UNIVERSIDADE LUTERANA DO BRASIL

DIRETORIA ACADÊMICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

FÁTIMA ALESSANDRA MELO DA SILVA

SEQUÊNCIA DIDÁTICA COMO ESTRATÉGIA DE ENSINO E APRENDIZAGEM PARA O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Canoas, 2023.

UNIVERSIDADE LUTERANA DO BRASIL

DIRETORIA ACADÊMICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

FÁTIMA ALESSANDRA MELO DA SILVA

SEQUÊNCIA DIDÁTICA COMO ESTRATÉGIA DE ENSINO E APRENDIZAGEM PARA O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil para obtenção do título de mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Linha de Pesquisa: Ensino e Aprendizagem em Ciências e Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Claudia Lisete Oliveira Groenwald

Canoas, 2023.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação – CIP

S586s Silva, Fátima Alessandra Melo da.
Sequência didática como estratégia de ensino e aprendizagem para o desenvolvimento do pensamento algébrico nos anos finais do ensino fundamental / Fátima Alessandra Melo da Silva. – 2023.
235 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Luterana do Brasil, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Canoas, 2023.
Orientadora: Profa. Dra. Claudia Lisete Oliveira Groenwald.

1. Educação matemática. 2. Anos finais do ensino fundamental. 3. Pensamento algébrico. 4. Recursos didáticos. I. Groenwald, Claudia Lisete Oliveira. II. Título.

CDU 372.851

Bibliotecária responsável – Heloisa Helena Nagel – 10/981

FÁTIMA ALESSANDRA MELO DA SILVA

SEQUÊNCIA DIDÁTICA COMO ESTRATÉGIA DE ENSINO E APRENDIZAGEM PARA O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil para obtenção do título de mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Aprovado em ___/___/___

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Claudia Lisete Oliveira Groenwald (orientadora)

Profa. Dra. Clarissa de Assis Olgin
ULBRA-RS

Profa. Dra. Carmen Teresa Kaiber
ULBRA-RS

Prof. Dr. Eduardo Mancera Martinez
Vice-presidente do Comitê Interamericano de Educação Matemática - CIAEM

Canoas, 2023.

AGRADECIMENTOS

A minha mãe, que é meu maior incentivo, minha inspiração e meu exemplo de cuidado, tranquilidade, dedicação e gentileza.

A minha orientadora, professora Dra. Claudia Lisete Oliveira Groenwald, pelo incentivo, respeito, segurança e oportunidade única de crescimento e aprendizado ao longo desses dois anos. Muito Obrigada!

As minhas irmãs, que estão sempre comigo. Meus exemplos de mulheres fortes.

Aos meus queridos alunos por participarem ativamente deste processo.

A todos os professores que fizeram parte da minha Educação Básica, em especial, ao meu professor de Matemática do Ensino Fundamental II, Wuppssilander, que despertou em mim o interesse pela Matemática, contribuindo, assim, pelas minhas escolhas acadêmicas.

Aos professores do programa (PPGECIM) pelo empenho e pelo excelente trabalho realizado.

Aos professores Clarissa de Assis Olgin, Carmen Teresa Kaiber, Eduardo Mancera Martinez, por aceitarem o convite para participar da banca e contribuir com este trabalho.

Enfim, agradeço a todos que, de uma forma ou de outra, colaboraram para realização e concretização deste trabalho.

RESUMO

Para o desenvolvimento do Pensamento Algébrico é essencial utilizar estratégias metodológicas de ensino para desenvolver nos estudantes habilidades como generalizar, compreender linguagem e representações algébricas e reconhecer padrões e estruturas, com vistas a produzir significados aos objetos de conhecimento da Álgebra. A problemática deste estudo centra-se na seguinte questão norteadora: como desenvolver uma Sequência Didática envolvendo os conteúdos da Álgebra nos Anos Finais do Ensino Fundamental na perspectiva da Base Nacional Comum Curricular? Desse modo, a pesquisa teve como objetivo investigar atividades organizadas em uma Sequência Didática que abordem os conceitos de Polinômios e suas operações para estudantes do Ensino Fundamental Anos Finais, na perspectiva da Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Os participantes da pesquisa foram 40 estudantes de uma turma de 9º ano do Ensino Fundamental de uma Escola Estadual na cidade de Manaus, estado do Amazonas. Justifica-se a relevância desta investigação à medida em que está inserida no contexto de discussão e reflexão sobre as constantes dificuldades apresentadas pelos alunos no desenvolvimento do pensamento matemático, em geral, e do Pensamento Algébrico, em particular. Para direcionar a pesquisa optou-se pela metodologia de natureza qualitativa, com um desenho característico do estudo de caso. As análises das produções realizadas pelos estudantes em conjunto com as observações e registros de imagens durante a aplicação das sequências de atividades apontaram que a realização de tarefas organizadas em uma Sequência Didática aliada à metodologia de Resolução de Problemas e mediada pelo uso de material concreto como recurso didático despertou o interesse dos alunos pelas atividades e contribuiu para o desenvolvimento de habilidades algébricas, pois permitiu construir gradativamente e com significado conceitos matemáticos. Foi possível identificar indícios de elementos característicos do Pensamento Algébrico, como padrões, generalização e linguagem algébrica. Além disso, a organização das tarefas em sala de aula contribuiu para o desenvolvimento de aspectos sociais e emocionais nos estudantes, como, cooperação, argumentação, responsabilidade e iniciativa.

Palavras-chave: educação matemática; anos finais do ensino fundamental; pensamento algébrico; recursos didáticos.

ABSTRACT

For the development of Algebraic Thinking, it is essential to use methodological teaching strategies to develop in students skills such as generalizing, understanding language and algebraic representations and recognizing patterns and structures, with a view to producing meanings to the objects of knowledge of Algebra. The problem of this study is centered on the following guiding question: how to develop a Didactic Sequence involving the contents of Algebra in the Final Years of Elementary School in the perspective of the National Common Curricular Base? Thus, the research aimed to investigate activities organized in a Didactic Sequence that address the concepts of Polynomials and their operations for students of Elementary School Final Years, from the perspective of the National Common Curricular Base (BNCC). The research participants were 40 students from a 9th grade elementary school class at a State School in the city of Manaus, state of Amazonas. The relevance of this investigation is justified as it is inserted in the context of discussion and reflection on the constant difficulties presented by students in the development of mathematical thinking, in general, and Algebraic Thinking, in particular. To direct the research, a qualitative methodology was chosen, with a characteristic case study design. The analyzes of the productions carried out by the students together with the observations and recordings of images during the application of the activity sequences pointed out that the performance of tasks organized in a Didactic Sequence allied to the Problem Solving methodology and mediated by the use of concrete material as a resource didactic aroused the students' interest in the activities and contributed to the development of algebraic skills, as it allowed them to build mathematical concepts gradually and with meaning. It was possible to identify evidence of characteristic elements of Algebraic Thinking, such as patterns, generalization and algebraic language. In addition, the organization of tasks in the classroom contributed to the development of social and emotional aspects in students, such as cooperation, argumentation, responsibility and initiative.

Keywords: mathematics education; final years of elementary school. algebraic thinking; didactic resources.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

PPGECIM – Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática

ULBRA – Universidade Luterana do Brasil

INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira

PNLD – Programa Nacional do Livro e do Material Didático

PCNs – Parâmetros Curriculares Nacionais

MEC – Ministério da Educação e Cultura

NCTM – National Council of Teachers Of Mathematics

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A investigação vinculada à linha de pesquisa de Ensino e Aprendizagem em Ciências e Matemática, do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECIM) da Universidade Luterana do Brasil (ULBRA), na turma de Minter de Manaus, tem como temática o uso de recursos didáticos para o desenvolvimento do Pensamento Algébrico no Ensino Fundamental. Nesse sentido, delimitou-se o tema de investigação em recursos didáticos para a temática Álgebra para estudantes do Ensino Fundamental Anos Finais de uma Escola Estadual do município de Manaus, estado do Amazonas.

A partir das experiências vividas como professora em sala de aula é possível conviver constantemente com a dificuldade no desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem na disciplina de Matemática. Tal fato pode ser observado tanto na realização de atividades diárias em classe, quanto nos resultados das notas dos estudantes em provas externas. Como exemplo, podemos citar os índices do IDEB para a proficiência em Matemática de alunos do 9º ano do Ensino Fundamental no ano de 2021. Segundo dados divulgados pelo INEP (BRASIL, 2022), a proficiência nas escolas da rede pública do país (soma de escolas federais, estaduais e municipais) caiu de 257,18 pontos em 2019 para 252,04 pontos nesse componente curricular em 2021.

A média de proficiência em Matemática dos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental das Escolas Estaduais do Amazonas foi de 247,07 pontos. Por sua vez, a proficiência média em Matemática na escola objeto desta investigação foi de 266,0 pontos, conforme dados disponíveis no portal do INEP (BRASIL, 2022). Os resultados apresentados revelam níveis de aprendizagem considerado básico, segundo a escala de desempenho proposta pelo INEP (BRASIL, 2022). Os resultados apresentados revelam níveis de aprendizagem considerados básicos, segundo a escala de desempenho proposta pelo INEP.

Analisando esses dados, acredita-se que pode haver erros ou dificuldades nos encaminhamentos metodológicos dados aos conteúdos matemáticos. O cerne desse problema pode estar relacionado às práticas de ensino atreladas a uma instrução matemática ainda muito abstrata, tornando o aprendizado dessa disciplina pouco significativo para o aluno. Lins (2004, p. 93) aponta que "muitos professores apresentam em sala de aula a Matemática como uma ciência infalível, exata e inquestionável, apresentando apenas a imposição de regras a serem seguidas pelos alunos que realizam atividades de modo automático sem refletir sobre o como chegaram a certos resultados".

Outro estudo que corrobora para demonstrar as dificuldades encontradas por estudantes na aprendizagem dos conceitos matemáticos é o de Ibrahim et al. (2013), que investigou o desempenho de estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental nas questões da Prova Brasil de 2007 relacionadas aos conceitos algébricos. Verificou-se que a quantidade de acertos foi irrelevante, somente 26% dos alunos conseguiram resolver a questão de expressão algébrica e 29% de grandezas proporcionais e quase 45% dos alunos tiveram habilidades para resolver situação-problema e sistemas de equações.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) de 2018 apresenta a concepção da unidade temática Álgebra no Ensino Fundamental com a finalidade do desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – Pensamento Algébrico – essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações e, também, de situações e estruturas matemáticas, por meio da resolução de problemas.

Acredita-se que é papel da escola e do professor que ensina Matemática desenvolver esse tipo de pensamento no aluno, a fim de superar dificuldades na construção de conhecimentos matemáticos. Para Groenwald e Becher (2010, p. 85):

> Considerando os conteúdos algébricos constantes dos programas escolares do Ensino Fundamental, uma abordagem centrada na aplicação de algoritmos e manipulação mecânica dos símbolos revela-se problemática, já que, para avançar na compreensão dos conceitos algébricos, é necessário que o aluno desenvolva um pensamento matemático de alto nível.

Nesse contexto, a proposta pedagógica dessa pesquisa é implementar (desenvolver, aplicar e avaliar) uma Sequência Didática envolvendo os conteúdos de Álgebra com a finalidade de subsidiar o trabalho do professor em sala de aula e alcançar a aprendizagem dos alunos de uma turma dos Anos Finais do Ensino Fundamental.

Portanto, com o objetivo de compreender atividades organizadas em uma Sequência Didática com vistas a aprendizagem dos conceitos de Polinômios e suas operações para estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental na perspectiva da Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018), buscou-se investigar e implementar (desenvolver, aplicar e avaliar) atividades organizadas em uma

Sequência Didática com a temática de pesquisa utilizando como recurso materiais concretos com estudantes do Ensino Fundamental Anos Finais; Discutir como o estudo de conceitos algébricos integrados ao uso de materiais concretos pode contribuir para a construção do Pensamento Algébrico e Validar com estudantes do Ensino Fundamental Anos Finais a Sequência Didática desenvolvida.

A Sequência Didática foi desenvolvida entre os meses de março e setembro de 2022, dividida em quatro sequências de atividades, com base nos conceitos de Zabala (1998).

Com a finalidade de alcançar os objetivos propostos para a investigação, apresentam-se os sete capítulos que estruturam a presente pesquisa, distribuídos em: caracterização do contexto da pesquisa, revisão da literatura sobre o tema da pesquisa, referencial teórico, análise dos livros didáticos, trajetória metodológica, apresentação da Sequência Didática e análise dos resultados.

Inicialmente, no Capítulo 1, apresentam-se o tema, justificativa e problema de pesquisa em que se insere o uso de recursos didáticos para o desenvolvimento do Pensamento Algébrico, além disso, destacam-se os objetivos que nortearam o percurso investigativo.

No Capítulo 2, faz-se a revisão de literatura, onde se apresentam as pesquisas mais recentes por meio de um mapeamento envolvendo as temáticas Pensamento Algébrico e Sequência Didática.

No Capítulo 3, aborda-se a fundamentação teórica onde se destacam as temáticas da investigação que contribuíram para contextualizar a pesquisa na visão de alguns autores como Souza (2007), Kaput (2008), Godino e Font (2003), Mancera e Basurto (2016), Groenwald (2022), entre outros. O estudo enfoca a abordagem sobre: recursos didáticos, material concreto e Pensamento Algébrico.

No Capítulo 4, apresenta-se a análise de livros didáticos do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) com o intuito de verificar a forma com que atividades algébricas estão organizadas, na perspectiva da BNCC.

No Capítulo 5, mostra-se a trajetória metodológica, bem como os procedimentos metodológicos abordados no nosso trabalho. Na continuidade, descrevem-se detalhadamente as características do contexto em que se realizou o estudo. Apresenta-se a escola pública Estadual Cacilda Braule Pinto, no que diz respeito à localização, infraestrutura, prática pedagógica, organização, desempenho dos alunos em provas externas no componente curricular Matemática e motivações para a escolha da escola. Neste capítulo, descreve-se o perfil dos participantes da pesquisa e como foi realizada a coleta de dados e mostra-se ainda a intervenção pedagógica referencial da nossa investigação. Trata-se das definições e as concepções que caracterizam uma Sequência Didática, buscando em Zabala (1998) referência para fundamentar o modo como se organizam e articulam os conteúdos de aprendizagens em um “modelo de sequência ordenada” (ZABALA, 1998, p 18).

No sexto capítulo apresenta-se a proposta da Sequência Didática para o ensino dos conceitos de Polinômios e suas operações, com foco no desenvolvimento do Pensamento Algébrico nos estudantes. Ao longo da Sequência, apresentam-se as tarefas por meio de conexões entre Álgebra e Geometria que colocam o estudante em um contexto de manipulação de objetos, interpretação, criatividade, estratégia e argumentação. A priori, para a realização das atividades, estimulou-se a organização em grupos, a discussão, a reflexão e o trabalho colaborativo juntamente com as estratégias didáticas e recursos, socialização e mediações do professor, com o objetivo de apoiar o desenvolvimento cognitivo do aluno.

Por fim, no capítulo 7, Análise dos resultados e discussão, apresenta-se a análise dos dados obtidos na implementação (desenvolvimento, aplicação e validação) da Sequência Didática, a fim de identificar a perspectiva e dificuldades do uso de recursos didáticos e estratégias de ensino e, ainda, concepções dos elementos do Pensamento Algébrico desenvolvidos pelos educandos. Realizaram-se considerações acerca do estudo na perspectiva do professor/ pesquisador inserido no contexto de sala de aula para investigar a sua própria prática de ensino e refletindo sobre a contribuição da proposta para o conhecimento e trabalhos futuros.

1 A PESQUISA

Neste capítulo, apresenta-se o problema de pesquisa em que se insere a temática, além disso, a justificativa e os objetivos geral e específicos que nortearam o percurso investigativo.

1.1 TEMA DE PESQUISA

A temática da pesquisa é o uso de recursos didáticos para o desenvolvimento do Pensamento Algébrico com estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola da cidade de Manaus, do estado do Amazonas.

1.2 JUSTIFICATIVA

A escolha da temática de pesquisa está ligada principalmente as experiências vividas como professora em sala de aula, onde é possível conviver constantemente com as dificuldades dos alunos no desenvolvimento de atividades matemáticas, em especial na aprendizagem dos conceitos algébricos. Para Coelho e Aguiar (2018, p. 171) isso ocorre em vista da "enfase que se dá a seus aspectos técnicos, deixando de lado, muitas vezes, o desenvolvimento dos conceitos". Outro aspecto importante para a escolha do estudo dessa unidade temática é que "a Álgebra faz parte do desenvolvimento humano e, como tal, surge inicialmente para resolver necessidades práticas, estando em nosso cotidiano de várias formas. Tornando-se parte essencial no ensino de Matemática" (COELHO; AGUIAR, 2018, p. 171). Para Becher e Groenwald (2010, p. 22), "cada vez mais o estudo da Álgebra tem se tornado importante para a formação dos futuros cidadãos". Ainda segundo esses autores, é necessário um ensino da Álgebra que oportunize o desenvolvimento das competências e das habilidades algébricas, que permitam a continuidade na formação educacional do estudante e, ao mesmo tempo, capacite-os para o uso desses conhecimentos no seu cotidiano.

Portanto, diante dessa realidade que exige cada vez mais conhecimentos matemáticos que "enfatize mais a forma de pensar" (COELHO; AGUIAR, 2018), essa unidade temática configura-se como parte essencial no ensino de Matemática, tornando-se fundamental desenvolver uma formação nos alunos para além da repetição exaustiva de técnicas, mas para a convivência em sociedade.

A experiência da professora/ pesquisadora desta dissertação é como professora formada Licenciatura em Matemática, concursada na Secretaria de Estado de Educação e Qualidade de Ensino do Amazonas (SEDUC-AM), desde o ano de 2012, tendo experiência de sala de aula em Ensino Fundamental Anos Finais e Educação de Jovens e Adultos (EJA). Nos anos como professora da rede pública foi possível observar que os estudantes apresentam dificuldades na aprendizagem dos conceitos matemáticos, o que levou ao desenvolvimento desta investigação.

Segundo Nacarato e Custódio (2018, p. 19), “cabe à instrução escolar o papel de promover aprendizagens aos estudantes, como forma de possibilitar o seu desenvolvimento”. Nesse sentido, o educador tem o papel de buscar estratégias pedagógicas de ensino que garantam o direito de aprendizagem e o desenvolvimento integral do aluno. Portanto, entende-se que pesquisar o uso de recursos didáticos, no caso dessa investigação, materiais concretos, para o ensino de conceitos algébricos é importante à medida que a apropriação de novas ferramentas pelo professor coloca o processo de ensino em uma nova perspectiva e o aluno em um contexto diferenciado com condições de aprendizagem, que possibilite a compreensão e o desenvolvimento de habilidades e competências.

Em virtude dos fatos mencionados, pretendeu-se refletir sobre a relevância da implementação (desenvolver, aplicar e avaliar) de uma Sequência Didática organizada com o uso de materiais manipuláveis e subsidiada por atividades didáticas sequenciadas com os conceitos de Polinômios e suas operações para o 9º ano de Ensino Fundamental, de forma que possibilitem contribuir com o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem destes conceitos matemáticos e, assim, propor uma qualificação na aprendizagem dos estudantes levando a uma maior qualidade da prática de sala de aula da professora/ pesquisadora e buscando que os resultados alcançados sejam utilizados como subsídios para outros professores que atuam nos Anos Finais do Ensino Fundamental, na disciplina de Matemática.

1.3 QUESTÃO DE PESQUISA

O problema de pesquisa pode ser expresso na seguinte pergunta: como desenvolver uma Sequência Didática envolvendo os conteúdos de Álgebra nos Anos Finais do Ensino Fundamental na perspectiva da Base Nacional Comum Curricular (BNCC)?

1.4 OBJETIVOS DA PESQUISA

Procurando apresentar respostas ao problema de pesquisa, estabeleceram-se o objetivo geral e os objetivos específicos desta investigação.

1.4.1 Objetivo Geral

A pesquisa tem como objetivo geral investigar atividades organizadas em uma Sequência Didática que abordem os conceitos de Polinômios e suas operações para estudantes do Ensino Fundamental Anos Finais na perspectiva da BNCC.

1.4.2 Objetivos Específicos

Para alcançar o objetivo geral foram traçados os seguintes objetivos específicos desta pesquisa:

- Investigar e implementar (desenvolver, aplicar e avaliar) atividades organizadas em uma Sequência Didática com a temática de pesquisa utilizando como recurso materiais concretos com estudantes do Ensino Fundamental Anos Finais;
- Discutir como o estudo de conceitos algébricos integrados ao uso de materiais concretos pode contribuir para a construção do Pensamento Algébrico;
- Validar com estudantes do Ensino Fundamental Anos Finais a Sequência Didática desenvolvida.

2 REVISÃO DA LITERATURA SOBRE O TEMA DE PESQUISA

Este capítulo tem o objetivo de apresentar um mapeamento dos trabalhos de dissertações e teses em Educação Matemática para o Ensino Fundamental Anos Finais que envolvam as palavras-chave: Pensamento Algébrico e Sequência Didática. Fez-se uma busca no Sistema Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Capes. O período definido para selecionar as produções acadêmicas no banco de teses e dissertações foi entre 2012 e 2022.

A pesquisa se deu em observar se haviam trabalhos publicados como parâmetros de pesquisa os seguintes termos: “Pensamento Algébrico”, “Ensino Fundamental”, “Sequência Didática”, conforme descritores abaixo:

- “Pensamento Algébrico” AND “Ensino Fundamental” AND “Sequência Didática”.

Encontraram-se 17 trabalhos entre dissertações e teses. Após essa análise, buscou-se refinar os dados, selecionando a Grande área do conhecimento – Multidisciplinar e na área do conhecimento refinou-se para Ensino de Ciências e Matemática. Foram encontrados 6 resultados, todas dissertações.

Optou-se em descartar 2 trabalhos, o primeiro por estar direcionado para o Ensino Fundamental na modalidade Educação de Jovens e Adultos (EJA) e a segunda investigação trabalhava com programação de planilha eletrônica para desenvolvimento da linguagem matemática, que não é o foco da nossa investigação.

Com isso, evidenciaram-se 4 dissertações de mestrado, organizadas e categorizadas por título do trabalho, ano de publicação, bem como, seu autor e o tipo de pesquisa, conforme Figura 1.

Figura 1 – Categorização das produções acadêmicas

	Título do trabalho	Ano	Autor	Tipo
1	Atividades algébricas no 6º ano do Ensino Fundamental com materiais manipuláveis	2014	Luciana Pinto Freitas	Dissertação
2	Introdução a Álgebra no Ensino Fundamental – o “x” da questão	2016	Cristiane Barcella Silva	Dissertação
3	Ensino de expressões algébricas com auxílio de Geometria plana e Aritmética	2019	Sheila Mendes de Figueiredo	Dissertação

4	O desenvolvimento do Pensamento Algébrico, através da resolução de problemas, e suas contribuições para a aprendizagem de equações do 1º grau	2019	Wagna Mendes Vieira Campos	Dissertação

Fonte: A pesquisa.

A partir dessa seleção de trabalhos acadêmicos, apresenta-se a seguir o resumo das principais ideias relacionadas às temáticas dessas investigações e discussão dos resultados.

A dissertação de Freitas (2014), busca contribuir para a inclusão de práticas que estimulem o Pensamento Algébrico desde os primeiros anos de escolaridade e que sirvam como base para a introdução da linguagem algébrica nos Anos Finais do Ensino Fundamental. A pesquisadora não deixou claro a sua pergunta norteadora, porém propõe atividades apoiadas em materiais manipuláveis, cujo objetivo é desenvolver habilidades como: perceber regularidades, realizar generalizações, estabelecer relações de igualdade e interpretar situações-problema. Para testar a viabilidade da inserção desta temática no cotidiano de sala de aula, foi criada e implementada uma Sequência Didática, em uma turma de 6º ano do Ensino Fundamental, para investigar as características do Pensamento Algébrico utilizadas e desenvolvidas pelos alunos. A metodologia de pesquisa usada na investigação foi a abordagem mista.

O trabalho está dividido em duas partes. A primeira apresenta a proposta didática com a finalidade de estimular o raciocínio algébrico, baseada no uso de três tipos de materiais concretos já bastante conhecidos no meio educacional, são eles: os blocos lógicos, o material dourado, e as barras de Culsenaire. E a segunda parte descreve a implementação da Sequência Didática, constituída de quatro seções de atividades em grupo.

As concepções de Álgebra e a caracterização do Pensamento Algébrico são discutidas no trabalho a partir da compreensão de Usiskin (1995) e dos PCNs (BRASIL, 1998). Freitas refere-se ao estudo de Usiskin (1995) para caracterizar o Pensamento Algébrico e identificar o desenvolvimento desse pensar nos alunos. O trabalho destaca ainda que acordo com Usiskin (1995) há quatro concepções de Álgebra, que determinam as finalidades da mesma: Álgebra como Aritmética generalizada; Álgebra como estudo de meios para resolver problemas; Álgebra como estudo das relações entre grandezas e Álgebra como estudo das estruturas.

A pesquisadora relata que no decorrer das atividades a principal dificuldade apresentada por alguns grupos de alunos foi quanto a interpretação dos problemas.

Freitas conclui que o trabalho com atividades incentivadoras do Pensamento Algébrico foi positivo para a classe de 6º ano do Ensino Fundamental na qual a experiência foi realizada, uma vez que o trabalho em grupos possibilitou a troca de conhecimento. A contribuição do material foi proveitosa e os alunos mostraram serem capazes de passar do estágio concreto para o pictórico. Freitas infere que as atividades contribuíram para que os estudantes do 6º ano evidenciam características de Pensamento Algébrico, tais como: melhor capacidade de expressar com palavras o que foi compreendido, realização de generalização, reconhecimento de regularidades, resolução e representação de situações-problema e estabelecimento de igualdades. E completa projetando, a partir de sua investigação, que nos próximos anos de escolaridade os alunos possam fazer associações entre o que foi aprendido nesta experiência e os novos conteúdos algébricos que serão introduzidos.

Silva (2016) em sua dissertação, objetivou colaborar com os professores do 7º ano do Ensino Fundamental que ensinam Matemática, momento em que tradicionalmente se dá a introdução da Álgebra no Brasil. Procurou-se investigar como introduzir a Álgebra no Ensino Fundamental de forma expressiva, clara e significativa para os alunos, colaborando para o desenvolvimento do pensamento e da linguagem algébricos. O primeiro passo no desenvolvimento do trabalho consistiu no levantamento de referenciais teóricos, onde buscou-se entender as dificuldades encontradas no ensino da Álgebra, principalmente, referenciando-se na coletânea de artigos intitulada “As ideias da Álgebra”, organizada por Arthur F. Coxford e Albert P. Shult (1995). Na sequência, foi realizado um estudo sobre as diferentes concepções da Álgebra a partir das concepções de Usiskin (1995), permitindo uma melhor compreensão sobre os vários usos das “letras” no estudo dessa área. Silva levantou quatro concepções que para Usiskin (1995) dizem respeito à Educação Algébrica, conforme segue: Aritmética generalizada, meio de resolver certos problemas, estudo de relações e estrutura.

A autora afirma que de acordo com seus estudos foi possível identificar que um dos principais problemas no ensino da Álgebra está em tornar a linguagem algébrica significativa para o aluno. Faz-se ainda um comparativo entre as concepções da Álgebra de Usiskin (1995) e as diferentes interpretações da Álgebra escolar e as diferentes funções das letras de acordo com os PCNs (BRASIL, 1998). Analisa-se que anuência entre Usiskin (1995) e Brasil (1998) é nítida e ressalta-se que a falta de conhecimento, tanto de professores quanto de alunos, sobre as várias concepções da Álgebra pode ser um dos motivos das frustrações dos alunos com relação à Matemática.

Finalmente, como resultado, apresenta-se uma sugestão de Sequência Didática, composta de atividades elaboradas a partir de determinados padrões de regularidades, que podem auxiliar o professor na introdução da Álgebra e auxiliar o aluno no desenvolvimento do pensamento e da linguagem algébricos. Além disso, elaborou-se um mapa de percurso, com a função de mapear os conteúdos que, segundo a pesquisa, realmente são necessários para a atingir as competências esperadas para a construção do conhecimento matemático.

A pesquisadora propõe que as atividades da proposta pedagógica de cunho exploratório sejam realizadas em grupo. A Sequência Didática apresenta sete etapas e a cada etapa finalizada recomenda-se a realização de uma avaliação.

Entende-se que há limitações para análise da referida pesquisa, pois a proposta da sequência de atividades com o uso de padrões e generalizações para introdução da Álgebra não foi validada.

A investigação Figueiredo (2019), apresenta em sua dissertação a seguinte pergunta norteadora: “Sabendo da importância que a Álgebra possui para aprimorar o pensamento abstrato, como elevar o nível desse tipo de raciocínio do aluno, de tal modo que lhe possibilite resolver situações envolvendo expressões algébricas?”. A partir desta questão a pesquisadora estabeleceu como objetivo oportunizar condições para a compreensão do conceito de expressões algébricas e sua operacionalização, para o aprimoramento do Pensamento Algébrico dos estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental, através da proposição de uma Sequência Didática envolvendo Geometria plana e Aritmética. A pesquisa seguiu a abordagem qualitativa, caracterizada como uma pesquisa-ação. O trabalho tem como produto educacional, uma Sequência Didática, norteada pela Teoria Sócio histórica de Lev Vygotsky, bem como foi desenvolvida levando em conta as etapas da Engenharia Didática.

Segundo a pesquisadora, a sequência foi constituída por atividades envolvendo o material manipulativo, com o qual se oportunizou aos alunos, a possibilidade de reconhecer e construir expressões algébricas. Assim, foram criadas condições para que os discentes percebessem relações entre diferentes modos de representação, vinculando áreas de figuras planas, com cores e signos com a escrita de diferentes expressões algébricas.

A aplicação da sequência didática pensada e elaborada possibilitou, por meio de todas as atividades realizadas, o entendimento por parte dos alunos e o avanço dos conceitos espontâneos para os científicos, na perspectiva de Vygotsky. Por outro lado, dentro do esperado, alguns alunos apresentaram pequenas dificuldades, mas essas foram sanadas com explicações da professora e com a troca de conhecimento entre os próprios colegas, propiciado pelos momentos de interação e de socialização do conhecimento propiciador.

Figueiredo (2019), concluiu que a Sequência Didática possibilitou, aos alunos envolvidos na atividade proposta, o desenvolvimento de um pensamento abstrato de forma mais fluida, pois se verificou que eles se tornaram hábeis na resolução de situações envolvendo expressões algébricas. Além disso, de acordo com as situações vivenciadas, foi possível perceber que ao introduzir um novo conteúdo deve-se aliá-lo aos conhecimentos prévios dos alunos, pois isso favorece a aprendizagem de conceitos e também que devem ser utilizados materiais manipulativos, pois esses ausiliam o aprimoramento do raciocínio.

A pesquisa de Campos (2019), objetivou apresentar o resultado de uma investigação que buscou compreender como a resolução de problemas poderia contribuir para o desenvolvimento do Pensamento Algébrico, de estudantes do 7° ano do Ensino Fundamental, e quais as suas implicações para aprendizagem dos conceitos relacionados às equações de primeiro grau, e, a partir disso, produziu uma Sequência Didática capaz de orientar professores que buscam um ensino diferenciado e eficiente sobre esses conceitos. Foi elaborado e aplicado um plano de ensino em que a pesquisadora, pondo-se como professora, buscou identificar, nos alunos investigados, a presença, ou não, de Pensamento Algébrico. Ademais, por meio desse diagnóstico, colocar em prática a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas proposta por Polya (2006).

Essa pesquisa envolveu revisão de literatura e pesquisa de campo. A pesquisadora buscou fundamentos em Lins (1992), Kaput (2008) e Radford (2009) para subsidiar o trabalho, além de trazer documentos norteadores da educação nacional, como a recém-homologada Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018). Busca-se, por meio de atividades, observar o desenvolvimento de elementos característicos constituintes do Pensamento Algébrico, segundo autores anteriormente mencionados.

Campos explica que o plano de ensino foi dividido em três partes com foco em identificar ou entender que tipo de pensamento os alunos possuíam, promover ações para levar os alunos a desenvolver um Pensamento Algébrico dentro de cada uma das vertentes e introduzir o conceito de equações do primeiro grau. Além disso, a pesquisadora enfatiza que durante todo o processo de investigação, houve “altos e baixos”, ou seja, momentos em que tudo transcorreu de maneira esperada, produzindo resultados satisfatórios, e momentos em que houve alguns percalços que inviabilizaram ou demandaram mudanças no programado.

Nesse sentido, orienta-se para aqueles que desejam utilizar metodologias pedagógicas diferentes das habituais, como no nosso caso, precisam fazer uma preparação prévia dos estudantes para não ocorrer rejeição, por parte dos alunos, durante as atividades e, também, preparar-se para conduzir com eficiência a aplicação dessas atividades. Pontua-se, também, que a maior dificuldade enfrentada reside no próprio pesquisador. Dificuldade para perceber, entender e interpretar evidências que surgiam durante a pesquisa.

A autora enfatiza a não pretensão de investigar um método de ensino ou de aprendizagem, ou as ações de alunos, ou de professores durante um trabalho em sala de aula; tampouco conteúdos ou conceitos relacionados à Matemática; ou qualquer outro objeto estático, ou de cunho pedagógico; mas, buscou entender o processo de pensamentos de estudantes, de uma turma de 7º ano do Ensino Fundamental, durante a resolução de problemas matemáticos, e como o professor poderia influenciar nesse processo de uma maneira capaz de levar esses estudantes a generalizarem ideias matemáticas, a partir de um conjunto de casos particulares, expressá-las por meio de discursos e escrevê-las em uma linguagem matemática formal.

A partir da aplicação do plano de ensino, Campos (2019) buscou evidências durante a implementação das atividades, trazendo elementos indispensáveis para responder à pergunta de pesquisa e, a partir disso, obter resultados para a pesquisa. E, com tais resultados, melhorar e validar o produto educacional, uma Sequência Didática para auxiliar outros professores e pesquisadores.

A autora acrescenta que se evidenciaram contribuições significativas sobre o entendimento das diversas formas de raciocínio de um estudante, frente a um problema de Matemática; promoveu-se a capacitação da pesquisadora, em formação continuada; sendo levantadas outras questões que poderão servir de base para novas pesquisas nessa linha. Além disso, a pesquisadora dedica um capítulo do trabalho para abordar as principais contribuições da pesquisa com o campo da Educação Matemática, apresentando uma síntese crítica, forte posicionamento, respostas e novas reflexões para a questão norteadora da pesquisa.

Diante da leitura e análise das quatro dissertações acima, vislumbra-se a importância de didáticas pedagógicas diferenciadas para o desenvolvimento e consolidação do Pensamento Matemático e Algébrico. No caso das dissertações detalhadas, apresenta-se a Sequência Didática como ferramenta norteadora da prática educativa. Nota-se que esta proposta didática deve estar bem elaborada e organizada de acordo com os objetivos de aprendizagem definidos.

Percebe-se que é importante subsidiar a pesquisa em teorias já aprofundadas para se poder gerar uma discussão esclarecedora e útil sobre a temática pesquisada.

Destaca-se, ainda, que as pesquisas avançam no sentido de superar o equívoco de estudar os conteúdos algébricos de forma desconexa e isolada de outros conteúdos da Álgebra e até de outras unidades temáticas e apontam para a construção do conhecimento com significado e que não se encerra em si mesmo, mas que transcende para a vida cotidiana.

De acordo com a leitura feita, outro ponto que fica claro é que para a construção de saberes, os professores como agentes mediadores da educação escolar precisam ser encorajados a abandonar práticas consideradas tradicionais e sem efeito cognitivo e passem a adotar métodos para incentivar, facilitar e favorecer aprendizagens por meio do desenvolvimento e da compreensão de habilidades.

Embora haja muitos estudos com a temática da investigação, as autoras das dissertações acima mencionadas sinalizam para a importância de suas contribuições, mas que estas não se findam com os modelos de atividades propostas que apresentam os aspectos caracterizadores do Pensamento Algébrico ou com os trabalhos publicados. Nesse sentido, acredita-se que esta pesquisa pode trazer contribuições relevantes por se tratar de um Estudo de Caso através do qual se busca analisar o desempenho dos estudantes dos Anos Finais do Ensino Fundamental de uma Escola Estadual na cidade de Manaus, no estado do Amazonas, ao desenvolverem uma Sequência Didática com o uso de material concreto, com o objetivo do desenvolvimento do Pensamento Algébrico nos alunos.

3 REFERENCIAL TEÓRICO

Este capítulo apresenta os fundamentos teóricos que nortearam esta investigação. No primeiro momento, trata-se de um estudo sobre a inserção de recursos didáticos no desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem nos Anos Finais do Ensino Fundamental. Em seguida, discutem-se as perspectivas e dificuldades do uso de materiais concretos no ensino de conceitos matemáticos nos Anos Finais do Ensino Fundamental. E, finalmente, apresentam-se as concepções voltadas para o desenvolvimento do Pensamento Algébrico a partir das contribuições de diferentes autores que são pesquisadores deste tema.

3.1 O USO DE RECURSOS DIDÁTICOS NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Os desafios encontrados pelos profissionais da Educação e pelos professores que ensinam Matemática, fazem com que cada vez mais educadores busquem meios e ferramentas educacionais para que o processo de ensino e aprendizagem aconteça de forma adequada e significativa para os estudantes. Para Mancera e Basurto (2016), os avanços científicos e tecnológicos, e as mudanças econômicas exigem mais habilidades para as gerações futuras, por isso a mudança do ensino da matemática sob a abordagem tradicional é essencial. Ainda na visão desses autores, para haver essa mudança basta seguir as recomendações pedagógicas básicas e atender prioritariamente ao desenvolvimento de habilidades e competências nos alunos por meio da combinação de esforço e trabalho dos envolvidos.

A BNCC, apresenta as aprendizagens essenciais que todos os alunos têm direito ao longo da Educação Básica, indicando os objetos de conhecimento que devem ser ensinados e as habilidades e as competências que devem ser desenvolvidas durante a vida escolar do estudante no Brasil. Dentre as competências gerais apresentadas no documento, destaca-se a competência 2 como fundamental para o desenvolvimento no aluno, na perspectiva desse trabalho:

> Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas (BRASIL, 2018, p. 8).

Para a BNCC (BRASIL, 2018), desenvolver competências, no âmbito da educação, é mobilizar conhecimentos, habilidades, atitudes e valores para resolver demandas complexas, da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho.

Segundo a Lei 9394/ 96 - Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, LDB (BRASIL, 1996), o Ensino Fundamental terá por objetivo a formação básica do cidadão, mediante:

> I – o desenvolvimento da capacidade de aprender, tendo como meios básicos o pleno domínio da leitura, da escrita e do cálculo; II – a compreensão do ambiente natural e social, do sistema político, da tecnologia, das área e dos valore e que se fundamenta a sociedade; III – o desenvolvimento da capacidade de aprendizagem, tendo em vista a aquisição de conhecimento e habilidades, e a formação de atitudes e valores; IV – o fortalecimento dos vínculos de família, dos laços de solidariedade humana e de tolerância recíproca em que se assenta a vida social.

Nos Anos Finais do Ensino Fundamental, devido aos desafios cada vez mais complexos e, sobretudo, tendo em vista a sua maior especialização, é importante, nos vários componentes curriculares, retomar e ressignificar as aprendizagens do Ensino Fundamental Anos Iniciais no contexto das diferentes áreas, visando ao aprofundamento e à ampliação de repertórios dos estudantes (BRASIL, 2018).

Nesse sentido, para o bom andamento das aprendizagens nesse período, a BNCC também indica para o fortalecimento da autonomia dos adolescentes oferecer-lhes condições e ferramentas para acessar e interagir criticamente com diferentes conhecimentos e fontes de informação (BRASIL, 2018).

Porém, precisa-se observar que muitas vezes o processo de ensino e aprendizagem ainda ocorre por meio de tarefas inadequadas ou que oferecem pouca possibilidade de alcançar objetivos de desenvolver competências e habilidades nos alunos. Mancera e Basurto (2016, p. 4) afirmam que:

> Não está muito claro em quais procedimentos podemos contar para obter sucesso, na educação não existem caminhos definitivos ou "receitas" de sucesso, a única coisa amplamente comprovada é que a situação atual não é adequada, ou seja, a aula expositiva e exercícios indiscriminados.

Considera-se importante combater essa realidade e adotar estratégias pedagógicas para melhorar o desempenho na Educação Básica, mas de modo especial entre os estudantes do Ensino Fundamental dos Anos Finais, etapa essencial para a continuidade dos estudos no Ensino Médio.

Assim, torna-se indispensável uma escola que possa propiciar aos alunos desta etapa de ensino um ambiente de aprendizado que seja suficientemente comprometido com a reflexão e com a compreensão do conhecimento como forma de atuar no mundo em diversos contextos. Nesse cenário, a escola pode contribuir com ferramentas, métodos, técnicas e práticas que melhor se adequar a determinado conteúdo. Souza (2007, p. 110) salienta que:

> É possível a utilização de diversos materiais que auxiliem a desenvolver o processo de ensino e aprendizagem, facilitando a relação professor-aluno-conhecimento, também que o uso desses materiais deve servir de auxílio para que no futuro os alunos aprofundem e ampliem seus conhecimentos e produzam outros conhecimentos a partir desses.

Nessa mesma direção, Castoldi e Polinarski (2009) veem a adoção de recursos didáticos na prática educativa um caminho tanto para tornar a aula mais atrativa quanto para melhorar o desempenho dos estudantes. Ainda na visão desses pesquisadores, um professor que utiliza diferentes tipos de recursos didáticos ele não só faz com que sua aula se torne mais interessante, minimizando a monotonia à qual o ensino tradicional pode estar relacionado, mas também pode favorecer a obtenção de melhores resultados.

No que se refere à utilização de recursos didáticos como meio para promover experiências de aprendizagem diversificadas e para que a finalidade do processo educativo possa ocorrer com efetividade e significado no Ensino Fundamental Anos Finais, autores como Souza (2007) e Mancera e Basurto (2016) defendem o uso de recursos didáticos como facilitadores na compreensão dos conteúdos estudados e na construção significativa do conhecimento. Para Souza (2007, p.112), “os mesmos são de fundamental importância no processo de desenvolvimento cognitivo do aluno e devem ter o poder de aproximar o aluno do conteúdo ministrado, facilitando assim sua efetiva fixação”. Na percepção de Mancera e Basurto (2016, p.32):

> É melhor contar com recursos intuitivos para reconstruir o conhecimento por conta própria do que confiar na memória. Se um aluno não se lembrar de um procedimento, ele terá ideias para usar procedimentos alternativos que lhe permitam resolver com sucesso as situações que enfrenta.

Na perspectiva do contexto do processo de ensino e aprendizagem, torna-se fundamental entender o que é recurso didático. Para colaborar com a compreensão e identificação do termo “Recurso Didático”, apresentam-se os significados disponíveis no dicionário de Língua Portuguesa Michaelis que estão relacionados com este estudo. No dicionário Michaelis (2021), a palavra “recurso” tem origem no latim *recursus* e significa ato ou efeito de recorrer; invocação de ajuda, apoio ou socorro e; ainda, meio de que se lança mão para vencer uma dificuldade ou um embaraço.

Enquanto, a palavra “didático” vem do grego *didaktikos,* apresentando os significados: relativo à didática; próprio para ensinar ou instruir; que favorece ou possibilita a aprendizagem e; também que resulta em aquisição de informação ou conhecimento, assim como de prazer e divertimento. Diante da explicação dos dois termos, entende-se que recurso didático é um apoio ou meio de que se lança mão que favorece e possibilita a aprendizagem e que também resulta em aquisição de informação ou conhecimento.

Souza (2007, p. 111), define recurso didático “como todo material utilizado como auxílio no ensino e aprendizagem do conteúdo proposto para ser aplicado pelo professor a seus alunos”. Para Botas e Moreira (2013, p. 262) “são recursos que possibilitam ao professor desenvolver um ensino centrado no aluno e na sala de aula, que auxiliam a aprendizagem, desenvolvendo uma atitude positiva dos alunos face à Matemática”. Santos e Belmino (2013, p. 1), destacam que “os recursos didático-pedagógicos são componentes do ambiente educacional estimuladores do educando, facilitando e enriquecendo o processo de ensino e aprendizagem”. Nos estudos de Castoldi e Polinarski (2009), os recursos didáticos são ferramentas que auxiliam no processo de ensino e aprendizagem, tendo como principal função a de facilitar a compreensão e apoiar o assunto abordado pelo professor. A conceituação dada pelos referidos autores está em consonância com Lorenzato (2006, p. 18), que entende material didático como “qualquer instrumento útil ao processo de ensino e aprendizagem”.

Portanto, a escolha e utilização dos recursos didáticos como suporte no ensino nas diversas áreas do conhecimento é uma etapa de grande relevância no processo de ensino e aprendizagem. Essa escolha dos recursos pelo docente pode permitir ocupar não só os espaços que o saber fragmentado e desfocado do contexto em geral deixa, mas também passar a integrar de maneira sistemática a prática diária da sala de aula. “A utilização de recursos didático-pedagógicos permite que os alunos participem do processo de aprendizagem e, com isso, além de expor o conteúdo de uma forma diferenciada, preenche lacunas que o ensino tradicional deixa” (CASTOLDI, POLINARSKI, 2009, p. 685).

Na visão de Souza (2007, p. 112), é fundamental que os educadores percebam que:

> Utilizar recursos didáticos no processo de ensino e aprendizagem é importante para que o aluno assimile o conteúdo trabalhado, desenvolvendo

> sua criatividade, coordenação motora e habilidade ao manusear objetos diversos que poderão ser usados pelo professor na aplicação de suas aulas.

Nessa perspectiva, a BNCC (BRASIL, 2018) indica decisões pedagógicas para assegurar as aprendizagens essenciais dos alunos. O documento ressalta que essas decisões, resultantes de um processo de envolvimento e participação das famílias e da comunidade, referem-se, entre outras ações, a de selecionar, produzir, aplicar e avaliar recursos didáticos e tecnológicos para apoiar o processo de ensinar e aprender.

Com base nestas ideias, acredita-se que no contexto deste trabalho, pode-se entender que recursos didáticos são instrumentos, materiais, objetos e ferramentas auxiliadoras na simulação de situações, experimentações e demonstrações; facilitadoras do trabalho do professor e; enriquecedoras do processo de aprendizagem dos alunos. Assim, concorda-se que, o uso de recursos didáticos no ensino escolar pode constituir-se como importante apoio na melhoria do processo pedagógico, em especial no ensino de conceitos matemáticos.

Segundo o NCTM[1] (2015) um Currículo de Matemática de excelência considera a utilização de recursos didáticos como essencial para a aprendizagem dos estudantes e, que tais recursos possibilitam dar sentido às ideias matemáticas, auxiliando os estudantes a raciocinar matematicamente e a comunicarem seus pensamentos.

A Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018, 274) destaca a importância essencial do papel dos recursos didáticos para a compreensão e utilização das noções matemáticas. Mas ressalta que esses materiais "precisam estar integrados a situações que levem a reflexão e à sistematização, para se iniciar um processo de formalização".

Pode-se dizer que o uso de recursos didáticos no ensino da Matemática é uma ideia não só defendida por pesquisadores, mas também, recomendado intensamente em documentos norteadores para a construção dos Currículos de Matemática em diversos países, com enfoque em uma formação mais ampla da Educação Matemática enquanto possibilidade de construção social, uma vez que coloca o aluno no centro do processo.

[1]NCTM – National Council of Teachers of Mathematics.

Vários pesquisadores apresentam a adoção de recursos didáticos como potencializadora no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Botas e Moreira (2013, p. 254), indicam que “uma das formas de promover diferentes experiências de aprendizagem matemática enriquecedora é por meio do uso de materiais didáticos, os quais assumem um papel ainda mais determinante por força da característica abstrata da Matemática”.

Segundo esses autores, é importante “proporcionar diversas oportunidades de contato com materiais para despertar interesse e envolver o aluno em situações de aprendizagem matemática, já que os materiais podem constituir suporte físico através do qual as crianças vão explorar, experimentar, manipular e desenvolver a observação” (BOTAS; MOREIRA, 2013, p. 254).

Para que essas experiências ocorram há disponível diversos tipos de recursos didáticos. Kaiber e Groenwald (2022) consideram que há uma grande variedade de recursos que podem ser utilizados no ensino, que vão desde os recursos mais simples, aos mais elaborados e tecnológicos. E pontuam materiais concretos ou manipulativos, jogos, o uso de um software, vídeos, filmes, músicas, cartazes e o livro didático como exemplos de recursos didáticos. Botas e Moreira (2013) também citam materiais manipuláveis, calculadoras, manuais escolares e outros mais como recursos para auxiliar para o professor desenvolver atividades.

Apesar da grande variedade de recursos e das vantagens da sua utilização nas aulas de Matemática, “é importante salientar que ao se utilizar recursos didáticos, estejam definidos os objetivos e como utilizá-los integrados a uma metodologia, estabelecendo quando é possível que os estudantes deixem de utilizar o recurso e passem a utilizar os conceitos de forma generalizada” (KAIBER; GROENWALD, 2022, p. 26). De acordo com a BNCC (BRASIL, 2018), para que as competências e as habilidades matemáticas sejam desenvolvidas, o aluno precisa estar inserido em processos de aprendizagens potencialmente ricos, em que lhe possibilite refletir através de formas privilegiadas da atividade matemática.

Portanto, a escolha por ferramentas ou tendências para ensinar não exclui a possibilidade da utilização de uma proposta metodológica de forma integrada, pelo contrário, a incorporação e combinação de diferentes estratégias didáticas tende a enriquecer e apoiar o contexto de aprendizagem ao qual o aluno está inserido. Nesse sentido, por se tratar de uma Ciência que usa frequentemente as abstrações, torna-se importante o enfoque experimental da disciplina a partir da utilização de recursos didáticos, por meio de outras metodologias, como a Resolução de Problemas, por exemplo.

Em vista disso, com o intuito de facilitar a compreensão do conteúdo proposto e tornar as atividades exploratória, investigativa e participativa, o trabalho do educador pode ser organizado e planejado a partir da possibilidade de diferentes metodologias, tendo o apoio de estratégias como a utilização de recursos didáticos, possibilitando, assim, o protagonismo do aluno para a aprendizagem e para a construção significativa de conceitos matemáticos, tendo o professor como mediador. Rossasi e Polinarski (2008, p. 8) afirmam que “o processo de ensino e aprendizagem é dinâmico e coletivo, exigindo por isso, parcerias entre professor/aluno e aluno/aluno”. Esses pesquisadores comentam ainda que para estabelecer estas relações dialógicas, o professor poderá optar por várias modalidades didáticas que permitam esse tipo de interação.

O que vai de encontro a análise realizada pelas pesquisadoras Kaiber e Groenwald (2022) dos trabalhos apresentados no sub-eixo Recursos Didáticos do XIII ENEM, que evidenciou um interesse tanto de professores quanto de pesquisadores que indicam a busca de recursos, estratégias e metodologias, para a ação em sala de aula, relacionada ao protagonismo dos estudantes e com a responsabilidade deste com sua aprendizagem.

Nesse sentido, acredita-se que a escolha pela utilização de um ou mais recursos como instrumento para organizar o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem em sala de aula deve ser antecedida por momentos de reflexão e discussão da conduta, interação e estratégias docentes que serão adotadas na execução das atividades e tarefas planejadas, de modo que não se torne apenas uma distração ou uma manipulação de material, sem provocar modificações na cognição do aluno, mas sim para “colocar o aluno como sujeito de uma experiência matemática rica e diversificada, em que lhe seja possível refletir através da realização de tarefas tais como resolução de problemas, atividades de investigação, realização de projetos e jogos” (BOTAS; MOREIRA, 2013, p. 254).

Segundo Lorenzato (2006, p. 18), “os materiais didáticos podem desempenhar várias funções, conforme o objetivo a que se prestam e, por isso, o professor deve se perguntar para que ele deseja utilizar esse recurso”. Na visão do pesquisador, “o material didático deve orientar a ação consciente do professor, para apoiar e permitir a sua utilização, na prática”.

Por outro lado, Lorenzato (2006, p. 18), acrescenta que o material didático é apenas um dos componentes do contexto educativo e tem por objetivo apoiar a atividade pedagógica. Dessa forma:

> O material didático nunca ultrapassa a categoria de meio auxiliar de ensino, da alternativa metodológica à disposição do professor e do aluno e, como tal, não é garantia de um bom ensino, nem de uma aprendizagem significativa e não substitui o professor.

Entende-se que o material por si só não é garantia de aprendizagem. Dessa maneira, a adoção de materiais nas aulas exige muito do trabalho docente, sendo necessário: a escolha intencional do material; objetivos de aprendizagens claros e definidos; conhecimento profundo do objeto de conhecimento e do material utilizado; compreensão do uso do material como suporte para metodologias.

Souza (2007, p. 113) afirma que é necessário "saber que os recursos didáticos devem servir apenas como mediadores neste processo, como algo que aproxime professor, aluno, conhecimento, respeitando as suas devidas proporções e sendo utilizados em momentos específicos".

Ao analisar os excertos discutidos por esses pesquisadores, entende-se que dois pontos são imprescindíveis para que os recursos didáticos atendam às necessidades reais dos estudantes, que estão inseridos no processo de ensino e aprendizagem, são eles: deve haver sensibilidade por parte do professor na escolha adequada dos materiais com foco nos objetivos das aprendizagens e o seu uso deve estar interligado a outras ferramentas pedagógicas e metodologias de ensino.

Sendo assim, acredita-se que a adoção de recursos didáticos pelo professor, pode ser uma ponte entre o conteúdo e o conhecimento, quando organizados a partir de atividades que coloquem os alunos como participantes em propostas pedagógicas que favoreçam a autonomia, o pensamento crítico e a apropriação do processo de aprendizagem, características que se esperam encontrar nos alunos da Educação Fundamental Anos Finais e, além disso, o "professor como mediador entre a intenção do ensino e os resultados obtidos pelos alunos" (GELLERT, 2004 *apud* BOTAS; MOREIRA, 2013, p. 262). Nesse sentido, "a organização e planejamento docente são fundamentais, pois, é necessário que o educador saiba reconhecer e adequar os recursos à realidade dos seus alunos e planeje caminhos didáticos para que sejam alcançados os objetivos propostos" (KAIBER; GROENWALD, 2022, p. 26).

Na perspectiva da utilização de materiais didáticos em sala de aula pelo professor, Santos e Belmino (2013, p. 1-3) orientam para a "possibilidade de que tudo encontrado no ambiente onde ocorre o processo de ensino e aprendizagem pode se transformar em um ótimo recurso didático, desde que utilizado de forma adequada". Botas e Moreira (2013, p. 262) reconhecem o papel do professor como de extrema importância na medida em que será ele o responsável pela determinação do momento e da razão do uso de um determinado material.

Mancera e Basurto (2016, p.14) destacam nos seus estudos que "os recursos sem um planejamento didático adequado não possuem sentido; eles salientam que o papel do professor continua sendo muito importante, pois é ele que planeja as atividades e os momentos que são necessários para a construção dos conceitos matemáticos". Além disso, o professor deve ter domínio e estar seguro para a utilização do material. Para Souza (2007, p. 113):

> [...] o uso de materiais didáticos no ensino escolar, deve ser sempre acompanhado de uma reflexão pedagógica quanto a sua verdadeira utilidade no processo de ensino e de aprendizagem, para que alcance o objetivo proposto. Não se pode perder em teorias, mas também não se deve utilizar qualquer recurso didático por si só sem objetivos claros.

Diante do exposto, concorda-se que há diversos recursos didáticos que podem ser inseridos no espaço da sala de aula e a sua utilização pode auxiliar a ação pedagógica e esses podem contribuir significativamente para enriquecer e influenciar o aprendizado dos alunos. Porém, todos os materiais devem ser usados de forma intencional, devido as suas diferentes características e finalidades e, também, deve estar claro no planejamento da atividade as potencialidades dos recursos e em quais situações de aprendizagem são adequadas a sua utilização nas aulas.

Desse modo, apresenta-se a fundamentação teórica para o uso de materiais concretos como recurso didático-pedagógico, na prática de sala de aula, a fim de compreender a sua relevância e dificuldades no processo de ensinar e aprender conceitos matemáticos nos Anos Finais do Ensino Fundamental.

3.1.1 Material concreto – perspectivas e dificuldades

No contexto escolar chama a atenção como conteúdos matemáticos foram e ainda são expostos por meio de metodologias essencialmente mecânicas, que não privilegiam o fazer e o pensar, com aulas somente expositivas e com os estudantes sendo passivos em sala de aula. Compreender os conteúdos (refere-se a conteúdos os objetos de conhecimento que estão indicados na BNCC) deste componente curricular, neste caso da área de Matemática nos Anos Finais do Ensino Fundamental, é uma tarefa quase impossível para os alunos. Mancera e Basurto (2016, p. 16) discutem o enfoque tradicional que predomina ao longo da história da Educação Matemática e na sala de aula e indicam procedimentos adotados nesse tipo de ensino:

> A história da introdução de melhorias no ensino da matemática não tem sido tão complexa ou tão criativa. Na verdade, a mesma coisa ainda está sendo feita e seguindo os esquemas tradicionais:
> 1. Informe como as coisas são chamadas e feitas;
> 2. Dê exemplos do que foi relatado;
> 3. Deixe extensas listas de exercícios para treinar os alunos;
> 4. Se possível, mostre uma aplicação.

Para esses autores essa é a sequência de ensino que domina o ambiente escolar, apesar do que se diz sobre resolução de problemas, aplicações, afastamento da mecanização, entre outras afirmações que geralmente constam em planos e programas de estudo.

Não se pretende buscar culpados, pois "várias gerações foram formadas sob a abordagem tradicional de ensino de matemática e ainda estão sendo formadas, embora as declarações de planos e programas de estudo digam o contrário" (MANCERA; BASURTO, 2016, p 15).

Apesar das diversas "propostas metodológicas atuais que se contrapõem ao ensino tradicional da Matemática" (GROENWALD; SILVA; MORA, 2004, p. 38) ainda hoje é perceptível, professores que optam por atividades de caráter conteudista, memorístico, repetitivo e sem conexão com outros saberes, os estudantes apenas reproduzem esse conhecimento e não possuem uma compreensão que seja possível aplicá-lo em situações problemas, levando a enfrentarem dificuldades na resolução de atividades mais elaboradas e que exijam reflexão, discussão e tomada de decisão. "Um dos grandes problemas e desafios para a Educação Matemática no século XXI é extrapolar os limites impostos pelo método tradicional de ensino, cujo modelo ainda é seguido fielmente por muitos professores" (GERVÁZIO, 2017, p. 3).

Formar um aluno nesse meio educacional é reduzi-lo a mero receptor de informações sem significado e para muitos estudantes há pouca compreensão do que está sendo desenvolvido em sala de aula. "Este tipo de Educação esvazia os alunos de subjetividade, reflexão e criticidade" (FREIRE, 2006 *apud* TEIXEIRA, 2018, p. 96). Na relação professor-aluno, o professor é detentor de todo o saber e esse mantém certo distanciamento do aluno, pois, "neste modelo, o professor é o principal ator do processo, restando ao aluno uma posição passiva" (TEIXEIRA, 2018, p. 96). Além disso, "o ambiente austero é incentivado, bem como certa distância entre os atores"

(TEIXEIRA, 2018, p. 97). Com isso, observa-se que neste tipo de ensino há uma relação verticalizada entre professor e aluno e a cooperação entre alunos não é incentivada.

Esta concepção de ensino difere de documentos norteadores da Educação no Brasil. A Constituição Federal (BRASIL, 1988), a Lei de Diretrizes e Bases da Educação (BRASIL, 1994), as Diretrizes Curriculares Nacionais e o Plano Nacional de Educação (BRASIL, 2013) orientavam para a promoção do desenvolvimento integral do educando e para a sua preparação para o trabalho, a vida e a cidadania.

No documento orientador para a formulação dos Currículos dos sistemas e das redes escolares de todo o Brasil – a BNCC (BRASIL, 2018) - encontra-se que atualmente, a criança e o adolescente precisam reconhecer-se em seu contexto histórico e cultural, comunicar-se, ser criativo, analítico-crítico, participativo, aberto ao novo, colaborativo, resiliente, produtivo e responsável requer muito mais do que o acúmulo de informações (BRASIL, 2018). Sob esta perspectiva, o foco das escolas passa a ser o desenvolvimento de Competências (mobilização de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores) e não apenas a transmissão de conteúdo. Pode-se observar que na BNCC está indicado que a Educação deve configurar-se como um espaço que incentive o aluno na busca pelo protagonismo do seu aprendizado.

No ensino de Matemática não é diferente. “Pesquisas em Educação Matemática nos últimos anos tem apresentado resultados significativos em metodologia do ensino cujas aplicações em sala de aula tem estimulado os professores de Matemática a refletirem sobre suas rotinas de aula” (GROENWALD; KAIBER; MORA, 2004, p. 37). Os avanços nas discussões promovidas por pesquisadores e professores da área sobre as perspectivas de novas práticas pedagógicas em oposição ao ensino tradicional tem contribuído para potencializar as tendências em Educação Matemática ao longo das últimas décadas, Novello et al. (2009, p.3) analisam que:

> O ensino transmissivo dominou a sala de aula durante séculos, porém essa concepção tem sido transformada pela evolução das teorias cognitivas e o surgimento de novas metodologias de ensino que potencializam a contextualização do saber, a compreensão de regras e a articulação de representações matemáticas.

Apesar das recomendações de documentos oficiais e nos avanços das pesquisas, no que tange às práticas de ensino na Educação Matemática, apontando que “métodos antigos de ensino e aprendizagem necessitam ser readaptados ou até mesmo extinguidos" (GERVÁZIO, 2017, p. 43). Em muitos ambientes escolares, os conteúdos de Matemática ainda têm sido abordados de forma abstrata, simbólica, sem demonstrações concretas e problematização dos conceitos, reduzidos à realização de cálculos algébricos e aritméticos, com uso de caderno, livro didático e lousa. Para Mancera (2022, p. 129), esse viés não deveria ser visto como um fim em si mesmo, mas parte do processo para a construção do conhecimento:

> O símbolo e o manuseio simbólico não devem ser o ponto central no desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem da Matemática. No entanto, o papel fundamental da escrita (no caderno ou no quadro de giz) costuma ser uma forma preferida de trabalho docente, principalmente nas aulas de Matemática, o que é contrário a todos os slogans e princípios dos grandes educadores e das Teorias de Aprendizagem, consideradas significativas para a aprendizagem dos estudantes. É importante salientar que é preciso aumentar a compreensão, mas isso não se consegue com a gestão simbólica.

Diante do exposto, acredita-se que é recomendável oportunizar acesso a outros meios didáticos-pedagógicos, fora o predominante método tradicional, a fim de estimular o aluno a experienciar atividades práticas com o apoio de recursos didáticos variados. Desse modo, além de incentivar o protagonismo e autonomia do estudante em sua aprendizagem, esses componentes também podem contribuir para tornar as atividades mais significativas e, assim, concretizar as aprendizagens de conceitos matemáticos.

Autores como Fiorentini e Miorim (1990) e Lorenzato (2006) defendem a utilização de materiais concretos como suporte potencializador da compreensão de conceitos no ensino e, na prática do professor. No cenário dessas referidas investigações há fortes evidências que permitem afirmar que a interação do aluno com materiais concretos pode favorecer e desenvolver significativamente o processo de ensino e aprendizagem por meio de situações que provoquem a curiosidade, a criatividade e a busca por soluções.

O conceito de material concreto e as suas características fundamentais apesentam-se como tema de muitos estudos (LORENZATO, 2006; MANCERA e BASURTO, 2016; SERRAZINA, 1991). Lorenzato (2006, p. 18), entende material concreto como "objetos ou coisas que o aluno é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar. Podem ser objetos reais com aplicação no dia-a-dia ou podem ser objetos que são usados para representar uma ideia". Na visão de Serrazina (1991, p. 37), os materiais manipuláveis são "objetos, instrumentos que podem ajudar os alunos a descobrirem, a entenderem ou consolidarem conceitos fundamentais nas diversas fases da aprendizagem". Na visão de Moyer (2001 *apud* KAIBER; GROENWALD, 2022, p. 22), "os materiais manipulativos são objetos projetados para representar explicita e concretamente ideias matemáticas que são abstratas. Eles têm um apelo visual e tátil e podem ser manipulados pelos aprendizes por meio de experiências manuais". Neste trabalho usam-se os termos "material concreto" e "material manipulativo", pois se entende, que o material concreto apresentado nessa investigação apresenta características de material manipulável.

A partir desta compreensão, busca-se, agora, identificar as perspectivas e as dificuldades da utilização de materiais concretos em sala de aula.

Mancera e Basurto (2016, p. 14) destacam que "os materiais utilizados em aula são um mediador entre o aluno e o conhecimento matemático, pois o material permite que ele tome consciência de importantes relações que mais tarde constituirão as bases do conteúdo matemático e simbólico que o aluno deve trabalhar".

Segundo Gervázio (2017, p. 4), trabalhar com esses materiais pode proporcionar, através de atividades, um atrativo para os discentes e um melhor aprendizado dos conteúdos. Com isso, o professor precisa transformar suas aulas tradicionais em aulas dinamizadas, inovadoras e criativas, tornando os experimentos indispensáveis na aplicação desse novo modelo de ensino.

De acordo com Passos (2006, p.1):

> Em um ambiente de manipulação e investigação, visando não somente a visualização e a memorização, propomos uma prática pedagógica na qual o aluno possa encontrar condições de produzir o conceito, produzir conhecimento, experimentar combinações, expressar-se livremente, desenvolver criatividade, resolver problemas, ampliar sua noção de mundo.

Nesse sentido, entende-se que o uso de material concreto pode ser um componente essencial para a organização do processo de ensino e aprendizagem na sala de aula, tendo em vista que esses materiais colocam o aluno em contato com atividades experimentais e investigativas quando mediadas por outras metodologias de ensino, como a resolução de problemas. Portanto, para desenvolvimento de competências específicas na área de Matemática, como "desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo a conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo" (BRASIL, 2018), essa abordagem mais prática dos conceitos configura-se como uma alternativa às aulas tradicionais com o uso do livro, quadro e giz.

Para Gervázio (2017, p. 4):

> No ensino da Matemática, para que os estudantes absorvam um aprendizado mais efetivo, é essencial que se tenha uma teoria, mas que esta esteja aliada à prática. Assim, envolver os alunos com materiais concretos, com o intuito de promover uma familiarização com o universo matemático, deve ser um método indispensável para a educação. Nessa perspectiva, ao utilizar os materiais concretos o aluno terá um contato mais próximo com a Matemática.

A utilização de material concreto pelos alunos “incentiva a busca, o interesse, a curiosidade e o espírito de investigação; instigando-os na elaboração de perguntas, desvelamento de relações, criação de hipóteses e a descoberta das próprias soluções'' (NOVELLO et al., 2009, p. 4). Lucena (2017, p.27) acredita que a manipulação tátil de objetos concretos pelo aluno:

> Permite realizar construções e deformações de objetos geométricos, cálculos de forma concreta através de jogos (por exemplo), ajudando a perceber conceitos e propriedades de elementos matemáticos, bem como o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático, que é determinante na resolução de problemas matemáticos do seu cotidiano.

De acordo com essa autora, essa interação pode enriquecer o ensino de Matemática, pois o uso intencional do material dá contorno físico a entes matemáticos e dessa maneira contribuir para a produção de significado em situações do cotidiano.

Para Souza, Lopes e Nascimento (2020, p. 2), apesar das peculiaridades inerentes a essa área do conhecimento, é interessante a utilização de métodos lúdicos associados ao contexto social do aluno para apresentação de conceitos:

> Apesar de ser uma ciência que essencialmente trabalha com raciocínios hipotético-dedutivos, com demonstrações apoiadas sobre um conjunto de axiomas, postulados e teoremas, no Ensino Fundamental é importante o tratamento lúdico da disciplina que se utiliza de recursos concretos para que, através de experimentações, os alunos possam tirar conclusões e desenvolver as habilidades necessárias para resolver problemas inerentes ao seu cotidiano. Contudo, nos Anos Finais do Ensino Fundamental, espera-se que seja estimulada a dedução de algumas propriedades e a verificação de conjecturas a partir de outras, pois nessa fase o aluno já tem uma capacidade maior de entender raciocínios abstratos.

Na perspectiva desses pesquisadores, durante as diferentes fases do Ensino Fundamental é possível a organização e o desenvolvimento do trabalho pedagógico da disciplina de Matemática pautado no uso de materiais concretos, mas salientam que é necessário considerar a complexidade curricular exigida em cada etapa dessa modalidade de modo que o aluno tenha a sua maturidade cognitiva respeitada e suas aprendizagens asseguradas.

O que leva a uma reflexão sobre as características desses materiais quando utilizados no ensino de Matemática. Para Serrazina (1991, p. 37), “os materiais caracterizam-se pelo envolvimento físico da criança numa situação ativa de aprendizagem que no contato permite explorar ideias e desenvolver noções matemáticas". Para kaput (2009, p. 3), "o material concreto propicia aulas mais dinâmicas e amplia o pensamento abstrato por um processo de retificações sucessivas que possibilita a construção de diferentes níveis de elaboração do conceito".

Nesse sentido, os alunos poderão trabalhar com as diferentes possibilidades de representação do objeto de conhecimento estudado.

Percebe-se, que o material concreto apresenta como características inerentes à sua utilização a interpretação, a experimentação e a manipulação, por meio do toque, visualização e movimentação. Portanto, pressupõe-se a participação ativa dos educandos, trazendo a possibilidade de dinamismo e interação entre os participantes da atividade que está sendo realizada. Ou seja, segundo Moyer (2001 *apud* KAIBER; GROENWALD, 2022, p. 22), "os alunos devem ser participantes ativos que constroem seu conhecimento, reorganizando suas maneiras de conhecer e extrair coerência e significado de suas experiências".

É nesse contexto, que o uso de materiais concretos se desenha como uma possibilidade de recurso didático para ser inserido no Currículo de Matemática, estreitando o abismo entre teoria e prática e entre o concreto e o abstrato, assim, minimizando as rupturas do saber fragmentado e desfocado da realidade do aluno. Ausubel (1982), identifica "a realização das atividades com a utilização de materiais concretos como essencial no ensino e aprendizagem de Matemática, pois auxilia os alunos na construção do conhecimento, tornando a aprendizagem mais fácil e significativa através de atividades significativas".

Acredita-se que propor atividades investigativas que envolvam os objetos de conhecimento da Matemática, com a utilização de materiais concretos como ferramenta de ensino e a resolução de problemas como estratégia metodológica em sala de aula, podem criar um ambiente favorável à aprendizagem significativa e despertar o interesse, a reflexão e a criatividade no educando. Para Tenreiro e Vieira (2001 *apud* GROENWALD; KAIBER; MORA, 2004), a resolução de problemas surge como um contexto para os alunos usarem as suas capacidades de pensamento, prioritariamente de pensamento crítico (formulação de hipóteses, análise, generalização, avaliação, entre outras habilidades).

Os problemas constituem a essência e o dinamismo da Matemática (GROENWALD; KAIBER; MORA, 2004). Para Dante (1996 *apud* GROENWALD;

KAIBER; MORA, 2004) essa metodologia tem como objetivos:

> Fazer o aluno pensar produtivamente, desenvolver o raciocínio do aluno, ensinar a enfrentar situações novas, oportunizar o envolvimento com aplicações da Matemática, tornar as aulas mais interessantes, equipar o aluno com estratégias para desenvolver situações-problema e propiciar uma boa base matemática.

Nesse sentido, colocar o aluno em contextos de aprendizagens ricos, que priorizem atividades experimentais e investigativas mediadas por metodologias de ensino diversificadas pode contribuir para uma melhor compreensão dos conceitos matemáticos, em especial dos objetos de conhecimento da Álgebra, por seu caráter abstrato.

Nessa perspectiva, aliar a metodologia de Resolução de problemas ao uso de materiais concretos, como recurso didático, pode possibilitar aos alunos melhor compreensão de conceitos matemáticos, pois a manipulação dos objetos permite interpretar conceitos a partir de construções concretas. Para Kaiber e Groenwald (2022) em cenários onde o material concreto se constitui como ferramenta integrado a alguma metodologia de ensino há maior possibilidade para a aprendizagem de conceitos matemáticos com significado, pois o uso de recursos didáticos ultrapassa a intenção recreativa. Assim, "o uso de recursos didáticos não se justifica apenas por envolver os alunos e motivá-los à aprendizagem, mas para mobilizá-los a estabelecer relações, observar regularidades e padrões, pensar matematicamente, de forma que leve ao desenvolvimento do pensamento matemático" (KAIBER; GROENWALD, 2022, p. 26).

Dessa maneira, considerando um cenário de manuseio do material concreto, a mediação do professor é indispensável para criar condições de aprendizagem que permitam a compreensão de conceitos por meio da interação do aluno com o material concreto. Nesse sentido, acredita-se que o uso dessa ferramenta de ensino coloca o aluno no centro do processo de construção do seu conhecimento e o professor como mediador das situações de aprendizagens dos conceitos matemáticos. Além disso, conforme discutido por Silveira, Novello e Laurino (2011, p.21):

> Essa ferramenta pedagógica, também colabora para a socialização dos alunos, promovendo a integração e a participação efetiva nas atividades propostas; e alocando os estudantes no centro das atenções pedagógicas do docente, ou seja, a preocupação do professor não está no conteúdo a ser transmitido, mas no saber a ser construído. Tais materiais concretos viabilizam a aprendizagem através de experiências, a construção e/ ou reconstrução e ampliação de significados matemáticos.

Considerar o material concreto como ferramenta de ensino pode estimular o trabalho em equipe e melhorar a interação entre alunos e entre alunos e professor, além de colocar o aluno com uma atitude ativa e responsável pelo seu aprendizado, tendo a mediação pedagógica como essencial para o sucesso do trabalho. Como destaca Piaget (1973, p.16), sobre a importância da ação consciente do professor nesse processo educacional, ao afirmar que:

> É óbvio que o professor enquanto organizador permanece indispensável no sentido de criar as situações e de arquitetar os projetos iniciais que introduzam os problemas significativos à criança. Em segundo lugar, ele é necessário para proporcionar contraexemplos que forcem a reflexão e a reconsideração das soluções rápidas. O que é desejado é que o professor deixe de ser um expositor satisfeito em transmitir soluções prontas; o seu papel deveria ser aquele de um mentor, estimulando a iniciativa e a pesquisa.

Nessa perspectiva, “a eficiência desse tipo de material didático, no que se refere ao desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem, está intrinsecamente ligada à postura do professor e à sua mediação nesse processo” (LUCENA, 2017, p. 27). Logo, “utilizar o material concreto por si só, não garante aprendizagem, é fundamental o papel do professor nesse processo, enquanto mediador da ação e articulador das situações experienciadas no material concreto e os conceitos matemáticos, para uma posterior abstração e sistematização” (NOVELLO et al., 2009, p. 5). Cohen; Raundenbush; Ball (2003 *apud* KAIBER; GROENWALD, 2022, p. 26) ponderam que “os melhores materiais podem ser de pouca utilidade se os professores não podem aproveitá-los em tarefas de enquadramento (tarefas que estejam integradas aos recursos) ou se os alunos não os utilizam para se envolverem na resolução das tarefas propostas”.

O uso de ferramentas como mediadores do processo de aprendizagem, é discutido no trabalho de Santos; Luvison e Moreira (2018). Na visão desses autores, artefatos como materiais manipulativos, embora comum nas aulas de Matemática, faz-se necessária a compreensão de que os materiais podem ajudar ou não as crianças a construírem ideias matemáticas, visto que esses recursos não são efetivamente os conceitos, esses são construídos por meio das relações estabelecidas. Além disso, segundo Serrazina (1990 *apud* BOTAS; MOREIRA, 2013, p. 262), é importante o uso consciente dos materiais:

> Qualquer material deve ser usado de forma cuidadosa, pois o mais importante não é o material em si, mas a experiência significativa que esse deve proporcionar ao aluno, uma vez que a utilização dos materiais, por si só, não é sinônimo ou garantia de uma aprendizagem significativa, destacando assim o papel do professor na planificação relativa aos materiais na aula.

Portanto, no contexto desta pesquisa, é fundamental que o professor, enquanto mediador da ação e articulador das situações experienciadas na relação entre o material concreto e os conceitos matemáticos, torne claro na elaboração do seu planejamento, as metas e objetivos a serem alcançados na execução da proposta pedagógica. Essa tarefa permitirá que o uso de material concreto nas aulas não seja realizado de maneira aleatória e sem significado, mas para a construção do conhecimento e para a efetivação do pensamento matemático. “Não se pode simplesmente lançar mão deste ou daquele material, é preciso refletir acerca de como o modelo poderá ajudar no estabelecimento de relações” (SANTOS; LUVISON; MOREIRA, 2018, p. 76).

Para Mancera (1998), no ensino com o uso de materiais manipulativos não se trata de atividades para distrair os alunos, trata-se disso e muito mais. Não se trata apenas de incorporar algo que os distrai e torna a aula menos onerosa, trata-se de ensinar fortalecendo as partes conceituais antes de chegar à mecanização e gestão operacional.

Logo, entende-se que os materiais podem contribuir para a compreensão do conceito estudado a partir das relações que se estabelecem com a manipulação, representação, visualização do novo objeto formado, porém, esse objeto não é a expressão do conceito em si, “mas apoio para gerar ideias e concepções” (MANCERA; BASURTO, 2016). Fiorentini e Miorim (1990, p. 2) ressaltam que “subjacente ao material deverá haver uma proposta pedagógica que justifique sua implementação na sala de aula”. Visto que ele pode ser significativo apenas para o professor, que já tem o conceito formado e pode visualizá-lo no objeto (SANTOS; LUVISON; MOREIRA, 2018, p. 76). Na visão de Libâneo (1994, p. 221):

Há uma diversidade de materiais à disposição do professor de Matemática que podem enriquecer as aulas, destacando-se: tangram, material dourado, blocos lógicos, ábaco, além dos materiais que podem ser confeccionados com papel, cartolina, dentre outros. Por isso, a importância da escolha consciente pelo professor do material em sintonia com a finalidade da aprendizagem a ser alcançada. Lorenzato (2006, p. 21) afirma que “o uso do material depende do conteúdo a ser estudado, depende dos objetivos a serem atingidos, depende do tipo de aprendizagem que se espera alcançar e depende da filosofia e política escolar”. Turrioni (2006, p. 78) recomenda que se “utilizado corretamente em sala de aula, com intenção e objetivo, o Material Manipulável pode tornar-se um grande parceiro do professor, auxiliando no ensino e contribuindo para que o aluno tenha uma aprendizagem significativa”.

Portanto, é fundamental ter profunda compreensão do material trabalhado em sala de aula. Fiorentini e Miorim (1990) destacam que o conhecimento sobre os materiais como recursos de ensino e possibilitadores de ensino e aprendizagem podem promover um aprender significativo no qual o aluno pode ser estimulado a raciocinar, incorporar soluções alternativas, acerca dos conceitos envolvidos nas situações e, consequentemente, aprender.

Nessa perspectiva, o material concreto apresenta-se como uma forma diferenciada de apresentar os conceitos matemáticos, “podendo ser um excelente catalisador para o aluno construir o seu saber matemático” (LORENZATO, 2006, p. 21).

Ao incluir materiais concretos na realização das tarefas, o professor permite ao aluno “contato visual e tátil” com os conceitos matemáticos, onde, de acordo com Novello et al. (2009) através dos experimentos, ele terá uma noção mais lógica de onde vêm as fórmulas e os significados delas. Segundo Sarmento (2010, p. 4), a utilização dos materiais manipulativos podem trazer vantagens para a aprendizagem dos alunos, como, por exemplo:

> a) Propicia um ambiente favorável à aprendizagem, pois desperta a curiosidade das crianças e aproveita seu potencial lúdico;
> b) Possibilita o desenvolvimento da percepção dos alunos por meio das interações realizadas com os colegas e com o professor;
> c) Contribui com a descoberta (redescoberta) das relações matemáticas subjacentes em cada material;
> d) É motivador, pois dá um sentido para o ensino da Matemática. O conteúdo passa a ter um significado especial;
> e) Facilita a internalização das relações percebidas.

É nesse cenário que a escolha de materiais alinhada à BNCC (BRASIL, 2018) podem se configurar como perspectiva de ferramenta para apoiar as atividades de ensino e aprendizagem do currículo escolar de Matemática, conciliando teoria e prática, considerando os conhecimentos e favorecendo o desenvolvimento de habilidades e competências que o documento determina para a aquisição das aprendizagens essenciais pelos alunos.

Em vista disso, observa-se que para criar condições propícias à aprendizagem e à construção de conceitos matemáticos mais significativos, é fundamental o professor planejar propostas pedagógicas que privilegiem a utilização de variados procedimentos metodológicos, por exemplo, por meio da experimentação com material concreto. Para tanto é preciso definir antecipadamente os materiais adequados de acordo com os objetivos de aprendizagem a serem alcançados. Além disso, deve-se considerar as diferentes características dos alunos e as peculiaridades dos grupos de estudo.

Nessa direção, acredita-se que a organização de tarefas com foco na manipulação de materiais concretos como recurso didático-pedagógico pode promover a socialização e participação ativa e efetiva dos alunos nas atividades, no caso desta investigação, atividades organizadas em uma Sequência Didática, tendo como guia a resolução de problemas para nortear as ações do professor. Nesse contexto, coloca-se o professor como mediador das situações de aprendizagem dos conceitos matemáticos e o aluno no centro do processo de construção do conhecimento, em detrimento a uma postura centralizadora do professor e passiva do aluno.

A seguir apresenta-se a fundamentação teórica sobre Pensamento Algébrico.

3.2 PENSAMENTO ALGÉBRICO

A Álgebra constitui um dos grandes ramos da Matemática (PONTE; BRANCO; MATOS, 2005). Segundo Groenwald e Becher (2010, p. 84):

> A Álgebra faz parte do processo de Educação Matemática vivenciado pelos estudantes desde as séries iniciais do Ensino Fundamental, embora, nos primeiros anos de escolarização não seja de modo formalizado. Já nos primeiros anos do Ensino Fundamental, quando o aluno aprende a calcular o valor desconhecido, em problemas de Matemática, mesmo sem atribuir a esse um valor ou símbolo que o represente, já está sendo introduzido o Pensamento Algébrico. A partir da 5ª série inicia-se, na escola, o ensino da Álgebra formal, caracterizado pela representação dos valores desconhecidos, por símbolos e o uso de fórmulas, na 6ª série introduzem-se as equações do 1º grau e sua resolução.

Portanto, assume-se nesta pesquisa que o estudo da Álgebra é importante para a formação dos futuros cidadãos, pois esse conhecimento auxilia a viver no mundo moderno e sem ele, as pessoas terão dificuldades de atuarem com autonomia. Para House (1995, *apud* GROENWALD; BECHER, 2010), a Álgebra tem lugar de destaque nos Currículos de Matemática da Educação Básica há muito tempo e, afirma que embora sejam feitas modificações frequentes, geralmente, essas consistem apenas na reorganização dos mesmos conteúdos, isso porque as tecnologias da informação e as forças sociais atuam fortemente durante o processo de definição dos conteúdos.

Na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), a unidade temática Álgebra está presente no Currículo de Matemática ao longo de todo o percurso do Ensino

Fundamental - Anos Iniciais e Anos Finais (BRASIL, 2018).

Kaput (1999, p. 134), descreve a Álgebra como algo que:

> [...] envolve generalizar e expressar essa generalização usando linguagens cada vez mais formais, onde a generalização se inicia na Aritmética, em situações de modelagem, em Geometria e virtualmente em toda a Matemática que pode ou deve aparecer nas séries elementares.

No Ensino Fundamental Anos Iniciais, as ideias fundamentais desta unidade temática são: regularidade, generalização de padrões e propriedades da igualdade. Enquanto nos Anos Finais do Ensino Fundamental, segundo o texto da BNCC (BRASIL, 2018, p. 268):

> Os estudos de Álgebra retomam, aprofundam e ampliam o que foi trabalhado no Ensino Fundamental – Anos Iniciais. Nessa fase, os alunos devem compreender os diferentes significados das variáveis numéricas em uma expressão, estabelecer uma generalização de uma propriedade, investigar a regularidade de uma sequência numérica, indicar um valor desconhecido em uma sentença algébrica e estabelecer a variação entre duas grandezas. É necessário, portanto, que os alunos estabeleçam conexões entre variável e função e entre incógnita e equação. As técnicas de resolução de equações e inequações, inclusive no plano cartesiano, devem ser desenvolvidas como uma maneira de representar e resolver determinados tipos de problema, e não como objetos de estudo em si mesmos.

Dessa maneira, a BNCC (BRASIL, 2018) apresenta as aprendizagens essenciais e as aptidões em torno das quais considera que se deve organizar o trabalho a realizar com os alunos desse nível de ensino, de modo a criar condições favoráveis à aprendizagem da Álgebra, explicitando que a unidade temática Álgebra tem como finalidade o desenvolvimento do Pensamento Algébrico.

Cabe ainda destacar que para desenvolver esse tipo de pensar, a BNCC (BRASIL, 2018, p. 270) recomenda que o aluno seja incentivado a "criar modelos matemáticos para compreender, representar e analisar relações quantitativas e qualitativas entre grandezas, utilizando de estruturas matemáticas que fazem o uso de letras e símbolos". Ainda de acordo com esse documento de referência nacional para a construção dos currículos, para o desenvolvimento do Pensamento Algébrico, é adequado que os alunos sejam capazes de:

> Identificar regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos, bem como criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas, para resolver problemas, com compreensão dos procedimentos utilizados.

Nesse contexto, compreende-se que aprender Álgebra vai muito além da manipulação de letras e símbolos, envolve o desenvolvimento de um pensamento amplo e complexo que se aprofunda ao longo dos anos de escolaridade, o Pensamento Algébrico. Segundo Ponte, Branco e Matos (2009, p. 10):

> aprender Álgebra implica ser capaz de pensar algebricamente numa diversidade de situações, envolvendo relações, regularidades, variação e modelação. Resumir a atividade algébrica à manipulação simbólica, equivale a reduzir a riqueza da Álgebra a apenas a uma das suas facetas.

De acordo com os Princípios e Estándares para la Educación Matemática do NCTM (2000), as grandes ideias do Pensamento Algébrico envolvem representação, raciocínio proporcional, significado de variáveis, padrões e funções, igualdades, raciocínio dedutivo e indutivo. Para Kieran e Chalouh (1993) o Pensamento Algébrico envolve o desenvolvimento de um raciocínio matemático dentro de um referencial algébrico, construindo o significado para símbolos e operações algébricas em termos da aritmética. Durante o desenvolvimento destas competências destaca-se, no estudo da Álgebra, o uso de símbolos como uma parte fundamental do aprendizado proficiente da Álgebra e consequentemente da solução de problemas que requeiram a aplicação da Álgebra na sua solução.

Para Godino e Font (2003, p.774), o professor deve ter compreensão da importância que a Álgebra e o Pensamento Algébrico têm no estudo da Matemática:

> O raciocínio algébrico implica em representar, generalizar e formalizar padrões e regularidades em qualquer aspecto da Matemática. E à medida que se desenvolve esse raciocínio, se vai evoluindo no uso da linguagem e seu simbolismo, necessário para apoiar e comunicar o Pensamento Algébrico, especialmente nas equações, nas variáveis e nas funções. Esse tipo de pensamento está no coração da Matemática concebida como a ciência dos padrões e da ordem, já que é difícil encontrar em outra área da Matemática em que formalizar e generalizar não seja um aspecto central. Em consequência, os professores em formação têm que construir essa visão do papel das ideias algébricas nas atividades matemáticas, e sobre como desenvolver o Pensamento Algébrico durante todos os níveis de ensino.

Historicamente o ensino da Álgebra foi desenvolvido sobre bases de um “ensino mecanicista e destituído de significação para os alunos” (NACARATO; CUSTÓDIO, 2018, p. 13). Na visão de Kaput (2005 *apud* BECHER; GROENWALD, 2010, p. 244), o ensino tradicional da Álgebra está relacionado com a aprendizagem de regras para a manipulação de símbolos, simplificação de expressões algébricas e resolução de equações. Ainda para o referido autor, a Álgebra ensinada na escola:

> Tem servido para ensinar um conjunto de procedimentos que, na visão dos alunos, não têm relação com outros conhecimentos matemáticos e nem com o seu mundo cotidiano. Além disso, a Álgebra se dedica a capacitar os estudantes para produzir sequências de símbolos corretas e não foca na compreensão dos conceitos e do raciocínio matemático. As aplicações utilizadas são artificiais, e os alunos não têm a oportunidade de refletir sobre

as suas próprias experiências, nem de articular os seus conhecimentos, memorizam procedimentos que são assumidos como operações sobre sequências de símbolos e que resolvem problemas artificiais sem significado.

Nesse cenário, o processo de ensino não corresponde com a abordagem dada a concepção do Pensamento Algébrico presente na BNCC (BRASIL, 2018) nos Anos Finais do Ensino Fundamental. Por essa perspectiva de ensino, o tratamento dado à Álgebra se restringe a aspectos técnicos, contribuindo para aprofundar dificuldades trazidas pelos alunos dos anos iniciais, como, por exemplo, a compreensão do uso das variáveis como representação de um número qualquer ou símbolos. Os alunos, geralmente, não conseguem relacionar a utilização da letra para expressar ideias de regularidades e generalização de padrões.

Assim, compreende-se que o ensino é artificial e não produz experiências reflexivas nos alunos e se reduz a manipulação de procedimentos sem significado. Por outro lado, quando a Álgebra é ensinada em sua forma mais ampla, promove a construção de aprendizagens conceituais com compreensão. Segundo Kaput (2005 *apud* BECHER; GROENWALD, 2010, p. 245):

> O raciocínio algébrico e o uso de representações algébricas como gráficos, tabelas, planilhas eletrônicas e fórmulas, são as ferramentas intelectuais mais poderosas, e é lamentável que os estudantes, muitas vezes, se afastem da Matemática por não compreenderem o significado dos conteúdos estudados, deixando de desenvolver competências e habilidades ligadas ao simbolismo algébrico, sem o qual não existiria a Matemática superior nem a Ciência como a conhecemos. O grande empreendimento é fazer a Álgebra acessível a todos os alunos, criando um ambiente na sala de aula que possibilite a aprendizagem com compreensão.

Diante disso, entende-se que o desenvolvimento de um pensar matemático mais profundo e elaborado, na perspectiva do estudo da Álgebra, revela-se nos alunos quando, nomeadamente, eles se envolvem no processo matemático de generalização tendo por base a observação e análise de dados numéricos, padrões, regularidades ou relações matemáticas e expressam essas generalizações usando recursos diversos que podem passar pela utilização da linguagem natural, diagramas, tabelas, fórmulas ou símbolos matemáticos (KAPUT, 2008).

Ou seja, são cinco elementos característicos que contribuem para o desenvolvimento do Pensamento Algébrico nos alunos, são eles:

> (I) a generalização e formalização de padrões e restrições; (II) a manipulação de formalismos guiada sintaticamente; (III) o estudo de estruturas abstratas a partir de cálculos e relações; (IV) o estudo de funções, relações e variação de duas variáveis; e (V) a utilização de múltiplas linguagens na modelação matemática e no controle de fenômenos (KAPUT, 2005 *apud* NACARATO; CUSTÓDIO, 2018, p. 15).

Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005, p. 5) corroboram com essas ideias e ressaltam que com o desenvolvimento do Pensamento Algébrico espera-se que a criança seja capaz de estabelecer:

> […] relações/comparações entre expressões numéricas ou padrões geométricos; percebe e tenta expressar as estruturas aritméticas de uma situação-problema; produz mais de um modelo aritmético para uma mesma situação-problema; ou, reciprocamente, produz vários significados para uma mesma expressão numérica; interpreta uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas; transforma uma expressão aritmética em outra mais simples; desenvolve algum tipo de processo de generalização; percebe e tenta expressar regularidades ou invariâncias; desenvolve/cria uma linguagem mais concisa ou sincopada ao expressar-se matematicamente.

Diante do exposto, observa-se que muitos estudos discutem sobre as ideias acerca do desenvolvimento do Pensamento Algébrico, Kaput (2005), Kaput (2008), Groenwald e Becher (2010) e Nacarato e Custódio (2018). As pesquisas desses autores concorrem para as propostas contidas nos Princípios e Estándares para la Educación Matemática do NCTM (2000), onde apresentam quatro itens em torno dos quais é proposta a organização do trabalho a ser realizado com alunos de todos os níveis de ensino, para criar condições favoráveis ao desenvolvimento do Pensamento Algébrico e à aprendizagem da Álgebra: compreender padrões, relações e funções; representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos; usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas; analisar a mudança em vários contextos.

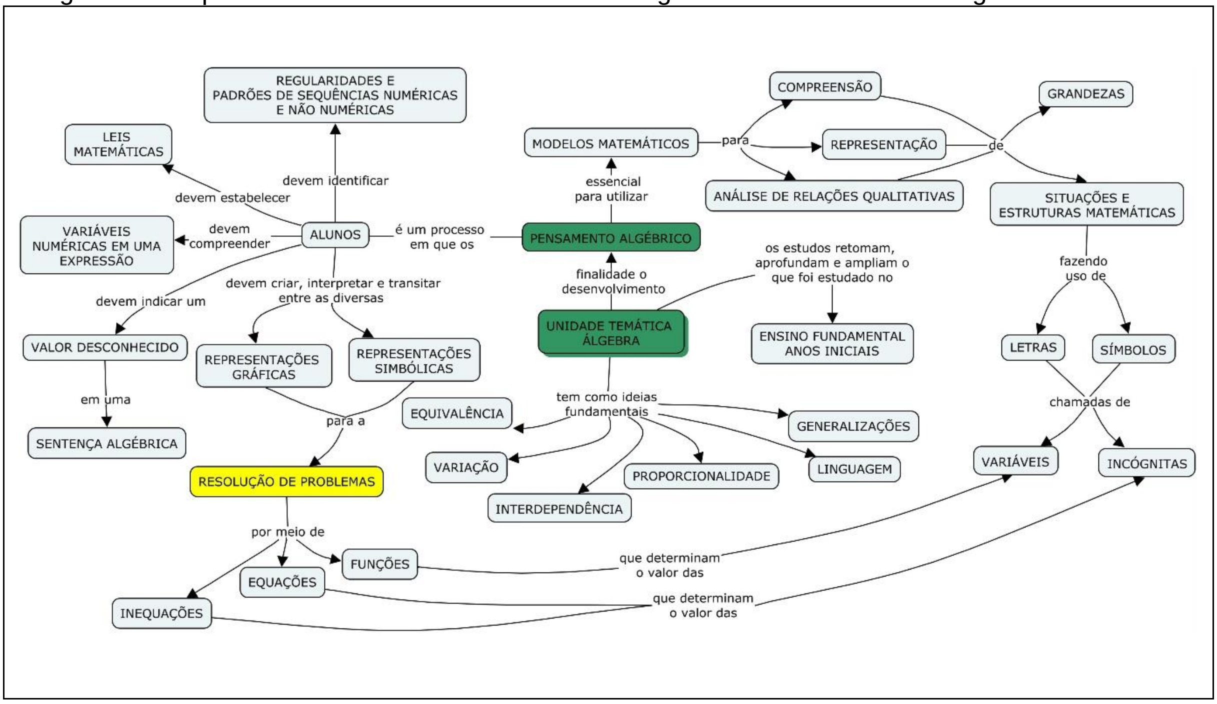
Percebe-se uma convergência nos estudos em Educação Matemática sobre a perspectiva da necessidade de aprofundar e ampliar o estudo dos objetos de conhecimento da Álgebra com a finalidade de desenvolver elementos específicos para a construção do raciocínio algébrico mais elaborado. Nessa direção, assumem que a Álgebra é caracterizada como uma área com assuntos e aspectos específicos, que possuem uma linguagem e um modo de pensar e trabalhar próprios (BECHER; GROENWALD, 2010).

Entende-se, portanto, que é adequado aprender e apreender os conteúdos da Álgebra de maneira gradativa para ser capaz de pensar algebricamente, familiarizando-se com abstrações e generalizações. Lins (1992, *apud* NACARATO; CUSTÓDIO, 2018, p.15), diferencia Álgebra de Pensamento Algébrico. Segundo esse autor, “o Pensamento Algébrico é compreendido como um meio de produção de significados, e a Álgebra, um conteúdo que faz sentido a partir desse pensamento”.

Dada a importância da Álgebra como um caminho necessário para a formação e para o desenvolvimento cognitivo matemático como um todo, a BNCC (BRASIL, 2018) apresenta a constituição do Pensamento Algébrico como essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos.

Nessa direção, buscou-se sintetizar por meio de um Mapa Conceitual na Figura 2 as ideias matemáticas fundamentais vinculadas à unidade temática Álgebra e o desenvolvimento do Pensamento Algébrico nos Anos Finais do Ensino Fundamental, na proposta da Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Figura 2 – Mapa conceitual das características da Álgebra e do Pensamento Algébrico na BNCC



Fonte: Adaptado pela autora.

É possível identificar que há pontos em comum entre os estudos de Kaput (1999), Kaput (2008) e as orientações descritas nas páginas da BNCC (BRASIL, 2018), com relação às características da Álgebra e do Pensamento Algébrico. Entre as semelhanças tem-se que ambos apresentam dois aspectos muito importantes para o desenvolvimento desse pensar, portanto, podem ser entendidos como eixo norteadores dos currículos de Matemática para o ensino da Álgebra: a ideia da generalização e da linguagem simbólica.

Ainda analisando o mapa conceitual, percebe-se que a unidade temática apresenta a concepção do Pensamento Algébrico como um processo em que os alunos devem desenvolver habilidades algébricas para a resolução de problemas. Ou seja, o Pensamento Algébrico é um processo em que os alunos devem ser orientados para criar, interpretar e transitar entre as diversas representações para a resolução de problemas, em detrimento a memorização e a prática repetitiva de exercícios algébricos tão comum nas salas de aula. Nesta situação, é importante que o professor seja capaz de orientar o processo de ensino e aprendizagem da Álgebra para não se limitar a procedimentos algoritmos, mas para a mediação de atividades por meio de estratégias e metodologias para o desenvolvimento do Pensamento Algébrico como um todo.

Para Becher e Groenwald (2010), o Pensamento Algébrico consiste em um conjunto de habilidades cognitivas que contemplam a representação, a resolução de problemas, as operações e análises matemáticas de situações, tendo as ideias e conceitos algébricos como seu referencial. Esses autores apontam que a finalidade maior do estudo dos conteúdos algébricos nas escolas deve ser o de capacitar o estudante no uso da Matemática, com mais desenvoltura, na resolução de problemas.

Nesta mesma direção, Ponte, Branco e Matos identificam três vertentes que caracterizam o Pensamento Algébrico: representar, raciocinar e resolver problemas, conforme podemos observar no Figura 3.

Figura 3 – Vertentes fundamentais do Pensamento Algébrico

Representar	▪ Ler, compreender, escrever e operar com símbolos usando as convenções algébricas usuais; ▪ Traduzir informação representada simbolicamente para outras formas de representação (por objetos, verbal, numérica, tabelas, gráficos) e vice-versa; ▪ Evidenciar sentido de símbolo, nomeadamente interpretando os diferentes sentidos no mesmo símbolo em diferentes contextos.
Raciocinar	▪ Relacionar (em particular, analisar propriedades); ▪ Generalizar e agir sobre essas generalizações revelando compreensão das regras; ▪ Deduzir.
Resolver problemas e modelar situações	▪ Usar representações diversas de objetos algébricos para interpretar e resolver problemas matemáticos e de outros domínios.

Fonte: Ponte, Branco e Matos (2009, p.11).

Observa-se na caracterização apresentada acima, que a primeira vertente diz respeito à capacidade do aluno usar diferentes sistemas de representação, nomeadamente sistemas cujos caracteres primitivos têm uma natureza simbólica. Na segunda vertente assumem especial importância o relacionar e o generalizar. Tal como nos outros campos da Matemática, um aspecto importante do raciocínio algébrico é o deduzir. Finalmente, na terceira vertente – resolver problemas, que inclui modelar situações – trata-se de usar representações diversas de objetos algébricos para interpretar e resolver problemas matemáticos e de outros domínios.

Ainda analisando as informações contidas na Figura 3, percebe-se que o desenvolvimento do Pensamento Algébrico exige práticas pedagógicas, com ênfase em atividades por meio da resolução de problemas, que conduzam o aluno a ser capaz de alcançar diversas habilidades que expressam os conhecimentos algébricos.

As ideias dos autores supracitados convergem para a adoção da metodologia de resolução de problemas como um caminho para o desenvolvimento de habilidades algébricas e, consequentemente, do Pensamento Algébricos nos alunos. Nessa direção, o trabalho escolar deve ter foco no desenvolvimento de habilidades nos alunos, buscando ampliar e consolidar aspectos do Pensamento Algébrico desde o início e ao longo da escolarização.

Para esta pesquisa, concorda-se com a perspectiva de Squalli (2000, *apud* Nacarato; Custódio, 2018, p. 14), cujas ideias defendem que a Álgebra pode ser pensada como uma linguagem, como um tipo particular da atividade matemática, enquanto o Pensamento Algébrico é um conjunto de habilidades intelectuais necessárias à Álgebra (pensar analiticamente, generalizar, abstrair, etc.). Sendo necessário um longo período para desenvolver esse pensamento.

Para Ponte, Branco e Matos (2009, p. 14-15):

> Essa valorização mais ampla no estudo da Álgebra, trata-se, no fundo, de promover o desenvolvimento do Pensamento Algébrico. Esta perspectiva traduz-se num movimento que se desenha desde o início da década de 1980 que visa a revalorização da Álgebra no currículo da Matemática escolar. Isso passa por entender a Álgebra de uma forma ampla e multifacetada, valorizando o Pensamento Algébrico e tornando-o uma orientação transversal do currículo.

Nessa direção, na BNCC (BRASIL, 2018), é possível verificar na Unidade Temática Álgebra os objetos de conhecimento em cada ano de estudo que devem concorrer para assegurar aos estudantes a mobilização progressiva de habilidades necessárias para a construção do Pensamento Algébrico matemático ao longo do Ensino Fundamental Anos Finais, conforme mostra a Figura 4.

Figura 4 – Pensamento Algébrico nos Anos Finais do Ensino Fundamental
6º Ano

OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Propriedades da igualdade	**(EF06MA14)** Reconhecer que a relação de igualdade matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número e utilizar essa noção para determinar

Problemas que tratam da partição de um todo em duas partes desiguais, envolvendo razões entre as partes e entre uma das partes e o todo	valores desconhecidos na resolução de problemas. **(EF06MA15)** Resolver e elaborar problemas que envolvam a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, envolvendo relações aditivas e multiplicativas, bem como a razão entre as partes e entre uma das partes e o todo.

Fonte: BNCC (BRASIL, 2018, p.302).

7º Ano

OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Linguagem algébrica: variável e incógnita Equivalência de expressões algébricas: identificação da regularidade de uma sequência numérica Problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais Equações polinomiais do 1º grau	**(EF07MA13)** Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita. **(EF07MA14)** Classificar sequências em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na Matemática, mas também nas artes e na literatura. **(EF07MA15)** Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas. **(EF07MA16)** Reconhecer se duas expressões algébricas obtidas para descrever a regularidade de uma mesma sequência numérica são ou não equivalentes. **(EF07MA17)** Resolver e elaborar problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas. **(EF07MA18)** Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma ax + b = c, fazendo uso das propriedades da igualdade.

Fonte: BNCC (BRASIL, 2018, p. 306-307).

8º Ano

OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Valor numérico de expressões algébricas Associação de uma equação linear de 1º grau a uma reta no plano cartesiano Sistema de equações polinomiais de 1º grau: resolução algébrica e representação no plano cartesiano Equação polinomial de 2º grau do tipo $ax^2 = b$ Sequências recursivas e não recursivas Variação de grandezas: diretamente proporcionais, inversamente	**(EF08MA06)** Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações. **(EF08MA07)** Associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano. **EF08MA08)** Resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso. **(EF08MA09)** Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$. **(EF08MA10)** Identificar a regularidade de uma sequência numérica ou figural não recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números ou as figuras seguintes. **(EF08MA11)** Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes. **(EF08MA12)** Identificar a natureza da variação de duas

proporcionais ou não proporcionais	grandezas, diretamente, inversamente proporcionais ou não proporcionais, expressando a relação existente por meio de sentença algébrica e representá-la no plano cartesiano. **(EF08MA13)** Resolver e elaborar problemas que envolvam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, por meio de estratégias variadas.

Fonte: BNCC (BRASIL, 2018, p. 312-313).

9º Ano

OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Funções: representações numérica, algébrica e gráfica	**(EF09MA06)** Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.
Razão entre grandezas de espécies diferentes	**(EF09MA07)** Resolver problemas que envolvam a razão entre duas grandezas de espécies diferentes, como velocidade e densidade demográfica.
Grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais	**(EF09MA08)** Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.
Expressões algébricas: fatoração e produtos notáveis e resolução de equações polinomiais do 2º grau por meio de fatorações	**(EF09MA09)** Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.

Fonte: BNCC (BRASIL, 2018, p. 316).

Além do estudo da unidade temática Álgebra nos Anos Finais do Ensino Fundamental retomar, aprofundar e ampliar os objetos de conhecimento dos Anos Iniciais, propõe-se que os alunos devem compreender o significado das letras, números e operações em uma expressão algébrica; expressar regularidades e interdependência entre grandezas; interpretar representações gráficas e simbólicas; determinar valores desconhecidos; utilizar linguagem algébrica; elaborar problemas; interpretar equações, dentre outros.

Conforme mostrado da Figura 4, a BNCC indica que o aluno deve ser colocado desde o início e ao longo da sua escolarização em um contexto de aprendizado contínuo e de crescente apropriação de conteúdos algébricos e habilidades importantes para o desenvolvimento do Pensamento Algébrico, ou seja, dos conteúdos e das habilidades mais simples para as mais complexas. Como dito anteriormente, concorda-se com o pressuposto de que o Pensamento Algébrico pode ser desenvolvido desde o início da escolarização considerando as especificidades da faixa etária a que se destina.

Groenwald e Becher (2010, p. 84) afirmam que “a partir da 7ª série (atual 6º ano), em que a idade média dos alunos é de 13 anos. Desse momento em diante desenvolvem-se cinco aspectos da linguagem algébrica com relação ao uso de símbolos: incógnitas, fórmulas, generalização de padrões, variável, relações; e mesmo assuntos que não sejam necessariamente algébricos, passam a ter um tratamento algébrico”.

Apesar dos diversos estudos acadêmicos existentes e mesmo tendo em vista todas as orientações curriculares e didáticas para o ensino da Álgebra, Araújo (2008, p.8), ressalta que o “Pensar Algébrico ainda não faz parte de muitos processos de ensino e aprendizagem que ocorrem na escola”. Gil (2008, p.44) afirma que, “o trabalho realizado nas escolas ocorre de modo fragmentado, sem conexões com outros conteúdos e contextos já apreendidos pelos alunos”. Trabalhos mais recentes publicados por Grillo et al. (2018 *apud* Nacarato e Custódio 2018, p. 301), apontam que tarefas propostas para alunos de Ensino Fundamental Anos Finais e Ensino Médio com vistas a explorar questões que conduzissem ao desenvolvimento do Pensamento Algébrico, em alguns casos dos registros selecionados, foi identificado que os alunos utilizaram a língua materna para justificar as regularidades e enunciar as leis de formação da sequência. Para os referidos pesquisadores, “isso sinalizou que, provavelmente, faltou a eles ao longo de sua trajetória escolar um trabalho em que o Pensamento Algébrico fosse contemplado em todas as suas dimensões”.

Portanto, a fragmentação existente no processo de construção da educação algébrica desenvolvido nas escolas deve ser superado e contrasta com o que preconiza a BNCC (BRASIL, 2018) para o Ensino Fundamental, onde a Álgebra e o Pensamento Algébrico são diferenciáveis, mas não separáveis. Squalli (2000, *apud* Nacarato; Custódio p. 14) defende que a “Álgebra e Pensamento Algébrico são duas faces da mesma moeda; portanto indissociáveis e complementares”. Para Groenwald e Becher (2010, p. 86):

> O desenvolvimento do Pensamento Algébrico e o conhecimento de conteúdos específicos são aspectos importantes e indissociáveis, pois apenas o desenvolvimento conjunto desses conhecimentos e habilidades irá capacitar o estudante no uso efetivo do seu conhecimento matemático, uma vez que o estudo isolado dos conceitos algébricos leva o estudante a entender esses como fatos isolados e sem significado.

Portanto, torna-se desafiador desenvolver experiências e ambientes de aprendizagens adequados que promovam compreensão de conteúdos na perspectiva de desenvolver habilidades para a construção do Pensamento Algébrico entre os estudantes. Nesse sentido, tornar significativo o processo de ensino e aprendizagem relacionado aos objetos de conhecimento da Álgebra constitui oportunidade para desenvolvimento do Pensamento Algébrico nos Anos Finais do Ensino Fundamental.

Segundo Kaput (2005), a visão tradicional da Álgebra, está vinculada com a aprendizagem de regras para a manipulação de símbolos, simplificação de expressões algébricas e resolução de equações, levando os estudantes a formarem uma opinião de que a Álgebra estudada na escola, não tem relação com outros conhecimentos matemáticos e nem com o mundo cotidiano.

Entende-se que para transformar esse ponto de vista dos estudantes sobre a Álgebra é importante que o professor que ensina Matemática desenvolva um planejamento didático que privilegie a compreensão dos conceitos para o desenvolvimento de habilidades por meio do estímulo à resolução de problemas. Para Godino e Font (2003, p. 774) um ponto decisivo para o desenvolvimento do Pensamento Algébrico é o conhecimento do profissional:

> É necessário, porém, que os professores tenham uma visão da Álgebra escolar mais ampla do que a resultante de generalizações aritméticas e o manuseio de expressões literais. A generalização se aplica a todas as situações que podem ser modelo em termos matemáticos, então a linguagem algébrica está presente em maior ou menor grau como ferramenta de trabalho em todos os ramos da Matemática.

Nesse sentido, espera-se que a escola e o professor coloquem o aluno em um contexto de aprendizado mais amplo da Álgebra e em um processo de construção contínuo e progressivo dos seus conteúdos desde os primeiros anos de escolarização e ao longo da sua formação educacional, de modo a superar a reprodução acrítica de conteúdos e sem conexão com outros conteúdos algébricos e até com outras unidades temáticas.

Desse modo, para refletir sobre as possibilidades, dificuldades e tensão entre prática educativa e currículo, apresenta-se no próximo capítulo análise crítica dos livros didáticos, com foco nos objetos de conhecimentos trabalhados no desenvolvimento da Sequência Didática proposta neste trabalho.

4 SUBSÍDIOS PARA ELABORAÇÃO DAS ATIVIDADES DIDÁTICAS

Este capítulo apresenta uma análise dos livros didáticos de Matemática do Ensino Fundamental Anos Finais da coleção “A Conquista da Matemática” dos autores José Ruy Giovanni Júnior e Benedicto Castrucci. As obras são indicadas pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e selecionadas pelos professores de Matemática da Escola objeto de investigação para o triênio 2020 – 2022. Os autores enfatizam que os livros já estão de acordo com a BNCC homologada em dezembro de 2017.

4.1 INVESTIGAÇÃO DOS CONTEÚDOS DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA NOS LIVROS DE MATEMÁTICA DOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

O objetivo da análise é identificar nas obras a presença dos conteúdos essenciais propostos na escrita da BNCC para as aprendizagens dos objetos de conhecimento que subsidiaram a construção da Sequência Didática implementada nesta investigação, considerados indispensáveis para a construção dos conceitos de Polinômios e, consequentemente, para a mobilização de elementos do Pensamento Algébrico nos alunos. Desse modo, buscou-se analisar qual o tratamento dado às tarefas propostas com foco no aprendizado de Unidades de medida, cálculo de perímetro e área; operações com monômios e polinômios e valor numérico; produtos notáveis e fatoração por fator comum e agrupamento. Vale ressaltar que esses conteúdos estão presentes nos livros de 6º, 8º e 9º da referida coleção, tornando-se, portanto, objetos da nossa análise.

Nesse sentido, tomou-se como eixo orientador analisar o material sugerido pelos livros para nortear o processo de ensino e aprendizagem no que diz respeito às metodologias e os recursos didáticos-pedagógicos, bem como se as tarefas propostas colaboram para o desenvolvimento das habilidades previstas na BNCC (BRASIL, 2018). Apresentam-se, na Figura 5, os objetos de conhecimentos e as habilidades que nortearam as análises.

Figura 5 – Objetos e habilidades analisados

Objeto de conhecimento	Habilidade
Problemas sobre medidas envolvendo grandezas como comprimento, área, capacidade e volume	**(EF06MA24)** Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas comprimento, massa, tempo, temperatura, área (triângulos e retângulos), capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de

	situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento.
Linguagem algébrica: variável e incógnita	**(EF07MA13)** Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita.
Problemas envolvendo medições	**(EF07MA29)** Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de grandezas inseridos em contextos oriundos de situações cotidianas ou de outras áreas do conhecimento, reconhecendo que toda medida empírica é aproximada.
Cálculo de volume de blocos retangulares, utilizando unidades de medida convencionais mais usuais	**(EF07MA30)** Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida do volume de blocos retangulares, envolvendo as unidades usuais (metro cúbico, decímetro cúbico e centímetro cúbico).
Valor numérico de expressões algébricas	**(EF08MA06)** Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações.
Área de figuras planas	**(EF08MA19)** Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros), em situações como determinar medida de terrenos.
Expressões algébricas: fatoração e produtos notáveis Resolução de equações polinomiais do 2º grau por meio de fatorações	**(EF09MA09)** Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.

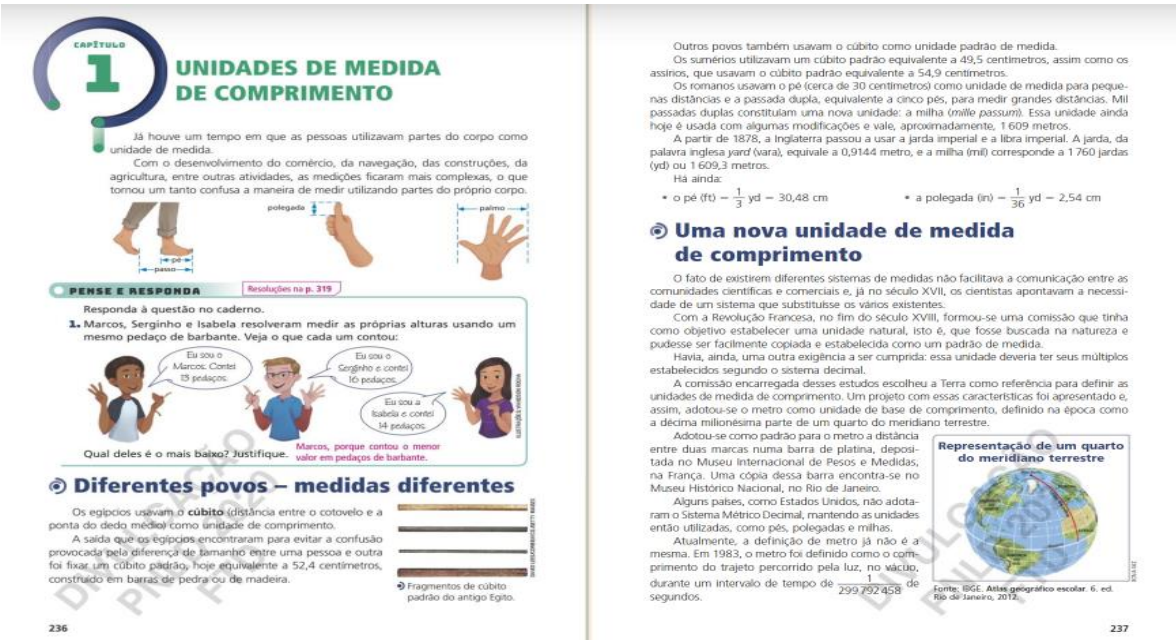
Fonte: BNCC (BRASIL, 2018).

A análise do livro do 6º ano aconteceu com foco nas tarefas que abordam os conceitos de unidades de medida de comprimento, perímetro de um polígono, unidades de medida de superfície e área das figuras geométricas planas, volume e capacidade. Esses conteúdos estão na unidade temática Grandezas e Medidas que contribui para a consolidação e ampliação da noção de número, a aplicação de noções geométricas e a construção do Pensamento Algébrico e unidade temática Geometria que propõe a aproximação da Álgebra com a Geometria (BRASIL, 2018).

Observou-se que esse bloco de conteúdo está contemplado na unidade 8 Comprimento e Área, e unidade 9 intitulada Massa, Volume e Capacidade, no livro A conquista da Matemática voltado para o 6º ano.

Na página de abertura da unidade 8, as unidades de medida são apresentadas por meio da história da Matemática como recurso didático para introduzir a ideia da necessidade de construção de padrões de medidas pelas civilizações, como visto na Figura 6.

Figura 6 – Habilidade EF06MA24



CAPÍTULO 1

UNIDADES DE MEDIDA DE COMPRIMENTO

Já houve um tempo em que as pessoas utilizavam partes do corpo como unidade de medida.

Com o desenvolvimento do comércio, da navegação, das construções, da agricultura, entre outras atividades, as medições ficaram mais complexas, o que tornou um tanto confusa a maneira de medir utilizando partes do próprio corpo.

PENSE E RESPONDA
Resoluções na p. 319

Responda à questão no caderno.

1. Marcos, Serginho e Isabela resolveram medir as próprias alturas usando um mesmo pedaço de barbante. Veja o que cada um contou:

Qual deles é o mais baixo? Justifique. Marcos, porque contou o menor valor em pedaços de barbante.

Diferentes povos – medidas diferentes

Os egípcios usavam o **cúbito** (distância entre o cotovelo e a ponta do dedo médio) como unidade de comprimento.

A saída que os egípcios encontraram para evitar a confusão provocada pela diferença de tamanho entre uma pessoa e outra foi fixar um cúbito padrão, hoje equivalente a 52,4 centímetros, construído em barras de pedra ou de madeira.

Fragmentos de cúbito padrão do antigo Egito.

236

Outros povos também usavam o cúbito como unidade padrão de medida.

Os sumérios utilizavam um cúbito padrão equivalente a 49,5 centímetros, assim como os assírios, que usavam o cúbito padrão equivalente a 54,9 centímetros.

Os romanos usavam o pé (cerca de 30 centímetros) como unidade de medida para pequenas distâncias e a passada dupla, equivalente a cinco pés, para medir grandes distâncias. Mil passadas duplas constituíam uma nova unidade: a milha (*mille passum*). Essa unidade ainda hoje é usada com algumas modificações e vale, aproximadamente, 1 609 metros.

A partir de 1878, a Inglaterra passou a usar a jarda imperial e a libra imperial. A jarda, da palavra inglesa *yard* (vara), equivale a 0,9144 metro, e a milha (mi) corresponde a 1 760 jardas (yd) ou 1 609,3 metros.

Há ainda:

- o pé (ft) $= \frac{1}{3}$ yd $=$ 30,48 cm
- a polegada (in) $= \frac{1}{36}$ yd $=$ 2,54 cm

Uma nova unidade de medida de comprimento

O fato de existirem diferentes sistemas de medidas não facilitava a comunicação entre as comunidades científicas e comerciais e, já no século XVII, os cientistas apontavam a necessidade de um sistema que substituísse os vários existentes.

Com a Revolução Francesa, no fim do século XVIII, formou-se uma comissão que tinha como objetivo estabelecer uma unidade natural, isto é, que fosse buscada na natureza e pudesse ser facilmente copiada e estabelecida como um padrão de medida.

Havia, ainda, uma outra exigência a ser cumprida: essa unidade deveria ter seus múltiplos estabelecidos segundo o sistema decimal.

A comissão encarregada desses estudos escolheu a Terra como referência para definir as unidades de medida de comprimento. Um projeto com essas características foi apresentado e, assim, adotou-se o metro como unidade de base de comprimento, definido na época como a décima milionésima parte de um quarto do meridiano terrestre.

Adotou-se como padrão para o metro a distância entre duas marcas numa barra de platina, depositada no Museu Internacional de Pesos e Medidas, na França. Uma cópia dessa barra encontra-se no Museu Histórico Nacional, no Rio de Janeiro.

Alguns países, como Estados Unidos, não adotaram o Sistema Métrico Decimal, mantendo as unidades então utilizadas, como pés, polegadas e milhas.

Atualmente, a definição de metro já não é a mesma. Em 1983, o metro foi definido como o comprimento do trajeto percorrido pela luz, no vácuo, durante um intervalo de tempo de $\frac{1}{299\,792\,458}$ de segundos.

Representação de um quarto do meridiano terrestre

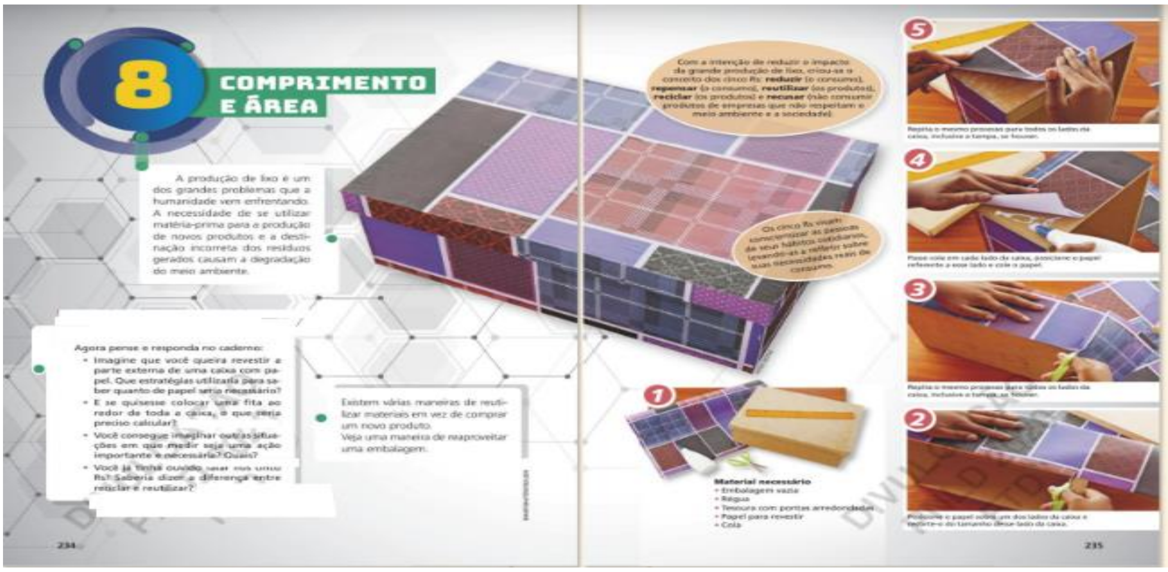
Fonte: IBGE. **Atlas geográfico escolar**. 6. ed. Rio de Janeiro, 2012.

237

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018, p. 236-237).

Também identifica-se propostas de resolução de problemas que envolvem a utilização de material concreto como recurso didático para o desenvolvimento de tarefas. Pode-se verificar na Figura 7 questões em que os alunos podem relacionar a Álgebra, a Geometria e o seu cotidiano.

Figura 7 – Material concreto



Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018, p. 234-235).

No exercício da Figura 7, para cobrir uma caixa, o aluno é chamado a trabalhar com diferentes tipos de materiais (caixas de papelão, jornal, etc.) e com conceitos de noções espaciais e Aritmética.

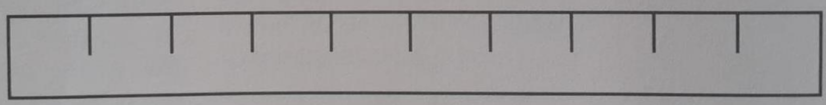
Identificam-se outras tarefas onde o foco é manipulação de materiais concretos, apresentando como proposta a construção do material, como é possível observar na Figura 8.

Figura 8 – Construção de Material concreto

Construindo uma fita métrica

Distribuir, para cada aluno, 10 tiras de papel de 10 cm cada uma com marcações de 1 em 1 cm. Pedir que pintem cada tira de uma cor. Depois, eles devem colar as tiras de 10 cm sobre uma tira de papel de 1 m ou sobre uma fita-crepe todas as 10 tiras. Em seguida, pedir a eles que escrevam os números na sequência de 0 a 100 para que possam estabelecer o início e o fim da fita.

Modelo da tira de 10 cm



EDITORIA DE ARTE

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018, p. 238).

Com uma fita métrica construída em uma tira de papel, os alunos podem explorar conceitos de unidades de comprimento fazendo medições de objetos na sala de aula. Outras situações-problema são disponibilizadas como possibilidade de visualização do que é medir uma superfície. Acredita-se que o material poderia ter sido melhor explorado com a sua utilização também para a construção dos conceitos de perímetro e de área, estimulando os alunos para as medições das paredes da sala de aula, por exemplo. Entende-se que o viés de abordagem adotado permite não só buscar estratégias de cálculo significativas para o educando, mas a apropriação de conhecimentos específicos da Geometria.

Nota-se que a tarefa abaixo explora a planta baixa de uma casa para trabalhar a compreensão de conceitos matemáticos como a transformação das unidades de medida de comprimento e utilização de medidas adequadas no cotidiano.

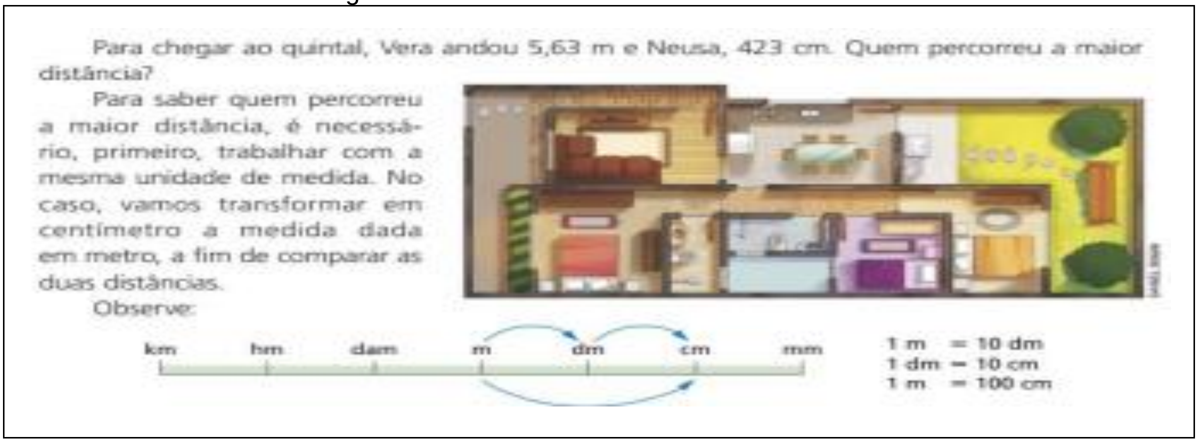
Figura 9 – Habilidades EF06MA24/ EF06MA29

9. Na página 239 vimos a planta baixa de uma residência. Utilizando uma malha quadriculada, desenhe a planta baixa de uma residência indicando as medidas de cada ambiente. Em seguida, elabore uma atividade sobre medida de comprimento com base na planta desenhada a ser resolvida por um colega. Depois de resolvida, corrija a atividade.

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018, p. 239).

Observa-se pela Figura 10 que os alunos são incentivados a descreverem seus raciocínios para a compreensão dos conceitos envolvidos nos estudos de uma planta baixa. O conteúdo de cálculo de perímetro e área está contemplado no capítulo 2 e 4 da Unidade 8 do livro do 6º ano. A quantidade de exercícios sobre essa temática é expressiva, e mostra-se interessante e pertinente. Além disso, a ideia da planta baixa foi usada em tarefas posteriores para trabalhar o conceito de unidade de medidas de superfície.

Figura 10 – Habilidades EF06MA24/ EF06MA29



Para chegar ao quintal, Vera andou 5,63 m e Neusa, 423 cm. Quem percorreu a maior distância?

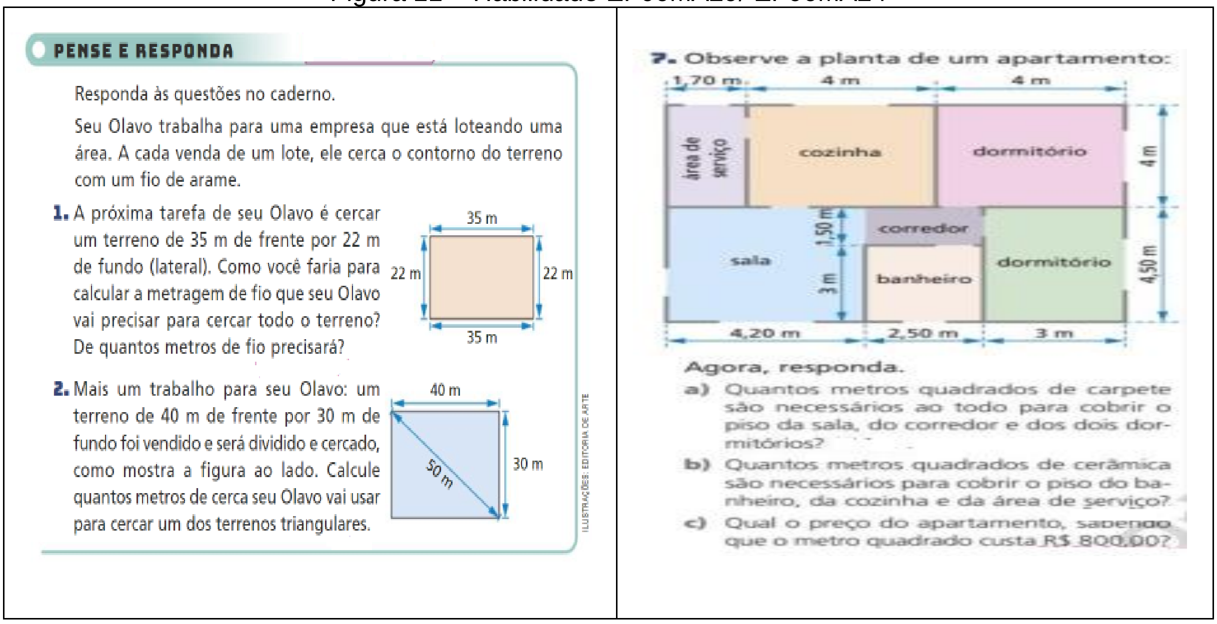
Para saber quem percorreu a maior distância, é necessário, primeiro, trabalhar com a mesma unidade de medida. No caso, vamos transformar em centímetro a medida dada em metro, a fim de comparar as duas distâncias.

Observe:

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018, p. 239).

Nota-se que os conceitos são apresentados de maneira orgânica e a partir de problemas que relacionam o conceito matemático com o dia a dia do aluno, como se pode observar nos problemas mostrados Figura 11.

Figura 11 – Habilidade EF06MA29/ EF06MA24



PENSE E RESPONDA

Responda às questões no caderno.

Seu Olavo trabalha para uma empresa que está loteando uma área. A cada venda de um lote, ele cerca o contorno do terreno com um fio de arame.

1. A próxima tarefa de seu Olavo é cercar um terreno de 35 m de frente por 22 m de fundo (lateral). Como você faria para calcular a metragem de fio que seu Olavo vai precisar para cercar todo o terreno? De quantos metros de fio precisará?

2. Mais um trabalho para seu Olavo: um terreno de 40 m de frente por 30 m de fundo foi vendido e será dividido e cercado, como mostra a figura ao lado. Calcule quantos metros de cerca seu Olavo vai usar para cercar um dos terrenos triangulares.

7. Observe a planta de um apartamento:

Agora, responda.

a) Quantos metros quadrados de carpete são necessários ao todo para cobrir o piso da sala, do corredor e dos dois dormitórios?

b) Quantos metros quadrados de cerâmica são necessários para cobrir o piso do banheiro, da cozinha e da área de serviço?

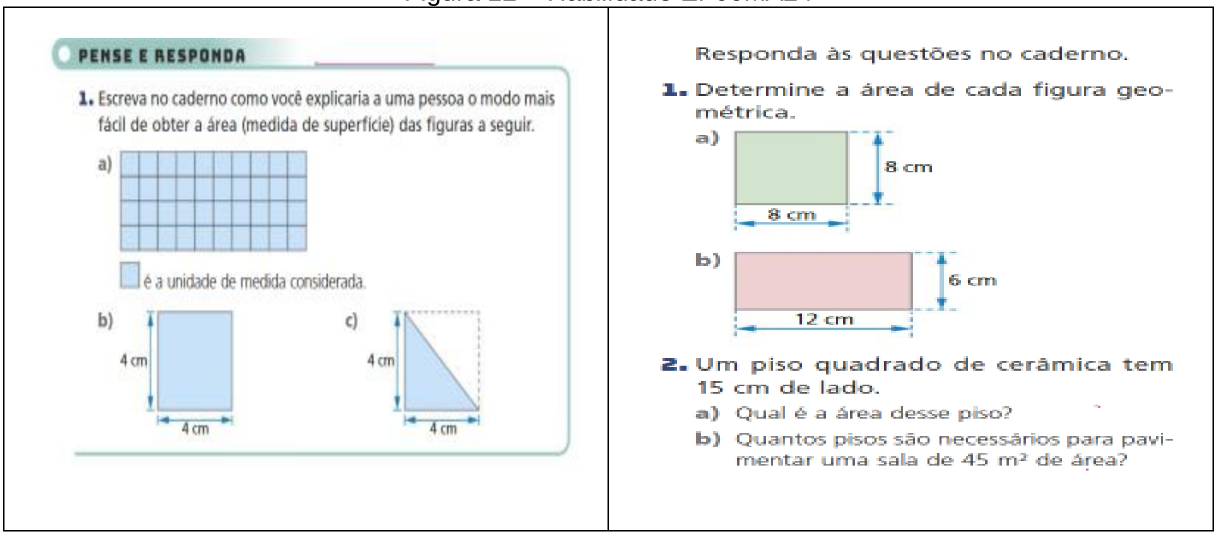
c) Qual o preço do apartamento, sabendo que o metro quadrado custa R$ 800,00?

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018, p. 242; 253).

Percebe-se, o encadeamento intencional das atividades de modo a contribuir gradativamente com a construção de conceitos. O livro traz sugestões de perguntas para o professor para incentivar os alunos a argumentar e elaborar conjecturas. Acredita-se que, com propostas de atividades reflexivas, o aluno tem a oportunidade de se tornar protagonista do aprendizado e da construção dos conceitos de forma mais significativa.

No tipo de problema apresentado na Figura 12, o objetivo é fazer com que o aluno perceba que contar as unidades de medida uma a uma para determinar a área de figuras planas não é nada prático. O exercício propõe calcular as áreas das figuras, utilizando os padrões observados em cada caso.

Figura 12 – Habilidade EF06MA24



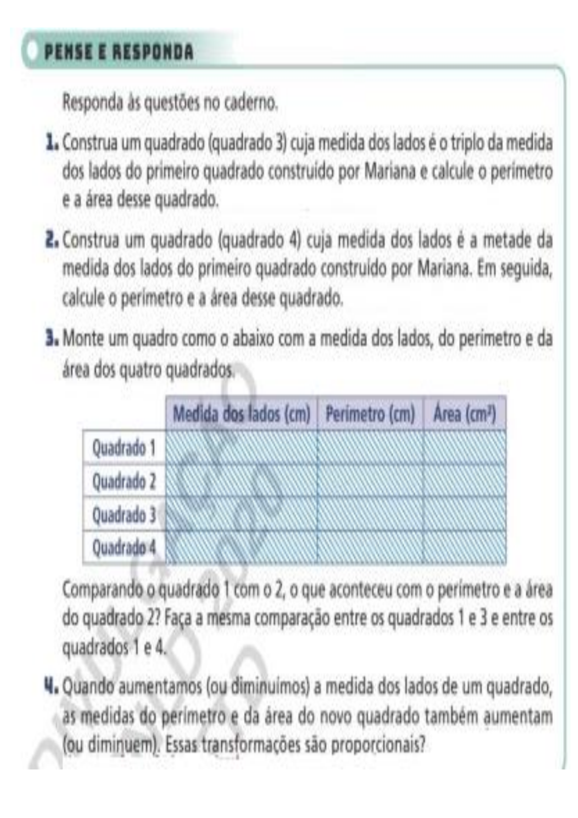
Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018, p. 248; 252).

Além disso, o capítulo propõe a realização de várias atividades para determinar a área de diversos polígonos a fim de que o aluno entenda que ao multiplicar as dimensões comprimento e largura, encontra-se a área medida de superfície, um padrão para o cálculo de área destas figuras. No entanto, deixa apenas como sugestão para o professor a importância da introdução à linguagem algébrica. E avisa: “No texto, as generalizações serão expressas na língua materna. Se achar conveniente, após compreendidas, expressá-las na linguagem algébrica” (GIOVANNI JÚNIOR; CASTRUCCI, 2018).

Em outro problema identificam-se conceitos como razão e proporção a partir do estudo da relação entre os conceitos de perímetro, área e a medida do lado. A BNCC (BRASIL, 2018) indica que “a noção intuitiva de função pode ser explorada por meio da resolução de problemas envolvendo a variação proporcional direta entre duas grandezas (sem utilizar a regra de três)”. Apesar de ser um problema clássico: medida de lado x cálculo de área e perímetro, as transformações ocorridas são observadas a partir não somente do cálculo aritmético e preenchimento da tabela, mas da construção das figuras, tornando o problema mais interessante, conforme Figura 13, à esquerda.

Na unidade 9 mostrada à direita da Figura 13, massa, volume e capacidade, propõe a partir de um problema social – o desperdício de água – convidar os alunos a se envolverem com a aprendizagem de medidas de capacidade. Fica claro a intenção dos autores em abordar temas que relacionam a Matemática com situações do cotidiano e, quando possível, articulada às demais áreas do conhecimento.

Figura 13 – Habilidade EF06MA29



PENSE E RESPONDA

Responda às questões no caderno.

1. Construa um quadrado (quadrado 3) cuja medida dos lados é o triplo da medida dos lados do primeiro quadrado construído por Mariana e calcule o perímetro e a área desse quadrado.
2. Construa um quadrado (quadrado 4) cuja medida dos lados é a metade da medida dos lados do primeiro quadrado construído por Mariana. Em seguida, calcule o perímetro e a área desse quadrado.
3. Monte um quadro como o abaixo com a medida dos lados, do perímetro e da área dos quatro quadrados.

	Medida dos lados (cm)	Perímetro (cm)	Área (cm^2)
Quadrado 1			
Quadrado 2			
Quadrado 3			
Quadrado 4			

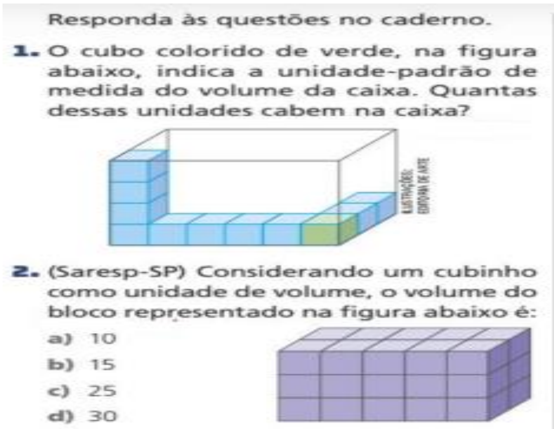
Comparando o quadrado 1 com o 2, o que aconteceu com o perímetro e a área do quadrado 2? Faça a mesma comparação entre os quadrados 1 e 3 e entre os quadrados 1 e 4.

4. Quando aumentamos (ou diminuímos) a medida dos lados de um quadrado, as medidas do perímetro e da área do novo quadrado também aumentam (ou diminuem). Essas transformações são proporcionais?

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018, p. 250; 258-259).

Essa unidade traz, por meio da resolução de problemas, diversas possibilidades de atividades que incentivam relacionar a percepção de cálculo de volume com ideias numéricas, porém, a ideia para descobrir as fórmulas dos volumes de sólidos geométricos não foi explorada. No caso dos problemas abaixo, visualizados na Figura 14, são exemplos puramente numéricos e não evidenciam o que pode surgir algebricamente a partir de observações mais aprofundadas.

Figura 14 – Habilidade EF07MA30

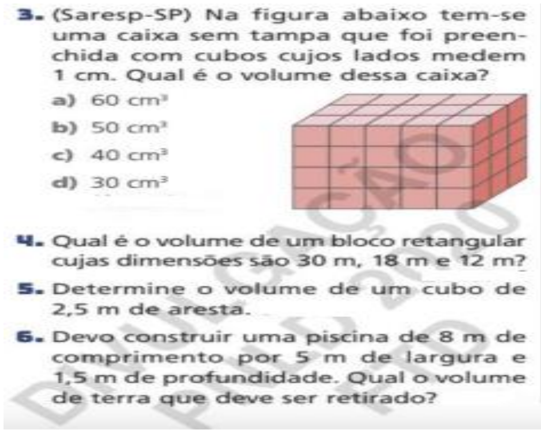


Responda às questões no caderno.

1. O cubo colorido de verde, na figura abaixo, indica a unidade-padrão de medida do volume da caixa. Quantas dessas unidades cabem na caixa?

2. (Saresp-SP) Considerando um cubinho como unidade de volume, o volume do bloco representado na figura abaixo é:

a) 10
b) 15
c) 25
d) 30



3. (Saresp-SP) Na figura abaixo tem-se uma caixa sem tampa que foi preenchida com cubos cujos lados medem 1 cm. Qual é o volume dessa caixa?

a) 60 cm³
b) 50 cm³
c) 40 cm³
d) 30 cm³

4. Qual é o volume de um bloco retangular cujas dimensões são 30 m, 18 m e 12 m?

5. Determine o volume de um cubo de 2,5 m de aresta.

6. Devo construir uma piscina de 8 m de comprimento por 5 m de largura e 1,5 m de profundidade. Qual o volume de terra que deve ser retirado?

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018, p. 268).

A BNCC (BRASIL, 2018) traz orientações para o trabalho com a unidade temática Álgebra: No 1º ao 5º ano devem estar presente no processo de ensino e aprendizagem as ideias de regularidade, generalização de padrões e propriedades de igualdade. No entanto, nessa fase, não se propõe o uso de letras para expressar regularidades, por mais simples que sejam. Por outro lado, a partir do 6º ano a orientação é para introduzir conteúdos algébricos de modo que os alunos devem compreender os diferentes significados das variáveis numéricas em uma expressão.

É possível perceber que o documento orienta para o trabalho com a generalização da linguagem algébrica ou o uso da simbologia algébrica (letras e variáveis). De outro modo, pode-se dizer que o estudo não deve ser restrito e abordado isoladamente, mas que seja tratado e desenvolvido gradativamente a partir do 6º ano e durante toda a trajetória escolar dos alunos do Ensino Fundamental Anos Finais, a fim de favorecer quanto antes a compreensão do uso de letras para representar valores desconhecidos, mas de modo a respeitar o processo e a maturidade cognitiva do aluno. Concorda-se com Lins e Gimenez (2005) que acreditam que começar a educação algébrica quanto antes é fundamental, para que mais tarde não nos queixamos de como os alunos não conseguem "largar a Aritmética".

Entende-se que para a construção do raciocínio algébrico é necessário o desenvolvimento de um conjunto mais amplo de elementos que caracterizam esse pensamento e vai muito além da manipulação de letras, porém, não se pode negar ser esse um ponto fundamental e indispensável da Matemática por se tratar de uma ferramenta poderosa para a descrição e resolução de problemas.

Nessa perspectiva, observou-se que o volume do 6º ano não traz propostas de situações para cálculo de valores desconhecidos representados por letras. A análise desses fragmentos do livro não nos remete a atividades que possibilitam criar situações em que os estudantes possam “generalizar padrões aritméticos, estabelecer relações entre duas grandezas e resolver problemas com os diferentes termos desconhecidos das operações” (LUNA; SOUZA, 2013).

Para Aniceto e Garcia (2014), as tarefas propostas para o 6º ano devem estimular o aluno a expressar suas ideias, primeiro através da linguagem natural, avançando para uma linguagem aritmética até alcançar uma sofisticação maior utilizando a generalização através da linguagem simbólica.

Apesar disso, observa-se que as habilidades previstas na BNCC (BRASIL, 2018) para os objetos analisados são contemplados em diversas tarefas propostas no livro, de modo que os alunos são colocados em ambientes de aprendizagens que estimulam o desenvolvimento de elementos considerados importantes para a construção do Pensamento Algébrico.

Percebe-se, também, que os problemas propostos estão, de modo geral, conectados entre si e em uma espiral de aprendizagem de modo a proporcionar uma perspectiva na construção gradativa dos conceitos algébricos e do Pensamento Algébrico nos alunos de 6º ano, servindo como fundamento para o desenvolvimento das habilidades que serão abordadas em anos posteriores.

Além disso, sugestões de atividades experimentais com o uso de materiais concretos estão presentes ao longo da unidade. Segundo Nacarato e Custódio (2018, p. 23), “o planejamento do professor precisa garantir que as tarefas elaboradas coloquem o estudante em um contexto investigativo”.

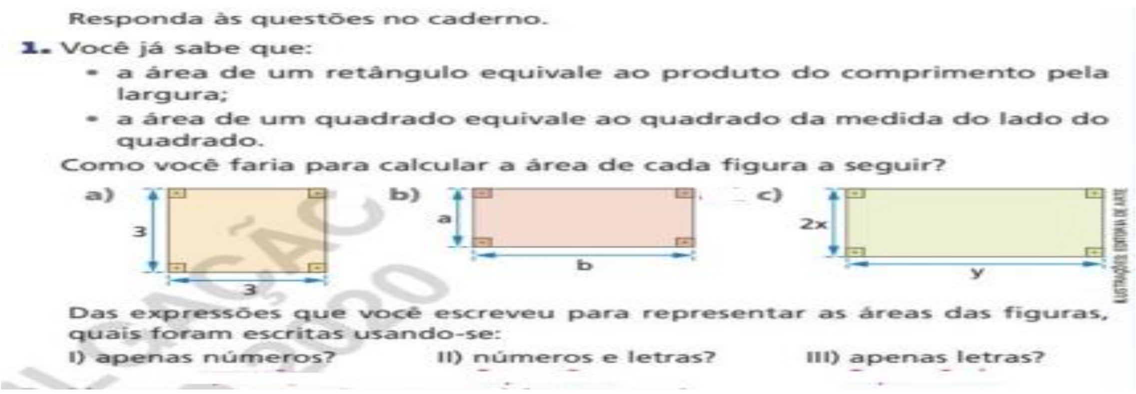
Portanto, de modo geral, o livro apresenta atividades que seriam adequadas para alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, com a ressalva importante, da carência de tarefas que podem contribuir com a introdução do conceito de expressões algébricas.

Os conceitos de operações com monômios e polinômios, além de valor numérico de uma expressão algébrica, estão presentes no livro do 8º ano, Unidade 4, nos capítulos 3 – Valor numérico de uma expressão algébrica; capítulo 4 – monômio ou termo algébrico e 5 – polinômios. Portanto, a análise concentra-se nesta unidade.

O capítulo 4 inicia a seção com uma breve contextualização do uso da simbologia matemática e as suas mudanças ao longo da história da Educação Matemática e indaga sobre o porquê da escrita matemática usar símbolos e letras para expressar a solução de um problema.

Para apresentar a ideia do uso de letras para representar números solicita-se ao aluno calcular áreas de quadrados e de retângulos cujos lados são dados por letras, ou seja, por meio de argumentos geométricos e de fórmulas simples os alunos lidam com a temática, conforme observado nas Figuras 15 e 16.

Figura 15 – Habilidade EF07MA13


Responda às questões no caderno.

1. Você já sabe que:
- a área de um retângulo equivale ao produto do comprimento pela largura;
- a área de um quadrado equivale ao quadrado da medida do lado do quadrado.

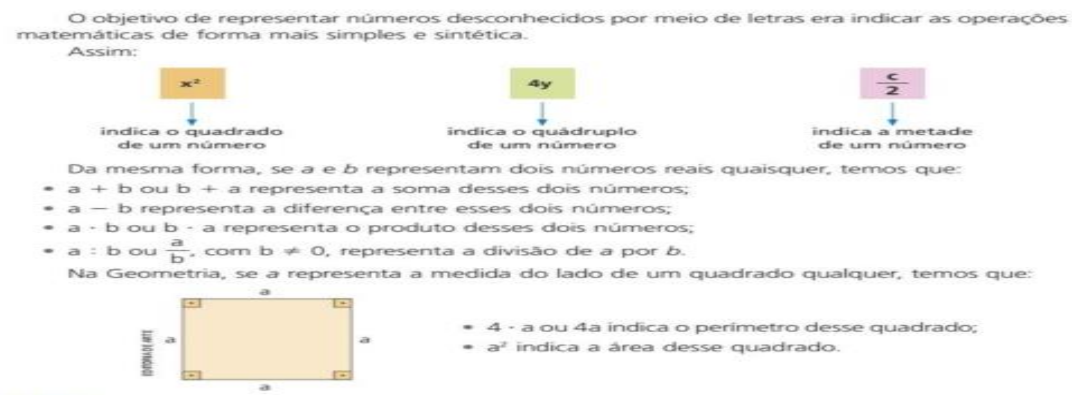
Como você faria para calcular a área de cada figura a seguir?

Das expressões que você escreveu para representar as áreas das figuras, quais foram escritas usando-se:

I) apenas números? II) números e letras? III) apenas letras?

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018, p. 98).

Figura 16 – Habilidade EF07MA13


O objetivo de representar números desconhecidos por meio de letras era indicar as operações matemáticas de forma mais simples e sintética.

Assim:

Da mesma forma, se *a* e *b* representam dois números reais quaisquer, temos que:
- $a + b$ ou $b + a$ representa a soma desses dois números;
- $a - b$ representa a diferença entre esses dois números;
- $a \cdot b$ ou $b \cdot a$ representa o produto desses dois números;
- $a : b$ ou $\frac{a}{b}$, com $b \neq 0$, representa a divisão de *a* por *b*.

Na Geometria, se *a* representa a medida do lado de um quadrado qualquer, temos que:

- $4 \cdot a$ ou $4a$ indica o perímetro desse quadrado;
- a^2 indica a área desse quadrado.

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018, p. 99).

Nesse contexto, de maneira indireta o conceito de polinômio é apresentado. Ao contrário do livro do 6º ano analisado anteriormente, onde os autores sugerem o trabalho do professor com o apoio de materiais concretos, nesse capítulo do livro do 8º ano não se propõe de modo explicito a utilização de outros recursos que não seja o livro didático.

Com foco no estudo da generalização, conceito importante para o desenvolvimento do Pensamento Algébrico, a unidade 4 traz tarefas que abordam a linguagem algébrica como determinante para o aprendizado de polinômios.

Figura 17 – Habilidade EF07MA13

Responda às questões no caderno.

1. Escreva as operações de forma sintética:

a) o quadrado do número real *x*.
b) o cubo do número real *y*.
c) a raiz quadrada do número real *a*.
d) a quinta potência do número real *b*.
e) a adição dos números reais *b* e *c*.
f) o produto dos números reais *a* e *x*.
g) o dobro do número real *y*.
h) a sexta parte do número real *m*.
i) o quociente entre os números reais *z* e *w*, com $w \neq 0$
j) a metade do número real *x*.
k) a diferença entre os números reais *x* e *y*.
l) o quíntuplo do número real *z*.

2. Usando duas letras (por exemplo, *x* e *y*), escreva uma expressão que represente:

a) o dobro de um número real adicionado ao dobro de outro número real.
b) o produto da soma pela diferença de dois números reais quaisquer.
c) a adição dos quadrados de dois números reais quaisquer.
d) a diferença dos quadrados de dois números reais quaisquer.
e) o quadrado da soma de dois números reais quaisquer.
f) a adição da raiz quadrada de um número real com a quinta parte de outro número real.

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018, p. 99).

A Figura 17, mostra tarefas consideras simples, mas importantes, para que o aluno compreenda a transição da linguagem comum para a linguagem algébrica. Para Ponte, Branco e Matos (2009) a formalização deve ser introduzida progressivamente, ajudando os alunos a fazer uma transição progressiva da linguagem natural para a linguagem matemática.

Por outro lado, entendendo a necessidade de colocar os alunos em contextos variados de aprendizagens, tarefas são abordadas por meio da resolução de problemas, como as apresentadas na Figura 18.

Figura 18 – Habilidade EF07MA19

Qual é a expressão que representa a área total do terreno da figura?
A área total do terreno é igual à soma das áreas das partes **1** e **2**.
Como a parte **1** é um retângulo, a sua área é expressa por ab.
Como a parte **2** é um quadrado, a sua área é expressa por c^2.
Então, a expressão que representa a área total do terreno é:

$\boxed{ab + c^2}$

4. Suponha que um terreno tenha a forma da figura aqui mostrada e suas medidas sejam representadas, em unidades de comprimento, pelas letras *x* e *y*.

Qual é a expressão algébrica que representa o perímetro desse terreno?

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018, p. 100; 102).

Nesse contexto, a tarefa envolve medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área em situações para determinar medidas de terrenos, o que está de acordo com o proposto na BNCC (BRASIL, 2018, p. 315) para o desenvolvimento da habilidade **(EF08MA19)**: “Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros), em situações como determinar medida de terrenos”.

Nesta mesma direção, o livro do 8º ano apresenta diferentes tarefas com o objetivo de levar o aluno a reconhecer e utilizar expressões algébricas para representar diferentes situações e também exercícios que relacionam a Álgebra com a Geometria.

Observa-se, frequentemente, a resolução de problemas como possibilidade de metodologia a ser adotada pelo professor, de modo a incentivar o desenvolvimento de diferentes estratégias pelo aluno. Na perspectiva dos Princípios e Normas do NCTM (2007), se defende, de modo abrangente, que “os alunos devam compreender os diversos significados e uso das letras, através da representação de quantidades, nomeadamente na resolução de situações problemáticas”. Nacarato e Custódio (2018, p. 20) propõe a organização do trabalho com diferentes estratégias:

> Por isso, a opção por propostas que possibilitem a elaboração de hipóteses e conjecturas é essencial, principalmente no que tange ao Pensamento Algébrico, que não se constitui na mera reprodução e repetição de técnicas, mas, principalmente, na percepção e na generalização de regularidades.

O capítulo 3 traz o estudo do conceito de valor numérico de uma expressão algébrica, como possibilidade através da qual permite-se avaliar situações mais concretas ou particulares.

Figura 19 – Habilidade EF08MA06

2. As fábricas de calçados utilizam a fórmula matemática $S = \frac{5p + 28}{4}$ para determinar a numeração dos calçados, na qual *S* é o número do sapato e *p* é o comprimento do pé, em centímetros. Qual é o número do sapato de uma pessoa cujo pé tem 24 centímetros de comprimento?

3. Um modelo matemático mostra que o número *N* de pessoas que compram determinado produto após *t* dias de veiculação publicitária é dado por $N = 10^3 + 2 \cdot 10^t$. De acordo com esse modelo, quantas pessoas comprarão o produto após 5 dias de veiculação?

c) $\sqrt{\frac{a^2 + ax}{m}}$, quando $a = 8$, $x = 10$ e $m = 9$.

d) $3(x^2 - y^2) - 10(x + y) \cdot (x - y)$, quando $x = -2$ e $y = -2$.

e) $(a - b)^2 - c^2$, quando $a = \frac{2}{3}$, $b = 1$ e $c = -1$.

f) $\frac{1 - x^2}{xy + 1}$, quando $x = 0{,}5$ e $y = -8$.

g) $\frac{x^3 - y^3}{x^3 + y^3}$, quando $x = \frac{1}{2}$ e $y = -2$.

h) $\frac{y + \frac{1}{x}}{x + \frac{1}{y}}$, quando $x = 10$ e $y = 5$.

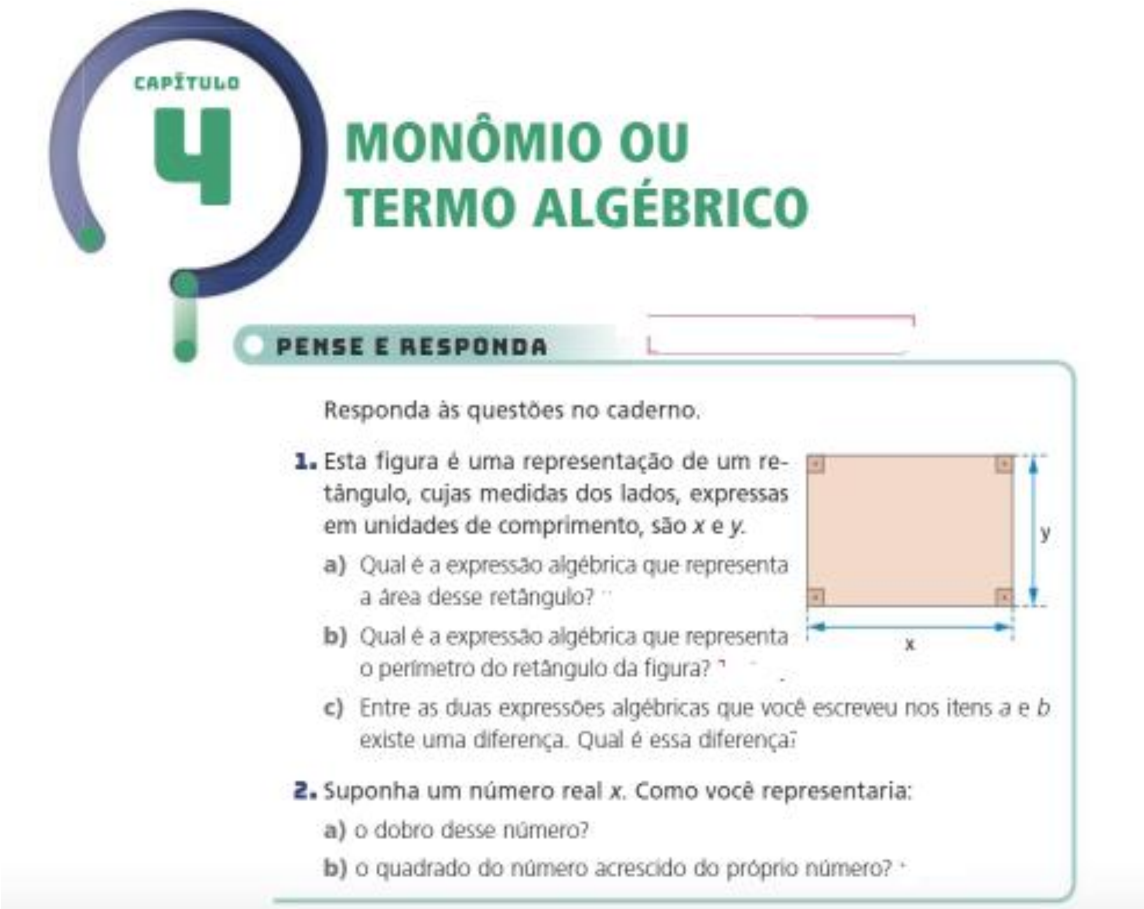
Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018, p. 106).

Por um lado, os exercícios abordam situações-problema envolvendo o cotidiano do aluno para identificar o uso da expressão algébrica e o cálculo do valor numérico da expressão, utilizando as propriedades das operações. Acredita-se que atividades construídas dessa maneira podem contribuir com a aprendizagem significativa do aluno, como mostrado na Figura 19, à esquerda.

Por outro, apresentam-se atividades consideradas mecânicas com foco na reprodução de técnicas, como, por exemplo, nas tarefas apresentadas na figura 19, à direita. “Esta visão tem uma versão “pobre”, em que o objetivo é aprender a manipular os símbolos apenas por treino e prática” (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p.13).

As tarefas que abordam os conceitos e operações de monômios e polinômios, tal como sucedeu em tarefas anteriores, novamente exploram a conexão da Geometria com o cálculo algébrico e os autores alertam para a relevância da compreensão desses conceitos para estudos futuros envolvendo produtos notáveis e fatoração.

Figura 20 – Conceito de monômios


CAPÍTULO 4

MONÔMIO OU TERMO ALGÉBRICO

PENSE E RESPONDA

Responda às questões no caderno.

1. Esta figura é uma representação de um retângulo, cujas medidas dos lados, expressas em unidades de comprimento, são *x* e *y*.

a) Qual é a expressão algébrica que representa a área desse retângulo?

b) Qual é a expressão algébrica que representa o perímetro do retângulo da figura?

c) Entre as duas expressões algébricas que você escreveu nos itens *a* e *b* existe uma diferença. Qual é essa diferença?

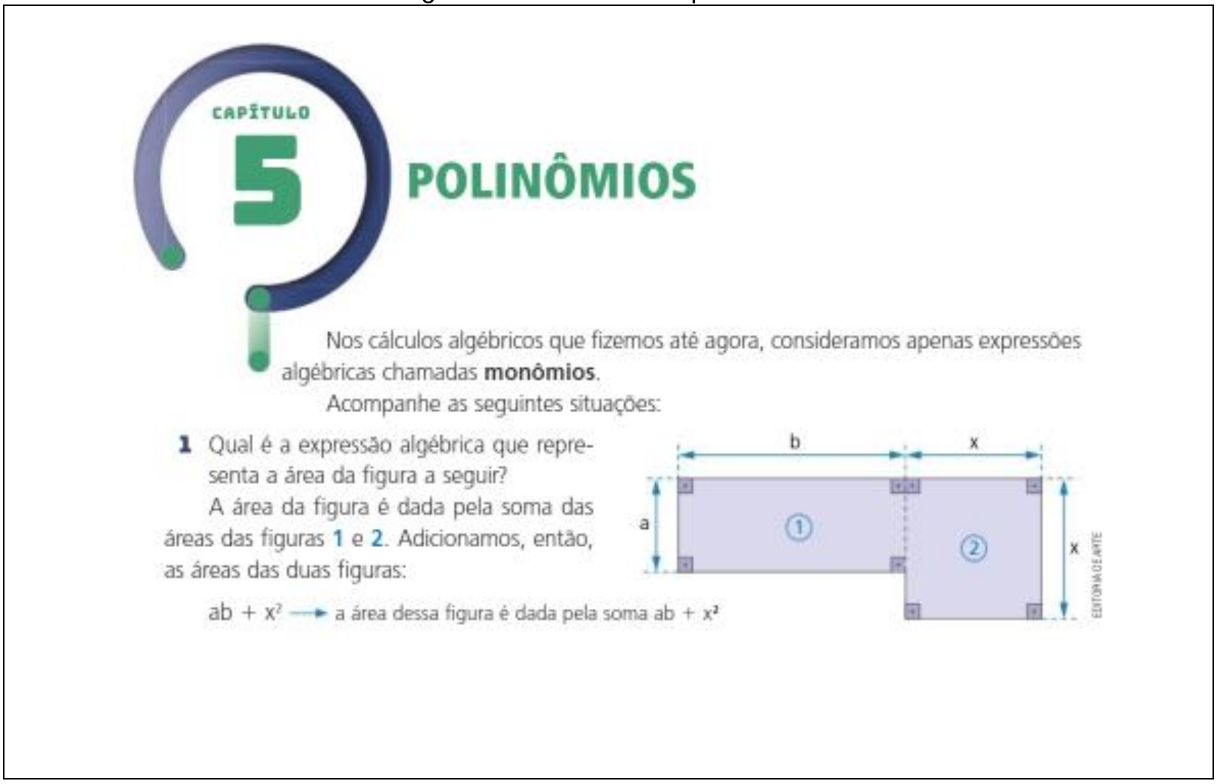
2. Suponha um número real *x*. Como você representaria:

a) o dobro desse número?

b) o quadrado do número acrescido do próprio número?

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018, p. 107).

Figura 21 – Conceito de polinômios



Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018, p. 118).

A maioria das tarefas para esses conceitos são propostas por meio da metodologia da resolução de problemas, objetivando fazer com que o aluno compreenda os conceitos de monômios e polinômios, aprenda a utilizá-los em situações do cotidiano, por isso as atividades são contextualizadas. Observa-se que as operações com monômios e polinômios aparecem organizadas separadas em seções e com diversas abordagens, incentivando o aluno na busca por diversos procedimentos para resolução das questões.

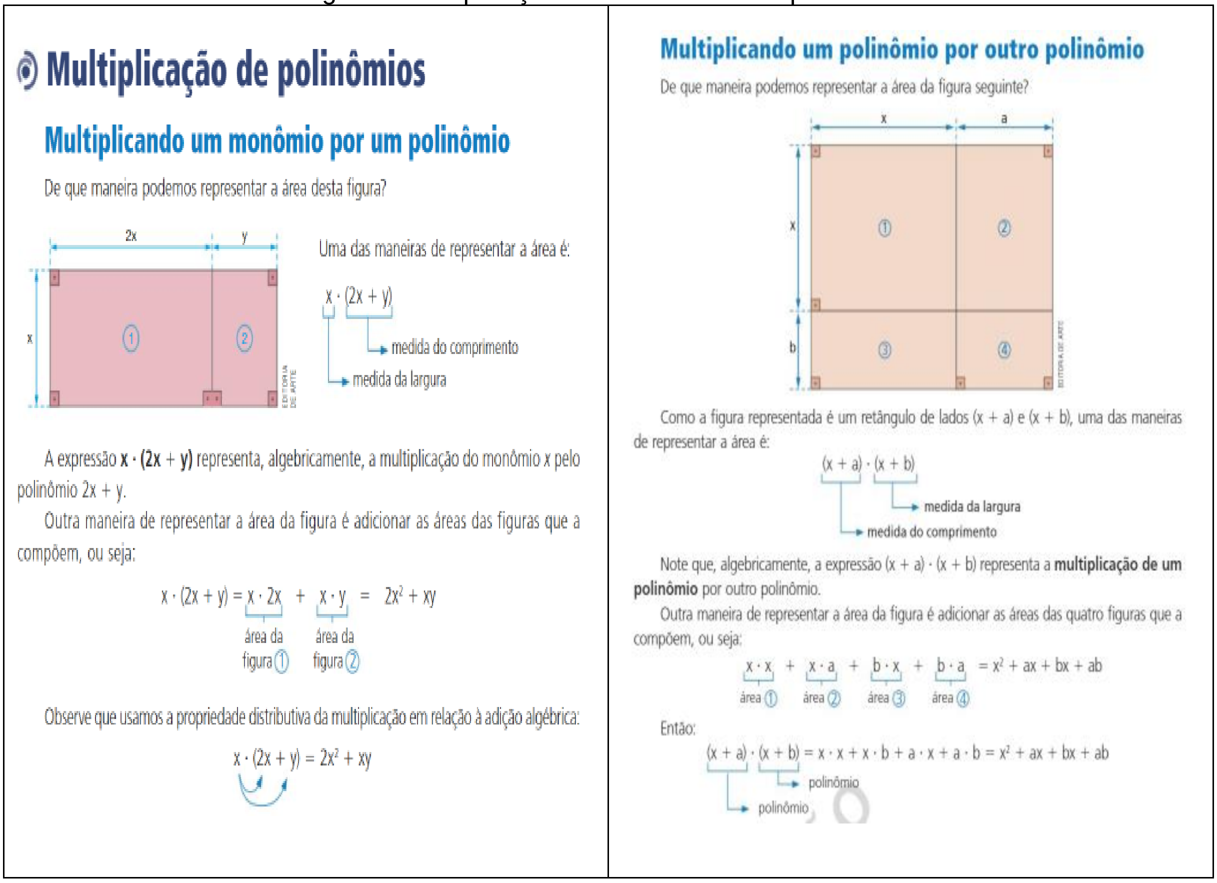
Os autores trazem no livro do professor os erros mais comuns cometidos pelos alunos ao operar monômios e polinômios e apresentam a redução de termos semelhantes como um dos mais comuns cometidos pelos alunos (CORTÉS; KAVAFIAN, 1999 *apud* GIOVANNI JÚNIOR; CASTRUCCI, 2018)

Nesse contexto, o bloco de atividades dá ênfase nessa temática, e sugere que o trabalho do professor seja organizado para a realização do trabalho em grupos para favorecer a aprendizagem. Acrescenta-se aqui, o destaque para atividades que propõe a discussão do uso de parênteses e colchetes, determinantes para a correta resolução de expressões algébricas, além das atividades onde os alunos podem discutir os processos adotados.

Nesse sentido, acredita-se que por meio de atividades que trazem questionamentos sobre determinados conceitos de monômios e polinômios, os alunos são levados a expor seu raciocínio e a refletir sobre o uso da expressão algébrica no nosso dia a dia.

Torna-se fundamental destacar a abordagem dada na seção multiplicando um polinômio, Figura 22. Novamente, com o viés da Geometria, mostram-se as expressões algébricas que representam os lados do quadrado formado e as duas possibilidades para o cálculo da área. Nesse cenário, o aluno é preparado para lidar com expressões equivalentes, importantes para estudos futuros, como o conceito de fatoração e produtos notáveis.

Figura 22 – Operações com monômios e polinômios

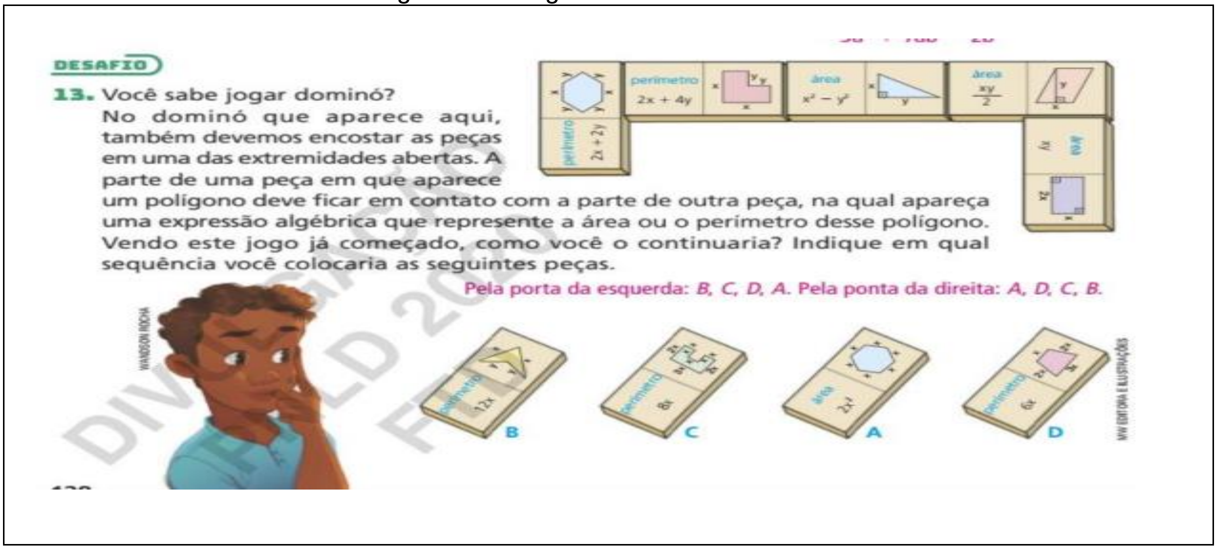


Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018, p. 125-126).

Aqui a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e a multiplicação entre monômios devem estar consolidadas. Refere-se, portanto, a importância do planejamento do professor para um objetivo de aprendizagem ao longo do tempo, onde os conhecimentos são construídos e interligados.

Observa-se, na Figura 23, que para enriquecer o trabalho pedagógico e de integração da Álgebra com a Geometria propõe-se um jogo de dominó com 20 peças para relacionar polinômios, ou seja, a expressão algébrica de perímetro e áreas com a sua respectiva figura plana e volumétrica.

Figura 23 – Jogo como recurso didático



Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018, p. 128).

Para Grando (2019 *apud* LIMA, 2022), há duas possibilidades de explorar o jogo como recurso para o ensino de Matemática em sala de aula. Uma dessas possibilidades é por meio da criação de um jogo ou adaptação de um jogo pré-existente, com a intencionalidade de explorar os conteúdos matemáticos a serem estudados. A outra possibilidade é o uso de jogos que foram criados, muitas vezes com características de entretenimento, para explorar conteúdos que já foram trabalhados em sala de aula.

A unidade analisada buscou mostrar para os alunos através das tarefas propostas a relação de modelos matemáticos com situações do cotidiano. Outro ponto importante é a integração da Álgebra com a Geometria para chegar na abstração. Além disso, buscou instigar nos alunos, por meio do diálogo, como as expressões algébricas se relacionam com outras áreas do conhecimento, por exemplo, a educação financeira. Sugere-se no livro do professor atividades complementares com o uso de material concreto, mas sem configurar como eixo norteador do trabalho pedagógico.

Os objetos de conhecimento, produtos notáveis e fatoração encontram-se presentes no livro do 9º ano da unidade 2, nos capítulos 1 e 2, respectivamente. No que tange aos estudos dos produtos notáveis, foram analisados os conceitos focos da nossa investigação, são eles: o quadrado da soma de dois termos, o quadrado da diferença de dois termos e o produto da soma pela diferença de dois termos. E os conceitos de fatoração pela colocação de um fator comum em evidência e fatoração por agrupamento.

Os autores mais uma vez utilizam a ferramenta do desenho geométrico para facilitar a compreensão dos modelos matemáticos que descrevem os produtos notáveis. Visualiza-se, na Figura 24, que introdução à temática é por meio de uma situação-problema que coloca o aluno em um contexto de investigação e, também, lançam-se questionamentos para estimular a análise, o raciocínio e a linguagem verbal. Pontua-se, nesse capítulo, a importância do vocabulário correto para expressar também corretamente a escrita algébrica.

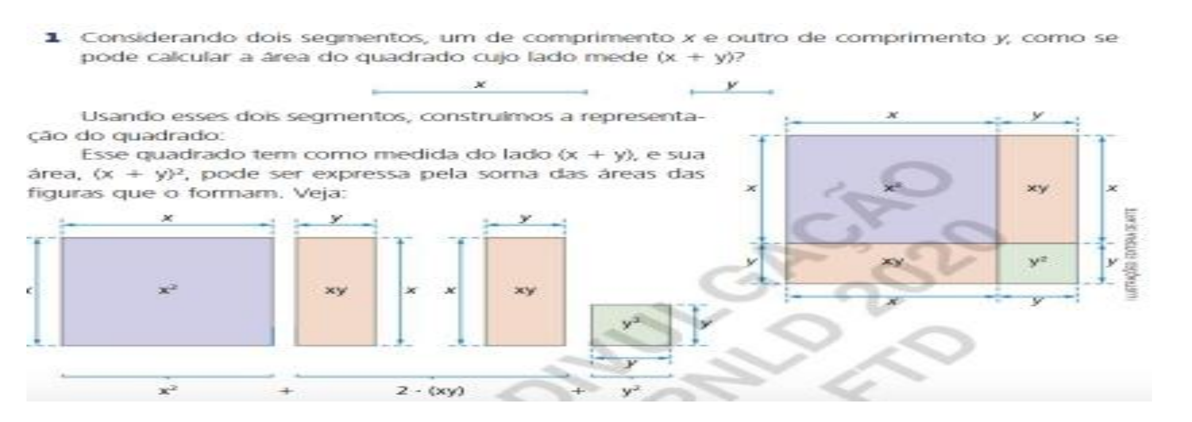
Figura 24 – Conceitos de produtos notáveis

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018, p. 60-61).

Para o NCTM (2007), as situações extra-matemáticas têm um papel importante como ponto de partida para a construção de modelos e exploração de relações. Mais do que simples ilustração ou aplicação, são nelas que os alunos encontram os elementos com os quais constroem representações e modelos para descrever fenômenos e situações, que estão na base de novos conceitos e relações matemáticas.

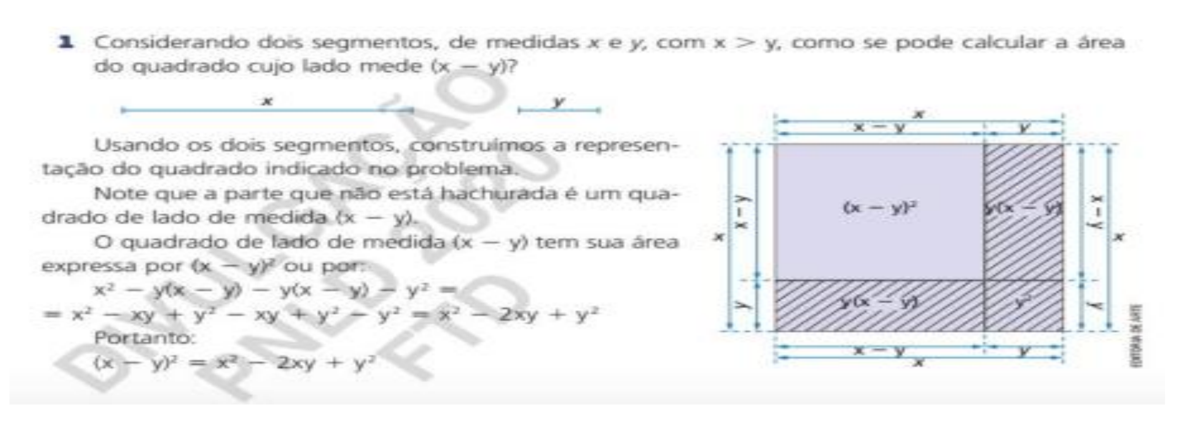
Primeiramente, conforme Figuras 25 e 26, as atividades buscam desenvolver algebricamente a generalização dos produtos notáveis.

Figura 25 – Habilidade EF09MA09



Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018, p. 63-64).

Figura 26 – Habilidade EF09MA09



Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018, p. 64).

Apresenta-se, como eixo norteador para o desenvolvimento do conceito de produtos notáveis, a estratégia da utilização de segmentos de retas para generalizar o cálculo da área do quadrado cujas medidas dos lados são as medidas dos segmentos dados, como mostrado na Figura 26.

Na mesma direção da Figura 27, a maioria das tarefas para o desenvolvimento desses conceitos centra-se principalmente na utilização de operações, propriedades, simplificação e manipulação algébrica, com raras atividades propondo resolução de problemas.

Figura 27 – Habilidade EF09MA09

1. Utilizando o que aprendeu sobre produtos notáveis, escreva o polinômio correspondente a:

a) $(8x + 1)(8x - 1)$
b) $(10 + 3x)^2$
c) $(7a - b)^2$
d) $(x + 0,5y)^2$
e) $(ax + b)(ax - b)$
f) $(a^2 - 4y)^2$
g) $(1,4 - abc)(1,4 + abc)$
h) $(a^3 + b^3)^2$
i) $(x^4 + 5y^4)^2$
j) $\left(bc - \frac{1}{2}a^2\right)\left(bc + \frac{1}{2}a^2\right)$

5. Desenvolvendo a expressão $(3x^5 - 0,5)^2$, encontramos um trinômio.
a) Qual é esse trinômio?
b) Qual é o coeficiente numérico do termo em x^5?
c) Qual é o produto dos coeficientes numéricos do trinômio?

6. Entre as igualdades seguintes, identifique aquelas que são falsas e corrija-as, escrevendo-as corretamente.
a) $(b - 2c)^2 = b^2 - 4bc + 4c^2$
b) $(3y - a)(3y + a) = 3y^2 - a^2$
c) $(2c - a)^2 = 2c^2 + 4ac + a^2$
d) $(x^3 + y^3)(x^3 - y^3) = x^6 - y^6$

7. Quando você divide um polinômio *P* por $2ax + 5$, vai encontrar o polinômio $2ax + 5$. Usando as regras dos produtos notáveis, escreva o polinômio *P*.

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018, p. 66-67).

Embora os autores considerem a manipulação de objetos geométricos como apoio fundamental para a compreensão dos conceitos, apresenta-se apenas como sugestão, caso seja oportuno para o professor, o uso dos materiais concretos ou o desenho através da construção das figuras geométricas em papel quadriculado.

Acredita-se que manipular o material permite a criatividade, a busca por soluções, a formação de conjecturas, diferente da mera observação da demonstração acabada fornecida pelo livro didático. Desse modo, atividades mais interativas nas quais se utiliza material manipulativo (figuras geométricas simples recortadas em cartolina), quando aplicadas com objetivos bem definidos, podem configurar como auxiliar na formação dos conceitos algébricos, facilitando a compreensão da generalização dos mesmos.

Mancera e Basurto (2016), afirmam que aprender Matemática envolve desenvolver estratégias e formas de abordar o conhecimento, não se trata apenas de memorizar, esse aspecto pode até ser mínimo, é mais importante desenvolver a imaginação, a intuição matemática ou estratégias para resolver problemas.

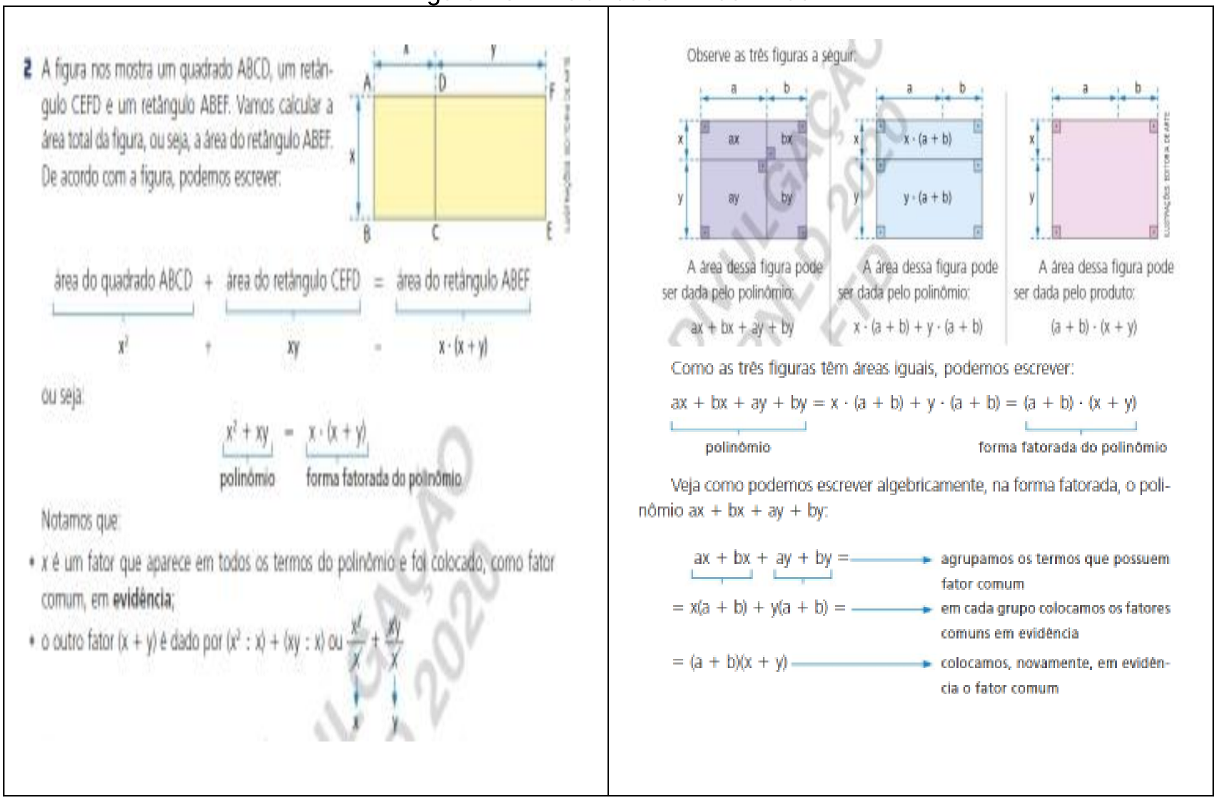
Nesse sentido, as atividades por meio de investigação podem proporcionar ao aluno maior interesse e diminuir a apatia frente as atividades realizadas repetidamente.

As tarefas propostas para o estudo do objeto de conhecimento de fatoração iniciam-se apresentando exemplos numéricos e solicita-se às possibilidades de escrita através de fatores. Giovanni Júnior e Castrucci (2018) acreditam que a fatoração numérica facilita a compreensão de fatoração de expressões algébricas. Ponte, Branco e Matos (2009, p. 81) destacam que:

No trabalho com expressões algébricas, assumem especial importância os casos notáveis da multiplicação de binômios. A equivalência de $(x+a)^2$ e $x^2+2xa+a^2$ (quadrado de um binômio) deve ser mostrada tanto algébrica como geometricamente. No entanto, antes de poderem compreender uma justificação geral, os alunos devem trabalhar com casos simples.

Usa-se a Geometria para escrever matematicamente as maneiras possíveis para representar a área de um retângulo formado pela composição de quadrados e retângulos. Dessa maneira, apresenta-se o conceito da forma fatorada do polinômio. A composição e a decomposição de figuras são apresentadas como caminho para compreender expressões polinomiais e o trabalho com fatoração, como pode ser observado na Figura 28.

Figura 28 – Habilidade EF09MA09



2 A figura nos mostra um quadrado ABCD, um retângulo CEFD e um retângulo ABEF. Vamos calcular a área total da figura, ou seja, a área do retângulo ABEF. De acordo com a figura, podemos escrever:

$\underbrace{\text{área do quadrado ABCD}}_{x^2} + \underbrace{\text{área do retângulo CEFD}}_{xy} = \underbrace{\text{área do retângulo ABEF}}_{x \cdot (x+y)}$

ou seja:

$\underbrace{x^2+xy}_{\text{polinômio}} = \underbrace{x \cdot (x+y)}_{\text{forma fatorada do polinômio}}$

Notamos que:

- x é um fator que aparece em todos os termos do polinômio e foi colocado, como fator comum, em **evidência**;
- o outro fator $(x+y)$ é dado por $(x^2 : x) + (xy : x)$ ou $\frac{x^2}{x} + \frac{xy}{x}$

Observe as três figuras a seguir.

A área dessa figura pode ser dada pelo polinômio: $ax + bx + ay + by$

A área dessa figura pode ser dada pelo polinômio: $x \cdot (a+b) + y \cdot (a+b)$

A área dessa figura pode ser dada pelo produto: $(a+b) \cdot (x+y)$

Como as três figuras têm áreas iguais, podemos escrever:

$\underbrace{ax + bx + ay + by}_{\text{polinômio}} = x \cdot (a+b) + y \cdot (a+b) = \underbrace{(a+b) \cdot (x+y)}_{\text{forma fatorada do polinômio}}$

Veja como podemos escrever algebricamente, na forma fatorada, o polinômio $ax + bx + ay + by$:

$ax + bx + ay + by =$ → agrupamos os termos que possuem fator comum

$= x(a+b) + y(a+b) =$ → em cada grupo colocamos os fatores comuns em evidência

$= (a+b)(x+y)$ → colocamos, novamente, em evidência o fator comum

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018, p. 71-73).

As tarefas propostas para os alunos, de modo geral, incentivam a socialização das respostas e a exposição das estratégias que foram adotadas, bem como o erro e as dúvidas como oportunidades para reflexão e discussão que devem ser mediadas pelo professor com o objetivo de sanar os equívocos existentes.

As análises feitas nos livros do 6º, 8º e 9º anos revelam a preocupação dos autores com a conexão entre as atividades, ponto importante para que o aluno seja colocado em um ambiente crescente e constante de construção do conhecimento matemático.

Percebe-se uma volumosa quantidade de conceitos que fazem parte do Ensino Fundamental Anos Finais, que a princípio a memorização de técnicas pode parecer o caminho mais fácil. No entanto, o professor precisa se permitir ir além do ensino tradicional, agregando ferramentas e metodologias as suas aulas. Nesse sentido, o livro traz sugestões de metodologias e ferramentas pedagógicas como o uso de recursos didáticos variados (jogos, manipulação de formas geométricas recortadas em papel e o uso de tecnologias) para desenvolver o processo de ensino e aprendizagem com compreensão e significado para o aluno.

A seguir, no capítulo 5 apresenta-se a descrição dos aspectos metodológicos, local e perfil dos participantes da pesquisa, dos instrumentos de pesquisa, a descrição do experimento e a intervenção didática realizada nesta investigação.

5 PERCURSO METODOLÓGICO

A presente investigação obedece a um desenho característico de um estudo de caso, que permitiu estudar o objeto no seu contexto real. No caso desta investigação foi possível analisar o desempenho dos estudantes de uma turma dos Anos Finais do Ensino Fundamental, de uma Escola Estadual do município de Manaus do estado do Amazonas, ao desenvolverem uma Sequência Didática fundamentada nas conexões entre diferentes temas e objetos matemáticos e entre linguagem simbólica, representações e resolução de situações-problema visando o desenvolvimento do Pensamento Algébrico, com estudantes deste nível de ensino.

Com o intuito de responder à questão "como desenvolver uma Sequência Didática envolvendo os conteúdos de Álgebra nos Anos Finais do Ensino Fundamental na perspectiva da BNCC?", optou-se pela metodologia de natureza qualitativa, pois se acredita que o pesquisador busca compreender a natureza subjetiva e o contexto do estudo. Para Creswell (2010, p.43), a abordagem qualitativa é "um meio para explorar e para entender o significado que os indivíduos ou os grupos atribuem a um problema social, ou humano", nesse caso como os estudantes atribuem significados para a Sequência Didática investigada. Segundo Malhotra et al. (2005, p. 113), "a pesquisa qualitativa proporciona melhor visão e compreensão do problema".

A pesquisa qualitativa apresenta características que correspondem às expectativas da nossa investigação. Para Kaplan e Duchon (1988), "as principais características dos métodos qualitativos são a imersão do pesquisador no contexto e a perspectiva interpretativa de condução da pesquisa".

Nesse sentido, o olhar do pesquisador na leitura e interpretação do fenômeno estudado é fundamental para a condução da investigação. Para Creswell (2010):

> Neste tipo de pesquisa pretende-se interpretar os acontecimentos e entender as relações existentes entre os constructos a partir da ótica do pesquisador, levando em consideração seus vieses, seus valores e suas origens pessoais, tais como gênero, história, cultura e status socioeconômico que podem moldar suas interpretações durante o estudo.

Para alcançar a leitura qualitativa, Creswell (2010), "aponta o estudo de caso como uma estratégia de investigação". A pesquisa junto aos alunos dos Anos Finais do Ensino Fundamental configura o campo de investigação. Nesse sentido, o estudo de caso como abordagem de pesquisa permitiu aprofundamento amplo sobre o tema estudado e a validação da Sequência Didática desenvolvida com a temática de pesquisa.

De acordo com Denzin e Lincoln (2001, p. 436), pode-se dizer que os estudos de casos tem algumas características em comum:

> São descrições complexas e holísticas de uma realidade, que envolvem um grande conjunto de dados; os dados são obtidos basicamente por observação pessoal; o estilo de relato é informal, narrativo, e traz ilustrações, alusões e metáforas; as comparações feitas são mais implícitas do que explícitas; os temas e hipóteses são importantes, mas são subordinados à compreensão do caso.

O Estudo de Caso é um método que resulta da observação e engloba três fases distintas (YIN, 2001):

a. A escolha do referencial teórico sobre o qual se pretende trabalhar; a seleção dos casos e o desenvolvimento de protocolos para a coleta de dados;
b. A condução do Estudo de Caso, com a coleta e análise de dados, culminando com o relatório do caso;
c. A análise dos dados obtidos à luz da teoria selecionada, interpretando os resultados.

Para tal, nessa pesquisa foram realizadas as seguintes fases:

1ª) Exploratória: construção do referencial teórico com a temática de pesquisa e a organização da Sequência Didática;

2ª) Coleta de dados: realizada durante o experimento, com a aplicação de um questionário para determinar o perfil dos estudantes participantes, observação do desenvolvimento das atividades, das atitudes e dos registros dos estudantes na realização das atividades, gravações de vídeo com os alunos participantes do experimento;

3ª) Análise, interpretação e relatório: reflexão e análise dos dados coletados durante a aplicação da Sequência Didática.

Para o desenvolvimento da investigação foram realizadas as seguintes ações:

1. Levantamento dos trabalhos realizados com a temática de pesquisa com um mapeamento da produção científica no portal de periódicos da CAPES;
2. Referencial teórico com as temáticas Recursos Didáticos, Pensamento Algébrico e Material Concreto;
3. Análise de livros didáticos dos Anos Finais do Ensino Fundamental com a temática de pesquisa utilizados nas escolas públicas estaduais da cidade de Manaus;
4. Investigação de atividades didáticas com a temática de pesquisa integrados ao uso

de materiais concretos e organizadas em uma Sequência Didática;

5. Implementação (desenvolver, aplicar e avaliar) de um experimento com estudantes do Ensino Fundamental Anos Finais com o uso da Sequência Didática desenvolvida com a temática de pesquisa;
6. Coleta de dados durante a realização do experimento com os estudantes de uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola de Manaus;
7. Análise dos dados coletados e considerações possíveis de serem observadas nos dados analisados.

Importante salientar que na revisão de literatura apresentada no capítulo 2, foi possível um esboço atual das contribuições e lacunas sobre o tema desenvolvido na pesquisa e que evidenciou a importância do presente estudo.

Acredita-se que o referencial teórico é um dos aspectos mais importantes de uma investigação. É ele que possibilita dar consistência e fundamentar todo o trabalho de pesquisa. Nesse sentido, no capítulo do referencial teórico desta pesquisa apresenta-se a visão de outros autores para enriquecer, promover e ampliar a discussão sobre as temáticas abordadas.

Buscou-se em Zabala (1998) alicerçar as ideias para a implementação de uma Sequência Didática, com o uso de materiais concretos para a compreensão dos conteúdos de Polinômios e suas operações e, assim, desenvolver o Pensamento Algébrico, na perspectiva da BNCC.

Optou-se em realizar análise dos livros didáticos do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) adotados pela escola pública Cacilda Braule Pinto, local do desenvolvimento do experimento, no triênio 2020/ 2021/ 2022. Trata-se dos livros de 6º, 8º e 9º anos que fazem parte da coleção A Conquista da Matemática dos autores José Ruy Giovanni Júnior e Benedicto Castrucci destinada a alunos do Ensino Fundamental Anos Finais. O foco dado foi em analisar as obras tomando como eixo orientador as aprendizagens essenciais ou os objetos de conhecimento das unidades temáticas, com a finalidade do desenvolvimento dos conceitos de Polinômios e do Pensamento Algébrico, seguindo o proposto na BNCC (BRASIL, 2018) e utilizados como temáticas para o desenvolvimento das tarefas que compõem a Sequência Didática implementada nesta investigação.

As atividades que compõem a Sequência Didática, foram escolhidas considerando o referencial teórico e os obstáculos presentes na formação dos conceitos algébricos e a dificuldade dos estudantes no desenvolvimento de diferentes aspectos que caracterizam o Pensamento Algébrico. Para isso, na investigação e na construção do experimento consideram-se três fases da intervenção reflexiva proposta por Zabala (1998), descritas como: planejamento, aplicação e avaliação.

Desse modo, a elaboração da Sequência Didática prescindiu dos seguintes passos básicos propostos por Oliveira (2013): escolha do tema a ser trabalhado; planejamento dos conteúdos; objetivos a serem atingidos no processo de ensino e aprendizagem; delimitação da sequência de atividades, levando-se em consideração a organização dos estudantes, material didático, cronograma, integração entre cada atividade e etapas, e avaliação dos resultados.

A proposta da Sequência Didática foi planejada para ser implementada (desenvolvida, aplicada e avaliada) em uma turma de 9º ano do Ensino Fundamental e concebida considerando em um primeiro momento o desenvolvimento das tarefas com a utilização de materiais concretos e ao final de cada sequência de atividades propõe-se a realização de uma avaliação das aprendizagens.

A análise dos dados foi em uma perspectiva da busca do desempenho dos estudantes no desenvolvimento da Sequência Didática proposta e da análise dos registros dos estudantes, buscando identificar os equívocos cometidos, as facilidades e as dificuldades que enfrentaram. Tal análise deu-se com foco nas competências e habilidades algébricas previstas na BNCC (BRASIL, 2018) e no desenvolvimento de aspectos do Pensamento Algébrico nos alunos, segundo preceitos de autores como Kaput (2008).

5.1 CONTEXTO DA PESQUISA

A pesquisa foi realizada na Escola Estadual Cacilda Braule Pinto, instituição pública, localizada na Rua São Pedro, s/ n, bairro do Coroado, no município de Manaus, estado do Amazonas. Pertencente a Rede Estadual de Ensino, a escola atende ao público estudantil em três turnos nas modalidades de Ensino Fundamental Anos Finais (6º ao 9º ano) e Educação de Jovens e Adultos (Fundamental Anos Finais e Médio).

A escola possui 12 salas de aula, quadra de esporte coberta, refeitório, biblioteca, laboratório de informática sem computadores para uso dos alunos, banheiro adequado para alunos com deficiência e sala de recursos multifuncionais.

Segundo dados referentes ao ano de 2022, o estabelecimento atende uma média de 1.244 alunos, distribuídos em 35 turmas nos três turnos de funcionamento.

O corpo docente é formado por 48 professores, sendo 10 de Matemática. Na escola há 24 turmas de 6º ao 9º ano do ensino regular, distribuídas igualmente entre os turnos matutino e vespertino, totalizando cerca de 940 alunos. Cada turma tem em média 40 alunos.

A escolha da instituição de ensino se deu pelo fato da escola oferecer a modalidade regular de Ensino Fundamental Anos Finais, ter a população adequada para a realização do estudo e, além disso, a escola é o local de trabalho da pesquisadora responsável pela pesquisa.

5.2 PARTICIPANTES DA PESQUISA

Os participantes da pesquisa foram 40 estudantes (35 frequentando assiduamente) com idade entre 13 e 17 anos no momento de realização do experimento de uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental pertencentes ao turno matutino da escola de realização da pesquisa. A partir dos dados coletados com a realização do questionário sobre o perfil dos participantes, verificou-se que 19 estudantes eram do gênero feminino e 21 se declararam do gênero masculino.

Do total de 40 alunos que responderam ao questionário, 36 nunca repetiram de ano, 2 alunos repetiram duas vezes, um respondeu que repetiu uma única vez e apenas um não soube responder. Ao analisar o universo da pesquisa, percebe-se que 70% responderam que a Matemática é a disciplina com maior dificuldade de aprendizagem. Sete alunos mencionaram a Matemática como a disciplina que mais gostam e 10 alunos como a que menos gostam, desses, 9 apontaram como a área que apresenta maior dificuldade em aprender os conteúdos.

Além disso, quando perguntados se realizavam tarefas em casa, 62,5% dos alunos responderam que sim e o restante, 37,5%, somente às vezes dedicam-se a responder às atividades. Quando se indagou sobre o uso de materiais concretos no processo de ensino e aprendizagem, 95% declararam que gostam quando o professor incorpora esse recurso didático na sua prática educativa.

Nesse contexto, entre os anos de 2005 e 2021, a escola apresenta notas do IDEB com as turmas do 9º ano do Ensino Fundamental Anos Finais, conforme Figura 29.

Figura 29 – IDEB observado

Ano	Valor
2005	3,3
2007	3,6
2009	3,7
2011	4,0
2013	3,8
2015	4,5
2017	5,3
2019	5,2
2021	5,5

Fonte: INEP (BRASIL, 2022).

Apresenta-se na Figura 30 a proficiência em Matemática no SAEB da escola em que foi desenvolvida a Sequência Didática investigada.

Figura 30 – Proficiência média em Matemática

Ano	Proficiência Média
2005	252,5
2007	231,4
2009	230,6
2011	242,7
2013	241,3
2015	243,2
2017	253,9
2019	257,9
2021	266,0

Fonte: INEP (BRASIL, 2022).

Observou-se a necessidade de adotar estratégias para engajamento dos alunos no desenvolvimento do Currículo proposto pela escola na disciplina de Matemática, pois os resultados apresentados não foram os desejados. Nesse sentido, torna-se importante desenvolver pesquisas buscando caminhos para melhorar o desempenho dos estudantes em relação aos conceitos matemáticos e ao desenvolvimento do Pensamento Algébrico.

5.3 PROCEDIMENTOS PARA COLETA - INSTRUMENTOS DA PESQUISA

Metodologicamente, no processo de constituição dos dados da pesquisa para a busca de respostas ao problema, foram adotados três etapas:

1º) Questionário para determinar o perfil dos estudantes;

2º) Registro das respostas dos estudantes quando realizam as atividades da Sequência Didática com recursos manipuláveis;

3º) Observações, fotos, filmagens, durante a realização do experimento com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental.

No primeiro momento, para determinar o perfil dos estudantes participantes da pesquisa, foram entregues 40 questionários que correspondem a uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental dos Anos Finais da escola de realização da pesquisa. Por questões éticas e buscando preservar a identidade dos participantes, os questionários não foram identificados.

Ressalta-se, que o projeto de pesquisa foi submetido e aprovado por Comitê de Ética em Pesquisa com seres humanos com CAAE nº 46427021.4.0000.5349 e número do Parecer 4.739.834 e que cada participante assinou o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) e o Termo de Assentimento Livre e Esclarecido (TALE), bem como a gestora da escola assinou autorização para a realização da referida pesquisa de mestrado.

Na segunda etapa, o registro das respostas se deu no sentido de avaliar as práticas realizadas na turma, para tal utilizou-se a nossa observação participante das aulas e o parâmetro de desempenho nas avaliações. Os registros das interações com e entre os alunos foram realizados em um diário de campo (anotações escritas e elaboradas por mim durante a realização do experimento) e por gravações em vídeo e fotos.

No processo de observação participante, os alunos foram acompanhados durante a realização do experimento diariamente nos tempos de aula previstos para a disciplina de Matemática, com duração de 45 (quarenta e cinco) minutos cada um nas 5 (cinco) aulas semanais previstas para a disciplina. Vale ressaltar que, a pesquisadora dessa investigação também é a professora responsável em aplicar a Sequência Didática.

5.4 O EXPERIMENTO

Desenvolver o Pensamento Algébrico nos alunos é algo complexo, para tanto, optou-se em aplicar uma Sequência Didática. Como parte da implementação do experimento (detalhada no capítulo 6), 40 (quarenta) alunos foram observados durante a aplicação de 4 (quatro) sequências de atividades, que trata de modo geral da unidade temática Álgebra, com enfoque nos objetos de conhecimento: unidades de medida e cálculo de perímetro e área; monômios e polinômios: operações e valor numérico; produtos notáveis e fatoração de monômios e polinômios, que correspondem ao currículo do Ensino Fundamental Anos Finais.

A organização do trabalho pedagógico foi planejada considerando: relações interativas, organização dos alunos, encadeamento das atividades, recursos didáticos, tempo e espaço e avaliação (ZABALA, 1998).

A aplicação da Sequência Didática e as observações iniciaram em março de 2022 e estendeu-se até setembro desse mesmo ano. Essa etapa da pesquisa foi destinada à aplicação e avaliação mediada pela professora/ pesquisadora ao utilizar materiais concretos como ferramenta de apoio no processo de ensino – para ajudar na percepção, na visualização e na representação de conceitos matemáticos. Para isso, as quatro sequências de atividades que fazem parte da Sequência Didática foram aplicadas junto aos sujeitos envolvidos na pesquisa.

A avaliação das aprendizagens aconteceu de maneira contínua, ao longo do processo de aplicação da Sequência Didática, considerando a participação efetiva dos alunos, os relatos verbais e as produções escritas coletivas, e, também após, com uma avaliação formativa das aprendizagens ao final de cada sequência de atividades.

Não foi necessário realizar teste de verificação para constatar se os discentes possuíam conhecimento prévio necessário para a execução das atividades relacionadas à sequência didática, pois além da pesquisadora ser professora da turma, a primeira sequência de atividades apresenta-se como introdução para os demais conteúdos.

Vale ressaltar que, todas as atividades foram realizadas em sala de aula, com a supervisão da professora/ pesquisadora, para que fosse possível ser avaliadas todas as considerações e evoluções dos alunos a respeito dos conceitos estudados. Os tempos de aula para o desenvolvimento das tarefas tinham em média de 45 a 50 minutos.

Apresenta-se na Figura 31 a descrição do cronograma de realização das atividades da Sequência Didática determinado pelas quatro sequências de atividades com temáticas específicas e distintas, mas com foco no objeto de conhecimento Polinômios e suas operações implementadas nesta investigação.

Figura 31 – Sequência Didática para o ensino de polinômios

Etapas das atividades	Temática	Organização	Tempo de execução
Apresentação da Sequência Didática	Apresentação da metodologia; Delimitação dos objetos de conhecimento; Apresentação objetivos; Divisão da turma em grupos de trabalho.	-	1 aula
Aplicação do questionário	Aplicação do questionário para determinar o perfil dos participantes.	-	1 aula
1ª sequência de atividades	Unidades de medida. Cálculo de perímetro e área de figuras planas.	9 conjuntos de tarefas e 1 avaliação	33 aulas
2ª sequência de atividades	Monômios e polinômios: Operações e valor numérico.	6 conjuntos de tarefas e 1 avaliação	18 aulas
3ª sequência de atividades	Produtos Notáveis: quadrado da soma, quadrado da diferença e produto da soma pela diferença.	8 conjuntos de tarefas e 1 avaliação	23 aulas
4ª sequência de atividades	Fatoração de polinômios: fator comum e por agrupamento.	3 conjuntos de tarefas e 1 avaliação	15 aulas

Fonte: A pesquisa.

Para a realização das atividades foram organizados 9 grupos de trabalho contendo entre 5 e 6 participantes e um coordenador escolhido pelo próprio grupo. O trabalho de grupo foi organizado para incentivar a discussão, reflexão e trabalho colaborativo por meio de tarefas que estimulavam a manipulação dos objetos, a interpretação, a criatividade, a estratégia e a argumentação. Desse modo, as etapas de aplicação das atividades foram:

1. Organização dos grupos de trabalho;
2. Discussão e reflexão sobre como resolver as atividades nos grupos de trabalho com mediação da pesquisadora/ professora;
3. Apresentação dos resultados ao grande grupo com discussão coletiva.
4. Avaliação.

Em um primeiro momento foi apresentada para a turma escolhida como participantes da pesquisa a proposta pedagógica que seria adotada pela professora/ pesquisadora para o desenvolvimento dos conteúdos, bem como os objetivos e a possibilidade do uso de uma Sequência Didática e do material concreto para a execução das tarefas, justificando a importância desses recursos didáticos no processo de ensino e aprendizagem.

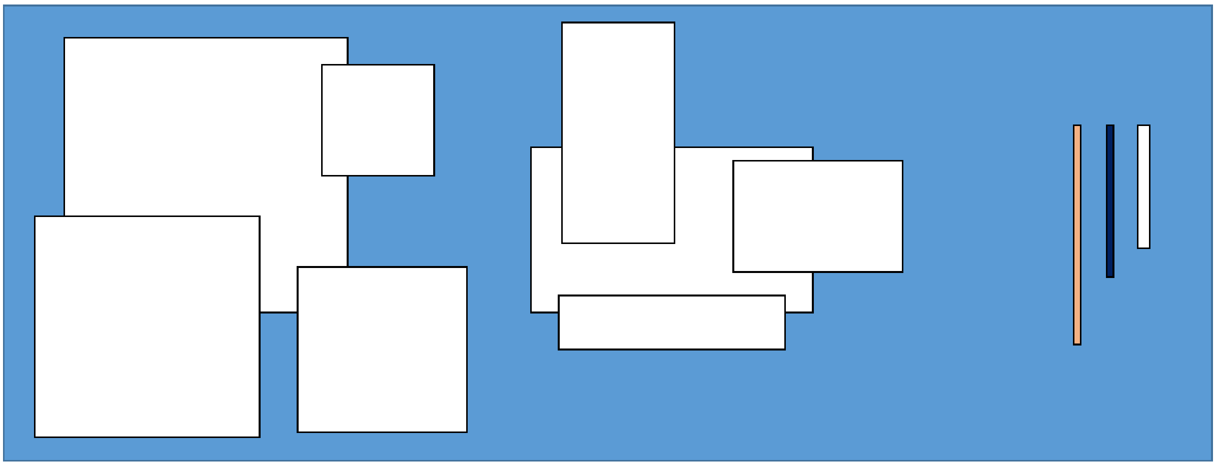
Como uma segunda ação, os estudantes foram divididos em 9 grupos compostos entre 5 e 6 componentes, sendo um escolhido pelo próprio grupo como coordenador.

Os grupos recebiam uma folha com tarefas referentes ao objeto de conhecimento estudado e o respetivo material concreto a ser explorado com a intenção de estimular a socialização e comunicação entre os colegas de grupo. As atividades foram elaboradas com foco na metodologia de resolução de problemas. Nesse sentido, a mediação da professora/ pesquisadora aconteceu no intuito de estimular o raciocínio, representação, comunicação e argumentação matemática. Sobre a organização da sala de aula e o trabalho do professor, Nacarato e Custódio (2018, p. 23), ressaltam que:

> A organização dos alunos é de extrema relevância, já que o trabalho em colaboração permite atuar nas zonas de desenvolvimento potencial. Dessa forma, alunos mais experientes podem colaborar com alunos menos experientes. As tarefas pressupõem que o trabalho em sala de aula seja em duplas ou pequenos grupos. Porém, ainda que se faça uma organização intencional dos modos de trabalho, o professor não se exime de seu papel como o mais experiente do grupo.

Os materiais manipulativos empregados nas diversas atividades foram confeccionados pela professora/ pesquisadora.

Figura 32 – Materiais concretos



Fonte: A pesquisa.

São materiais simples que consistiam basicamente em quadrados e retângulos de tamanhos diferentes recortados em cartolina, além de fitas de três cores diferentes medindo 15 cm, 10 cm e 5 cm, conforme representação na Figura 32.

A primeira sequência de atividades, com foco na aprendizagem do objeto de conhecimento unidades de medida envolvendo grandezas como comprimento, área, capacidade e volume, teve como finalidade possibilitar aos alunos a aprendizagem para resolver problemas que envolvam grandezas, mas sem uso de fórmulas. Outro conhecimento matemático fundamental para a consolidação do Pensamento

Algébrico e presente nesta sequência de atividades são as grandezas perímetro e área.

O desenvolvimento da atividade se deu no sentido de possibilitar ao aluno resolver problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área em situações como determinar a medida de terrenos.

Nesse sentido, buscou-se explorar tarefas para o ensino de unidades de medida por meio do conceito de perímetro e de área tendo como base material concreto. A intenção foi propor ao aluno tarefas que possibilitasse uma interpretação geométrica de expressões algébricas, promovendo uma aprendizagem com mais sentido e menos abstração ao articular essas duas unidades temáticas, pois é impensável para a aprendizagem significativa de diversos conceitos matemáticos, o estudo da Álgebra sem o enfoque geométrico.

A organização das atividades teve como objetivo levar o aluno reconhecer diversas maneiras de efetuar medições, utilizar variados padrões de medida; reconhecer o uso de unidades de medida padrão; entender os motivos que justificam a adoção de um sistema de unidades de medida padrão; usar a linguagem simbólica para descrever expressões de cálculo de área e perímetro de quadriláteros e introduzir o conceito de monômios e polinômios através do cálculo de área e perímetro.

A proposta dessa sequência teve como base o uso de jornal, material dourado, caixa em acrílico e folhas de exercícios.

A sequência de atividades 2, construída para o 9º ano do Ensino Fundamental, abordou o objeto de conhecimento valor numérico de expressões algébricas, para desenvolver a habilidade resolver problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, com o uso das propriedades das operações.

Objetivou-se com esse conjunto de tarefas fazer o aluno calcular o valor numérico de uma expressão algébrica; reconhecer a utilização de letras para representar números e expressões algébricas; adquirir o conceito de monômios e polinômios e realizar operações; desenvolver habilidades de cálculos com monômios e polinômios por meio da Geometria; relacionar a Álgebra dos polinômios com a Geometria envolvida nas áreas de figuras como quadrado e retângulo, com seus lados dados por variáveis.

Para esta sequência de atividades utilizou-se como recurso didático: folhas de exercícios, cartolina de três cores diferentes, tesoura, régua, lápis e caderno.

A construção dos conceitos de monômios e polinômios deu-se por atividades cujas unidades de medida eram fitas de cores e tamanhos diferentes (identificadas por letras: a para azul, por exemplo). Com essas fitas os alunos realizaram diversas medições de largura e comprimento (cartolina, mesa, caderno) usando apenas uma cor, em seguida com duas cores diferentes e, finalmente, três cores diferentes e faziam anotações, caracterizando, assim, os conceitos de monômios, binômios e trinômios. Outra proposta de tarefa, os grupos mediam as fitas com a régua e substituíram os valores correspondentes a cada fitas nas expressões obtidas anteriormente. Com isso utilizavam uma unidade de medida conhecida para estabelecer o valor numérico das expressões. Aqui o aluno foi estimulado a escrever o modelo matemático para o cálculo de área de retângulos e quadrados. Com esses conhecimentos adquiridos e com uma variedade de figuras geométricas confeccionadas com cartolina, os alunos puderam compor novas figuras e, desse modo, construir os conceitos de multiplicação e divisão algébrica e expressões algébricas das áreas totais.

A terceira sequência de atividades composta por tarefas no que tange o objeto de ensino e aprendizagem, expressões algébricas, fatoração e produtos notáveis para compreender os processos de fatoração de expressões algébricas e relacionar com os produtos notáveis, para resolver problemas representados equações polinomiais do 2º grau. Seu objetivo foi generalizar o modelo matemático dos produtos notáveis, utilizando materiais concretos e a relação da Álgebra com a Geometria.

Utilizou-se como material concreto: folhas de atividades, figuras geométricas confeccionadas em cartolina, tesoura e régua.

A generalização do modelo matemático dos produtos foi possível através da manipulação de quadrados e retângulos. Os alunos puderam relacionar a Geometria com a Álgebra.

A quarta sequência de atividades foi organizada com foco na aprendizagem do objeto de conhecimento: resolução de equações polinomiais do 2º grau por meio de fatorações e, no desenvolvimento da mesma habilidade presente na terceira sequência de atividades, para o objeto de conhecimento produtos notáveis (BRASIL, 2018).

No entanto, a finalidade desta série de tarefas estava em desenvolver nos alunos a capacidade de fatorar por fator comum e por agrupamento e também, apresentar a fatoração por meio de representações geométricas de áreas de retângulos. Dessa maneira, há ampliação da habilidade para a compreensão de um novo conceito matemático, fatoração de polinômios.

Utilizou-se como material de apoio para dar suporte à aprendizagem dos alunos: figuras confeccionadas em cartolina.

Nesse sentido, cada sequência, normalmente, seguia as seguintes etapas: apresentação de uma sequência de tarefas a ser resolvida com o uso de material concreto, exercitação, generalização por meio do uso do material concreto, exposição do conceito, resolução de problemas e avaliação.

Para compreender a organização da Sequência Didática implementada nesta investigação detalha-se no próximo capítulo as propostas de tarefas desenvolvidas nas quatro sequências de atividades segundo os princípios expressos pela BNCC (BRASIL, 2018), onde se apresenta, inicialmente, a respectiva temática algébrica, os objetos de conhecimento, as habilidades trabalhadas, os objetivos e os materiais concretos requeridos. Em seguida, as tarefas são descritas passo a passo, além da avaliação.

O desenvolvimento da Sequência Didática deu-se na busca por diferentes atividades com enfoque nos conceitos de Polinômios e suas operações, na perspectiva da BNCC (BRASIL, 2018), conforme detalhado no próximo capítulo.

6 UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA COM O USO DE MATERIAL CONCRETO COMO PROPOSTA PARA O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO

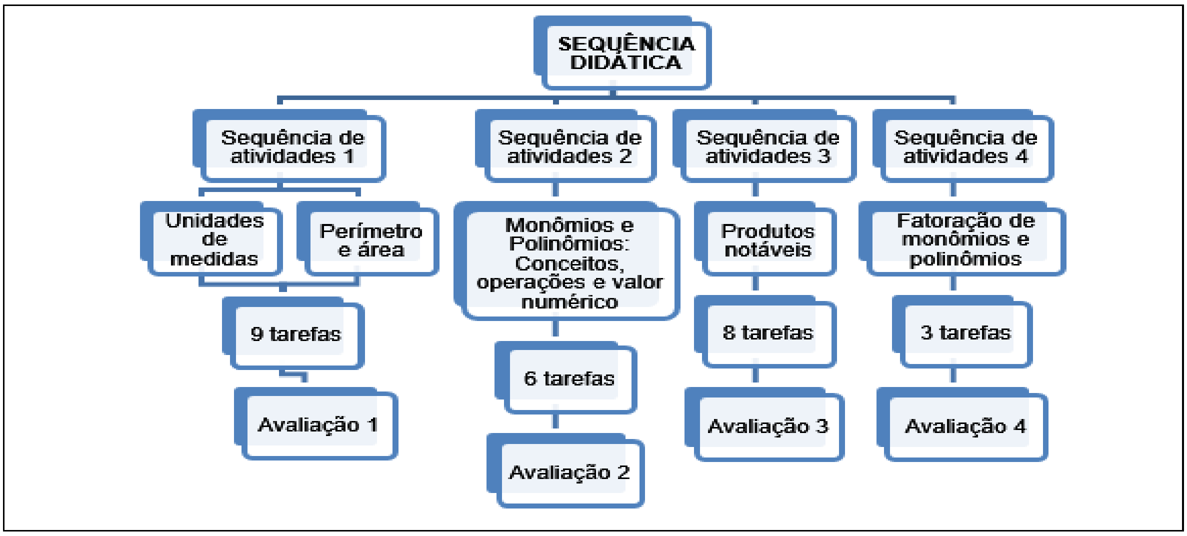
As sequências de atividades apresentadas neste capítulo estão estruturadas segundo critérios para a sua construção, desenvolvimento e avaliação, considerando três fases da intervenção reflexiva, descritas como: planejamento, aplicação e avaliação (ZABALA, 1998, p. 18), essenciais para a organização das situações de ensino de conteúdos matemáticos propostos aos alunos em sala de aula. Para esse autor, diferente de atividades ou tarefas as Sequências Didáticas, ou atividades didáticas podem ser definidas como um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos (ZABALA, 1998, p. 18).

As atividades que compõem a Sequência Didática, foram escolhidas levando considerando os obstáculos presentes na formação dos conceitos algébricos e a dificuldade dos estudantes no desenvolvimento de diferentes aspectos que caracterizam o Pensamento Algébrico.

Para isso, na investigação e na construção do experimento considerou-se a aplicação de atividades com vistas à apreensão de significados que o aluno pode estabelecer a partir de conexões entre diferentes conhecimentos matemáticos para a Álgebra, como: linguagem simbólica, conceitos de Geometria e de Medidas e resolução de problemas.

Na elaboração das atividades, de modo geral, consideraram-se as ideias de equivalência, variação, interdependência, proporcionalidade, regularidade, padrões, generalização e linguagem algébrica. A Figura 33 ilustra o mapeamento da Sequência Didática constituída por 4 sequências de atividades com seus respectivos objetos de conhecimento, composta por um conjunto de tarefas.

Figura 33 – Detalhamento da Sequência Didática



Fonte: A pesquisa.

As tarefas são frutos do modelo proposto por Groenwald; Albé; Klaus; Hoffmann (1998) e de exercícios retirados dos livros da Coleção Praticando Matemática (ANDRINI; VASCONCELLOS, 2015) para o ensino de unidades de medida, valor numérico e operações com monômios e polinômios, produtos notáveis e fatoração de monômios e polinômios, explorando diferentes concepções da Álgebra com enfoque geométrico.

Para o desenvolvimento das sequências de atividades com os alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, caracterizou-se cada uma com o objeto de conhecimento a ser estudado, a habilidade a ser desenvolvida, os objetivos de aprendizagem, os elementos do Pensamento Algébrico que podem ser constituídos, bem como, listou-se o material manipulável necessário.

6.1 SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 1 – UNIDADES DE MEDIDA

Esta sequência de atividades é composta por 9 (nove) conjuntos de tarefas, com foco para o objeto de conhecimento: Problemas sobre medidas envolvendo grandezas como comprimento, massa, tempo, temperatura, área, capacidade e volume, com a finalidade de possibilitar aos alunos a aprendizagem e o desenvolvimento da habilidade **(EF06MA24)** preconizada pela BNCC (BRASIL, 2018, p. 303), onde se pontua que:

> Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas comprimento, massa, tempo, temperatura, área (triângulos e retângulos), capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais

e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento.

Outro conhecimento matemático fundamental para a consolidação do Pensamento Algébrico e presente nesta sequência de atividades são as grandezas perímetro e área. Esse objeto de conhecimento adquire sentido para o aluno quando, segundo a BNCC (BRASIL, 2018, p. 315), possibilita o desenvolvimento da habilidade **(EF08MA19)**: "resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar a medida de terrenos".

É impensável para a aprendizagem significativa de diversos conceitos matemáticos, o estudo da Álgebra sem o enfoque geométrico. Por exemplo, na exploração da Geometria analítica, o seu estudo permite tanto resolver problemas geométricos recorrendo a artifícios da Álgebra, quanto aplicar significado geométrico a fatos da Álgebra (BRASIL, 2011).

Nesse sentido, buscou-se explorar atividades para o ensino de unidades de medida por meio do conceito de perímetro e de área tendo como base material concreto. O propósito é proporcionar aos alunos tarefas que possibilitem uma interpretação geométrica de expressões algébricas, promovendo uma aprendizagem com mais sentido e menos abstração ao articular essas duas unidades temáticas.

A organização das atividades tem como objetivo levar o aluno, identificar e comparar características de elementos, observar semelhanças e diferenças entre objetos; reconhecer diversas maneiras de efetuar medições, utilizar variados padrões de medida; reconhecer o uso de unidades de medida padrão; entender os motivos que justificam a adoção de um sistema de unidades de medida padrão; usar a linguagem simbólica para descrever expressões de cálculo de área e perímetro de quadriláteros e introduzir o conceito de monômios e polinômios através do cálculo de área e perímetro.

O intuito é verificar, ao final da aplicação da atividade, características do Pensamento Algébrico manifestadas por eles, tais como:

> (I) a generalização e formalização de padrões e restrições; (II) a manipulação de formalismos guiada sintaticamente; (III) o estudo de estruturas abstratas a partir de cálculos e relações; (IV) o estudo de funções, relações e variação de duas variáveis; e (V) a utilização de múltiplas linguagens na modelação matemática e no controle de fenômenos (KAPUT, 1999).

A proposta dessa sequência de atividades prevê o uso de jornal, jornal, material dourado, caixa em acrílico, liquido colorido e folhas de exercícios.

6.1.1 Desenvolvimento da sequência de atividades 1

Tarefa 1: Unidades de comprimento

Objetivo: Reconhecer unidades de medida. Transformar unidades de medida.

Material concreto: uma fita de 1m recortada em jornal.

1.1 Usando uma fita de jornal de 1 m de comprimento.

a) Divida-a em 10 partes iguais.

b) Faça de jornal 1 dm. Em seguida, divida o dm em cm.

Antecipando as respostas: Espera-se que o aluno conheça os múltiplos e submúltiplos ao apresentar a unidade padrão de comprimento.

1.2 Em seguida, o professor deve perguntar aos alunos:

a) O que se mede em metros?

b) O que se compra em metros?

c) Quantos dm tem em 1 m?

d) Quantos cm tem em 1 dm?

e) Quantos mm tem em 1 cm?

f) Quantos cm tem em 1 m?

g) Quantos mm tem em 1 m?

h) Quantos m tem em 1 km?

Antecipando as respostas: a) resposta pessoal (sugestões: distâncias, altura, etc.); b) resposta pessoal (sugestões: tecido, piso, terreno, etc.); c) 10 dm; d) 10 cm; e) 10 mm; f) 100 cm; g) 1000 mm; h) 1000 m.

1.3 Complete:

a) 1m = ____ dm

b) 1m = ____ cm

c) 1m = ____ mm

d) 1km = ____ m

Antecipando as respostas: a) 10 dm, b) 100 cm, c) 1000 mm, d) 1000 m.

1.4 Quanto preciso comprar de rodapé para colocar em uma sala de 7 m por 5 m?

Antecipando as respostas: 24 metros.

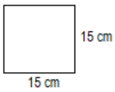
1.5 Seu José possui um terreno quadrado com 15 metros de lado e quer cercá-lo. Ele precisa determinar o comprimento da cerca para comprar o material. Vamos ajudá-lo! Desenhe-o usando a escala 1 cm igual a 1 m (1:100).

a) Desenhe o terreno e marque quanto mede cada lado.

b) Que cálculo precisamos fazer para descobrir o comprimento da cerca?

Antecipando as respostas:

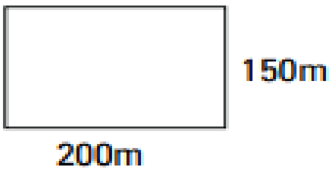
a)



b) P = 4 x 15 = 60 m

Ao calcular a medida do perímetro do quadrado, os alunos devem perceber que sempre são adicionadas 4 parcelas iguais, cada uma referente à medida do comprimento de um lado do quadrado. Com isso, espera-se que os alunos saibam relacionar a medida do perímetro com a medida do comprimento do lado do quadrado.

1.6 O pátio da minha escola pode ser representado assim:



Observe a figura e responda.

a) Qual a forma do pátio da escola?

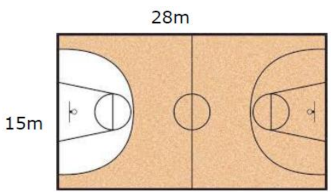
b) Quais são as medidas dos seus lados?

c) Qual é o perímetro do pátio da escola?

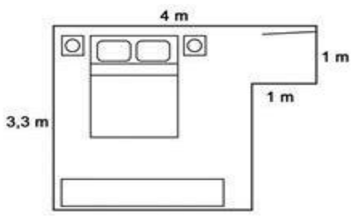
Antecipando as respostas:
a) Retangular
b) 200 m e 150 m
c) P = 200 m + 150 m + 200 m + 150 m = 700 m ou (200 m + 150 m) = 700 m

1.7 Calcule os perímetros:

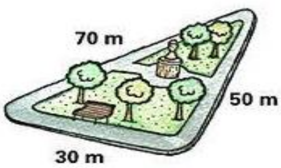
a)



b)



c)



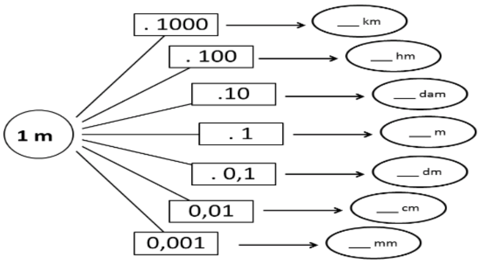
Antecipando as respostas:
a) 86 m, b) 14,6 m, c) 150 m.
Espera-se que o aluno relacione o contorno da figura com o perímetro da figura.

1.8 Construa 1 metro com jornal, em seguida meça cada integrante do grupo.

MEDIDAS	ALUNO 1	ALUNO 2	ALUNO 3	ALUNO 4	ALUNO 5
ALTURA					
ENVERGADURA					

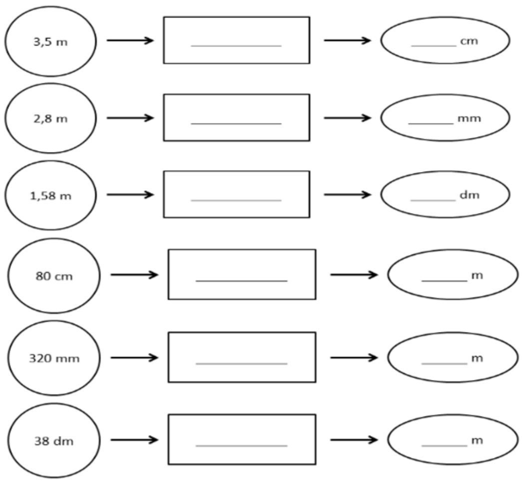
Tarefa 2

2.1 Complete os diagramas das unidades de comprimento:



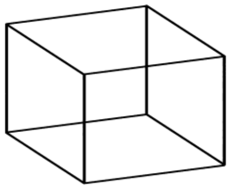
Antecipando as respostas:
1000 km; 100 hm; 10 dam; 1m; 0,1dm; 0,01 cm; 0,001 mm.

2.2 Transforme as unidades de comprimento nas unidades citadas:



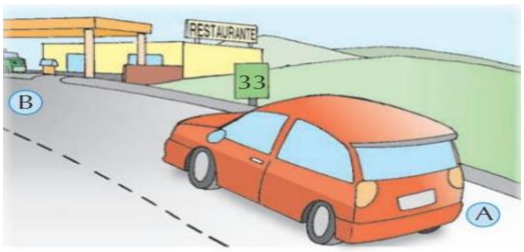
Antecipando as respostas:
350 cm; 2800 mm; 15,8 dm; 0,8 m; 0,32 m; 3,8 dm

2.3 Construa o esqueleto de um cubo com espetinhos de madeira. Cada aresta é um espetinho e cada espetinho mede 8,4 cm. Qual o comprimento total dos espetinhos utilizados? Esse comprimento ultrapassa 1 metro? Se sua resposta for sim, em quantos centímetros?



Antecipando as respostas:
Sim. 0,08 cm.

2.4 Um automóvel está no quilometro 33 de uma rodovia e percorre 1,5 Km por minuto no sentido A até B. Onde ele estará depois de 6 minutos?



Antecipando as respostas:
No quilômetro 42.

2.5 Construa com EVA algumas réguas vermelhas que medem 5 cm e algumas réguas azuis que medem 8 cm.

a) Como você consegue medir exatamente 31 cm com essas réguas?

b) Como você consegue medir exatamente 17 cm com essas réguas?

Antecipando as respostas:
a) duas réguas azuis mais três réguas vermelhas ou 2x8 cm + 3x5 cm
b) quatro réguas azuis menos três vermelhas ou 4x8 – 3x5

Tarefa 3: Unidades de área

Objetivo: construir o conceito de área.

Material concreto: metro quadrado construído em jornal.

3.1 Com o metro quadrado construído em jornal.

a) Coloque esse quadrado no chão e veja o espaço que ele ocupa.

b) Você consegue imaginar quantos metros quadrados tem sua sala de aula?

c) Com o m² de jornal, desenhe 1 dm². Em seguida dívida 1 dm² em cm² e dívida 1 cm² em mm².

Antecipando as respostas: Ao apresentar a unidade-padrão de medida de área, o metro quadrado, pode-se construir com jornal, no chão da sala de aula, um quadrado de medida igual a 1m para que possa estimar a área de uma sala. Espera-se que o alunos reconheça os múltiplos e submúltiplos da grandeza área.

3.2 Em seguida o professor deve perguntar aos alunos:

a) Quantos dm^2 tem 1 m^2?

b) Quantos cm^2 tem 1dm^2?

c) Quantos cm^2 tem 1 m^2?

d) Quantos mm^2 tem 1 m^2?

Antecipando as respostas: a) 100 dm^2, b) 100 cm^2, c) 10000 cm^2, d) 1000000 mm^2.

3.3 Complete:

a) $1m^2$ = ____dm^2

b) $1m^2$ = ____cm^2

c) $1m^2$ = ____mm^2

d) $1km^2$ = ____m^2

Antecipando as respostas: a) 100 dm^2, b) 10000 cm^2, c) 1000000 mm^2, d) 1000000 m^2.

Tarefa 4

4.1 Pegue folhas de jornal, meça, recorte e cole, de tal forma que você construa um quadrado com 2 metros de lado.

a) Qual é o seu perímetro?

b) Qual é a sua área?

Antecipando as respostas: a) P = 8 m, b) A = 4 m^2 Essa atividade pode ser desenvolvida no pátio da escola ou na sala de aula, para que os grupos trabalhem na confecção das folhas com o metro quadrado.

4.2 Pegue folhas de jornal, meça, recorte e cole, de tal forma que você construa um retângulo com um lado medindo 2 metros e outro lado medindo 3 metros.

a) Qual é o seu perímetro?

b) Qual é a sua área?

Antecipando as respostas: a) P = 10 m, b) A = 6 m^2

4.3 Usando a régua, faça figuras diferentes com 6 m² de área.

a) Desenhe-as usando a escala 1 cm igual a 1 m (1:100).

b) Calcule o perímetro das figuras desenhadas.

Antecipando as respostas: a) Resposta pessoal. b) Quando os alunos forem desenhar as figuras, sugerir a escala a ser usada: representar o metro pelo centímetro. Portanto, no desenho cada centímetro vai valer um metro. Nesse caso os alunos devem perceber que a melhor forma é a retangular com medidas de 2 m por 3 m.

4.4 Com o metro construído em jornal, meça a sala de aula e calcule:

a) Sua área.

b) Quantos m² de cerâmica preciso comprar para revesti-la.

c) Seu perímetro.

d) Quantos metros de rodapé são necessários na sala.

Antecipando as respostas: O importante, nesta aula, é que o aluno compreenda o conceito de área e o diferencie do perímetro.

4.5 No caderno, desenhe as áreas:

a) 9 cm²

b) 3 cm²

c) 12 cm²

Antecipando as respostas: O importante, nesta tarefa, é que o aluno compreenda o conceito de área. Nesse caso os alunos devem perceber que as melhores formas são retangular para os casos b e c e quadrangular com medida de 3 cm, para a questão a.

4.6 Desenhe as figuras a seguir. Calcule o perímetro e a área de cada uma.

a) Quadrado de lado 5 cm

b) Quadrado de lado 2 dm

c) Quadrado de lado 3,5 cm

d) Retângulo de lado 3 cm e 4 cm

e) Retângulo de lado 2 cm e 5 cm

Antecipando as respostas: a) P = 20 cm e A = 25 cm², b) P = 8 dm e A = 4 dm², c) P = 14 cm e A = 12,25 cm², d) P = 14 cm e A = 12 cm², e) P = 14 cm e A = 10 cm².

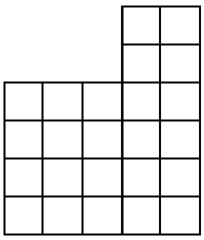
4.7 Desenhe a planta baixa de uma casa de 150 m² com 3 quartos, cozinha, sala, banheiro e área de serviço.

Antecipando as respostas:
a) Resposta pessoal.
Sugestão: Sala-estar/ jantar tem 32,0 m²; cozinha tem 44,2 m²; banheiro tem 9,50 m²; quarto 1 tem 22,80 m², quarto 2 tem 22,80 m², quarto 3 tem 18,70 m².
Quando os alunos forem desenhar as figuras, sugerir a escala a ser usada: representar o metro pelo centímetro. Portanto, no desenho cada centímetro vai valer um metro.

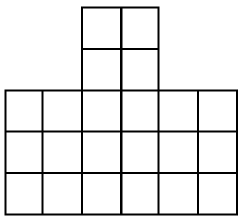
Tarefa 5

5.1 Utilize um quadradinho como unidade de área e calcule as áreas e perímetros de:

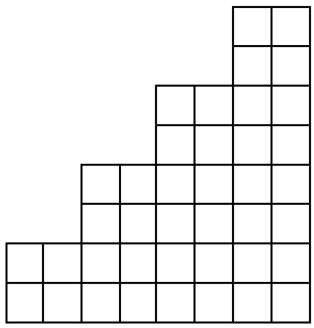
a)



b)



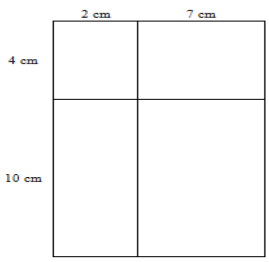
c)



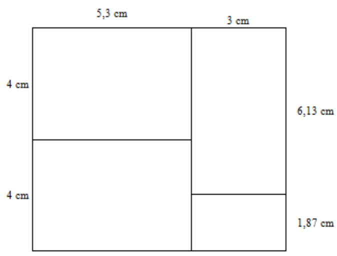
Antecipando as respostas:
a) P = 22 unidades de quadradinhos e A = 24 unidades de quadradinhos de área.
b) P = 22 unidades de quadradinhos e A = 22 unidades de quadradinhos de área.
c) P = 32 unidades de quadradinhos e A = 40 unidades de quadradinhos de área.

5.2 Calcule as áreas representadas pelas figuras a seguir:

a)



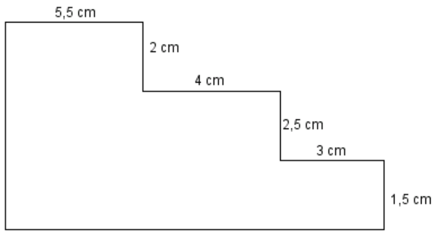
b)



Antecipando as respostas:
a) A = 126 cm² e b) A = 66,4 cm²

5.3 Calcule a área e o perímetro das figuras:

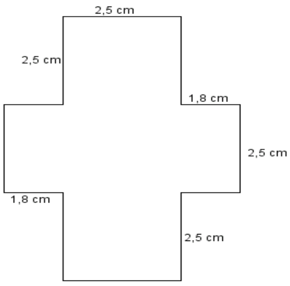
a)



P =

A =

b)



P =

A =

Antecipando as respostas: a) P = 37 cm e A = 53,5 cm², b) P = 27,2 cm e A = 27,75 cm².

5.4 Tenho um terreno de 12m por 30m e foi construída uma casa de 9m por 10m.

Pergunta-se:

a) Qual é a área do terreno?

b) Qual é a área da casa?

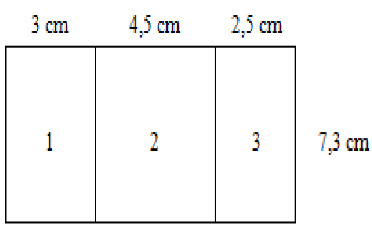
c) Quantos m² sobraram de pátio?

d) Faça o desenho da situação descrita acima, usando a escala 1:100.

Antecipando as respostas: a) 360 cm², b) 90 cm², c) 270 cm². Quando os alunos forem desenhar as figuras, sugerir a escala a ser usada: representar o metro pelo centímetro. Portanto, no desenho cada centímetro vai valer um metro.

5.5 Calcule as áreas:

a)



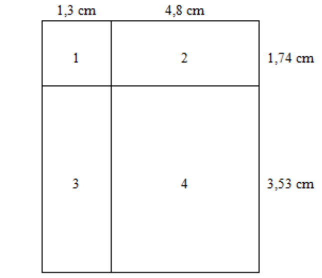
$A_1 =$

$A_2 =$

$A_3 =$

$A_T =$

b)



$A_1 =$

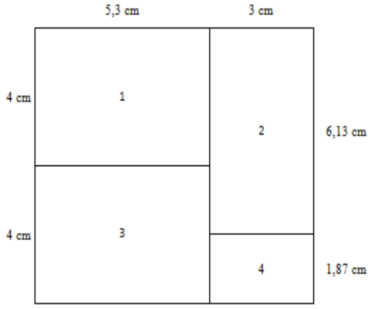
$A_2 =$

$A_3 =$

$A_4 =$

$A_T =$

c)



$A_1 =$

$A_2 =$

$A_3 =$

$A_4 =$

$A_T =$

Antecipando as respostas:
a) A_1 = 21,9 cm²; A_2 = 32,85 cm²; A_3 = 18,25 cm²; A_T = 73 cm²
b) A_1 = 2,26 cm²; A_2 = 8,35 cm²; A_3 = 4,59 cm²; A_4 = 16,94; A_T = 32,14 cm²
c) A_1 = 21,2 cm²; A_2 = 21,2 cm²; A_3 = 18,39 cm²; A_4 = 5,61; A_T = 66,4 cm²

Tarefa 6

6.1 Tenho um terreno de 10 m x 30 m. Construí uma garagem de 10 m x 12 m no fundo do terreno. Sabendo que três paredes estão localizadas na divisa, calcule:

a) A área da garagem.

b) A área do terreno que sobrou.

c) A área total do terreno

d) Desenhe a situação usando a escala 1 m:1 cm.

Antecipando as respostas:
a) 120m², b) 180 m² e c) 300 m².
d) espera-se que o aluno reconheça que a melhor forma para representar o terreno é a retangular. Além disso, quando os alunos forem desenhar as figuras, sugerir a escala a ser usada: representar o metro pelo centímetro. Portanto, no desenho cada centímetro vai valer um metro.

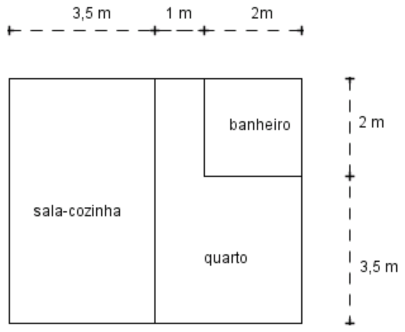
6.2 Um apartamento tem as medidas a seguir. Calcule:

a) As áreas de cada ambiente do apartamento.

b) A área total do apartamento.

c) A quantidade de carpete necessária para forrar o quarto.

d) A quantidade de rodapé necessária para a sala-cozinha.



Antecipando as respostas:
a) Sala-cozinha tem 19,25 m²; banheiro tem 4 m², quarto tem 10,5 m² descontando o corredor de 2 m². b) AT = 35,75 m². c) 12,5 m². d) 18 m

6.3 Desenhar a planta baixa de uma casa de 90m², com 5 ambientes, utilizando a escala 1:100.

6.4 Desenhar figuras que representem as áreas a seguir e calcular os perímetros:

a) 16 cm²

b) 9 cm²

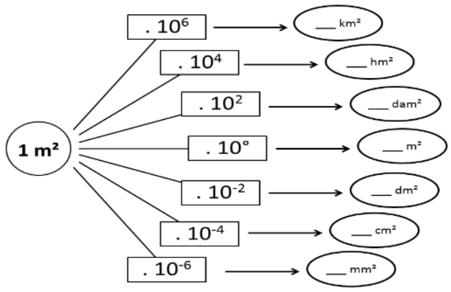
c) 32 cm²

d) 40 cm²

e) 12 cm²

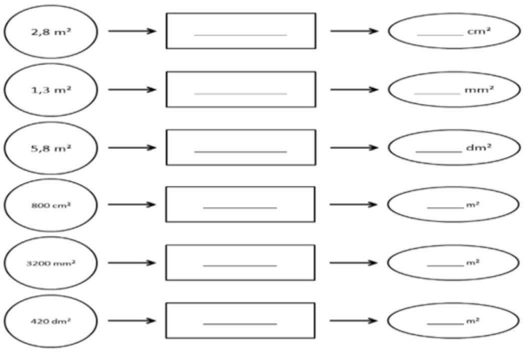
Antecipando as respostas:
O importante, nesta tarefa, é que o aluno compreenda o conceito de área e o diferencie de perímetro. As melhores figuras para representar as áreas são retangulares e quadrados.
a) P = 16 cm, b) P = 12 cm, c) P = 24 cm, d) P = 28 cm, e) P = 16 cm

6.5 Complete os diagramas das unidades de comprimento:



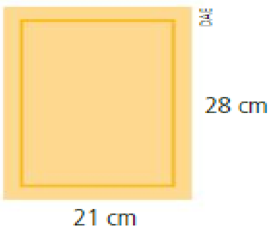
Antecipando as respostas:
10^6 km²; 10^4 hm²; 10^2 dam²; 1 m²; 10^{-2} dm²; 10^{-4} cm²; 10^{-6} mm²

6.6 Transforme as unidades de área nas unidades solicitadas:



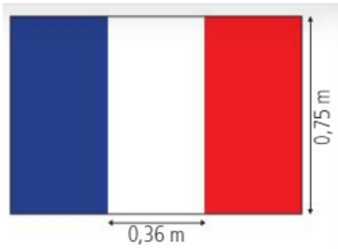
Antecipando as respostas: 28000 cm²; 1300000 mm²; 580 dm²; 0,08 m²; 0,0032 m²; 4,2 m²

6.7 Em um pedaço de cartolina retangular foi feita uma margem de 2 cm em toda a volta. Que área restou para o desenho?



Antecipando as respostas: 17x24 = 408 cm²

6.8 Construa a bandeira da França utilizando papel colorido. Ela é formada por três faixas verticais de mesmo tamanho, nas cores azul, branco e vermelho.



a) Calcule a área correspondente a cada cor.

b) Calcule a área da bandeira.

Antecipando as respostas: a) 0,27 m², b) 0,81 m²

Tarefa 7: Unidades de volume

Objetivo: desenvolver o conceito de volume.

7.1 Desenhe, em cartolina, 1 dm³.

Antecipando as respostas:
A intenção é fazer com que os alunos percebam

7.2 Em seguida o professor deve perguntar aos alunos:

a) O que se compra em m³?

b) Quantos dm³ cabem em 1 m³?

c) Quantos cm³ cabem em 1 dm³?

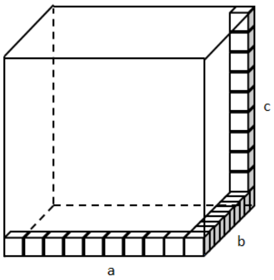
d) Quantos cm³ cabem em 1 m³?

e) Quantos mm³ cabem em 1 cm³?

f) Quantos mm³ cabem em 1 dm³?

Antecipando as respostas:
a) resposta pessoal (sugestões: material de construção em geral); b) 1000 dm³; c) 1000 cm³; d) 1000000 cm³; e) 1000 mm³; f) 1000000 mm³.

7.3 Utilize o material dourado como unidade de medida para representar as três dimensões do cubo maior.

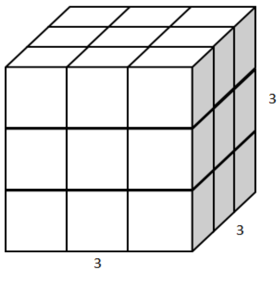


$$Volume = comprimento \times largura \times altura$$

$$V = a \times b \times c$$

$$V = abc$$

Então, para calcular o volume do cubo, é preciso fazer o produto das três dimensões.



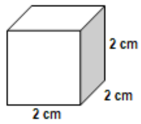
7.4 Desenhe e calcule os volumes:

a) 1 cubo de aresta 2 cm.

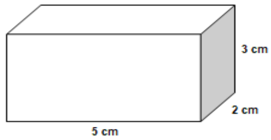
b) 1 paralelepípedo de dimensões 3 x 2 x 5 cm.

Antecipando as respostas:

a)



b)



$V = 2 \times 2 \times 2 = 8\ cm^3$

$V = 5 \times 3 \times 2 = 30\ cm^3$

7.5 Desenhe:

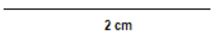
a) 2 cm

b) 2 cm^2

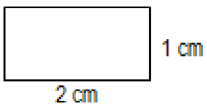
c) 2 cm^3

Antecipando as respostas:

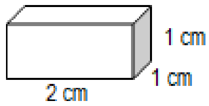
a)



b)



c)



Tarefa 8

8.1 Desenhe as figuras e calcule os volumes:

a) Um paralelepípedo de 2 cm por 3 cm por 6 cm.

b) Um cubo de aresta 5 cm.

c) Um cubo de aresta x.

d) Um paralelepípedo de comprimento x, largura y e altura z.

e) Um paralelepípedo de comprimento 4b, altura 2b e largura b, usando uma escala apropriada.

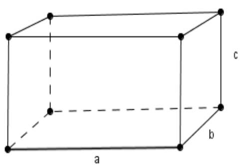
Antecipando as respostas:
a) $V = 36\ cm^3$, b) $V = 125\ cm^3$, c) $V = x^3$, d) $V = xyz$, e) $V = 8b^3$

8.2 Faça o seguinte questionamento aos alunos: Será que ab^2 é igual a a^2b?

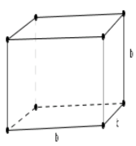
Utilize a atividade a seguir para esclarecer o questionamento.

8.3 Calcule o valor numérico dos volumes a seguir, sendo a = 2 cm, b = 3 cm e c = 4 cm.

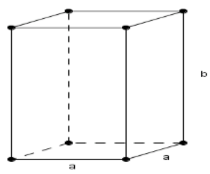
a)



b)

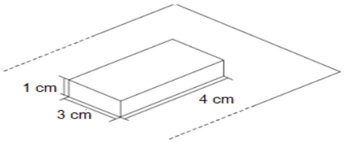


c)



Antecipando as respostas:
a) $V = 24\ cm^3$, b) $V = 27\ cm^3$, c) $V = 12\ cm^3$

8.4 Calcule o volume de uma caixa de fósforo com 4 cm de comprimento, 3 cm de largura e 1 cm de altura.

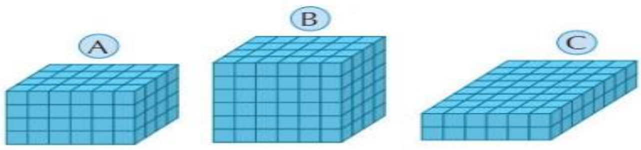


Antecipando a resposta: 4 cm x 3 cm x 1 cm = 12 cm^3

8.5 Uma caixa mede 8,4 cm de comprimento. A altura mede $\frac{1}{2}$ dessa medida e a largura $\frac{2}{3}$ do comprimento. Qual é o seu volume?

Antecipando a resposta: Altura = 4,2 cm, Largura = 5,6 cm, Volume = 8,4 x 4,2 x 5,6 = 197,568 cm^3

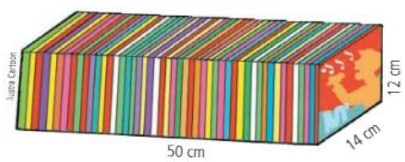
8.6 Utilize o material dourado para construir os blocos retangulares da figura.



Quais deles têm o mesmo volume?

Antecipando as respostas: A e C Espera-se que os alunos usem a ideia de camadas. O bloco da figura A tem 4 cm de altura. Cada camada tem 6 x 4 = 24 cm^3. Então, o volume do bloco A é: 4 x 24 = 96 cm^3 O volume do bloco B é: 6 x 24 = 144 cm^3 O volume do bloco C é: 2 x 48 = 96 cm^3

8.7 Vanessa arrumou os seus 48 CDs, formando com eles o bloco retangular apresentando na figura:



a) Que volume ocupam os CDs de Vanessa?

b) Calcule o volume de cada CD.

Calcule o volume de cada CD.

Antecipando as respostas: a) 12 x 14 x 50 = 8400 cm^3 b) 8400 ÷ 48 = 175 cm^3

Tarefa 9: Relação entre dm^3 e o litro

Objetivo estabelecer a relação entre volume e capacidade.

Material concreto: uma caixa construída em acrílico ou em papel alumínio.

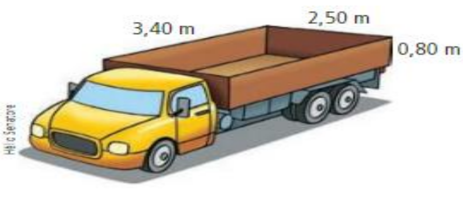
9.1 Forre um cubo de 1 decímetro de aresta com papel-alumínio. Meça em outro recipiente um litro de água com algum corante. Coloque a quantia de água colorida dentro do decímetro cúbico. Estabeleça a relação do litro com o decímetro cúbico e com o metro cúbico.

Antecipando as respostas: Para que os alunos verifiquem essa relação, propõe-se que eles construam um cubo cujas arestas meçam 10 cm e verifiquem que 1 litro de qualquer liquido preenche esse cubo.

9.2 Calcule quantos metros cúbicos de água são necessários para encher uma caixa d'água que tem 3 m de largura, 4 m de comprimento e 2 m de altura.

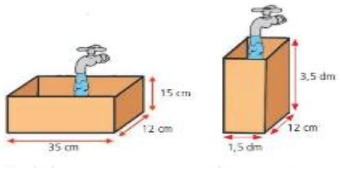
Antecipando as respostas: 3m x 4m x 2m = 24 m^3

9.3 Calcule quantos metros cúbicos de areia são necessários para encher a carroceria de um caminhão que tem largura de 2,50 m, comprimento de 3,40 m e altura de 0,80 m.



Antecipando as respostas: V = 3,40 x 2,50 x 0,80 V = 6,80 m^3 Número de viagens: 136 ÷ 6,8 = 20

9.4 As duas torneiras lançam a mesma quantidade de água por minuto e foram abertas ao mesmo tempo.



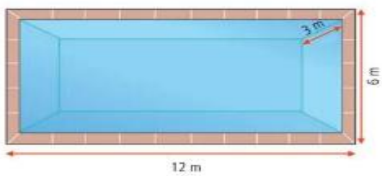
Qual dos recipientes vai encher em primeiro lugar?

Antecipando as respostas: Os dois recipientes vão encher no mesmo instante.

9.5 Uma caixa d'água de um prédio tem a forma de um bloco retangular com as seguintes dimensões: 10 m de comprimento, 8 m de largura e 3 m de altura. Qual o volume, em litros, da caixa d'água, se ela está com 60% de sua capacidade?

Antecipando as respostas: V= 10 x 8 x 3 = 240 m³ 60% de 240 = 144 m³ ou 144.000 litros

9.6 uma piscina de 12 m de comprimento por 6 m de largura e 3 de profundidade está cheia até os $\frac{5}{8}$ de sua capacidade. Quantos metros cúbicos de água ainda cabem na piscina?



Antecipando as respostas: V = 12 x 6 x 3 = 216 m³ $\frac{5}{8}$ de 216 = 81 m³ Ainda cabem na piscina 135 m³ de água.

6.1.2 Avaliação das aprendizagens

A avaliação das aprendizagens relacionada a esta sequência de atividades compõe-se de 10 (dez) questões, onde o aluno usa conceitos e representações diversas do objeto unidades de medida para interpretar e resolver problemas.

O objetivo maior da avaliação é investigar se as tarefas propostas promoveram o desenvolvimento de características do Pensamento Algébrico nos alunos – regularidades, generalizações, conceito de variável, desenvolvendo, com compreensão, as principais fórmulas para cálculo das medidas de área de polígonos e cálculo de perímetro.

6.1.3 Proposta de avaliação

Questão 1(unidade de medida de superfície): Com base no significado de cm², m², mm², dm², converse com os colegas e explique oralmente o que significa quilômetro quadrado (km²).

Antecipando as respostas: Espera-se que o aluno compreenda que km² é a superfície ocupada por uma quadrado de 1 km de lado.

Questão 2 (unidades de medida de superfície): No cotidiano, é preciso medir superfícies, das menores às maiores. Que unidade de medida de superfície você acha adequada para expressar a área:

a) de uma sala de aula?

b) do estado do Amazonas?

c) de uma folha de caderno?

Antecipando as respostas: Espera-se que o aluno reconheça a unidade de medida adequada para cada situação. a) m², b) km², c) cm²

Questão 3 (transformação de medida de área): Lucas mandou revestir com fórmica o tampo de uma mesa quadrada de lado 150 cm. A pessoa que fara o serviço cobra R$ 50,00 por metro quadrado de fórmica colocada.

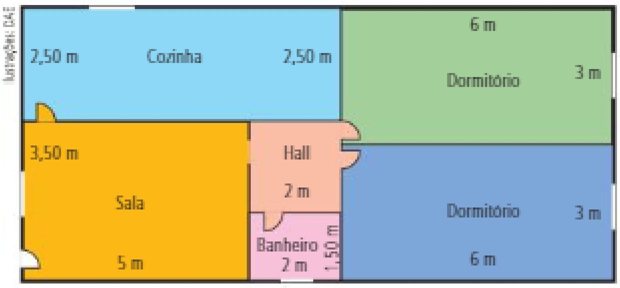
Quanto Lucas vai gastar pelo serviço?

Antecipando as respostas: Espera-se que o aluno saiba converter unidades de medida de superfície. Lucas vai gastar R$ 32,00

Questão 4 (unidades de medida de volume): Um pacote de 500 folhas de papel sulfite, tipo ofício, tem as seguintes dimensões: 30 cm de comprimento, 20 cm de largura e 5 cm de altura. Qual é o volume de cada folha desse pacote?

Antecipando as respostas: Espera-se que o aluno saiba que cada folha apresenta volume de 6 cm³

Questão 5 (perímetro e área): Veja a planta de uma casa e responda:



a) Qual é o perímetro da casa?

b) Qual é a área de cada dormitório?

c) Qual é a dependência de menor área?

d) Quantos m² de carpete são necessários para cobrir o piso da sala e do hall?

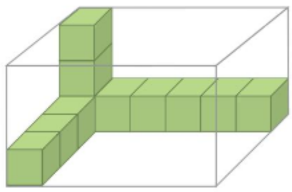
e) Qual é a área total da casa?

Antecipando as respostas: Espera-se que o aluno saiba a) 38 m, b) 18 m² c) banheiro (3 m²), d) 19,5 m², e) 78 m²

Questão 6 (volume): Quando a caixa estiver cheia, quantos cubos "caberão":

a) em uma camada?

b) no total?

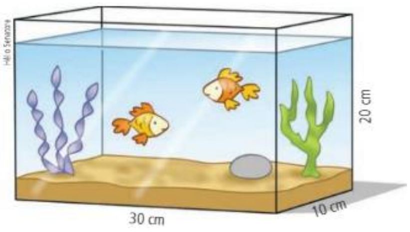


Antecipando as respostas: Espera-se que o aluno saiba a) 24 cubos, b) 72 cubos

Questão 7 (relação entre m³ e litro): Em uma piscina retangular com 10 metros de comprimento e 5 metros de largura, para elevar o nível de água em 10 cm, são necessários quantos litros de água?

Antecipando as respostas: Espera-se que o aluno saiba $V = 10.5.0{,}1 = 5$ ou $5m^3 = 5000l$

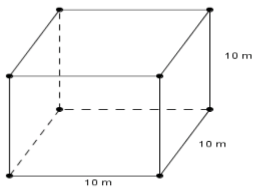
Questão 8 (volume relação entre dm³ e litro): Qual é a capacidade deste aquário em litros?



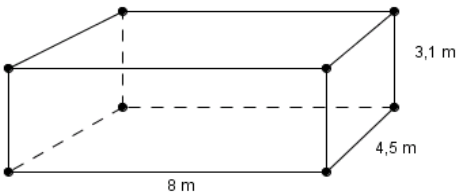
Antecipando as respostas:
Espera-se que o aluno calcule o volume para em seguida fazer a transformação.
$V = 3.2.1 = 6,\ 6\ dm^3 = 6\ litros.$

Questão 9 (volume): Calcule os volumes abaixo?

a)



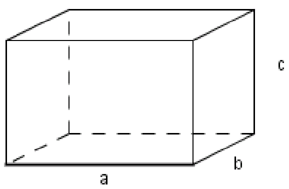
b)



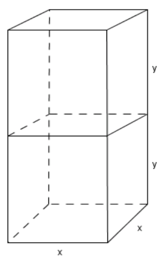
Antecipando a resposta:
a) 1000 m³ b) 111,6 m³

Questão 10 (transformação de unidades de medida de volume e capacidade): Escreva uma expressão algébrica que indique o volume dos sólidos.

a)



b)



Antecipando a resposta:
a) V = a.b.c   b) V = x.x.(y+y)

Dentre os objetos de conhecimento propostos pela BNCC (BRASIL, 2018) para a área de Matemática, está previsto o estudo de Polinômios no Ensino Fundamental Anos Finais. Para Bertoli e Schuhmacher (2013) o ensino de Polinômios se torna muito importante, porque nesse período os estudantes devem passar a utilizar a abstração matemática para resolver situações algébricas.

Para ampliar entendimentos relacionados a conceitos de Monômios e Polinômios e consequentemente o desenvolvimento de aspectos relacionados à Álgebra e de elementos que tratam do Pensamento Algébrico, apresentou-se a segunda sequência de atividades aplicada junto aos alunos.

6.2 SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 2 – MONÔMIOS E POLINÔMIOS

A sequência de atividade 2 construída para o 9º ano do Ensino Fundamental possui 6 (seis) conjuntos de tarefas abordando o objeto de conhecimento: Valor numérico de expressões algébricas, para desenvolvimento da habilidade **(EF08MA06)** apresentada pela BNCC (BRASIL, 2018, p. 313)**:** “resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações”.

Objetivou-se com esse conjunto de tarefas fazer o aluno calcular o valor numérico de uma expressão algébrica; reconhecer a utilização de letras para representar números e expressões algébricas; adquirir o conceito de monômios, polinômios e construir o conceito de operações de monômios e polinômios; desenvolver habilidades de cálculos com monômios e polinômios por meio da Geometria; relacionar a Álgebra dos polinômios com a Geometria envolvida nas áreas de figuras como quadrado e retângulo que tem seus lados dados por variáveis.

Para investigar o desenvolvimento do pensar algébrico, espera-se que o aluno seja capaz de mobilizar elementos, como:

> (I) a generalização e formalização de padrões e restrições; (II) a manipulação de formalismos guiada sintaticamente; (III) o estudo de estruturas abstratas a partir de cálculos e relações; (IV) o estudo de funções, relações e variação de duas variáveis; e (V) a utilização de múltiplas linguagens na modelação matemática e no controle de fenômenos (KAPUT, 1999).

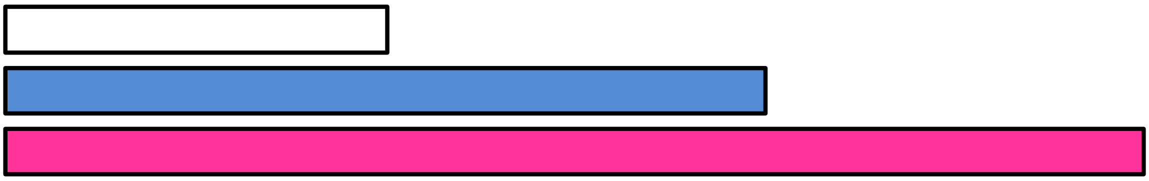
Além desses elementos, são considerados, com vistas ao objetivo e problema de pesquisa, aspectos da Álgebra Processual. Kieran (1992, *apud* GROENWALD; BECHER, 2010, p. 245) explica que a Álgebra Processual não lida com a transformação de expressões algébricas, mas sim com a substituição de variáveis por números, realizando depois as correspondentes operações aritméticas.

Para esta sequência de atividades utilizou-se como recurso didático: cartolina de três cores diferentes, tesoura, régua, lápis e caderno.

6.2.1 Desenvolvimento da sequência de atividades 2

Tarefa 1: Adição de monômios e polinômios
Objetivo: adquirir o conceito de monômios, polinômios e construir o conceito de adição de monômios e polinômios.

Nesta atividade, é necessário o seguinte material: Fitas de cartolina nas cores branco, azul e rosa, medindo 5 cm, 10 cm e 15 cm, respectivamente.



Cartolina de 45 cm x 60 cm (uma por grupo).

1.2 Meça os objetos com as fitas recebidas e faça os registros na ficha a seguir:

a) Medir com uma cor

b) Medir usando duas cores

Objeto medido	Comprimento		Forma mais econômica
	Uma cor	Duas cores	
Mesa			
Caderno			

c) Medir a cartolina recebida com as fitas recebidas

	FITA			FITAS			
	b	a	r	b e a	a e r	b e r	b, a e r
Comprimento							
Largura							
Perímetro							
Nomenclatura	Monômios			Binômios			Trinômios

Antecipando a resposta:

	FITA			FITAS			
	b	a	r	b e a	a e r	b e r	b, a e r
Comprimento	12b	6a	4r	4b+4a	3a+2r	6b+2r	2b+2a+2 r
Largura	9b	4a+ $\frac{1}{2}$ a	3r	3b+3a	3a+r	3b+2r	2b+2a+r
Perímetro	42b	21a	14r	14b+14a	12a+6r	18b+8r	8b+8a +6r
Nomenclatur	Monômios			Binômios			Trinômio

Observações:

- Monômios: é uma expressão matemática, na qual temos um termo diferente.

Exemplo: quando medimos a cartolina com um canudinho de cada vez.

- Binômio: é uma expressão matemática, na qual temos dois termos diferentes.

Exemplo: quando medimos a cartolina com dois canudinhos juntos.

- Trinômio: é uma expressão matemática, na qual temos três termos diferentes.

Exemplo: quando medimos a cartolina com três canudinhos diferentes.

- Polinômios: é uma expressão matemática, na qual temos três a mais termos diferentes.

Exemplo: quando medimos a cartolina com três ou mais canudinhos diferentes.

- Álgebra: é uma expressão matemática, na qual são utilizadas letras.
- Pode-se somar monômios, ou seja, juntar letras iguais.
- Não pode-se somar as letras diferentes

Tarefa 2: subtração de monômios e polinômios

Objetivo: construir o conceito de subtração, utilizando medida e estabelecendo a relação da medida negativa com a falta de medida.

Nesta atividade, é necessário o seguinte material: Fitas de cartolina nas cores branco, azul e rosa, medindo 5 cm, 10 cm e 15 cm, respectivamente. Cartolina de 45 cm x 60 cm.

2.1 Usar as fitas para medir:

a) O comprimento da cartolina recebida com fitas da mesma cor; Medir a largura da cartolina com fitas da mesma cor. Subtraí-las. Fazer o registro na ficha a seguir.

b) O comprimento da cartolina e confeccionar uma fita com esta medida; Medir agora com esta fita a largura da mesa; Subtraí-la; Fazer o registro na ficha a seguir.

c) A largura da cartolina e confeccionar uma fita com esta medida; Medir o comprimento da cartolina com esta fita; Subtraí-las; Fazer o registro na ficha a seguir.

	Comprimento	Largura	Comprimento - largura	Largura-comprimento
Fitas da mesma cor				
Fita do comprimento				
Fita da largura				

Antecipando as respostas:

	Comprimento	**Largura**	**Comprimento -largura**	**Largura-compriment**
Fitas da mesma	$4r$	$3r$	$4r - 3r = r$	$3r - 4r = -r$
Fita do comprimento	C	$\frac{3}{4}c$	$c - \frac{3}{4}c = \frac{1}{4}c$	$\frac{3}{4}c - c = -\frac{1}{4}c$
Fita da largura	$m + \frac{1}{3}m = \frac{4}{3}m$	m	$\frac{4}{3}m - m = \frac{1}{3}m$	$m - \frac{4}{3}m = -\frac{1}{3}m$

Tarefa 3: Valor numérico

Objetivo que o aluno adquira o conceito do valor numérico através de atividades práticas.

Nesta atividade, é necessário o seguinte material: Fitas de cartolina nas cores branco, azul e rosa, medindo 5 cm, 10 cm e 15 cm, respectivamente. Régua.

3.1 Use uma régua para obter as medidas abaixo:

a) comprimento das fitas recebidas.

b) comprimento, largura e perímetro da cartolina.

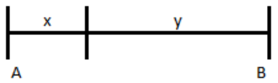
Antecipando as respostas:
a) Fita branca de 5 cm; fita azul de 10 cm e fita rosa de 15 cm.
b) Comprimento = 60 cm; largura = 45 cme perímetro = 210 cm

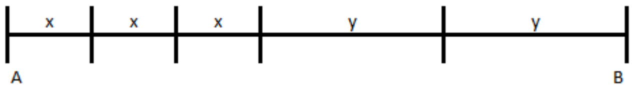
c) Substituir o valor das fitas nas expressões da tarefa 1.2 e 2.1.

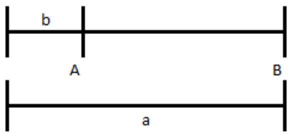
Antecipando as respostas:

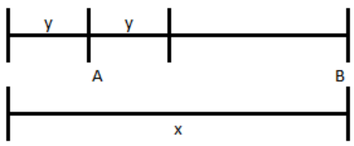
Largura = $4a + \frac{1}{2}a$	Comprimento = $4a + 4b$
Largura = $4 \cdot 10\ cm + \frac{1}{2} \cdot 10\ cm$	Comprimento = $4 \cdot 10\ cm + 4 \cdot 5\ cm$
Largura = $45\ cm$	Comprimento = $60\ cm$

3.2 Determinar em linguagem matemática as expressões que representam os segmentos AB:

a) 

b) 

c) 

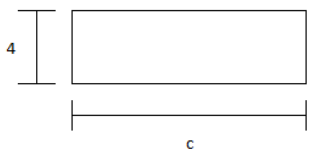
d) 

Antecipando as respostas:
a) $\underline{AB}$= x + y, b) $\underline{AB}$= 3x + 2y, c) $\underline{AB}$= a – b, d) $\underline{AB}$= x – y

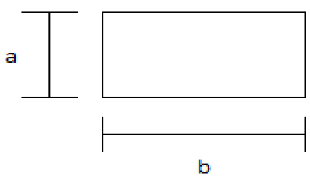
Tarefa 4: Multiplicação de monômios e polinômios

Objetivo: Utilizar os conhecimentos sobre cálculo de área para construir o conceito de multiplicação de monômios e polinômios.

4.1 Dados os retângulos, calcular a área.

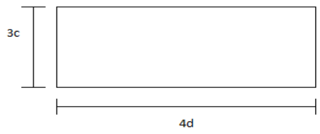
a) 

A =

b) 

A =

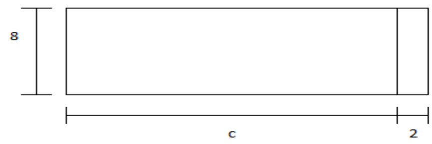
c)



A =

Antecipando as respostas:
a) 4c, b) ab, c) 12cd

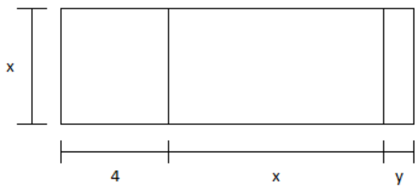
4.2 Dada a figura, calcular as áreas dos retângulos que a compõem e sua área total.



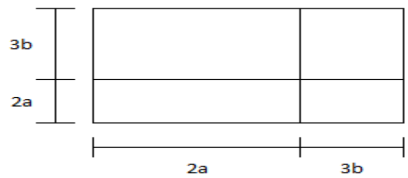
Antecipando as respostas: 8c + 16
O polinômio que traduz o cálculo da área total da figura anterior é: A = 8 (c + 2)

4.3 Qual a área total de cada figura a seguir? Qual é o polinômio que traduz área total de cada uma?

a)



b)



A =

A =

A =

A =

Antecipando as respostas:
a) $A = 4x + x^2 + xy$ e $A = x(4 + x + y)$,
b) $A = 4a^2 + 9b^2 + 12ab$ e $A = (3b + 2a).(3b + 2a)$

4.4 Com as figuras a^2, b^2, c^2, d^2, ab, ac, ad, bc, bd e cd recortadas em cartolina.

Observações:
Recortar as figuras a^2, b^2, c^2, d^2, ab, ac, ad, bc, bd e cd em cartolina, sabendo que a = 2cm, b = 4,5cm, c = 7cm e d =10cm.
Recorte três figuras de cada tipo.
Coloque em cada uma das figuras recortadas a denominação dos lados e área formada, utilizando as variáveis a, b, c e d.

4.5 Utilizando as figuras, componha quadriláteros diferentes.

a) Desenhar estas figuras.

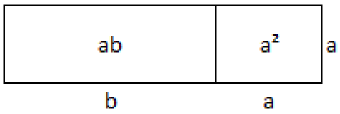
b) Escrever a denominação dos lados.

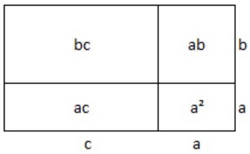
c) Calcular as áreas que formam cada figura.

d) Calcular a área total do quadrilátero formado pela composição realizada.

e) Escrever os polinômios que representam as áreas totais das figuras.

Observação:
O aluno deverá relacionar o cálculo da área de casas com o cálculo das áreas solicitadas, fazendo uma troca de linguagem.
Exemplos:





$A = a(a + b)$ e $A = a^2 + ab$ $A = (a + b)(a + c)$ e $A = a^2 + ac + ab + bc$

4.6 Desenhar figuras que representem as áreas a seguir:

a) x^2

b) xy

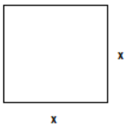
c) $x^2 + xy$

d) $x^2 + xy + xz + yz$

e) $3x(x + 4)$

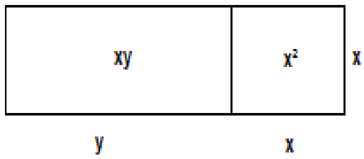
Antecipando as respostas:

a)

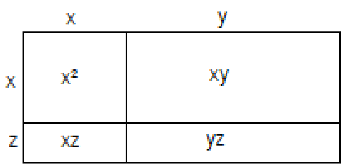


b)

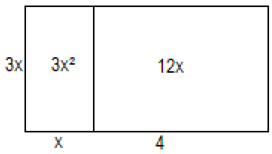
c)



d)

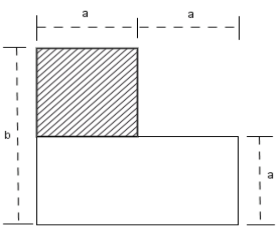


e)

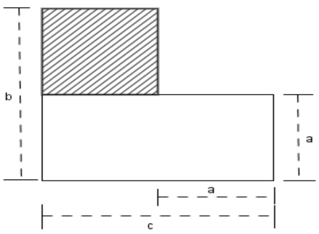


4.7 Determinar os polinômios que representam as áreas hachuradas:

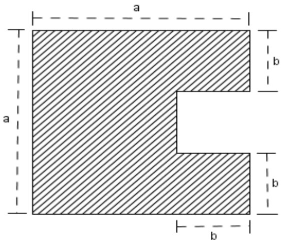
a)



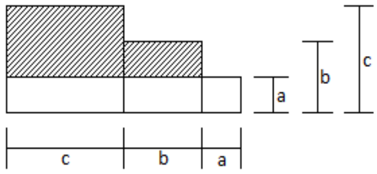
b)



c)



d)



Antecipando as respostas:
a) $(b-a).a \Longrightarrow ab-a^2$
b) $(b-a).(c-a) \Longrightarrow bc-ab-ac+a^2$
c) $a^2-[(a-2b).b] \Longrightarrow a^2-ab+2b$
d) $(c-a).c+(b-a).b \Longrightarrow c^2-ac+b^2-ab$

4.8 Desenhar uma figura que represente:

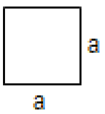
a) Um segmento de reta a

b) Uma área a^2

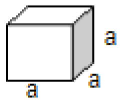
c) Um volume a^3

Antecipando as respostas:
a) Um segmento de reta a

b) Uma área a^2



c) Um volume a^3

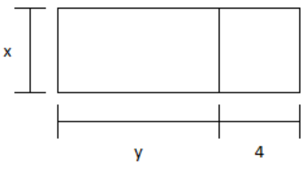


Tarefa 5: Divisão de polinômios por monômios

Objetivo: Utilizar os conhecimentos sobre cálculo de área para construir o conceito de divisão de monômios e polinômios.

5.1 Escreva duas formas de calcular a área desta figura:

a)

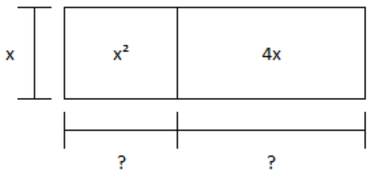


A =

A =

Antecipando a resposta:
$A = xy + 4x$ e $A = x(y+4)$
Análise as respostas obtidas. Uma será na forma de produto e a outra na forma de fatores.

Observação:
A divisão de polinômio por monômio pode ser entendida como uma maneira de encontrar um dos lados de uma figura se soubermos a área total da figura. Assim:

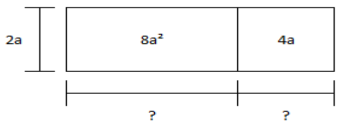


Antecipando as respostas:

$? = x$ e $? = 4$

Observação:
- Questione os alunos sobre a medida que tem um lado para formar a área dada conhecendo-se um dos lados, Ou, sobre o fator que foi multiplicado por “x” para obtermos a área total do retângulo.
- A divisão de polinômio por monômio pode ser entendida como uma maneira de encontrar um dos lados de uma figura se soubermos a área total da figura.

5.2 Calcule a medida do lado desta figura, conhecendo um dos lados e a área total da figura:

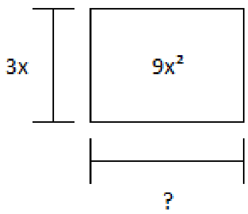


$$At = (8a^2 + 4a) \div 2a$$

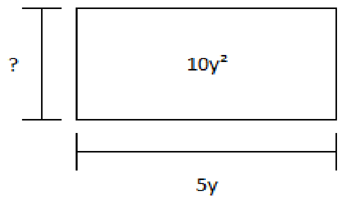
Antecipando as respostas:
$? = 4a$ e $? = 2$

5.3 Aconteceu um acidente! Pingou água nos desenhos e apagaram-se alguns monômios. Auxilie a refazê-los:

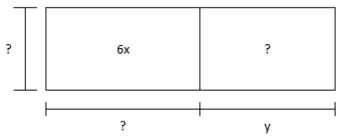
a)



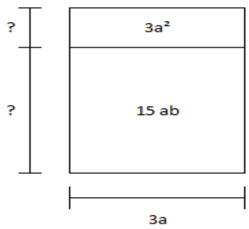
b)



c)



d)

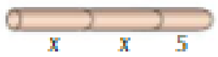


Antecipando as respostas:
$a)\ ? = 3x$
b) $? = 2y$
c) $? = 6$, $? = xy$ e $? = x$

d) $? = a$, $e\ ? = 5b$

Tarefa 6

6.1 Escreva expressões simplificadas que representem os comprimentos dos seguintes tubos:

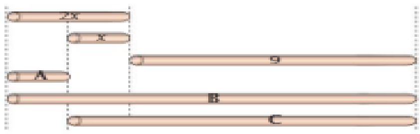
a) 

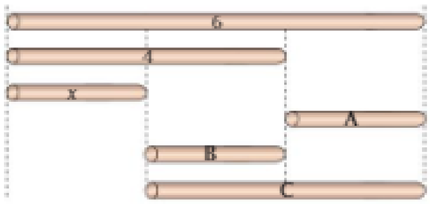
b) 

c) 

Antecipando as respostas:
$a)\ 2x + 5$, b) $3m + 2n + 3$, c) $a + b$

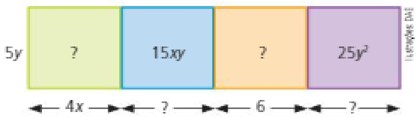
6.2 Suponha que a unidade é o metro, represente as expressões que permitam determinar os comprimento dos tubos A, B e C.

a) 

b) 

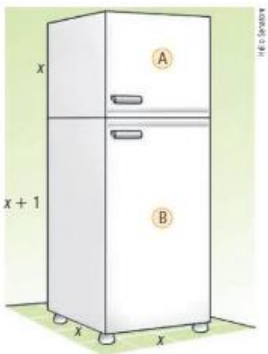
Antecipando as respostas:
a) $A = 2x - x, B = 2x + 9, C = B - A$
b) $A = 6 - 4, B = 4 - x, C = B + A$

6.3 A figura é formada por retângulos de mesma altura. Determine as medidas desconhecidas.



Antecipando as respostas:
$? = 20xy$, $? = 3x$, $? = 30y$, $? = 5y$

6.4 Escreva o polinômio que representa:



O volume do solido A;

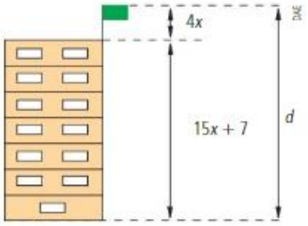
O volume do sólido B;

A soma dos volumes de A e de B.

Antecipando as respostas:

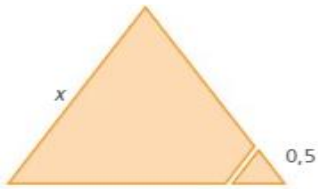
a) x^3 b) $x^2(x+1)$ c) $x^3 + x^2(x+1)$

6.5 No topo de edifício de 15x +7 metros de altura se encontra uma bandeira que mede 4x metros de altura. Qual a fórmula que determina a distância d que há do solo à extremidade da bandeira?



Antecipando as respostas: a) $19x + 7$

6.6 De um triangulo equilátero de lado x retirou-se o outro triangulo equilátero de lado 0,5. Qual é o perímetro da parte restante?



Antecipando as respostas: $x + (x - 0{,}5) + (x - 0{,}5) + 0{,}5$ ou $3x - 0{,}5$

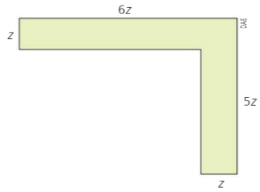
6.2.2 Avaliação das aprendizagens

Esta segunda avaliação é composta por 7 (sete) questões com foco no desenvolvimento da compreensão de expressões algébricas por meio do estudo das operações e valor numérico de monômios e polinômios.

O objetivo é verificar se a realização do conjunto de tarefas reforçou nos alunos a ideia do pensar algebricamente – cálculo numérico, linguagem algébrica, expressões algébricas e manipulação de expressões algébricas através de operações de monômios e polinômios, apoiada no cálculo de perímetros e áreas.

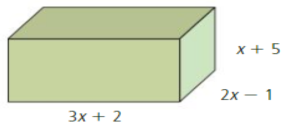
6.2.3 Proposta de avaliação

Questão 1(simplificação de expressões com letras): Escreva uma expressão simplificada para o perímetro e área da figura.



Antecipando a resposta:
$P = z + 6z + 5z + z + (5z - z) + (6z - z) = 22z$ e $A = 10z^2$

Questão 2 (valor numérico de uma expressão algébrica): Uma fábrica produz blocos de cimento com medidas dadas por $3x + 2$, $2x - 1$ e $x + 5$ com $x > 0{,}5$.



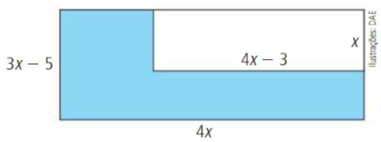
Nos itens a, b e c preencha a tabela para alguns valores de x:

Itens	x	$3x + 2$	$2x - 1$	$x + 5$	Volume
a)	1				
b)	1,5				
c)	2				

Antecipando as respostas:

x	$3x + 2$	$2x - 1$	$x + 5$	Volume
1	5	1	6	5 . 1 . 6 = 30
1,5	6,5	2	6,5	6,5 . 2. 6,5 = 42,25
2	8	3	7	8 . 3 . 7 = 168

Questão 3 (operações com polinômio e valor numérico): Observe os retângulos representados na figura:



a) Escreva um polinômio que represente a medida da área azul no retângulo.

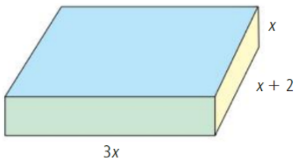
b) Faça x=5 cm e calcule essa área de modos diferentes.

c) Neste exercício x pode ser 1?

Antecipando as respostas:
a) $8x^2 - 17x$
b) $115\ cm^2$
c) Não, pois $8x^2 - 17x$ representa uma medida e o valor de uma medida não pode

ser negativo.

Questão 4 (operações e valor numérico de um polinômio): Considere o bloco retangular:



Escreva o polinômio que representa:

a) A soma do comprimento de todas as arestas do bloco.

b) A área da face azul.

c) A área da face amarela.

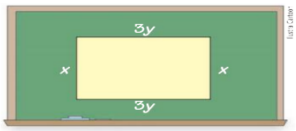
d) A área da face verde.

e) A soma das áreas de todas as faces.

f) O volume do bloco.

Antecipando as respostas:
a) $20x + 8$
b) $3x^2 + 6x$
c) $x^2 + 2x$
d) $3x^2$
e) $14x^2 + 16x$
f) $3x^3 + 6x^2$.

Questão 5 (valor numérico de um polinômio): A figura desenhada na lousa representa um retângulo:

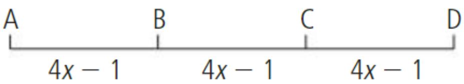


a) Escreva uma expressão simplificada para o cálculo do perímetro do retângulo.

b) Se o perímetro for 60, poderá ser: $x = 6$ e $y = 8$?

Antecipando as respostas:
a) $2x + 6y$
b) sim, pois $2 . 6 + 6 . 8 = 60$

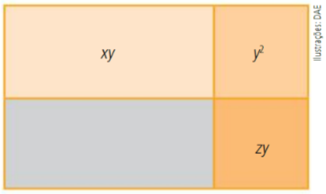
Questão 6 (binômio): Represente por um binômio a medida do segmento $\underline{AD}$.



Antecipando a resposta:]

$$4x - 1 + 4x - 1 + 4x - 1 = 12x - 3$$

Questão 7 (expressões algébricas): Na figura, a área do quadrado é y² e as áreas de retângulos são xy e zy. A área do terceiro retângulo é:



Antecipando a resposta:
xz

Ao término da implementação da segunda sequência de atividades, com enfoque no valor numérico de monômios e polinômios, passou-se ao desenvolvimento das tarefas relacionadas ao objeto de conhecimento Produtos notáveis. Para Ponte, Branco e Matos (2009, p. 27), "após realizarem experiências com diferentes valores numéricos, os alunos podem ser chamados a descobrir as relações estabelecidas e as propriedades usadas, procurando apresentar uma generalização relativa à situação".

6.3 SEQUÊNCIA DE ATIVIDADE 3 – PRODUTOS NOTÁVEIS

Esta sequência de atividades está composta por 8 (oito) conjuntos de tarefas, segundo princípios expressos pela BNCC (BRASIL, 2018, p. 317), no que tange o objeto de ensino e aprendizagem, Expressões algébricas: fatoração e produtos notáveis e a habilidade **(EF09MA09)**, a saber: "compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau".

Seu objetivo é generalizar o modelo matemático dos produtos notáveis, utilizando materiais concretos e a relação da Álgebra com a Geometria. Para Kaput (*apud* PONTE; BRANCO; MATOS 2009, p. 9), a caracterização do Pensamento Algébrico "se manifesta quando através de conjecturas e argumentos, se estabelecem generalizações sobre dados e relações matemáticas, expressos através de linguagens cada vez mais formais".

Deste modo, espera-se que questões abordadas por meio da estratégia de resolução de problemas promovam no educando o desenvolvimento da sua capacidade de generalização. Para Kaput (1999), a generalização é um dos cinco aspectos que caracterizam a formação do Pensamento Algébrico: (I) a generalização e formalização de padrões e restrições; (II) a manipulação de formalismos guiada sintaticamente; (III) o estudo de estruturas abstratas a partir de cálculos e relações; (IV) o estudo de funções, relações e variação de duas variáveis; e (V) a utilização de múltiplas linguagens na modelação matemática e no controle de fenômenos.

Nesta sequência de atividades em que optou-se trabalhar com foco na generalização algébrica, adotou-se como estratégia didática a manipulação de materiais concretos, como: quadrados e retângulos recortados em cartolina.

6.3.1 Desenvolvimento da sequência de atividades 3

Tarefa 1: quadrado da soma de dois termos

Objetivo: Generalizar o modelo matemático dos produto notável o quadrado da somas de dois termos.

Material concreto: Formas geométricas recortadas em cartolina.

a) Um quadrado de lado 10 cm;

b) Um quadrado de lado 6 cm;

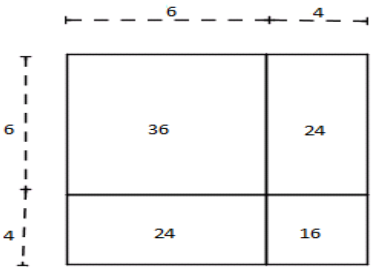
c) Um quadrado de lado 4 cm;

d) Dois retângulos de lados 4 cm e 6 cm.

1.1 Com as figuras construídas, forme uma igualdade com o quadrado de lado 10 cm e as outras figuras. Desenhe a igualdade que se forma.

Antecipando as respostas:

Exemplo: Observando a figura que se forma, podemos escrever.



$100 = 36 + 24 + 24 + 16$

$10^2 = 6^2 + 2.24 + 4^2$

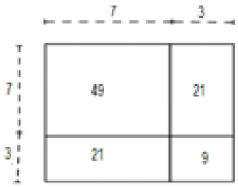
$(6 + 4)^2 = 6^2 + 2.6.4 + 4^2$

1.2 Desenhe os quadrados e escreva em linguagem matemática a área total das figuras na forma de parcelas:

a) $(7 + 3)^2 =$ b) $(8 + 2)^2 =$ c) $(9 + 1)^2 =$

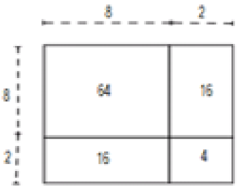
Antecipando as respostas:

a)



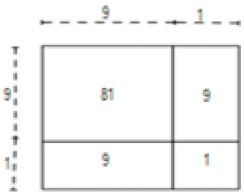
$100 = 49 + 21 + 21 + 9$
$100 = 7^2 + 2.21 + 3^2$
$(7 + 3)^2 = 7^2 + 2.7.3 + 3^2$

b)



$100 = 64 + 16 + 16 + 4$
$100 = 8^2 + 2.16 + 2^2$
$(8 + 2)^2 = 8^2 + 2.8.2 + 2^2$

c)



$100 = 81 + 9 + 9 + 1$
$100 = 9^2 + 2.9 + 1^2$
$(9 + 1)^2 = 9^2 + 2.9.1 + 1^2$

1.3 Material concreto: Formas geométricas recortadas em cartolina.

a) Um quadrado de lado a;

b) Um quadrado de lado b;

c) Dois retângulos de lados a e b.

Com essas figuras:

a) Construa um quadrado;

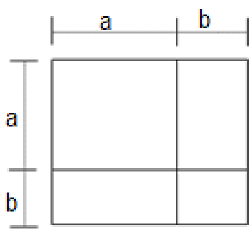
b) Desenhe o quadrado;

c) Determine a área total do quadrado e a medida dos lados;

d) Escreva a área total na forma de fatores e na forma de parcelas.

Antecipando as respostas:

b)



c) $At = (a + b)^2$

Medida dos lados: $a + b$

d) A expressão $(a + b)^2$ é chamada de quadrado da soma de dois termos.

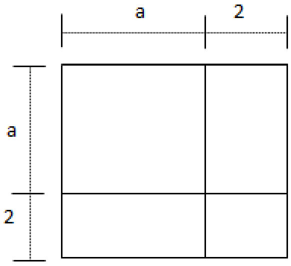
$$(a + b).(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$$

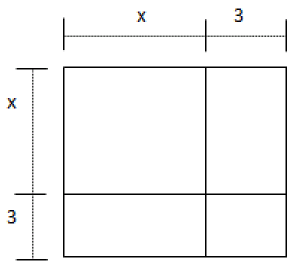
$forma\ de\ fatores$ $\quad$ $forma\ de\ parcelas$

Tarefa 2

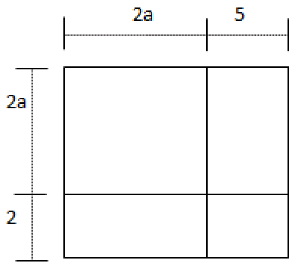
2.1 Escreva as áreas na forma de fatores e na forma de parcelas:

b)

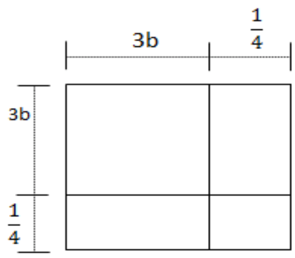




c)



d)



Antecipando as respostas:
a) $(a+2)^2 = (a+2).(a+2)$
$(a+2)^2 = a^2 + 2.a.2 + 2^2$
b) $(x+3)^2 = (x+3).(x+3)$
$(x+3)^2 = x^2 + 2.x.3 + 3^2$
c) $(2a+2)^2 = (2a+2).(2a+2)$
$(2a+2)^2 = (2a)^2 + 2.2a.2 + 2^2$
d) $\left(3b+\frac{1}{4}\right)^2 = \left(3b+\frac{1}{4}\right).\left(3b+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^2$
$\left(3b+\frac{1}{4}\right)^2 = (3b)^2 + 2.3b.\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2$

2.2 Desenhe e determine as áreas:

a) $(y+3)^2 =$

b) $(a+5)^2 =$

c) $(x+1)^2 =$

d) $(3b+5c)^2 =$

e) $(2x+4y)^2 =$

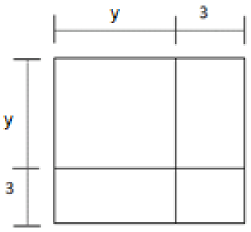
f) $(a+11)^2 =$

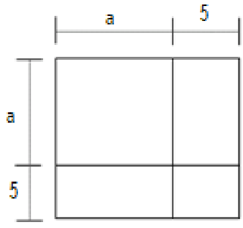
h) $\left(\frac{5}{2}a+2\right)^2 =$

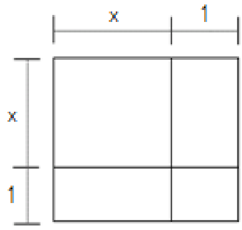
i) $(a+15)^2 =$

Antecipando as respostas:

a) b) c)





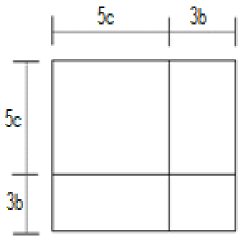


$A = y^2 + 2.3.y + 3^2$
$A = y^2 + 6y + 9$

$A = a^2 + 2.5.a + 5^2$
$A = a^2 + 10a + 25$

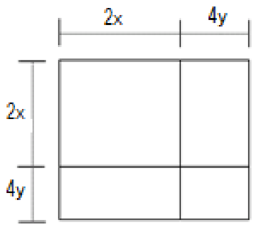
$A = x^2 + 2.1.x + 1^2$
$A = x^2 + 2x + 1$

d)



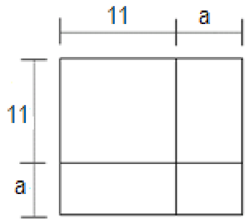
$A = (5c)^2 + 2.5c.3b + (3b)^2$
$A = 25c^2 + 30bc + 9b^2$

e)



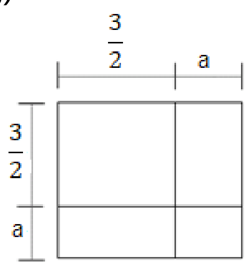
$A = (2x)^2 + 2.2x.4y + (4y)^2$
$A = 4x^2 + 16xy + 16y^2$

f)



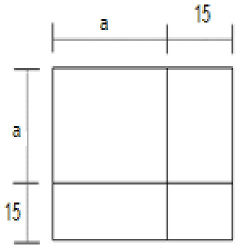
$A = 11^2 + 2.11.a + a^2$
$A = 121 + 22a + a^2$

g)



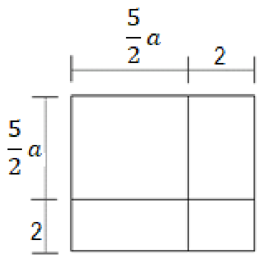
$A = a^2 + 2.\frac{3}{2}.a + \left(\frac{3}{2}\right)^2$
$A = a^2 + 3a + \frac{9}{4}$

h)



$A = a^2 + 2.a.15 + 15^2$
$A = a^2 + 30a + 225$

i)



$A = \left(\frac{5}{2}a\right)^2 + 2.\frac{5}{2}a.2 + 2^2$
$A = \frac{25}{4}a^2 + 10a + 4$

2.3 Determine a forma fatorada das áreas. Faça o desenho se necessário.

a) $a^2 + 2a + 1 =$

b) $b^2 + 10b + 25 =$

c) $x^2 + x + \frac{1}{4} =$

d) $9x^2 + 12x + 4 =$

e) $a^2 + 14a + 49 =$

f) $a^2 + 3a + \frac{9}{4} =$

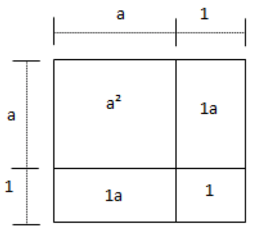
g) $y^2 + 12y + 4 =$

h) $16a^2 + 24ab + 9b^2 =$

i) $25x^2 + 10x + 1 =$

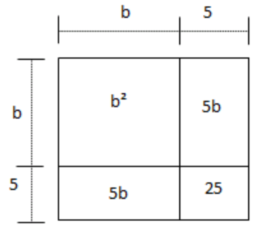
Antecipando as respostas:

a)



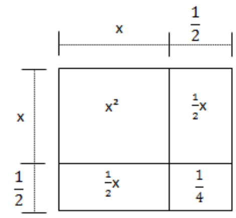
$A = (a+1)^2$

b)



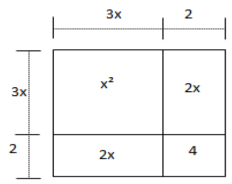
$A = (b+5)^2$

c)



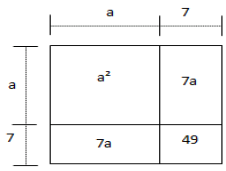
$A = (x+\frac{1}{2})^2$

d)



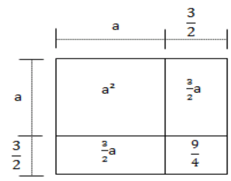
$A = (3x+2)^2$

e)



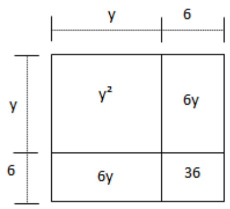
$A = (a+7)^2$

f)



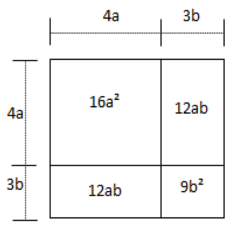
$A = \left(a+\frac{3}{2}\right)^2$

g)



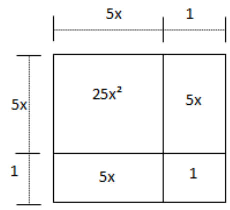
$A = (y+6)^2$

h)



$A = (4a+3b)^2$

i)



$A = (5x+1)^2$

Tarefa 3: quadrado da diferença de dois termos

Objetivo: Generalizar o modelo matemático do produto notável o quadrado da diferença de dois termos.

3.1 Material concreto: Formas geométricas recortadas em cartolina.

a) um quadrado de lado d (10 cm);

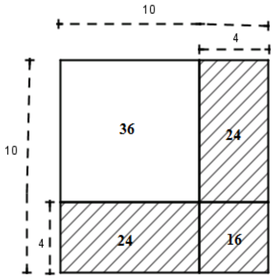
b) um quadrado de lado a (6 cm);

c) um quadrado de lado b (4 cm);

c) dois retângulos de lados a e d.

Com as figuras construídas, forme uma igualdade entre o quadrado de lado 6 cm e as outras figuras. Desenhe a igualdade formada.

Antecipando as respostas:
Exemplo: Podemos escrever, observando a figura que se forma:



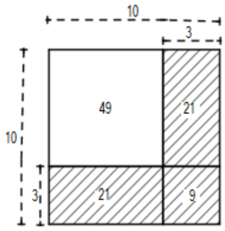
$36 = 100 - 40 - 40 + 16$
$6^2 = 10^2 - 2.10.4 + 4^2$
$(10 - 4)^2 = 10^2 - 2.10.4 + 4^2$

3.2 Desenhe os quadrados e escreva em linguagem matemática a área resultante na forma de parcelas:

a) $(10-3)^2 =$ b) $(10-2)^2 =$ c) $(10-1)^2 =$

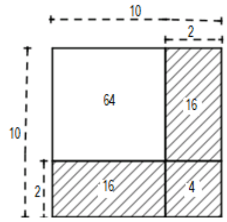
Antecipando as respostas:

a)



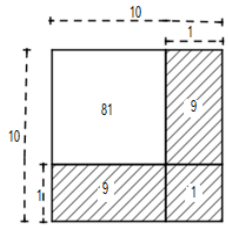
$$49 = 100 - 30 - 30 + 9$$
$$7^2 = 10^2 - 2.10.3 + 3^2$$
$$(10-3)^2 = 10^2 - 2.10.3 - 3^2$$

b)



$$64 = 100 - 20 - 20 + 4$$
$$8^2 = 10^2 - 2.10.2 + 2^2$$
$$(10-2)^2 = 10^2 - 2.10.2 + 2^2$$

c)



$$81 = 100 - 10 - 10 + 1$$
$$9^2 = 10^2 - 2.10.1 + 1^2$$
$$(10-1)^2 = 100 - 2.10.1 + 1^2$$

3.3 Esta atividade exige o seguinte material concreto:

Um quadrado de lado d (10 cm);

Um quadrado de lado a (4 cm);

Dois retângulos de lados a e d.

Siga as instruções:

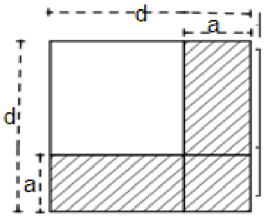
a) Construa com as figuras um quadrado de lado (d – a);

b) Determine a área deste quadrado.

c) Escreva a área deste quadrado na forma de fatores e na forma de parcelas.

Antecipando as respostas:

a)



b) $(d-a)^2$

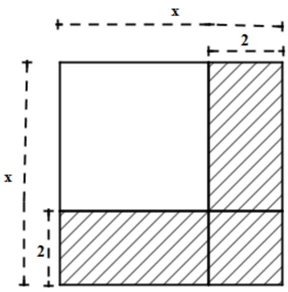
c) A expressão $(d-a)^2$ é chamada de quadrado da diferença de dois termos.

$$\underset{forma\ de\ fatores}{(d-a).(d-a)} \quad = \quad \underset{forma\ de\ parcelas}{d^2-2ad+a}$$

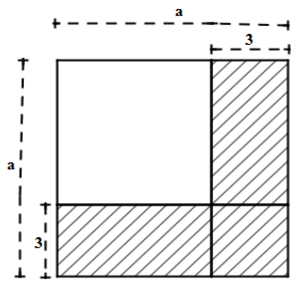
Tarefa 4

4.1 Escreva as áreas na forma de fatores e na forma de parcela.

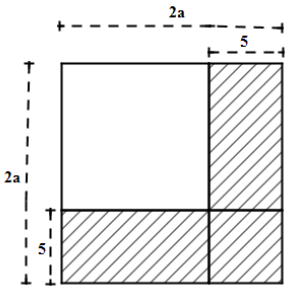
a)



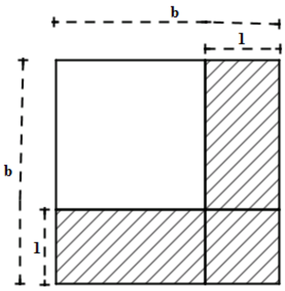
b)



c)



d)



Antecipando as respostas:
a) $(x-2).(x-2)$; $x^2-2.x.2+2^2$
b) $(a-3).(a-3)$; $a^2-2.a.3+3^2$c
c) $(2a-5).(2a-5)$; $(2a)^2-2.2a.5+5^2$
d) $(b-1).(b-1)$; $b^2-2.b.1+1^2$

4.2 Determine a forma fatorada das áreas. Faça o desenho se necessário.

a) $(y-2)^2 =$

b) $(x-5)^2 =$

c) $(a-11)^2 =$

d) $(y-1)^2 =$

e) $(2a-b)^2 =$

f)) $\left(a-\frac{1}{2}\right)^2 =$

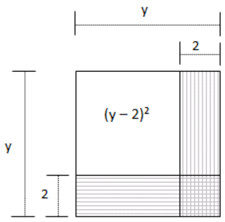
g)) $\left(\frac{3}{2}b-5\right)^2 =$

h)) $(2b-5a)^2 =$

i)) $(b-4c)^2 =$

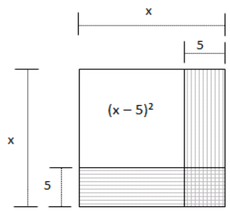
Antecipando as respostas:

a)



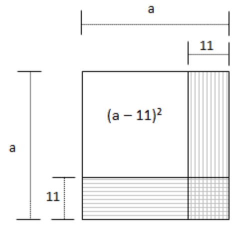
$A = y^2 - 4y + 4$

b)



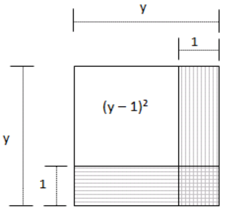
$A = x^2 - 10x + 25$

c)



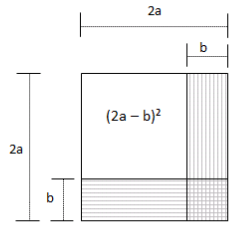
$A = a^2 - 22a + 121$

d)



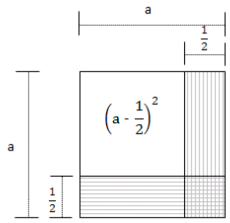
$A = y^2 - 2y + 1$

e)



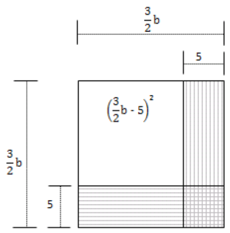
$A = 4a^2 - 4ab + b^2$

f)



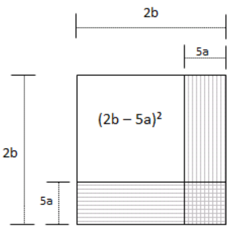
$A = a^2 - a + \frac{1}{4}$

g)



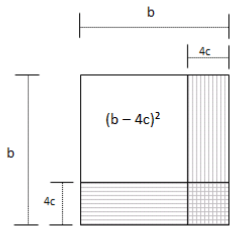
$A = \frac{9}{4}b^2 - 15y + 25$

h)



$A = 4b^2 - 20ab + 25a^2$

i)



$A = b^2 - 8bc + 16c$

4.3 Calcule a medida dos lados dos quadrados que representam as áreas a seguir. Se necessário, faça o desenho.

a) $y^2 - 2y + 1 =$

b) $b^2 - 10b + 25 =$

c) $x^2 - x + \frac{1}{4} =$

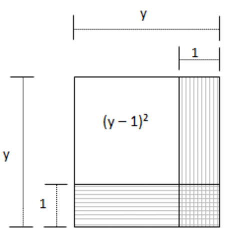
d) $x^2 - 3x + \frac{9}{4} =$

e) $y^2 - 14y + 49 =$

f) $4a^2 - 12ab + 9b^2 =$

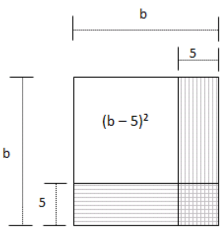
Antecipando as respostas:

a)



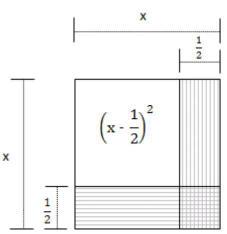
$A = (y-1)^2$

b)



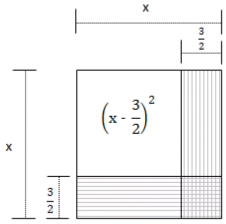
$A = (b-5)^2$

c)



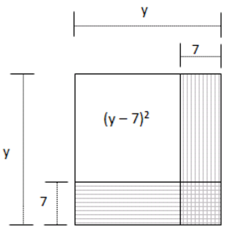
$A = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$

d)



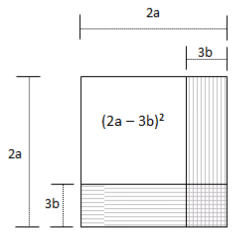
$A = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2$

e)



$A = (y - 7)^2$

f)



$A = (2a - 3b)^2$

Tarefa 5: produto da soma pela diferença de dois termos

Objetivo: Generalizar o modelo matemático do produto notável o produto da soma pela diferença de dois termos.

5.1 Material concreto: Formas geométricas recortadas em cartolina.

a) um quadrado de lado d (10 cm);

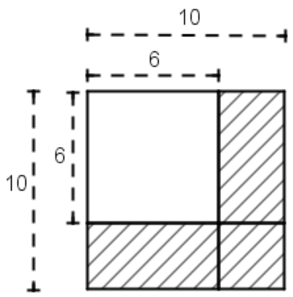
b) um quadrado de lado a (6 cm);

c) um retângulos de lado d (10 cm) e b (4 cm);

d) um retângulo de lado b (4 cm) e a (6 cm).

Com as figuras construídas, forme uma igualdade entre o quadrado e os retângulos. Desenhe a igualdade formada.

Antecipando as respostas:
Exemplo: Podemos escrever, observando a figura que se forma:



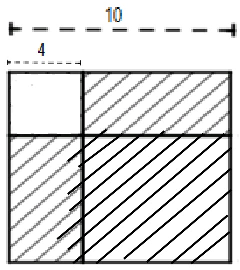
$$100 - 36 = 40 + 24$$
$$10^2 - 6^2 = 4.10 + 4.6$$
$$10^2 - 6^2 = 4(10 + 6)$$
$$10^2 - 6^2 = (10 - 6).(10 + 6)$$

5.2 Desenhe os quadrados e escreva em linguagem matemática a área resultante na forma de parcelas:

a) $10^2 - 4^2 =$ b) $10^2 - 3^2 =$ c) $10^2 - 2^2 =$

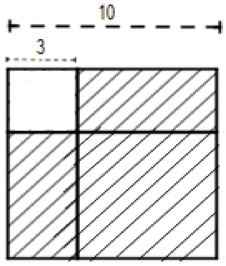
Antecipando as respostas:

a)



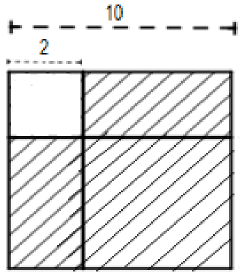
$100 - 16 = 60 + 24$

b)



$100 - 9 = 70 + 21$

c)



$100 - 4 = 80 + 16$

5.3 Esta atividade exige o seguinte material:

Um quadrado de lado a

Um quadrado de lado b

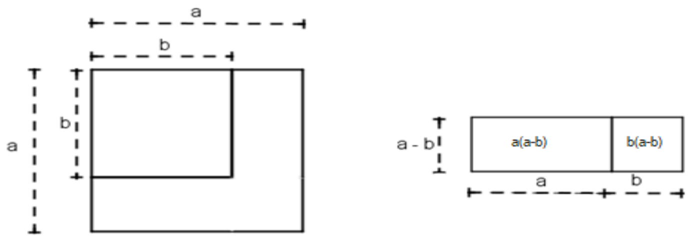
Siga as instruções:

a) Sobreponha os dois quadrados de forma que haja um vértice comum;

b) Recorte a área restante em dois retângulos, colocando-os lado a lado, formando um único retângulo;

c) Escreva a área do retângulo formado na forma de fatores e na forma de parcelas.

Antecipando as respostas:
Exemplo: Podemos escrever, observando a figura que se forma:



$$A = (a + b).(a - b)$$

$$A = a^2 - b^2$$

Observação:

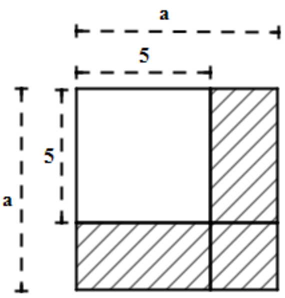
A expressão $(a - b)^2$ é chamada de quadrado da soma de dois termos.

$$\underset{forma\ de\ fatores}{(a - b).(a - b)} \quad = \quad \underset{forma\ de\ parcelas}{a^2 - 2ab + b^2}$$

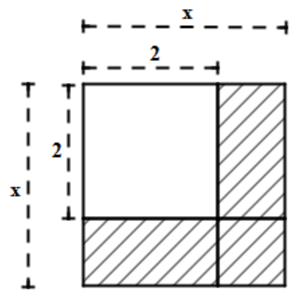
Tarefa 6

6.1 Escreva as áreas na forma de fatores e na forma de parcela.

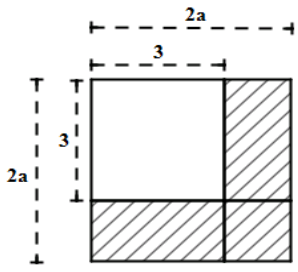
a)



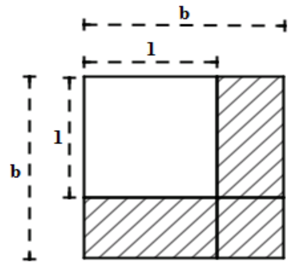
b)



c)



d)



Antecipando as respostas:
a) $(a+5).(a-5)$; a^2-5^2
b) $(x+2).(x-2)$; a^2-2^2
c) $(2a+3).(2a-3)$; $(2a)^2-3^2$
d) $(b+1).(b-1)$; b^2-1^2

6.2 Desenhe e determine as áreas:

a) $a^2-49=$

b) $b^2-25=$

d) $4x^2-y^2=$

d) $y^2-25x^2=$

e) $a^2-\frac{1}{16}b^2=$

f)) $x^2-1=$

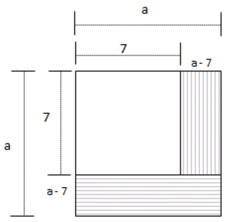
g) $\frac{4}{9}x^2-y^2=$

h)) $b^2-c^2=$

i)) $a^2-81=$

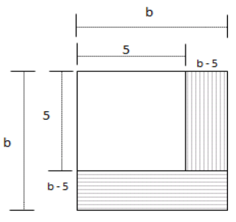
Antecipando as respostas:

a)



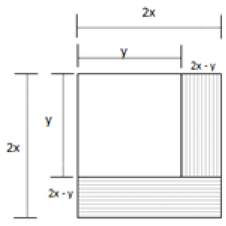
$A=(a+7)(a-7)$

b)



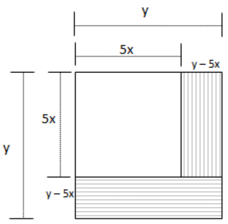
$A=(b+5)(b-7)$

c)



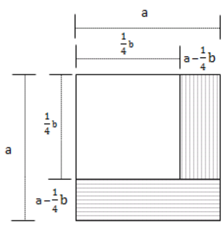
$A=(2x+y)(2x-y)$

d)



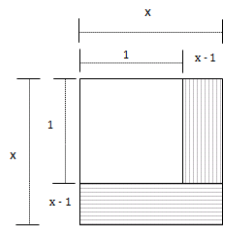
$A = (y + 5x)(y - 5x)$

e)



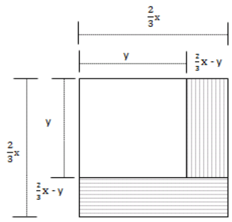
$A = (a + \frac{1}{4}b)(a - \frac{1}{4}b)$

f)



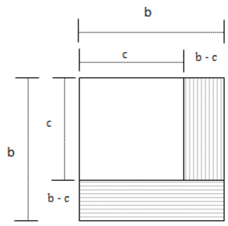
$A = (x + 1)(x - 1)$

g)



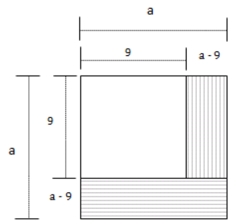
$A = \left(\frac{2}{3}x + y\right).\left(\frac{2}{3}x + y\right)$

h)



$A = (b + c).(b - c)$

i)



$A = (a + 9).(a - 9)$

6.3 Calcule a área resultante. Se necessário, faça o desenho.

a) $(a + 1)(a - 1) =$

b) $(2a + 5)(2a - 5) =$

c) $(9 - b)(9 + b) =$

d) $\left(a + \frac{2}{3}\right)\left(a - \frac{2}{3}\right) =$

e) $(x - y)(x + y) =$

f) $(5 + a)(5 - a) =$

g) $(12 - y)(12 + y) =$

h) $(8x - 3y)(8x + 3y) =$

i) $(a + 11)(a - 11) =$

j) $(4x - y)(4x + y) =$

Antecipando as respostas:
a) $A = a^2 - 1$
b) $A = 4a^2 - 25$
c) $A = 81 - b^2$
d) $A = a^2 - \frac{4}{9}$
e) $A = x^2 - y^2$
f) $A = 25 - a^2$
g) $A = 144 - y^2$
h) $A = 64x - 9y^2$
i) $A = a^2 - 121$
j) $A = 16x^2 - y^2$

Tarefa 7

7.1 Calcule os produtos notáveis:

a) $(a + 8)^2 =$

b) $(x - 7)(x + 7) =$

c) $(2x + 1)^2 =$

d) $(a - 13)^2 =$

e) $\left(4c + \frac{3}{5}d\right)\left(4c - \frac{3}{5}d\right) =$

f) $\left(b + \frac{1}{5}\right)^2 =$

g) $\left(a - \frac{1}{4}\right)^2 =$

h) $\left(a + \frac{3}{5}\right)\left(a - \frac{3}{5}\right) =$

i) $(x + y)^2 =$

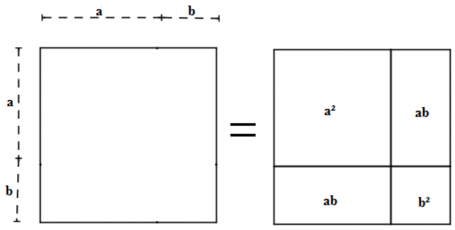
j) $(x - y)^2 =$

Antecipando as respostas:

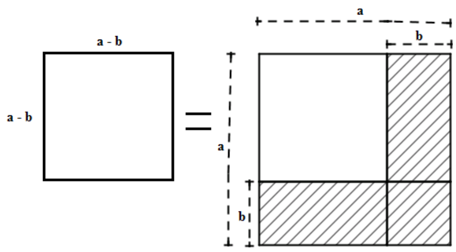
a) $a^2 + 16a + 64$	b) $x^2 - 49$
c) $4x^2 + 4x + 1$	d) $a^2 - 26a + 169$
e) $16c^2 - \frac{9}{25}d^2$	f) $b^2 + \frac{2}{5}b + \frac{1}{25}$
g) $a^2 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{16}$	h) $a^2 - \frac{9}{25}$
i) $x^2 + 2xy + y^2$	j) $x^2 - 2xy + y^2$

Observação:
Revisando os produtos notáveis.

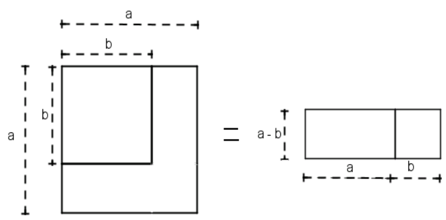
1. Quadrado da soma de dois termos: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$



2. Quadrado da diferença de dois termos: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

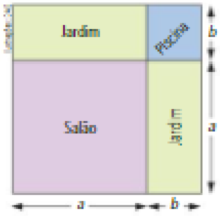


3. Produto da soma pela diferença de dois termos: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$



Tarefa 8

8.1 O desenho representa a planta de um clube construído sobre um terreno quadrado.



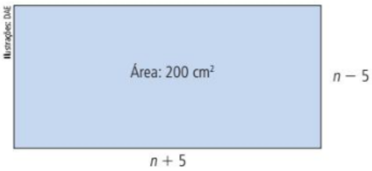
Indique o que representam as expressões:

a) a^2 c) $2ab$

b) b^2 d) $(a+b)^2$

Antecipando as respostas: a) salão b) piscina c) jardim d) planta do clube

8.2 Observe o retângulo.



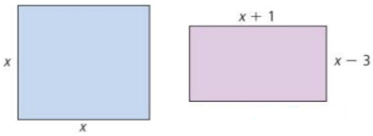
a) Qual o valor de n?

b) Quanto mede o lado menor?

c) Quanto mede o lado maior?

Antecipando as respostas: a) $n = 15$ b) 10 c) 20

8.3 A área do quadrado excede a área do retângulo em 13 cm².



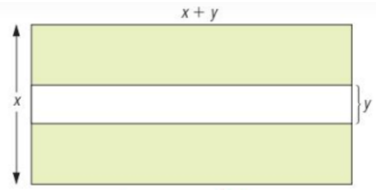
a) Qual é a medida do lado do quadrado?

b) Qual é o perímetro do quadrado?

c) Qual é o perímetro do retângulo?

Antecipando as respostas: a) 5 b) 20 c) 16

8.4 A figura é formada por retângulos. Escreva uma expressão simplificada para a área da parte colorida da figura.



Antecipando as respostas: $(x+y).(x-y)$

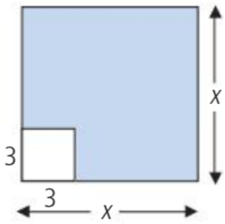
6.3.2 Avaliação das aprendizagens

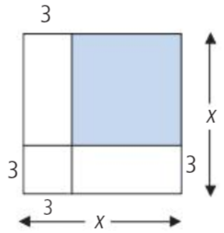
Para identificar as aprendizagens relacionadas ao estudo de produtos notáveis apresentou-se 8 (oito) questões.

O objetivo é verificar se esse objeto de conhecimento contribuiu para desenvolver estruturas de Pensamento da Álgebra – generalização, cálculo algébrico, manipulação de expressões, linguagem oral e escrita algébrica e observação de padrões.

6.3.3 Proposta de avaliação

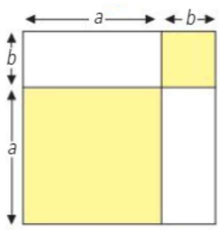
Questão 1 (quadrado da diferença de dois termos): Determine a área da parte colorida dos quadrados.

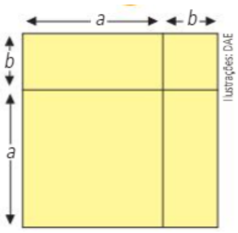
a) 

b) 

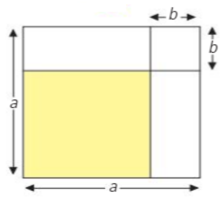
Antecipando as respostas: a) x^2-9 b) x^2-6x+9

Questão 2 (representação geométrica de produtos notáveis): Escreva a expressão correspondente à área da parte colorida.

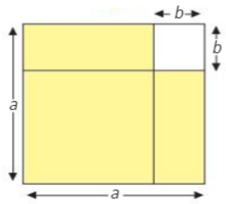
a) 

b) 

c)



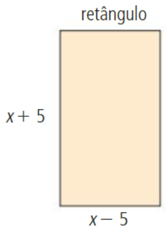
d)



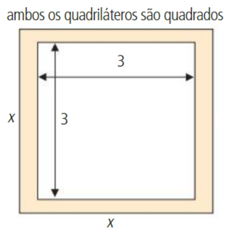
Antecipando as respostas:
a) $a^2 + b^2$
b) $(a + b)^2$
c) $a^2 - 2ab + b^2$
d) $a^2 - b^2$

Questão 3 (produto da soma pela diferença de dois termos): Para cada figura, escreva uma expressão que representa a medida da área colorida.

a)



b)

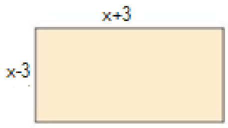


Faça x = 7 e calcule a área colorida.

Antecipando as respostas:
a) $x^2 - 25$
b) $x^2 - 9$

Questão 4 (produto da soma pela diferença de dois termos): Desenhe um retângulo de área $x^2 - 9$, Indique a medida dos lados.

Antecipando a resposta:



Questão 5 (produtos notáveis): Efetue como achar melhor.

a) $(x + 7)^2$

b) $(5 + 2m)^2$

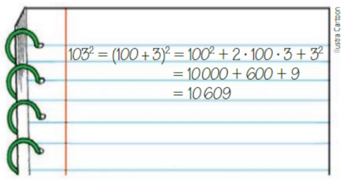
c) $(m - 3)^2$

d) $(2a - 5)^2$

Antecipando as respostas:
a) $x^2 + 14x + 49$

b) $25 + 20m + 4m^2$
c) $m^2 - 6m + 9$
d) $4a^2 - 20a + 25$

Questão 6 (quadrado da soma de dois termos): Observe como Renata calculou o quadrado de 103:

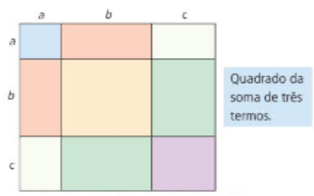


Calcule agora:

a) 13^2 b) 51^2 c) 105^2

Antecipando as respostas:
a) $(10+3)^2$
$= 10^2 + 2.10.3 + 3^2$
$= 100 + 60 + 9$
$= 169$
b) $(50+1)^2$
$= 50^2 + 2.50.1 + 1^2$
$= 2500 + 100 + 1$
$= 2601$
c) $(100+5)^2$
$= 100^2 + 2.100.5 + 5^2$
$= 10000 + 1000 + 25$
$= 11025$

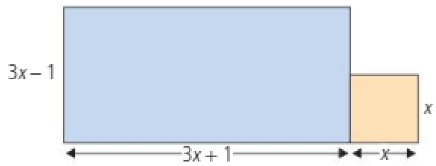
Questão 7 (quadrado da soma de três termos): Utilize a figura abaixo e seus conhecimentos de Geometria para obter o resultado de $(a+b+c)^2$.



Antecipando a resposta:

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

Questão 8 (Produto da soma pela diferença de dois termos): Na figura estão representados um retângulo e um quadrado. Escreva uma expressão simplificada para a área colorida da figura.



Antecipando a resposta:

$$10x^2 - 1$$

Ao finalizar a terceira sequência de atividades, apresentou-se o desenvolvimento da quarta e última etapa da nossa Sequência Didática, Fatoração de polinômios.

6.4 SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 4 – FATORAÇÃO DE POLINÔMIOS

Este conjunto de 3 (três) tarefas está organizado com foco na aprendizagem do objeto de conhecimento: Resolução de equações polinomiais do 2º grau por meio de fatorações e, no desenvolvimento da mesma habilidade **(EF09MA09)** presente na terceira sequência de atividades, para o objeto produtos notáveis: “compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau” (BRASIL, 2018, p. 319).

No entanto, a finalidade desta série de tarefas está em desenvolver nos alunos a capacidade de fatorar por fator comum e por agrupamento e também, apresentar a fatoração por meio de representações geométricas de áreas de retângulos. Dessa maneira, há ampliação da habilidade para a compreensão de um novo conceito matemático, fatoração de polinômios.

Para além do algebrismo na manipulação de símbolos, letras e números e da abstração de conceitos polinomiais tão presentes em muitos livros didáticos, escolhemos construir situações de aprendizagens que possibilitam apropriação de significados para facilitar a compreensão das operações, propriedades e cálculos algébricos, da relação entre as variáveis, da generalização de padrões geométricos ou aritméticos atrelados à resolução de problemas. O que vai ao encontro do que apontam Fiorentini, Miorim e Miguel (1993, p. 87) sobre os elementos que identificam o Pensamento Algébrico, são “a percepção de regularidades, a percepção de aspectos invariantes em contraste com outros que variam, as tentativas de expressar ou explicar a estrutura de uma situação-problema e a presença do processo de generalização".

A partir dessas ideias, buscou-se identificar esses elementos na aplicação da sequência abaixo com os alunos do 9º ano. Para tal, organizou-se material de apoio para dar suporte à aprendizagem dos alunos: cartolina, barbante, tesoura e régua.

6.4.1 Desenvolvimento da sequência de atividades 4

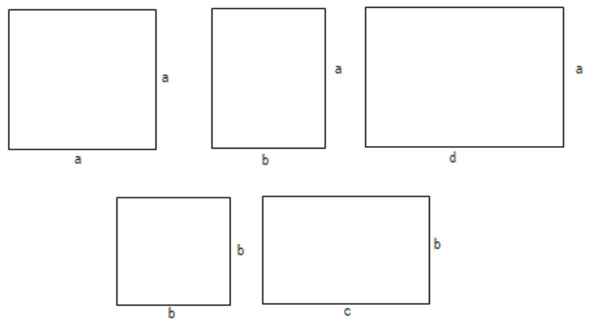
Tarefa 1: Fatoração por fator comum

Objetivo: Realizar a fatoração por fator comum.

Material concreto: Formas geométricas recortadas em cartolina.

a) a^2, ab, ad, b^2, bc. Considere: a = 11 cm, b = 13 cm, c = 5 cm, d = 7 cm.

Material concreto:



1.2 Siga as instruções:

a) Monte um retângulo com as figuras a^2, ab e ad,

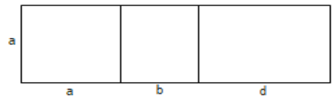
b) Determine a área deste retângulo

c) Determine as medidas dos dois lados do retângulo formado.

d) Desenhe e anote as medidas.

Antecipando as respostas:

a)



b) $A = a(a + b + d)$

$A = a^2 + ab + ad)$

1.3 Siga as instruções:

a) Monte um retângulo com duas figuras, b^2 e bc.

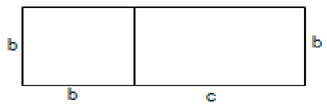
b) Determine a área deste retângulo formado.

c) Determine as medidas dos dois lados deste retângulo.

d) Desenhe e anote as medidas.

Antecipando as respostas:

a)



b) $A = b(b + c)$

c) 13 e 18

1.4 Transforme as expressões a seguir em produtos de fatores:

a) $3x^2 + 3x =$

b) $6a + 6b =$

c) $5x + 20 =$

d) $y^2 + 6y + 4ay =$

e) $18x^2 + 24xy =$

f) $16a^2 + 12ab + 28ac =$

Antecipando as respostas:

a) $3x(x + 1)$

b) $6(a + b)$

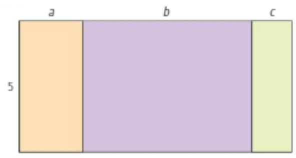
c) $5(x + 4)$

d) $y(y + 6 + 4a)$

e) $6x(3x + 4y)$

f) $4a(4a + 3b + 7c)$

1.5 Observe a figura:



a) Qual a área total do retângulo.

b) Qual é a forma fatorada dessa expressão?

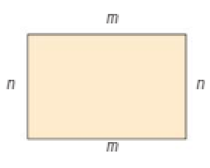
Antecipando as respostas:

a) $5a + 5b + 5c$

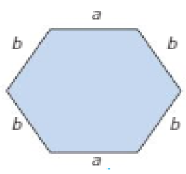
b) $5(a + b + c)$

1.6 Indique duas formulas para o perímetro de cada uma das figuras:

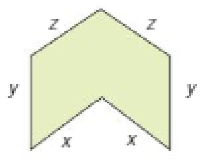
a)



b)



c)



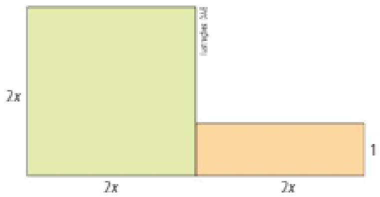
Antecipando as respostas:

a) $2m + 2n \ ou \ 2(m + n)$

b) $2a + 4b \ ou \ 2(a + 2b)$

c) $2z + 2y + 2x \ ou \ 2(z + y + x)$

1.7 A figura é formada por um quadrado e um retângulo. Determine a área da região colorida e dê o resultado na forma fatorada.



Antecipando as respostas: A área do quadrado é $4x^2$ e do retângulo $2x$. A área da região colorida é $4x^2 + 2x$ ou $2x(2x + 1)$.

Tarefa 2: Fatoração por agrupamento

Objetivo: Fatorar por agrupamento.

Material concreto: quadriláteros recortados em cartolina.

a) ad, ac, bd e bc. Considere: a = 11 cm, b = 13 cm, c = 5 cm, d = 7 cm.

2.1 Componha um quadrilátero com as figuras ad, ac, bd e bc e desenhe-as.

a) Calcule a área total do quadrilátero.

b) Quais são os lados deste quadrilátero?

Antecipando as respostas: a) $(a + b).(c + d)$ b) 24 e 12

2.2 Fatore, por agrupamento, as expressões:

a) $ax + 2a + bx + 2b =$

b) $8m^2 - m + 8am - a =$

c) $am - bm + an - bn =$

d) $5xy + 45x - 2y - 18 =$

e) $\frac{2}{5}a^2 - \frac{2}{5}a + ab - b =$

f) $28xy + 7y - 16x - 4 =$

g) $xy + bx - ay - ab =$

h) $6x^2 - 12x + 6yx - 12y =$

i) $12ab + 36a^2 + 4b + 12a =$

j) $\frac{4}{5}a^2 + \frac{2}{3}ac + \frac{2}{5}ab + \frac{1}{3}bc =$

Antecipando as respostas:	
a) $(a + b)(x + 2)$	b) $(m + a)(8m - 1)$
c) $(a - b)(m + n)$	d) $(5x - 2)(y + 9)$
e) $\left(\frac{2}{5}a + b\right)(a - 1)$	f) $(7y - 4)(4x + 1)$
g) $(x - a)(y + b)$	h) $(x - 2)(6x + 6y)$
i) $(12a + 4)(b + 3a)$	j) $\left(\frac{2}{5}a + \frac{1}{3}c\right)(2a + b)$

2.3 Fatore as expressões, escolhendo o tipo de fatoração mais apropriado:

a) $ax + 2a + 3x + 6 =$

b) $x^2 + 7x =$

c) $\frac{3}{5}x + ax + \frac{3}{5}y + ay =$

d) $x^2 - bx - 2ax + 2ab =$

e) $xy + x + y + 1 =$

f) $ax + bx + cx =$

g) $3x^2 + 30xy + 15xy^2 =$

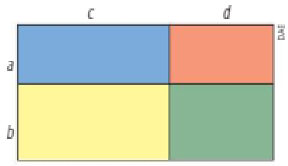
Antecipando as respostas: a) $(a+3)(x+2)$ b) $x(x+7)$ c) $\left(\frac{3}{5}+a\right)(x+y)$ d) $(x-2a)(x-b)$ e) $(x+1)(y+1)$ f) $x(a+b+c)$ g) $3x(x+10y+5y^2)$

2.4 A figura representa um retângulo. As partes coloridas também são retângulos.

a) Qual a área de cada parte colorida?

b) Qual a área total?

c) Qual a forma fatorada de $ac + ad + bc + bd$?



Antecipando as respostas: a) $área\ retângulo\ azul = a.c, área\ do\ retângulo\ vermelho = a.d$ $área\ retângulo\ amarelo = b.c, área\ do\ retângulo\ verde = b.d$ b) $área\ total = ac + ad + bc + bd$ c) $a(c+d) + b(c+d)\ ou\ (a+b)(c+d)$

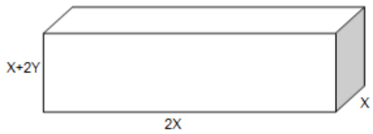
2.5 Ao calcular a área de uma determinada casa, representada na figura abaixo, uma pessoa calculou a área de cada cômodo da casa encontrando a seguinte expressão: $ab + ac + 10b + 10c$.

Uma outra pessoa calculou a área desta mesma casa de outra maneira, chegando também ao resultado anterior. Indique a forma fatorada com que essa última pessoa pode ter representado a área dessa casa.

Antecipando a resposta: $b(a+10) + c(a+10) = (b+c).(a+10)$

Tarefa 3: Cálculo de volume e fatoração.

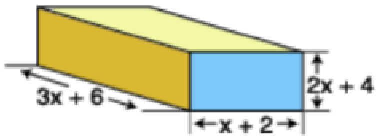
3.1 Qual a forma fatorada do volume da caixa retangular representada na figura abaixo.



Antecipando a resposta:

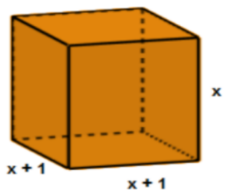
$$V = 2x^2(x + 2y)$$

3.2 Calcule o volume da figura abaixo (em função de x) e coloque-o na forma fatorada.



Antecipando as respostas:
$V = 6x(x^2 + 6x + 12) + 48$

3.3 Escreva a forma fatorada do volume do prisma abaixo:

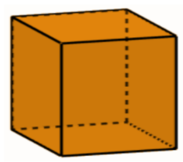


Antecipando a resposta:

$$V = x(x + 1)^2$$

$$V = x(x^2 + 2x + 1)$$

3.4 Dado o prisma de volume $x^3 + 2x^2 + x$, indique as medidas da largura, comprimento e altura.



Antecipando a resposta:

$$x^3 + 6x^2 + 9x$$

$$x.1x^2 + x.6x + x.9$$

$$x(1x^2 + 6x + 9)$$

$$x(x + 3)^2$$

Portanto, as medidas das arestas são: x, $x + 3$ e $x + 3$

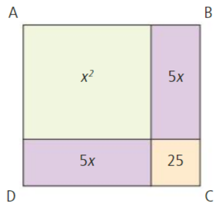
6.4.2 Avaliação das aprendizagens

Para verificar se ocorreu aprofundamento e ampliação das aprendizagens anteriores, propôs-se a quarta avaliação composta por 8 (oito) questões relacionadas ao conceito de fatoração de polinômios.

O objetivo é verificar se esse objeto de conhecimento constitui no aluno características da aprendizagem na perspectiva da Álgebra e do Pensar Algebricamente – linguagem algébrica, manipulação de expressões, representação algébrica e abstração.

6.4.3 Proposta de avaliação

Questão 1 (fatorar por agrupamento): Observe a figura e responda o que se pede.



a) Qual é a área do quadrado ABCD?

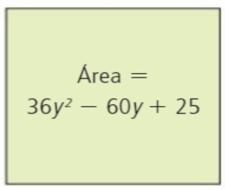
b) Qual é a medida do lado desse quadrado?

c) Qual é a forma fatorada de $x^2 + 10x + 25$?

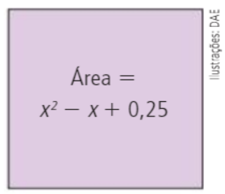
Antecipando as respostas:
a) Some as quatro partes indicadas: $x^2 + 10x + 25$
b) $x + 5$
c) $(x + 5)^2$

Questão 2 (trinômio quadrado perfeito): Em cada caso, determine a expressão para a medida do lado do quadrado.

a)

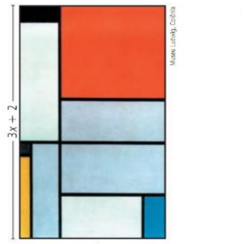


b)



Antecipando as respostas:
a) $6y - 5$
b) $x - 0,5$

Questão 3 (fatorar por agrupamento): A área do retângulo da figura abaixo é dada por $9x^2 - 4$.

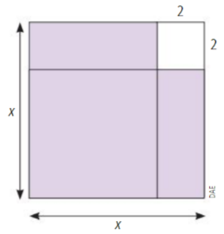


◆ Piet Mondrian. *Painel I*, 1921. Óleo sobre tela, 96,5 cm × 60,5 cm.

Qual é a medida do menor lado desse retângulo?

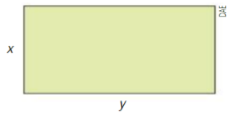
Antecipando a resposta: a) $3x - 2$

Questão 4 (diferença de quadrados): Indique duas fórmulas para a área colorida do quadrado maior.



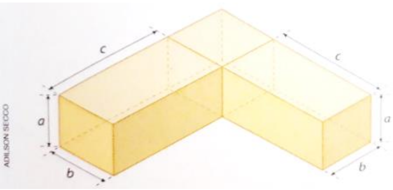
Antecipando a resposta: $x^2 - 4$ ou $(x+2)(x-2)$

Questão 5 (fator comum): x e y são as medidas dos lados de um retângulo de área 20 e perímetro 18. Qual é o valor numérico da expressão $3x^2y + 3xy^2$?



Antecipando a resposta: $3xy(x+y) = 3\,.\,20\,.\,9 = 540$

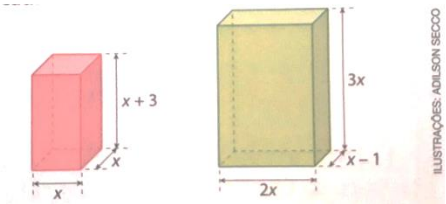
Questão 6 (fatoração de polinômios): Observe a figura abaixo, formada por três blocos retangulares.



Escreva uma forma fatorada do polinômio que representa o volume da figura.

Antecipando a resposta: $ab.(2c+b)$

Questão 7 (fatoração de polinômios): Observe os paralelepípedos e responda às questões.



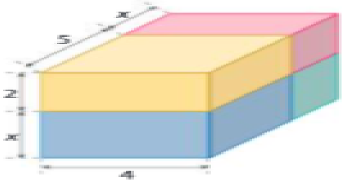
a) Represente a área da superfície total de cada solido geométrico por um polinômio.

b) Represente o volume de cada sólido por uma expressão fatorada.

c) Se x = 2, que sólido tem maior volume? E se x = 1,5?

Antecipando as respostas:
$a)\ 6x^2 + 12x$ e $22x^2 - 10x$
b) $x^2.(x+3)$ e $6x^2.(x-1)$
c) o sólido da direita; o sólido da esquerda.

Questão 8 (fatoração de polinômios): Observe a figura e responda.



Represente o volume da figura por uma expressão fatorada.

Antecipando a resposta:

$$4x^2 + 28x + 40$$

Diante do exposto, partimos para análise e reflexão dos resultados ao implementar (desenvolver, aplicar e avaliar) a Sequência Didática, ora apresentada, norteada pela elaboração de tarefas para desenvolver o conceito de polinômios e suas operações.

7 ANÁLISE DOS RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste capítulo apresentam-se as análises e as discussões acerca dos aspectos relevantes da nossa pesquisa, obtidos a partir dos dados coletados durante as etapas adotadas na investigação com os alunos e a professora/ pesquisadora. Objetiva-se analisar as ações didáticas do ponto de vista das perspectivas e dificuldades do uso de recursos didáticos no processo de aplicação do experimento. Propõe-se em dois subcapítulos, discussão dessas duas categorias de análise e seus principais resultados.

O primeiro subcapítulo, dividido em quatro sessões, traz a descrição das observações feitas pela professora/ pesquisadora e da análise dos registros produzidos pelos alunos em sala de aula na realização de cada sequência de atividades. Apresentam-se informações na perspectiva da vivência dos estudantes em sala de aula (atitudes, interações e compreensão dos conteúdos) e da mediação e postura docente frente à nova metodologia de ensino adotada. No segundo subcapítulo, apresentam-se as reflexões sobre as dificuldades encontradas na utilização do material concreto como auxiliar no processo de ensino e aprendizagem nas aulas de Matemática.

Utilizaram-se codificações para identificar os grupos de trabalho como G1, G2, G3 e assim, sucessivamente, até G9 e a professora/ pesquisadora como PP. Os comentários serão indicados entre colchetes.

Apresentam-se alguns registros escritos, fotos e descrição de diálogos das atividades vivenciadas pela professora/ pesquisadora e pelos alunos e suas respectivas análises.

7.1 PERSPECTIVAS DO USO DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA E DO MATERIAL CONCRETO PARA O ENSINO DA ÁLGEBRA

Com o desafio de implementar (desenvolver, aplicar e avaliar) atividades organizadas por uma Sequência Didática com o uso de material concreto objetivando desenvolver habilidades algébricas, e, consequentemente, o Pensamento Algébrico nos alunos, a professora/ pesquisadora, que ainda não havia desenvolvido essas ferramentas didático-pedagógicas como estratégias de ensino, buscou compreender anterior e no decorrer do processo como utilizar, qual a função e a importância destas para o ensino de Matemática e, ainda, quais os papéis do aluno e do professor no processo.

Observei que ao aplicar a Sequência Didática as atividades realizadas em grupo proporcionaram gradativamente maior troca de informação e interação entre os componentes, o que trouxe mais confiança e envolvimento com as tarefas e com a manipulação dos objetos. Na visão de Nacarato e Custódio (2018, p. 23):

> A organização dos alunos é de extrema relevância, já que o trabalho em colaboração permite atuar nas zonas de desenvolvimento potencial. Dessa forma, alunos mais experientes podem colaborar com alunos menos experientes. As tarefas pressupõem que o trabalho em sala de aula seja em duplas ou pequenos grupos.

Muitos estudantes se sentiram entusiasmados, o que provocou curiosidade e interesse nos participantes mais tímidos, tal fato foi observado pela motivação ao realizar as atividades práticas. A Figura 34 mostra a organização dos grupos em sala de aula participando do experimento.

Figura 34 – Grupos de trabalho

Fonte: A pesquisa.

Esse tipo de organização foi produtivo para o aluno à medida que possibilitou compartilhar conhecimento, debater ideias e até aprimorá-las ao expor o seu pensamento coletivamente, permitindo contribuir para a formação integral do aluno ao proporcioná-lo situações não apenas para o seu desenvolvimento intelectual, mas também social e emocional. Nacarato e Custódio (2018, p. 2), entendem que desenvolver o Pensamento Algébrico como "prática social escolarizada, pressupõe: investigar, levantar hipóteses, questionar, experimentar, testar e validar hipóteses, justificar, ser capaz de expressar oralmente ou por escrito as ideias, argumentar e contra-argumentar". Portanto, para o desenvolvimento desse pensamento é necessário além das tarefas, também um ambiente propício à aprendizagem.

As atividades envolveram bastante a turma, visto que os grupos podiam se movimentar pela sala ao empregar diferentes tipos de materiais concretos produzidos pela professora/ pesquisadora. A atitude contrastava com o desinteresse pelos conteúdos nas aulas tradicionais local em que, na maioria das vezes, a troca de ideias acaba sendo vista como conversa paralela. Na Figura 35, a seguir, pode-se observar momentos em que os grupos de alunos usavam o material concreto, conforme previsto nas tarefas.

Figura 35 – Alunos realizando atividades práticas

Fonte: A pesquisa.

Nessas intervenções o aluno se sentia estimulado a explicar para os colegas e para a professora/ pesquisadora como utilizou o material concreto, como o relacionou com o conceito estudado e quais os procedimentos adotados na busca pela resposta do problema proposto.

A professora/ pesquisadora buscou constantemente se movimentar no ambiente a fim de observar os registros e diálogos dos alunos e, também, estar atenta aos avanços e dificuldades, intermediando quando necessário, sem mostrar respostas prontas, mas instigando-os para a compreensão do problema. Custodio e Nacarato (2018, p. 201) ressaltam a importância da mediação do professor no desenvolvimento de cada tarefa. Para esses pesquisadores, o docente é responsável por organizar as significações que estão sendo produzidas e elaborar problematizações que contribuam para o avanço das hipóteses criadas ou para a reelaboração delas.

Na concepção Van de Walle (2009 *apud* SANTOS; LUVISON; MOREIRA, 2018, p. 75), o papel do professor é essencial para a construção de novos conhecimentos dos alunos:

> Durante a realização da tarefa, é importante que o professor ande pela sala observando o raciocínio dos alunos e, caso haja necessidade, faça mediações que possibilitem avanços. É nesta etapa que o docente perceberá

como os estudantes estão compreendendo a tarefa e pensando sobre ela.

Percebeu-se que além dos problemas matemáticos propiciarem reflexão, as quatro sequências de atividades com temáticas distintas, encadeadas entre si intencionalmente, trouxeram progressivamente amadurecimento cognitivo aos alunos, como pode-se verificar na exposição ao longo da análise dos registros escritos das atividades realizadas durante a aplicação do experimento. Para Nacarato e Custódio (2018, p. 20) o ensino precisa promover o desenvolvimento intelectual do aluno, para isso ocorrer eles defendem a “organização do trabalho pedagógico de forma intencional, desde a escolha das tarefas, a organização dos alunos, a mediação do professor, a socialização das hipóteses, à sistematização das significações produzidas pelo grupo”.

7.1.1 Aplicação da sequência de atividades 1

As tarefas dessa sequência foram utilizadas como introdução para o estudo de conceitos importantes para o desenvolvimento das demais sequências de atividades. Elementos característicos do Pensamento Algébrico essenciais, como padrão, regularidade e proporção foram estudados.

A organização das atividades teve como objetivo verificar a capacidade do aluno em reconhecer maneiras de efetuar medições, utilizar variados padrões de medidas, reconhecer o uso de unidades de medida padrão, entender os motivos que justificam a adoção de um sistema de unidades de medida padrão, usar a linguagem natural e, posteriormente, a linguagem simbólica para descrever expressões de cálculo de área e perímetro de quadriláteros.

O tempo de sua realização foi de 33 aulas.

Foram utilizados como materiais concretos jornal, material dourado, caixa em acrílico, líquido colorido, régua e folhas de exercícios.

Com a folha de exercícios e o material concreto referente ao objeto de conhecimento estudado em mãos, os alunos puderam compreender e trabalhar os conceitos juntamente com os seus colegas de grupo, enquanto a professora/ pesquisadora observava, mediava os trabalhos e, finalmente, promovia reflexão e discussão acerca de possíveis dúvidas e encaminhamentos na socialização para o grande grupo.

O conjunto de tarefas apresentado abaixo teve como objetivo oportunizar a compreensão da constituição do metro e seus submúltiplos por meio de um instrumento de medida padrão.

Inicialmente, os grupos receberam uma fita de 1 metro confeccionada em jornal e orientados a dividi-la em 10 partes iguais. Em seguida os alunos dividiram o decímetro em centímetros. Os alunos perceberam que poderiam utilizar a régua para dividir a fita. A Figura 36 mostra um dos grupos de alunos durante a atividade com a fita de 1 metro de jornal.

Figura 36 – Alunos manipulando a fita de jornal

Fonte: A pesquisa.

Essa atividade possibilitou a compreensão de diferentes unidades de medida e a relação entre elas. Durante a sua realização foi possível observar a dificuldade dos alunos em entender as unidades de medida ao dividir em partes menores e sua utilização em contextos do cotidiano. Nesses momentos de dúvidas ocorria a intervenção da professora/ pesquisadora buscando ampliar a percepção do aluno ao usar o material concreto.

Apesar das dificuldades, os alunos reagiram de forma positiva, fazendo perguntas e até pesquisando e trazendo exemplos de aplicação em aulas posteriores. A professora/ pesquisadora buscou estabelecer questionamentos relacionados às atividades. Segue descrição de parte do diálogo:

PP: O que se mede em metros?

G1: Prédios, pessoas, quadro da sala de aula, rodapé.

G9: Lousa, mesa, porta e altura.

PP: E o que se compra em metros?

G2: Telhados, tecidos, rodapé.

G3: Corda, tecido e fio.

PP: Quantos decímetros tem em 1 metro?

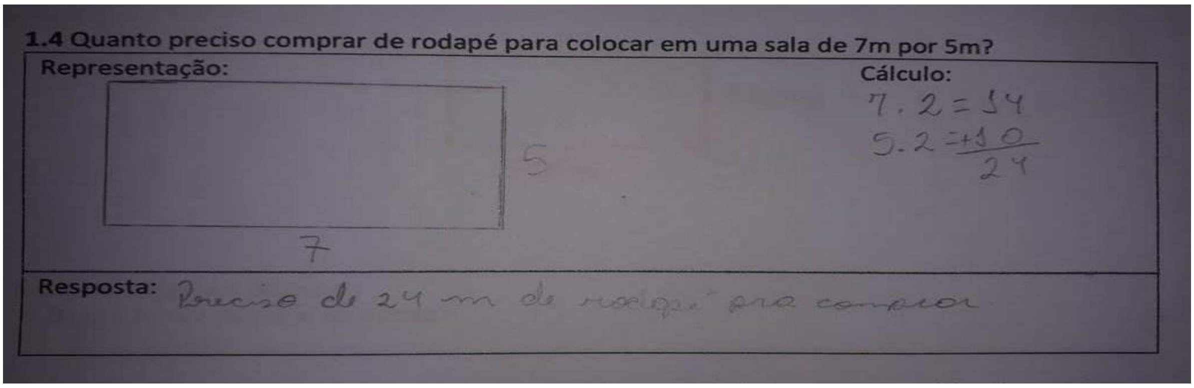
G3: 10 decímetros.

[Com exceção do G8 que respondeu 100 decímetros, todos os outros grupos concordaram com essa resposta, visto que já haviam estabelecido a relação entre essas unidades de medida na tarefa com a fita métrica de jornal].

Na maioria das vezes, as conversas aconteciam de forma natural. No caso do diálogo descrito anteriormente, os alunos gesticulavam e até mostravam a fita para justificar as suas respostas. Conforme indicado por Nacarato e Custódio (2018, p. 20), “numa sala de aula os alunos sinalizam seu processo de aprendizagem quando podem explicitar as suas ideias, com gestos ou linguagem oral”.

Após atividades realizadas com o uso de material concreto, os grupos realizavam tarefas escritas fazendo anotações nas folhas de tarefa, como mostra na Figura 37.

Figura 37 – Registro do G1



1.4 Quanto preciso comprar de rodapé para colocar em uma sala de 7m por 5m?

Representação:

5

7

Cálculo:

7 . 2 = 14
5 . 2 = +10
24

Resposta: Preciso de 24 m de rodapé pra comprar

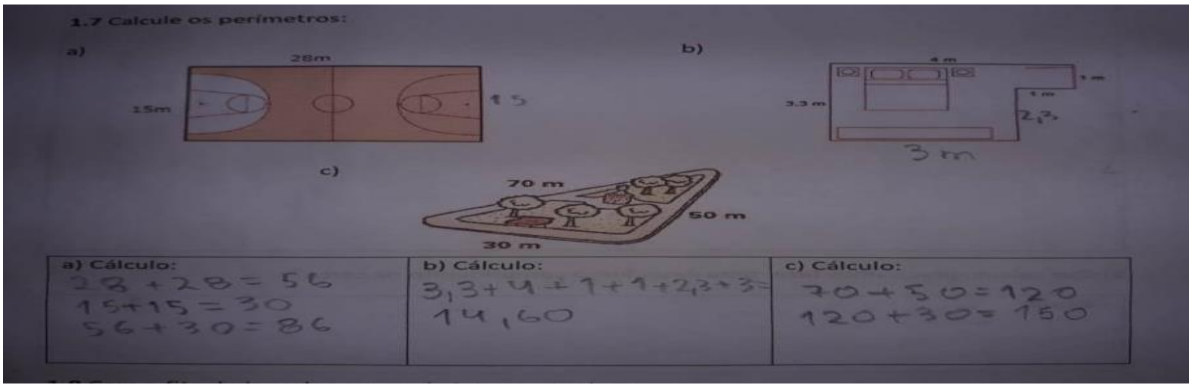
Fonte: A pesquisa.

Essa atividade solicitava para o aluno calcular a quantidade de rodapé necessário para revestir a sala de aula. Sem formalizar e para desenvolver a noção de perímetro, todos os grupos resolveram com êxito o problema proposto, como mostra a resolução do G1.

Em outra atividade, Figura 38, calculavam-se os perímetros de figuras com formatos variados, formalizando, assim, o conceito estudado.

Ressalta-se que, apenas G3 e G7 responderam o item *b* acertadamente. Todas as outras apresentaram como dificuldade perceber ser necessário descobrir a medida do lado desconhecido para somente depois somar todos os lados da figura. A professora/ pesquisadora sentiu a necessidade de trazer atividades extras com a mesma problemática.

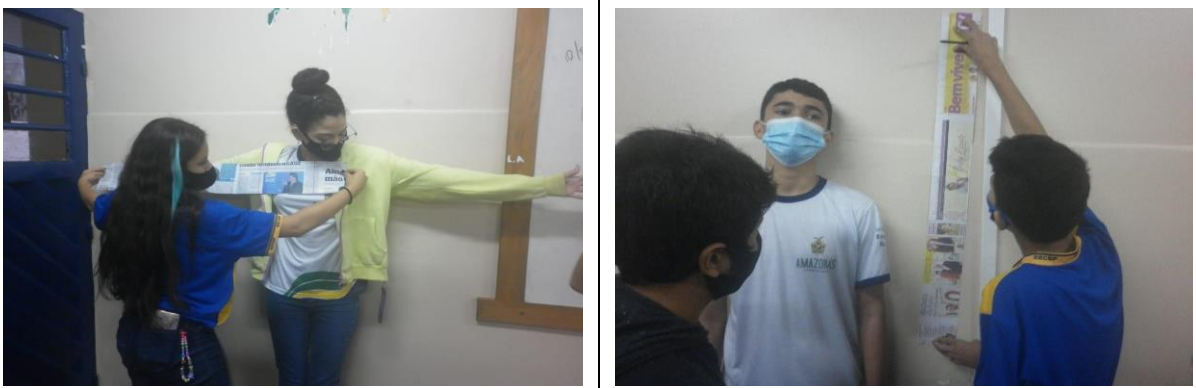
Figura 38 – Registro do G3



Fonte: A pesquisa.

Para observar exemplos de unidade de medida de comprimento, os alunos foram solicitados a utilizar a fita de 1 metro confeccionada em jornal para medir os companheiros de grupo tanto na sua altura como na envergadura, como mostra a Figura 39.

Figura 39 – Alunos fazendo medições



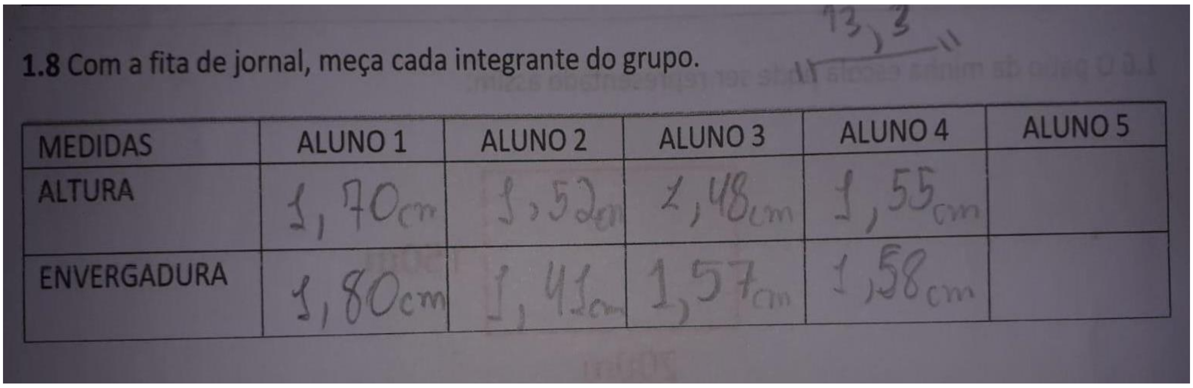
Fonte: A pesquisa.

Após questionamentos sobre o que seria envergadura e a devida explicação pela professora/ pesquisadora, os alunos perceberam que poderiam utilizar simultaneamente o metro e o centímetro como medidas de comprimento.

Foi um momento de visível descontração, pois percebiam que um colega era maior que o outro apesar da mesma idade e que a medida da altura podia coincidir com a medida da envergadura (o que classificaram como ser humano de ouro, fazendo referência ao significado do número de ouro, a perfeição na natureza).

Alguns exemplos nas Figuras 40 e 41 dos registros escritos dos resultados encontrados.

Figura 40 – Registro do G5



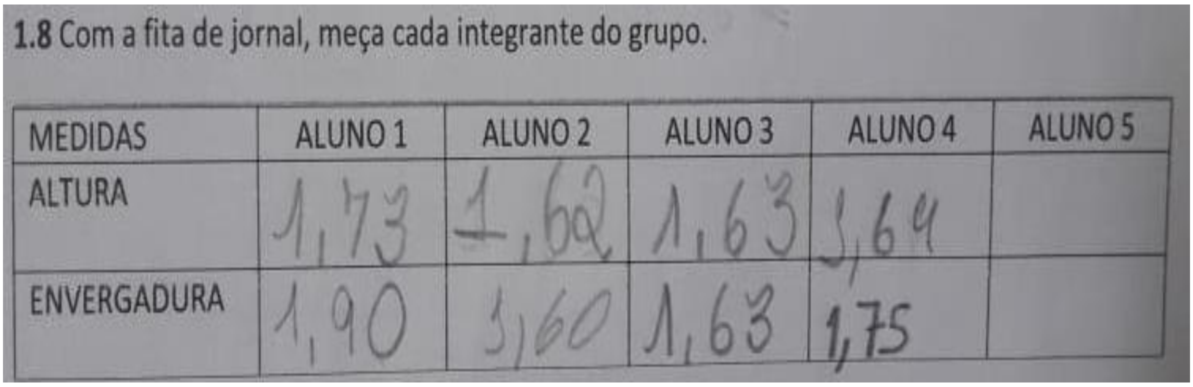
13,3

1.8 Com a fita de jornal, meça cada integrante do grupo.

MEDIDAS	ALUNO 1	ALUNO 2	ALUNO 3	ALUNO 4	ALUNO 5
ALTURA	1,70cm	1,52cm	1,48cm	1,55cm	
ENVERGADURA	1,80cm	1,41cm	1,57cm	1,58cm	

Fonte: A pesquisa.

Figura 41 – Registro do G7



1.8 Com a fita de jornal, meça cada integrante do grupo.

MEDIDAS	ALUNO 1	ALUNO 2	ALUNO 3	ALUNO 4	ALUNO 5
ALTURA	1,73	1,62	1,63	1,64	
ENVERGADURA	1,90	1,60	1,63	1,75	

Fonte: A pesquisa.

Os registros dos G5 e G7 mostram que, ao fazer as anotações, os grupos não adotaram uma unidade de comprimento, embora a escrita evidencie que se tratava da unidade metro. Informação importante para a representação de grandezas como comprimento (distância, perímetro e largura). Esses Problemas sobre medidas contribuiram para o desenvolvimento da habilidade **(EF06MA24)**: resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas de comprimento [...] sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ ou relacionadas às outras áreas do conhecimento (BRASIL, 2018, p. 303).

Com apoio do material concreto, o objetivo da tarefa mostrada na Figura 42 foi desenvolver a noção de relações de medidas e cálculo de área. Para tanto, foi solicitado que os alunos desenhassem no m^2 de jornal $1\ dm^2$ e em seguida dividir o dm^2 em cm^2.

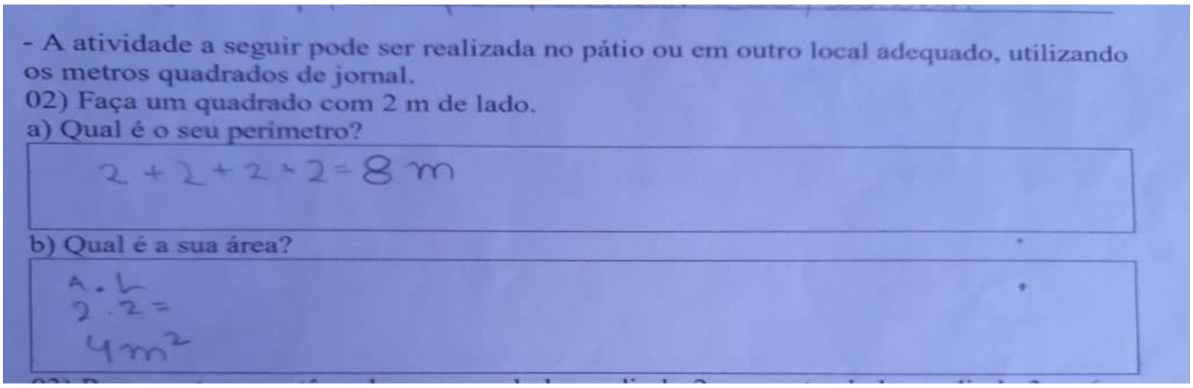
O m^2 construído em jornal foi a base para identificar, construir e estabelecer unidades de área menores. Os alunos perceberam que a unidade de área é uma superfície e que para saber a área de determinada superfície deve-se contar quantas vezes essa unidade cabe dentro dela.

Figura 42 – Material concreto para subdivisão de unidade e conceito de área

Fonte: A pesquisa.

Em outra atividade realizada no pátio da escola, os alunos construíram um quadrado de jornal de $2\ m$ de lado para calcular o perímetro e a área desse espaço, fazendo registros, conforme mostra a Figura 43.

Figura 43 – Registro do G3



- A atividade a seguir pode ser realizada no pátio ou em outro local adequado, utilizando os metros quadrados de jornal.
02) Faça um quadrado com 2 m de lado.
a) Qual é o seu perímetro?

$2+2+2+2=8\ m$

b) Qual é a sua área?

$A \cdot L$
$2 \cdot 2 =$
$4 m^2$

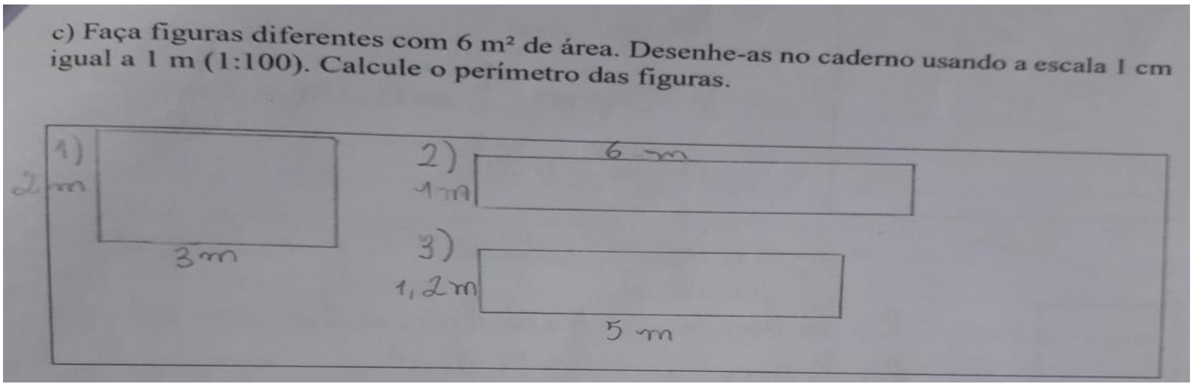
Fonte: A pesquisa.

Como exemplo de atividades para a consolidação do conceito de área, na Figura 43 pode-se verificar as diferentes abordagens presentes na sequência.

Em uma das tarefas os alunos foram solicitados a desenhar figuras diferentes com $6\ m^2$ de área, usando escala.

Pode-se constatar que os grupos desenharam diferentes formas retangulares usando a escala $1\ cm$ igual a $1\ m$ para o problema proposto, até mesmo usando como medida de comprimento números decimais.

Figura 44 – Registro do G7



Fonte: A pesquisa.

Além disso, foi observado a questão da proporção quando um dos grupos fez o seguinte comentário durante a socialização da tarefa.

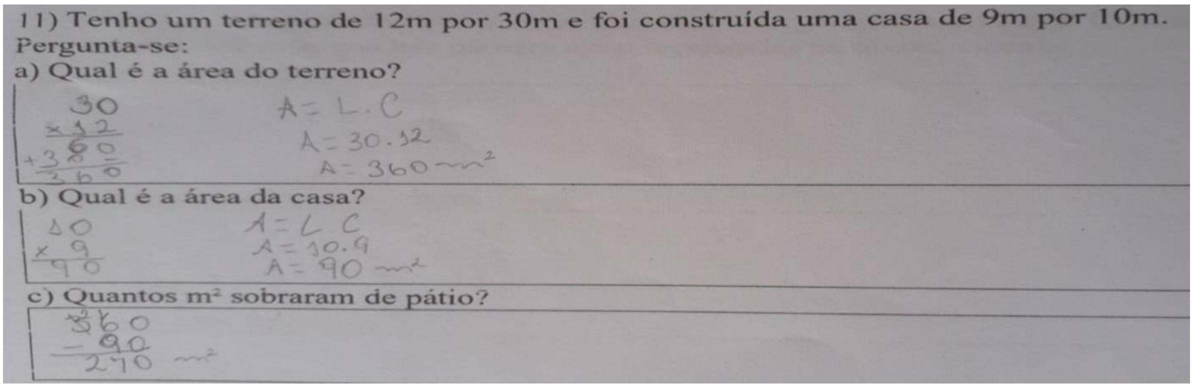
G1: professora 6 metros correspondem a 6 centímetros, então, 1 metro na vida real corresponde 1 centímetro no desenho representado em escala.

O que evidenciou que esse grupo compreendeu o conceito de proporcionalidade, atendendo o que orienta a BNCC (BRASIL, 2018, p. 317) para a necessidade de desenvolver no ensino da Álgebra a habilidade **(EF09MA08)**: "resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas".

Outra tarefa pedia para os grupos calcularem as áreas de um terreno, de uma casa e de um pátio. O cálculo de área é uma estratégia que favorece a linguagem simbólica, um dos elementos que caracterizam o Pensamento Algébrico. Para Ponte; Branco e Matos (2009, p. 27), "uma situação apropriada para a iniciação a esta linguagem é o estudo das áreas e perímetros".

Percebe-se, que o G1, cuja resolução está representada na Figura 45 escreveu a área do retângulo como $A = LxC$, utilizando a linguagem simbólica para descrever a relação entre a medida do comprimento do retângulo e da sua largura, contribuindo para a habilidade **(EF07MA31)**: "estabelecer expressões de cálculo de área de triângulos e de quadriláteros" (BRASIL, 2018, p. 311).

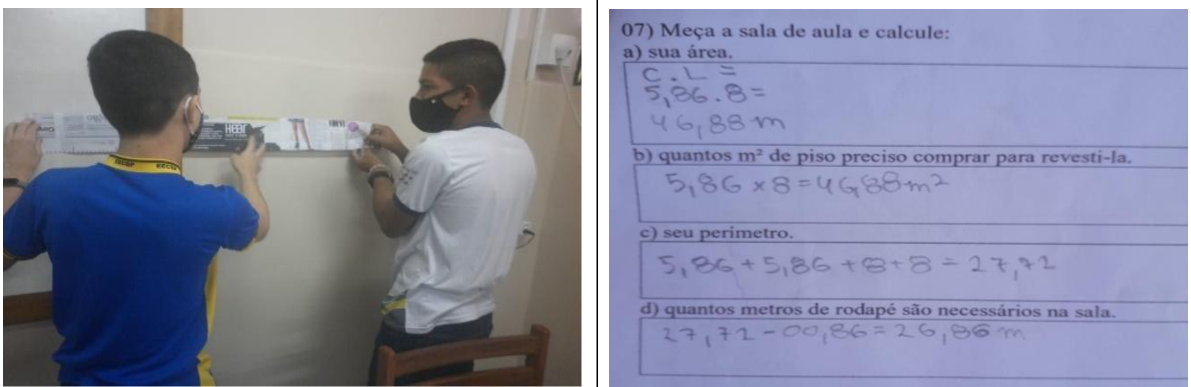
Figura 45 – Registro do G1


11) Tenho um terreno de 12m por 30m e foi construída uma casa de 9m por 10m.
Pergunta-se:
a) Qual é a área do terreno?
30 × 12 = 60 + 300 = 360
A = L . C
A = 30 . 12
A = 360 m²
b) Qual é a área da casa?
10 × 9 = 90
A = L C
A = 10 . 9
A = 90 m²
c) Quantos m² sobraram de pátio?
360 − 90 = 270 m²

Fonte: A pesquisa

Para diferentes atividades foi possível utilizar o mesmo material, como a tarefa apresentada na Figura 46, em que foi novamente utilizada a fita de jornal. Observou-se que as atividades em que os alunos usavam o material concreto associado a resolução de problemas ligados ao seu dia-a-dia traziam maior empenho e participação dos grupos.

Figura 46 – Alunos fazendo medições na sala de aula e registro do G3

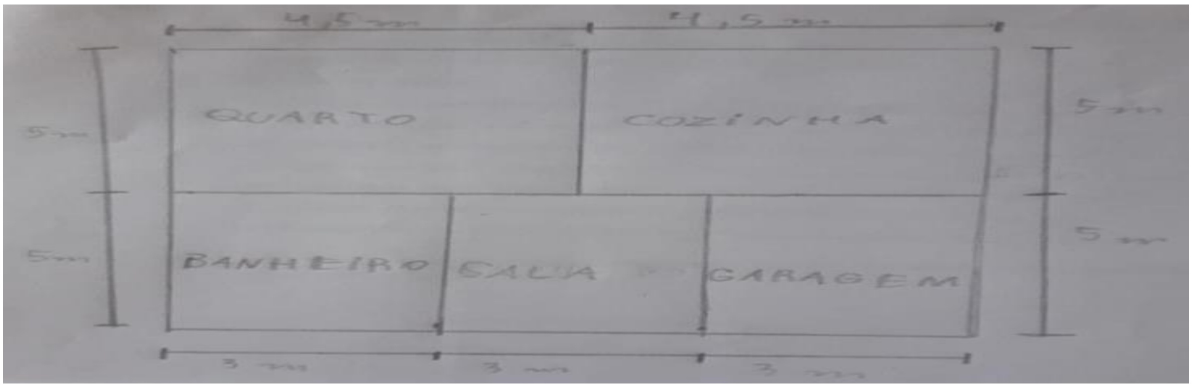

07) Meça a sala de aula e calcule:
a) sua área.
C . L =
5,86 . 8 =
46,88 m
b) quantos m² de piso preciso comprar para revesti-la.
5,86 × 8 = 46,88 m²
c) seu perímetro.
5,86 + 5,86 + 8 + 8 = 27,72
d) quantos metros de rodapé são necessários na sala.
27,72 − 00,86 = 26,86 m

Fonte: A pesquisa.

No caso da atividade da Figura 46, os alunos mediram as paredes da sala de aula, representaram as medidas em escala e calcularam a quantidade de rodapé e de piso, necessários para revesti-la. Na resolução desta situação, dois grupos mostraram-se atentos quando desprezaram o tamanho referente a largura da porta da sala ao calcular a quantidade de rodapé, conforme registro do G3 mostrado na Figura 46, à direita.

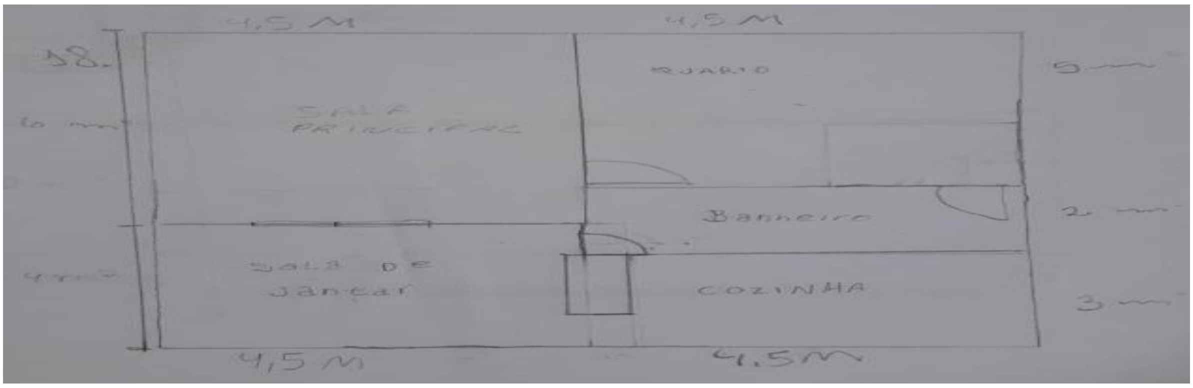
Os alunos foram estimulados a adotar seus próprios procedimentos matemáticos e criar melhores estratégias na resolução dos problemas, como o mostrado nas Figuras 47 e 48, nas quais precisaram planejar uma residência com 5 ambientes distribuídos em 90 m², utilizando escala.

Figura 47 – Registro do G6



Fonte: A pesquisa.

Figura 48 – Registro do G1



Fonte: A pesquisa.

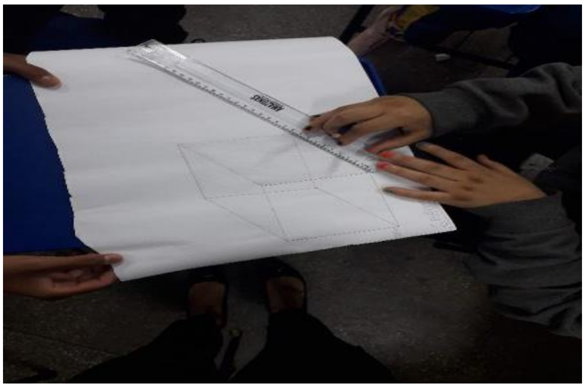
Percebeu-se que os alunos conversavam entre si para escolher a melhor forma para aplicar os conceitos de cálculo de área, de medidas de comprimento e proporcionalidade. Após, concretizaram as ideias desenhando o esboço do de uma planta baixa utilizando régua e lápis.

Foi necessário a interferência da professora/ pesquisadora para que os alunos conseguissem estabelecer a relação dos ambientes da casa com a composição e decomposição de polígonos. Ao fim da atividade, os alunos socializaram seus projetos de planta baixa e mostraram-se surpresos com a quantidade de plantas distintas desenhadas pelos grupos.

Nesse sentido, percebe-se o desenvolvimento da habilidade **(EF06MA28)**: “interpretar, descrever e desenhar plantas baixas simples de residências e vistas aéreas”, previsto na BNCC (BRASIL, 2018, p. 311).

Por meio de atividades de experimentação, os alunos foram colocados em ambientes que promoveram reflexão sobre as possibilidades de mais de uma solução para o problema dado. No registro a seguir, os grupos foram solicitados a desenhar $1\ dm^3$ em cartolina.

Figura 49 – Registro do G8



Fonte: A pesquisa.

Figura 50 – Registro do G9

Fonte: A pesquisa.

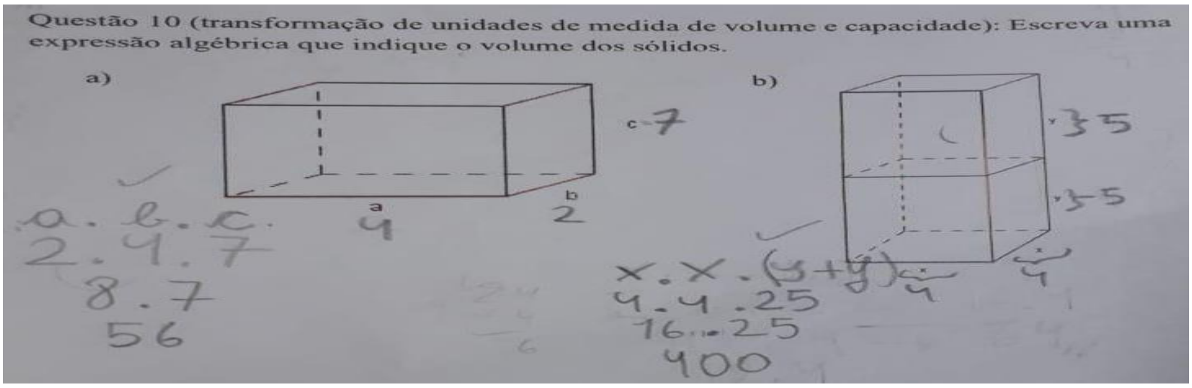
Para a surpresa da professora/ pesquisadora, alguns grupos utilizaram apenas lápis e régua para executar a tarefa, mas outros confeccionaram a forma geométrica em dobradura. Nesse sentido, o uso do material concreto permitiu a experiência física com uma figura tridimensional construída pelo próprio aluno. Com o uso do material concreto foi possível verificar a compreensão das relações entre as “várias representações de um mesmo objeto”, como sugerido pela BNCC (BRASIL, 2018).

Além disso, apesar de não ser o foco da atividade, os alunos tiveram a oportunidade de observar, por meio do manuseio do objeto, os elementos que formam um sólido geométrico.

Apesar de a primeira sequência de atividades ser considerada base ou introdução para as demais sequências, foi solicitado aos alunos resolução de problemas para o desenvolvimento de elementos importantes para futuras atividades algébricas, ou seja, problemas simples envolvendo o uso de letras.

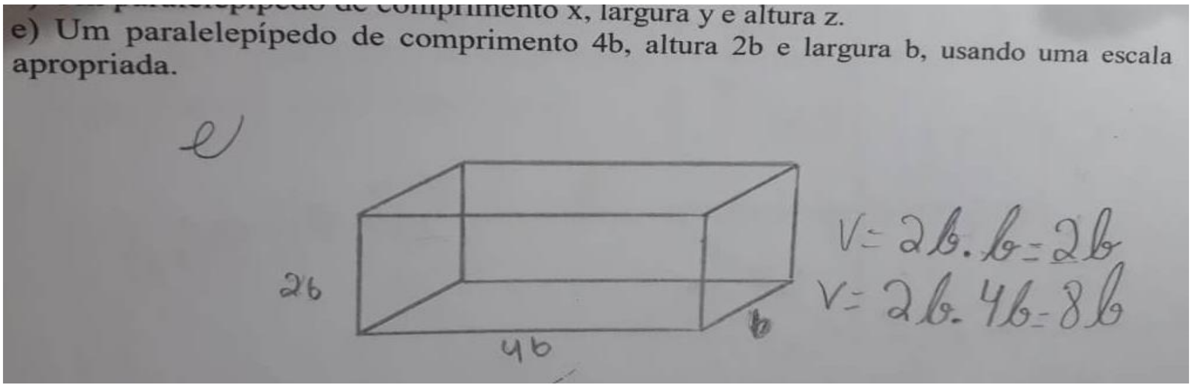
As Figuras 51 e 52 mostram tarefas para o cálculo de volume cujas arestas eram dadas por letras.

Figura 51 – Registro do G5



Fonte: A pesquisa.

Figura 52 – Registro do G8



Fonte: A pesquisa.

Os alunos perceberam que para calcular o volume, era necessário conhecer as três dimensões do cubo ou paralelepípedo. Nesse momento, o uso do raciocínio algébrico se fez necessário, porém, alguns alunos questionavam o valor da letra, queriam atribuir um número para resolver o cálculo, outros queriam medir com a régua a figura para obter medidas numéricas, como é possível verificar no registro escrito acima.

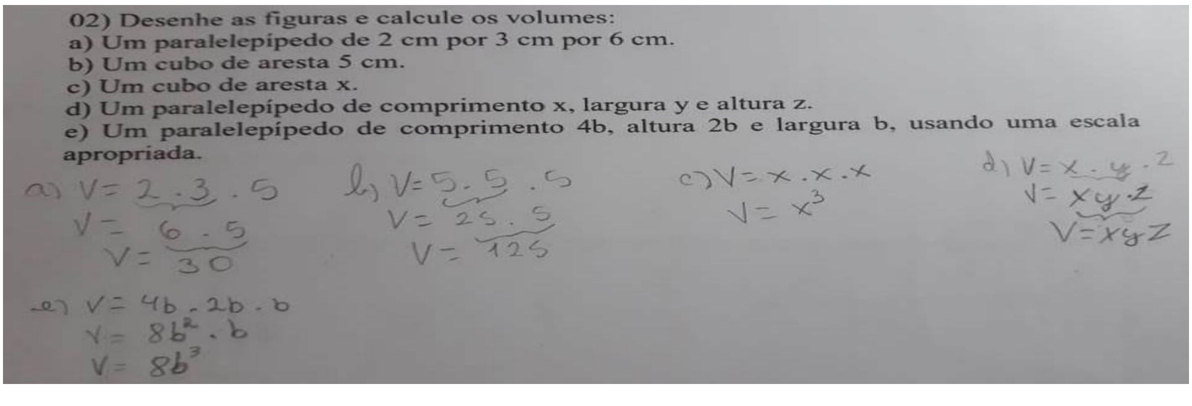
Outra dificuldade observada foi em relação à Matemática básica, como na resolução que envolvia propriedades de potência $x.x$ ou $2b.b$, por exemplo. Houve intervenção da professora/ pesquisadora no sentido de explicar para os alunos participantes do experimento a necessidade da passagem da Aritmética para a Álgebra, a resposta pode ser dada por uma expressão algébrica e, ainda, os significados dos símbolos matemáticos. Após a mediação, a maioria dos grupos resolveu com sucesso a tarefa proposta.

Mesmo com essas dificuldades e após a intervenção, percebeu-se que os alunos usaram a linguagem simbólica para descrever o volume dos sólidos, contribuindo para o desenvolvimento da habilidade **(EF07MA30)**: "resolver e elaborar problemas de cálculo de medida do volume de blocos retangulares, envolvendo as unidades usuais (metro cúbico, decímetro cúbico e centímetro cúbico)" (BRASIL, 2018, p. 309).

Entende-se, a construção de tais conhecimentos como fundamentais para a interpretação do cálculo (pré) algébrico e, também, para reforçar a ideia do uso da letra para representar números. Por esse motivo, foi investido mais tempo que o previsto para o estudo desses conceitos.

As tarefas colocaram os alunos em contextos diferentes para compreender que a partir de procedimentos aritméticos chegava-se à generalização da fórmula do volume de blocos retangulares, como mostra a Figura 53.

Figura 53 – Contextos variados para o cálculo de volume


02) Desenhe as figuras e calcule os volumes:
a) Um paralelepípedo de 2 cm por 3 cm por 6 cm.
b) Um cubo de aresta 5 cm.
c) Um cubo de aresta x.
d) Um paralelepípedo de comprimento x, largura y e altura z.
e) Um paralelepípedo de comprimento 4b, altura 2b e largura b, usando uma escala apropriada.

a) $V = \underbrace{2 . 3} . 5$
$V = \underbrace{6 . 5}$
$V = 30$

b) $V = \underbrace{5 . 5} . 5$
$V = \underbrace{25 . 5}$
$V = 125$

c) $V = x . x . x$
$V = x^3$

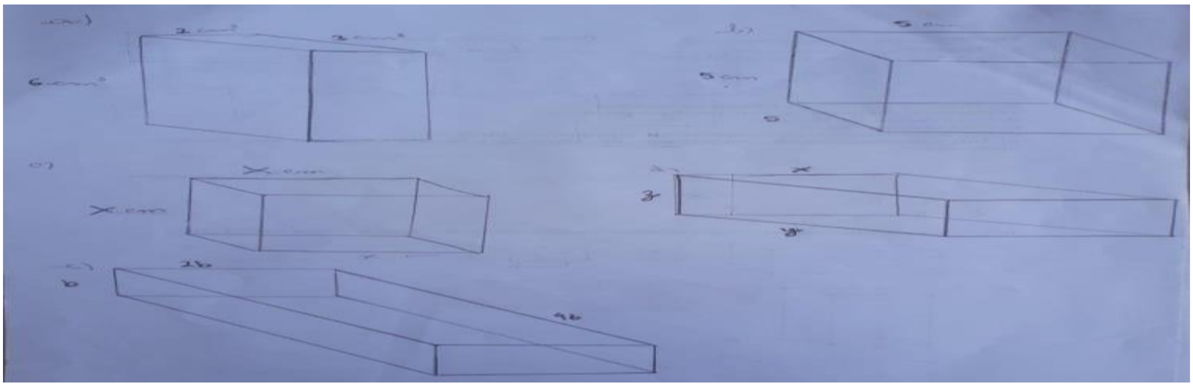
d) $V = x . y . z$
$V = \underbrace{xy . z}$
$V = xyz$

e) $V = 4b . 2b . b$
$V = 8b^2 . b$
$V = 8b^3$

Fonte: A pesquisa.

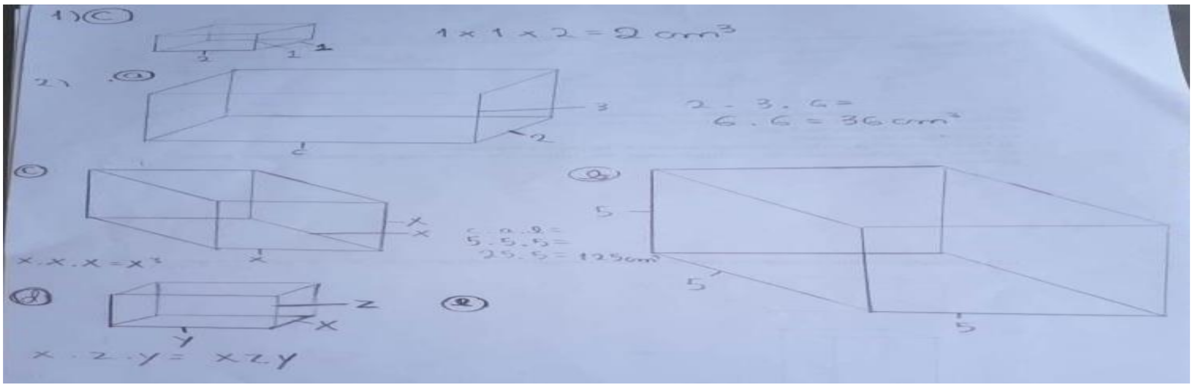
Nessa tarefa os alunos precisaram desenhar as figuras e calcular seus volumes ora com os tamanhos das arestas representados por número, ora representado por letras. A tarefa foi bem desenvolvida pelos grupos, realizaram os cálculos envolvendo multiplicação numérica e envolvendo propriedade de potência, conforme Figura acima. Para os desenhos dos sólidos, a maioria dos grupos percebeu que letras iguais representam o mesmo tamanho, mas alguns não usaram a proporcionalidade na representação do desenho, conforme exemplo, nos registros do G1 e G3, Figuras 54 e 55.

Figura 54 – Registro do G1



Fonte: A pesquisa.

Figura 55 – Registro do G3



Fonte: A pesquisa.

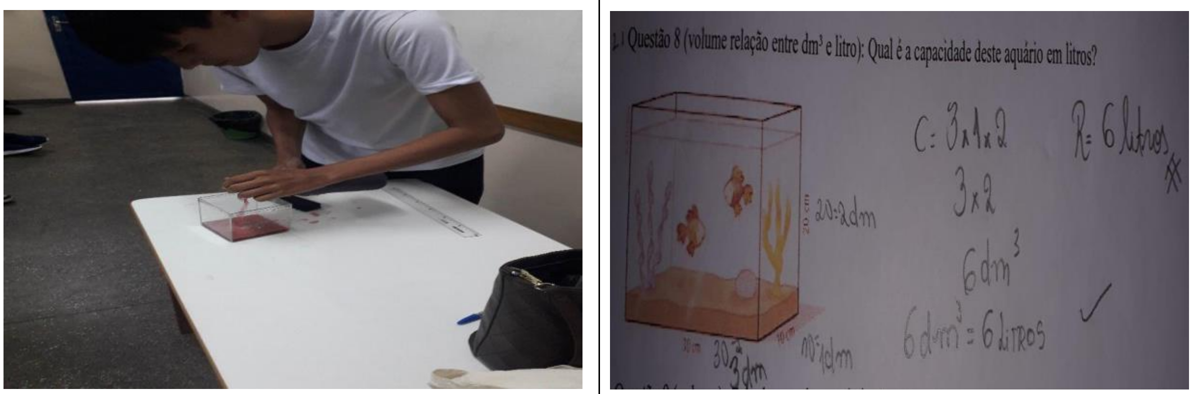
Na tarefa da Figura 56 os alunos deveriam trabalhar a relação entre dm^3 e o litro. Com um decímetro cúbico construído em acrílico e um litro de água com um corante, os grupos de trabalho colocaram a quantia de água colorida dentro da caixa acrílica. No fim do experimento, os alunos foram questionados para que explicassem o pensamento sobre como estabelecer a relação do litro com o decímetro e o metro cúbicos. A professora/ pesquisadora promoveu uma discussão em torno das justificativas dos alunos sem recorrer ao cálculo para estabelecer as relações construídas. Desenvolve-se a seguinte narrativa:

PP: Em um m³ cabem quantos litros?

G9: Professora, nós acabamos de fazer o experimento. E dentro da caixa de 1 dm³ encheu com 1 litro de água. Nós vimos anteriormente que 1 m³ é igual a 1000 dm³. Para encher 1000 dm³ eu vou precisar de 1000 litros de água, então, 1 m³ é igual a 1000 litros.

Ainda na Figura 56, percebe-se que o G7 conseguiu estabelecer a relação de $1\,dm = 10cm$ e ainda entre o dm^3 e o litro, conforme previsto na habilidade **(EF08MA20)**: “reconhecer a relação entre um litro e um decímetro cúbico e a relação entre litro e metro cúbico, para resolver problemas de cálculo de capacidade de recipientes” (BRASIL, 2018, p. 315).

Figura 56 – Experimento e registro do G7



Fonte: A pesquisa.

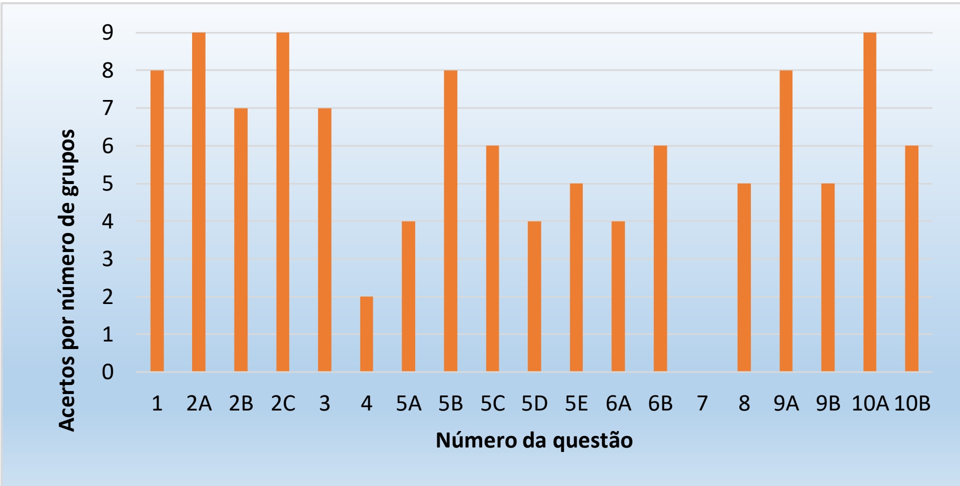
Nota-se que os alunos buscaram conhecimentos anteriores de transformações de unidades de medida para resolver esse problema. Para Nacarato e Custódio (2018, p. 23), “no desenvolvimento das tarefas, é de extrema importância a presença do professor, que organiza, problematiza, questiona e desestabiliza seus alunos, com vistas a alcançar avanços no processo de aprendizagem”.

O gráfico apresentado na Figura 57 traz o resultado da avaliação proposta ao final do desenvolvimento da primeira sequência de atividades nas quais os grupos, sem a manipulação de objetos, buscaram por meio das representações conceituais estudadas anteriormente resolver as tarefas.

No gráfico, para cada tarefa proposta tem-se a quantidade de grupos que respondeu acertadamente a respectiva questão. Percebe-se, portanto, que nas tarefas 2A, 2C e 10A todos os grupos tiveram exito na solução. Enquanto, que nos itens 4 e 7 encontra-se a maior quantidade de grupos com desempenho insatisfatório.

Destaque para o item 7 da avaliação das aprendizagens em que todos os nove grupos erraram a resolução do problema.

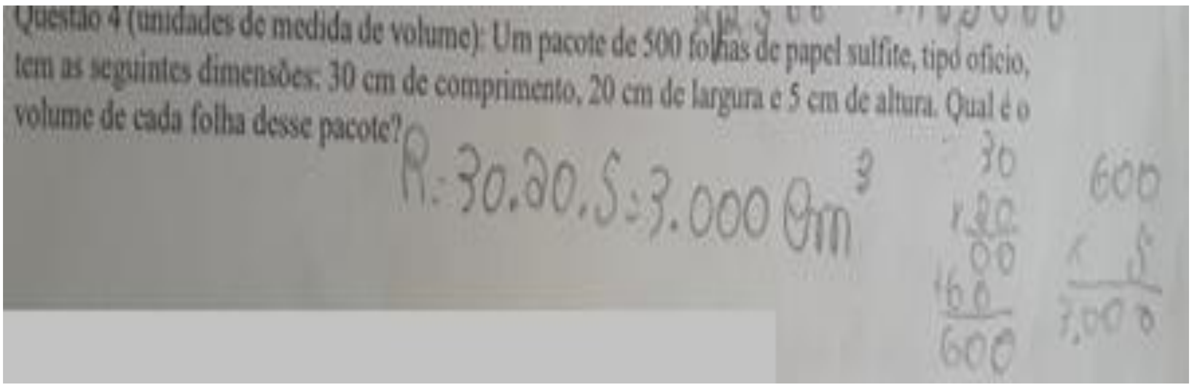
Figura 57 – Resultado da Proposta de Avaliação



Fonte: A pesquisa.

O foco da questão 4 estava no estudo do conceito de volume. Ao analisar as respostas dadas pelos grupos, notou-se que o erro residiu na compreensão do problema proposto no que diz respeito ao comando final do enunciado.

Figura 58 – Registro do G8


Questão 4 (unidades de medida de volume): Um pacote de 500 folhas de papel sulfite, tipo ofício, tem as seguintes dimensões: 30 cm de comprimento, 20 cm de largura e 5 cm de altura. Qual é o volume de cada folha desse pacote?

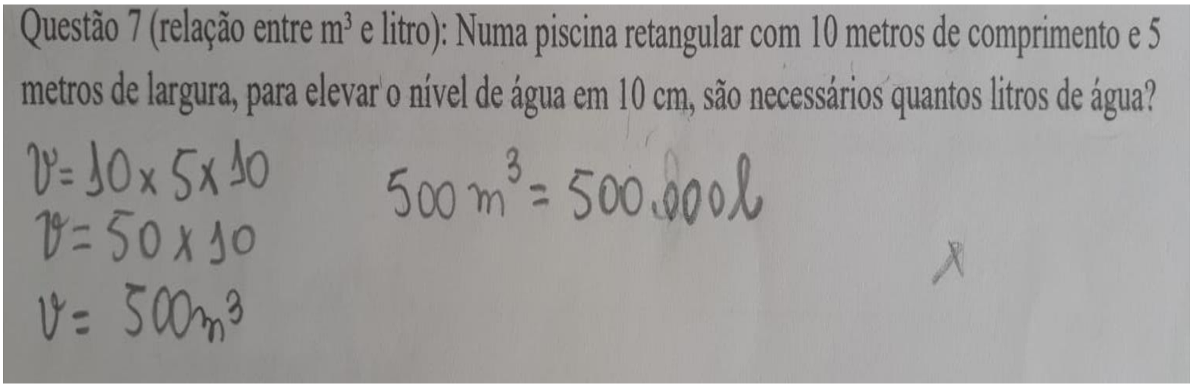
R: 30.20.5 = 3.000 cm³

Fonte: A pesquisa.

Conforme Figura 58, com registro escrito do G8, além do volume total do pacote, os alunos precisavam calcular o volume de cada folha desse pacote. Apesar desse grupo demonstrar conhecimento de estratégia para calcular o volume do pacote de papel sulfite, a resposta final do volume de cada folha não foi dada. Isso mostra que, provavelmente, houve má interpretação do problema.

Para a proposta 7 da avaliação das aprendizagens, nenhum dos grupos conseguiu responder, o que foi surpreendente para a professora pesquisadora.

Figura 59 – Registro do G2

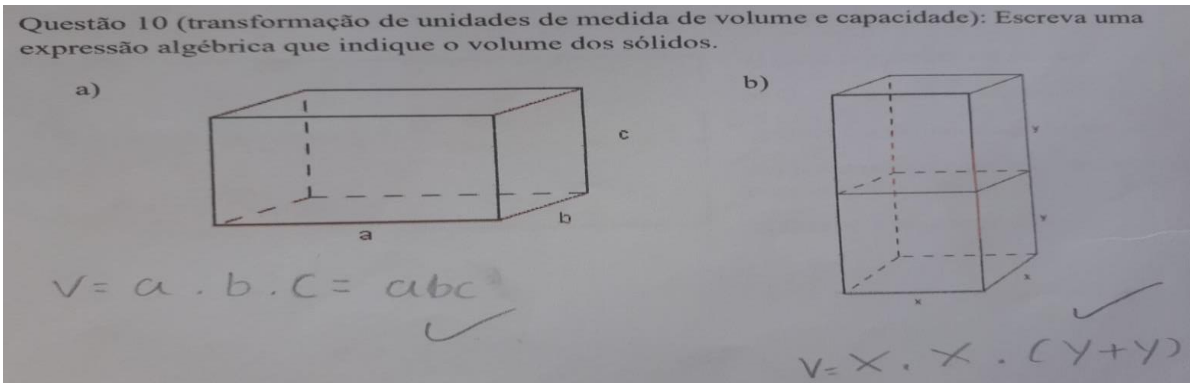


Fonte: A pesquisa.

Conforme a análise dos registros, tomou-se como exemplo a resposta do G2 mostrado na Figura 59. Observou-se que o equívoco residiu, principalmente, na não observância dos alunos sobre as diferentes unidades de medida presentes na tarefa. Portanto, os alunos não reconheceram a necessidade da conversão das medidas do comprimento e largura da piscina e altura da água para uma única unidade (metro em centímetro ou centímetro em metro), provocando como resultado $500\ m^3$ em vez de $5\ m^3$.

Por outro lado, na tarefa para a introdução do cálculo de volume de um bloco cujas medidas das arestas eram dadas por letras, conceito considerado importante para o desenvolvimento do estudo de polinômios, todos os grupos apresentaram bom resultado para os itens 10A e 10B, conforme mostrado na Figura 60.

Figura 60 – Registro do G4



Fonte: A pesquisa.

O registro do G4 acima, revela nos alunos a compreensão do uso de expressões para descrever problemas. Para a BNCC (BRASIL, 2018) nos Anos Finais do Ensino Fundamental os alunos devem, dentre outras habilidades, determinar expressões de cálculo de volumes de prismas.

7.1.2 Aplicação da sequência de atividades 2

As tarefas que compõem esta sequência visam trabalhar os conceitos de monômios e polinômios, suas operações e valor numérico de expressões algébricas.

Objetivou-se com esse conjunto de tarefas fazer o aluno calcular o valor numérico de uma expressão algébrica; reconhecer a utilização de letras para representar números e expressões algébricas; adquirir o conceito de monômios, polinômios e construir o conceito de operações de monômios e polinômios; desenvolver habilidades de cálculos com monômios e polinômios por meio da Geometria; relacionar a Álgebra dos polinômios com a Geometria envolvida nas áreas de figuras como quadrado e retângulo, com seus lados dados por variáveis.

O tempo de sua realização foi de 18 aulas.

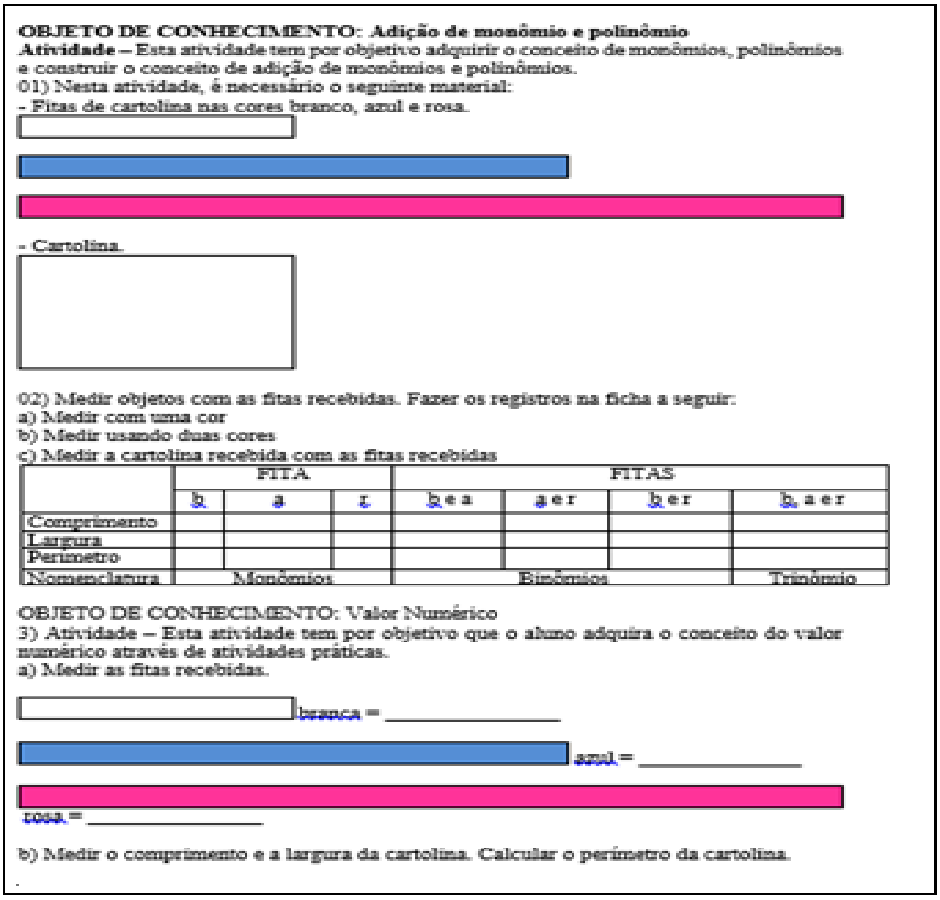
Os materiais concretos usados foram fitas coloridas de tamanhos e cores diferentes, folhas de cartolina, régua, objetos da sala, quadrados e retângulos recortados em cartolina de tamanhos diferentes e folhas de exercícios.

Na Figura 61, apresentam-se as tarefas que abrem esta sequência de atividades. Para o seu desenvolvimento foram utilizadas fitas de $5\ cm$, $10\ cm$ e $15\ cm$ de comprimento nas cores branco, azul e rosa como unidade de medida. Os alunos precisavam identificar cada unidade de medida (ou cada cor de fita) por uma letra.

Realizavam-se medições do comprimento e largura de uma cartolina com essas unidades de medida. Os grupos usavam apenas uma cor, em seguida duas cores diferentes e, finalmente, três cores diferentes e faziam anotações em tabelas, para caracterizar os conceitos de monômios, binômios e trinômios.

A expectativa era fazer o aluno compreender pela manipulação das fitas o conceito de soma de monômios semelhantes e polinômios relacionando-os com as cores iguais e diferentes. Esperava-se que os alunos conseguissem perceber que cores iguais podiam ser adicionadas e cores diferentes não e, também, reconhecessem a utilização de letras para representar números e de usar expressões algébricas para representar problemas.

Figura 61 – Exemplo de tarefas com o uso de material concreto



OBJETO DE CONHECIMENTO: Adição de monômio e polinômio

Atividade – Esta atividade tem por objetivo adquirir o conceito de monômios, polinômios e construir o conceito de adição de monômios e polinômios.

01) Nesta atividade, é necessário o seguinte material:

- Fitas de cartolina nas cores branco, azul e rosa.

- Cartolina.

02) Medir objetos com as fitas recebidas. Fazer os registros na ficha a seguir:

a) Medir com uma cor

b) Medir usando duas cores

c) Medir a cartolina recebida com as fitas recebidas

	FITA			FITAS			
	b	a	r	b e a	a e r	b e r	b, a e r
Comprimento							
Largura							
Perímetro							
Nomenclatura	Monômios			Binômios			Trinômio

OBJETO DE CONHECIMENTO: Valor Numérico

3) Atividade – Esta atividade tem por objetivo que o aluno adquira o conceito do valor numérico através de atividades práticas.

a) Medir as fitas recebidas.

branca = ______________

azul = ______________

rosa = ______________

b) Medir o comprimento e a largura da cartolina. Calcular o perímetro da cartolina.

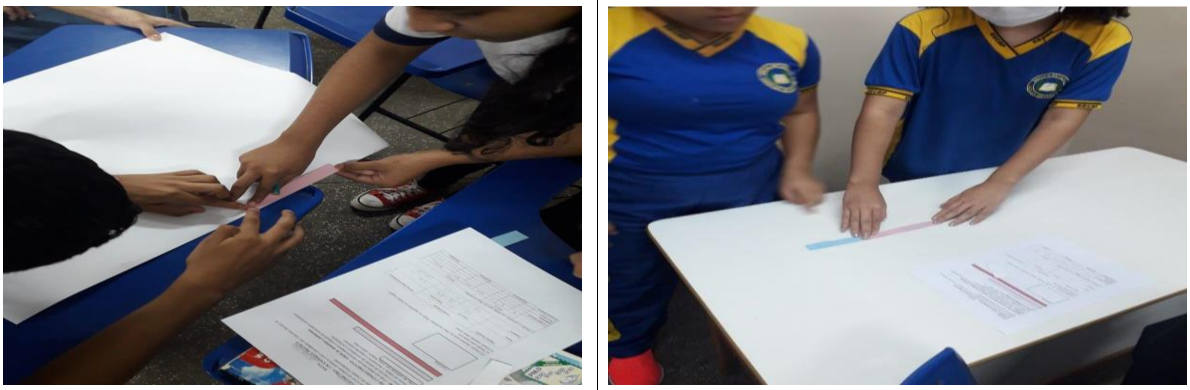
Fonte: Groenwald; Albé; Klaus; Hoffmann (1998).

Para trabalhar o conceito de valor numérico de uma expressão, os alunos mediram cada fita colorida com a régua, substituíram os valores nas expressões obtidas anteriormente e realizavam as operações necessárias para calcular o valor daquela expressão.

Concorda-se com as orientações do NCTM (2007), onde se coloca que a aprendizagem das operações com monômios e polinômios e da simplificação de expressões algébricas deve ser progressiva e recorrer a situações que permitam aos alunos compreender a manipulação simbólica envolvida, por exemplo, efetuando cálculos a partir de expressões algébricas, substituindo as letras por valores numéricos.

Os registros apresentados na Figura 62, mostram os grupos de trabalho realizando medições de objetos (cartolina, mesa, caderno) na sala de aula com as fitas recebidas.

Figura 62 – Grupos utilizando as fitas como unidades de medida



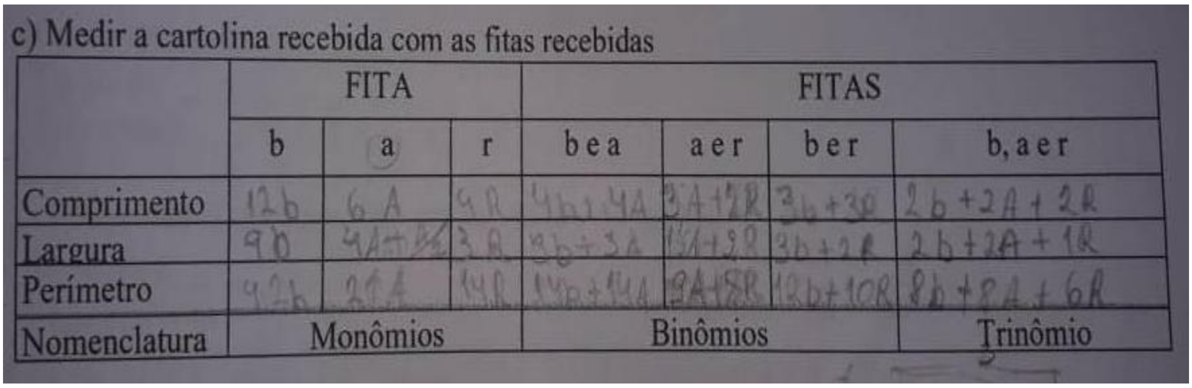
Fonte: A pesquisa

Foi possível observar que os grupos se envolveram com a atividade na busca pela melhor estratégia ao presenciar as discussões entre os alunos sobre quantas fitas de cada cor usar para medir os objetos selecionados na sala de aula.

Nesse momento, foi interessante perceber o quanto o uso do material concreto foi significativo, pois os alunos conseguiram escrever matematicamente as medidas dos objetos por meio de expressões algébricas.

Na Figura 63, apresenta-se o registro escrito do G1 das expressões algébricas referentes às medidas de comprimento, largura e perímetro de uma cartolina. Observa-se que os alunos identificaram que fitas da mesma cor deveriam ser adicionadas, reconhecendo as expressões algébricas nas formas reduzidas.

Figura 63 – Registro do G1



c) Medir a cartolina recebida com as fitas recebidas

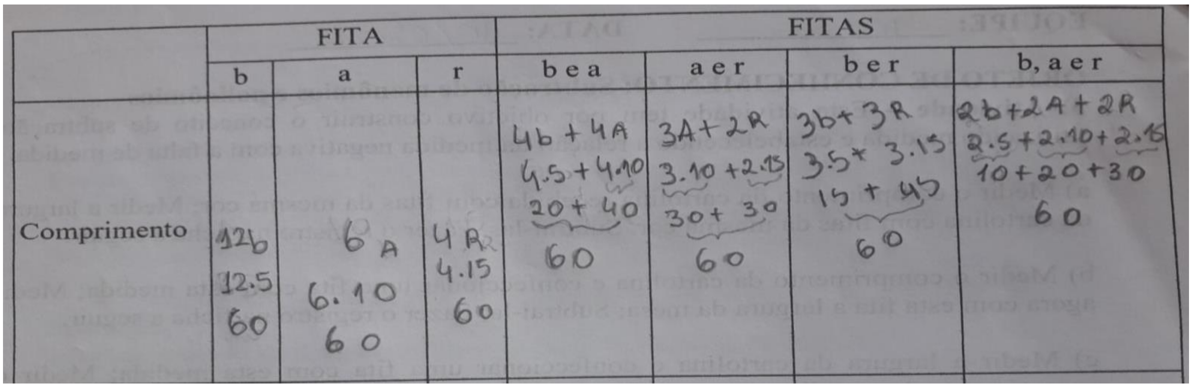
	FITA			FITAS			
	b	a	r	b e a	a e r	b e r	b, a e r
Comprimento	12b	6A	4R	4b + 4A	3A + 2R	3b + 3R	2b + 2A + 2R
Largura	9b	4A + [illegible]	3R	3b + 3A	3A + 2R	3b + 2R	2b + 2A + 1R
Perímetro	42b	21A	14R	14b + 14A	9A + 8R	12b + 10R	8b + 8A + 6R
Nomenclatura	Monômios			Binômios			Trinômio

Fonte: A pesquisa.

No registro percebe-se a presença da escrita algébrica para representar um problema. Segundo a BNCC (BRASIL, 2018, p. 307) o aluno dos Anos Finais do Ensino Fundamental deve desenvolver a habilidade **(EF07MA13)**: “compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita".

Na continuação da tarefa, os grupos mediram as fitas com a régua. Pediu-se que substituíssem os valores correspondentes a cada tamanho das fitas nas expressões obtidas anteriormente e realizassem as operações. Percebeu-se que os grupos conseguiram mobilizar conhecimentos para associar a letra à medida do tamanho da fita.

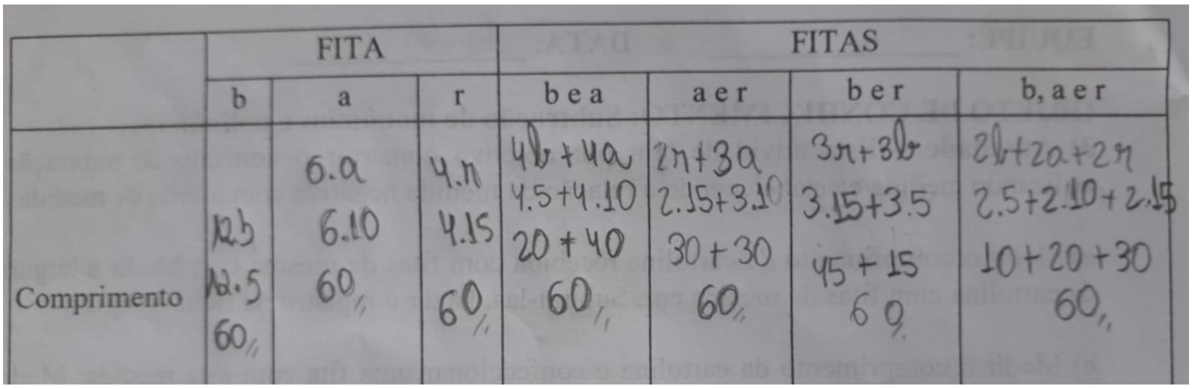
Figura 64 – Registro do G1



	FITA			FITAS			
	b	a	r	b e a	a e r	b e r	b, a e r
Comprimento	12b 12.5 60	6A 6.10 60	4R 4.15 60	4b + 4A 4.5 + 4.10 20 + 40 60	3A + 2R 3.10 + 2.15 30 + 30 60	3b + 3R 3.5 + 3.15 15 + 45 60	2b + 2A + 2R 2.5 + 2.10 + 2.15 10 + 20 + 30 60

Fonte: A pesquisa.

Figura 65 – Registro do G9



	FITA			FITAS			
	b	a	r	b e a	a e r	b e r	b, a e r
Comprimento	12b 12.5 60	6.a 6.10 60	4.r 4.15 60	4b + 4a 4.5+4.10 20 + 40 60	2r+3a 2.15+3.10 30 + 30 60	3r+3b 3.15+3.5 45 + 15 60	2b+2a+2r 2.5+2.10+2.15 10+20+30 60

Fonte: A pesquisa.

As Figuras 64 e 65 apresentam as respostas dadas por dois grupos participantes do experimento. Analisando essas produções, inferiu-se que os alunos entenderam o significado da variável, pois utilizaram uma unidade de medida conhecida para estabelecer o valor da incógnita e realizaram as operações necessárias para encontrar o valor numérico das expressões. Portanto, há indícios de que a habilidade **(EF08MA06)**: "resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações”, requerida pela BNCC (BRASIL, 2018, p. 313).

Vale ressaltar que, a princípio, alguns grupos não reconheceram o termo $12b$ como $12xb$. Nas substituições colocava-se 125 ao invés de $12x5$. Ponte, Branco e Matos (2009, p. 78) reconhecem que “a compreensão das expressões algébricas pelos alunos envolve diversos aspectos. Um primeiro aspecto é a compreensão da notação de monômio e da sua representação”. Esses tipos de situações, quando identificadas pela professora/ pesquisadora ao circular pela sala observando o trabalho dos alunos, foram exploradas e discutidas com toda a turma a fim de promover avanços na compreensão dos conceitos matemáticos e assim concluir as respostas.

Ainda os autores Ponte, Branco e Matos (2009, p. 27), trazem um exemplo que contextualiza a importância da compreensão dos termos algébricos em uma expressão:

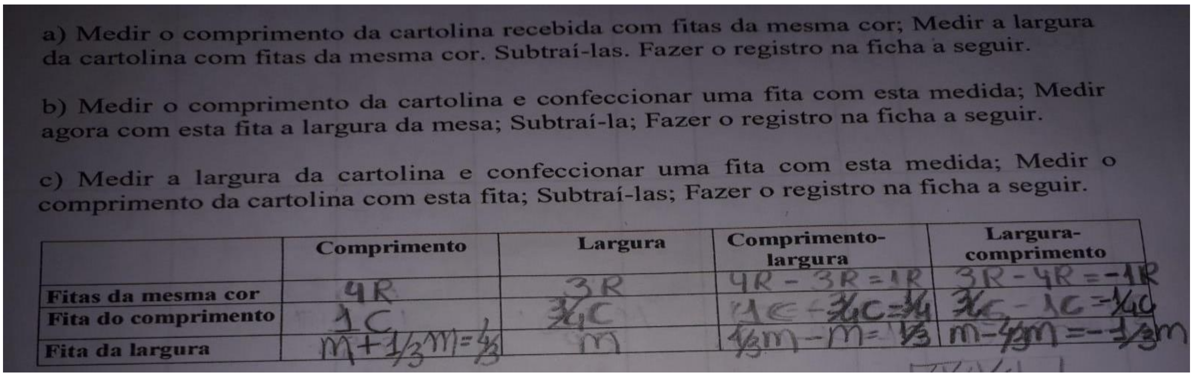
> Por exemplo, o perímetro de um retângulo pode ser representado por $P = 2c + 2l$. Os alunos devem reconhecer que o significado desta expressão não é “dois comprimentos mais duas larguras”, mas sim duas vezes um número (a medida do comprimento do retângulo) mais duas vezes outro número (a medida da largura do esmo retângulo). Note-se que a introdução de letras para designar números desconhecidos corresponde à adoção de uma escrita progressivamente mais abreviada, incluindo, por exemplo, a omissão do sinal de multiplicação.

Nesse cenário, a professora/ pesquisadora sempre buscou questionar as respostas para que o aluno pudesse refletir, posicionar-se e verbalizar seu raciocínio sobre a escrita e a linguagem algébricas. Em socializações posteriores, a utilização do sinal de multiplicação entre um número e uma letra já se tornou parte do vocabulário e da escrita dos alunos.

A tarefa exposta a seguir também teve por objetivo utilizar material concreto para construir o conceito de subtração com monômios e polinômios, utilizando uma medida qualquer e estabelecendo a relação da medida negativa com a falta de medida.

Ao circular pela sala, percebi que muitos alunos não sabiam como proceder ao utilizar as fitas para realizar a operação de subtração. Alguns diziam que teriam que cortar a fita, outros que precisavam medir com a régua. A professora/ pesquisadora fez intervenções, pois, precisou ser explicado que para fazer subtrações usando as fitas seria necessário colocar uma sobre a outra.

Figura 66 – Registro do G2



a) Medir o comprimento da cartolina recebida com fitas da mesma cor; Medir a largura da cartolina com fitas da mesma cor. Subtraí-las. Fazer o registro na ficha a seguir.

b) Medir o comprimento da cartolina e confeccionar uma fita com esta medida; Medir agora com esta fita a largura da mesa; Subtraí-la; Fazer o registro na ficha a seguir.

c) Medir a largura da cartolina e confeccionar uma fita com esta medida; Medir o comprimento da cartolina com esta fita; Subtraí-las; Fazer o registro na ficha a seguir.

	Comprimento	Largura	Comprimento-largura	Largura-comprimento
Fitas da mesma cor	4R	3R	4R - 3R = 1R	3R - 4R = -1R
Fita do comprimento	1C	3/4C	1C - 3/4C = 1/4	3/4C - 1C = -1/4C
Fita da largura	m + 1/3m = 4/3	m	4/3m - m = 1/3	m - 4/3m = -1/3m

Fonte: A pesquisa.

Ao realizarem anotações na tabela, alguns grupos tiveram dificuldades nas operações com as frações algébricas. Outros grupos de trabalho logo perceberam que ao retirar uma fita maior de uma menor, justificava-se o sinal negativo na resposta. A professora/ pesquisadora pediu que os grupos apresentassem situações para exemplificar a existência dos números negativos. *[Foi proposto uma roda de conversa para a discussão da temática]*.

O G1 expôs a ideia da movimentação em contas bancárias e o G5, buscou o exemplo dos saldos de gols de um campeonato de futebol para a utilização de números negativos. Segundo a BNCC (BRASIL, 2018, p.307) os alunos devem ser colocados em situações de aprendizagem de modo a desenvolver a habilidade (**EF07MA04)**: "resolver e elaborar problemas que envolvam operações com números inteiros".

Outra tarefa proposta, ainda com o uso de material concreto, nesse caso quadrados e retângulos de tamanhos diferentes, teve como objetivo desenvolver o conceito de multiplicação de monômios e polinômios. Além disso, também buscou possibilitar uma interpretação geométrica de expressões algébricas, Figura 67.

Figura 67 – Proposta de tarefa

4.4 Com as figuras a², b², c², d², ab, ac, ad, bc, bd e cd recortadas em cartolina.

4.5 Utilizando as figuras, componha quadriláteros diferentes.

a) Desenhar estas figuras.

b) Escrever a denominação dos lados.

c) Calcular as áreas que formam cada figura.

d) Calcular a área total do quadrilátero formado pela composição realizada.

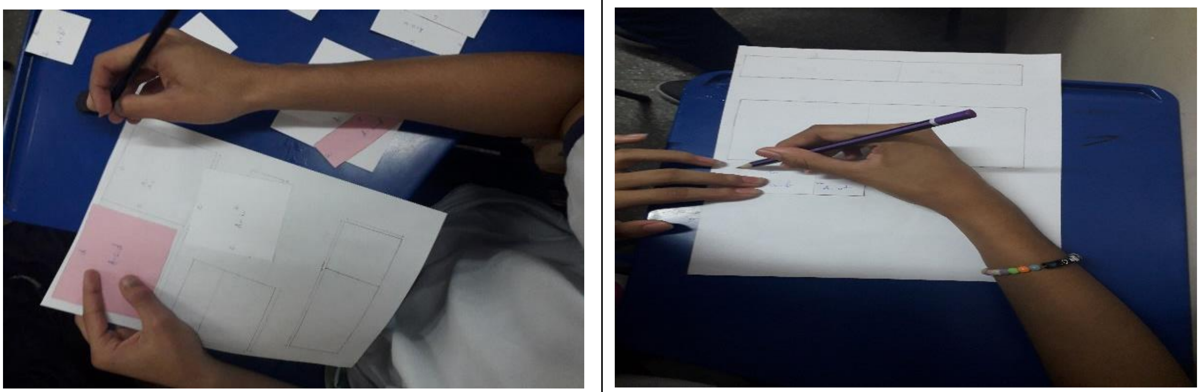
e) Escrever os polinômios que representam as áreas totais das figuras.

Fonte: A pesquisa.

Nesse tipo de tarefa, os alunos precisavam seguir uma série de procedimentos para sua resolução, de modo a suscitar conceitos como composição e decomposição de figuras geométricas, multiplicação de monômios e binômios, cálculo de área, medidas de lado e representação algébrica.

Segue na Figura 68 registro fotográfico dos alunos manipulando e representando por meio de desenhos, quadrados e retângulos para composição de novas formas geométricas.

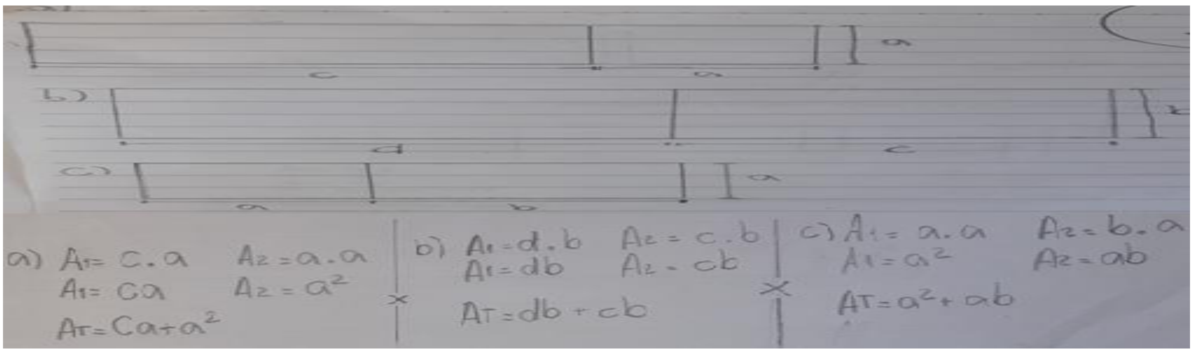
Figura 68 – Alunos manipulando material concreto



Fonte: A pesquisa.

De modo geral, percebeu-se que os alunos relacionaram a Álgebra com a Geometria, pois a maioria dos grupos representou a expressão algébrica da área constituída pela composição das figuras, conforme registro do G7, na Figura 69. Percebe-se, portanto, presente a habilidade **(EF07MA32)**: “resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas” (BRASIL, 2018, p. 311).

Figura 69 – Registro do G7



Fonte: A pesquisa.

Nessa mesma direção, para Ponte; Branco e Matos (2009, p. 27), faz-se necessário colocar o aluno em contextos com foco em “situações que possibilitem uma interpretação geométrica de expressões algébricas, promovendo a capacidade de visualização dos alunos”.

De modo geral, notou-se uma maior facilidade para a construção dos conceitos de multiplicação algébrica e de expressões algébricas. No entanto, vale ressaltar que, alguns grupos apresentaram erro na adição ao reduzir a um único termo os termos não-semelhantes.

Quando socializado com a classe, os demais grupos concordaram em não ser possível e justificaram usando a ideia das fitas de cores iguais e diferentes. Nota-se a importância do momento de socialização para a identificação de avanços e de possíveis dificuldades na resolução do problema. Nacarato e Custódio (2018, p. 202) defendem que o professor deve investir energia nesse momento, pois:

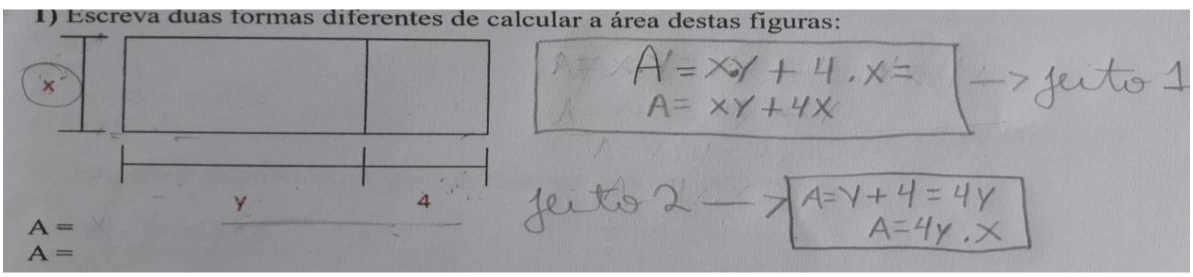
> Mesmo que os alunos se mostrem resistentes a expressar suas ideias, cabe ao professor promover e investir nesses momentos, pois, ao comunicar suas estratégias, o aluno passa pelo processo de reelaboração do pensamento e, possivelmente, de reestruturação de suas estratégias – para si e para o outro.

Acredita-se que esse tipo de intervenção foi produtiva tanto para o aluno que explicou os procedimentos adotados na resolução, quanto para o restante da turma que mobilizou conceitos já construídos acerca de operações com polinômios na busca pela resposta correta.

Ainda nesse mesmo contexto, o objetivo da atividade da Figura 70 foi fazer o aluno utilizar as propriedades das operações, além da representação algébrica de área. Os grupos precisavam escrever de dois modos diferentes a área da figura.

Verificou-se que todos os grupos escreveram, como esperado, a área do retângulo formado pela composição de polígonos como a soma das áreas das figuras menores, realizando as operações com monômios e polinômios corretamente.

Figura 70 – Registro do G3



Fonte: A pesquisa.

No entanto, com exceção de dois grupos, todos os outros apresentaram dificuldade em escrever a área da figura como o produto da medida dos seus lados, ou seja, $x(y+4)$ – em diálogo realizado com a turma ficou claro que o erro residiu por conta da necessidade da presença dos parênteses.

Entende-se a importância dessa propriedade para a construção de novos conceitos matemáticos e em concordância com Ponte, Branco e Matos (2009, p 28):

> Usando a fórmula da área do retângulo, podemos escrever a área do retângulo de dimensões a e $a+2$ como $a(a+2)$. Do mesmo modo, podemos escrever a soma das medidas das áreas do quadrado de lado a e do retângulo de dimensões a e 2 de diversas maneiras, como $aa+2a$, ou $a+2$ a(a+2), ou ainda, a^2+2a. Estas situações são também propícias à exploração de propriedades das operações, como a propriedade comutativa da adição e da multiplicação ou a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

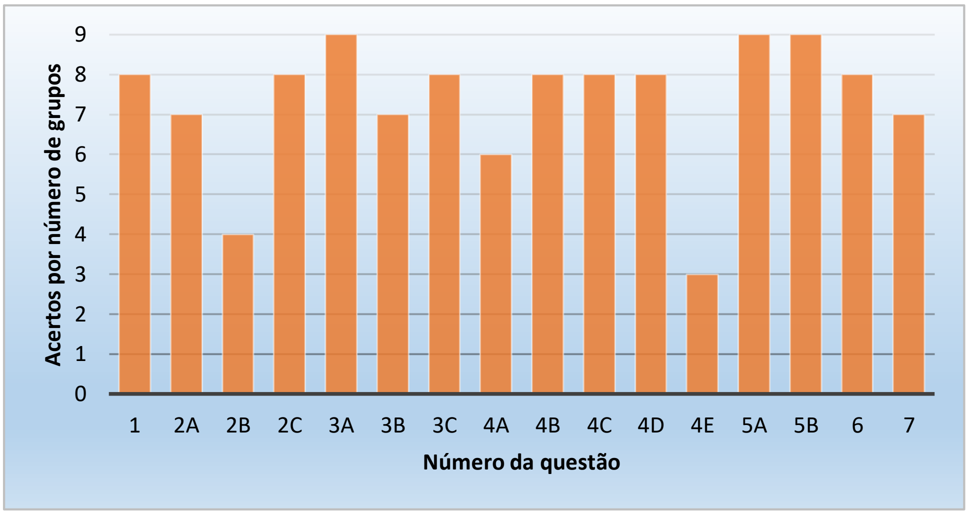
Em vista disso, apresentaram-se atividades algébricas na lousa onde o uso da propriedade do fechamento foi enfatizada, resolvendo-as com a participação de todos os alunos e dando oportunidade para que eles apresentassem as dúvidas para esclarecimentos.

O foco da sequência de atividade foi o uso de material manipulativo como suporte para criar situações de aprendizagem significativas para o aluno. Desse modo, esperava-se que posteriormente os alunos pudessem mobilizar conhecimentos para resolver problemas adotando estratégias e argumentação sem o apoio dessa ferramenta.

Conforme apontam Hiebert et al. (1997 *apud* NACARATO; CUSTÓDIO, 2018), as tarefas propostas pelo professor devem despertar o interesse dos alunos, mobilizá-los a pensar, ao invés de seguir apenas regras e modelos. Enquanto Moyer (2001 *apud* KAIBER; GROENWALD, 2022, p. 22) traz as teorias de Skemp (1987) que apoiam a crença de que as experiências iniciais e interações com objetos físicos formaram a base dos alunos para posterior aprendizagem no nível abstrato.

Nessa direção, na Figura 71 apresenta-se o gráfico que indica o resultado da avaliação proposta ao final do desenvolvimento da segunda sequência de atividades nas quais os grupos, sem a manipulação de objetos, buscaram mobilizar os conceitos estudados anteriormente para resolver as tarefas. No gráfico para cada tarefa proposta tem-se a quantidade de grupos que respondeu acertadamente à questão.

Figura 71 – Resultado da Proposta de Avaliação



Fonte: A pesquisa.

Ao analisar o gráfico apresentado na figura acima afere-se que, de modo geral, todos os nove grupos de trabalho acertaram a maioria das questões presentes na avaliação das aprendizagens.

Destacam-se as questões $3a$, $5a$ e $5b$ em que todos os grupos apresentaram excelente desempenho. As referidas tarefas tratavam de representação algébrica para o cálculo de área, expressão simplificada para o cálculo de perímetro e valor numérico de expressão algébrica, respectivamente.

O alto índice de acerto nessa avaliação pode ser explicado pela realização do conjunto de tarefas da sequência de atividades ter sido trabalhado de maneira significativa, ou seja, as representações simbólicas de conceitos matemáticos por meio da manipulação do material concreto. Essa ideia corrobora com os estudos de Mancera e Basurto (2016). Esses autores estudam a integração de materiais manipulativos (Blocos algébricos de Dienes) na prática educativa tanto para buscar sair da rotina tradicional da sala de aula de Matemática como para criar ambientes de construção de conhecimentos. Segundo esses pesquisadores a intenção do estudo é:

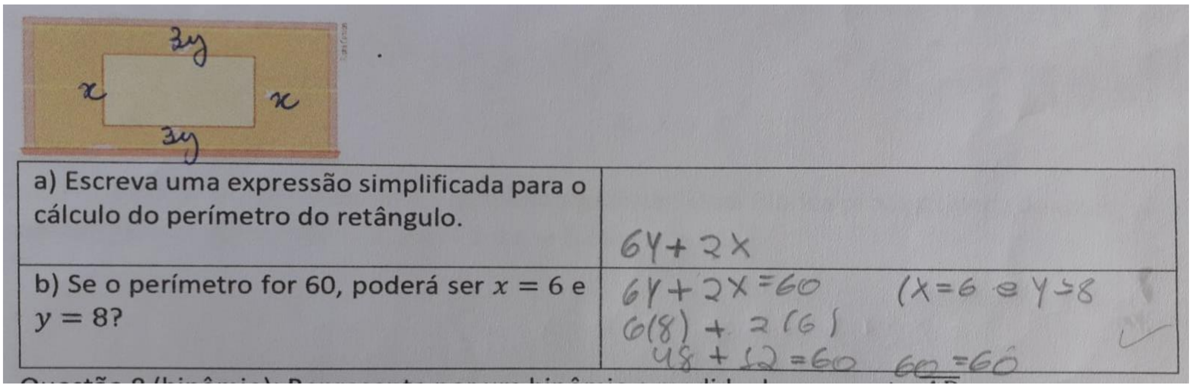
> Propor um caminho para modificar o ensino tradicional a partir de pressupostos básicos de correntes construtivistas e tentando oferecer contextos onde os alunos, com um único tipo de material manipulável, possam dar sentido às relações, conceitos e procedimentos de Aritmética ou Álgebra (MANCERA; BASURTO, 2016, p. 15).

Para eles, os materiais manipulativos quando usado com intencionalidade podem beneficiar o trabalho docente.

Por outro lado, percebe-se que as questões as quais os grupos apresentaram maior dificuldade foram os itens $2b$ e $4e$. Estas tarefas estavam relacionadas com o conceito de cálculo do valor numérico e representação algébrica do volume de um bloco. Para exemplificar o desempenho dos grupos apresentam-se a seguir registros de respostas tanto para o melhor desempenho quanto para a tarefa que os grupos apresentaram maior dúvida.

Nas Figuras 72 e 73, têm-se os registros de dois grupos para as questões $5a$ e $5b$, com desempenho considerado satisfatório.

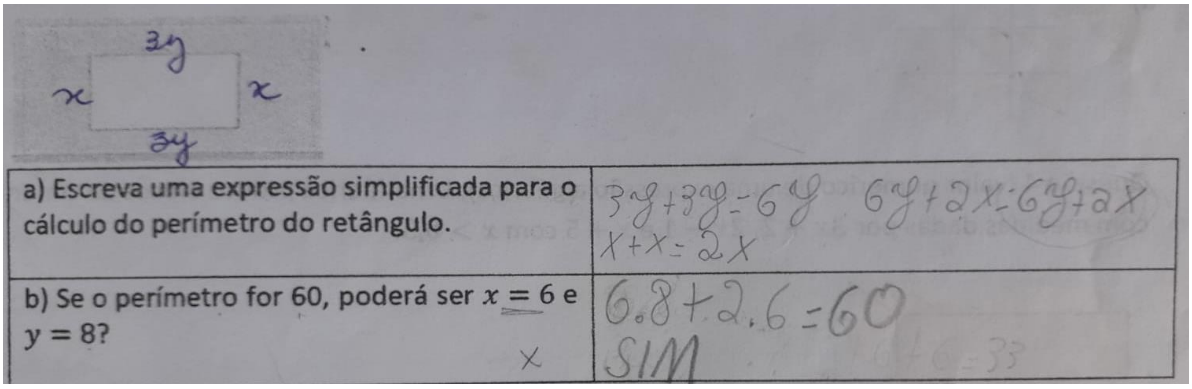
Figura 72 – Registro do G5 dos itens a e b



a) Escreva uma expressão simplificada para o cálculo do perímetro do retângulo.	6Y+2X
b) Se o perímetro for 60, poderá ser $x = 6$ e $y = 8$?	6Y+2X=60 (X=6 e Y=8 6(8) + 2(6) 48 + 12 = 60 60=60

Fonte: A pesquisa.

Figura 73 – Registro do G8 dos itens a e b



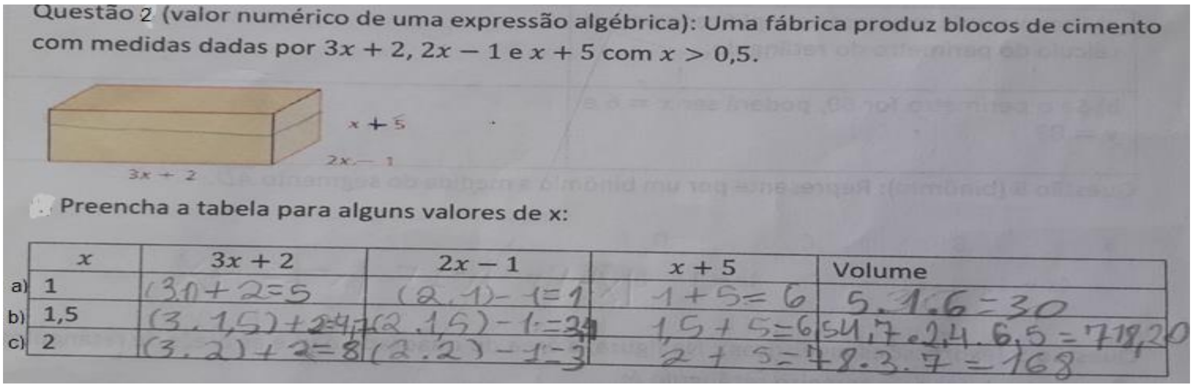
a) Escreva uma expressão simplificada para o cálculo do perímetro do retângulo.	3y+3y=6y 6y+2x=6y+2x X+X=2X
b) Se o perímetro for 60, poderá ser $x = 6$ e $y = 8$?	6.8+2.6=60 SIM

Fonte: A pesquisa.

Com base na observação dos registros, nota-se que todos os grupos (traz-se a resolução dos G5 e G8) acertaram na simplificação de monômios semelhantes e também a forma irredutível de escrever o perímetro do retângulo como $6y + 2x$, evidenciando a compreensão do conceito de adição de monômios semelhantes. Também conseguiram chegar ao valor numérico do perímetro do polígono, adotando estratégias diferentes e respondendo exatamente o que a questão pedia. A construção desse conceito corrobora com a habilidade **(EF08MA06)**: “resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações”, apresentada na BNCC (BRASIL, 2018, p. 311).

A Figura 74 apresenta uma tarefa com baixo desempenho na avaliação formativa, a qual apenas 4 grupos desenvolveram conforme solicitado. A imagem abaixo trata-se do registro da resolução da tarefa do G4, mas pode ser considerada um reflexo dos demais grupos.

Figura 74 – Registro do G4



Questão 2 (valor numérico de uma expressão algébrica): Uma fábrica produz blocos de cimento com medidas dadas por $3x+2$, $2x-1$ e $x+5$ com $x > 0,5$.

Preencha a tabela para alguns valores de x:

	x	$3x+2$	$2x-1$	$x+5$	Volume
a)	1	(3.1)+2=5	(2.1)-1=1	1+5=6	5.1.6=30
b)	1,5	(3.1,5)+2=4,7	(2.1,5)-1=24	1,5+5=6	54,7.2,4.6,5=718,20
c)	2	(3.2)+2=8	(2.2)-1=3	2+5=7	8.3.7=168

Fonte: A pesquisa.

A partir da análise do resultado da questão 2 item B dos registros escritos, observou-se que apesar dos grupos realizarem a substituição da letra pelo número de forma correta, o erro consistiu na realização da operação com números decimais, mais especificamente a multiplicação, habilidade **(EF06MA11)** prevista para ser desenvolvida no 6º ano do Ensino Fundamental:

> Resolver e elaborar problemas com números racionais positivos na representação decimal, envolvendo as quatro operações fundamentais e a potenciação, por meio de estratégias diversas, utilizando estimativas e arredondamentos para verificar a razoabilidade de respostas, com e sem uso de calculadora (BRASIL, 2018, p. 301).

Percebeu-se em alguns momentos a dificuldade dos alunos em resolver operações básicas de Matemática.

Pode-se dizer, que no desenvolvimento dessa sequência de atividades a realização do conjunto de tarefas reforçou nos alunos a ideia do pensar algebricamente, pois se notou tanto nas vivências em sala de aula quanto na leitura dos registros escritos, indícios de aprendizagens de conceitos algébricos, como cálculo numérico e algébrico, linguagem algébrica, escrita algébrica e manipulação de expressões algébricas por meio de operações de monômios e polinômios, apoiada pelo cálculo de perímetros e áreas.

Nessa sequência, os grupos de trabalho participaram de maneira mais ativa, pois já estavam ambientados com as propostas de tarefas com a utilização de materiais concretos, houve também maior colaboração, interesse e diálogo entre os componentes das equipes. Como as atividades estavam encadeadas entre si, em alguns momentos os alunos buscaram anotações feitas no caderno para relembrar conceitos estudados anteriormente.

As tarefas deram oportunidade aos alunos de adotarem seus próprios procedimentos matemáticos e melhores estratégias na resolução dos problemas. Na análise dos registros escritos, percebeu-se que eles conseguiram calcular o valor numérico de uma expressão algébrica que envolvia até três variáveis e resolver problemas que envolviam expressões, por cálculo de perímetro e área de figuras (BRASIL, 2018).

7.1.3 Aplicação da sequência de atividades 3

A terceira sequência de atividades composta por tarefas para o estudo do objeto conhecimento produtos notáveis. O objetivo desta sequência era levar o aluno a generalizar o modelo matemático dos produtos notáveis, utilizando materiais concretos e relacionando a Álgebra com a Geometria.

As tarefas foram desenvolvidas em 23 aulas. Os materiais manipuláveis usados como apoio da sequência foram: formas geométricas recortadas em cartolina, régua, tesoura e folhas de exercícios.

Enquanto professora de alunos dos Anos Finais do Ensino Fundamental, sempre adotei a memorização para trabalhar com o objeto de conhecimento produtos notáveis. Por isso, a expectativa em relação à aplicação desta sequência de atividades estava muito alta. Sem dúvida esta foi a sequência que mais exigiu dedicação e aprofundamento em relação ao desenvolvimento das tarefas com o uso de material concreto, na prática de sala de aula. Após esse breve relato, seguem as análises.

A sequência de atividades colocou o aluno em contato com três produtos notáveis, são eles: o quadrado da soma de dois termos, o quadrado da diferença de dois termos e o produto da soma pela diferença de dois termos.

A generalização do modelo matemático dos produtos notáveis foi possível através da manipulação de quadrados e retângulos construídos em cartolina, partindo de tarefas mais simples, passando para tarefas que levassem os alunos a perceber padrões e, por fim, chegava-se em tarefas mais complexas de modo a fazer o aluno desenvolver algebricamente o modelo do produto notável proposto. O que vai de encontro com a visão de Ponte; Branco e Matos (2009, p. 81), para quem "antes de poderem compreender uma justificação geral, os alunos devem trabalhar com casos simples. E, no caso dos alunos terem muita dificuldade, o professor pode reverter para um exemplo puramente numérico".

O primeiro produto notável estudado foi o quadrado da soma de dois termos. Optou-se, primeiramente, trabalhar com a manipulação de formas geométricas cujas medidas dos lados eram dados por números, para posteriormente, partir para a manipulação de figuras geométricas cujos lados eram letras e, assim, chegar a generalização, conforme se verifica no conjunto de tarefas na Figura 75. Como pode-se observar, esse bloco de tarefas que abria a sequência de atividades foi dividida em três momentos.

Figura 75 – Exemplo de tarefas com o uso de material concreto

1) Material:
- Um quadrado de lado 10 cm;
- Um quadrado de lado 6 cm;
- Um quadrado de lado 4 cm;
- Dois retângulos de lados 4 cm e 6 cm.

a) Com as figuras construídas, forme uma igualdade com o quadrado de lado 10 cm e as outras figuras. Desenhe a igualdade que se forma.

b) com as figuras formadas podemos escrever.

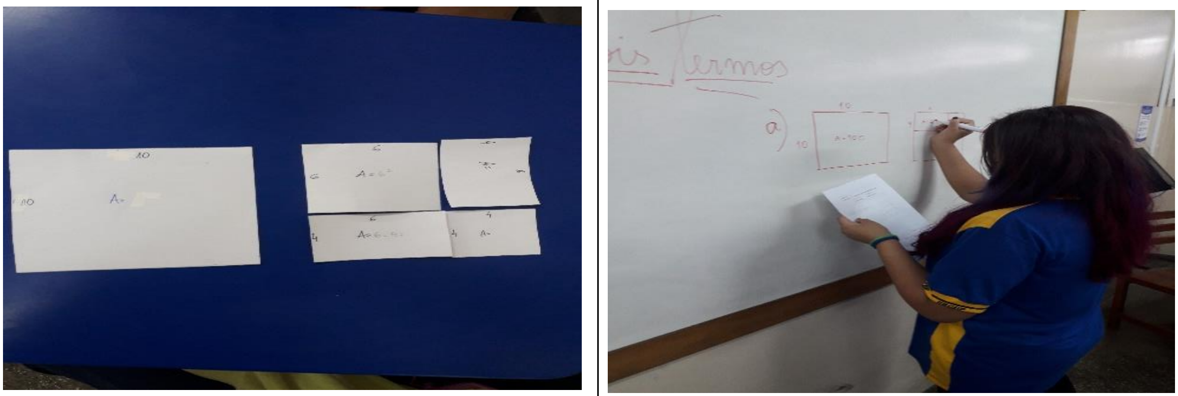
2) Desenhe os quadrados e escreva em linguagem matemática a área total das figuras na forma de parcelas:
a) $(7 + 3)^2 =$
b) $(8 + 2)^2 =$
c) $(9 + 1)^2 =$

3) Material:
- um quadrado de cartolina de lado a.
- um quadrado de cartolina de lado b.
- dois retângulos de lados a e b.
Instrução:
a) Com essas figuras, construa um quadrado.
b) desenhe o quadrado.
c) Determine a área total do quadrado e a medida dos lados.
d) escreva a área total na forma de fatores e na forma de parcelas.

Fonte: Groenwald; Albé; Klaus; Hoffmann (1998).

No primeiro momento utilizou-se a representação geométrica, onde os alunos foram estimulados a calcular a área de cada forma geométrica, desenhar e escrever matematicamente a igualdade formada por um quadrado de lado $10\,cm$ e dois quadrados de lados $6\,cm$ e $4\,cm$ e dois retângulos de lados 4 por $6\,cm$. Acredita-se que "a interpretação geométrica, a partir da determinação da área do quadrado na sua totalidade ou a partir de uma dada decomposição, pode ajudar a promover a compreensão da equivalência entre as duas expressões" (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p. 81).

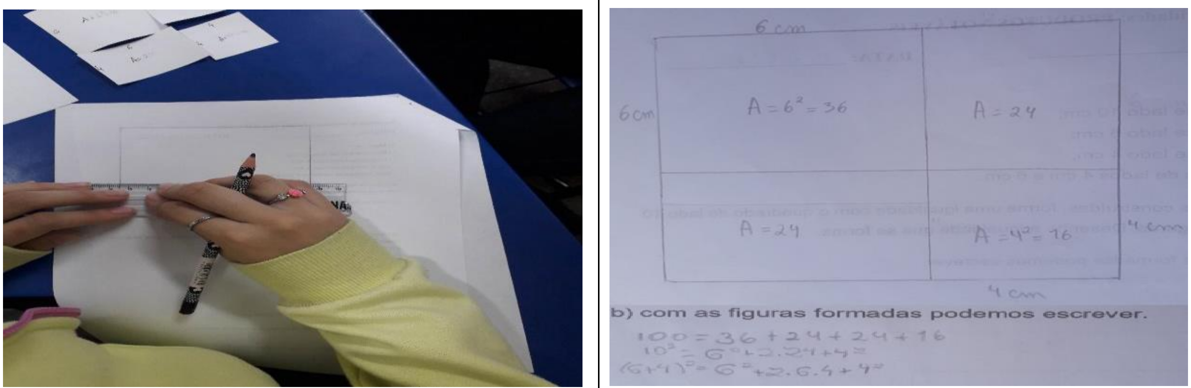
Figura 76 – Demonstração geométrica do produto notável



Fonte: A pesquisa.

Pôde-se observar que a partir da demonstração geométrica com a manipulação de figuras construídas em cartolina, os grupos apresentaram certa facilidade para desenhar a igualdade formada entre as figuras, visualizar e escrever a expressão numérica calculando a área do quadrilátero maior como a somatória das áreas das figuras menores, conforme pode-se observar na resposta do G1, na Figura 77.

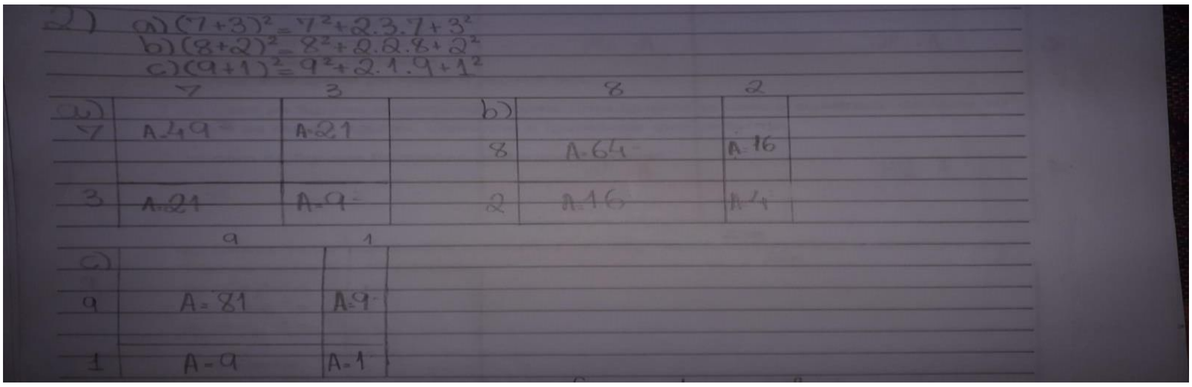
Figura 77 – Registro do G1



Fonte: A pesquisa.

Em um segundo momento, na busca pelo reconhecimento de padrões, apresentaram-se exercícios para que os grupos pudessem consolidar a estratégia usada anteriormente. Os grupos foram convidados a representar por meio de desenho os quadrados, como, por exemplo $(7+3)^2$, e, em seguida, escrever em linguagem matemática a área total das figuras na forma de parcelas.

Figura 78 – Registro do G7



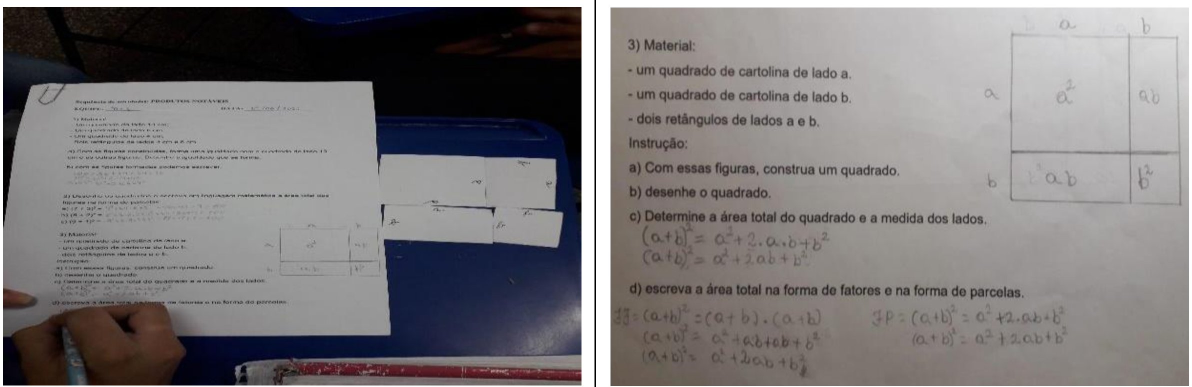
Fonte: A pesquisa.

De modo geral, percebeu-se, por meio da escrita dos alunos, que eles conseguiram reconhecer e explorar os padrões numéricos e geométricos propostos na tarefa. As orientações da BNCC (BRASIL, 2018) para o Ensino Básico ressaltam a importância do desenvolvimento de habilidades como identificar regularidades e padrões em diferentes contextos, com compreensão dos procedimentos utilizados, tendo como finalidade desenvolver o Pensamento Algébrico nos alunos.

No terceiro momento, propôs-se a demonstração do conceito o quadrado da soma de dois termos por meio da utilização de figuras cujos lados eram dados por letras. Os grupos precisavam representar a área do quadrado de lado $a + b$ usando um polinômio na forma de fatores e na forma de parcelas.

Diante das generalizações observadas nos registros escritos, como o apresentado na Figura 79, percebeu-se que os grupos atingiram o objetivo da sequência de tarefas. Conseguiram utilizar estratégias e testar conjecturas explorando a situação-problema proposta.

Figura 79 – Registro da generalização do G1 para o quadrado da soma de dois termos



Fonte: A pesquisa.

Além disso, construíram a representação do conceito por meio da manipulação dos material e descreveram matematicamente o modelo, conforme previsto no desenvolvimento da habilidade **(EF09MA09)**: “compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau” (BRASIL, 2018, p. 317).

Na socialização, a professora/ pesquisadora fez questionamentos aos alunos na seguinte direção:

> *“Qual a medida do lado do quadrado formado pela composição das figuras? Vocês conseguem escrever a área de cada figura que compõe o quadrado grande? Qual a expressão algébrica que representa a área do quadrado grande? É possível agrupar termos semelhantes?”.*

Embora os grupos de estudo tenham respondido às indagações com compreensão sobre o significado das letras no contexto estudado, o G2 apresentou a seguinte dúvida:

> *G2: como apareceu* $2ab$ *na expressão?*
> *[A dúvida residia não no cálculo da área do retângulo, mas na multiplicação por* 2*. A professora/ pesquisadora sugeriu nova observação do quadrado formado pelas figuras geométricas confeccionadas em cartolina e sobre a quantidade de cada figura presente na composição. Além disso, foi relembrado o agrupamento possível de termos semelhantes associando às fitas de mesma cor].*

Com a visualização de cada termo algébrico representado por uma figura geométrica, infere-se que foi possível para o aluno medir os lados e a área do quadrado maior, desenhar o quadrado formado pela composição de quadriláteros menores e, ainda, usar a linguagem matemática e escrever o cálculo da área na forma de fatores e na forma de parcelas, de modo a chegar na generalização $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. “No Pensamento Algébrico dá-se atenção não só aos objetos, mas principalmente às relações existentes entre eles, representando e raciocinando sobre essas relações tanto quanto possível de modo geral e abstrato” (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p. 10).

Portanto, as tarefas propostas nesses três momentos, relacionadas entre si, coincidem com o que sugere Ponte, Branco e Matos (2009, p. 81) sobre o ensino desse produto notável:

> A equivalência de $(x + a)^2$ e $x^2 + 2xa + a^2$ (quadrado de um binómio) deve ser mostrada tanto algébrica como geometricamente. No entanto, antes de poderem compreender uma justificação geral, os alunos devem trabalhar com casos simples. No caso dos alunos terem muita dificuldade em seguir estes passos, o professor pode reverter para um exemplo puramente numérico.

Percebeu-se, que o estudo do produto notável pelo cálculo da área do quadrado representado geometricamente com o uso de material concreto e manipulável, ajudou a melhorar a compreensão do aluno sobre a origem e o significado de cada termo do polinômio resultante. Os alunos foram capazes de resolver problemas, desenvolvendo com mais compreensão as principais fórmulas para cálculo de produtos notáveis.

Nesse sentido, a busca por padrões, regularidades e generalização, foram construções realizadas pelos grupos participantes do experimento e que são elementos característicos do desenvolvimento do Pensamento Algébrico em alunos de todo o Ensino Fundamental. Para Kaput (2008 *apud* PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p. 9):

> O Pensamento Algébrico é algo que se manifesta quando, através de conjecturas e argumentos, se estabelecem generalizações sobre dados e relações matemáticas, expressas através de linguagens cada vez mais formais. Este processo de generalização pode ocorrer com base na Aritmética, na Geometria, em situações de modelação matemática e, em última instância, em qualquer conceito matemático lecionado desde os anos de escolaridade.

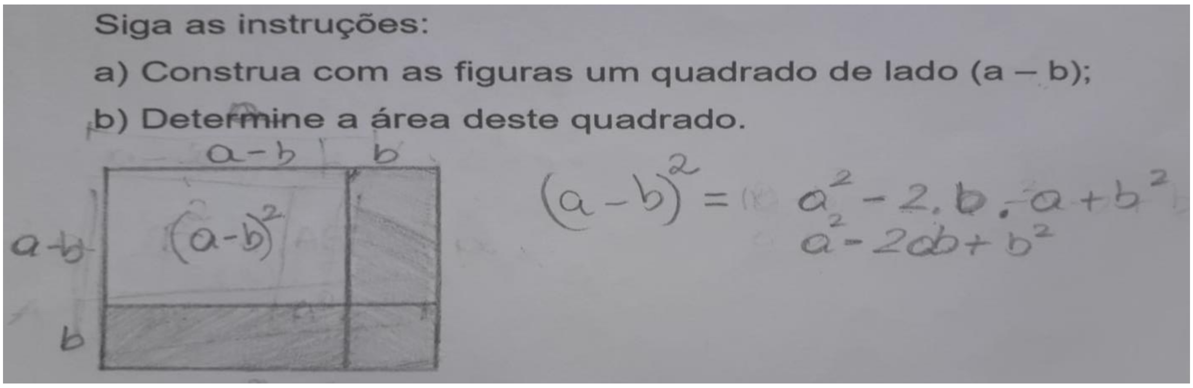
Muitos são os estudos que recomendam colocar o educando ao longo de todo o Ensino Fundamental em situações de aprendizagens que concorram para o desenvolvimento de um pensar algébrico com foco na construção de habilidades como generalizar.

De maneira análoga conduziu-se o conjunto de tarefas para o estudo do conceito do produto notável $(a - b)^2$. Devido ao estudo do quadrado da soma de dois termos, a realização das atividades com a manipulação do material aconteceu com mais naturalidade para o estudo dos demais produtos notáveis.

Com o material concreto em mãos, os alunos puderam representar geometricamente a área de um quadrado de lado $(a - b)$. Com um quadrado de lado a, e outro de lado $(a - b)$ e, ainda, dois retângulos de lados a e b, foi feita a sobreposição das formas geométricas conforme representação presente nas Figuras

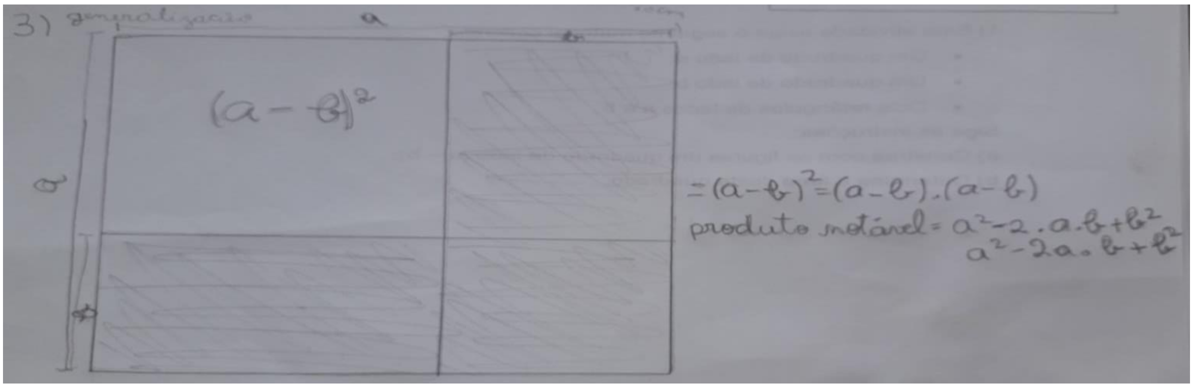
80 e 81.

Figura 80 – Registro da generalização do quadrado da diferença de dois termos do G6



Fonte: A pesquisa.

Figura 81 – Registro da generalização do quadrado da diferença de dois termos do G3



Fonte: A pesquisa.

Os alunos fizeram a sobreposição a partir do quadrado maior de lado a e área a^2 e o quadrado de lado $(a - b)$ no canto superior esquerdo. Após, acrescentaram os dois retângulos de área ab (optaram em sombrear), um abaixo e outro na lateral direita. Os alunos, a princípio, entenderam a área do quadrado de lado $(a - b)$ como sendo a diferença entre a área do quadrado grande e as áreas dos dois retângulos, ou seja, $(a - b)^2 = a^2 - 2ab$.

No entanto, somente com a mediação da professora/pesquisadora os grupos perceberam existirem dois quadrados de lado b sobrepostos, portanto seria necessário somar novamente sua área b^2, de modo que $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

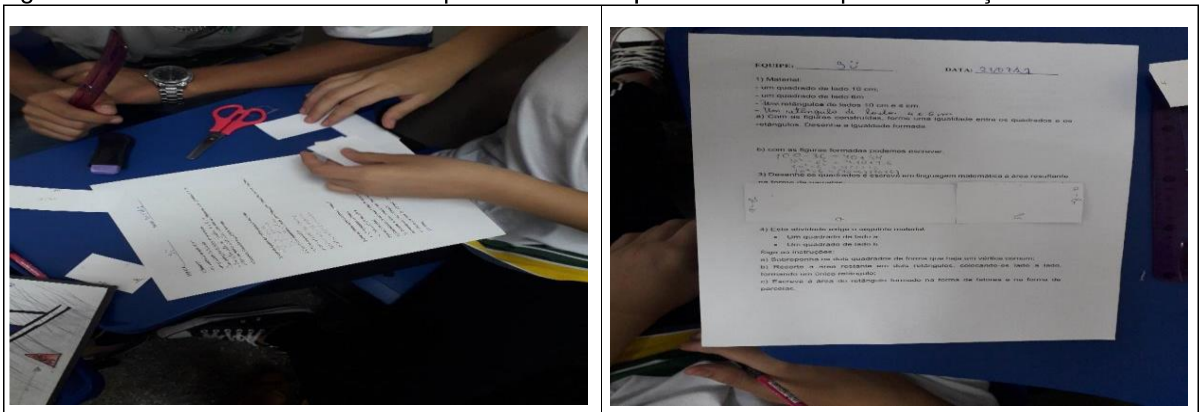
Vale relatar que houve mudança na escolha do material concreto para o trabalho com esse conceito. Por não se sentir segura na execução da tarefa, a professora/ pesquisadora recorreu a uma estratégia diferente da planejada a princípio.

Conforme o NCTM (2015), “todos os educandos deveriam ter acesso a recursos didáticos, porém o seu uso eficaz requer um planejamento cuidadoso e isto exige que os professores tenham um desenvolvimento profissional adequado”.

Seguindo os mesmos encaminhamentos das atividades anteriores, para a fixação do objeto de conhecimento produto da soma pela diferença de dois termos, novamente propôs-se o uso do material concreto, onde os alunos receberam dois quadrados, um de lado a e outro de lado b.

Iniciou-se a visualização geométrica a partir do quadrado de lado a. Em seguida, coloca-se sobre ele o quadrado de lado b, de forma que houvesse um vértice em comum. Pediu-se que os participantes recortassem a área restante em dois retângulos, colocando-os lado a lado, formando um único retângulo. Conforme Figura 82.

Figura 82 – Uso do material concreto para o conceito produto da soma pela diferença de dois termos

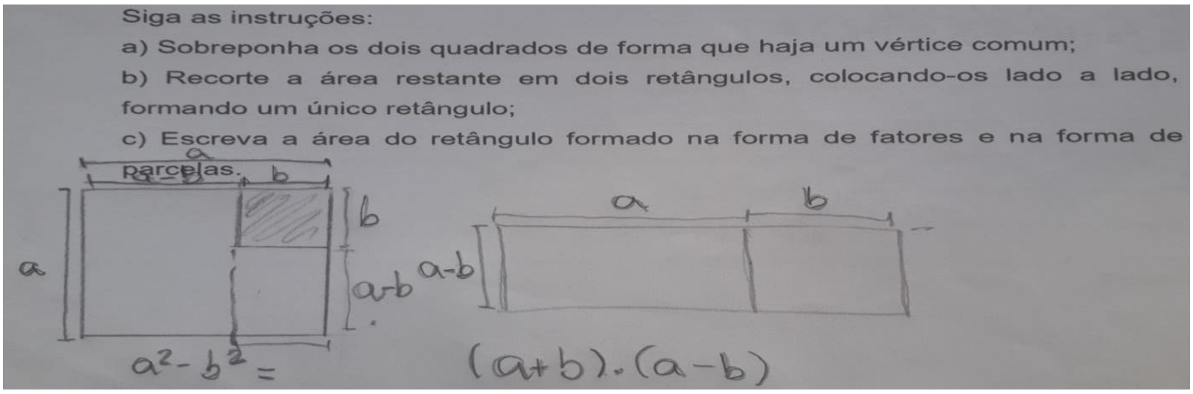


Fonte: A pesquisa.

Assim, de acordo com os procedimentos realizados, os alunos chegaram a igualdade $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$. Portanto, atenderam as expectativas da proposta da tarefa, na qual buscava uma compreensão conceitual por meio representação com a manipulação do material concreto e também dos procedimentos adotados se chegar a igualdade e equivalência entre as expressões visualizadas, como pode-se observar no registro do G7, representado na Figura 83.

Verifica-se, na produção do G7, que houve compreensão da equivalência entre expressões, assim como, que essa equivalência funciona nos dois sentidos. Outro ponto importante foi o estudo da fatoração das expressões polinomiais, em que os alunos aplicaram com facilidade os princípios aditivos e multiplicativos.

Figura 83 – Registro da generalização produto da soma pela diferença de dois termos do G7



Fonte: A pesquisa.

Para entender melhor os conceitos de produtos notáveis, foram introduzidas mais tarefas para que os alunos pudessem converter informações algébricas para a linguagem geométrica e vice-versa. Ponte, Branco e Matos (2009, p. 77) reconhecem a importância da noção de equivalência entre expressões como fundamental para a aprendizagem da Álgebra, de modo que:

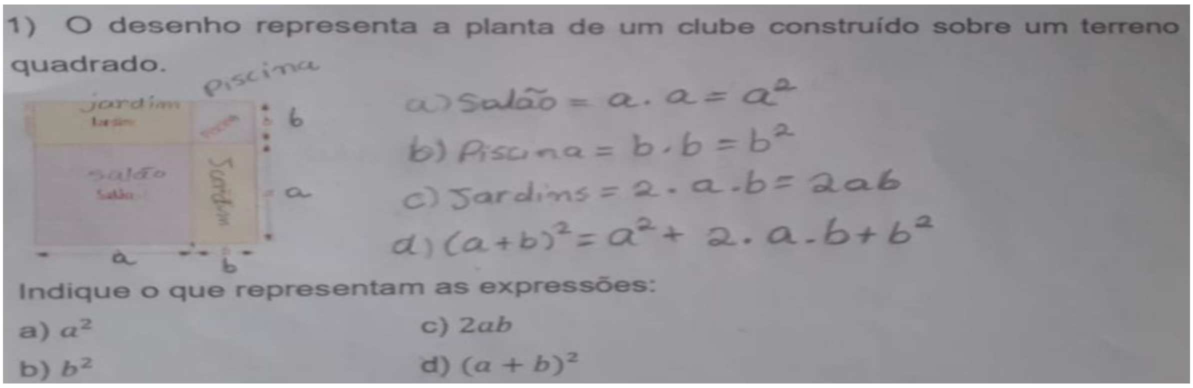
> No trabalho com expressões algébricas os alunos reconheçam a noção de equivalência de expressões – duas expressões são equivalentes se assumem o mesmo valor para todo o valor que se atribua à variável (ou variáveis que nelas figuram). A equivalência de expressões algébricas tem de ser justificada pelas propriedades das operações – comutativa, associativa, distributiva, existência de elemento neutro.

Mais familiarizados com as possibilidades de representações de um mesmo objeto, percebeu-se que os grupos de estudos desenvolveram os conceitos com mais domínio e clareza. Para Kaiber e Groenwald (2022, p. 26), é fundamental a conexão do recurso utilizado com o conceito matemático a ser apreendido pelo aluno:

> O uso de materiais manipuláveis pelos professores deve estar interligado à estrutura conceitual da Matemática, com questões de conhecimento de conteúdo matemático e a capacidade de desenvolver tais conteúdos se utilizando de uma ampla variedade de representações que levem à compreensão de novas ideias.

No experimento, observou-se que os alunos, em sua grande maioria, atribuíram significado correto ao uso dos materiais concretos e, posteriormente, ao deixar de utilizar esse recurso, mobilizaram conhecimentos para a resolução de novos problemas matemáticos. Como podemos verificar nos exemplos de atividades respondidas pelos alunos, Figuras 84 e 85.

Figura 84 – Registro da resolução de problemas do G4


1) O desenho representa a planta de um clube construído sobre um terreno quadrado.

Indique o que representam as expressões:

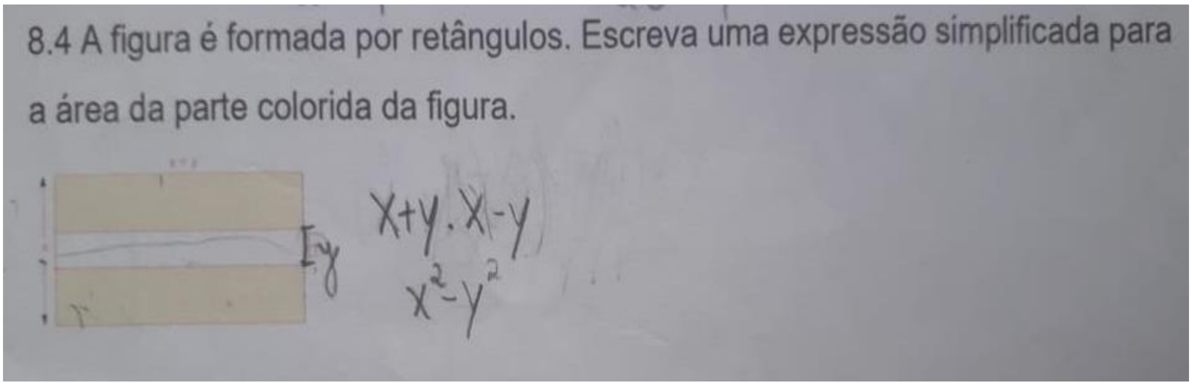
a) a^2 c) $2ab$

b) b^2 d) $(a + b)^2$

Fonte: A pesquisa.

Na Figura 84, sem o uso de materiais, o G4 percebeu a representação algébrica de cada parte da figura associando a um espaço do clube e reconheceu a relação entre a área total do clube e a expressão que representa a área total do quadrado, ou seja, $(a + b)^2$.

Figura 85 – Registro da resolução de problemas dos G9


8.4 A figura é formada por retângulos. Escreva uma expressão simplificada para a área da parte colorida da figura.

Fonte: A pesquisa.

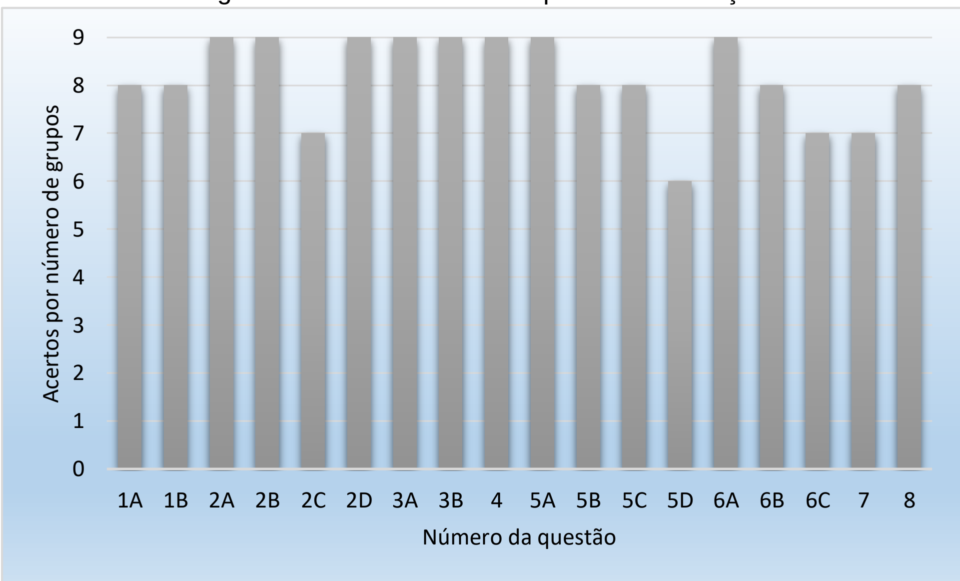
Na resolução apresentada pelo G9, o erro percebido estava relacionado à ausência de fechamento para soma de termos algébricos. Apesar da ausência dos parenteses, percebe-se que o grupo obteve a equivalência corretamente.

Nesse momento, havia a socialização dos registros dos alunos tanto verbalmente quanto no quadro para tirar possíveis dúvidas, levantar hipóteses e sanar equívocos. “A socialização das hipóteses criadas é, também, outro momento de extrema relevância, pois é nele que ocorre a interação entre os diversos grupos e entre as ideias desenvolvidas” (NACARATO; CUSTÓDIO, 2018, p. 23).

Nesse sentido, entende-se que foi alcançado pelos alunos o objetivo proposto nesta etapa da Sequência Didática ao desenvolverem elementos importantes na constituição dos conceitos da Álgebra, sobretudo, dos conceitos que envolviam produtos notáveis, como generalização a partir de cálculo de área, além de perceber a equivalência entre expressões. Para Kaput (1999), a generalização é um dos cinco aspectos que caracterizam a formação do Pensamento Algébrico: a generalização e formalização de padrões e restrições.

O gráfico da Figura 86 apresenta uma visão geral do desempenho dos grupos na avaliação das aprendizagens.

Figura 86 – Resultado da Proposta de Avaliação



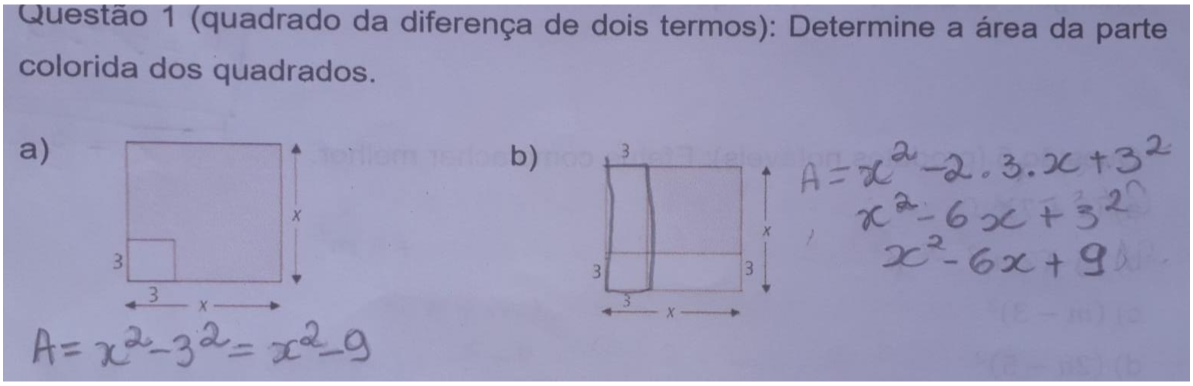
Fonte: a pesquisa.

A partir da análise dos dados foi possível perceber que os grupos apresentaram resultado satisfatório na avaliação das aprendizagens. Considerando 18 questões na totalidade, destaca-se que os 9 grupos responderam 8 questões de forma correta e 6 grupos erraram apenas uma questão. Apresentou-se a tarefa $5d$ como a de menor rendimento.

Assim, considerando os dados obtidos, discute-se nesse momento, o desempenho dos grupos em uma perspectiva das estratégias adotadas e os erros cometidos.

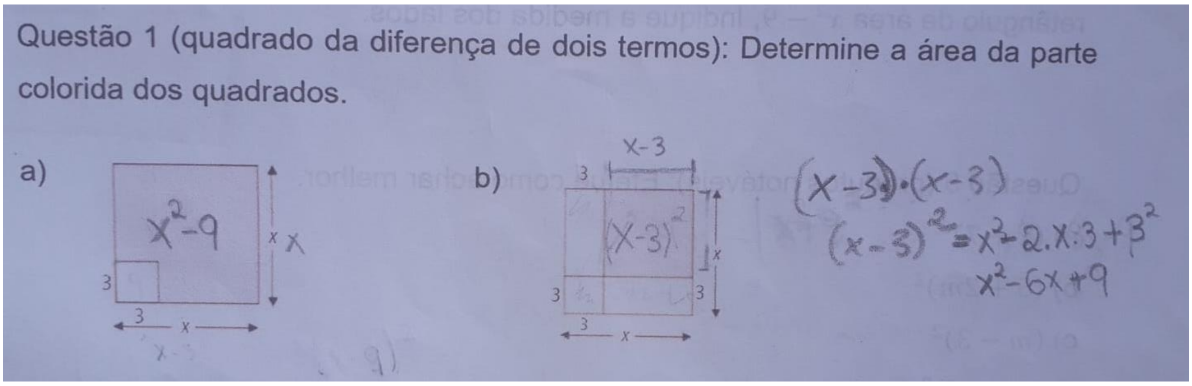
As tarefas $1a$ e $1b$, as quais 8 grupos acertaram, tratam dos produtos notáveis, o produto da soma pela diferença de dois termos e o quadrado da diferença de dois termos, respectivamente.

Figura 87 – Registro do G2



Fonte: A pesquisa.

Figura 88 – Registro do G9

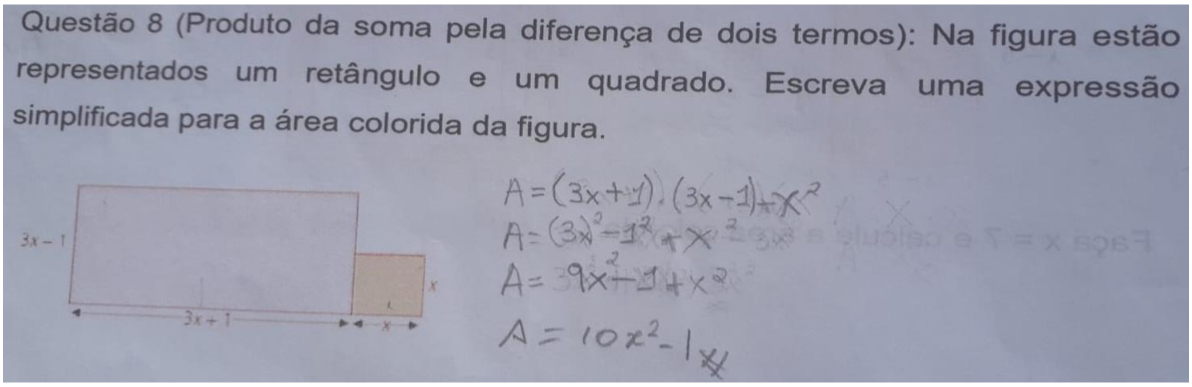


Fonte: A pesquisa.

Verifica-se, nas resoluções dos grupos 2 e 9, que os mesmos representam algebricamente a área da parte colorida das figuras, reforçando a ideia do desenvolvimento de estruturas do Pensamento da Álgebra. As questões apresentadas são sobre os conceitos de produtos notáveis e, a partir das respostas indicadas pelos grupos, conjectura-se que, para sua resolução, foi considerado a relação entre o material concreto usado em atividades anteriores e o conceito estudado, caracterizando a compreensão da conexão entre a Álgebra e a Geometria.

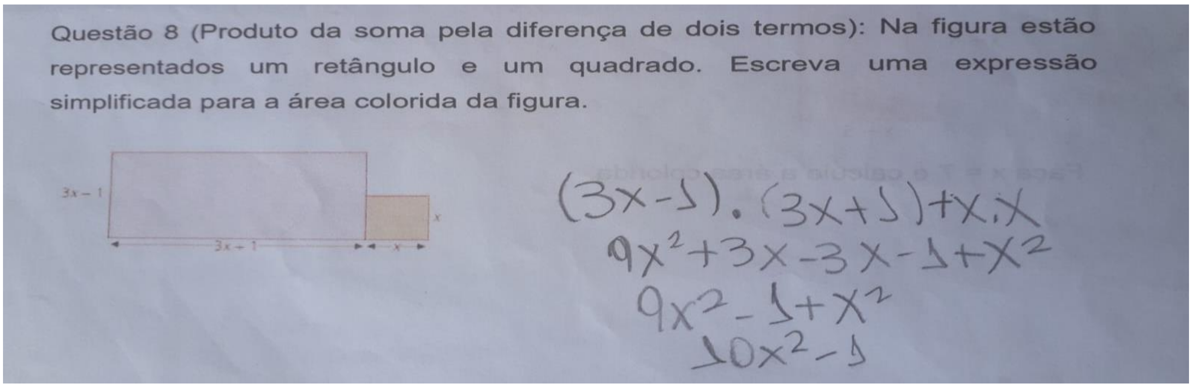
Igualmente com ótimo desempenho, apresenta-se a análise da resolução do problema referente a tarefa 8, tomando como exemplo o G1 que se apropriou do conceito do produto notável o produto da soma pela diferença de dois termos e o G7 que utilizou estratégia diferente para se chegar a resposta, mas sem comprometer a resolução do problema.

Figura 89 – Registro do G1



Fonte: A pesquisa.

Figura 90 – Registro do G9



Fonte: A pesquisa.

Para esta questão, a maioria dos grupos usou explicitamente a generalização do produto notável, como o exemplo de resposta da Figura 89, chegando de forma mais rápida à expressão simplificada para a área colorida da figura. No entanto, dois grupos, como podemos observar no registro escrito do G9, indicaram como resposta o uso da propriedade distributiva, utilizando as operações corretamente, respeitando as regras dos sinais e, chegando assim, a uma igualdade correta, conforme pode-se observar no registro do referido grupo na Figura 90.

Pesquisadores como Groenwald (2020), recomendam desenvolver os conceitos de Álgebra com Geometria, trabalhando os produtos notáveis com material concreto que facilita a visualização e, consequentemente, facilita a fatoração dos produtos notáveis, terá facilidade para fatorar uma equação do 2º grau. A BNCC indica que no 9º ano do Ensino Fundamenta, é recomendável o aluno desenvolver a habilidade **(EF09MA09)**, a saber: “compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau” (BRASIL, 2018, p. 319).

Diante dos registros e das observações da professora/ pesquisadora, identificaram-se indícios de aprendizagens nos alunos relacionados aos conceitos de produtos notáveis, conforme proposto na BNCC. O estudo desse objeto de conhecimento contribuiu para a construção de habilidades como generalizar, fazer cálculos algébricos, manipular expressões, observar padrões e desenvolver linguagem e escrita algébrica, elementos característicos de quem pensa algebricamente, como recomenda Kaput (2008).

7.1.4 Aplicação da sequência de atividades 4

O quarto conjunto de tarefas foi organizado com foco na aprendizagem do objeto de conhecimento: resolução de equações polinomiais do 2º grau por meio de fatorações. A finalidade está em apresentar a fatoração por meio de representações geométricas com o foco no desenvolvimento das habilidades de fatorar por fator comum e por agrupamento. Dessa maneira, há ampliação nos conceitos trabalhados anteriormente para a compreensão de fatoração de polinômios.

As tarefas tiveram duração de 15 aulas.

O material de apoio à aprendizagem dos alunos constituiu-se de: formas geométricas recortadas em cartolina, régua e atividades impressas.

Prioritariamente, como nas sequências anteriores, as tarefas com o apoio de material concreto abriram a quarta e última sequência de atividades do experimento. Dessa maneira, como mostra a Figura 91, optou-se em trazer um conjunto de tarefas com foco na Fatoração de polinômios com procedimentos a partir da manipulação de formas geométricas (quadrados e retângulos).

Com a manipulação das peças se podia construir outro retângulo de maneira a encontrar a forma não fatorada e a forma fatorada da área total da figura. A discussão devia estar em torno de como achar esta forma fatorada.

Figura 91 – Exemplo de tarefa com o uso de material concreto

Objeto de conhecimento: FATORAÇÃO

O objetivo das atividades é desenvolver nos alunos a capacidade de fatorar por fator comum e por agrupamento.

MATERIAL:

Figuras em cartolina a^2, ab, ad, b^2, bc.

Objeto de conhecimento: Fatoração por fator comum

1. Siga as instruções:

a) Monte um retângulo com as figuras a^2, ab e ad,

b) Determine a área deste retângulo

c) Determine as medidas dos dois lados do retângulo formado.

d) Desenhe a figura formada e anote as medidas.

2. Siga as instruções:

a) Monte um retângulo com duas figuras, b^2 e bc.

b) Determine a área deste retângulo formado.

c) Determine as medidas dos dois lados deste retângulo.

d) Desenhe a figura formada e anote as medidas.

3. Transforme as expressões a seguir em produtos de fatores:

a) $3x^2 + 3x =$

b) $6a + 6b =$

c) $5x + 20 =$

d) $y^2 + 6y + 4ay =$

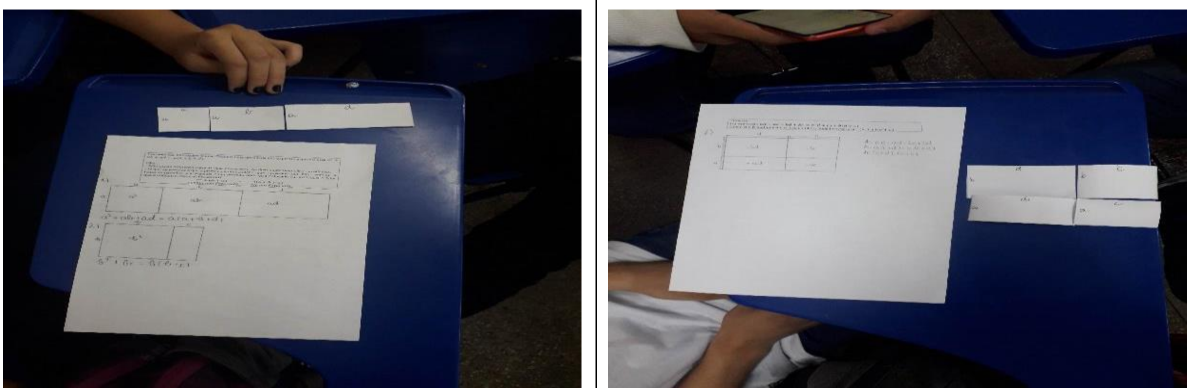
e) $18x^2 + 24xy =$

f) $16a^2 + 12ab + 28ac =$

Fonte: Groenwald; Albé; Klaus; Hoffmann (1998).

Na tarefa prática, com o uso de figuras recortadas em cartolina, foi solicitado aos alunos montar e desenhar um retângulo com as figuras planas selecionadas. Após, determinar a área e a medida dos lados do retângulo formado. Como pode-se observar na execução da tarefa por um dos grupos, conforme Figura 92.

Figura 92 – Material concreto para o estudo de fatoração de polinômios



Fonte: A pesquisa.

Para escrever algebricamente a representação geométrica da área do retângulo formado pelas figuras, os alunos perceberam que poderiam calcular de duas maneiras, conforme Figuras 93 e 94 e descrição de parte do diálogo. A professora instigou e os alunos se expressaram da seguinte maneira:

PP: Como podemos calcular a área do retângulo formado?
G8: Professora, nós podemos somar a área do quadrado mais a área dos dois retângulos.[os alunos apontavam para o retângulo formado].
G5: Eu também posso multiplicar o lado a + b + d pelo lado a para calcular a área total.
PP: Sim, as duas maneiras estão corretas.
[Foi explicado pela professora/ pesquisadora que a expressão em forma de produto expressa a fatoração por termo comum do polinômio que representa a área do retângulo e que se dá ao se colocar o termo comum a todos os monômios da expressão em evidência].

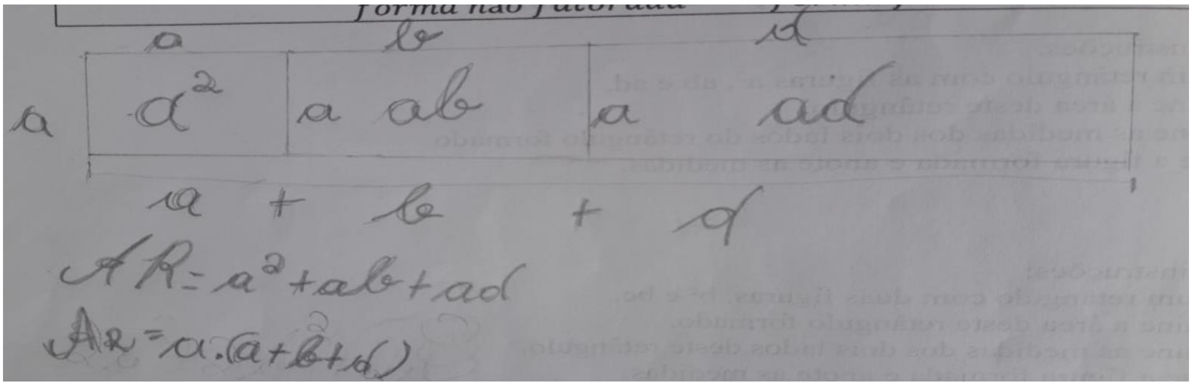
Os registros selecionados nas Figuras 93 e 94, são provenientes dos G8 e G5, respectivamente. No entanto, evidenciou-se, que todos os grupos adotaram procedimentos adequados na realização dessas tarefas com o apoio do material concreto.

No registro do G8, os alunos escreveram a área como uma adição, percebendo que se tratava de monômios não semelhantes, portanto, não adicionando as parcelas. Dessa forma, representaram a forma não fatorada do retângulo formado, ou seja, $a^2 + ad + ab$.

Por outro lado, os alunos identificaram o fator comum a todas as parcelas, colocando-o em evidência. Na expressão $a^2 + ad + ab$, o fator a é comum aos três termos. Assim, o grupo chegou corretamente a igualdade $a^2 + ad + ab = a(a + d + b)$.

Na Figura 93, registro do G5, percebe-se que se chegou a forma não fatorada da área total - $ad + ac + bd + bc$ - com o cálculo das áreas formadas pela composição das figuras que formaram o retângulo, usando as multiplicações de polinômios de forma correta.

Figura 93 – Registro do G8



Fonte: A pesquisa.

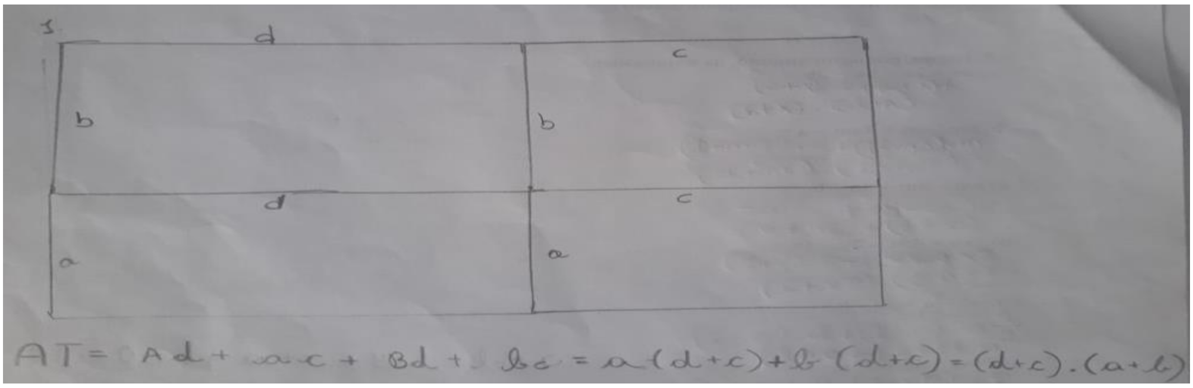
Houve a seguinte discussão entre a professora/ pesquisadora e os alunos:

G5: Como posso fatorar se não existe um termo comum a todas as parcelas?

PP: Na verdade, o que haverá é uma dupla fatoração. Pois o fator a é comum a dois termos e o fator b comum a outros dois termos.

A partir da mediação os grupos desenvolveram procedimentos adequados, chegando a seguinte igualdade entre as expressões: $ad + ac + bd + bc = (a + b)(d + c)$. Assim, na expressão $ad + ac$, colocou-se o fator a comum aos dois termos, escrevendo $a(d + c)$ e, na expressão $bd + bc$, notou-se o fator b comum, $b(d + c)$. Finalmente, perceberam que $(d + c)$ era o fator comum e a e b multiplicavam o mesmo fator, então, $(a + b)(d + c)$.

Figura 94 – Registro do G5



Fonte: A pesquisa.

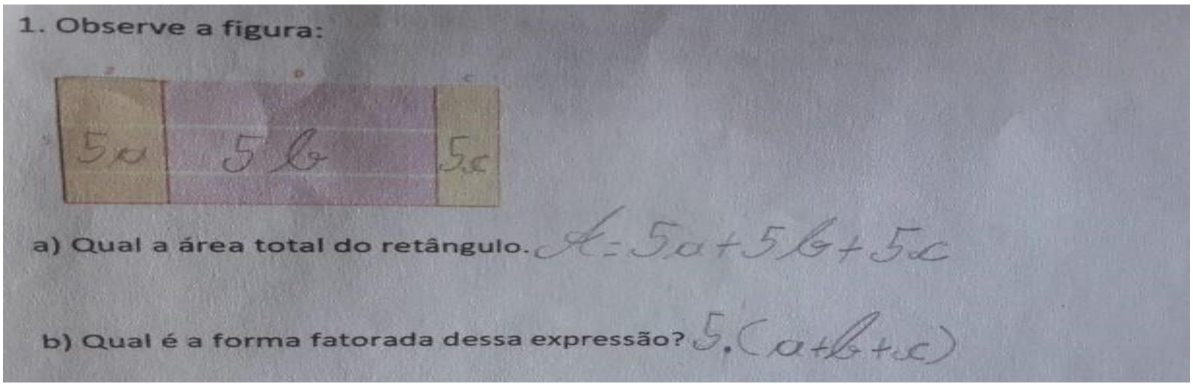
De maneira geral, na análise dos registros escritos dos grupos, percebeu-se que os alunos apresentaram melhor compreensão sobre a representação geométrica, escreveram matematicamente as expressões para representar lados de polígonos e quando necessário utilizaram parênteses e realizaram operações monomiais e polinomiais com maior assertividade.

No mais, pelas justificativas mostardas nas Figuras 93 e 94, o sinal de igual fez sentido para os alunos, pois pela análise dos registros houve a percepção de que a igualdade representava a equivalência entre as três expressões $ad + ac + bd + bc = a(d + c) + b(d + c) = (d + c)(a + b)$.

Na visão de Kieran (1992 *apud* PONTE; BRANCO; MATOS, 2009), o Pensamento Algébrico é marcado pela atenção às estruturas e às relações que estão na sua base. O sinal de igual, numa perspectiva estrutural, remete para uma relação de equivalência. Daí o cuidado do professor ao abordar o símbolo de igualdade como a equivalência entre expressões que proporciona o estabelecimento de relações algébricas importantes.

Foram exploradas outras situações análogas envolvendo fatoração. Os registros seguintes são provenientes de tarefas sem o apoio do material concreto. O registro, na Figura 95, mostra como o G8 realizou a sua justificativa para a tarefa que solicitava a expressão para representar a área total do retângulo e a sua forma fatorada.

Figura 95 – Registro do G8

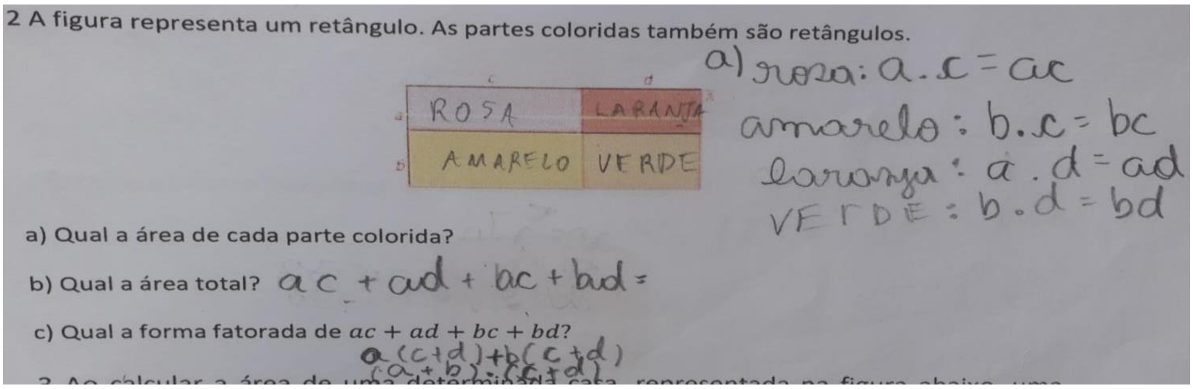


Fonte: A pesquisa.

Assim como o G8, todos os outros grupos, formularam suas resoluções, buscando escrever a área como as parcelas que representam cada área da composição do retângulo e, em seguida, colocar o termo comum a essas parcelas em evidência, ganhando assim a forma fatorada da expressão, ou seja, $5(a + b + c)$.

A tarefa a seguir, conforme Figura 96, solicitava a área de cada parte colorida, a área total do retângulo e a forma fatorada dessa área. A exploração desse tipo de situação permitiu aos alunos reforçar o conceito de fatoração pelo cálculo de áreas.

Figura 96 – Registro do G3



Fonte: A pesquisa.

Os grupos resolveram com facilidade. Tomamos como exemplo o G3, o qual estabeleceu no item a as áreas que representavam cada parte colorida, em seguida o grupo formulou uma expressão para a área total da figura, percebendo que não existia a possibilidade de simplificação e, finalmente, no item c chegou-se a forma fatorada, por dupla fatoração.

Nesse sentido, percebeu-se que os grupos trabalharam bem o significado de monômios e polinômios presente nas expressões de área, utilizando a linguagem algébrica. Conseguiram visualizar e relacionar as expressões equivalentes e já não questionavam o uso das letras.

Durante a realização de tarefas para o estudo desses conceitos houve questionamento na seguinte direção:

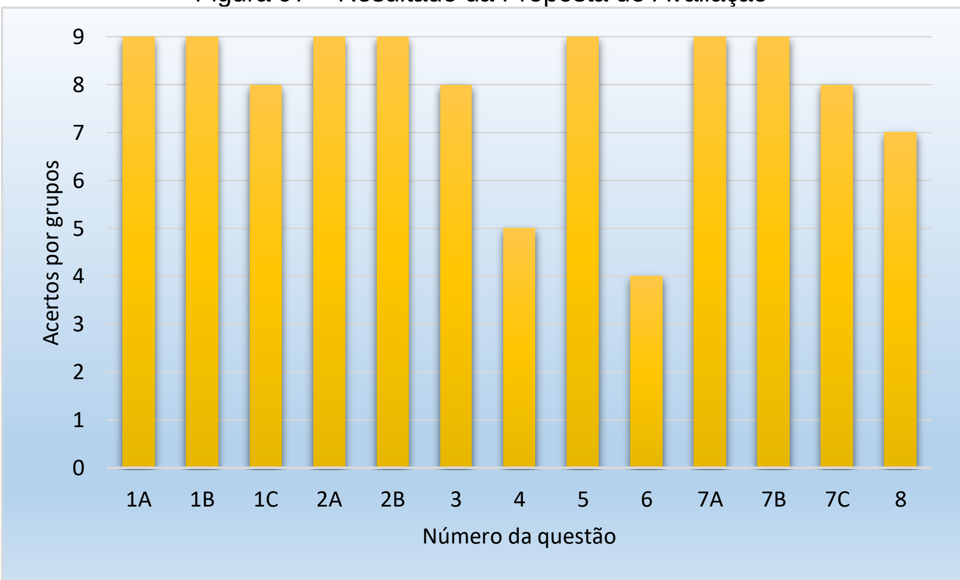
G1: Professora, o que devo fazer com os números do polinômio $18x^2 + 24xy$*?*
PP: Para fatorar uma expressão desse tipo, precisamos calcular o MDC, ou seja, o Máximo Divisor Comum desses números. Vocês também não podem esquecer de conservar os termos em comum com menores expoentes. [foi solicitado aos grupos que realizassem esses procedimentos].
G1: Pronto professora, eu encontrei $6x$*. O que eu faço agora?*
PP: Vocês devem dividir cada termo da expressão algébrica $18x^2 + 24xy$ *pelo fator comum* $6x$*.*

Foi interessante perceber que após essa intervenção e com outras questões para reforçar esse raciocínio, os grupos apresentaram maior compreensão do conceito.

Além disso, pode-se destacar que os alunos compartilharam suas dúvidas e seus novos conhecimentos com outros membros do grupo, apresentaram dúvidas e argumentos para a professora/ pesquisadora com maior segurança e assertividade.

Nessa direção, a Figura 97 apresenta o gráfico que indica o resultado da avaliação proposta ao final do desenvolvimento da quarta sequência de atividades na qual os grupos, sem o apoio do material concreto, buscaram mobilizar os conceitos estudados durante as tarefas realizadas em sala de aula. No gráfico para cada tarefa proposta tem-se a quantidade de grupos que respondeu acertadamente à questão.

Figura 97 – Resultado da Proposta de Avaliação



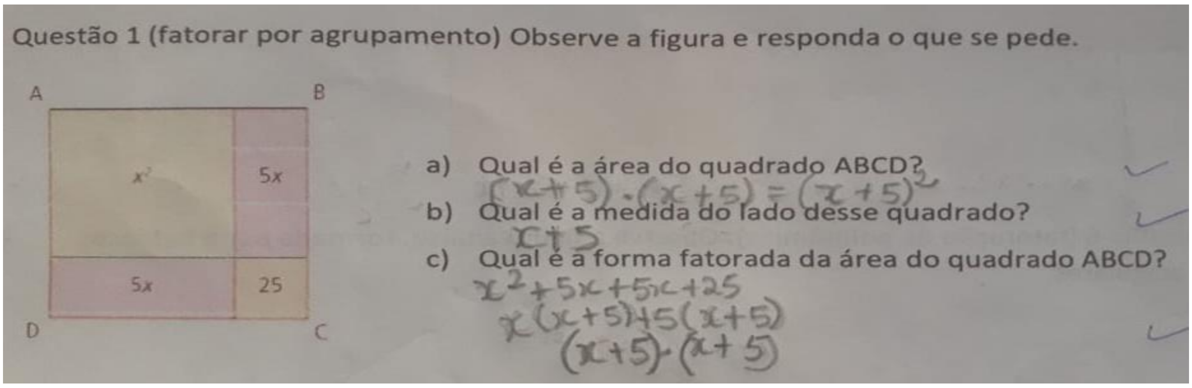
Fonte: A pesquisa.

No que diz respeito aos dados visualizados a partir das análises da proposta da avaliação das aprendizagens e que estão mostrados na Figura 97, pode-se notar que das 13 questões, 7 tiveram 100% de acerto, 3 questões 88,9% dos grupos acertaram, 1 questão 77,8% dos grupos responderam corretamente, restando apenas as questõe de número 4 e 6, as quais os grupos demonstraram maior dificuldade.

Toma-se como exemplo para análise a resolução da questão 1, em que todos os grupos acertaram a resolução. De acordo com o proposto em cada item, aferiu-se que todos os grupos utilizaram conhecimentos anteriores. Questões como essa permitem promover a compreensão do conceito de fatoração de polinômios pelo cálculo de área de quadrados e retângulos.

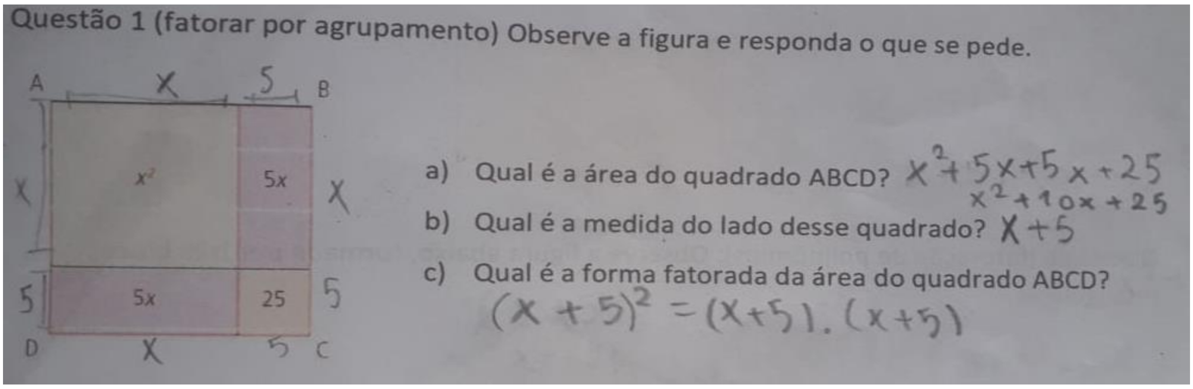
A princípio, no item $1a$ foi solicitado que os grupos explicitassem a área do quadrado $ABCD$. Observa-se na Figura 98, que a resposta resulta da busca, por meio da divisão de polinômios, pela medida dos lados de cada polígono que compõe o quadrado $ABCD$, para em seguida recorrer à interpretação da multiplicação dos polinômios que correspondem a medida dos lados $(x+5)$ como a área $(x+5)^2$. Para o item $1c$, a tarefa apresentava como objetivo fazer os alunos escreverem a forma fatorada da área do quadrado $ABCD$. O G1, trouxe como resposta a área do quadrado $ABCD$ como a soma das áreas das figuras menores. Em seguida, colocou-se o fator comum em evidência, ou seja, $x(x+5)+5(x+5)=(x+5)(x+5)$, chegando assim a forma fatorada.

Figura 98 – Registro do G1



Fonte: A pesquisa.

Figura 99 – Registro do G3



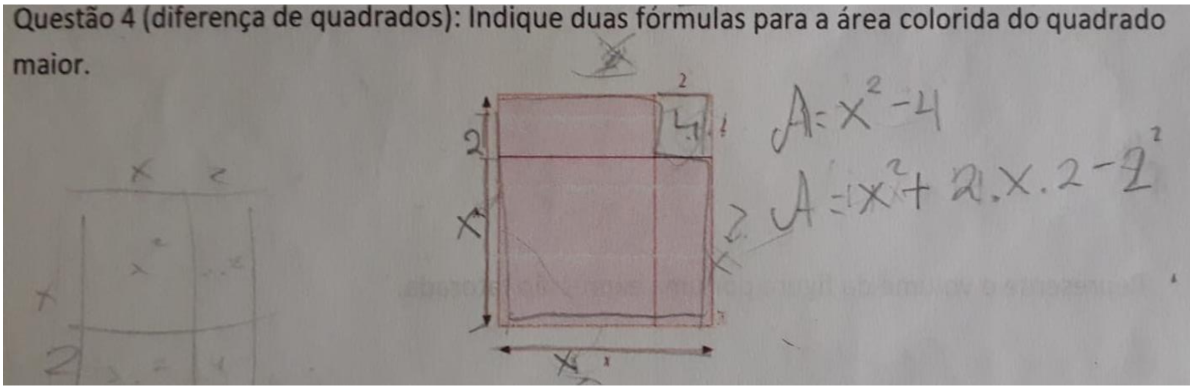
Fonte: A pesquisa.

A Figura 99, mostra ainda a resolução da questão avaliativa $1a$, pelo G3. Para o cálculo da área de $ABCD$, considerou-se como estratégia a somatória da área das formas geométricas em separado. A expressão $x^2+5x+5x+25$, deu origem à expressão $x^2 + 10x + 25$, demonstrando que os grupos sabiam o que fazer ao simplificar a expressão. Finalmente, para encontrar a área fatorada como solicitado no item c, o G3 utilizou o resultado da fatoração do área do quadrado $ABCD$ expressa pelo produto notável $(x+5)^2$.

A seguir, apresentam-se as duas questões em que os grupos obtiveram a maior quantidade de erros, na buscar em compreender o que constituiu-se como obstáculo.

A Figura 100 mostra o raciocínio do G4 para a questão 4. Solicitava-se que os grupos encontrassem duas maneiras para escrever a área colorida do quadrado maior.

Figura 100 – Registro do G4



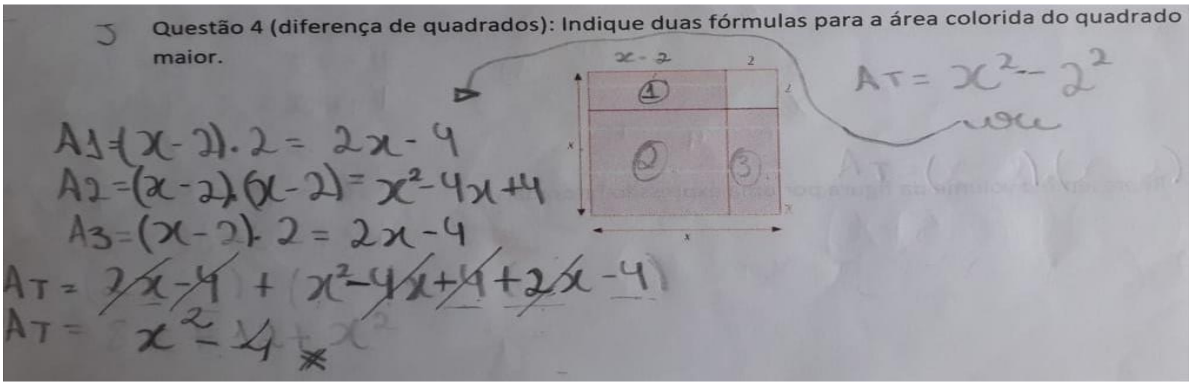
Fonte: A pesquisa.

Como primeira maneira de escrever a área colorida, todos os grupos representaram como a área do quadrado maior menos a área do quadrado de lado 2, ou seja, $x^2 - 2^2$, como esperado.

Quatro grupos manifestaram dificuldade em lidar com a segunda forma para escrever a área da parte colorida do quadrado x^2. Os alunos não encararam a área da parte colorida como a representação da composição das figuras que formavam o quadrado maior de lado x. Desse modo, esse erro resultou no equívoco em escrever a expressão a $(x-2)^2 + 4(x-2)$ – soma das partes coloridas, ou ainda $(x-2)(x+2)$ – a área na forma de fatores formada pela decomposição de apenas dois retângulos, no entanto, como $(x-2)^2$. Acredita-se que o equívoco na resposta está na falta de atenção dos grupos. Isso porque, como no registro do G4 mostrado na Figura 100, o grupo utilizou como estratégia o quadrado da diferença de dois termos, ou seja, $(x-2)^2$. Nesse caso, a socialização para a turma foi essencial para que percebessem que a estratégia utilizada não era válida.

Já outros grupos, como o G2, cujo registro está revelado na Figura 101, perceberam que utilizando $(x-2)^2$ como área da parte colorida não levaria ao resultado esperado, tendo em vista a solução encontrada na primeira fórmula. O grupo optou por calcular separadamente cada área colorida e considerou a área total como a somatória dessas áreas encontradas. Além disso, anulou corretamente os monômios do 1º grau simétricos, anulando-os. Chegando a resposta esperada.

Figura 101 – Registro do G2



Fonte: A pesquisa.

De acordo com Ponte, Branco e Matos (2009, p. 82), “no 3º ciclo (7º, 8º e 9º anos), os alunos devem escrever expressões equivalentes em casos como $(ax+b)^2, (ax-b)^2$ e $(ax+b)(ax-b)$”. Assim, como também a BNCC (BRASIL, 2018, p. 317) sugere, que deve ser proposto aos alunos de 9º ano a utilização de casos notáveis na fatoração de polinômios. A habilidade **(EF09MA09)** afirma que os alunos devem “compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau”. Ambas as propostas estão caracterizadas nas respostas dos estudantes.

Alguns resultados importantes no trabalho que os alunos realizaram na terceira sequência de atividades com produtos notáveis, pode-se notar nos procedimentos adotados referentes a fatoração de polinômios, demonstrando que os conceitos trabalhados anteriormente foram úteis e bem utilizados para avançar na construção e ampliação de aprendizagens.

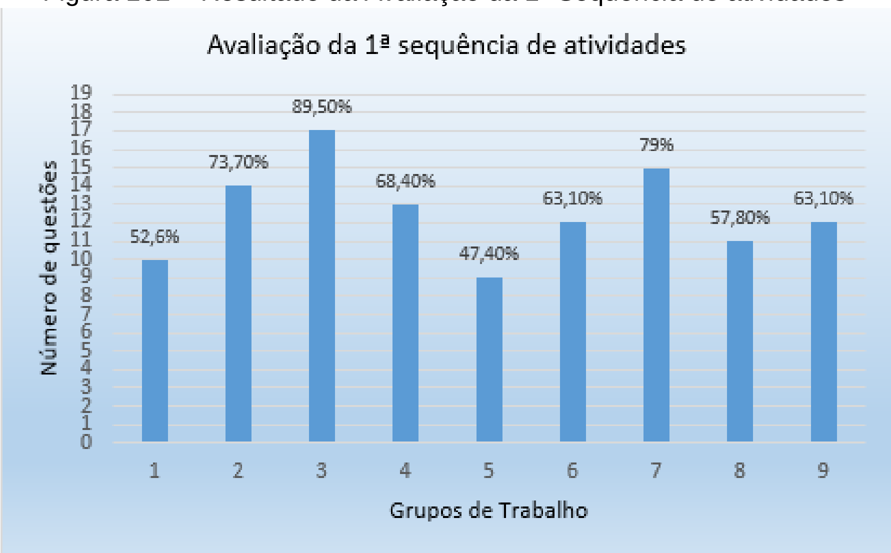
Notaram-se avanços na compreensão de conceitos matemáticos nos alunos, como, a interpretação das figuras geométricas algebricamente, o trabalho com expressões equivalentes e também operações com polinômios. Portanto, há forte indícios de que a aplicação da sequência de atividade desenvolveu no aluno características da aprendizagem na perspectiva dos conceitos da Álgebra e do Pensar Algebricamente – linguagem algébrica, manipulação de expressões, representação algébrica e abstração – foi alcançado.

Nesta sequência de atividades, para além do algebrismo na manipulação de símbolos, letras e números e da abstração de conceitos polinomiais tão presentes em muitos livros didáticos, escolheu-se construir situações de aprendizagens que possibilitaram apropriação de significados para facilitar a compreensão das operações, propriedades e cálculos algébricos, da relação entre as variáveis, da generalização de padrões geométricos ou aritméticos atrelados à resolução de problemas. O que vai ao encontro do que apontam Fiorentini, Miorim e Miguel (1993, p. 87) sobre os elementos que identificam o Pensamento Algébrico, são eles: “a percepção de regularidades, a percepção de aspectos invariantes em contraste com outros que variam, as tentativas de expressar ou explicar a estrutura de uma situação-problema e a presença do processo de generalização”.

As quatro sequências de atividade conectadas entre si e o uso de material concreto como aliado, permitiram construir gradativamente conceitos importantes e necessários para que fosse atingido o objetivo da Sequência Didática, desenvolver os conceitos de monômios e polinômios.

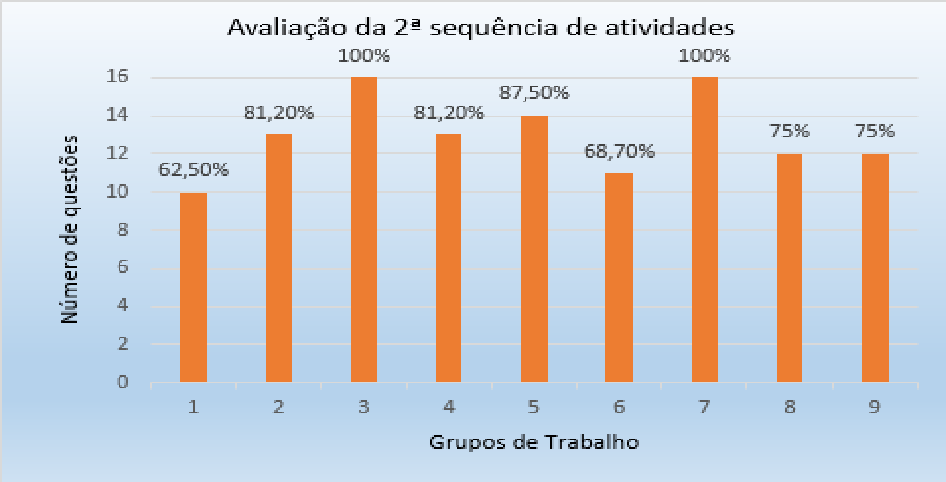
Nesse sentido, ao observar os gráficos das Figuras 102, 103, 104 e 105, que trata do resultado alcançados nas avaliações das aprendizagens pela perspectiva do percentual de acertos por grupo, percebe-se evolução no desempenho desses alunos.

Figura 102 – Resultado da Avaliação da 1ª Sequência de atividades



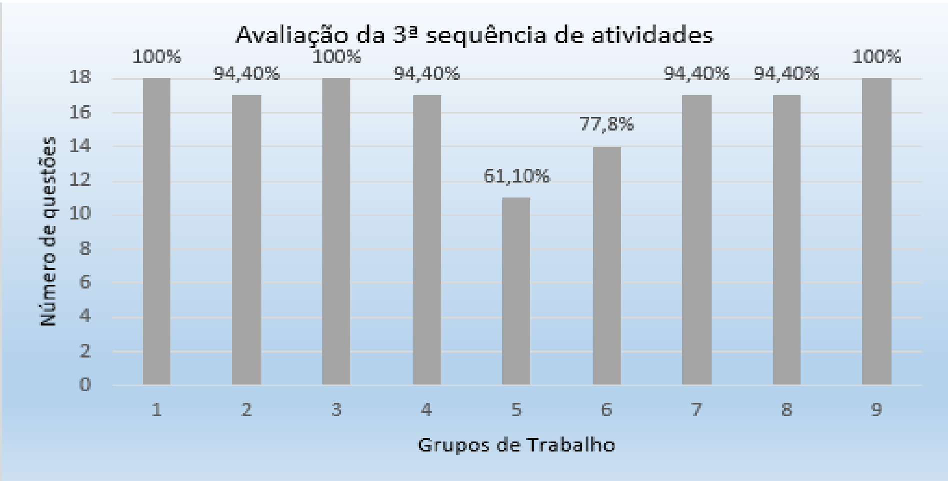
Fonte: A pesquisa.

Figura 103 – Resultado da Avaliação da 2ª Sequência de atividades



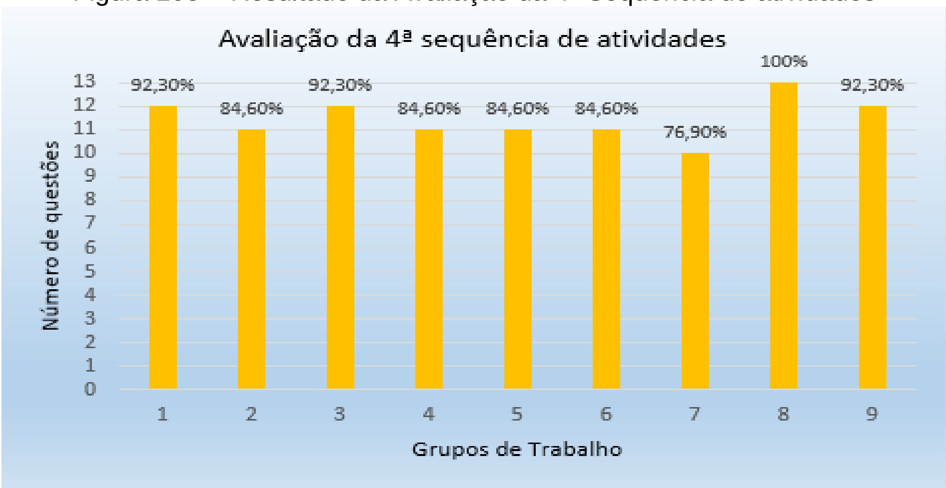
Fonte: A pesquisa.

Figura 104 – Resultado da Avaliação da 3ª Sequência de atividades



Fonte: A pesquisa.

Figura 105 – Resultado da Avaliação da 4ª Sequência de atividades



Fonte: A pesquisa.

Pode-se inferir que à medida que o conhecimento foi sendo ampliado no desenvolvimento da Sequência Didática, os alunos também avançaram nas suas aprendizagens.

Portanto, há fortes indícios que as representações conceituais por meio da utilização dos materiais concretos alinhadas às ações didáticas da professora/ pesquisadora contribuíram para o desenvolvimento da compreensão conceitual matemática dos alunos, pois, posteriormente, mobilizaram significativamente conhecimentos necessários para estudar novos conceitos. Na visão de Souza (2007, p. 110):

> [...] o professor poderá concluir juntamente com seus alunos, que o uso dos recursos didáticos é muito importante para uma melhor aplicação do conteúdo, e que, uma maneira de verificar isso é na aplicação das aulas, onde poderá ser verificada a interação do aluno com o conteúdo. Os educadores devem concluir que o uso de recursos didáticos deve servir de auxílio para que no futuro seus alunos aprofundem e ampliem seus conhecimentos e produzam outros conhecimentos a partir desses. Ao professor cabe, portanto, saber que o material mais adequado deve ser construído, sendo assim, o aluno terá oportunidade de aprender de forma mais efetiva e dinâmica.

Por outro lado, percebe-se que a Matemática básica em muitos momentos configurou-se como dificuldade sentidas pelos alunos no desenvolvimento das tarefas propostas. Nesse contexto, a professora/ pesquisadora estava sempre atenta, buscando observar o trabalho dos grupos e quando necessário intermediar, fazendo as orientações necessárias.

Por fim, ressalta-se que, o raciocínio que se esperava para um aluno de 9º ano era de um pensamento que já apresentava consolidado aspectos mínimos do Pensamento Algébrico. No entanto, no início da aplicação do experimento, muitas vezes, ficou evidente o uso apenas da linguagem materna.

A proposta aqui realizada, embora, longa e complexa, tornou-se essencial, pois contemplou várias facetas da Álgebra, não de um modo mecânico, algebrista e utilitário, mas, sendo muito além dos procedimentos algoritmos, buscando a construção do conhecimento algébrico com a finalidade de desenvolver compreensão sobre o Pensamento Algébrico e, consequentemente, o pensamento matemático.

Percebeu-se que gradativamente, os alunos conseguiram de interpretar problemas, falar matematicamente sobre eles e explicitar uma solução. Nessa mesma direção, os trabalhos em grupos, levaram-nos para momentos de compartilhamento de ideias, socialização de argumentos e ajuda mutua, características consideradas importantes para a formação do aluno no século XXI e para o exercício da cidadania.

7.2 DIFICULDADES DO TRABALHO COM MATERIAL CONCRETO

Trabalhar conteúdos matemáticos com ferramentas, recursos e metodologia didáticos pedagógicas foi, a princípio, desafiador à medida que a proposta de trabalho envolvia, além da conexão entre as unidades temáticas propostas na BNCC (BRASIL, 2018), almejava o desenvolvimento do Pensamento Algébrico nos estudantes, constituído como nosso objetivo maior.

Segundo Nacarato e Custódio (2018, p. 20), desenvolver o Pensamento Algébrico, "exige tarefas que devem viabilizar o movimento do pensamento à palavra e da palavra ao pensamento". Esses autores acrescentam que as opções didáticas devem contemplar "propostas que possibilitem a elaboração de hipóteses e conjecturas, principalmente no que tange ao Pensamento Algébrico, que não se constitui na mera reprodução e repetição de técnicas".

Nesse contexto, para Mason (2007 *apud* NACARATO; CUSTÓDIO, 2018, p. 22) desenvolver esse tipo de pensamento no aluno é muni-lo de um poder matemático, tornando-se desafio para o professor, pois é necessário "criar uma atmosfera na qual este poder natural é invocado e desenvolvido, porque ele é essencial para o próprio funcionamento do pensamento matemático, em geral, e o Pensamento Algébrico, em particular".

Dessa maneira, para uma professora que na maioria das vezes adotou práticas pedagógicas consideradas tradicionais, e tendo o livro como principal ferramenta de trabalho, transformar o ambiente de aprendizagem para um ambiente por meio de "tarefas de cunho exploratório ou investigativo" (NACARATO; CUSTÓDIO, 2018, p.15) com o uso de material concreto como recurso didático nas aulas de Matemática trouxe algumas dificuldades.

Nesse novo cenário, percebeu-se ser imprescindível para o docente ter o conhecimento conceitual matemático. A partir do domínio desse conhecimento, o professor pode ter clareza sobre os objetivos de aprendizagem que quer atingir e quais as representações matemáticas que podem ser estabelecidos a partir da manipulação do material concreto. Além do conhecimento acadêmico necessário, concorda-se com a visão de Nacarato e Custódio (2018, p. 75), para quem a apropriação de conceitos pelos alunos depende do professor gerar um ambiente favorável de aprendizagem.

> A intencionalidade do processo educativo deve centrar-se na apropriação teórica por parte dos alunos. Portanto, a função da prática pedagógica é promover a transformação dos sujeitos por meio da internalização das ações

> realizadas e dos conceitos científicos, cuja apropriação gera transformações qualitativas no desenvolvimento cognitivo. Assim, o professor é responsável por criar um ambiente de investigação em que haja negociação de significados mediante a comunicação.

Nesse sentido, para o aluno ter acesso às aprendizagens fundamentais para a construção do seu saber, o professor precisa ter não só o conhecimento cientifico, mas também a capacidade de promover esses conceitos por meio de ações que sejam significativas para o aluno. Mancera e Basurto (2016) afirmam que a improvisação no trabalho com o material manipulável, geralmente, provoca experiencias frustrantes.

Notou-se a importância da manipulação dos objetos com significado. Para que o objeto manipulável não tomasse apenas características de distração e de caráter lúdico, foi relevante planejar adequadamente as aulas de modo a ficar clara a intencionalidade da proposta, as atitudes e os procedimentos esperados dos alunos no desenvolvimento das experiências práticas com o material. “Entao, não se pode simplesmente lançar mão deste ou daquele material, é preciso refletir acerca de como o modelo poderá ajudar no estabelecimento das relações” (NACARATO; CUSTÓDIO, 2018, p. 76). Na visão de Mancera e Basurto (2016, p.134):

> O professor tem que planejar suas atividades, não pode deixar o caso para ser analisado à imaginação, pois isso pode causar sérios problemas, por isso é muito importante planejar o manuseio dos materiais e as sequências que irão compor a atividade. Os alunos não podem ser deixados a explorar livremente pela própria liberdade, a sua atividade deve ser orientada de alguma forma para obter os resultados esperados e depois eles próprios farão outros tipos de explorações quer queiramos ou não, ou o que quer que nos levante algumas questões.

Portanto, a experiência com material concreto deve ser um momento de prazer sem esquecer o objetivo final, a construção do conhecimento.

Outro ponto observado diz respeito a dificuldade de representação de alguns conceitos matemáticos por meio da manipulação do material concreto, por exemplo, o quadrado da diferença de dois termos, podendo utilizar diferentes formas geométricas e estratégias para se chegar ao mesmo resultado. Por isso, o material concreto relacionado para o desenvolvimento da tarefa necessitou estudo mais aprofundado, de modo que a professora/ pesquisadora não se perdesse no manuseio do material e, de certa forma, se sentisse segura quanto a finalidade e potencialidade do objeto. Para Mancera e Basurto (2016, p. 135) “o material em si não gera conceitos matemáticos, ajuda a moldá-los, mas não substitui a matemática, pois tem possibilidades limitadas de aplicação”. Acredita-se que, em momentos como esse, o professor pode replanejar sua aula e lançar mão de outros meios ou materiais que ofereçam maiores possibilidades de aprendizagem, simultaneamente, segurança para o professor.

É fundamental salientar que ao se trabalhar por um longo período com ferramentas pedagógicas como a Sequência Didática e com o uso contínuo de material concreto, confeccionado pela professora/ pesquisadora, torna-se necessário apoio da equipe pedagógica, tempo disponível para construção e organização dos objetos. Destaca-se que o conhecimento sobre os conceitos matemáticos são necessários a partir da construção/ confecção do material concreto. Nesse mesmo sentido, o tempo para o planejamento e replanejamento de aulas para a busca de tarefas e materiais que melhor se adéquem ao nível cognitivo dos alunos, deve ser considerado.

Nesta dimensão, evidencia-se, que trabalhar com material concreto não se configura como tarefa simples, exigindo muito da disponibilidade, conhecimento e dedicação do professor. Em pesquisa realizada por Botas e Moreira (2013) foi perguntado a um grupo de professores sobre os motivos que conduzem à baixa utilização de material didático em sala de aula. A maioria dos professores aponta que o motivo consiste na dificuldade que sentem em explorar os materiais (63%), o que, no que lhe concerne, pode estar associado ao fato de sentirem falta de formação no âmbito dos materiais didáticos (55,3%). Diante disso, reconhece-se a importância do material concreto, mas que esse prescinde tanto de boa vontade quanto de preparação adequada do professor.

Vale ressaltar que se fez necessário um período de adaptação por parte dos alunos em relação à nova metodologia empregada e a exploração do material concreto.

Da mesma forma, a professora, que sempre se colocou no centro do processo de ensino, precisou adaptar-se com o seu deslocamento para a posição de mediadora, colocando o aluno como protagonista na construção do seu próprio conhecimento. Para isso, é necessário "sem cair na desordem, permitir que o trabalho em equipe guie as discussões. Permitir que os alunos apoiem ou corrijam uns aos outros. Em suma, abandonar a posição do professor autoritário e totalmente diretivo" (MANCERA, 2016, p. 31).

Compreende-se, que apesar desse deslocamento, a professora que também foi responsável pela implementação do experimento sentiu-se gradativamente inserida no processo e compreendeu a sua atuação como fundamental para criar um espaço criativo de aprendizagem, de diálogo e de interação entre alunos e entre alunos e professor, princípios considerados indispensáveis para o desenvolvimento intelectual dos alunos. Dito de outro modo, tendo os materiais manipulativos como mediadores entre o estudante e o conhecimento, na perspectiva de Mancera (2016, p. 14):

> O papel do professor é vital, pois é ele quem projeta a experiência que o aluno deve ter, seja individualmente ou em grupo, e é ele quem decide os momentos importantes e as indicações que são necessárias na construção do conceito ou do processo matemático de interesse. Os materiais e dispositivos, sem o professor e sem o seu planejamento, não fazem sentido.

Pondera-se considerar no planejamento a possibilidade de alteração do tempo previsto para a realização das atividades, tendo em vista que nem sempre os alunos trazem o conhecimento prévio necessário para o desenvolvimento da atividade com o material concreto, tornado-se necessário, o professor dedicar tempo para sanar tais dificuldades.

Enunciar essas dificuldades não têm a intenção de gerar conflitos entre o currículo e o uso de material concreto no ensino de matemática, pelo contrário, busca trazer informações relevantes visando contribuir com o desenvolvimento de trabalhos futuros, no sentido de minimizar equívocos na utilização desse tipo de recurso didático no processo de ensino e aprendizagem. Pois, como mostramos, ao longo deste trabalho, o material concreto quando usado com sentido e intencionalidade pode ser visto como um instrumento potencializador para a construção e a compreensão de elementos conceituais nas aulas do professor de Matemática e para os alunos como uma ferramenta dinâmica e interessante para a sua aprendizagem significativa.

Assim, seguem as Considerações Finais, apresentando uma síntese das principais informações discutidas no trabalho.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A elaboração dessa dissertação apresenta como problema de pesquisa a seguinte questão norteadora: *"Como desenvolver uma Sequência Didática envolvendo os conteúdos de Álgebra nos Anos Finais do Ensino Fundamental na perspectiva da Base Nacional Comum Curricular (BNCC)?"*.

Na busca para responder a tal inquietação, realizou-se uma pesquisa qualitativa, com desenho característico de um estudo de caso. Desenvolveu-se, portanto, uma Sequência Didática aplicada e avaliada nessa investigação. O estudo trouxe como proposta quatro sequências de atividades com as temáticas: unidades de medida, cálculo de perímetro e área; conceitos, operações e valor numérico de monômios e polinômios; produtos notáveis e; fatoração de monômios e polinômios, com foco na aprendizagem dos conceitos de Polinômios e suas operações.

Nesse cenário, buscaram-se atividades organizadas pela estratégia de uma Sequência Didática segundo critérios propostos por Zabala (1998), que permitissem o desenvolvimento de diferentes aspectos que caracterizam o Pensamento Algébrico, conforme indicado nos estudos de Kaput (1999, 2005, 2008) e de habilidades matemáticas previstas na BNCC (BRASIL, 2018). As tarefas, frutos do modelo proposto por Groenwald; Albé; Klaus; Hoffmann (1998) e Andrinni; Vasconcellos (2015), foram mediadas pela utilização de materiais concretos, considerando as ideias citadas por Mancera e Basurto (2016), tendo a resolução de problemas como metodologia de ensino.

A análise dos dados foi em uma perspectiva da busca do desempenho dos 40 estudantes de uma escola estadual da cidade de Manaus, estado do Amazonas no desenvolvimento do experimento proposto e da análise dos registros produzidos por eles, buscando identificar os equívocos cometidos, as facilidades e as dificuldades que enfrentaram. Além disso, buscou-se também analisar a mediação e postura docente frente às mudanças de sua própria prática em sala de aula.

Para buscar responder ao problema de pesquisa, considerando o objetivo geral apresentado nesse estudo, a saber, *investigar atividades organizadas em uma Sequência Didática que abordem os conceitos de Polinômios e suas operações para estudantes do Ensino Fundamental Anos Finais na perspectiva da BNCC*, e os objetivos específicos de *investigar e implementar (desenvolver, aplicar e avaliar) atividades organizadas em uma Sequência Didática com a temática de pesquisa* *utilizando como recurso materiais concretos com estudantes do Ensino Fundamental Anos Finais; discutir como o estudo de conceitos algébricos integrados ao uso de materiais concretos pode contribuir para a construção do Pensamento Algébrico e; validar com estudantes do Ensino Fundamental Anos Finais a Sequência Didática desenvolvida,* acredita-se todos foram alcançados.

Em relação ao primeiro objetivo específico, ao final do trabalho o estudo demonstrou que no desenvolvimento de uma Sequência Didática há que se considerar a integração, quando possível, entre as diferentes unidades temáticas, a conexão entre as tarefas pelas quais os objetos de conhecimentos são apresentados, as habilidades a serem desenvolvidas nos alunos, os objetivos a serem alcançados, a metodologia a ser utilizada e quais os recursos didáticos que servirão de suporte para o desenvolvimento das tarefas em sala de aula. Percebeu-se que a utilização de materiais concretos como ferramenta de apoio no processo de ensino e aprendizagem contribuiu na percepção, na visualização e na construção de conceitos matemáticos pelos alunos. Acredita-se que esse fato está ligado as conexões que o aluno estabeleceu entre a manipulação do material concreto e o conceito matemático, pois foi possível observar que grande parte dos alunos buscava formular estratégias, levantar hipóteses e elaborar conjecturas dos problemas matemáticos, demonstrando interesse na manipulação dos materiais e, após, descrever matematicamente a solução do problema.

Quanto ao segundo objetivo, de fato, notou-se que as atividades organizadas em uma Sequência Didática aliada à metodologia de Resolução de Problemas, partindo de tarefas mais simples para as mais complexas, articulando a Álgebra com a Geometria, contribuíram para o desenvolvimento de habilidades, pois permitiram ao aluno construir gradativamente e com significado conceitos matemáticos como generalizar e reconhecer padrões, elementos considerados característicos do Pensamento Algébrico. Nesse sentido, o planejamento de tarefas diversificadas com foco na manipulação de material concreto permitiu ao aluno perceber as diferentes representações de um mesmo objeto, facilitando a assimilação do conceito matemático. Esse processo está associado as conexões entre a Álgebra e a Geometria estabelecidas pelo aluno a partir de atividades que permitiram a compreensão de estruturas algébricas por meio da manipulação de figuras geométricas e vice-versa.

Sobre o terceiro e último objetivo, confirma-se que na validação dos dados colhidos durante a experimentação, pela observação da professora/ pesquisadora e, após, na análise das produções dos alunos feitas em classe, incluindo as avaliações das aprendizagens, há indícios que houve compreensão da relação entre o material manipulável e o conceito trabalhado, pois, posteriormente, sem o apoio do material, os grupos mobilizaram conhecimentos para a resolução de novos problemas matemáticos.

Vale ressaltar que, diante da mudança de como eles estavam aprendendo matemática, a maioria dos alunos sentiu-se motivada. Acredita-se, que parte dessa motivação está ligada ao estímulo dado pela professora/ pesquisadora na realização das atividades mediadas pelo uso de material concreto, despertando o interesse, a curiosidade e a vontade de aprender e resolver as tarefas propostas na Sequência Didática. Nesse sentido, a organização dos alunos em grupos de trabalho estimulou a discussão, a reflexão e o trabalho colaborativo, possibilitando uma maior troca de conhecimento entre os componentes e, assim, facilitando o trabalho da professora/ pesquisadora ao utilizar materiais concretos como potencializador da prática educativa

Dessa maneira, além da pesquisa realizada, o desenvolvimento do experimento contribuiu para um olhar crítico da professora/ pesquisadora sobre sua própria prática. Percebeu-se que a escolha intencional das tarefas, dos recursos didáticos e das práticas pedagógicas inferem fortemente no aprendizado do aluno, portanto, o professor deve empenhar tempo e esforço no seu planejamento e replanejamento. Ficou claro que a construção do conhecimento perpassa pela mediação do professor, mas principalmente pelas atitudes e interesse dos alunos na busca por melhores estratégias, ideias e procedimentos na resolução das tarefas, jogando luz a um novo cenário da prática educativa, pois colocou o aluno no centro do processo, contudo, sem diminuir a importância da presença do docente, pois esta é essencial para encaminhar o educando na construção da sua autonomia.

Por outro lado, apresentam-se alguns pontos que merecem atenção e que servem como alerta para pesquisas futuras. Na realização do experimento em grupo, alguns alunos não se envolveram de modo satisfatório com integrantes do grupo e com as atividades propostas. Se o professor optar em confeccionar o próprio material manipulativo, há que disponibilizar tempo para esse trabalho. É importante estudar o material que será aplicado, pois, a dúvida quanto ao seu uso pode implicar em fracasso do objetivo traçado, anteriormente, para aquela tarefa. Há que considerar no planejamento a possibilidade de alteração do tempo previsto para a realização das atividades, tendo em vista que nem sempre os alunos trazem o conhecimento prévio necessário para o desenvolvimento da atividade, tornando-se necessário, o professor dedicar tempo para sanar tais dificuldades. E, fundamentalmente, o professor deve evitar respostas prontas, mas instigar o aluno para elaborar ou reelaborar procedimentos e colocá-lo como protagonista do processo de ensino e aprendizagem.

Sugere-se para trabalhos futuros, a implementação de uma Sequência Didática com tarefas apoiadas pelo uso de recursos digitais. Mancera (2022, p. 136), afirma que o contexto da pandemia de Covid-19 têm apresentado a possibilidade de uma análise sobre as formas de ensino em que os alunos podem se interessar e se envolver, seja com recurso web ou *software* livre, para simplificar processos e obter melhores resultados. No contexto das Tecnologias digitais para o ensino de matemática, o referido autor traz como recurso digital para o desenvolvimento das tarefas matemáticas os "manipuladores virtuais", conceituando como, materiais que podem ser manipulados, tocados, transformados, movidos, virados, etc., ou seja, materiais com os quais várias ações podem ser realizadas para pesquisar regularidades e verificar várias propriedades de entidades matemáticas (MANCERA, 2022, p. 136). Abre-se, portanto, outra perspectiva para o ensino e aprendizagem de Matemática.

Assim, como professora/ pesquisadora, considero que este trabalho pode auxiliar pesquisadores e, principalmente, professores, que buscam estudar e desenvolver outras formas de ensino fora o método tradicional. "Não estamos julgando esta como desnecessária, mas acreditamos ser prioridade o desenvolvimento de um raciocínio que permita a compreensão de técnicas, e não a simples reprodução" (NACARATO; CUSTÓDIO, 2018, p.199). Acredita-se que novas pesquisas podem emergir a partir da proposta da Sequência Didática apresentada nessa investigação, pois esta configura-se não como um trabalho acabado, mas como um material possível de adaptações ou reformulações para os diferentes níveis da Educação Básica e o uso de recursos didáticos, como o material concreto apresentado nessa investigação, configurando-se como uma estratégia possível e eficaz, para estruturar as tarefas nas aulas de matemática. Por fim, espera-se que a Sequência Didática apresentada nessa investigação possa trazer inspiração e, ao mesmo tempo, informações relevantes para educadores e pesquisadores que trabalham na construção de melhorias no campo da Educação Matemática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDRINI, A; VASCONCELLOS, M. J. **Coleção Praticando Matemática**. 4. ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2015.

ARAÚJO, E. A. **Ensino de Álgebra e formação de professores**. Educação, Matemática, Pesquisa, São Paulo, v. 10, n. 2, p. 331-346, 2008.

BECHER, E. L.; GROENWALD, C. L. O. **Características do Pensamento Algébrico de estudantes do 1º ano do Ensino Médio**. São Paulo, v.12, n.2, p. 242-270, 2010.

BERTOLI, V.; SCHUHMACHER, É. **Aprendendo polinômios Utilizando Algeplan**: Uma Prática no Ensino da Matemática para o Ensino Fundamental. ULBRA – Canoas, 15p, 2013.

BOTAS, D.; MOREIRA, D. A utilização dos materiais didáticos nas aulas de Matemática – Um estudo no 1º Ciclo. **Revista Portuguesa de Educação**, 2013, 26(1), p. 253-286 © 2013, CIEd - Universidade do Minho.

BRASIL. **Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica**. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Curriculos e Educação Integra. Brasilial: MEC, SEB, DICEI, 2013.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais.** Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**, LDB. 9394/1996.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. **Plano Nacional de Educação (PNE)**. Lei Federal n.º 10.172, de 9/01/2001. Brasília: MEC, 2001.

BRASIL. Constituição (1988). **Constituição da República Federativa do Brasil**. Brasília, DF: Senado Federal: Centro Gráfico, 1988.

CAMPOS, W. M. V. **O desenvolvimento do Pensamento Algébrico, através da resolução de problemas, e suas contribuições para aprendizagem de equações do primeiro grau**. Dissertação (Mestrado). Instituto Federal de Educação, Ciencias e Tecnologia de Goias, Jataí, 2019.

CASTOLDI, R.; POLINARSKI, C. A. **Utilização de recursos didático-pedagógicos na motivação da aprendizagem**. Simpósio internacional de ensino e tecnologia, v. 1, p. 684-9, 2009.

COELHO, F. U.; AGUIAR, M. A história da Álgebra e o Pensamento Algébrico: correlações com o ensino. Estudos Avançados [online]. 2018, v. 32, n. 94 [Acessado 22 Novembro 2022], p. 171-187. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/s0103-40142018.3294.0013>. ISSN 1806-9592. https://doi.org/10.1590/s0103-40142018.3294.0013.CRESWELL, J. W. W. **Projeto de pesquisa:** métodos qualitativo, quantitativo e misto. 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2010.

CRESWELL, J. W. W. **Projeto de pesquisa:** métodos qualitativo, quantitativo e misto. 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2010.

FIGUEIREDO, S. M. de. **Ensino de expressões algébricas com auxílio de Geometria Plana e Aritmética**. Dissertação (Mestrado). Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade de Passo Fundo: Passo Fundo, 2019.

FIORENTINI, D., FERNANDES, F. L. P.; Cristóvão, E. M. (2005, julho). Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do Pensamento Algébrico. In **Anais do 1º Seminário Luso-brasileiro de Investigações Matemáticas no Currículo e na Formação do Professor** (p. 1-22).

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. **A. Uma reflexão sobre o uso dos materiais concretos e jogos no ensino da Matemática**. BOLEMA, n.7, p. 5-10, 1990.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. **Contribuição para um Repensar… a Educação Algébrica Elementar**. Pró-Posições, v. 4, n. 1[10], p.78-91, mar. 1993.

FREITAS, L. P. **Atividades algébricas no 6º ano do Ensino Fundamental com materiais manipuláveis**. Dissertação (Mestrado). Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Rio de Janeiro, 2014.

GERVÁZIO, S. N. Materiais concretos e manipulativos: uma alternativa para simplificar o processo de ensino e aprendizagem da Matemática e incentivar à pesquisa. CQD, **Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 9, p. 42-55, 2017.

GIL, K. H. **Reflexões sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem de Álgebra**. Porto Alegre, 2008.118 f.Originalmente apresentada como dissertação de Mestrado, Pontifícia Católica do Rio Grande do Sul – Faculdade de Física, 2008.

GIOVANNI JÚNIOR, J. R; CASTRUCCI, B. **A Conquista da Matemática**. São Paulo: FTD, 2019. (coleção do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental).

GODINO, J. D.; FONT. V. **Razonamiento Algebraico y su Didáctiva para Maestros**. Granada, Espanha: Universidade de Granada, 2003. Disponível em: <http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/>. Acesso em: jan. 2022.

GROENWALD, C. L. O.; KAIBER, C.; MORA, C. D. Perspectivas em Educação Matemática**. Acta Scientiae**, Canoas, v. 6, n. 1, p. 37-55, 2004.

GROENWALD, C. L. O.; ALBÉ, M. Q.; KLAUS, R. I.; HOFFMANN, V. K. **Álgebra com Geometria**: Um enfoque prático na 7ª série do Ensino Fundamental. EMR-RS, v. 1, n.1, 1998.

GROENWALD, C. L. O.; BECHER, E. L. Características do Pensamento Algébrico de estudantes do Ensino médio com equações do 1º grau. **Acta Scientiae**. v. 12, n.1, p. 83-94, 2010.

IBRAHIM, S. A.; SILVA, M. G.; RESENDE, M. R. **Análise das questões da prova brasil segundo as concepções algébricas de usiskin**. Uberaba, v. 1, n.1, p. 146-159, 2013.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA (INEP). Disponível em: https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/saeb/resultados. Acesso em: 30 set 2022.

KAIBER, C.; GROENWALD, C. L. O. Pesquisa e prática nos Anos Finais do Ensino Fundamental: um olhar a partir dos trabalhos apresentados no XIII ENEM no eixo recursos didáticos. In: PANOSSIAN, M. L; GALVÃO, M. E. E. L. **Recursos didáticos em aulas de Matemática**. Brasília, DF: SBEM Nacional, 2022.

KAPLAN, B.; DUCHON, D. **Combining qualitative and quantitative methods in information systems research:** a case study. MIS Quarterly, v. 12, n. 4, p. 571-586,1988.

KAPUT, J. J. Teaching and learning a new algebra. In: FENNEMA, E.; ROMBERG, T. (Eds.), **Mathematics classrooms that promote understanding Mahwah**, NJ: Erlbaum, p. 133-155, 1999.

KAPUT, J. **Teaching and learning a new algebra with understanding**. Documento retirado de http://www.simcalc.umassd.edu/downloads /KaputAlgUnd.pdf em 21 de Outubro de 2005.

KIERAN, C.; CHALOUH, L. “Prealgebra: the Transition from Arithmetic to Algebra”. In: OWENS, D. T. (Ed.). **Research ideas for the Classroom**: Middle Grades Mathematics. Reston, VA: NCTM, 1993.

LIBÂNEO, J. C. **Didática**. São Paulo: Cortez, 1994 (Coleção magistério 2° grau. Série formação do professor).

LIMA, A. P. B. O uso de jogos como recurso para ensinar Matemática nos Anos Finais do Ensino Fundamental: uma análise de relatos de experiência do XIII ENEM. In: PANOSSIAN, M. L.; GALVÃO, M. E. E. L. **Recursos didáticos em aulas de Matemática**. Brasília, DF: SBEM Nacional, 2022.

LINS, R. C. Matemática, monstros, significados e educação Matemática. In: BICUDO, Maria A. V.; BORBA, Marcelo de C. (Orgs.). **Educação Matemática**: pesquisa em movimento. p. 92–120, São Paulo: Cortez, 2004..

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI**. 6. ed. Campinas, SP: Papirus, 2005.

LORENZATO, S. (org.). **O Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores**. 1ª. Ed. Campinas, SP: Autores Associados, p. 3-37, 2006 (Coleção Formação de Professores).

LUCENA, R. S. **Laboratório de Ensino de Matemática**. Fortaleza: UAB/IFCE, p. 94, 2017.

MALHOTRA, N. K.; ROCHA, I.; LAUDISIO, M. C.; ALTHERMAN, E.; BORGES, F. M.

Introdução a Pesquisa de Marketing. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2005.

MANCERA, E. **Matebloquemática** – La forma de aprender matemáticas haciéndose la vida de cuadritos. GEI. México, 1998.

MANCERA, E.; BASURTO, E. **Matebloquemática** – La forma de aprender matemáticas haciéndose la vida de cuadritos. **Colección Formación de Docentes de Matemáticas**. Sirve. México, 2016.

MANCERA, E. M. Os Recursos Didáticos no trabalho docente do professor de Matemática. In: PANOSSIAN, M. L; GALVÃO, M. E. E. L. **Recursos didáticos em aulas de Matemática**. Brasília, DF: SBEM Nacional, 2022.

MICHAELIS. **Moderno dicionário da língua portuguesa**. São Paulo: Melhoramentos. Dicionários Michaelis, 2259 p, 1998.

NACARATO, A. M.; CUSTÓDIO, I. A. **O Desenvolvimento do Pensamento Algébrico na educação básica:** compartilhando propostas de sala de aula com o professor que ensina (ensinará) Matemática. Brasília: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2018.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS – NCTM. **De los principios a la acción –** para garantizar el éxito matemático de todos. Trad. por CIAEM. México, D. F., 2015.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS – NCTM. **Principios e Estándares para la Educación Matemática**. Trad. Manuel Fernández Reyes. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, 2000.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS – NCTM. **Princípios e normas para a Matemática escolar**. Trad. Magda Melo ; rev. e coord. da trad. Lourdes Cangueiro... [et al.]. Lisboa: Associação de Professores de Matemática ; Reston : National Council of Teachers of Mathematics, 2007.

OLIVEIRA, M. M. **Sequência Didática interativa no processo de formação de professores**. Petrópolis: Vozes, 2013.

PASSOS, C. L. B. Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de Matemática. In: LORENZATO, Sérgio (org.). **O Laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associados, 2006.

PIAGET, J. **Estudos sociológicos**. Rio de Janeiro, RJ: Forense, 1973.

PONTE, J. P.; BRANCO, N.; MATOS, A. **Álgebra no Ensino Básico**. MEC/Direção geral de inovação e desenvolvimento curricular. Portugal, 2009.

ROSSASI, L. B.; POLINARSKI, C. A. **Reflexões sobre metodologias para o ensino de biologia**: Uma perspectiva a partir da prática docente. Curitiba: Secretaria da Educação do Paraná, p. 1-25, 2008.

SANTOS, O. K. C.; BELMINO, J. F. B. Recursos didáticos: uma melhoria na qualidade da aprendizagem. In: FÓRUM INTERNACIONAL DE PEDAGOGIA, 5, Vitória da

Conquista, 2013. **Anais do V FIPED**. Disponível em: Acesso em 22 ago de 2021.

SANTOS; C. C. S.; LUVISON, C. C.; MOREIRA, K. G. A construção do Pensamento Algébrico no Ensino Fundamental I: Possíveis trabalhos para a percepção de regularidades e de generalizações. In: NACARATO, A. M.; CUSTÓDIO, I. A.. **O Desenvolvimento do Pensamento Algébrico na educação básica**: compartilhando propostas de sala de aula com o professor que ensina (ensinará) Matemática. Brasília: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2018.

SARMENTO, A. K. C. **A Utilização dos Materiais Manipulativos nas aulas de Matemática**. Universidade Federal do Piauí, 2010.

SERRAZINA, L. **Aprendizagem da Matemática: a importancia da utilização de materai**s. Noesis, [s. I], n. 21, 1991.

SILVA, C. B. **Introdução a Álgebra no Ensino Fundamental** – o “x” da questão. Dissertação (Mestrado). Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Universidade Estadual Paulista: Presidente Prudente, 2016.

SILVEIRA, D. S.; NOVELLO, T. P.; LAURINO D. P. **O uso de materiais concretos no ensino da Matemática nas primeiras etapas de escolarização**. Rio grande do norte, p. 19-22, 2009.

SOUZA, S. E. O uso de recursos didaticos no ensino escolar. In: **I Encontro de Pesquisa em Educação, IV Jornada de Prática de Ensino, XIII Semana de Pedagogia da UEM**: “Infância e Práticas Educativas”. Arq Mudi. 2007.

SOUZA, M. L. V.; LOPES, S. A. A.; NASCIMENTO, K. G. Álgebra: **proposta da unidade temática na BNCC e desafios por sua trajetória ao longo dos nove anos do Ensino Fundamental**. ANPMat. Rio de Janeiro, 2020.

STAKE, R. E. **The case study method in social inquiry**. In DENZIN, Norman K.; LINCOLN, Yvonna S. The American tradition in qualitative research. Vol. II. Thousand Oaks, California: Sage Publications, 2001.

TEIXEIRA, L. H. A abordagem tradicional de ensino e suas repercussões sob a percepção de um aluno. **Revista Educação em Foco** – 10. Ed. P. 93–103. São Lourenço, MG., 2018.

TURRIONI, A. M. S.; PEREZ, G. Implementando um laboratório de Educação Matemática para apoio na formação de professores. In: LORENZATO, S. (Org.). **O Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores**. Campinas, SP: Autores Associados, 2006. (Coleção formação de professores).

USISKIN, Z. **Concepções sobre a Álgebra da escola média e utilizações das variáveis**: As idéias da Álgebra. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Ed. Atual, 1995.

VIEIRA, W. M. **O desenvolvimento do Pensamento Algébrico, através da resolução de problemas, e suas contribuições para aprendizagem de equações do primeiro grau**. Dissertação (Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Educação para Ciências e Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e

Tecnologia de Goiás: Jataí, 2019.

YIN, R. K. **Estudo de caso –** planejamento e métodos. (2Ed.). Porto Alegre: Bookman, 2001.

ZABALA, A. **A Prática Educativa:** como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998.

APÊNDICES

APÊNDICE A – AUTORIZAÇÃO PARA USO DE IMAGEM E VOZ

VERITAS VOS LIBERABIT · A.D. MCMLXXXVIII ·

ULBRA UNIVERSIDADE LUTERANA DO BRASIL

Recredenciada pela Portaria Ministerial nº 906 de 17/08/2016 – D.O.U. de 18/08/2016

ASSOCIAÇÃO EDUCACIONAL LUTERANA DO BRASIL

PRÓ-REITORIA ACADÊMICA
DIRETORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA EM SERES HUMANOS

Pelo presente instrumento particular de licença de uso de imagem e voz, ____, portador(a) do CPF de nº ________________________, residente e domiciliado(a) na rua ____, nº _________, na cidade de _______________________________ / ___, doravante denominado(a) Licenciante, autoriza a veiculação de sua imagem e voz, gratuitamente por tempo indeterminado, por Fátima Alessandra Melo da Silva, portador(a) do CPF de nº 638.782.832-53, doravante denominada Licenciada.

Mediante assinatura deste termo, fica a Licenciada autorizada a utilizar a imagem e voz do Licenciante no projeto intitulado Sequência Didática como estratégia de Ensino e Aprendizagem para o desenvolvimento do Pensamento Algébrico nos Anos Finais do Ensino Fundamental, para fins exclusivos de divulgação da Instituição e suas atividades, podendo, para tanto, reproduzi-la ou divulga-la junto à internet, ensino a distância, jornais e todos os demais meios de comunicação, público ou privado, sem qualquer contraprestação ou onerosidade, comprometendo-se a Licenciante a nada exigir da Licenciada em razão do ora autorizado.

Em nenhuma hipótese poderá a imagem e voz do Licenciante ser utilizada de maneira contrária a moral, bons costumes e ordem pública.

E, por estarem de acordo, as partes assinam o presente instrumento em 02 (duas) vias, de igual teor e forma, para que produza entre si os efeitos legais.

_________________________, ___ de, ______________ de ______.

____

Licenciante

No caso de menores de 18 (dezoito) anos, o documento obrigatoriamente deverá ser assinado pelo Representante Legal.

____

Representante Legal

Nome: ____

RG: __________________________ CPF: ____________________

Rua Farroupilha, 8001 – Prédio 14 – Sala 224 - Bairro São José - Canoas/RS - CEP 92.425-900

Fone: (51)3477-9217 - E-mail: comitedeetica@ulbra.br - Home Page: www.ulbra.br/pesquisa

APÊNDICE B – FICHA PERFIL DOS ESTUDANTES

ULBRA UNIVERSIDADE LUTERANA DO BRASIL
Recredenciada pela Portaria Ministerial nº 906 de 17/08/2016 – D.O.U. de 18/08/2016
ASSOCIAÇÃO EDUCACIONAL LUTERANA DO BRASIL

Prezado (a) aluno (a)

Este questionário tem por objetivo a coleta de dados para a pesquisa cujo tema é: Uso de Recursos Didáticos para o desenvolvimento do Pensamento Algébrico.

Solicitamos a gentileza de que você faça-o respondendo o mais fiel possível.

Essa pesquisa é orientada e coordenada pela professora Drª. Claudia Lisete Oliveira Groenwald do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECIM) da Ulbra.

Professora Pesquisadora: Fátima Alessandra Melo da Silva.

1. Dados de identificação:

1.1 Sexo: (   ) Masculino   (   ) Feminino

1.2 Qual a sua idade? ____

1.3 Sua escola é:

( ) Pública   Nome:____

( ) Particular Nome: ____

1.4 Já repetiu de ano: (   ) sim   (   ) não

Em que ano? ____

Em que disciplina? ____

Quantas vezes foi repetente? ____

1.5 Qual a disciplina que você mais gosta? ________________________________

1.6 Qual a disciplina que você menos gosta? _______________________________

1.7 Qual a disciplina que você tem mais dificuldade? _________________________

1.8 A sua escola possui Laboratório para Ensino de Matemática?

(   ) sim   (   ) não   (   ) não sei responder

1.9 Você gosta quando o professor (a) de Matemática usa materiais concretos (papel, embalagens diversas, régua, esquadro, jogos, etc.) para fazer demonstrações matemáticas? ____

1.10 Você costuma realizar as tarefas de casa? _____________________________

APÊNDICE C – TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

ULBRA UNIVERSIDADE LUTERANA DO BRASIL

Recredenciada pela Portaria Ministerial nº 906 de 17/08/2016 – D.O.U. de 18/08/2016

ASSOCIAÇÃO EDUCACIONAL LUTERANA DO BRASIL

DIRETORIA ACADÊMICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

(PARA MENORES DE 12 a 18 ANOS - Resolução 466/12)

OBS.: Este Termo de Assentimento do menor de 12 a 18 anos não elimina a necessidade da elaboração de um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido que deve ser assinado pelo responsável ou representante legal do menor.

Convidamos você, após autorização dos seus pais [ou dos responsáveis legais], para participar como voluntário (a) da pesquisa: (título da pesquisa). Esta pesquisa é da responsabilidade do (a) pesquisador (a) (nome COMPLETO do pesquisador, com endereço completo e CEP/Telefone/e-mail para contato do pesquisador responsável, inclusive para ligações a cobrar) e está sob a orientação de: _____________ Telefone: (___________), e-mail (_______________). Também participam também desta pesquisa os pesquisadores: (_____________________) Telefones para contato: (___________).

Este Termo de Consentimento pode conter informações que você não entenda. Caso haja alguma dúvida, pergunte à pessoa que está lhe entrevistando para que esteja bem esclarecido (a) sobre sua participação na pesquisa. Você não terá nenhum custo, nem receberá qualquer pagamento para participar. Você será esclarecido(a) sobre qualquer aspecto que desejar e estará livre para participar ou recusar-se. Após ler as informações a seguir, caso aceite participar do estudo, assine ao final deste documento, que está em duas vias. Uma delas é para ser entregue aos seus pais para guardar e a outra é do pesquisador responsável. Caso não aceite participar, não haverá nenhum problema se desistir, é um direito seu. Para participar deste estudo, o responsável por você deverá autorizar e assinar um Termo de Consentimento, podendo retirar esse consentimento ou interromper a sua participação a qualquer momento, sem nenhum prejuízo.

INFORMAÇÕES SOBRE A PESQUISA:

- Descrição da pesquisa: informar os objetivos, detalhamento dos procedimentos da coleta de dados, forma de acompanhamento (informar a possibilidade de inclusão em grupo controle ou placebo, se for o caso).
- Esclarecimento do período de participação do voluntário na pesquisa, início, término e número de visitas para a pesquisa. Em caso de pesquisa onde o voluntário está sob qualquer forma de tratamento, assistência, cuidado ou acompanhamento, explicar procedimentos, intervenções ou tratamentos a que será submetido e quais os métodos alternativos (atualmente empregados no atendimento aos pacientes que não estão em pesquisas).

OBS: Em caso de coleta de material biológico, esclarecer com detalhes a quantidade e procedimentos para sua obtenção (Ex.: serão colhidos 20 ml de sangue – 1 colher de sopa – da veia do braço).

- **RISCOS diretos** para o voluntário (prejuízo, desconforto, constrangimento, lesões que podem ser provocados pela pesquisa), informar as formas de amenizar os riscos bem como indenização, ressarcimento de despesas em caso de dano.

➢ **BENEFÍCIOS diretos e indiretos** para os voluntários.
OBS.: Em casos de pesquisas para avaliação de prevalência ou de diagnóstico de doenças, especificar onde será o acompanhamento do paciente após o diagnóstico.

As informações desta pesquisa serão confidenciais e serão divulgadas apenas em eventos ou publicações científicas, não havendo identificação dos voluntários, a não ser entre os responsáveis pelo estudo, sendo assegurado o sigilo sobre a sua participação. Os dados coletados nesta pesquisa (gravações?, entrevistas?, fotos?, filmagens?, etc.) ficarão armazenados em (pastas de arquivo? computador pessoal?), sob a responsabilidade do (pesquisador? Orientador?), no endereço (acima informado ou colocar o endereço do local), pelo período de no mínimo 5 anos. Nem você e nem seus pais [ou responsáveis legais] pagarão nada para você participar desta pesquisa. Se houver necessidade, as despesas para a sua participação e de seus pais serão assumidas ou ressarcidas pelos pesquisadores. Fica também garantida indenização em casos de danos, comprovadamente decorrentes da sua participação na pesquisa, conforme decisão judicial ou extrajudicial.

Este documento passou pela aprovação do Comitê de Ética em Pesquisa Envolvendo Seres Humanos que está no endereço: **Av. Farroupilha, nº 8.001 – prédio 14, sala 224 – Bairro: São José – Canoas/RS, CEP: 92425-900, Tel.: (51) 3477-9217 – e-mail: comitedeetica@ulbra.br.**

____
Assinatura do pesquisador (a)

ASSENTIMENTO DO MENOR DE IDADE EM PARTICIPAR COMO VOLUNTÁRIO

Eu, _______________________________________, portador (a) do documento de Identidade _____________________ (se já tiver documento), abaixo assinado, concordo em participar do estudo ____COLOCAR O TÍTULO DO ESTUDO___, como voluntário (a). Fui informado (a) e esclarecido (a) pelo (a) pesquisador (a) sobre a pesquisa, o que vai ser feito, assim como os possíveis riscos e benefícios que podem acontecer com a minha participação. Foi-me garantido que posso desistir de participar a qualquer momento, sem que eu ou meus pais precisemos pagar nada.
Local e data __________________
Assinatura do (da) menor: ___________________________
Presenciamos a solicitação de assentimento, esclarecimentos sobre a pesquisa e aceite do/a voluntário/a em participar. 2 testemunhas (não ligadas à equipe de pesquisadores):

Nome:
Assinatura:

Nome:
Assinatura:

APÊNDICE D – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

ULBRA UNIVERSIDADE LUTERANA DO BRASIL

Recredenciada pela Portaria Ministerial nº 906 de 17/08/2016 – D.O.U. de 18/08/2016

ASSOCIAÇÃO EDUCACIONAL LUTERANA DO BRASIL

DIRETORIA ACADÊMICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

1. IDENTIFICAÇÃO DO PROJETO DE PESQUISA												
Título do Projeto:												
Área do Conhecimento:								Número de participantes:				
Curso:								Unidade:				
Projeto Multicêntrico		Sim		Não		Nacional		Internacional	Cooperação Estrangeira		Sim		Não
Patrocinador da pesquisa:												
Instituição onde será realizado:												
Nome dos pesquisadores e colaboradores:												

Seu filho **(e/ou menor sob sua guarda)** está sendo está sendo convidado(a) para participar do projeto de pesquisa acima identificado. O documento abaixo contém todas as informações necessárias sobre a pesquisa que estamos fazendo. Sua autorização para que ele participe neste estudo será de muita importância para nós, mas, se retirar sua autorização, a qualquer momento, isso não lhes causará nenhum prejuízo.

2. IDENTIFICAÇÃO DO PARTICIPANTE DA PESQUISA E/OU DO RESPONSÁVEL				
Nome do Menor:			Data de Nasc.:	Sexo:
Nacionalidade:		Estado Civil:	Profissão:	
RG:	CPF/MF:	Telefone:	E-mail:	
Endereço:				

3. IDENTIFICAÇÃO DO PESQUISADOR RESPONSÁVEL		
Nome:		Telefone:
Profissão: Professora	Registro no Conselho Nº:	E-mail:
Endereço:		

Eu, responsável pelo menor acima identificado, após receber informações e esclarecimento sobre este projeto de pesquisa, autorizo, de livre e espontânea vontade, sua participação como voluntário(a) e estou ciente:

1. Da justificativa e dos objetivos para realização desta pesquisa.
(explicar os motivos que justificam a pesquisa, a relevância social e científica do estudo, bem como os objetivos para realização do estudo.)

2. Do objetivo da participação de meu filho.

(descrever o **objetivo** da participação do participante da pesquisa.)

3. Do procedimento para coleta de dados.

(descrever, passo a passo, o **procedimento** para a coleta de dados, inclusive o(s) local(is) e/ou instituição(ões) onde será realizada a pesquisa. Se for o caso, substitua a expressão coleta de dados por **coleta de amostras**, constante no projeto de pesquisa.)

4. Da utilização, armazenamento e descarte das amostras.

(explicar como serão utilizadas as amostras e/ou os dados coletados. Esclarecer se serão utilizados apenas nesta pesquisa e/ou serão (e/ou poderão) ser utilizados em outras pesquisas. Informar como será feito o armazenamento e/ou descarte do material coletado. Se for o caso, substitua a expressão **coleta de amostras** por **coleta de dados**.)

5. Dos desconfortos e dos riscos.

(descrever os **desconfortos** e os **riscos,** prováveis e/ou esperados, **para os participantes da pesquisa,** não para o pesquisador.)

6. Dos benefícios.

(descrever o(s) **benefício(s),** para o participante da pesquisa, para a sociedade e para a ciência, em linguagem leiga, simples e acessível, de fácil compreensão para os participantes da pesquisa.)

7. Dos métodos alternativos existentes.

(quando for o caso, informar os métodos alternativos existentes**,** para que o participante da pesquisa tenha condições de optar ou não pelo método que será utilizado na pesquisa. **Atenção: quando não se tratar de método alternativo, delete este item do seu TCLE.)**

8. Da isenção e ressarcimento de despesas.

(por exemplo: "A minha participação é isenta de despesas e não receberei ressarcimento porque não terei despesas na realização dos exames, com locomoção, com medicamentos, etc., quando for o caso".)

9. Da forma de acompanhamento e assistência.

(descrever os direitos e garantias do participante de pesquisa, específicos para o estudo que está sendo realizado. No caso de o participante da pesquisa receber, ou ser encaminhado para, tratamento e/ou assistência, deve constar o nome da instituição - hospital, clínica, etc. - onde será tratado e/ou assistido.)

10. Da liberdade de recusar, desistir ou retirar meu consentimento.

Tenho a liberdade de recusar, desistir ou de interromper a colaboração nesta pesquisa no momento em que desejar, sem necessidade de qualquer explicação. A minha desistência não causará nenhum prejuízo à minha saúde ou bem-estar físico. Não virá interferir... **completar de acordo com a pesquisa que está sendo realizada**.

11. Da garantia de sigilo e de privacidade.

Os resultados obtidos durante este estudo serão mantidos em sigilo, mas concordo que sejam divulgados em publicações científicas, desde que meus dados pessoais não sejam mencionados.

12. Da garantia de esclarecimento e informações a qualquer tempo.

Tenho a garantia de tomar conhecimento e obter informações, a qualquer tempo, dos procedimentos e métodos utilizados neste estudo, bem como dos resultados finais, desta pesquisa. Para tanto, poderei consultar o **pesquisador responsável (acima identificado)**. Em caso de dúvidas não esclarecidas de forma adequada pelo(s) pesquisador(es), de discordância com os procedimentos, ou de irregularidades de natureza ética poderei ainda contatar o **Comitê de Ética em Pesquisa em Seres Humanos da Ulbra Canoas (RS),** com endereço na Rua Farroupilha, 8.001 – Prédio 14 – Sala 224, Bairro São José, CEP 92425-900 - telefone (51) 3477-9217, e-mail comitedeetica@ulbra.br.

Declaro que obtive todas as informações necessárias e esclarecimento quanto às dúvidas por mim apresentadas e, por estar de acordo, assino o presente documento em duas vias de igual conteúdo e forma, ficando uma em minha posse.

____________( ), _____ de ____________ de ______.

____

Participante da Pesquisa

____

Responsável pelo Participante da Pesquisa

____

Pesquisador Responsável pelo Projeto

APÊNDICE E – AUTORIZAÇÃO DA INSTITUIÇÃO DE ENSINO

ULBRA UNIVERSIDADE LUTERANA DO BRASIL

Recredenciada pela Portaria Ministerial nº 906 de 17/08/2016 – D.O.U. de 18/08/2016

ASSOCIAÇÃO EDUCACIONAL LUTERANA DO BRASIL

Autorização

Eu Rozimeire de Araújo Cruz, responsável pela Escola Estadual Cacílda Braule Pinto, autorizo a professora Fátima Alessandra Melo da Silva, a realizar sua pesquisa de Mestrado Sequência Didática como estratégia de Ensino e Aprendizagem para o desenvolvimento do Pensamento Algébrico nos Anos Finais do Ensino Fundamental, no período dos anos letivos de 2021 e 2022.

SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO E QUALIDADE DO ENSINO
ESCOLA ESTADUAL CACILDA BRAULE PINTO
ATO DE CRIAÇÃO DEC. Nº 5.442/80
MANAUS-AM

Assinatura

Rozimeire de Araújo Cruz
Gestora
E. E. Cacilda Braule Pinto
Port. GS 662 de 24/07/2019

Nome: Rozimeire de Araújo Cruz

CPF nº 347.634.142-91