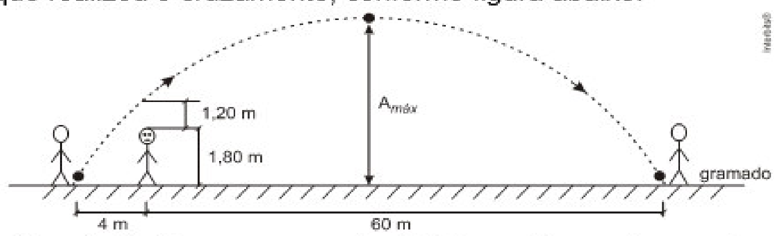
Nas atividades envolvendo situações-problema, os estudantes não apresentaram dificuldades com relação à identificação de características de uma Função Quadrática nas diferentes situações-problema e demais atividades desenvolvidas. Salienta-se que a articulação entre as construções no *software* Geogebra e com lápis e papel permitiram que os estudantes interpretassem e analisassem as características do objeto função, tais como os zeros da função, as coordenadas do vértice, os valores de máximo e de mínimo, se a concavidade da parábola era voltada para cima ou para baixo, os pontos onde o gráfico interceptava os eixos coordenados, o conjunto domínio e imagem e a análise do sinal da função. Destaca-se, também que, de modo geral, os estudantes utilizaram definições e procedimentos adequados às situações, o que permitiu identificar a idoneidade no componente Situações-problema como alta.

Com relação ao componente Linguagens, as soluções apresentadas pelas duplas permitiram considerar que foi atingido um grau alto de idoneidade nesse componente, visto que os estudantes utilizaram diferentes linguagens e representações matemáticas nas situações em estudo, fazendo conversões entre as mesmas, bem como identificaram elementos necessários dentro do próprio registro para a solução das atividades.

O componente Regras alcançou um grau médio de idoneidade, pois nove duplas conseguiram identificar, de forma correta, elementos como os zeros da função, o intercepto y, o domínio da função, e o valor do “xv”, além de pontos pertencentes ao gráfico da função, retirados da representação gráfica. Por meio da aplicação de procedimentos e regras determinaram a lei de formação, o valor do “yv” e o intervalo pertencente ao conjunto imagem, analisando se o mesmo se tratava de um ponto de máximo ou de mínimo. Essas duplas utilizaram as informações já destacadas, juntamente com a fórmula genérica $y = ax^2 + bx + c$, a fórmula fatorada da função quadrática $y = a.(x - x').(x - x'')$ para determinar a lei de formação. Posteriormente, substituíram o valor do “xv”, dentro da lei de formação, para determinar o valor do “yv”, conforme pode ser observado na solução apresentada pela dupla A, em destaque na Figura 58.

Figura 58 – Resolução da dupla A

Em uma partida de futebol, um jogador, estando na lateral do campo, cruzou a bola para um companheiro de equipe o qual se encontrava na lateral oposta, a uma distância de 64 m. A bola passou 1,20 m acima da cabeça de um jogador, com 1,80 m de altura, da equipe adversária, o qual, nesse instante, estava a 4 m de distância do jogador que realizou o cruzamento, conforme figura abaixo.



Nessa situação, a bola descreveu uma trajetória em forma de arco de parábola até tocar o gramado, quando foi dominada pelo companheiro de equipe. Com base nessas informações, responda o que é solicitado.

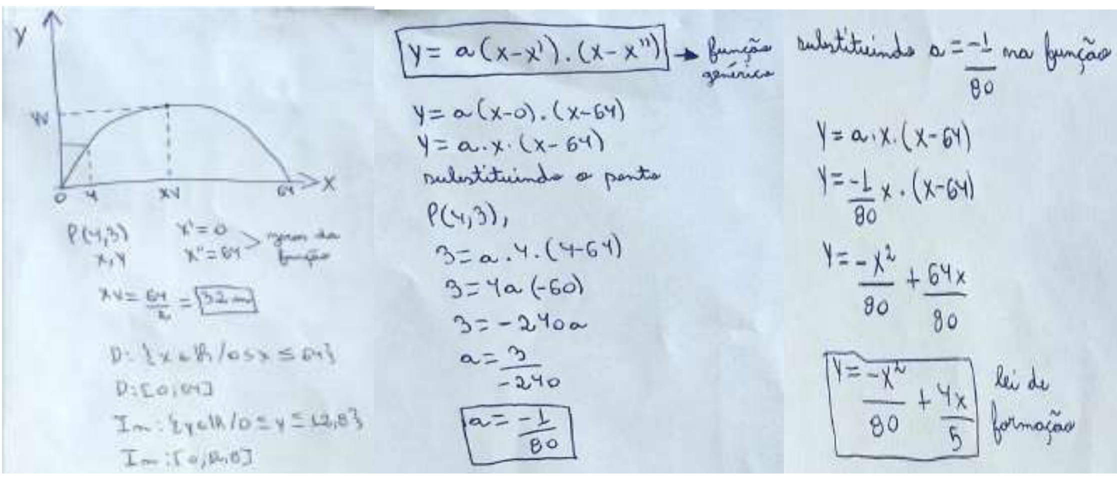
a) Quais são os zeros ou raízes da função no contexto do problema? Justifique como você determinou esses valores?

b) Qual é a distância que a bola percorreu, em relação ao eixo das abscissas, para que a mesma atinja a altura máxima? Justifique como determinou essa distância.

c) Qual é a lei de formação que representa esta situação.

d) Qual é a altura máxima atingida pela bola? Justifique sua resposta.

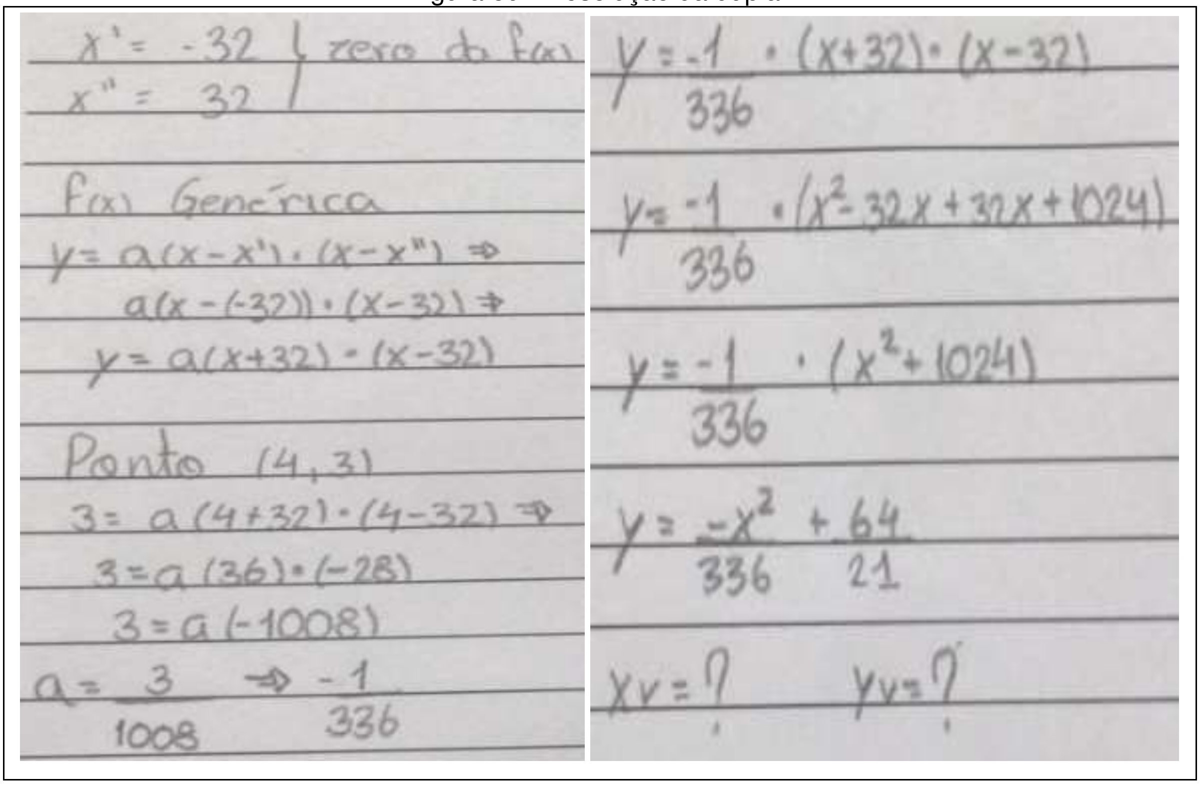
e) Determine o domínio e o conjunto imagem no contexto da situação apresentada. Justifique sua resposta.



Fonte: adaptado de Universidade Federal da Paraíba (2011).

Salienta-se que essa dupla conseguiu resolver, de forma satisfatória, a atividade, o que leva a conjecturar que os mesmos se apropriaram dos conceitos e procedimentos em torno da Função Quadrática. Porém, as duplas D e G cometeram erros na interpretação das informações presentes na representação gráfica e no enunciado da atividade envolvendo um cruzamento de uma bola em um jogo de futebol, o que fez com que apresentassem os cálculos errados, mesmo aplicando as regras e fórmulas adequadas. A Figura 59 apresenta as informações e os cálculos realizados pela dupla D com relação à atividade envolvendo um cruzamento de uma bola em um jogo de futebol.

Figura 59 - Resolução da dupla D

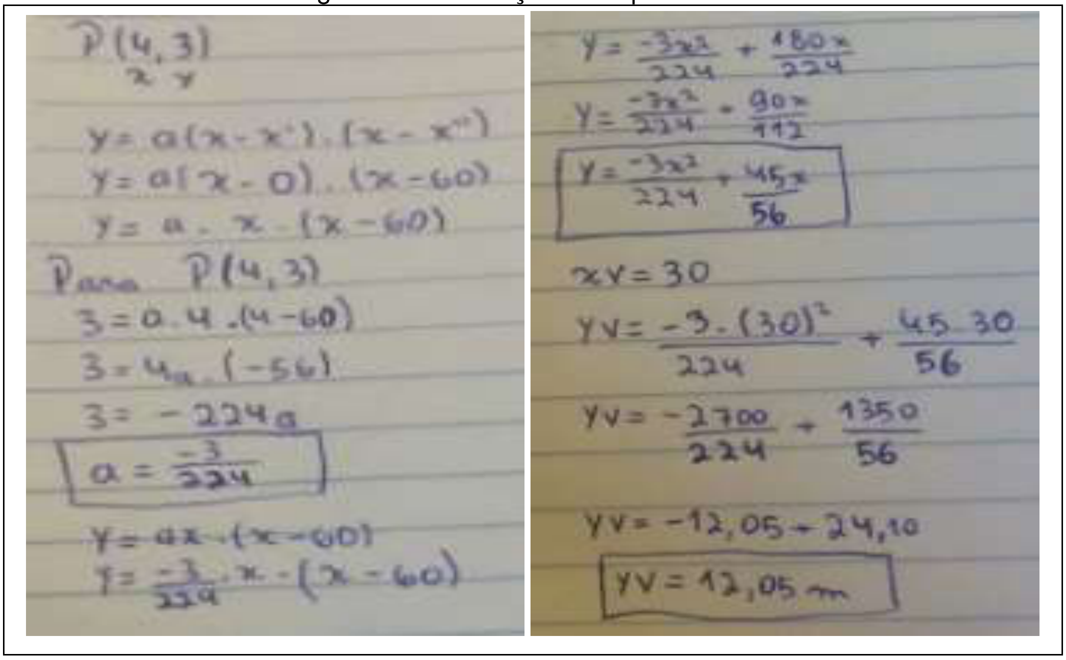


Fonte: dupla D.

Pode-se observar que os mesmos colocaram a origem do plano cartesiano sobre o valor do “xv”, pois atribuíram como raízes da função os valores para x’= -32 e x”= 32. Após, substituíram esses valores, na fórmula fatorada da função quadrática $y = a.(x - x').(x - x'')$ e, juntamente com o ponto P(4,3), determinaram o valor do coeficiente “a” e, posteriormente, encontraram a lei de formação. Porém, a partir desse ponto, não conseguiram determinar o valor da coordenada do vértice e solicitaram o auxílio do professor, que questionou e argumentou em torno dos cálculos apresentados e das informações por eles levantadas, buscando problematizar a situação. Após essa intervenção, a dupla retomou a análise da atividade e os procedimentos para sua solução, mas ainda necessitou do auxílio de outros colegas para terminar a atividade.

Outro erro cometido na análise da situação-problema envolvendo a atividade referente a um cruzamento de uma bola em um jogo de futebol foi da dupla G, o que pode ser observado na Figura 60.

Figura 60 - Resolução da dupla G



Fonte: dupla G.

Esta dupla também cometeu equívocos na interpretação e análise das informações presentes no enunciado e na representação gráfica. Observaram de forma correta o ponto cujas coordenadas são (4, 3), mas determinaram de forma incorreta os zeros da função, x'= 0 e x"= 60. Nesse caso, os estudantes utilizaram a distância do jogador adversário até o jogador que receberia a bola, no caso 60 metros, descontando, assim, da origem da jogada (posição inicial do lançamento) até o companheiro que receberia a bola (posição final) a 4 metros.

Assim, a partir das informações errôneas, realizaram os procedimentos com as regras ou fórmulas matemáticas adequadas e determinaram a lei de formação e o valor do "yv". A dupla apenas percebeu o erro quando comparou a solução por eles encontrada com as de seus colegas e, a partir de discussões com os colegas e com o professor, a dupla retomou os cálculos, apresentando-os de forma correta.

Esses tipos de soluções foram utilizados para análise e discussões com o grupo de estudantes, retomando os conceitos envolvidos, abrindo espaço para os estudantes refletirem e apresentarem argumentos, tendo a oportunidade de atribuir novos significados aos conceitos que estavam sendo trabalhados. Esse espaço de discussão e reflexão foi importante, porque oportunizou aos estudantes analisarem suas soluções, identificarem conceitos, regras e procedimentos adotados e os significados para, então, ressignificarem conceitos e procedimentos.

Com relação ao componente Argumentos, entende-se que alcançou uma média idoneidade, pois foram propostas situações nas quais os estudantes necessitavam argumentar a partir da uma situação-problema dada, seja por meio da discussão de uma propriedade, de uma definição, da lei de formação, ou a partir de um conjunto de ações realizadas por eles para determinar, representar, construir ou argumentar sobre o objeto em estudo. Porém, mesmo que a solução apresentada apontasse para o entendimento do que estava sendo solicitado, não utilizaram argumentos ou justificativas adequadas ao que estava sendo solicitado.

Novamente, como ocorreu com as justificativas ou argumentações durante a implementação do conjunto de atividades envolvendo a Função Afim, os estudantes apresentavam as soluções, por meio da aplicação de procedimentos, algoritmos e regras, conforme pode ser observado nas respostas dadas pela dupla A (Figura 60), nas quais se percebe que eles determinaram as raízes, o conjunto domínio da situação, um ponto pertencente ao gráfico e a coordenada do “xv” por meio da observação e interpretação do gráfico da situação problema, bem como realizaram os procedimentos para determinar a lei de formação e o valor do “yv”. Porém, não justificaram suas respostas, nem apresentaram uma argumentação para as interpretações por eles realizadas.

Ao serem questionados sobre os motivos pelos quais não estavam justificando suas respostas, os componentes dessa dupla (dupla A) salientaram que:

> Nós sabemos o que está acontecendo e entendemos todos os cálculos, acertamos todas as questões que fizemos, então não precisamos responder isso, se já sabemos o que é.

Após esse relato, foram realizadas discussões, no grande grupo, referentes à importância de se construir e apresentar uma argumentação consistente e não somente aplicar regras e algoritmos. Após essa discussão, os estudantes retomaram as atividades que não tinham sido respondidas e buscaram completá-las com as justificativas adequadas.

Considera-se que o componente Relações alcançou uma idoneidade média, pois os estudantes presentaram dificuldades com relação à compreensão da forma simbólica e a relação da mesma com outras representações, bem como na análise do sinal da função em situações contextualizadas. Mas conseguiram compreender e relacionar, de forma adequada, os zeros da função, as coordenadas do vértice, os pontos de máximo e de mínimo, o domínio e o conjunto imagem, o ponto de intersecção com o eixo das ordenadas, o crescimento e o decrescimento da função e a lei de formação, bem como estabeleceram relações pertinentes entre esses conceitos e a representação algébrica, tabular e gráfica das situações apresentadas.

Entende-se que o grau de idoneidade alcançado no componente cognitivo Raciocínio Lógico foi alto, visto que os estudantes puderam observar, interpretar, analisar, inferir, conjecturar e apresentar argumentos em torno dos entendimentos e procedimentos adotados referentes à solução das distintas situações-problema enfrentadas. Por meio das distintas construções realizadas para representar cada situação, eles tiveram a oportunidade de ir comparando e comprovando suas ideias e entendimentos do objeto em estudo.

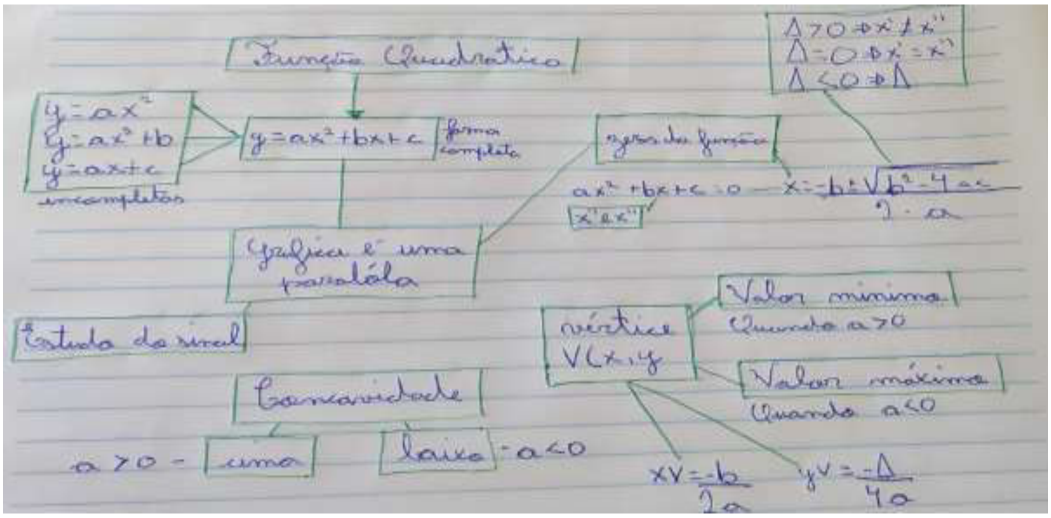
Outro fator que contribuiu para um bom trabalho relacionado ao desenvolvimento das habilidades relacionadas ao raciocínio lógico foi a realização de discussões, no grande grupo, sobre questões que geraram conflitos, retomando e refazendo os passos necessários para a negociação de significados, compreensão e superação das dificuldades por eles enfrentadas, o que se constituiu em um espaço colaborativo, onde os estudantes puderam discutir, argumentar e ressignificar conceitos, além de retomar aspectos procedimentais necessários para a solução desse tipo de questão.

No que se refere ao componente Leitura/Interpretação, entende-se que foi atingido um grau alto de idoneidade, visto que os estudantes não apresentaram significativas dificuldades de interpretação dos enunciados das atividades e que a linguagem empregada estava adequada ao nível em que os mesmos se encontravam. Ressalta-se que eles percebiam e identificavam quando as diferentes formas de representação de uma função se referiam ao mesmo objeto matemático em estudo. Dessa forma, não apresentaram dificuldades relevantes no que diz respeito às situações de expressão matemática e de interpretação, nas quais era necessário pensar, analisar, refletir e inferir sobre as informações contidas no enunciado do problema ou retirar informações, por meio das diferentes formas de representar uma função, para se chegar a uma solução ou a uma argumentação adequada.

Com relação ao componente Análise/Síntese, o grau de idoneidade foi considerado médio. Mesmo que os estudantes já tivessem enfrentado situações que exigissem a realização de sínteses (como no trabalho com a Função Afim), ainda não conseguiam sintetizar e elencar, de forma adequada, todas as características, conceitos, propriedades e procedimentos envolvendo a Função Quadrática. Destaca-se que, mesmo que o conjunto de atividades encaminhasse para soluções utilizando particularizações, generalizações e relações entre os objetos matemáticos, os estudantes apresentaram dificuldades em realizar uma síntese geral dos conceitos e procedimentos envolvidos no estudo da Função Quadrática.

Por outro lado, um fato que chamou a atenção foi a utilização de esquemas, pela grande maioria das duplas, para apresentar as sínteses solicitadas, conforme pode ser observado na Figura 61. Conjectura-se que esse fato se deve, em grande parte, ao material didático adotado pela Escola que, no final de cada capitulo, apresenta um mapa conceitual do tema em estudo. Assim, pode-se dizer que os estudantes se basearam em tais mapas para realizar as atividades envolvendo sínteses. Embora, inicialmente, a proposta da realização de sínteses tivesse ficado em aberto, ou seja, cada dupla optaria pela melhor forma de apresentá-las, o uso dos mapas conceituais foi bastante pertinente e possibilitou discussões muito adequadas no grande grupo.

Figura 61 - Síntese realizada pelo grupo M



Fonte: a pesquisa.

No esquema acima, grande parte dos conceitos, ideias, noções e fórmulas matemáticas foram apresentados, porém não foram abordados a intersecção da parábola com o eixo das ordenadas, a inequação do segundo grau e a inequação do produto e do quociente, além de não detalharem o estudo do sinal da função.

Como se trata de um mapa conceitual, não é uma questão de certo ou errado, mas do entendimento e visão da dupla que o realizou. Essa e outras produções foram utilizadas para a análise e discussões no grande grupo, onde foi possível retomar e aprofundar os conceitos envolvidos. Ao término das discussões e reflexões, as duplas retomaram as atividades relacionadas a sínteses, ampliando seus esquemas de forma satisfatória. Esses momentos de discussões permitiram perceber que os estudantes puderam ampliar e aprofundar ideias, conceitos e procedimentos relacionados ao objeto matemático Função Quadrática, consolidando significados já atribuídos, bem como atribuindo novos significados.

6.3 FUNÇÃO EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA: UMA ANÁLISE DAS IDONEIDADES EPISTÊMICA, MEDIACIONAL E COGNITIVA

De acordo com o Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 2002), as funções exponencial e logarítmica são utilizadas para descrever e representar a variação de duas grandezas em que o crescimento da variável independente é muito rápido. Suas aplicações referem-se, principalmente, na matemática financeira, ao crescimento de populações, pH de substâncias. O documento explicita, também, que a resolução de equações logarítmicas e exponenciais pode ter sua ênfase diminuída ou suprimida dependendo das condições e dos objetivos traçados.

Para Adami et. al (2015), as funções Exponenciais e Logarítmicas são modelos, ideias para descrever, matematicamente, fenômenos na natureza, como o crescimento de seres vivos, a desintegração radioativa, o crescimento populacional, o nível da intensidade sonora, a medida do pH de substâncias e a magnitude de um terremoto, sendo úteis, também, em assuntos relacionados a finanças.

O material de estudo que trata, especificamente, das Funções Exponencial e Logarítmica foi planejado e estruturado levando-se em consideração o que preconizam os documentos oficiais, pesquisas da área e o currículo da escola. Teve por objetivo retomar, aprofundar e desenvolver ideias, noções, definições e conceitos associadas a essa temática, bem como procedimentos associados à resolução de situações, sempre que possível, contextualizadas e relacionadas a distintas áreas do conhecimento.

Do conjunto de atividades desenvolvidas no âmbito do estudo da Função Exponencial e Logarítmica serão destacadas atividades representativas do trabalho desenvolvido. De modo geral, as atividades desenvolvidas tinham por objetivo:

- analisar e identificar situações as quais pudessem ser representadas, matematicamente, por uma função exponencial ou logarítmica;
- resolver situações-problemas envolvendo funções exponencial e logarítmica;
- utilizar diferentes linguagens e formas de representação para a Função Exponencial e Logarítmica;
- a construção e interpretação de tabelas e gráficos, de acordo com a situação-problema enfrentada;
- identificar e analisar o crescimento e decrescimento de uma função a partir de situações contextualizadas;
- interpretar e determinar o domínio e conjunto imagem, de acordo com a situação abordada;
- análise e interpretação das variações de uma função em relação aos eixos coordenados;
- aplicar a Função Exponencial e Logarítmica em diferentes situações intramatemáticas e extramatemáticas;
- analisar as relações entre a função logarítmica e a exponencial.

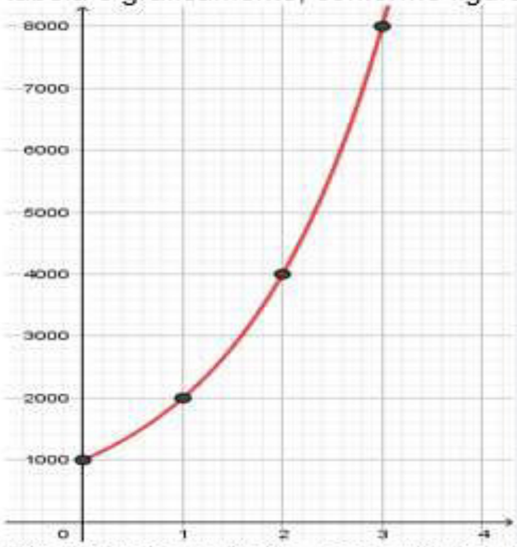
Na sequência, será apresentada a análise epistêmica do conjunto de atividades envolvendo a Função Exponencial e Logarítmica.

6.3.1 Função Exponencial e Logarítmica: Análise da Idoneidade Epistêmica

Do conjunto de situações-problema envolvendo as Funções Exponencial e Logarítmica destaca-se, na Figura 62, uma situação que aborda o número de bactérias em um meio nutriente homogêneo, a qual é apresentada em língua natural e nas representações gráfica e tabular. Busca-se desenvolver os significados institucionais de referência do objeto em estudo, relacionados ao entendimento do tipo de situação que pode ser expressa por uma função exponencial, leitura, análise e interpretação de gráficos e tabelas, identificação do ponto de intersecção com o eixo das ordenadas e seu significado no contexto do problema, o crescimento ou decrescimento da função, bem como o estabelecimento do conjunto domínio e imagem no contexto da situação apresentada, justificando os mesmos.

Figura 62 - Atividade envolvendo a população de bactérias

Amostras de uma população de bactérias, em um meio nutriente homogêneo, foram tomadas em intervalos de tempo e foi constatado, após a análise dos dados, que a população dobra a cada hora. Esses dados foram representados por meio de uma tabela e graficamente, conforme figuras a seguir.



	A	B
1		
2		
3	t	p(t)
4	0	1000
5	1	2000
6	2	4000
7	3	8000
8	4	16000
9	5	25000
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		

Observando os dados apresentados, responda:

a) Qual o número inicial de bactérias? Justifique sua resposta.

b) A população de bactérias está diminuindo ou aumentando e como esse crescimento ou decrescimento está ocorrendo. Justifique sua resposta.

c) A função população ou lei de formação pode ser expressa por: Justifique sua resposta.

d) Represente os intervalos de existência do domínio e da imagem nessa situação. Justificando sua resposta.

Fonte: adaptado de Stewart (2016).

Por meio da atividade busca-se, também, que relações sejam estabelecidas entre as diferentes formas de se comunicar e representar uma função e sejam apresentados argumentos em torno da justificativa e das conclusões encontradas a partir das análises solicitadas e dos procedimentos adotados.

Já a atividade apresentada, na Figura 63, aborda uma situação envolvendo a Função Logarítmica, na qual é apresentado um problema envolvendo a invasão da superfície de um lago por uma planta aquática nociva, sendo a mesma apresentada na língua natural e pela representação tabular. A partir da atividade, são abordados noções, conceitos e definições relacionados aos significados de referência indicados pelo currículo da escola e pelos documentos oficiais vigentes relacionados ao entendimento de situações que podem ser expressas por meio de uma Função Logarítmica, construção e análise gráfica, o crescimento ou decrescimento da função e seu significado no contexto do problema, estabelecimento do conjunto domínio e imagem da situação apresentada, justificando os mesmos, bem como a utilização de procedimentos, regras e definições relacionados ao conteúdo de exponencial e logaritmo.

Figura 63 - Atividade envolvendo o decrescimento de uma planta aquática

A superfície de um lago, que tem $1km^2$ de área, foi totalmente invadida por uma planta aquática nociva a peixes e répteis. Misturou-se à água um inibidor de crescimento, que reduziu a área ocupada pela planta em 50% ao mês.

a) Na tabela abaixo, determine os valores de a, b, c, d, que correspondem à área ocupada pela planta ao final de cada mês, a partir do momento atual, registrado pelo tempo zero.

Tempo (mês)	0	1	2	3	4	...
Área (km^2)	1	a	b	c	d	...

b) Observando os dados acima, os valores estão aumentando ou diminuindo. Justifique sua resposta.

c) Indicando por x a área ocupada pela planta daqui a y meses, elabore uma lei que expresse y em função de x.

d) Construa o gráfico da função e explique o seu significado no contexto da situação em estudo.

e) Determine o conjunto domínio e imagem no contexto do problema, explicando o seu significado.

Fonte: adaptado de Paiva (2010).

Essas duas atividades contextualizadas, relacionadas às Funções Exponencial e Logarítmica, possibilitam que os estudantes retomem, utilizem e desenvolvam conceitos, definições e noções relacionados à matematização, a abstração e a formalização, tal como destacado nos níveis de compreensão do conceito de função propostos por Bergeron e Herscovics (1982).

Reitera-se o entendimento de Godino (2011) sobre a necessidade de se apresentar aos estudantes atividades, preferencialmente contextualizadas, que permitam que sejam desenvolvidos conhecimentos relacionados aos temas abordados e possibilitando que os mesmos consigam transitar pelos diferentes significados e formas de registros, como caminho para apropriação de conhecimentos.

Já em Godino et. al (2006), encontra-se o argumento de que, na prática escolar as configurações epistêmicas (conjuntista, tabular, gráfica e analítica) geralmente não aparecem simultaneamente nas atividades propostas aos estudantes, sejam elas intramatemáticos ou extramatemáticos, porém é necessário que se proponham situações as quais relacionem essas configurações de forma a possibilitar que os estudantes desenvolvam as noção que envolvem o conceito de função. Levando em consideração esses aspectos, foi desenvolvido um conjunto de objetos de aprendizagem relacionados às Funções Exponencial e Logarítmica para serem utilizados em associação com os objetos criados no software Geogebra.

Assim, buscou-se, por meio dos distintos objetos de aprendizagem, a identificação das diferentes funções, o estudo do comportamento das mesmas, a análise e a interpretação das transformações que ocorrem na representação gráfica quando se alteram os parâmetros nas leis de formação. Os objetos desenvolvidos permitiram que os estudantes explorassem as translações vertical e horizontal, a compressão ou dilatação vertical e horizontal e a reflexão em relação ao eixo das abcissas e ordenadas. Pondera-se, também, que a utilização de um recurso tecnológico permite diferentes formas de representação, possibilitando aos estudantes manipular as construções, observar e analisar as modificações no comportamento das funções, estabelecendo relações e as características pertinentes.

Considera-se que a criação de diferentes objetos de aprendizagem no software Geogebra, os quais exploravam as funções em suas diferentes bases, seus paramentos, o crescimento e decrescimento, os intervalos de existência do conjunto domínio e imagem, bem como as variações dos gráficos, permitindo a visualização e o estabelecimento de relações entre a representação algébrica e a gráfica, tabular e simbólica, estabeleceu um espaço de trabalho que, em muito, contribuiu para que os estudantes se apropriassem de conceitos, definições e procedimentos envolvendo as Funções Exponencial e Logarítmica.

Na Figura 64, apresentam-se quatro objetos de aprendizagem relacionados à Função Exponencial de base dois, os quais possibilitavam a exploração da mudança dos parâmetros, o crescimento ou decrescimento da função e o conjunto domínio e imagem, bem como a argumentação e justificação em torno dos mesmos.

Figura 64 - Exemplo de Atividades envolvendo Função Exponencial

Objeto1

1- O que podemos observar na função quando somamos ou subtraímos um valor “k” ao expoente “x” da função $y=2^{x+k}$, para $k\in \mathbb{R}$.

2- As funções são crescentes ou decrescentes? Justifique.

3- Qual é o domínio e o conjunto imagem das funções? Justifique.

Objeto 2

1- O que podemos observar na função quando multiplicamos um valor “K” ao expoente “x” da função $y=2^{x.k}$, para $k\in \mathbb{R}$ e $K\neq 0$.

2- As funções são crescentes ou decrescentes? Justifique.

3- Qual é o domínio e o conjunto imagem das funções? Justifique.

Objeto 3

1- O que podemos observar na função quando somamos ou subtraímos uma constante K na função $y=2^x +k$, para $k\in \mathbb{R}$.

2- As funções são crescentes ou decrescentes? Justifique.

3- Qual é o domínio e o conjunto imagem das funções? Justifique.

Objeto 4

1- O que podemos observar na função quando somamos ou subtraímos um valor “k” ao expoente “x” da função $y=(1/2)^{x+k}$, para $k\in \mathbb{R}$.

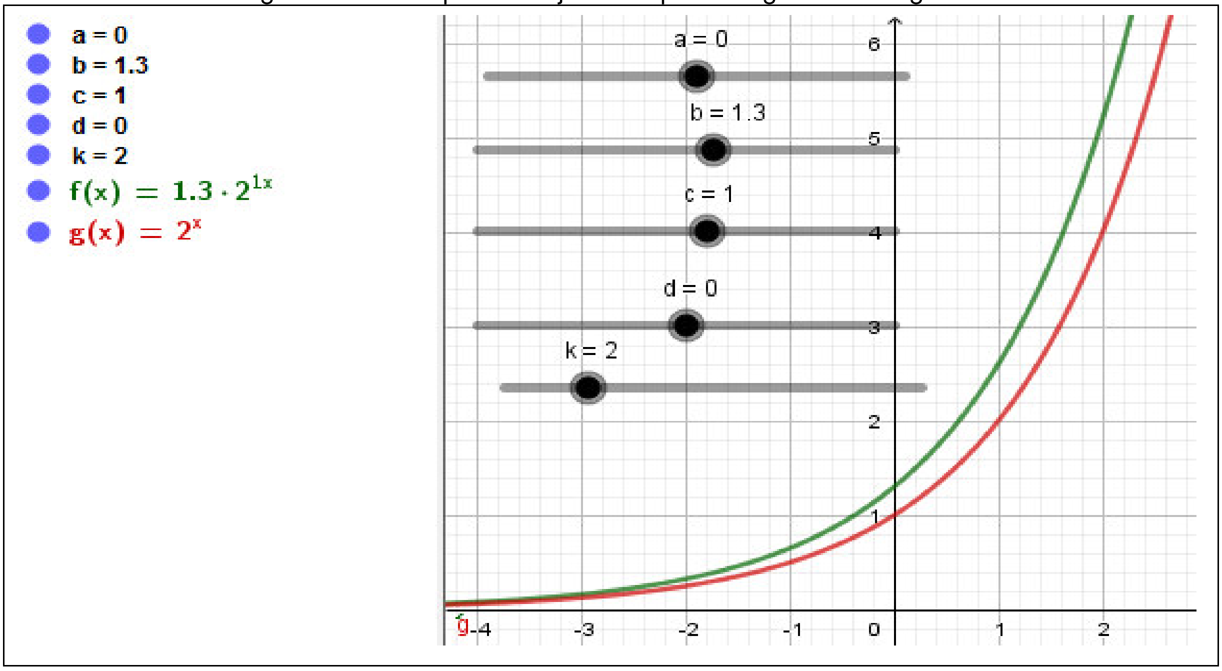
2- As funções são crescentes ou decrescentes? Justifique.

3- Qual é o domínio e o conjunto imagem das funções? Justifique.

Fonte: o autor.

A atividade em destaque, apresenta os Objetos 1, 2, 3 e 4 está associada a um Objeto de Aprendizagem criado no Geogebra e que pode ser observado na Figura 65. No objeto, os estudantes podem mudar os valores dos parâmetros da função, por meio dos controles deslizantes, e analisar as mudanças/variações que ocorrem no gráfico, bem como compará-lo com o gráfico base de cada modelo ou base utilizada.

Figura 65 - Exemplo de Objeto de aprendizagem do Geogebra



Fonte: o autor.

Outra atividade semelhante à apresentada está relacionada a Função Logarítmica (Figura 66), sendo que os conceitos abordados são análogos aos da Função Exponencial permitindo, também, que os estudantes analisem e observem as variações as quais podem ocorrer a partir da alteração de parâmetros. Para esta atividade também foi criado um Objeto de Aprendizagem no Geogebra, que possibilita aos estudantes explorarem as características, conceitos, definições e procedimentos relacionados à Função Logarítmica, análogo ao trabalho desenvolvido com a Função Exponencial.

Figura 66 - Exemplo de Atividades envolvendo Função Logarítmica

Objeto 7
1- O que podemos observar na função quando somamos ou subtraímos uma constante K na função y=$k + \log_2 x$, para k∈ $\mathbb{R}$.
2- As funções são crescentes ou decrescentes? Justifique.
3- Qual é o domínio e o conjunto imagem das funções? Justifique.
Objeto 8
1- O que podemos observar na função quando somamos ou subtraímos um valor "k" ao expoente "x" da função y=$\log_2(x + k)$, para k∈ $\mathbb{R}$.
2- As funções são crescentes ou decrescentes? Justifique.
3- Qual é o domínio e o conjunto imagem das funções? Justifique.
Objeto 9
1- O que podemos observar na função quando multiplicamos um valor "K" ao expoente "x" da função y=$\log_2(x.k)$, para k∈ $\mathbb{R}$ e K≠ 0.
2- As funções são crescentes ou decrescentes? Justifique.
3- Qual é o domínio e o conjunto imagem das funções? Justifique.
Objeto 10
1- O que podemos observar na função quando somamos ou subtraímos uma constante K na função y=$k + \log_{1/2} x$, para k∈ $\mathbb{R}$.
2- As funções são crescentes ou decrescentes? Justifique.
3- Qual é o domínio e o conjunto imagem das funções? Justifique.

Fonte: o autor.

Entende-se que esses objetos de aprendizagem permitem que seja estudado o comportamento da função, por meio da movimentação, e das diferentes formas de representação de um objeto, como já destacado, permitindo, também, que sejam desenvolvidos aspectos relacionados aos níveis de compreensão do conceito de função propostos por Bergeron e Herscovics (1982), referentes à matematização, abstração e formalização.

As situações apresentadas se constituem em exemplos do conjunto de situações utilizadas para o estudo da Função Exponencial e Logarítmica, as quais envolveram estudos relacionados ao crescimento populacional, abalos sísmicos, a juros compostos, substâncias radioativas, bem como outras situações ligadas ao cotidiano, ao trabalho ou a outras áreas do conhecimento. Salienta-se, novamente, que o projeto de estudo como um todo buscou atender e desenvolver os significados de referência estabelecidos pela instituição onde a investigação foi implementada.

Apresentam-se, na Figura 67, os componentes e indicadores epistêmicos evidenciados, no conjunto de atividades, envolvendo as Funções Exponencial e Logarítmica, com o indicativo do grau de idoneidade. Tal análise foi realizada a partir das práticas desenvolvidas com a aplicação da proposta, pois, como já destacado, embora a proposta tenha sido concebida considerando os pressupostos da Idoneidade Epistêmica, sua aplicação e desenvolvimento junto aos estudantes é que permitiu estabelecer o grau de idoneidade da mesma nos diferentes componentes.

Figura 67 - Análise Epistêmica: Função Exponencial e Logarítmica

COMPONENTE SITUAÇÕES-PROBLEMA		
Indicadores	**Indicadores evidenciados**	**Idoneidade**
a) apresenta-se uma mostra representativa e articulada de situações de contextualização, exercícios e aplicações; b) propõem-se situações de generalização de problemas (problematização).	- Apresentou-se um conjunto significativo de situações contextualizadas ligadas ao cotidiano, ao trabalho ou às áreas do conhecimento, as quais objetivavam desenvolver noções, conceitos, definições e procedimentos ligados às funções em estudo. - No que se refere à generalização, foram propostas distintas situações que possibilitavam aos estudantes conjecturarem, justificarem, deduzirem, e estabelecerem relações e leis de formação, identificando características e propriedades das funções em estudo.	Alta
COMPONENTE LINGUAGEM		
Indicadores	**Indicadores evidenciados**	**Idoneidade**
a) uso de diferentes modos de expressão matemática (verbal, gráfica, simbólica), tradução e conversão entre as mesmas; b) nível de linguagem adequado aos estudantes; c) propõem situações de expressão matemática e interpretação.	- Foi possível identificar a presença das diferentes formas de representação e a conversão entre as mesmas, possibilitando que fossem exploradas as características inerentes aos registros. - A linguagem utilizada estava adequada ao nível dos estudantes, sendo apresentada na forma da língua natural e representações algébrica, simbólica, tabular e gráfica.	Alta
COMPONENTE REGRAS		
Indicadores	**Indicadores evidenciados**	**Idoneidade**
a) as definições e procedimentos são claros e corretos e estão adaptados ao nível educativo a que se dirigem; b) apresentam-se enunciados e procedimentos fundamentais do tema para o nível educativo dado; c) proposta de situações nas quais os estudantes tenham que generalizar ou negociar definições, proposições ou procedimentos.	- Foi desenvolvida a definição das funções envolvidas, buscando a utilização de distintos procedimentos ou regras para solucionar cada situação apresentada. Buscou-se, também, o estabelecimento do domínio, conjunto imagem, a intersecção com os eixos, crescimento e decrescimento, os intervalos onde as funções estão definidas. - Os enunciados eram claros e objetivos, apresentando a situação em estudo e conduzindo os estudantes para a solução das mesmas. - Nas atividades, os conceitos, definições e procedimentos foram trabalhados de forma clara e de acordo com o nível educativo dos estudantes. - O estudo de noções, ideias, conceitos e procedimentos foi desenvolvido por meio de distintas atividades em que os estudantes tiveram que observar, analisar, conjecturar, concluir e avaliar, buscando regularidades, particularidades e generalizações.	Alta
COMPONENTE ARGUMENTOS		
Indicadores	**Indicadores evidenciados**	**Idoneidade**
a) as explicações, comprovações e demonstrações são adequadas ao nível educativo a que se dirigem;	- As explicações, comprovações e demonstrações presentes nos distintos materiais disponibilizados seguiam o rigor matemático e estavam adequados ao nível a que foram destinadas. - Mesmo que tenha sido apresentado um grande conjunto de atividades nas quais os estudantes necessitavam observar, relacionar, analisar e avaliar, eles nem sempre precisavam argumentar ou	Média

b) promovem-se situações nas quais os estudantes tenham que argumentar.	justificar o que estava sendo perguntado ou explorado. - Entende-se que seria pertinente apresentar um conjunto maior de atividades inéditas, relacionadas à realidade dos estudantes, as quais possibilitassem uma percepção maior da realidade em que estão inseridos.	
COMPONENTE RELAÇÕES		
Indicadores	**Indicadores evidenciados**	**Idoneidade**
a) os objetos matemáticos (problemas, definições, proposições) se relacionam e se conectam entre si.	- Considera-se que foi possível estabelecer relações entre os diferentes conceitos, definições e procedimentos ligados às funções Exponencial e Logarítmica, possibilitando, também, que os estudantes transitassem pelas diferentes formas de representação de um mesmo objeto e pudessem analisar todas as características de cada uma das formas de representação.	Alta

Fonte: a pesquisa.

Como ocorreu com as funções já analisadas (Afim e Quadrática), no trabalho com as Funções Exponencial e Logarítmica, os componentes e indicadores epistêmicos estiveram presentes nas atividades contextualizadas e objetos de aprendizagem propostos, embora nem sempre todos estivessem presentes em uma mesma atividade. Destaca que, embora o conjunto de tarefas tenha sido concebido buscando-se um grau máximo de idoneidade em cada um dos componentes da Idoneidade Epistêmica, a dinâmica do trabalho evidenciou fragilidades em determinados aspectos, conforme pode ser observado nas análises realizadas.

Com relação às Situações-problema (exemplos de atividades destacadas nas Figuras 62, 63, 64), considerou-se o grau de representatividade como sendo alto, pelo fato de que os conceitos, noções, definições e procedimentos em torno das Funções Exponencial e Logarítmica foram devidamente explorados, seja por meio de atividades, particularmente as envolvendo objetos de aprendizagem, exercícios ou situações-problema contextualizadas ou não.

Com relação ao componente Regras, a idoneidade atingida foi alta, visto que todas as definições, procedimentos, conceitos e formas de representação foram explorados de diferentes formas e em diferentes situações. Destacam-se, aqui, os objetos de aprendizagem associados ao software Geogebra, os quais possibilitaram que os estudantes explorassem as características, conceitos e definições relacionadas a cada uma das funções.

Com relação a Linguagens, considerou-se a idoneidade alta, tendo em vista que foram utilizadas a linguagem natural e as representações algébrica, gráfica, tabular e simbólica nas mais diversas atividades. Essas diferentes formas de representação foram exploradas considerando as conversões em diferentes sentidos, possibilitando, também, que os estudantes pudessem explorar características internas de cada tipo de registro. Destaca-se, ainda, que a linguagem utilizada estava adequada aos estudantes e que não foi deixado de lado o rigor matemático necessário para a apresentação de procedimentos e nas análises das Funções Exponenciais e Logarítmicas.

O componente Argumentos atingiu uma idoneidade média, uma vez que as atividades desenvolvidas buscavam relacionar conceitos e definições, bem como explorar e identificar as relações existentes entre as diferentes formas de representação dos objetos em estudo. Porém, atividades que tinham um caráter mais procedimental, mesmo exigindo conhecimentos sobre o tema, nem sempre desafiavam aos estudantes a apresentarem justificativas, explicações ou entendimentos. Considera-se importante para o desenvolvimento de argumentação justificada que o número de atividades somente procedimentais seja reduzido, abrindo espaço para tarefas que permitam ao estudante expor seus conhecimentos com maior profundidade.

Já o componente Relações foi considerado com representatividade alta, pois entende-se que as atividades apresentadas proporcionavam o estudo de distintas relações entre os conceitos, definições, procedimentos, relações e representações dos objetos matemáticos Função Exponencial e Logarítmica, o que permitiu que os estudantes transitassem com maior segurança e flexibilidade entre as mesmas, identificando as características da situação-problema ou atividade que estariam enfrentando.

6.3.2 Função Exponencial e Logarítmica: Análise da Idoneidade Mediacional

Para o estudo das temáticas Função Exponencial e Logarítmica foi desenvolvido um conjunto de objetos de aprendizagem e de situações-problema contextualizadas intramatemáticos e extramatemáticos, bem como o uso de recursos didáticos como vídeos do YouTube, material em PowerPoint, construções no software Geogebra e com lápis e papel, além de problemas resolvidos. A utilização desses recursos, em sintonia, visava retomar, aprofundar e desenvolver noções, conceitos, definições e procedimentos, propiciando diferentes abordagens e estratégias, buscando contemplar as especificidades dos estudantes, os quais poderiam optar por caminhos e recursos que julgassem pertinentes ao seu modo de estudo. Em todo o processo, a ideia foi buscar desenvolver um trabalho participativo e colaborativo entre os mesmos, sem deixar de lado os momentos de interverção do professor.

No quadro da Figura 68, apresentam-se os componentes e indicadores mediacionais evidenciados no conjunto de atividades envolvendo as Funções Exponencial e Logarítmica, juntamente com o indicativo da idoneidade que se julgou pertinente.

Figura 68 - Síntese da análise Mediacional

COMPONENTE RECURSOS DIDÁTICOS		
Indicadores	**Indicadores evidenciados**	**Idoneidade**
a) evidencia-se a presença de materiais adequados ao desenvolvimento do processo de ensino e adaptados ao nível educativo a que se dirigem; b) há uma diversificação de recursos para auxiliar no processo de ensino, tais como: audiovisuais, material concreto, livros, entre outros; c) propõe-se a organização e experimentação de situações práticas.	- O material desenvolvido e apresentado está adequado ao nível educativo dos estudantes, com o uso da linguagem de acordo com o nível a que se destina, sem perder o rigor matemático necessário. - Foram utilizadas, de forma mais abrangente em sala de aula, os recursos do Geogebra, os objetos de aprendizagem, as construções com lápis e papel e as situações-problema. -As situações práticas propostas envolveram o uso dos recursos do *software* Geogebra e os objetos de aprendizagem, onde foram propostas situações de simulação do comportamento das funções em estudo.	Alta
COMPONENTE TEMPO DIDÁTICO		
Indicadores estabelecidos	**Indicadores evidenciados**	**Idoneidade**
a) apresentam-se situações de ensino que contemplam diversas modalidades (estudo pessoal, cooperativo, tutorial, presencial); b) evidencia-se a organização do tempo para intervenção docente, trabalho autônomo dos estudantes e momentos de discussão; c) dedica-se um tempo maior para o desenvolvimento dos conhecimentos, caso os estudantes apresentem dificuldade de compreensão.	- O material desenvolvido poderia ser utilizado nos diversos ambientes da escola e mesmo fora dela, tanto individualmente como em pequenos ou grandes grupos. - Durante a realização de uma atividade ou de um conjunto delas, sempre que era necessário, ocorria a intervenção docente e, ao término das mesmas, ocorriam momentos de discussão, reflexão e negociação dos significados postos em jogo. - Os estudantes que apresentavam dificuldades na compreensão dos conceitos e procedimentos eram acompanhados pelo professor e tinham a oportunidade de discutir com colegas, o que oportunizava retomarem e ressignificarem conceitos.	Alta

Fonte: a pesquisa.

Percebe-se que os componentes e indicadores mediacionais foram contemplados no material elaborado para o estudo das Funções Exponencial e Logarítmica. Já com relação ao componente recursos, considerou-se a idoneidade alta, privilegiando-se o uso de objetos de aprendizagem juntamente com o software Geogebra (exemplo no quadro da Figura 69) e construções com lápis e papel, permitindo, assim, que os estudantes pudessem manipular, realizar construções, visualizar o objeto em estudo em diferentes perspectivas, interpretar e validar suas observações.

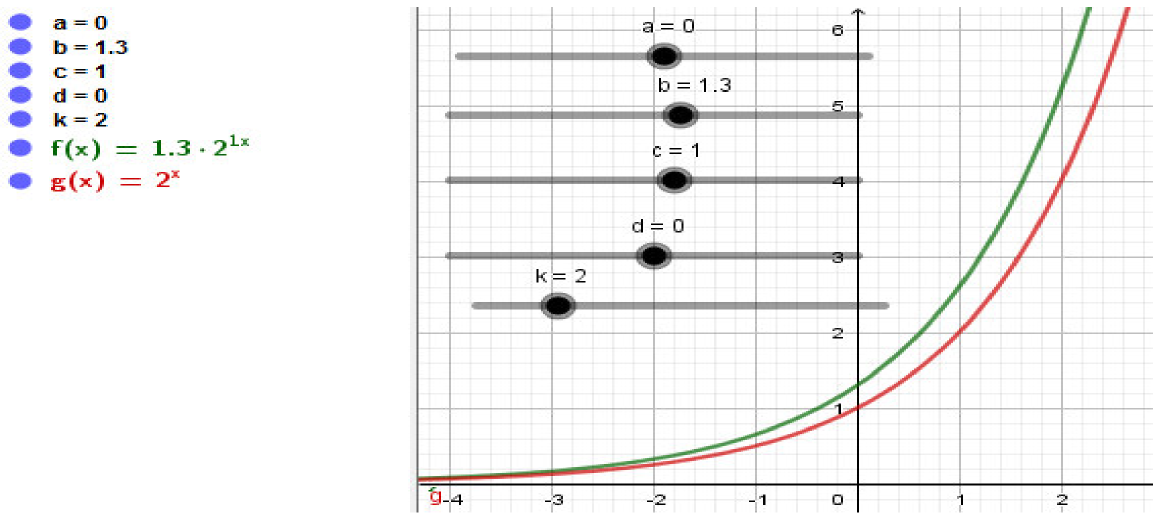
Figura 69 – Exemplo de um objeto de aprendizagem envolvendo a Função Exponencial

Objeto1
1- O que podemos observar na função quando somamos ou subtraímos um valor “k” ao expoente “x” da função $y=2^{x+k}$, para $k \in \mathbb{R}$.
2- As funções são crescentes ou decrescentes? Justifique.
3- Qual é o domínio e o conjunto imagem das funções? Justifique.

Objeto 2
1- O que podemos observar na função quando multiplicamos um valor “K” ao expoente “x” da função $y=2^{x.k}$, para $k \in \mathbb{R}$ e $K \neq 0$.
2- As funções são crescentes ou decrescentes? Justifique.
3- Qual é o domínio e o conjunto imagem das funções? Justifique.

Objeto 3
1- O que podemos observar na função quando somamos ou subtraímos uma constante K na função $y=2^x +k$, para $k \in \mathbb{R}$.
2- As funções são crescentes ou decrescentes? Justifique.
3- Qual é o domínio e o conjunto imagem das funções? Justifique.

Objeto 4
1- O que podemos observar na função quando somamos ou subtraímos um valor “k” ao expoente “x” da função $y=(1/2)^{x+k}$, para $k \in \mathbb{R}$.
2- As funções são crescentes ou decrescentes? Justifique.
3- Qual é o domínio e o conjunto imagem das funções? Justifique.



Fonte: o autor.

Os objetos de aprendizagem foram elaborados levando em consideração todas as possíveis variações referentes às Funções Exponencial e Logarítmicas, ou seja, os deslocamentos na vertical e na horizontal, permitindo, assim, que os estudantes analisassem as mudanças no comportamento do gráfico, em quais intervalos o gráfico está definido, bem como fizessem a análise e interpretação do conjunto domínio e imagem. Estes objetos, juntamente com os construídos no *software* Geogebra, permitiram e possibilitaram a exploração das características dessas funções. Por meio da manipulação dos controles deslizantes, os estudantes observavam as mudanças que ocorriam em relação ao eixo x e y em cada representação gráfica da função em estudo.

Portanto, esses dois objetos, em consonância, possibilitavam aos estudantes trabalhar com diferentes representações gráfica, algébrica e a tabular, o que permitia que os mesmos realizassem conversões, observando as relações entre os diferentes registros de representação, buscando identificar um mesmo objeto matemático a partir dos mesmos, estudando as características de cada representação, compreendendo o papel de cada parâmetro dentro da função.

Para se trabalhar de diferentes formas, referindo-se a um mesmo objeto matemático, se lançou mão, também, de outros recursos e procedimentos, como a construção com lápis e papel, atividades resolvidas, vídeos de diferentes canais do *YouTube*, materiais teóricos no *PowerPoint* e um conjunto de situações problema contextualizadas intramatemáticos e extramatemáticos. Todos esses recursos buscavam desenvolver a autonomia dos estudantes, utilizando outros espaços fora do ambiente escolar para estudar, desenvolver a colaboração em pequeno como em grande grupo, sempre destacando as diferentes situações e fenômenos relacionados às Funções Exponencial e Logarítmica nas mais variadas áreas e situações.

Salienta-se que foi uma opção utilizar o Geogebra para trabalhar com situações práticas, considerando os objetivos do currículo da escola, o material didático adotado e o tempo previsto para o desenvolvimento dos temas a serem estudados. Portanto, foi necessário fazer escolhas com relação a quais recursos seriam utilizados em quais momentos das aulas.

No que se refere ao componente Tempo Didático, considera-se que a idoneidade alcançada foi alta, pois os materiais selecionados e desenvolvidos para o estudo das Funções Exponencial e Logarítmica possibilitavam aos estudantes exercitarem a autonomia, respeitando o ritmo de aprendizagem. Salienta-se, também, que os estudantes os quais apresentavam maior dificuldade na compreensão e apropriação dos conhecimentos eram acompanhados pelo professor e tinham a oportunidade de discutir com seus colegas, sendo dado um tempo maior para os mesmos realizarem as atividades, de acordo com o seu ritmo e no seu tempo, retomando, sempre que pertinente, conceitos, definições e procedimentos necessários para a compreensão do objeto em estudo.

Por fim, considera-se que a análise dos recursos utilizados ou disponibilizados permitiu refletir sobre as potencialidades e fragilidades dos materiais produzidos em torno das Funções Exponencial e Logarítmica. Sendo que as principais potencialidades estão relacionadas aos objetos de aprendizagem desenvolvidos, que possibilitaram um estudo aprofundado das funções. Por outro lado, as fragilidades estiveram relacionadas à falta de t tempo adequado para desenvolver um trabalho com situações práticas relacionadas ao cotidiano dos estudantes mais aprofundadas, devido ao currículo da escola e o material utilizada pela mesma.

6.3.3 Função Exponencial e Logarítmica: Análise da Idoneidade Cognitiva

Visando compreender o processo de aprendizagem, os conflitos e os diferentes significados atribuídos aos objetos pelos estudantes durante o estudo da Funções Exponencial e Logarítmica, foi realizada uma análise cognitiva, por meio dos componentes e indicadores da Ferramenta de Análise Cognitiva e Epistêmica, buscando, assim, elementos que evidenciem o que os mesmos compreenderam e significaram a partir das diferentes formas de abordar o conteúdo em estudo.

Na Figura 70, apresenta-se cada componente utilizado na Análise Cognitiva, identificando os significados pretendidos e os evidenciados a partir do desenvolvimento da proposta e da análise do conjunto de atividades com os quais os estudantes trabalharam ao longo do estudo. Também é apresentado o indicativo do grau de idoneidade que se julgou pertinente.

Figura 70 - Síntese da análise Cognitiva

COMPONENTE SITUAÇÕES-PROBLEMA		
Significados pretendidos	**Significados declarados**	**Idoneidade**
a) Identifica,r nas situações-problema propostas nos diferentes contextos intramatemáticos e extramatemáticos relacionados, as Funções Exponencial e Logarítmica. b) Resolver situações-problema e exercícios utilizando conceitos, definições e procedimentos relativos às Funções Exponencial e Logarítmica.	- Os estudantes não apresentaram dificuldades relativas à identificação das Funções Exponencial e Logarítmica em diferentes contextos, bem como de suas características e propriedades nas diferentes situações propostas. - A grande maioria conseguiu resolver corretamente as situações propostas, por meio da utilização de definições e conceitos adequados, bem como por meio de procedimentos matemáticos que já dispunham ou estavam em construção.	Alta
COMPONENTE LINGUAGEM		
Significados pretendidos	**Significados declarados**	**Idoneidade**

a) Identificar e reconhecer o uso de diferentes modos de expressão matemática e realizar a tradução e conversão entre as mesmas. b) Reconhecer e utilizar a linguagem matemática adequada a cada situação.	- Os estudantes identificaram e utilizaram as diferentes formas de representação ou expressão matemática e realizaram a conversão entre as mesmas, de forma adequada, principalmente entre a algébrica, gráfica e tabular. - Utilizaram diferentes formas de representar o domínio e o conjunto imagem e os intervalos de crescimento ou decrescimento, de acordo com a situação em estudo, porém, em alguns casos, os estudantes tiveram dificuldade de estabelecer, de forma correta, no contexto da situação-problema. - Utilizaram a linguagem adequada a cada situação proposta.	Alta
COMPONENTE REGRAS (DEFINIÇÕES, PROPOSIÇÕES, PROCEDIMENTOS)		
Significados pretendidos	**Significados declarados**	**Idoneidade**
a) Reconhecer o que caracteriza as Funções Exponencial e Logarítmica. b) Identificar situações envolvendo o crescimento e o decrescimento das Funções Exponencial e Logarítmica. c)Representar, graficamente e por meio de tabelas, as Funções Exponencial e Logarítmica, e a partir das representações, analisar as variações que ocorrem nas funções, de acordo com as mudanças em seus parâmetros e no valor da base. d) Identificar o conjunto domínio e imagem em situações contextualizadas ou não envolvendo as Funções Exponencial e Logarítmica	- Considera-se que os estudantes reconheciam as características das Funções Exponencial e Logarítmica, bem como seus elementos. - Compreenderam e representaram, de forma correta, o crescimento ou decrescimento das funções. - Não houve dificuldades na representação gráfica e tabular e, a partir das mesmas, estabeleceram, de forma correta, o conjunto do domínio, porém apresentaram, nas atividades iniciais, dificuldades na compreensão do conjunto imagem. - Apresentaram algumas dificuldades em procedimentos matemáticos relacionados aos conceitos e definições em torno dos conteúdos exponencial e logaritmo necessários para o estudo das Função Exponencial e Logarítmica.	Alta
COMPONENTE ARGUMENTOS		
Significados pretendidos	**Significados declarados**	**Idoneidade**
a) Identificar e justificar os conjuntos domínio e imagem na situação-problema. b) Identificar e justificar o crescimento e decrescimento de uma função, tanto pela representação algébrica, tabular ou gráfica, levando em consideração o contexto da situação-problema.	- Os estudantes identificaram e representavam, matematicamente, o conjunto domínio e imagem, porém não justificaram, de forma adequada, por vezes, o que tais conjuntos ou intervalos representavam em cada situação. - Não apresentaram dificuldades em identificar e analisar o crescimento ou decrescimento a partir de uma representação algébrica, gráfica ou tabular. - Em algumas atividades, as justificativas ou análises eram frágeis, não apresentavam o rigor matemático que se espera para esse nível de ensino e, em outras, não apresentavam as justificativas, tal como solicitado.	Média
COMPONENTE RELAÇÕES		
Significados pretendidos	**Significados declarados**	**Idoneidade**
a) Compreender as relações entre as diferentes representações das Funções Exponencial e	-Considera-se que os estudantes estabeleceram relações entre as diferentes formas de representação de um mesmo objeto nas situações apresentadas,	Média

Logarítmica e transitar entre as mesmas. b) Compreender que, nas Funções Exponencial e Logarítmica, uma é inversa da outra.	principalmente entre as representações algébricas, gráficas e tabular e transitaram entre as mesmas. - Conseguiram identificar e analisar as características das funções dentro de um mesmo registro. - Apresentaram dificuldades em transitar entre as Funções Exponencial e Logarítmica, compreendendo que uma é inversa da outra.	
COMPONENTE RACIOCÍNIO LÓGICO		
Significados pretendidos	**Significados declarados**	**Idoneidade**
a) Observar e analisar a representação algébrica, gráfica e tabular das Funções Exponencial e Logarítmica, buscando justificar o seu crescimento ou decrescimento e analisar o conjunto domínio e imagem em cada situação. b) Estabelecer estratégias para utilizar procedimentos adequados para resolver cada atividade.	- A partir das observações e interpretações nas diferentes formas de representação os estudantes justificaram o crescimento ou decrescimento das funções e representaram o domínio e o conjunto imagem das distintas situações. - Utilizaram procedimentos para resolver as atividades propostas. - Identificaram os coeficientes das funções e compreenderam as mudanças que ocorrem, de acordo com a variação dos mesmos e da base em que se está trabalhando.	Alta
COMPONENTE LEITURA/INTERPRETAÇÃO		
Significados pretendidos	**Significados declarados**	**Idoneidade**
a) Ler e interpretar adequadamente as informações e situações propostas. b) Identificar e compreender os conceitos e definições em cada situação de forma adequada.	- Os estudantes realizaram leituras adequadas referentes ao que era solicitado em cada situação problema. - Percebeu-se que eles conseguiram compreender, adequadamente os conceitos e definições aplicados em diferentes contextos e situações.	Alta
COMPONENTE ANÁLISE/SÍNTESE		
Significados pretendidos	**Significados declarados**	**Idoneidade**
a) Realizar síntese para expressar os conceitos construídos ou revisitados.	- Os estudantes continuaram apresentando dificuldades para realizar as sínteses solicitadas. Foi possível perceber que avançaram durante o estudo das diferentes funções, porém não conseguiam elencar todos os conceitos, definições e propriedades pertinentes a cada função.	Média

Fonte: a pesquisa.

Por meio da análise realizada, foi possível atribuir um alto grau de idoneidade didática para o componente Situações-problema, visto que os estudantes utilizaram definições, conceitos e procedimentos adequados às situações. Outro fato que contribuiu para se atingir tal idoneidade foi o estudo em torno das Funções Exponencial e Logarítmica ter sido realizado a partir de um conjunto distinto de objetos de aprendizagem, os quais eram utilizados associados aos objetos de aprendizagem construídos no Geogebra, permitindo que fossem exploradas as características de cada uma das funções, modificações nos parâmetros e no valor das bases, possibilitando que os estudantes analisassem e compreendessem todas as variações nessas funções e as identificassem em suas diferentes formas de representação, comunicação e utilização.

De modo geral, os estudantes, utilizaram conceitos, definições e procedimentos adequados às situações, conforme pode ser observado na solução apresentada pela dupla C, em destaque na Figura 71.

Figura 71 – Resolução da dupla C

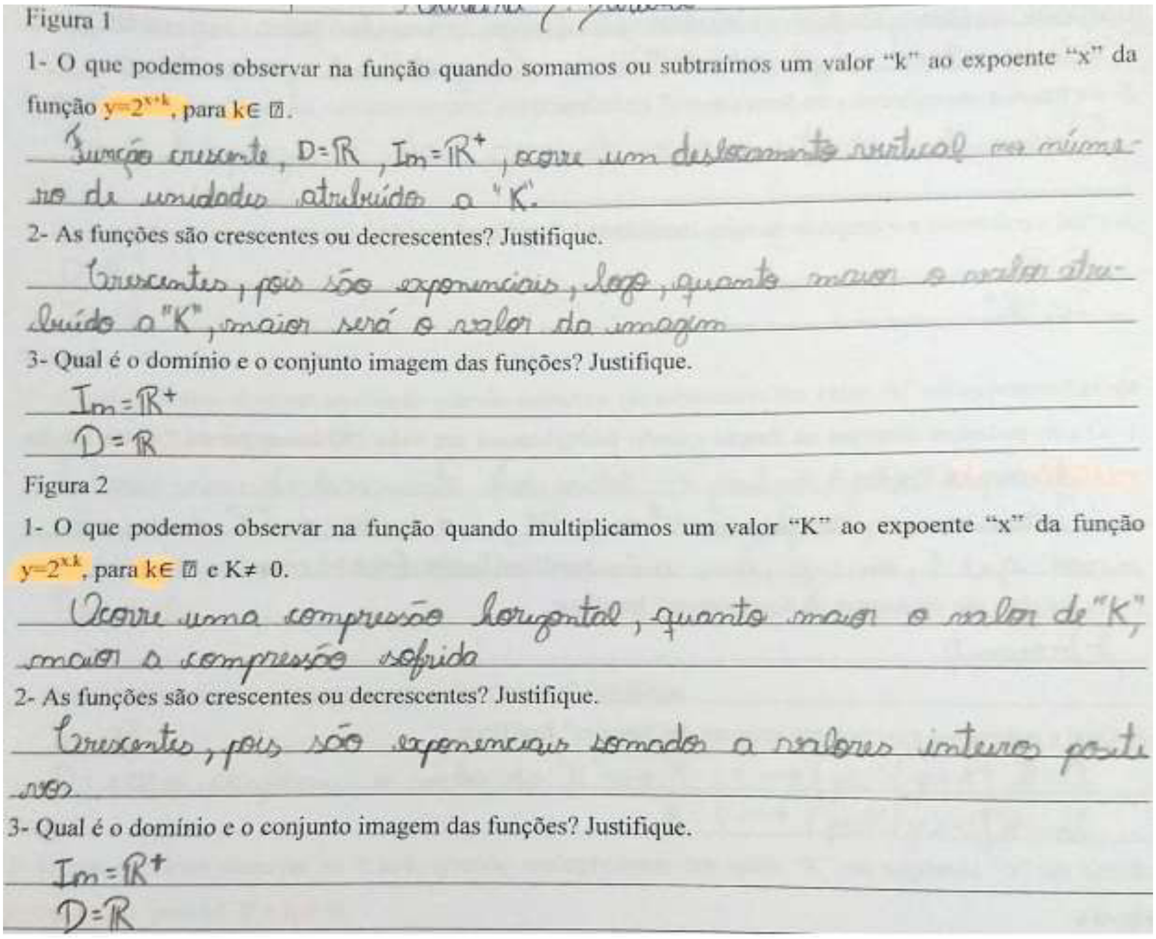


Figura 1

1- O que podemos observar na função quando somamos ou subtraímos um valor "k" ao expoente "x" da função $y=2^{x+k}$, para k∈ ▯.

Função crescente, D=ℝ, Im=ℝ⁺, ocorre um deslocamento vertical no número de unidades atribuído a "K".

2- As funções são crescentes ou decrescentes? Justifique.

Crescentes, pois são exponenciais, logo, quanto maior o valor atribuído a "K", maior será o valor da imagem

3- Qual é o domínio e o conjunto imagem das funções? Justifique.

Im=ℝ⁺

D=ℝ

Figura 2

1- O que podemos observar na função quando multiplicamos um valor "K" ao expoente "x" da função $y=2^{x.k}$, para k∈ ▯ e K≠ 0.

Ocorre uma compressão horizontal, quanto maior o valor de "K", maior a compressão sofrida

2- As funções são crescentes ou decrescentes? Justifique.

Crescentes, pois são exponenciais somados a valores inteiros positivos

3- Qual é o domínio e o conjunto imagem das funções? Justifique.

Im=ℝ⁺

D=ℝ

Fonte: a pesquisa.

Os estudantes, a partir da utilização do objeto de aprendizagem construído no Geogegra, podiam movimentar os controles deslizantes, de acordo com o que era solicitado na atividade e, a partir dessa movimentação, observavam as alterações dos valores dos parâmetros e seus efeitos sobre a representação algébrica e gráfica. Podiam, assim, identificar se a função era crescente ou decrescente, os intervalos de existência do domínio e conjunto imagem, entre outros.

Salienta-se que esse procedimento também foi aplicado no estudo da Função Logarítmica conforme, pode ser observado na solução apresentada pela dupla H, em destaque na Figura 72.

Figura 72 – Resolução da dupla H

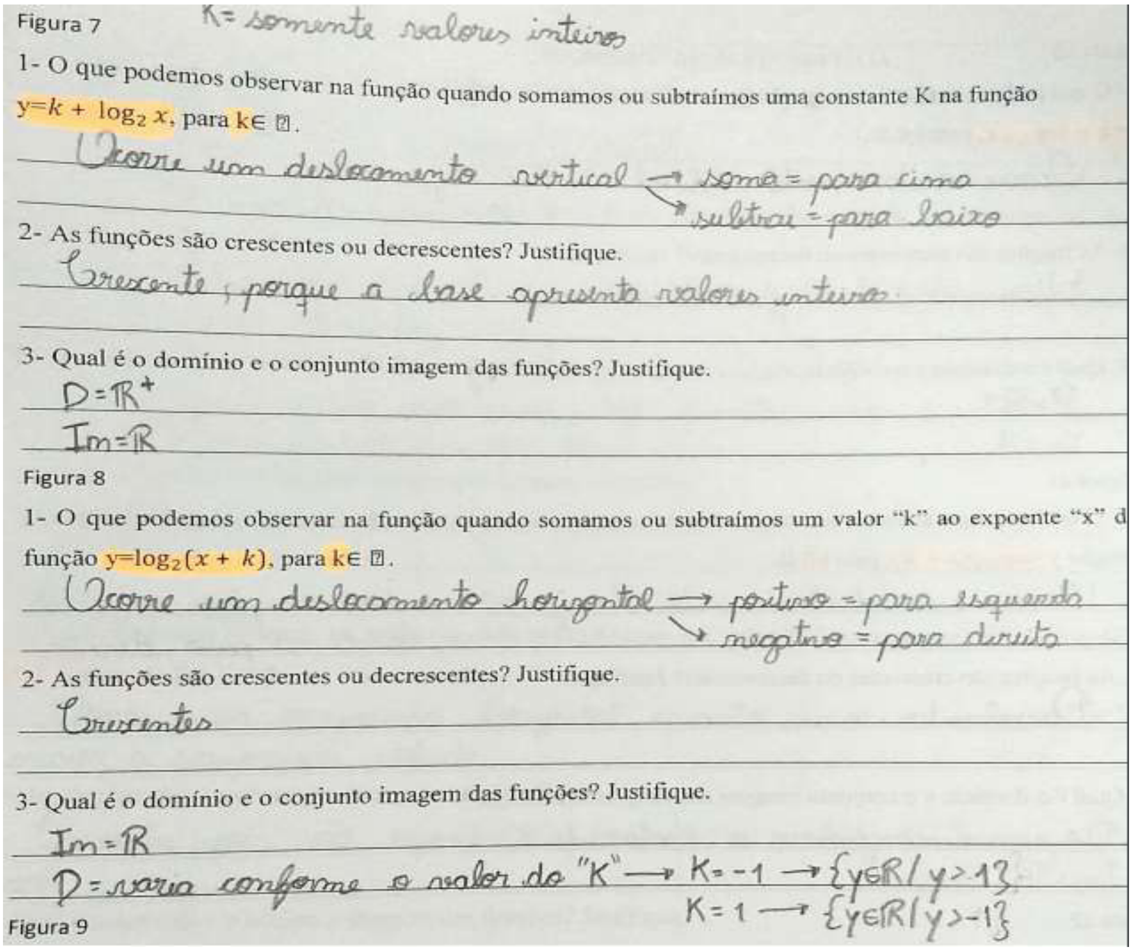


Figura 7 K= somente valores inteiros

1- O que podemos observar na função quando somamos ou subtraímos uma constante K na função $y=k+\log_2 x$, para k∈ ?.

Ocorre um deslocamento vertical → soma = para cima
→ subtrai = para baixo

2- As funções são crescentes ou decrescentes? Justifique.

Crescente, porque a base apresenta valores inteiros.

3- Qual é o domínio e o conjunto imagem das funções? Justifique.

$D=\mathbb{R}^+$

$Im=\mathbb{R}$

Figura 8

1- O que podemos observar na função quando somamos ou subtraímos um valor "k" ao expoente "x" d função $y=\log_2(x+k)$, para k∈ ?.

Ocorre um deslocamento horizontal → positivo = para esquerda
→ negativo = para direita

2- As funções são crescentes ou decrescentes? Justifique.

Crescentes

3- Qual é o domínio e o conjunto imagem das funções? Justifique.

$Im=\mathbb{R}$

D = varia conforme o valor do "K" → $K=-1 \rightarrow \{y\in\mathbb{R} / y>1\}$
$K=1 \rightarrow \{y\in\mathbb{R} / y>-1\}$

Figura 9

Fonte: a pesquisa.

Percebe-se, pelas respostas, que os estudantes conseguiram articular diferentes procedimentos, conceitos e definições para resolver e analisar as questões propostas, utilizando diferentes formas de representação ou expressão matemática e realizando conversão entre as mesmas, de forma adequada, principalmente entre a algébrica, gráfica e tabular. Também representaram adequadamente o domínio e o conjunto imagem, o crescimento ou decrescimento, de acordo com a situação em estudo, que levou a considerar, ainda, o componente Linguagens com alta idoneidade.

O componente Regras alcançou um grau alto de idoneidade, visto que os estudantes não apresentaram dificuldades em reconhecer características das funções exponencial e logarítmica. Eles identificaram, compreenderam e representaram, de forma correta, o crescimento ou decrescimento das funções, representaram, adequadamente, a representação gráfica e tabular e, a partir das mesmas, estabeleceram corretamente o conjunto do domínio. Porém, nas atividades iniciais, apresentaram dificuldades na compreensão do conjunto imagem, o qual foi superado no decorrer da realização das atividades.

Ressalta-se que dificuldades surgiram nas situações-problema contextualizadas nas quais os estudantes necessitavam utilizar conceitos e definições de exponencial e logaritmo e transitar entre eles, ou seja, utilizar um logaritmo para resolver uma exponencial ou vice-versa, conforme pode ser observado na resolução apresentada pela da dupla I (Figura 73) na atividade envolvendo a populações de dois vilarejos, A e B.

Figura 73 – Resolução da dupla I

Suponha que as populações de dois vilarejos, A e B variam de acordo com as funções $f(t) = 2^{t+2} + 75$ e $g(t) = 2^{t+1} + 139$, em que t é o tempo, em anos, após o início do estudo e as expressões f(t) e g(t) fornecem o número de indivíduos dos vilarejos A e B, respectivamente.

a) Construa uma tabela de valores para cada função e faça a respectiva representação gráfica.

b) No início da pesquisa, quais eram as populações das reservas A e B, respectivamente?

c) Passados quantos anos as duas reservas terão o mesmo número de habitantes? E qual será o número de habitantes.

d) Qual das funções apresenta um crescimento maior? Justifique sua resposta.

e) As funções são crescentes ou decrescentes? Justifique.

f) Determine o conjunto domínio e imagem de cada função. O que esses intervalos representam em cada uma das situações.

g) Calcule a taxa média de variação de cada uma das funções f e g, quanto t varia de dois a quatro anos.

c) $2^{t+2}+75=2^{t+1}+139$

$2^t+2^2+75=2^t+2^1+139$

$2^t+4+75=2^t+2+139$

$2^t+79=2^t+141$

$2^t=141-79$

$2^t=62?$

$$\begin{array}{r|l} 62 & 2 \\ 31 & 31 \end{array}$$

Fonte: adaptado de Paiva (2010).

Os estudantes não apresentaram dificuldades relevantes com relação aos itens a) e b) da atividade, porém observa-se que, na solução da questão item c), a dupla I iniciou o procedimento de forma adequada, igualando as duas funções f(t) e g(t), contudo, a partir desse passo, utilizaram definições e procedimentos equivocados relacionados ao conteúdo exponencial. Entende-se, assim, que os estudantes não tinham assimilado, de forma adequada, os significados de referência ligados aos conteúdos de exponencial e logaritmo. A partir da solução apresentada pelos estudos da dupla I, foram realizadas discussões e retomadas as definições e conceitos envolvendo o conteúdo de Exponencial para, posteriormente, retomar as atividades propostas.

Considera-se que essas formas equivocadas de atribuir significado aos conceitos devem ser retomadas, disponibilizando-se recursos e espaços para que as mesmas sejam resinificadas, sem deixar de lado o tempo necessário que cada estudante precisa para relacionar, adequadamente, os diferentes conceitos, definições e procedimentos envolvidos.

O componente Argumentos alcançou uma média idoneidade, visto que os estudantes ainda não justificavam todas as suas respostas ou davam uma resposta muito simples, sem um rigor matemático adequado. Porém, os mesmos avançaram com relação a esse quesito, se comparado com as situações propostas e analisadas nas Funções Afim e Quadrática, as quais muitas eram deixadas em branco. Entende-se que essas mudanças se devem ao fato de se ter trabalhado com os objetos de aprendizagem, os quais possibilitavam que os estudantes realizassem observações, mudassem os parâmetros e, consequentemente, as representações gráficas, a partir dos quais poderiam argumentar em torno do que estava ocorrendo em cada caso.

Novamente, as justificativas apresentadas pelos grupos foram utilizadas para discussões e reflexões no grande grupo e, após os diálogos, os estudantes retomaram as atividades. Destaca-se, contudo, que duas duplas, A e L, não refizeram as atividades, pois entendiam que não era necessário esse tipo de trabalho, argumentando que sabiam e compreendiam o que ocorria com as funções e como deveriam fazer para realizar os cálculos e construções solicitadas. Ao término da colocação desses grupos, o professor retomou a importância de se desenvolver a argumentação e a importância que a mesma tinha dentro do trabalho que estava sendo desenvolvido.

Já o componente Relações alcançou uma idoneidade média, pois os estudantes conseguiram relacionar, de forma adequada, determinados conceitos e definições envolvendo as Funções Exponencial e Logarítmica, principalmente no que diz respeito ao domínio e conjunto imagem, além do crescimento ou decrescimento nas distintas atividades. Todavia, os mesmos apresentaram muitas dificuldades de compreender que as Funções Exponencial e Logarítmica são inversas umas das outras, sendo necessário utilizar conceitos e definições de exponencial e logaritmo para resolver uma situação-problema.

Em relação ao componente cognitivo Raciocínio Lógico, entende-se que alcançou um grau alto de idoneidade, já que os estudantes puderam observar, analisar, inferir, conjecturar e provar seus entendimentos e procedimentos referentes à solução das distintas atividades contextualizadas ou não enfrentadas. O trabalho desenvolvido em duplas e as discussões no grande grupo contribuíram para uma melhor compreensão e aplicação de procedimentos adequados, de acordo com a situação em estudo, permitindo, assim, que os estudantes pudessem discutir e argumentar, resinificando muitos conceitos e definições.

No que se refere ao componente Leitura/Interpretação, entende-se que foi alcançado um alto grau de idoneidade, porque a linguagem utilizada estava adequada ao nível dos estudantes e as diferentes formas de representação das funções se referiam ao mesmo objeto matemático em estudo. Dessa forma, os estudantes não apresentaram dificuldades relevantes no que diz respeito às situações de expressão matemática e de interpretação, nas quais era necessário se apropriar do que estava sendo posto, analisar, refletir e inferir sobre as informações contidas no enunciado dos problemas ou atividades para se chegar a uma solução ou conclusão.

Quanto ao componente Análise/Síntese, o grau de idoneidade foi médio. Mesmo que as atividades encaminhassem soluções, tanto referentes à particularização como generalização, além de relações entre os objetos matemáticos, de forma específica ou ampla, os estudantes continuaram a apresentar dificuldades na realização das sínteses dos conceitos e definições abordados com relação às Funções Exponencial e Logarítmica.

As sínteses produzidas foram utilizadas para análise e discussões no grande grupo, retomando os conceitos e definições envolvidos. Ao término das discussões e reflexões, as duplas retomaram as atividades relacionadas a sínteses.

Novamente, como em todo o estudo das diferentes funções abordadas na proposta, entende-se que os estudantes apresentaram dificuldades na realização desse tipo de tarefa, devido à falta de hábito de fazer um apanhado geral do que tinha sido abordado e em muitos casos, os mesmos não queriam realizar esse tipo de construção, conforme pode ser observado no relato do estudante EE1.

> Tudo que precisamos saber está nos materiais e na apostila que temos, nela já tem um resumo de tudo sobre as funções, se estamos desenvolvendo as atividades, sabemos o que precisamos usar.

Esses momentos de discussões permitiram retomar novamente a importância de realizar esse tipo de trabalho, conseguindo elencar todos os conceitos, definições, e regras, o que facilita a compreensão do tema em estudo e ajuda na memorização de cada característica abordada, permitindo que os estudantes ampliem e aprofundem ideias, noções, conceitos, definições, regras e procedimentos relacionados às Funções Exponencial e Logarítmica, consolidando significados já atribuídos, bem como atribuindo novos significados ao objeto em estudo.

6.4 FUNÇÕES: UMA ANÁLISE DAS IDONEIDADES ECOLÓGICA, INTERACIONAL E EMOCIONAL DA PROPOSTA

A fim de se obter dados que possam fornecer elementos os quais qualifiquem a proposta de trabalho envolvendo as Funções, julgou-se pertinente e necessário lançar um olhar não só para aspectos epistemológicos, mediacionais e cognitivos, mas também para as interações, o ambiente educacional, as relações estabelecidas em um processo de ensino e aprendizagem, bem como outros elementos internos e externos ao meio, que influenciam diretamente ou indiretamente na aprendizagem dos estudantes.

Assim, na sequência, são apresentados elementos da análise produzida por meio dos critérios, componentes e indicadores das Ferramentas de Análise Ecológica, Interacional e Emocional. Como já explicitado, a análise produzida a partir desses componentes, refere-se a ao desenvolvimento da proposta como um todo, desde sua organização, aplicação e avaliação.

6.4.1 Análise da Idoneidade Ecológica

Buscando uma melhor compreensão da influência do currículo, da escola e da sociedade sobre os processos de ensino e aprendizagem e das rotinas de sala de aula, entendeu-se que, por meio da Análise Ecológica, poder-se-ia ter uma melhor interpretação do grau de adequação do material desenvolvido sobre Funções, frente aos significados de referência institucionais, ou seja, o que está posto nos documentos oficiais e preconizado pelo currículo da escola. Pensando nesses aspectos, foram utilizados os componentes e indicadores da Ferramenta de Análise Ecológica para realizar a análise da proposta, como pode ser observado na Figura 74.

Figura 74 - Análise Ecológica da Proposta envolvendo Funções

ESCOLA		
Indicadores	**Indicadores evidenciados**	**Idoneidade**

a) espaço de desenvolvimento e aprendizagem envolvendo experiências contempladas nesse processo (aspectos culturais, cognitivos, afetivos, sociais e históricos); b) constitui-se em espaço que possibilita o uso de metodologias, recursos diversificados e tecnologia; c) ambiente que incentiva a formação de valores e pensamento crítico.	- A proposta poderia ter contemplado mais aspectos sociais, afetivos cognitivos e buscar, por meio das situações-problema, que os estudantes pudessem ter uma visão mais aprofundada de problemas sociais e do trabalho, que os auxiliassem a se tornarem cidadãos conscientes de suas responsabilidades sociais. - Considera-se que a proposta contempla a utilização de diferentes metodologias e recursos diversos, principalmente no que se refere ao uso das tecnologias digitais, lousa digital, por meio de animações no PowerPoint, aplicações no *software* Geogebra, bem como a manipulação de objetos tradicionais como lápis, papel e régua para a representação de gráficos e tabelas. - Quanto à formação de valores e pensamento crítico, entende-se que as atividades propostas tiveram essa característica, pois muitas das situações-problema abordadas envolviam aspectos do cotidiano e do trabalho possibilitando, momentos de reflexão por parte dos estudantes.	Média
CURRÍCULO		
Indicadores	**Indicadores evidenciados**	**Idoneidade**
a) o ensino está adaptado às orientações da escola, aos documentos oficiais; b) apresentam-se situações de problematização e contextualização, realizando conexões com outros conteúdos; c) valoriza-se a pluralidade cultural dos alunos; d) os conteúdos e a avaliação atendem as diretrizes curriculares; e) o ensino é coerente ao nível educativo a que se dirige;	- O material foi planejado levando-se em consideração o que preconiza o currículo e o Plano Político Pedagógico da escola, bem como as indicações que constam nos documentos oficiais. -Buscou-se abordar situações de contextualização, nas quais foi possível estabelecer conexões e relações dentro do próprio conteúdo e com os de outras áreas do conhecimento. - Com relação à avaliação, a mesma ocorreu durante todo o processo de estudo e estava orientada de acordo com as normas institucionais, as quais permitem que distintos modelos avaliativos sejam empregados. As dificuldades e problemas enfrentados pelos estudantes que surgiam durante o processo eram tratadas por eles próprios e/ ou orientados pelo professor. - A proposta levava em consideração o nível educativo para o qual estava dirigida, bem como a diversidade de conhecimentos dos estudantes.	Alta
SOCIEDADE		
Indicadores	**Indicadores evidenciados**	**Idoneidade**
a) percebe-se a valorização de aspectos da vida dos estudantes no ambiente escolar; b) percebe-se a presença da comunidade no processo de escolarização promovida pela escola.	- Percebe-se que a escola estabelece uma relação de proximidade com a comunidade escolar e essa busca estar presente em momentos específicos do processo formativo dos estudantes (projetos e reuniões de atendimento aos pais), valorizando-os e os incentivando-os para que a aprendizagem seja significativa. Porém, a participação da comunidade escolar não é constante a partir do primeiro ano do Ensino Médio. - Poucas atividades estavam relacionadas a aspectos da vida dos estudantes no ambiente escolar e social, não tendo, assim, muitos elementos sociais e nem a participação efetiva da sociedade na proposta	Baixo

Fonte: a pesquisa.

Entende-se que Ferramenta de Análise Ecológica possibilitou uma análise sobre as possíveis conexões e limitações entre o processo educativo e o entorno no qual ele se desenvolve, possibilitando reflexões e melhorias no processo de ensino e aprendizagem. Assim, após a análise, foi possível perceber que os materiais de estudos planejados e organizados estavam de acordo com os objetivos estabelecidos pelo currículo da escola e pelos documentos oficiais e possibilitaram que os estudantes desenvolvessem os conhecimentos relativos ao ano escolar que se encontram. Dessa forma, pode-se salientar que o componente currículo atingiu uma alta idoneidade didática.

Com relação ao componente escola, considerou-se sua idoneidade como Média, pelo fato de a proposta de trabalho desenvolvida contemplar poucos aspectos do cotidiano e da vida dos estudantes. Porém, foi possível que diferentes estratégias e metodologias fossem utilizadas durante o desenvolvimento da proposta.

Já o componente sociedade obteve uma baixa idoneidade, visto que não ocorreu a participação efetiva da comunidade escolar ou da sociedade como um todo no desenvolvimento e implantação da proposta junto aos estudantes, sendo que a comunidade pouco participa da vida escolar dos mesmos no período educativo em que se encontram, sendo mais comum a participação efetiva dos pais até o sétimo ano do Ensino Fundamental.

Assim, considera-se que a dimensão ecológica se fez presente, por meio de seus componentes e indicadores na proposta. Salienta-se, contudo, que aspectos relacionados à sociedade a aos interesses ou necessidades dos estudantes não foram devidamente contemplados. Mas, ressalta-se que a proposta contemplava o que estava preconizado no currículo da escola atendendo suas exigências.

6.4.2 Análise da Idoneidade Interacional

Buscando estabelecer relações entre os envolvidos no processo e o conhecimento (professor-aluno, aluno-aluno e aluno-conhecimento), a fim de perceber, discutir e avaliar os conflitos semióticos que ocorrem em um processo instrucional, foram utilizados os componentes e indicadores da Ferramenta de Análise Interacional, objetivando refletir sobre o grau de idoneidade das interações produzidas ao longo dos estudos, conforme pode ser observado na Figura 75.

Figura 75 - Análise Interacional da Proposta envolvendo Funções

DIÁLOGO/COMUNICAÇÃO		
Indicadores	**Indicadores evidenciados**	**Idoneidade**
a) propõem-se momentos de discussão coletiva; b) há espaço para intervenção docente e discente; c) promovem-se oportunidades de discussão/superação dos conflitos semióticos através da argumentação.	- Como as atividades foram realizadas em duplas ou em pequenos grupos, eram frequentes as discussões entre os componentes, para resolver os problemas ou situações que se apresentavam. Caso não fosse solucionado pela troca de informação entre os estudantes, ocorria a intervenção do professor/pesquisador. - Ocorreu, assim, um canal aberto de diálogo e colaboração entre os estudantes e o professor, os quais, por meio do diálogo e da argumentação, buscavam superar os conflitos que surgiam.	Alta
INTERAÇÃO		
Indicadores	**Indicadores evidenciados**	**Idoneidade**
a) propõem-se situações que ampliem as relações de comunicação com outros alunos, com o professor, com o material de ensino; b) organizam-se situações para identificação e resolução de conflitos semióticos mediante interpretação de significados.	- Os estudantes se adaptaram bem à proposta de trabalho, pela qual puderam realizar as atividades em diferentes ambientes da escola e utilizar diferentes meios para resolver ou fazer anotações. - As interações ou relações de comunicação entre os estudantes, com o professor e com o material de ensino se fez presente durante todo o estudo. Houve comunicação, tanto para pedir auxílio, como para orientações com relação às atividades, bem como outros aspectos disciplinares relativos ao âmbito escolar. - Os conflitos semióticos foram sendo identificados pelo professor por meio da observação durante o desenvolvimento das atividades, bem como pelas manifestações dos estudantes, tanto oralmente como em suas produções escrita, quando os significados alcançados eram percebidos.	Alta
AUTONOMIA		
Indicadores	**Indicadores evidenciados**	**Idoneidade**
a) propõem-se momentos em que os discentes assumam a responsabilidade pelo estudo; b) apresentam-se situações que possibilitem ao estudante raciocinar, fazer conexões, resolver problemas e comunicá-los.	- Mesmo que as atividades tenham sido desenvolvidas em duplas ou grupos, cada estudante era responsável pela realização das tarefas, anotações e entrega do material individualmente, respeitando o seu ritmo de trabalho. - Salienta-se, ainda, que algumas atividades eram realizadas fora do ambiente de sala de aula e entregues para o professor na aula seguinte. - Como o material era composto por situações-problema, era necessário que os estudantes utilizassem seus conhecimentos/ habilidades para revolvê-los, fazer conexões com outros conteúdos ou áreas de conhecimento, bem como comunicar as suas descobertas ou soluções para os demais grupos ou para ao professor/pesquisador.	Alta

Fonte: a pesquisa.

Por meio da análise produzida, foi possível perceber que as interações entre estudante/estudante/professor podem provocar reflexões a partir dos conhecimentos uns dos outros. Assim, podem alcançar níveis mais elevados de compreensão dos conceitos que estão sendo abordados. As interações possibilitam, também, espaços para que os estudantes possam desenvolver ferramentas, compartilhar experiências e realizar compreensões, tornando o espaço educacional um ambiente propício para a construção do conhecimento matemático.

Portanto, considera-se que os componentes e indicadores propostos pela Ferramenta de Análise Interacional estão contemplados na proposta de intervenção no estudo das Funções, na qual todos os componentes relacionados a essa ferramenta alcançaram uma alta idoneidade didática.

6.4.3 Análise da Idoneidade Emocional

A resolução de qualquer situação ou problema matemático está associada ao envolvimento afetivo do sujeito, no qual entram em jogo crenças, atitudes, emoções e valores que influenciam e condicionam a resposta cognitiva exigida. Assim, buscaram-se, por meio da Ferramenta de Análise Emocional, aspectos relacionados com a motivação/interesse, envolvimento e crenças/atitudes dos estudantes frente a proposta, permitindo analisar questões atitudinais dos mesmos, tomando como referência os componentes e indicadores dessa ferramenta. As evidências dessa análise tiveram como base as observações do pesquisador durante a realização de cada tarefa, bem como os registros dos estudantes e o Questionário Final respondido pelo grupo participante. No que segue, apresenta-se, na Figura 76, a análise produzida.

Figura 76 - Análise Emocional da Proposta envolvendo Funções

MOTIVAÇÃO/INTERESSE		
Indicadores	**Indicadores evidenciados**	**Idoneidade**
a) incentiva-se o trabalho cooperativo; b) propõem-se situações adaptadas ao nível educativo dos alunos, levando em consideração seus interesses.	- A cooperação estava explicitada no trabalho desenvolvido, ocorrendo diferentes interações entre os estudantes, professor e material didático, como já mencionado. - As atividades estavam adequadas ao nível em que os estudantes se encontravam, com diferentes graus de exigência e complexidade, os quais o estudante ia avançando e assimilando conhecimentos necessários para a resolução de atividades de complexidade maior. -Considera-se que as atividades propostas despertaram o interesse dos estudantes, porém não foram desenvolvidas muitas situações-problemas relacionadas aos interesses ou necessidades deles.	Média
ENVOLVIMENTO		
Indicadores	**Indicadores evidenciados**	**Idoneidade**
a) apresentam-se configurações didáticas que proporcionam o	- Os estudantes se envolveram durante o processo de estudo, principalmente com as atividades no laboratório de informática e na lousa digital.	Alta

envolvimento dos estudantes; b) estimulam-se as relações entre professor-aluno, aluno-aluno, professor-professor, para qualificar o processo de ensino e aprendizagem.	- Como os estudantes se adaptaram bem à proposta de estudo, foi possível que todos os envolvidos no processo pudessem colaborar com o aprendizado uns dos outros, sendo que os estudantes iam se auxiliando no desenvolvimento das atividades e o professor/pesquisador realizava orientações e ajudava quando solicitado.	
CRENÇAS/ ATITUDES		
Indicadores	**Indicadores evidenciados**	**Idoneidade**
a) promove-se um trabalho que supere a visão da Matemática como algo difícil e acessível a poucos.	- A proposta foi desenvolvida com diferentes graus de complexidade, escala crescente, onde conceitos, propriedades e procedimentos foram sendo abordados de forma acessível, levando em consideração o nível dos estudantes e, sempre que possível, relacionando com situações de contextualização, problemas do cotidiano, do trabalho ou de outras áreas do conhecimento.	Alta

Fonte: a pesquisa.

A Ferramenta de Análise Emocional busca indicadores que enfatizem o envolvimento dos estudantes no processo de ensino, mediante configurações didáticas. Assim, por meio das observações realizadas, foi possível perceber que os componentes envolvimento e crenças/atitudes alcançaram uma alta idoneidade, visto que os estudantes participaram ativamente das atividades propostas ao longo do estudo das Funções, demostrando interesse na resolução das atividades principalmente as relacionadas com construções, tanto no papel quanto no Geogebra, bem como nas atividades de manipulação nesse *software*.

Porém, considerou-se o componente Motivação/Interesse como uma média idoneidade, já que foram elaboradas poucas atividades que davam conta dos interesses ou necessidades do grupo de estudantes, algo que poderia ter sido melhor abordado, tornando-se uma fragilidade detectada na proposta de intervenção. Por outro lado, o interesse e a motivação, se fizeram presentes nos momentos do desenvolvimento das atividades, algo que auxiliou no bom andamento dos trabalhos.

6.4.3.1 Aspectos do Instrumento de Investigação II

Após a implementação do projeto educativo junto ao grupo de estudantes e da socialização de aspectos relacionados aos temas abordados, o professor/pesquisador aplicou o Instrumento de Investigação II (Apêndice B), o qual buscava um parecer descritivo sobre o desenvolvimento do projeto, bem como sobre os conhecimentos matemáticos abordados. Como se buscava uma opinião dos estudantes sobre o trabalho, entende-se que as mesmas estão inseridas e contempladas dentro da dimensão emocional, pois suas respostas estão baseadas em suas motivações, envolvimento, interesses e comprometimento com a proposta de estudo. Assim, apresentam-se, a seguir, aspectos relevantes das respostas dos estudantes frente ao instrumento de investigação.

Quando solicitados a se manifestarem sobre o trabalho desenvolvido, todas as respostas foram positivas, ressaltando a importância para sua aprendizagem, conforme pode-se perceber nas respostas dos estudantes.

> O trabalho me ajudou muito para aumentar o meu desempenho em Matemática, sendo excelente em vários sentidos, como: explicações e aplicações (EA2).
> Foi um bom emprego de meu tempo, pois aprendi muitas coisas que no ensino padrão da matemática não foram implantadas (EH1).
> Acredito que o trabalho foi de extrema importância para os alunos, pois foi possível revisar os conteúdos e se aprofundar nos mesmos (EI2).

Questionou-se os estudantes, também, se as atividades desenvolvidas eram diferentes das habitualmente realizadas em sala de aula. A grande maioria relatou que eram diferentes, conforme pode-se perceber nas respostas a seguir.

> Sim, pois desafiavam o aluno a “pensar fora da caixa”, percebendo as diferentes mudanças nas estruturas, conforme as mudanças nos parâmetros da função (EB1).
> Bastante diferente, foram aulas mais dinâmicas, com exemplos reais e muitos exercícios de aplicações (EC1).

Buscou-se indagar os estudantes sobre os aspectos positivos e negativos do trabalho desenvolvido. Grande parte respondeu não ter tido pontos negativos. Já com relação aos aspectos positivos, destacam-se as seguintes opiniões:

> Eu conseguia acompanhar as aulas e perceber se tinha alguma dúvida sobre o conteúdo passado (EG1).
> Aulas descontraídas, divertidas e não eram tão cansativas.
> Eu aprendi que cada parte da função é importante, assim fica mais fácil de identificar as mudanças nos valores e em seu gráfico, tornando as funções menos complicadas (EB1).

Quando solicitados a se manifestar sobre a maneira como as aulas de Matemática devem ser conduzidas (se do modo como normalmente é realizado ou se dentro de uma proposta como a desenvolvida), todas as respostas foram positivas com relação à proposta apresentada aos estudantes. Percebe-se, assim, que uma sequência de aulas, pensadas e organizadas considerando um conjunto de indicadores que lançam um olhar sobre diferentes perspectivas e atores envolvidos no processo educativo tem muito a contribuir para que o processo de ensino e aprendizagem seja dinâmico, com melhor qualidade e atenda aos interesses dos estudantes.

> Da forma como foram abordados nestas sequências, porque é mais fácil resolver os problemas depois que se aprende as regras e as mudanças nos valores dos parâmetros (EG2).
> Como foi feito pelo professor, pois exige mais do aluno para a execução da atividade e tem o seu amparo sempre que precisar (EH1).
> Prefiro como foi abordado nesta sequência, pois consegui aprender de uma forma muito mais eficaz (EA2).
> Da mineira abordada, sendo mais benéfica aos estudantes interessados em aprender (EC2).

Com relação à opinião dos estudantes sobre as atividades contidas no projeto de estudo, a grande maioria considerou interessante a maneira como foram desenvolvidas, contendo uma gama de atividades diferenciadas e relacionadas com diferentes áreas, conforme os argumentos dos estudantes a seguir:

> Eram diferentes das quais estamos acostumados dos livros, pois elas continham uma continuidade e estavam relacionadas com outras matérias (ED1).
> Foram bem organizadas, de modo que o aluno era capaz de estudar sozinho e enxergar com clareza a natureza da função e como ela se comporta (EA1).

Já com relação {as dúvidas e {as dificuldades enfrentadas pelos estudantes ao realizarem as atividades, os mesmos responderam que encontraram dificuldades, mas foram superadas pelo trabalho em grupo e com o auxílio do material de estudo disponível e com o auxílio do professor, conforme pode ser observado nas opiniões a seguir.

> Teve alguns exercícios que senti certa dificuldade, mas com a ajuda dos colegas e do professor consegui realizá-los (EH2).
> Sim, porém consegui tirar as dúvidas com auxílio de meu colega, com os materiais disponíveis e quando não conseguia entender o professor auxiliava (EK2).

Quando questionados sobre o papel do professor durante a realização do trabalho, os estudantes relataram que o mesmo esteve presente em todos os momentos da realização das atividades na escola e, com relação às tarefas realizadas em casa, sempre retomava os aspectos nos quais os estudantes apresentavam dificuldades, como pode ser observado nas respostas abaixo.

> O trabalho do professor foi de excelência, sempre ajudando quando precisava (EB1).
> Tirar dúvidas, explicar o conteúdo, revisando algumas vezes e mostrar a sua utilização no dia-a-dia (EF1).

O questionário é finalizado com a solicitação de que os estudantes indicassem sugestões, críticas e comentários com relação à proposta de trabalho. A maioria elogiou os materiais, destacando pontos positivos ou dando sugestões.

> Acredito que deveria ser mais incentivado esse tipo de trabalho, pois para mim foi de extrema importância (EA1).
> O trabalho foi muito importante no meu aprendizado e consegui acompanhar bem as aulas e realizar a grande maioria das atividades (EC2).

A partir das respostas dos estudantes, é possível perceber que a proposta de estudos foi muito positiva para o grupo, pois indicaram a importância do trabalho desenvolvido em sua aprendizagem, assim como a superação de dificuldades em relação à Matemática, aspectos que estão ligados aos indicadores da idoneidade emocional. Quanto às opiniões e sugestões dos estudantes, todas foram consideradas pertinentes e, se possível, serão incorporadas futuramente ao material.

6.5 SÍNTESE DAS ANÁLISES

As análises produzidas a partir dos componentes e indicadores das seis dimensões da Idoneidade Didática, no âmbito do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática, permitiram um olhar para o material produzido, o conteúdo do conhecimento abordado, as situações de aprendizagem, a ação dos estudantes, as interações produzidas, bem como para o papel da escola.

Assim, ressalta-se que essas análises evidenciaram aspectos do potencial dos materiais produzidos desde o seu planejamento, passando pela implementação até chegar à sua avaliação e validação. Particularmente, a atenção sistemática aos indicadores epistêmicos, cognitivos e interacionais permitiu estabelecer uma expressiva proximidade com os estudantes e, a partir das suas manifestações, orais ou por escrito, suas atitudes e estratégias adotadas na solução das situações, foi possível captar elementos do seu desenvolvimento. Para além da recolha de dados, no interesse da investigação, entende-se que a atenção aos indicadores cognitivos e interacionais possibilitou a qualificação do processo de ensino e aprendizagem, o que destaca tais indicadores não só como elementos pertinentes à pesquisa, mas, principalmente, elementos que permitem ao professor um olhar mais atento e direcionado ao estudante e seu desenvolvimento.

Buscando sistematizar o trabalho realizado por meio das Idoneidades Epistêmica, Mediacional e Cognitiva referente aos tópicos específicos de Função Afim, Quadrática, Exponencial e Logarítmica, apresenta-se no quadro da Figura 77, uma síntese das análises produzidas, apresentando o grau de idoneidade alcançado em cada componente.

Figura 77- Síntese das Análises Epistêmica, Mediacional e Cognitiva

Análise Epistêmica	**Função Afim**	**Função Quadrática**	**Função Exponencial e Função Logarítmica**
Situação-Problema	Alta	Alta	Alta
Linguagem	Alta	Alta	Alta
Regras	Alta	Alta	Alta
Argumentos	Média	Média	Média
Relações	Média	Média	Média
Análise Mediacional	**Função Afim**	**Função Quadrática**	**Função Exponencial e Função Logarítmica**
Recursos Didáticos	Alta	Alta	Alta
Tempo Didático	Alta	Alta	Alta
Análise Epistêmica	**Função Afim**	**Função Quadrática**	**Função Exponencial e Função Logarítmica**
Situação-Problema	Alta	Alta	Alta
Linguagem	Alta	Alta	Alta
Regras	Média	Média	Alta
Argumentos	Baixa	Média	Média
Relações	Média	Média	Média
Raciocínio Lógico	Alta	Alta	Alta
Leitura/Interpretação	Alta	Alta	Alta
Análise/Síntese	Baixa	Média	Média

Fonte: a pesquisa.

Já com relação a análise global da proposta de estudos, apresenta-se no quadro, da Figura 78, uma síntese das análises realizadas por meio dos componentes e indicadores das Idoneidades Ecológica, Interacional e Emocional.

Figura 78 - Síntese das Análises Ecológica, Interacional e Emocional

Análise Ecológica	**Idoneidade**	**Análise Interacional**	**Idoneidade**	**Análise Emocional**	**Idoneidade**
Escola	Média	Diálogo/ Comunicação	Alta	Motivação	Média
Currículo	Alta	Interação	Alta	Envolvimento	Alta
Sociedade	Baixa	Autonomia	Alta	Crenças/Atitudes	Alta

Fonte: a pesquisa.

Assim, visando apresentar uma síntese dos resultados e entendimentos obtidos a partir das análises realizadas, com relação às idoneidades Epistêmica, Cognitiva, Emocional, Interacional, Ecológica e Mediacional que compõem a Idoneidade Didática, apresenta-se, no quadro da Figura 79, o que se estabeleceu como o grau para cada uma dessas idoneidades parciais.

Figura 79 - Grau geral de Idoneidades

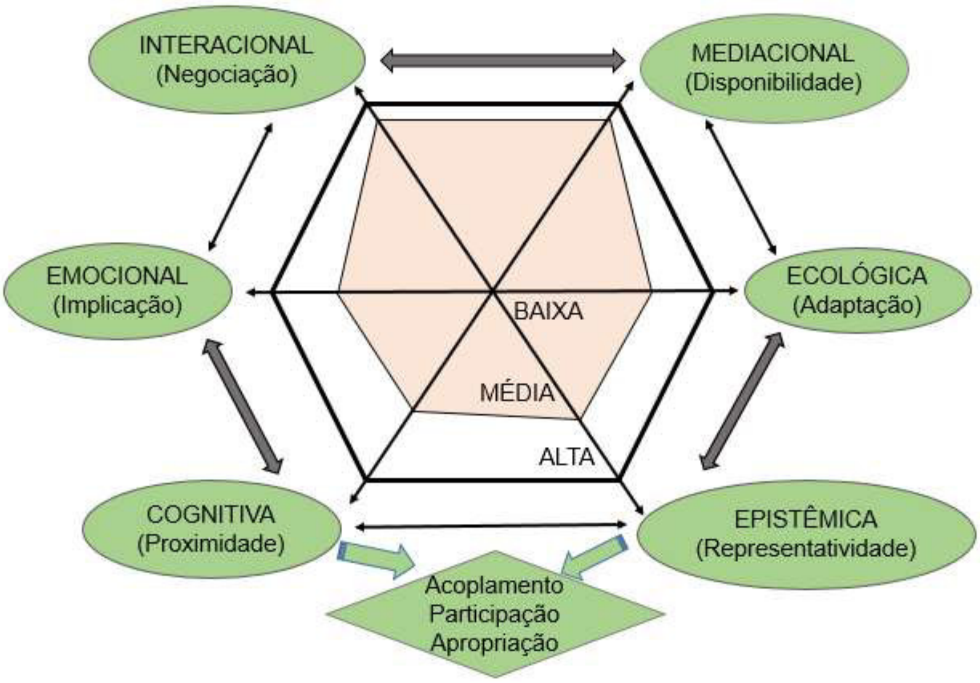
Idoneidade	**Grau**
Epistêmica	Médio
Cognitiva	Médio
Emocional	Médio
Interacional	Alto
Ecológica	Médio
Mediacional	Alto

Fonte: a pesquisa.

Os graus estabelecidos levaram em consideração os graus dados a cada um dos componentes das idoneidades parciais, a partir do confronto sistemático entre os significados pretendidos e os declarados, indicadores pertinentes a cada componente e os efetivamente implementados ou evidenciados. Destaca-se, aqui, o papel do pesquisador e da sua visão, interpretação e atribuição de significado aos fatos ocorridos, as manifestações dos estudantes, a análise produzida, o que bem caracteriza a pesquisa qualitativa. Porém, aponta-se, também, para a sistemática reflexão, o confronto entre o manifestado pelos estudantes e os critérios e indicadores teóricos da Idoneidade Didática e de todos os pressupostos teóricos do EOS. É esse trabalho que permitiu, por fim, emitir um juízo de valor sobre o grau das idoneidades parciais, bem como entendimentos, conjecturas e indicações sobre o desenvolvimento do projeto de estudo sobre Funções.

Faz-se uma reflexão sobre a dificuldade de, por vezes, ter que atribuir um grau "alto" ou "médio" de idoneidade, relacionada, principalmente, ao entendimento do quão "alto" ou "médio". Considera-se que o esquema que envolve o hexágono regular apresentado em Godino, Batanero e Font (2008), que pressupõe um grau máximo às idoneidades e um possível hexágono irregular indicativo do grau de idoneidade alcançado, tem um contínuo que, por vezes, se torna difícil de expressar por meio de um "baixo", "médio" e "alto". Nesse sentido, busca-se, no esquema da Figura 14, traduzir o que foi posto no quadro da Figura 80 sobre o grau das idoneidades, considerando a, por vezes, tênue distinção entre um grau e outro, visto, que não existe uma delimitação ou uma demarcação preexistes para os limites de cada um dos graus que podem ser atribuídos. Sendo assim, a representação do hexágono irregular é apresentada de acordo com a interpretação realizada por meio da análise qualitativa dos dados.

Figura 80 - Grau de idoneidade alcançado



Fonte: a pesquisa.

Percebe-se que as Dimensões Epistêmica e Cognitiva receberam um grau Médio de Idoneidade final, pois os componentes argumentações, relações e análise/síntese receberam, nas análises produzidas referentes às três funções estudadas/analisadas, grau Médio. Conjectura-se que essa atribuição se deve, em parte, ao fato de se considerar que o material produzido não apresentou atividades suficientes e adequadas que explorassem tais componentes/indicadores. Pondera-se um volume maior de atividades explorando mais profundamente essas questões, que poderiam elevar o grau de idoneidade nesses componentes. Desde o início dos trabalhos percebeu-se o quanto os estudantes não estavam habituados a produzir argumentação justificada, análises e sínteses e estabelecer relações. Embora, ao longo do estudo, tenham sido enfatizadas e retomadas essas questões, dificuldades com esse tipo de atividade perduram por todo o estudo. Por vezes, era possível perceber que dominavam os conceitos, regras e procedimentos que permitiriam produzir argumentação, porém tinham dificuldade de mobilizar esse conhecimento em torno de uma explicação ou justificativa.

Sobre a questão das sínteses, destaca-se a utilização, pelos estudantes, de mapas conceituais, que se constituem em estratégia posta no material adotado pela escola, da qual os estudantes lançaram mão com frequência, percebendo-se, aí, possibilidade de produzir um trabalho significativo referente à produção de sínteses e mesmo ao estabelecimento de relações.

Com relação aos componentes tempo e recursos didático (Idoneidade Mediacional), atribui-se um grau máximo de idoneidade, visto que maximamente se buscou respeitar o ritmo de trabalho e aprendizagem dos estudantes, utilizou-se diferentes recursos, estratégias e metodologias, para que os mesmos pudessem atribuir significados aos objetos em estudo e, quando ocorriam conflitos, os mesmos eram usados para retomar e aprofundar os conceitos, ideias, noções, definições e procedimentos que estavam sendo desenvolvidos e colocados em jogo. Entende-se que os diferentes recursos disponibilizados se adequaram à proposta de estudo com as temáticas de Funções, onde cada material e recurso foi disponibilizado para os estudantes e os mesmos poderiam utilizá-los, de acordo com suas necessidades e preferências.

Já as dimensões Interacional, Ecológica e Emocional foram utilizadas para analisar a proposta de estudo como um todo, levando em consideração seus componentes e indicadores.

No que se refere às Idoneidades Ecológica e Emocional, atribui-se um grau médio de idoneidade, visto que os componentes escola e sociedade, na Ecológica, e interesse, na Emocional, não tiveram seus indicadores contemplados satisfatoriamente. A sociedade, aqui entendida como comunidade escolar, não tem participação ativa nas decisões sobre o currículo da Escola, a qual tem sua proposta de ação e as famílias optam por lá matricularem seus filhos. Sobre a proposta de estudo das Funções, a Escola concordou com o desenvolvimento da mesma, os estudantes e pais foram informados e concordaram também, mas uma participação mais efetiva não ocorreu.

Entende-se, também, que a proposta poderia ter contemplado, com mais intensidade, aspectos sociais, afetivos e cognitivos, buscando desenvolver, por meio das situações-problema, uma visão mais aprofundada de problemas sociais e do trabalho, que proporcionassem situações as quais viessem a contribuir para a construção da cidadania, ou seja, atividades que estivessem ligadas aos interesses e necessidades daquele grupo de estudantes e da comunidade. Pondera-se que, com uma participação maior na concepção da proposta, contribuindo com situações e temas de interesse, o Idoneidade Emocional poderia ter sido melhor desenvolvida.

Apesar da proposta de estudo ter sido concebida considerando um grau máximo de idoneidade, a partir da análise, pode-se constatar fragilidades, tanto no material produzido, nos recursos utilizados, nos caminhos metodológicos empregados, como na implantação junto aos estudantes.

Por outro lado, entende-se que viabilizar situações e espaços onde o estudante foi chamado a realizar distintas tarefas, teve a oportunidade de discuti-las com seus colegas e com o professor, utilizando diferentes recursos, defendendo e justificando seus pontos de vista, se constituiu em campo fértil para que a idoneidade cognitiva fosse ampliada, o que se considera um ponto forte da proposta.

A análise realizada a partir de aspectos específicos ou do aspecto global da proposta de estudo permitiu chegar a conclusões importantes e esclarecedoras sobre o material produzido e o trabalho realizado pelos estudantes e pelo professor/pesquisador, evidenciando a importância da utilização de distintas metodologias e recursos que viabilizem os processos de ensino e aprendizagem da Matemática. Verificou-se que as ferramentas de análises propostas pelo EOS fornecem subsídios para desenvolver, ampliar, melhorar e implementar distintas atividades em um ambiente escolar, bem como possibilitam identificar e avaliar propostas de estudo como um todo desde sua concepção, planejamento, desenvolvimento e implementação, possibilitando melhorias contínuas em todo o processo.

CONCLUSÃO

A presente tese possibilitou investigar, analisar e refletir sobre aspectos em torno do desenvolvimento de uma proposta de estudos, com foco nas Funções abordadas no primeiro ano do Ensino Médio, envolvendo questões epistemológicas, cognitivas, didáticas, metodológicas, interacionais e mediacionais, emocionais e ecológicas, por meio das quais se lançou um olhar, tanto para o conhecimento matemático posto em jogo, como para o processo de ensino e aprendizagem, no qual o Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática assumiu o embasamento teórico e metodológico da investigação, visto que seus pressupostos foram considerados no planejamento, na constituição, na implementação e nas análises na proposta.

Destaca-se, também, que a proposta estava apoiada nos pressupostos teóricos dos níveis de compreensão do conceito de função de Bergeron e Herscovics (1982). Assim, a partir das observações e dos dados coletados e analisados, é possível afirmar que os estudantes desenvolveram e aplicaram conceitos e procedimentos, de modo satisfatório, relacionados aos níveis de compreensão intuitiva, matematização inicial e abstração. Já no que se refere ao nível de formalização, ainda há espaço para um aprofundamento dos conceitos relativos a esse nível de compreensão.

A proposta de estudos foi estruturada visando oportunizar aos estudantes a retomada, o desenvolvimento e o aprofundamento de noções, conceitos, definições e procedimentos articulados, por meio da solução de situações-problema e da utilização de diferentes recursos e metodologias, os quais possibilitassem, também, estabelecimento de relações, produção de argumentações e uso de diferentes linguagens. Desse modo, a articulação dos diferentes recursos e dos conjuntos de atividades possibilitou aos estudantes a produção e negociação de significados, um aprofundamento em seus conhecimentos, a superação de conflitos entre o institucional e o pessoal, o desenvolvimento da noção de um trabalho participativo/colaborativo, bem como possibilidade de explorarem e transitarem pelas diferentes formas de se representar uma função, desenvolvendo a capacidade de analisar, interpretar cada tipo de registro, bem como reconhecer as características de cada um deles.

A partir das análises realizadas, foi possível perceber que a proposta de estudo envolvendo as Funções desenvolvida, sob a perspectiva do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática, atende ao que se defende e o que está posto na legislação e pelo currículo da escola onde a mesma foi aplicada. As ferramentas de análise propostas pelo EOS se constituíram em elementos essenciais para se obter, tanto uma visão detalhada da proposta, como uma visão mais geral, possibilitando identificar os pontos fortes e frágeis dos materiais.

No que se refere, especificamente, ao trabalho com as Funções, considera-se que os tópicos estabelecidos para os materiais de estudos se mostraram pertinentes para uma retomada, aprofundamento e desenvolvimento dos conteúdos do primeiro ano do Ensino Médio. Para o desenvolvimento dos mesmos, buscou-se explorar situações-problema e atividades contextualizadas, ou não, visando, sempre que possível, estabelecer relações entre objetos de distintas áreas do conhecimento ou da realidade, sendo que a utilização dos recursos digitais, mais propriamente o *software* Geogebra, permitiu um trabalho com diferentes representações, mostrando um objeto a partir de distintas perspectivas, nas quais os estudantes podiam modificar, movimentar, observar e conjecturar. Lançou-se mão, também, de diversos recursos como vídeos, objetos de aprendizagens, exercícios, *PowerPoit*, objetos de aprendizagem no Geogebra e construções com lápis e papel, além da utilização de *softwares*.

Nesse contexto, entende-se que a presente investigação alcançou seu objetivo de buscar o desenvolvimento e implementação de uma proposta de estudo com foco nas Funções, sob a perspectiva do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática, destacando este aporte teórico como uma possibilidade de fundamentar, tanto o planejamento de um processo de ensino, no que se refere aos conhecimentos matemáticos envolvidos, as estratégias e recursos utilizados, como a análise das aprendizagens e das interações que ocorrem durante todo o processo.

Ressalta-se, ainda, que, apesar da proposta de estudos ter sido desenvolvida para um ano em específico, os caminhos metodológicos e os pressupostos teóricos utilizados para a constituição e análise podem ser adaptados a qualquer conteúdo e ano escolar. O que se entende é que os conteúdos a serem desenvolvidos precisam de reflexão e ter um prévio planejamento, para que se busque um estudo realmente efetivo sobre o mesmo, no qual os estudantes possam transitar pelas diferentes formas de representação, analisar e identificar todas as suas características inerentes.

Porém, para que isso ocorra, deve ser oportunizado aos professores tempo de estudo e preparação, bem como a flexibilização do currículo da escola, permitindo que novas abordagens sejam aplicadas em distintos momentos das aulas, disponibilizando, também, recursos e espaços adequados para que essas inovações adentrem ao ambiente institucional.

A investigação realizada e os resultados apresentados, analisados e discutidos abrem caminho para novas abordagens e reflexões sobre o conteúdo de Funções, pois essa temática é bastante ampla e explorada no meio acadêmico e científico, mas ainda há espaços para que novos elementos sejam discutidos e levados até as instituições de ensino básico. Portanto, investigações em torno de processos de ensino e aprendizagem que auxiliem os estudantes em Matemática são de fundamental importância e as novas abordagens não podem ficar restritas a um momento durante o ano letivo. Elas precisam ser utilizadas constantemente durante os processos de desenvolvimento de conteúdos e conhecimentos.

Outra questão refere-se ao material produzido, que pode servir, também, para auxiliar professores em suas aulas, bem como para ser disponibilizado aos estudantes em distintos momentos durante o estudo das Funções. Ou seja, pretende-se encontrar formas de divulgar esta proposta de estudo, disponibilizando-a nos mais diversos meios, visando, assim, aproximar as pesquisas desenvolvidas na Universidade das demais comunidades de ensino.

REFERÊNCIAS

ADAMI, Adriana Miorelli, et al. **Pré-Cálculo**. David. Porto Alegre: Bookman, 2015.

ALMEIDA, Lourdes M. W; BRITO, Dirceu. **O conceito de função em situações de Modelagem Matemática**. Zetetiké, Campinas, v.12, n.23, jan/jun, 2005.

AMAYA, Tulio Rafael de Armas. **Evaluación de los Conocimientos Didáctico-Matemáticos de futuros Profesores de Matemáticas al hacer Transformaciones de las Representaciones de una Función**. 2016. Tese, Doctorado en Innovación e Investigación en Didáctica, Departamento de Didáctica, Universidad Nacional de Educación a Distancia. Colombia, 2016.

ANDRADE, Luísa Silva. **Currículos de Matemática no Ensino Médio: um olhar sob a perspectiva do Enfoque Ontosemiótico do Conhecimento e a Instrução Matemática**. Canoas, 2014. 261. f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática. Universidade Luterana do Brasil. Canoas, 2014.

ANDRADE, Luísa Silva; KAIBER, Carmen Teresa. **Ensino Médio: uma análise do currículo de matemática sob a perspectiva Ontosemiótica**. Canoas, 2012. Disponível em:
< www.ppgecim.ulbra.br/teses/index.php/ppgecim/article/view/179>. Acesso em:03 nov. 2014.

ARDENGHI, Marcos José. **Ensino aprendizagem do conceito de Função: pesquisas realizadas no período de 1970 à 2005 no Brasil**. 2008. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

ARTIGUE, M. **Engenharia Didática**. In: BRUN, J. Didática das Matemáticas. Tradução de: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1998. Cap. 4. p. 193-217.

Bachelard, Gaston. A formação do espírito científico: contribuição para uma psicanálise do conhecimento. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.

BARRETO, Antonio L. O. A análise da compreensão do conceito de função mediado por ambientes computacionais. 2009. 363 f. Tese (Doutorado em Educação), Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2009.

BARRETO, Marina Menna. **Tendências atuais sobre o ensino de funções no Ensino Médio**. 2011. Disponível em:
< www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/midias_digitais_II/...II/.../funcoes.pdf>. Acesso em:03 nov. 2014.

BERGERON, Jacques C., HERSCOVICS, Nicolas. **Levels in the Understanding of the Function Concept**. Proceedings of the Workshop on Functions. Foundation of Curriculum Development, Enschede, Netherlands, 1982.

BOGDAN, Roberto; BIKLEN, Sari Knopp. **Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Traduzido por: Maria João Alves, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Portugal, Porto Editora Ltda, 1994.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgar Blücher, 2003.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC). Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias/ Secretaria da Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**. Brasília: MEC/ SEF, 2006, v.2.

______. Secretaria da Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais- Matemática** – 5ª a 8ª série. Brasília: MEC/ SEF, 1998, v. 3.

______. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. PCN+ Ensino Médio: **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC/ SEF, 2002.

______. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Ensino Médio Brasília, MEC/SEMT, 1999.

______.Ministério da Educação. Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica. **Leis e Decretos.** Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Dispõe sobre as diretrizes e bases da Educação Nacional.

______. Ministério da Educação. Secretária de Educação Básica. Diretoria de Currículos e Educação Integral. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, SEB, DICEI, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/documentos/bncc-2versao.revista.pdf>. Acesso em: 14 mar, 2018.

CARVAJAL, Yisell Johana; ORTIZ, Yancirley Veja. **El concepto de función: un análisis epistemológico de algunos textos de la reforma de las matemáticas modernas y algunos textos actuales en Colombia**. Universidad del Valle, Santiago de Cali, Colombia, 2014.

CHAVANTE, Eduardo; PRESTES, Diego. **Matemática**. 1ª ano: Ensino Médio. São Paulo: SM, 2016.

COSTA, Nilce Meneguelo Lobo da. **Funções Seno e Cosseno: uma seqüência de ensino a partir dos contextos do "Mundo Experimental" e do Computador**. 1997. 179 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1997.

DAMASCO NETO, José Roque. **Registro de representação Semiótica e o GeoGebra: um ensaio para o ensino de Funções Trigonométricas**. 2010. 129 f. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) - Faculdade de Educação, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2010.

DELGADO, Carlos José Borges. **O Ensino da Função Afim a partir dos Registros de Representação Semiótica**. 2010. 153 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática), Universidade do Grande Rio, Duque de Caxias, Rio de Janeiro, 2010.

D'AMORE, Bruno; FONT, Vicenç; GODINO, Juan Díaz. **La dimensión metadidática en los processos de enseñanza y aprendizaje de la matemática**. Paradigma, Maracay,Venezuela, v. XXVIII, n. 2, 2007. p. 49-77.

DIZOTTI, Fernanda Pimentel. **A Aprendizagem da Matemática por meio de Projetos Interdisciplinares**, 2008. Disponível em: <http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/upload/1201Agt11_dizotti_ta.pdf>. Acesso em: 20 Set 2012.

FERRETTO, Daniel. **Mais Matemática**: Aulas Ensino Médio. 2017. Disponível em: <https://www.youtube.com/playlist?list=PLTPg64KdGgYivEK9avhUlxsaJhD0TfpxW>. Acesso em: 20 jan, 2018.

FONT, Vicenç; PLANAS, Nuria; GODINO, Juan Díaz. Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. **Infancia y Aprendizaje**, v.33, n.1, 2010. p. 89-105. Disponível em: <http://www.ugr.es/~jgodino/eos/modelo_anadida_25junio09.pdf>. Acesso em: 17 fev, 2016.

GARNICA, Antonio Vicente Marafioti. **História Oral e educação Matemática.** In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.) Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

GOLDENBERG, Mirían. ***A arte de pesquisar* - Como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais**. Rio de Janeiro: Editora Record, 1999.

GODINO, Juan Díaz. **Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática**. Recherches em Didactiques des Mathematiques,Grenoble, França, v. 22, n. 2/3, 2002. p.237-284. Disponível em: < http://www.ugr.es/local/jgodino>. Acesso em: 15 nov. 2014.

______. **Teoría de las Funciones Semióticas em Didática de las Matemáticas: um enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática**. In: CANTORAL, R. et al. (orgs.). Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: un reporte iberoamericano. España: Díaz de Santos S. A., 2008. p. 621-644.

______. **Marcos teóricos sobre el conocimiento y el aprendizaje matemático**. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. 2010. Disponível em: <http://www.ugr.es/~jgodino/fundamentos_teoricos/marcos_teoricos_ddm.pdf>. Acesso em: 15 nov. 2014.

______. **Indicadores de la idoneidade didáctica de processos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas**. In: XIII CIAEM – IACME. Anais. Recife, 2011. Disponível em:

<http://www.ugr.es/~jgodino/eos/jdgodino_indicadores_idoneidad.pdf>. Acesso em: 15 nov. 2014.

______. **Origen y aportaciones de La perspectiva ontosemiótica de investogación em Didáctica de la Matemática**.In: A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (org.), Investigación em Educación Matemática XVI. Jaén: SEIEM, p. 49-68, 2012. Disponível em: <http://www.ugr.es/~jgodino/eos/origen_EOS_Baeza_2012.pdf>. Acesso em: 15 nov. 2014.

______. Síntesis gráfica del EOS - **Conjunto de diapositivas que resumen el sistema de nociones del EOS y referencias donde se desarrollan**. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. 2013. Disponível em: <http://www.ugr.es/~jgodino/eos/sintesis%20EOS%2011enero_2013.pdf>. Acesso em: Acesso em: 15 nov. 2014.

GODINO, Juan Díaz et al. **Mathematical concepts, their meaning, and understanding**. En: PUIG, L.; GUTIERREZ, A. (orgs), Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 20, 1996, Valencia, Proceedings. Valencia: Universidad de Valencia, 1996.

GODINO, Juan Díaz et al. Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. **Paradigma**, V.XXVII, nº 2, p. 221-252, 2006. Disponível em: <http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/idoneidad-didactica.pdf>. Acesso em: 26 mar, 2018.

GODINO, Juan Díaz et al. La ingeniería didáctica como investigación basada en el diseño. Versión ampliada en español de la comunicación presentada en el **CERME 8** (Turquía, 2013) con el título, "Didactic engineering as design-based research in mathematics education, 2013. Disponível em: <http://www.ugr.es/~jgodino/eos/JDGodino%20et%20al_2013%20Ingenieria%20didactica.pdf>. Acesso em: 20 mar, 2019.

GODINO, Juan Díaz et al. Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico - semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, 34 (2/3), 167-200, 2014. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/5241_2609_ID.pdf>. Acesso em: 22 jan, 2019.

GODINO, Juan Díaz; BATANERO, Carmen. Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, França, v. 14, n.3, p.325-355,1994. Disponível em: <http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/03_SignificadosIP_RDM94.pdf>. Acesso em: 20 jan, 2016.

GODINO, Juan Díaz; BATANERO, Carmen; FONT, Vicenç; Um enfoque onto-semiótico do conhecimento e a instrução matemática. **Acta Scientiae** - Revista de Ensino de Ciências e Matemática, Canoas, v. 10, n.2, jul./dez., 2008. p. 07- 37.

GODINO, Juan Díaz; BATANERO, Carmen; FONT, Vicenç. **The onto-semiotic approach to research in Mathematics Education**. The International Journal on Mathematics Education (ZDM), v.39, n.1-2, 2007. p. 127-135. Disponível em: < http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/ontosemiotic_approach.pdf>. Acesso em: 15 nov. 2014.

GODINO, Juan Díaz; CONTRERAS, A.; FONT, Vicenç. **Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática**. Recherches em Didactiques des Mathematiques, v. 26, n.1, 2006. p. 39-88. Disponível em:<http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/analisis_procesos_instruccion.pdf>. Acesso em: 15 nov. 2014.

GODINO, J. D.; FONT, V.; WILHELMI, M. R. Análisis didáctico de procesos de estudio matemático basado en el enfoque ontosemiótico. **Publicaciones,** v. 38, 2008. p. 25-49. Disponível em: <http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/niveles%20analisis%20didactico%204Julio08.pdf>. Acesso em: 14 nov, 2017.

GODINO, J. D; RIVAS, H.; ARTEAGA, P. Inferencia de indicadores de idoneidad didáctica a partir de orientaciones curriculares. **Práxis Educativa**, Ponta Grossa, v. 7, n. 2, jul./dez. p. 331-354. 2012 Disponível em: <http://www.revistas2.uepg.br/index.php/praxiseducativa>. Acesso em: 06 jan, 2017.

GODINO, Juan Díaz; FONT, Vicenç. **Alguns desarrollos y aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas**. Departamento de Didáctica de la Matemática.Universidad de Granada,
2007. Disponível em: <http://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm>. Acesso em: 15 nov. 2014.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA- IBGE. **Município de Farroupilha**, 2018. Disponível em: <https://www.ibge.gov.br/cidades-e estados/rs/farroupilha.html>. Acesso em: 14 mar, 2019.

KAIBER, Carmen Teresa. A prática da resolução de problemas no estudo de funções reais. **Anais do IV Simpósio de Educación Matemática**. Chivilcoy, Argentin, 2002.

LACASTA, E.; PASCUAL, J. R. **Las Finciones em los gráficos cartesianos**. Madrid: Sintese, 1998.

LEMOS, Andrielly Viana. **Estudos de recuperação no Ensino Fundamental : uma investigação no âmbito da Geometria sob a perspectiva do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática.** Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. Universidade Luterana do Brasil, Canoas, 2017.

MAGARINUS, Renata. **Uma proposta para o Ensino de Funções através da utilização de objetos de aprendizagem**. 2013. 100 f. Dissertaçaõ (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2013.

MARANHÃO, Maria Cristina Sousa Albuquerque. **Uma Engenharia Didática para a aprendizagem de concepções de tempo**. 1996. 426 f. Tese (Doutorado em Psicologia da Educação), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1996.

MARTINS, Adriana Paula; ABREU-BERNARDES, Sueli Teresinha de. O conceito de Obstáculo Epistemológico de Gaston Bachelard. VII Encontro de Pesquisa em Educação. **Anais**. Uberaba, 2013. Disponível em: <https://www.uniube.br/eventos/encontro_pesquisa_educacao_VII/index.php >. Acesso em: 21 out. 2019.

MORA, David. **Aprendizaje y enseñanza: projectos y estratégias para uma educación matemática del futuro**. LaPaz, Bolivia: Campo Iris, 2003

NASCIMENTO, Jeane Gardênia Costa do. **Investigando a utilização de uma sequência didática para o ensino de funções polinomiais de 1ª e 2ª graus**. 2009. 147. f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática. Universidade Luterana do Brasil). Canoas, 2009.

NINOW, Valmir. **Uma Sequência Didática para o Ensino e Aprendizagem das Funções Trigonométricas com o auxílio do *software* GeoGebra.** Monografia-Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Universidade Luterana do Brasil, Canoas, 2011.

NINOW, Valmir. **Projetos de Trabalho no Ensino Médio: uma possibilidade para o Ensino e Aprendizagem da Matemática**. Dissertação (Mestrado Acadêmico) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. Universidade Luterana do Brasil, Canoas, 2014.

OLIVEIRA, Nanci de. **Conceito de Função: uma abordagem do processo de ensino- aprendizagem**. 1997.174 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1997.

PAIVA, Manoel Rodrigues. **Matemática**. 2.ed, São Paulo: Moderna, 2010.

PAIVA, Manoel Rodrigues. **Matemática**. São Paulo: Moderna, 1995.

PARRA URREA, Yocelyn Elizabeth. **Significados pretendidos por el Currículo de Matemáticas Chileno sobre la noción de Función**. 2015. 165 f. Tese, Doutorado em Educación Matemática, Programa de Magíster en Educación Matemática, Universidad de Los Lagos. Chile, 2015.

PELHO, Edelweis Benez Brandão. **Indrodução ao conceito de Função: a importância da compreensão das variáveis.** 2003.146 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003.

PIRES, Rogério Fernando. **O uso da Modelagem Matemática na construção do conceito de função**. 2009.167 f. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em

Ensino de Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

PONTE, João Pedro. **O conceito de função no currículo de Matemática**. Revista Educação e Matemática, APM, Portugal, n.15, p. 3-9, 1990.

RAMOS DE PACIA, Ana Beatriz. **Objetos Personales Matemáticos y Didáticos del Profesorado y Cambio Institucional: el caso de la contextualización de Funciones**. 2015. Tese. Faculdade de Ciencias e Económia y Sociales. Venezuela, 2015.

ROSENBAUN, Luciane Santos. **Uma trajetória hipotética de aprendizagem sobre funções trigonométricas numa perspectiva Construtivista**. 2010. 256 f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo: São Paulo, 2010.

RORATTO, Cauê. **A História da Matemática como estratégia para o alcance da Aprendizagem Significativa do Conceito de Função**.2009, 199 f. Dissertação, Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática, Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática, Universidade Estadual de Maringá. Maringá, 2009.

Ruiz, Luisa. **La noción de función: Análisis epistemológico y didáctico**. Tese. Departamento de Didática da Matemática, Universidade de Granada, Espanha, 1994.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Nono Olhar**: Matemática. 2. Ed. São Paulo: FTD2013.

STEWART, James. **Cálculo**: Volume I. Tradução Helena Maria Ávila de Castro. São Paulo: Cengage Learning, 2016.

TINOCO, Lucia. **Construindo o Conceito de Função**. Projeto Fundão- IM/UFRJ, Rio de Janeiro, 1998.

TRINDADE, J. A. O., MORETTI, M. T. Uma relação entre a Teoria Históricocultural e a Epistemologia Histórico-crítica no Ensino de Funções: a mediação. Revista **Zetetiké**. Campinas, SP. V. 8, Nº 13/14. p. 29-50, jan/dez. 2000.

Universidade Federal da Paraíba (UFTB). **Questões de vestibular**. Disponível em: <http://www.coperve.ufpb.br/pss2011/pss2011res.htm>. Acesso em 20 jan, 2017.

ZUFFI, E.M. Alguns Aspectos do Desenvolvimento Histórico do Conceito de Função. **Educação Matemática em Revista**, SBEM, Ano 8, No. 9/10. 2001, p.10-16.

YOUSCHKEVITCH, A. P. **The Concept of Function up to the Middle of the 19 Century**. *Archive for the History of the Exact Sciences*, 1976.

ANEXO A- Autorização da Escola

Colégio Nossa Senhora
Lourdes

Farroupilha, 09 de setembro de 2016.

Ao Comitê de Ética em Pesquisa em Seres Humanos da ULBRA/RS

Prezados Senhores

Declaro que tenho conhecimento e autorizo a realização do projeto de pesquisa intitulado **"O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES NO ENSINO MÉDIO: UMA INVESTIGAÇÃO SOB A PERSPECTIVA DO ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO DO CONHECIMENTO E A INSTRUÇÃO MATEMÁTICA (EOS)"** proposto pelos pesquisadores Valmir Ninow e Carmen Teresa Kaiber.

O referido projeto será realizado no Colégio Nossa Senhora de Lourdes, e só poderá ocorrer a partir da apresentação do Parecer do Colegiado de aprovação do Comitê de Ética em Seres Humanos da ULBRA/RS.

Atenciosamente,

Marina Matiello
Marina Matiello
Diretora – Bol. de Desig. nº 15/2016

COLÉGIO NOSSA SENHORA DE LOURDES
Entidade Mantenedora:
Associação Educadora São Carlos
Port. de Reorg. nº 30913 de 22/07/1980
D.O. 24/07/1980
Par. Aut. Func. do Ensino Médio
CEED nº 424 de 28/03/2001 D.O. 06/04/2001
Farroupilha - RS

Entidade Mantenedora: Associação Educadora São Carlos (AESC)
Port. de Reorg. 30913 de 22-07-1980 D. O. 24-07-1980
Par. Aut. de Func. do Ensino Médio n.º 424 de 28-03-2001 D.O. 06-04-2001
Rua Tiradentes, 227, centro Farroupilha - RS CEP 95180-000 Fone/Fax: (54) 3906-8000 CNPJ 88.635.486/0004-08
www.cnsl.com.br cnsl@cnsl.com.br

ANEXO B- Termo de Assentimento do Responsável

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

1. IDENTIFICAÇÃO DO PROJETO DE PESQUISA: PROJETO DE DOUTORADO													
Título do Projeto: O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES NO ENSINO MÉDIO: UMA INVESTIGAÇÃO SOB A PERSPECTIVA DO ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO DO CONHECIMENTO E A INSTRUÇÃO MATEMÁTICA (EOS).													
Área do Conhecimento: Matemática								Número de participantes:			Total:		
Curso: Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática								Unidade: Programa de Pós Graduação de Ensino de Ciências e Matemática (PPGECIM)- ULBRA					
Projeto Multicêntrico		Sim X		Não		Nacional X		Internacional	Cooperação Estrangeira		Sim		Não X
Patrocinador da pesquisa: Pesquisador													
Instituição onde será realizado: Colégio Nossa Senhora de Lourdes													
Nome dos pesquisadores e colaboradores: Valmir Ninow e Carmen Teresa Kaiber													

Seu filho **(e/ou menor sob sua guarda)** está sendo convidado(a) para participar do projeto de pesquisa acima identificado. O documento abaixo contém todas as informações necessárias sobre a pesquisa que estamos fazendo. Sua autorização para que ele participe neste estudo será de muita importância para nós, mas se retirar sua autorização, a qualquer momento, isso não lhes causará nenhum prejuízo.

2. IDENTIFICAÇÃO DO PARTICIPANTE DA PESQUISA E/OU DO RESPONSÁVEL				
Nome do Menor:			Data de Nasc:	Sexo:
Nacionalidade:		Estado Civil:	Profissão:	
RG:	CPF/MF:	Telefone:	E-mail:	
Endereço:				
3. IDENTIFICAÇÃO DO PESQUISADOR RESPONSÁVEL				
Nome: Valmir Ninow			Telefone: (54) 9998-3762	
Profissão: Professor	Registro no Conselho Nº:		E-mail: vninow@gmail.com	
Endereço: Av. Farroupilha, 8001 – prédio 14, sala 338, bairro: São José – Canoas.				

Eu, responsável pelo menor acima identificado, após receber informações e esclarecimento sobre este projeto de pesquisa, autorizo, de livre e espontânea vontade, sua participação como voluntário(a) e estou ciente:

Da justificativa e dos objetivos para realização desta pesquisa.

Pesquisas na área da educação Matemática apontam para a importância dos conceitos relacionados as Funções no currículo de Matemática e da importância da elaboração de instrumentos de trabalho que direcionem, aprofundem e fortaleçam aspectos referentes ao conhecimento sobre o tema, enquanto conteúdo a ser levado a escola, bem como ao seu processo de ensino e aprendizagem. Pois, os estudantes necessitam se apropriar de conceitos, ideias e procedimentos, relacionados ao conteúdo de Função, os quais permitem que os mesmos resolvam situações-problemas que envolvam a Matemática e outras áreas do conhecimento, bem como resolver situações que aparecem no cotidiano dos indivíduos e no mundo do trabalho.

A pesquisa visa investigar o desenvolvimento de um projeto educativo para a Matemática, no Ensino Médio, na perspectiva do Enfoque Ontosemiótico do Conhecimento e a Instrução Matemática, tendo como foco o estudo de Funções.

Para alcançar o objetivo geral da pesquisa foram traçados os seguintes objetivos específicos:

- investigar aspectos/questões históricas e epistemológicas referentes ao desenvolvimento do conceito de Função;
- investigar os conhecimentos sobre os processos de ensino e aprendizagem de Função;
- organizar um projeto educativo com base nos aportes do EOS, com foco no estudo de Funções, a ser desenvolvido no Ensino Médio;
- aplicar a proposta junto a uma turma do Ensino Médio regular de uma escola do Município de Farroupilha/RS;
- investigar o desenvolvimento do projeto de ensino considerando todos os elementos e atores envolvidos tomando como base as ferramentas do EOS

Do objetivo da participação de meu filho.

A pesquisa visa desenvolver, analisar e aprofundar os conhecimentos dos estudantes do 1º ano do Ensino Médio ao longo da Educação Básica em relação ao ensino de Funções, na disciplina de Matemática.

Do procedimento para coleta de dados.

Para a coleta dos dados da pesquisa serão utilizados: registros das observações do pesquisador, registros da produção, redação e apresentação de trabalhos pelos estudantes e aplicação de três questionários.

Da utilização, armazenamento e descarte das amostras.

Os dados adquiridos por meio desta investigação serão utilizados na tese de Doutorado do pesquisador e na divulgação em artigos científicos, revistas da área de Educação e/ou congressos. O material coletado na fase de experimentação será armazenado no computador do pesquisador responsável e em pastas devidamente arquivadas. Podendo, também, serem descartados no final desta pesquisa.

Dos desconfortos e dos riscos.

Existe a possibilidade do participante se sentir constrangido ou desconfortável e envolve riscos mínimos de quebra de confidencialidade.

Dos benefícios.

Essa pesquisa busca contribuir para o processo de ensino e aprendizagem das Funções, propondo a reflexão, análise e aprofundamento acerca dos conceitos, ideias e procedimentos, relacionados a esse conteúdo, bem como da ampliação e aprofundamento de estratégias para resolver situações-problemas da própria Matemática, de outras áreas do conhecimento, do cotidiano dos indivíduos e do mundo do trabalho.

Da isenção e ressarcimento de despesas.

Os estudantes participantes desta pesquisa estão isentos de despesas, assim, não receberão ressarcimento de qualquer espécie, pois não terão despesas durante a realização desta pesquisa.

Da forma de acompanhamento e assistência.

Fica assegurado aos participantes da pesquisa um tratamento dentro dos princípios da ética, atendendo, também, o que a Escola estabelece para o desenvolvimento de um trabalho junto aos estudantes. Fica assegurado, também, o resguardo a confidencialidade das informações prestadas, bem como, o direito de interromper a colaboração a qualquer momento. O desenvolvimento da pesquisa (aplicações dos instrumentos de pesquisa e a aplicação das sequências didáticas) são de responsabilidade do pesquisador, ficando a escola isenta de qualquer participação em relação ao desenvolvimento da pesquisa.

Da liberdade de recusar, desistir ou retirar meu consentimento.

O participante dessa pesquisa tem a liberdade de recusar, desistir ou de interromper a colaboração nesta pesquisa no momento em que desejar, sem necessidade de qualquer explicação. E, sua desistência não causará nenhum prejuízo.

10. Da garantia de sigilo e de privacidade.

Os resultados obtidos durante essa pesquisa serão utilizados em publicações científicas, e os dados pessoais dos participantes não serão mencionados.

11. Da garantia de esclarecimento e informações a qualquer tempo.

O participante tem a garantia de tomar conhecimento e obter informações, a qualquer tempo, dos procedimentos e métodos utilizados neste estudo, bem como dos resultados finais, desta pesquisa. Para tanto, poderei consultar o **pesquisador responsável Valmir Ninow**. Em caso de dúvidas não esclarecidas de forma adequada pelo(s) pesquisador (es), de discordância com os procedimentos, ou de irregularidades de natureza ética poderei ainda contatar o **Comitê de Ética em Pesquisa em Seres Humanos da ULBRA Canoas(RS),** com endereço na Rua Farroupilha, 8001 – Prédio 14 – Sala 224, Bairro São José, CEP 92425-900 - telefone (51) 3477-9217, e-mail comitedeetica@ulbra.br.

Declaro que obtive todas as informações necessárias e esclarecimento quanto às dúvidas por mim apresentadas e, por estar de acordo, assino o presente documento em duas vias de igual conteúdo e forma, ficando uma em minha posse.

______________________, _____ de ____________ de ______.

Participante da Pesquisa **Responsável pelo Participante da Pesquisa**

Pesquisador Responsável pelo Projeto

ANEXO C- Termo de Assentimento Estudante

TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO
(PARA MENORES DE 12 a 18 ANOS - Resolução 466/12)

Convidamos você, após autorização dos seus pais [ou dos responsáveis legais] para participar como voluntário (a) da pesquisa: O Ensino e a Aprendizagem de Funções no Ensino Médio: uma investigação sob a perspectiva do Enfoque Ontosemiótico do Conhecimento e a Instrução Matemática (EOS). Esta pesquisa é da responsabilidade do pesquisador Valmir Ninow (Av. Farrapos 8001, prédio 14 - sala 338, vninow@gmail.com) sob a orientação da Professora Dra. Carmen Kaiber, telefone: (51) 3477-9278, e-mail (kaiber@hotmail.com).

Este Termo de Consentimento pode conter informações que você não entenda. Caso haja alguma dúvida, pergunte à pessoa que está lhe entrevistando para que esteja bem esclarecido(a) sobre sua participação na pesquisa. Você não terá nenhum custo, nem receberá qualquer pagamento para participar. Você será esclarecido(a) sobre qualquer aspecto que desejar e estará livre para participar ou recusar-se. Após ler as informações a seguir, caso aceite participar do estudo, assine ao final deste documento, que está em duas vias. Uma delas é para ser entregue aos seus pais para guardar e a outra é do pesquisador responsável. Caso não aceite participar, não haverá nenhum problema se desistir, é um direito seu. Para participar deste estudo, o responsável por você deverá autorizar e assinar um Termo de Consentimento, podendo retirar esse consentimento ou interromper a sua participação a qualquer momento, sem nenhum prejuízo.

INFORMAÇÕES SOBRE A PESQUISA:

A pesquisa visa investigar o desenvolvimento de um projeto educativo para a Matemática, no Ensino Médio, na perspectiva do Enfoque Ontosemiótico do Conhecimento e a Instrução Matemática, tendo como foco o estudo de Funções.

Para alcançar o objetivo geral da pesquisa foram traçados os seguintes objetivos específicos:

- investigar aspectos/questões históricas e epistemológicas referentes ao desenvolvimento do conceito de Função;
- investigar os conhecimentos sobre os processos de ensino e aprendizagem de Função;
- organizar um projeto educativo com base nos aportes do EOS, com foco no estudo de Funções, a ser desenvolvido no Ensino Médio;
- aplicar a proposta junto a uma turma do Ensino Médio regular de uma escola do Município de Farroupilha/RS;
- investigar o desenvolvimento do projeto de ensino considerando todos os elementos e atores envolvidos tomando como base as ferramentas do EOS.

Para a coleta dos dados da pesquisa serão utilizados: registros das observações do pesquisador, registros da produção, redação e apresentação de trabalhos pelos estudantes e aplicação de três questionários.

A pesquisa será desenvolvida ao longo do ano letivo de 2017, na própria escola, em encontros semanais de 4 horas, no turno normal dos períodos da disciplina de Matemática.

RISCOS para os participantes da pesquisa: Existe a possibilidade do participante se sentir constrangido ou desconfortável e envolve riscos mínimos de quebra de confidencialidade.

BENEFÍCIOS: Essa pesquisa busca contribuir para o processo de ensino e aprendizagem das Funções, propondo a reflexão, análise e aprofundamento acerca dos conceitos, ideias e procedimentos, relacionados a esse conteúdo, bem como da ampliação e aprofundamento de estratégias para resolver situações-problemas da própria Matemática, de outras áreas do conhecimento, do cotidiano dos indivíduos e do mundo do trabalho.

As informações desta pesquisa serão confidenciais e serão divulgadas apenas em eventos ou publicações científicas, não havendo identificação dos voluntários, a não ser entre os responsáveis pelo estudo, sendo assegurado o sigilo sobre a sua participação. Os dados coletados nesta pesquisa (entrevistas, gravações, fotos), ficarão armazenados em (pastas de arquivo), sob a responsabilidade do (pesquisador e da Orientadora), no endereço (acima informado), pelo período de mínimo 5 anos. Nem você e nem seus pais [ou responsáveis legais] pagarão nada para você participar desta pesquisa. Fica também garantida indenização em casos de danos, comprovadamente decorrentes da sua participação na pesquisa, conforme decisão judicial ou extra-judicial.
Este documento passou pela aprovação do Comitê de Ética em Pesquisa Envolvendo Seres Humanos que está no endereço: **(Avenida Farroupilha nº 8001 – prédio 14, sala 224 – Bairro: São José – Canoas/RS, CEP: 92425-900, Tel.: (51) 3477-9217 – e-mail: comitedeetica@ulbra.br.**

Assinatura do pesquisador (a)

ASSENTIMENTO DO MENOR DE IDADE EM PARTICIPAR COMO VOLUNTÁRIO

Eu, ____, portador (a) do documento de Identidade ____________________ (se já tiver documento), abaixo assinado, concordo em participar do estudo Pensamento Geométrico de um grupo de estudantes do 3° ano do Ensino Médio: da Geometria Plana à Espacial, como voluntário (a). Fui informado (a) e esclarecido (a) pelo (a) pesquisadora sobre a pesquisa, o que vai ser feito, assim como os possíveis riscos e benefícios que podem acontecer com a minha participação. Foi-me garantido que posso desistir de participar a qualquer momento, sem que eu ou meus pais precise pagar nada.

Local e data _____________________________________

Assinatura do (da) menor: __________________________

Presenciamos a solicitação de assentimento, esclarecimentos sobre a pesquisa e aceite do/a voluntário/a em participar. 02 testemunhas (não ligadas à equipe de pesquisadores):

Nome: ___________________________________	Nome: ________________________________ -
Assinatura: ________________________________	Assinatura: ____________________________

APÊNDICE A- Instrumento de Investigação I

Prezado estudante, este instrumento de investigação visa fazer um levantamento do perfil de cada aluno, bem como de toda a turma que está participando da pesquisa. Peço, portanto, sua colaboração, respondendo a este questionário. Sua contribuição é muito importante para o desenvolvimento de nossa pesquisa. Desde já agradecemos a sua colaboração. Prof. Valmir Ninow e Profª Dra. Carmen Teresa Kaiber (orientadora).

1. Idade: __________ 2. Gênero: ( ) F ( ) M

3. Em que ano você ingressou nesta escola?

( ) Educação Infantil	( ) 3º ano	( ) 6º ano	( ) 9º ano
( ) 1º ano/Alfabetização	( ) 4º ano	( ) 7º ano	( ) 1º ano EM
( ) 2º ano	( ) 5º ano	( ) 8º ano	

4. Você já repetiu algum ano?

( ) Nunca repeti ( ) Sim, 1 vez, nesta escola ( ) Sim, 1 vez, em outra escol ( ) Sim, 2 vezes ou mais

5. Se você repetiu, em qual ano foi? (Marque quantas opções forem necessárias)

( ) 1º ano/Alfabetização	( ) 4º ano	( ) 7º ano	( ) 9º ano
( ) 2º ano	( ) 5º ano	( ) 8º ano	( ) 1º ano EM
( ) 3º ano	( ) 6º ano		

6. Se reprovou, qual foi o motivo:

a. Fiquei doente	( ) Não	( ) Sim
b. Tive problemas familiares	( ) Não	( ) Sim
c. A escola foi exigente demais	( ) Não	( ) Sim
d. Não estudei o suficiente	( ) Não	( ) Sim
e. Tive dificuldade de organizar meus estudos	( ) Não	( ) Sim
f. Não consegui entender a matéria	( ) Não	( ) Sim
g. Outro. Qual?		

7. Quando terminar o ensino médio, você pretende:

( ) Somente continuar estudando	( ) Somente trabalhar
( ) Continuar estudando e trabalhar	( ) Ainda não sei

8. Você pretende fazer o ENEM? ( ) Sim ( ) Não

9. Caso você queira dar continuidade em seus estudos, você pretende:

( ) Fazer um curso técnico. Qual?
( ) Ingressar na universidade. Qual o Curso?

10. Como você classifica seu relacionamento com:

a. Seus colegas	( ) Muito Ruim	( ) Ruim	( ) Razoável	( ) Bom	( ) Muito Bom
b. Seus professores	( ) Muito Ruim	( ) Ruim	( ) Razoável	( ) Bom	( ) Muito Bom
c. A direção	( ) Muito Ruim	( ) Ruim	( ) Razoável	( ) Bom	( ) Muito Bom
d. A coordenação	( ) Muito Ruim	( ) Ruim	( ) Razoável	( ) Bom	( ) Muito Bom
e. Os funcionários	( ) Muito Ruim	( ) Ruim	( ) Razoável	( ) Bom	( ) Muito Bom

11. Minha escola é o lugar onde:	Discordo Totalmente	Discordo	Concordo	Concordo Totalmente
a. Eu me sinto como um estranho	( )	( )	( )	( )
b. Eu faço amigos facilmente	( )	( )	( )	( )
c. Eu me sinto à vontade	( )	( )	( )	( )
d. Eu me sinto incomodado	( )	( )	( )	( )
e. Os outros alunos gostam de mim	( )	( )	( )	( )
f. Eu me sinto solitário	( )	( )	( )	( )
g. Vou porque sou obrigado	( )	( )	( )	( )
h. Eu me sinto entediado	( )	( )	( )	( )
i. Aprendo a me organizar nos estudos	( )	( )	( )	( )
j. Aprendo a raciocinar	( )	( )	( )	( )
k. Aprendo a escrever textos	( )	( )	( )	( )

12. Como você classifica os seguintes aspectos da sua escola:	Muito Ruim	Ruim	Razoável	Bom	Muito Bom
a. Organização	( )	( )	( )	( )	( )
b. Segurança	( )	( )	( )	( )	( )
c. Regras de convivência	( )	( )	( )	( )	( )
d. Professores	( )	( )	( )	( )	( )
e. Direção	( )	( )	( )	( )	( )
f. Coordenação	( )	( )	( )	( )	( )
g. Funcionários em geral	( )	( )	( )	( )	( )
h. Qualidade do ensino	( )	( )	( )	( )	( )
i. Limpeza	( )	( )	( )	( )	( )
j. Aparência do prédio	( )	( )	( )	( )	( )
k. Espaço escolar (salas de aula/ pátio/ quadras)	( )	( )	( )	( )	( )
l. Ocupação do tempo durante as aulas	( )	( )	( )	( )	( )

13. Em relação ao ensino, sua escola comparada com a de seus amigos é:

( ) Muito melhor que as outras ( ) Melhor que as outras ( ) Igual às outras
( ) Pior que as outras ( ) Muito pior que as outras ( ) Sem opinião

14. Qual a importância da escola para o seu futuro?

( ) Sem importância ( ) Pouca importância ( ) Importante ( ) Muito Importante ( ) Não sei

15. Com que frequência essas coisas acontecem em suas aulas	Nunca	Em algumas aulas	Na maioria das aulas	Em todas as aulas
a. Os professores têm que esperar muito pelo silêncio dos alunos	( )	( )	( )	( )
b. Há barulho e desordem na sala de aula	( )	( )	( )	( )
c. Os alunos prestam atenção ao que o professor fala	( )	( )	( )	( )
d. Os alunos prestam atenção às perguntas feitas pelos colegas	( )	( )	( )	( )
e. Os alunos não conseguem estudar direito	( )	( )	( )	( )
f. Os alunos entram e saem da sala sem pedir licença	( )	( )	( )	( )
g. Os alunos respeitam as regras de convivência da escola	( )	( )	( )	( )
h. Os alunos procuram o professor quando precisam de ajuda	( )	( )	( )	( )

16. Em sala de aula:	Nunca	Algumas vezes	Na maioria das vezes	Todas as vezes
a. Acompanho a matéria exposta pelo professor	( )	( )	( )	( )
b. Copio no meu caderno a matéria apresentada	( )	( )	( )	( )

c. Fico à vontade para fazer perguntas	( )	( )	( )	( )
d. Fico perdido durante a explicação do professor	( )	( )	( )	( )
e. Converso com os colegas durante as aulas	( )	( )	( )	( )
f. Discuto a avaliação realizada pelo professor	( )	( )	( )	( )
g. Realizo as atividades que o professor propõe	( )	( )	( )	( )

17. Considerando a maioria de seus professores, você percebe que eles:	Nunca	Algumas vezes	Na maioria das vezes	Todas as vezes
a. Incentivam os alunos a melhorar	( )	( )	( )	( )
b. Estão disponíveis para esclarecer as dúvidas dos alunos	( )	( )	( )	( )
c. Dão oportunidade aos alunos para exporem opiniões nas aulas.	( )	( )	( )	( )
d. Relacionam-se bem com os alunos	( )	( )	( )	( )
e. Continuam a explicar até que todos entendam a matéria	( )	( )	( )	( )
f. Mostram interesse pelo aprendizado de todos os alunos	( )	( )	( )	( )
g. Organizam bem a apresentação das matérias	( )	( )	( )	( )
h. Realizam uma avaliação justa	( )	( )	( )	( )
i. Variam a maneira de apresentar/ expor as matérias	( )	( )	( )	( )
j. Corrigem os exercícios que recomendam	( )	( )	( )	( )
k. Utilizam diferentes estratégias para auxiliar alunos com dificuldades	( )	( )	( )	( )
l. Procuram saber sobre os interesses dos alunos	( )	( )	( )	( )
m. Demonstram domínio da matéria que ensinam	( )	( )	( )	( )
n. Cobram as tarefas passadas para casa	( )	( )	( )	( )

18. Com que frequência você faz as seguintes coisas:	Nunca	Algumas vezes	Na maioria das vezes	Todas as vezes
a. Chega no horário na escola	( )	( )	( )	( )
b. Falta às aulas	( )	( )	( )	( )
c. Faz as tarefas escolares passadas para casa	( )	( )	( )	( )
d. Entrega as circulares da escola para seus responsáveis	( )	( )	( )	( )
e. Frequenta a biblioteca	( )	( )	( )	( )
f. Assiste filmes relacionados aos conteúdos vistos em aula	( )	( )	( )	( )
g. Lê de novo em casa o conteúdo das aulas	( )	( )	( )	( )
h. Discute ou tira dúvidas com outros colegas	( )	( )	( )	( )
i. Consulta dicionários, atlas ou enciclopédias	( )	( )	( )	( )
j. Refaz questões que erra em exercícios e avaliações	( )	( )	( )	( )
k. Pesquisa na internet conteúdos vistos durante as aulas	( )	( )	( )	( )
l. Participa de projetos ou atividades extraclasse	( )	( )	( )	( )
m. Estuda nos finais de semana	( )	( )	( )	( )
n. Prefere realizar os trabalhos individualmente	( )	( )	( )	( )

19. Quantas horas por dia você gasta?	Nenhuma	Até 1 hora	De 1 a 2 horas	De 3 a 4 horas	Mais de 4 horas
a. Assistindo TV	( )	( )	( )	( )	( )
b. Fazendo trabalhos da casa (domésticos)	( )	( )	( )	( )	( )
c. Estudando ou fazendo dever de casa	( )	( )	( )	( )	( )
d. Conversando com amigos	( )	( )	( )	( )	( )
e. Navegando na internet	( )	( )	( )	( )	( )

f. Estudando com colegas	( )	( )	( )	( )	( )
g. Estudando Matemática	( )	( )	( )	( )	( )

20. Com que frequência seus pais ou responsáveis conversam com você sobre:	Nenhuma	Até 1 hora	De 1 a 2 horas	De 3 a 4 horas	Mais de 4 horas
a. Questões políticas e sociais	( )	( )	( )	( )	( )
b. Sua escola	( )	( )	( )	( )	( )
c. Seus estudos	( )	( )	( )	( )	( )
d. Sua futura profissão	( )	( )	( )	( )	( )
e. Vestibular	( )	( )	( )	( )	( )
f. Sua futura formação acadêmica	( )	( )	( )	( )	( )

21. Como você classifica seu conhecimento em matemática
( ) Ótimo ( ) Bom ( ) Razoável ( ) Fraco ( ) Nenhum

22. Em casa, você recebe ajuda quando estuda Matemática ou quando faz suas tarefas de Matemática?
( ) Sim ( ) Não

23. Assinale quais os dias da semana em que você estuda Matemática:
a. ( ) Estudo apenas um dia por semana
b. ( ) Estudo entre 2 a 5 dias por semana
c. ( ) Estudo todos os dias, menos nos final de semana
d. ( ) Não estudo nenhum dia da semana

24. Se alguém perguntasse para você “quando você estuda Matemática?”, qual das respostas abaixo você daria? Escolha apenas uma delas.
a. ( ) Sempre estudo Matemática.
b. ( ) Estudo Matemática só na véspera da prova
c. ( ) Estudo Matemática só no final do ano
d. ( ) Nunca estudo Matemática

25. Você consegue entender a matéria (conteúdos) e os problemas abordados em sala de aula?
a. ( ) Sim, sempre entendo b. ( ) Não, nunca entendo
c.) Quase sempre entendo d. ( ) Quase nunca entendo

26. As explicações do professor de Matemática são suficientes para você entender o que está sendo trabalhado?
a. ( ) Sim, eu sempre entendo as explicações do professor
b. ( ) Não, eu nunca entendo as explicações do professor
c. ( ) Na maioria das vezes eu entendo as explicações do professor
d. ( ) Poucas vezes eu entendo as explicações do professor

27. Dentre os conteúdos de Matemática que você já estudou qual você mais gostou e o que menos gostou? Por que?

28. Dê sugestões de como deveriam ser as aulas de Matemática.

APÊNDICE B- Instrumento de Investigação II

Prezado estudante, este questionário tem por objetivo a coleta de dados para a pesquisa. Solicitamos a gentileza de seu preenchimento procurando respondê-lo o mais fidedignamente possível. Desde já, agradecemos a sua colaboração. Prof. Valmir Ninow e Profª Dra. Carmen Teresa Kaiber (orientadora).

1. Qual a sua opinião sobre o trabalho desenvolvido sobre o conteúdo de Funções? Justifique.

2. Na sua opinião, este trabalho desenvolvido foi diferente das atividades realizadas em sala de aula? Destaque as diferenças observadas.

3. Na sua opinião o material de estudo e as atividades desenvolvidas contribuíram para o seu processo de aprendizagem? Justifique sua resposta.

4. Quais foram os aspectos positivos de realizar as atividades e os testes?

5. Quais foram os aspectos negativos de realizar as atividades e os testes?

6. Você prefere aprender o conteúdo de maneira tradicional, em sala de aula ou da forma como foi abordado nesta sequência? Por quê?

7. Você encontrou alguma dificuldade ao ler o material de estudo? Justifique.

8. Qual a sua opinião sobre os exercícios contidos no estudo apresentado?

9.Você encontrou alguma dificuldade ao realizar os exercícios propostos? Justifique.

10. Quando você teve dúvidas sobre as atividades desenvolvidas:
( ) buscou esclarecer a dúvida com o professor
( ) buscou esclarecer a dúvida com os colegas
( ) não esclareceu a dúvida
( ) não teve dificuldades ao realizar as atividades

11. Na sua opinião, qual o papel desempenhado pelo professor durante a realização deste trabalho:

12. Quais os aspectos que você gostou no desenvolvimento deste trabalho?

13. Quais sugestões, críticas, comentários ou elogios que você tem a fazer sobre o trabalho desenvolvido?

APÊNDICE C – Materiais da Proposta de Estudo