UNIVERSIDADE LUTERANA DO BRASIL

DIRETORIA ACADÊMICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

ATIVIDADES DIDÁTICAS COM A METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COM DERIVADAS NO ENSINO SUPERIOR

NILTON DE ARAÚJO RIBEIRO

Canoas, 2021.

UNIVERSIDADE LUTERANA DO BRASIL

DIRETORIA ACADÊMICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

NILTON DE ARAÚJO RIBEIRO

ATIVIDADES DIDÁTICAS COM A METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COM DERIVADAS NO ENSINO SUPERIOR

Dissertação apresentada no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Clarissa de Assis Olgin

Canoas, 2021.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação – CIP

R484a Ribeiro, Nilton de Araújo.

Atividades didáticas com a metodologia de resolução de problemas com derivadas no ensino superior / Nilton de Araújo Ribeiro. – 2021.

151 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Luterana do Brasil, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Canoas, 2021.

Orientadora: Profa. Dra. Clarissa de Assis Olgin.

1. Educação matemática. 2. Resolução de problemas. 3. Derivadas. 4. Ensino superior.

Bibliotecária responsável – Heloisa Helena Nagel – 10/981

NILTON DE ARAÚJO RIBEIRO

ATIVIDADES DIDÁTICAS COM A METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COM DERIVADAS NO ENSINO SUPERIOR

Linha de pesquisa: Ensino e Aprendizagem em Ciências e Matemática

Dissertação apresentada no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Data de Aprovação: 16/08/2021

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Silvio Luiz Martins Britto
Faculdades Integradas de Taquara (FACCAT)

Profa. Dra. Claudia Lisete Oliveira Groenwald
Universidade Luterana do Brasil (ULBRA)

Prof. Dr. Agostinho Iaqchan Ryokiti Homa
Universidade Luterana do Brasil (ULBRA)

Profa. Dra. Clarissa de Assis Olgin (Orientadora)
Universidade Luterana do Brasil (ULBRA)

Dedico este trabalho a minha família em especial, aos meus pais Benedito Ribeiro e Maria de Araújo Ribeiro, aos meus irmãos fraternos, e aos meus filhos, Lívia e Thiago.

Se eu alcancei os resultados é porque me apoiei em ombros de Gigantes (Isaac Newton)

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, a quem tenho fé e crédito tudo o que sou e que faço a ele em toda a sua honra e toda glória.

Agradeço ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECIM) e à minha orientadora, Profa. Dra. Clarissa de Assis Olgin, pelo empenho dedicado à elaboração deste trabalho e por me receber como aluno de mestrado, pela persistência e a confiança no meu trabalho, pelos conhecimentos compartilhados, pela compreensão e pelos sábios conselhos compartilhados, bem com uma grande e rica contribuição tanto acadêmica como humana sempre me incentivando e flexibilizando seus horários para que pudéssemos finalizar esta pesquisa.

A minha mãe e o meu pai, que me deram além da vida, o entendimento que a educação muda e pode mudar não só a nossa realidade, mas o nosso caráter e nossa forma de encarar a vida, mesmo com o enfrentamos dos obstáculos.

Aos meus irmãos Nirvana, Nildson, Marcelo e Nildo.

A todos os meus amigos de turma de Mestrado, a quem lhes devo boa parte do conhecimento que adquiri durante esse programa de mestrado.

Agradeço a Banca Examinadora formada pela Profª. Dra. Claudia Lisete Oliveira Groenwald, Prof. Dr. Agostinho Iaqchan Ryokiti Homa, Prof. Dr. Silvio Luiz Martins Britto, pela disponibilidade de fazerem parte das contribuições acadêmicas neste trabalho de mestrado. A todos que, direta ou indiretamente, que fizeram parte da minha formação e dessa nova etapa de novo conhecimento, o meu muito obrigado.

RESUMO

A resolução de problemas é uma metodologia de ensino que intensifica e dinamiza o processo de ensino e aprendizagem, propiciando assim uma união de saberes e conceitos na busca de uma solução, na qual o aluno aprende, exercita, aprofunda e/ou compreende conceitos matemáticos ao longo do processo de sua resolução. A resolução de problemas é uma estratégia que pode ser utilizada para o cálculo de derivadas no Ensino Superior, em que o acadêmico pode ser capaz de construir e reformular o seu aprendizado por meio de situações problemas que o expõe a resoluções que o prepare para alguns desafios no campo de atuação profissional. Dessa forma, esta pesquisa buscou investigar as contribuições da resolução de problemas nas aulas de Matemática Aplicada, do curso de graduação em Arquitetura e Urbanismo do CEUJI-ULBRA, unidade de Ji-Paraná, no estado de Rondônia, em situações de problemas de otimização com a aplicação de derivadas, em especial atenção às estratégias e metodologias adotadas e apresentadas pelos autores Polya e Dante. Para realizar tal investigação propôs-se como objetivo geral investigar as contribuições da utilização da metodologia de resolução de problemas com a aplicação de Derivadas na disciplina de Matemática Aplicada, do curso de Arquitetura e Urbanismo, visando à formação integral do acadêmico, relacionando a teoria Matemática, às situações práticas. Assim, como objetivos específicos têm-se: pesquisar sobre o uso da Resolução de Problemas para o ensino da Derivada, especificamente as aplicações da Derivada no Ensino Superior; implementar (selecionar, aplicar e avaliar) atividades didáticas envolvendo situações problemas com o conteúdo de Derivadas; analisar as potencialidades e/ou limitações das atividades no Ensino Superior quanto ao uso das Resoluções de Problemas no desenvolvimento do conteúdo de Derivadas. A abordagem metodológica está pautada na pesquisa qualitativa, em se descobrir a realidade ou o fenômeno de aproximações sucessivas da realidade**,** que se destacam no caráter subjetivo do objeto em análise**,** observando as suas singularidades e conhecimentos individuais, fazendo uma combinação particular entre a teoria e os dados coletados com o estudo das aplicações do cálculo de derivadas. Para esta pesquisa, o aporte teórico está pautado no Ensino de Cálculo e no uso didático que fazem referências à metodologia de Resolução de Problemas para o Ensino Superior. A aplicação das atividades didáticas com base nos exercícios ocorreu em sala de aula, no Centro Universitário Luterano do Brasil, com os acadêmicos do curso da Graduação em Arquitetura e Urbanismo. A partir da análise realizada, observou-se que é possível aplicar e desenvolver atividades didáticas que envolvam o conteúdo de Derivadas, por meio da resolução de problemas de otimização, de forma a propiciar o desenvolvimento de estratégias para resolução de situações problemas contextualizadas, permitindo assim aos acadêmicos aprofundar e revisar os conhecimentos matemáticos. Ainda, percebeu-se que a prática de ensino em se resolver problemas, pode possibilitar que o acadêmico desenvolva as estratégias e a busca de vários caminhos para solucioná-los à sua maneira, com base em seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos.

Palavras-chave: Educação Matemática. Ensino Superior. Resolução de Problemas. Derivadas.

ABSTRACT

The Problem solving is a teaching methodology that intensifies and streamlines the teaching and learning process, thus providing a union of knowledge and concepts in the search for a solution, in which the student learns, exercises, deepens and/or understands mathematical concepts while throughout the process of its resolution. Problem solving is a strategy that can be used to calculate derivatives in Higher Education, in which the student may be able to build and reformulate his learning through problem situations that expose him to resolutions that prepare him for some challenges in the field of professional performance. Thus, this research sought to investigate the contributions of problem solving in Applied Mathematics classes, of the undergraduate course in Architecture and Urbanism at CEUJI-ULBRA, Ji-Paraná unit, in the state of Rondônia, in situations of optimization problems with the application of derivatives, with special attention to the strategies and methodologies adopted and presented by the authors Polya and Dante. In order to carry out this investigation, the general objective was to investigate the contributions of the use of the problem solving methodology with the application of Derivatives in the Applied Mathematics discipline, from the Architecture and Urbanism course, aiming at the integral formation of the academic, relating to the Mathematics theory, to practical situations. Thus, as specific objectives there are: research on the use of Problem Solving for teaching Derivatives, specifically the applications of Derivatives in Higher Education; implement (select, apply and evaluate) didactic activities involving problem situations with the content of Derivatives; analyze the potential and/or limitations of activities in Higher Education regarding the use of Problem Solving in the development of Derivatives content. The methodological approach is based on qualitative research, on discovering the reality or phenomenon of successive approximations to reality, which stand out in the subjective character of the object under analysis, observing their individual singularities and knowledge, making a particular combination between theory and the data collected by studying the applications of calculus of derivatives. For this research, the theoretical contribution is based on the Teaching of Calculus and on the didactic use that make references to the Problem Solving methodology for Higher Education. The application of the didactic activities based on the exercises took place in the classroom, at the Lutheran University Center of Brazil, with the students of the Undergraduate Course in Architecture and Urbanism. From the analysis performed, it was observed that it is possible to apply and develop didactic activities involving the content of Derivatives, through the resolution of optimization problems, in order to provide the development of strategies to solve contextualized problem situations, thus allowing for academics to deepen and review mathematical knowledge. Still, it was noticed that teaching practice in solving problems can enable the student to develop strategies and search for various ways to solve them in their own way, based on their knowledge of mathematical concepts and procedures.

Keywords: Mathematics Education. University education. Problem Solving. Derivatives.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Esta pesquisa apresenta uma investigação quanto ao conceito e a aplicação de Derivada com a utilização de atividades didáticas de otimização, envolvendo a metodologia de Resolução de Problemas no Ensino Superior, de uma forma específica para o Curso de Arquitetura e Urbanismo, utilizando-se de uma abordagem metodológica qualitativa, na qual se pretendeu compreender e analisar como os acadêmicos participantes da pesquisa desenvolviam as atividades propostas envolvendo o conteúdo de derivadas por meio da Resolução de Problemas.

Nos últimos anos é possível perceber que o ensino da Matemática vem sofrendo intensas adequações e reformulações, visto que o mundo está cada vez mais interligado as inovações e modernidades tecnológicas, onde um método tradicional de ensino se torna cada vez mais distante dessa realidade, devido à necessidade do aluno aprender a se posicionar de forma crítica e perceptiva, destacando assim a função da Matemática, como forma do estudante compreender as estratégias e as ações relacionadas a resolução de problemas para utilizá-las quando necessário em sua vida, em sociedade e no mundo do trabalho (POLYA, 2006).

Entende-se que a resolução de problemas é uma metodologia que intensifica e dinamiza o processo de ensino e aprendizagem, propiciando assim uma união de saberes e conceitos na busca de uma solução, na qual o aluno aprende e compreende conceitos matemáticos ao longo do processo da resolução, além de verificar se as suas interpretações para a resolução do cálculo foram satisfatórias ou não (POLYA, 1986). A resolução de problemas visa o desenvolvimento e a aplicação do raciocínio, podendo incentivar os alunos para o estudo da Matemática, na qual o processo de ensino e aprendizagem pode ser desenvolvido por meio de desafios, problemas interessantes ou relevantes que possam ser explorados e não apenas resolvidos (LUPINACCI; BOTIN, 2004).

Dante (1998) descreve que a resolução de problemas é um dos tópicos mais difíceis de serem trabalhados em sala de aula, pois os alunos sabem efetuar os cálculos, mas não conseguem resolver um problema que envolva um ou mais desses cálculos. Para o autor isso decorre da forma com que os problemas matemáticos são trabalhados na sala de aula e apresentados nos livros didáticos, muitas vezes apenas como exercícios de fixação dos conteúdos trabalhados. Para o autor, um problema pode envolver mais que a simples operação de cálculo, possibilitando ao aluno desenvolver estratégias, buscando vários caminhos para solucioná-lo, de acordo com a sua realidade e conhecimentos específicos para resolvê-lo.

A resolução de problemas, em sala de aula, propicia um ambiente de motivação, bem como se apresenta como uma alternativa para envolver o aluno em processos elaborados de pensamento entre o raciocinar e o calcular. Nessa perspectiva, a resolução de problemas onde objetiva a ensinar, aprender e avaliar o conhecimento matemático desenvolvido pelos alunos, sob a orientação e coordenação do professor, tendo uma forma de se ensinar e aprender de modo contínuo, ou seja, o aluno é atuante durante todo o processo, pois, em meio ao problema, ele deve apresentar-se como responsável pela construção do seu próprio conhecimento (POLYA, 1995, ONUCHIC; ALLEVATO, 2004). Dante (1996) enfatiza que trabalhar a Matemática por meio de situações problemas próprios da vivência dos alunos, que os façam pensar, refletir, analisar, julgar e decidir pela solução adequada irá propiciar um trabalho diferenciado do conteúdo abordado.

Levando-se em consideração o que foi mencionado, pretendeu-se, nesta pesquisa, desenvolver uma aprendizagem dinâmica para que os acadêmicos de Arquitetura e Urbanismo entendam os cálculos de área envolvendo Derivadas de forma crítica e reflexiva. Para isso, foram pesquisadas e selecionadas as atividades didáticas que dessem significado aos conteúdos desenvolvidos na disciplina de Matemática Aplicada, buscando promover o trabalho em grupo por meio da resolução de problemas.

Dessa forma, organizou-se esta dissertação em seis capítulos. O primeiro, “A Pesquisa”, apresenta o problema de pesquisa, bem como os objetivos e a metodologia da investigação.

No segundo capítulo, “Revisão de literatura sobre o tema da pesquisa”, apresentam-se as pesquisas que foram desenvolvidas em programas de pós-graduação, no Brasil, envolvendo o Ensino de Cálculo de Derivadas com a utilização da metodologia de resolução de Problemas no Ensino Superior, tendo como fonte de pesquisa a plataforma do Banco de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

O terceiro capítulo, “Fundamentação Teórica” apresenta aspectos históricos do Cálculo de Derivadas, Ensino da Derivada e a Resolução de Problemas na Educação Matemática.

No quarto capítulo, “Atividades envolvendo o conteúdo de derivadas”, apresentam-se as análises *a priori* das atividades selecionadas, com o conteúdo de derivadas, utilizando a metodologia de resolução de problemas, aplicadas nesta pesquisa.

O quinto capítulo, “Descrição e análise dos dados”, apresenta-se a análise das atividades desenvolvidas pelos do curso de Arquitetura e Urbanismo.

O último capítulo contempla as “Considerações finais”, o qual descreve a importância da resolução de problemas no Ensino Superior, no desenvolvimento do conteúdo de Derivadas.

1 A PESQUISA

Este capítulo apresenta o problema de pesquisa, os objetivos (geral e específicos) e a metodologia da pesquisa.

1.1 PROBLEMA DE PESQUISA

Entende-se que a resolução de problemas é uma metodologia que intensifica e dinamiza o processo de ensino e aprendizagem, propiciando assim uma união de saberes e conceitos na busca de uma solução, na qual o aluno aprende e compreende conceitos matemáticos ao longo do processo da resolução do problema, inserindo assim questões didáticas de cálculo de derivadas, em que o mesmo os possa resolvê-los, utilizando as interpretações matemáticas como métodos de estudo, intensificando assim através de algumas situações problemas ao seu raciocínio nas aplicações que influenciam os seus resultados, integrando-o ao processo de ensino-aprendizagem, bem como compreender onde os alunos apresentam dificuldades, desenvolvendo assim, proposituras para que os mesmos consigam sanar suas dúvidas. Assim se pretende neste trabalho colaborar para reflexões sobre dificuldades e erros matemáticos cometidos pelos alunos ao desenvolverem as atividades com problema de cálculo de otimização envolvendo o conteúdo de derivadas realizadas em sala de aula por meio da resolução de problemas.

Dessa forma, o problema desta pesquisa foi: Quais as contribuições da utilização da metodologia de resolução de problemas nas aulas de Matemática Aplicada, para o estudo das aplicações da derivada, envolvendo atividades didáticas de otimizações, com os acadêmicos do curso de graduação em Arquitetura e Urbanismo do CEUJI-ULBRA, unidade de Ji-Paraná, no estado de Rondônia?

1.2 OBJETIVOS

Neste subcapítulo, apresentam-se os objetivos geral e específicos que conduziram a pesquisa.

1.2.1 Objetivo Geral

O objetivo geral desta pesquisa foi investigar as contribuições da utilização da metodologia de resolução de problemas com a aplicação de Derivadas na disciplina de

Matemática Aplicada, do curso de Arquitetura e Urbanismo, visando à formação integral do acadêmico, relacionando a teoria Matemática, às situações práticas.

1.2.2 Objetivos Específicos

Para atingir o objetivo geral desta pesquisa, foram estabelecidos os seguintes objetivos específicos:

- Pesquisar sobre o uso da Resolução de Problemas para o ensino da Derivada, especificamente as aplicações da Derivada no Ensino Superior;
- Implementar (selecionar, aplicar e avaliar) atividades didáticas envolvendo situações problemas com o conteúdo de Derivadas;
- Analisar as potencialidades e/ou limitações das atividades no Ensino Superior quanto ao uso das Resoluções de Problemas no desenvolvimento do conteúdo de Derivadas.

1.3 METODOLOGIA DA PESQUISA

A metodologia adotada nesta pesquisa se pauta em uma abordagem qualitativa, a qual está contemplada sob a perspectiva de uma pesquisa teórica e prática, no sentido de analisar as principais contribuições em relação ao ensino e a aprendizagem de noções de Cálculo de Derivadas por meio de uma aprendizagem baseada na Resolução de Problemas (DEMO, 1997). Fiorentini (2007, p. 69) “o pesquisador, nesse tipo de estudo, não utiliza dados e fatos empíricos para validar uma tese ou ponto de vista, mas a construção de uma rede de conceitos e argumentos desenvolvidos com rigor e coerência lógica”.

Sendo assim conforme Oliveira (2010), isso envolve a obtenção de dados descritivos, obtidos assim pelo contato direto do pesquisador-professor com a situação estudada em sala, onde para o autor, a ênfase centrar-se no processo de aprendizagem do aluno, ao invés do produto coletado, onde se preocupa em retratar a perspectiva dos participantes-alunos, na pesquisa que se insere ao estudo.

Dessa forma, se entende que podem ser selecionados ou formulados problemas matemáticos, conforme as indicações de Silveira (2001) que requeiram a descoberta de informações matemáticas desconhecidas, ou seja, propor situações nas quais os alunos terão que enfrentar problemas que utilizarão diferentes procedimentos, técnicas, estratégias e hipóteses para chegar à resolução.

Nesse sentido, buscou-se neste estudo, elaborar um conjunto de atividades didáticas baseadas na metodologia de resolução de problemas que possibilitasse aos alunos desenvolver as habilidades de raciocinar e interpretar, bem como ter condições de analisar reflexivamente às situações problemas propostos, visando à formação integral do acadêmico.

Complementa-se que a pesquisa qualitativa como metodologia de investigação é utilizada quando o objetivo do estudo é entender o porquê de certas coisas, como a apuração dos fatos, a percepção, interpretação dos alunos, etc. E, a intenção da pesquisa é contribuir indicando as potencialidades e limitações do uso da metodologia de resolução de problemas, para o ensino do cálculo de área envolvendo o conteúdo de Derivadas, no Ensino Superior. Ainda, Denzin e Lincoln (2006) descrevem a pesquisa qualitativa como sendo uma abordagem interpretativa do mundo, o que significa que seus pesquisadores estudam as coisas em seus cenários naturais, tentando entender os fenômenos em termos dos significados que as pessoas a eles conferem.

Creswel (2007, p. 186), chama a atenção para o fato de que, na perspectiva qualitativa, o ambiente natural é a fonte direta de dados e o pesquisador, o principal instrumento, sendo que os dados coletados são predominantemente descritivos, na qual a análise dos dados tende a seguir um processo indutivo. Nesse sentido, procurou-se desenvolver as atividades com um grupo de acadêmicos do Curso de Arquitetura e Urbanismo, em uma turma do professor/pesquisador, na disciplina de Matemática Aplicada.

Seguindo essa linha de raciocínio, Vieira e Zouain (2005) afirmam que a pesquisa qualitativa atribui importância fundamental aos depoimentos dos atores sociais envolvidos, aos discursos e aos significados transmitidos por eles. Dessa forma, percebe-se que esse tipo de pesquisa preza pela descrição detalhada dos fenômenos e dos elementos que o envolvem.

Outro ponto relevante sobre a pesquisa qualitativa é apresentado por Richardson (1999) em que essa pesquisa é válida em situações em que se evidencia a importância de compreender aspectos psicológicos cujos dados não podem ser coletados de modo completo por outros métodos, devido à complexidade que encerram (por exemplo, a compreensão de atitudes, motivações, expectativas e valores), o que nos traz argumentos em que a realidade é socialmente construída não podendo a mesma ser apreendida, bem como expressa por meio de estudos quantitativos, cujos pressupostos são mais objetivos e gerais, desenvolvendo assim um estudo mais detalhado.

Sendo que neste estudo, foi utilizada uma abordagem metodológica de pesquisa qualitativa, a qual é demonstrada como uma tentativa de se explicar, em profundidade, o significado e as características do resultado das informações obtidas através de atividades, sem a mensuração quantitativa de características ou comportamentos, o que implica em um processo de reflexão e análise dos dados reais, que foram obtidos durante a experimentação (OLIVEIRA, 2013).

Entretanto Firestone (1987) traz em sua descrição que a pesquisa qualitativa tem raízes em um paradigma segundo o qual a realidade é socialmente construída e sua preocupação é a compreensão do fenômeno social, no qual o pesquisador fica "imerso" no fenômeno de interesse, pois:

> [...] colhe informações, examina cada caso separadamente e tenta construir um quadro geral [de uma dada] situação. É um exercício de ir juntando as peças, como num quebra-cabeça, até o entendimento global do problema, (COSTA, 2001, p. 41).

Dessa forma, o pesquisador não precisa se preocupar com a divulgação numérica dos dados obtidos, mas sim na aptidão subjetiva do objeto de estudo, ou seja, o foco reside no aprofundamento da compreensão do objeto pelo grupo que é foco da investigação (MINAYO, 2001).

Nesse sentido, na abordagem qualitativa, os dados serão interpretados e relacionados de acordo com a fundamentação teórica, porém Moreira (2003) complementa que a análise interpretativa assume um papel dentro da pesquisa qualitativa, cujo foco está na narrativa, ao invés dos gráficos e tabelas estatísticas, o pesquisador interpretativo narra o que fez e suas análises dependem de sua interpretação.

Entretanto Araújo e Borba (2004, p. 42-43) enunciam que:

> [...] quando decide-se desenvolver uma pesquisa, parte-se de uma inquietação inicial e, com algum planejamento, não muito rígido, desencadeia-se um processo de busca. Deve-se estar aberto para encontrar o inesperado; o plano deve ser frouxo o suficiente para não "sufocar" a realidade, e, em um processo gradativo e não organizado rigidamente, nossas inquietações vão se entrelaçando com a revisão da literatura e com as primeiras impressões da realidade pesquisada para, suavemente, delinear o foco e o design da pesquisa.

Considerando, os aspectos da pesquisa qualitativa, organizou-se esta investigação nas seguintes etapas:

a) Revisão bibliográfica: Segundo Cervo e Bervian (2002), a revisão de literatura visa identificar referências sobre um determinado assunto, seja em livros, periódicos, repositórios, entre outros, em busca de informações que possam contribuir para um contato inicial com o objeto de pesquisa. Salientam Marconi e

Lakatos (2010) que nessa etapa realiza-se um levantamento que permite identificar os principais trabalhos realizados sobre a temática investigada, bem como pode ajudar na estruturação da pesquisa e evita duplicidade. Dessa forma, neste trabalho foi realizada uma busca no Banco de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), a qual objetivou conhecer e analisar as produções científicas que abordassem a resolução de problemas no Ensino Superior e o cálculo de otimização de derivadas.

b) **Elaboração de questionários:** Conforme Marconi e Lakatos (2010) o questionário configura-se em um instrumento de coleta de dados que possibilita levantar informações a respeito do objeto em estudo, visto que é constituído por um conjunto de perguntas pertinentes e relevantes a pesquisa que são respondidas pelos participantes, sem a intervenção do pesquisador. Nesta pesquisa foram elaborados dois questionários (Apêndices A e B) para levantamento de dados quanto ao perfil individual dos acadêmicos participantes da pesquisa e coleta de informações referentes às atividades propostas.

c) **Aplicação das atividades didáticas:** Refere-se a uma das etapas desta pesquisa, na qual foram desenvolvidas as atividades pelo professor/pesquisador junto a um grupo de acadêmicos participantes da pesquisa[1]. Durante a aplicação foi utilizada a técnica de coleta de dados baseada na observação do pesquisador, pois de acordo com Marconi e Lakatos (2010, p.76) ela permite "conseguir informações e utiliza os sentidos na obtenção de determinados aspectos da realidade", bem como auxilia na identificação e obtenção de dados do estudo, possibilita o contato direto com a realidade estudada e permite a coleta de dados a partir de uma série de atitudes e comportamentos dos participantes.

d) **Análise dos dados coletados:** Conforme o autor Lüdke e André (1986), a análise está presente em vários estágios da investigação, e que se baseia nesta pesquisa qualitativa a partir do referencial teórico adotado, uma análise descritiva pautada em uma investigação que visa descrever e interpretar o objeto estudado, com técnicas de ensino e aprendizagem, que consistiu em agrupar as situações problemas e inserir assim as estratégias em otimizações de cálculo de derivadas e utilizá-las no contexto para a resolução do problema , onde a intenção foi buscar

---

[1]Pesquisa aprovada pelo comitê de ética e pesquisa com seres humanos sob o número - 83252318.4.0000.5297.

resultado e dados descritos em respostas e em relatos dos acadêmicos de suas limitações sobre as suas dificuldades de aprendizagem.

2 REVISÃO DE LITERATURA SOBRE O TEMA DA PESQUISA

Neste capítulo, apresenta-se a revisão literatura realizada no Banco de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), a qual objetivou conhecer, categorizar e analisar as produções científicas, considerando as palavras-chaves: Ensino Superior, Resolução de Problemas e Derivadas. Foram encontrados 1.223 trabalhos entre os períodos de 2015 a 2019 e que expressavam essas palavras em seus títulos, resumos e em suas palavras-chave. Desse total, foram selecionadas nove dissertações que envolviam o tema desta investigação (Quadro 1), pois apenas estas pesquisas abordavam a Resolução de Problemas com aplicação do Cálculo de Derivadas no Ensino Superior.

Quadro 1 - Teses e dissertações envolvendo o ensino das Derivadas

Autor	**Título**	**Ano**	**Instituição**	**Conteúdos/assunto**	**Metodologia de pesquisa**
Marcelo de Araújo Lino	Os Registros de Representação Semiótica na Aprendizagem de Derivada	2015	Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC)	Registros de Representação Semiótica, Derivadas.	Pesquisa qualitativa
Adriele Carolini Waideman	Um aplicativo para o estudo de derivadas	2018	Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)	Ensino de Cálculo, Derivadas, Tecnologias, Aplicativos, Teoria de Registro de Representação Semiótica (TRRS).	Pesquisa qualitativa
Agostinho Iaqchan Ryokiti Homa	Avaliação Diagnóstica Auxiliada por Computador: Identificação das dificuldades dos alunos dos cursos de Engenharia na resolução de problemas com derivadas	2018	Universidade Luterana do Brasil (ULBRA)	Ensino Superior, Derivadas, Avaliação Diagnóstica, Avaliação auxiliada por Computador.	Pesquisa qualitativa
José Cirqueira Martins Júnior	Ensino de Derivadas em Cálculo I: Aprendizagem a partir da visualização com o uso do GeoGebra	2015	Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP)	Visualização, Ensino de Cálculo, Derivadas, Tecnologias da Informação e Comunicação na Educação Matemática, *Software* GeoGebra.	Pesquisa qualitativa
Vanessa Rodrigues Lopes	Aprendizagem em um Ambiente Construcionista: explorando	2015	Universidade Federal do Mato Grosso do Sul (UFMS)	Tecnologias Digitais, Ambiente Virtual de Aprendizagem, WhatsApp,	Pesquisa qualitativa

	conhecimentos de Cálculo I em espaços virtuais			Derivadas, Educação a Distância.	
Maycon Odailson dos Santos da Fonseca	Proposta de Tarefas para um estudo inicial de Derivadas	2017	Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)	Ensino de Matemática, Ensino de Cálculo Diferencial e Integral, Tarefas Matemáticas, Derivadas.	Pesquisa qualitativa
Débora Vieira de Souza	O ensino de noções de Cálculo Diferencial e Integral por Meio da Aprendizagem baseada em Problemas	2016	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP)	Cálculo Diferencial e Integral, Ensino e Aprendizagem, Aprendizagem Baseada em Problemas (PBL).	Pesquisa qualitativa
Rayane Lemke	Funções Reais de duas variáveis e Geogebra: Um Livro Dinâmico para o Ensino de Cálculo	2017	Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC)	Cálculo, *Software* GeoGebra. Funções reais de duas variáveis reais, Objetos de aprendizagem.	Pesquisa qualitativa
Janice Rachelli	Compreensão dos Conceitos de Derivada Clássica e Derivada Fraca: Análise segundo o modelo cognitivo APOS	2017	Centro Universitário Franciscano (UFN)	Educação Matemática, Teoria APÓS (Ação, Processo, Objeto, Sucesso), Cálculo, Derivada.	Pesquisa qualitativa

Fonte: a pesquisa realizada na plataforma CAPES.

Considerando os trabalhos acima selecionados, apresenta-se uma síntese das temáticas destas investigações, bem como o objetivo geral, os conteúdos abordados e os resultados.

A dissertação de Lino (2015) trabalha com a necessidade de se distinguir o objeto matemático de sua representação, sendo necessária, para isso, a utilização de diferentes registros de representação semiótica, o que é possível apenas por meio da habilidade em se realizar dois tipos distintos de transformação, tratamento e conversão. Na presente dissertação, ainda se buscou compreender como as estratégias de coordenação e manipulação de objetos matemáticos que se relacionam entre os registros de representação semiótica, mobilizados e evidenciados pelos estudantes nas aulas de Cálculo Diferencial Integral I, de forma a contribuir para a aprendizagem do conteúdo de Derivada.

Nesse sentido, os resultados obtidos na pesquisa demonstraram que a aprendizagem da derivada se evidencia por meio da tomada de consciência por parte do aluno das especificidades referentes ao tratamento dos registros algébricos da derivada, tanto enquanto limite ou nas regras de derivação, o que se materializa na capacidade de reconhecer a derivada em ambos. Já em relação à conversão, os resultados demonstram que a aprendizagem se evidencia na capacidade de mobilizar de forma coordenada, ao menos dois registros de representação da derivada, em que se destaca a utilização da representação em língua natural como ponto de partida para apresentação do objeto matemático estudado, passando por outras unidades de representação, as quais perpassam simultaneamente pelo registro gráfico, geométrico e algébrico. Apresenta-se no Quadro 2, a síntese da pesquisa de Lino (2015).

Quadro 2 - Síntese da dissertação de Lino

Tema	Os registros de representação semiótica na aprendizagem de derivada.
Objetivo Geral	Investigar a utilização de diferentes registros de representação semiótica para o aprendizado de Derivada.
Conclusão	Conclui- se que os resultados produzidos demonstram que a aprendizagem da derivada se evidencia na tomada de consciência por parte do aluno referente ao tratamento do registro algébrico da derivada. Já em relação à conversão, os resultados demonstram que a aprendizagem se evidencia na capacidade de mobilizar de forma coordenada ao menos dois registros de representação da derivada.

Fonte: adaptado de Lino (2015).

A pesquisa de Waideman (2018) investiga a utilização em que alunos que já cursaram a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral fazem do aplicativo “Derivadas Quis”, desenvolvido para o estudo de derivadas.

Segundo Waideman (2018) o aplicativo proposto é composto por duas fases, sendo que a primeira objetiva, que envolve a realização de uma revisão do conteúdo, enquanto a segunda prioriza o estudo das representações gráficas de funções e suas derivadas. A elaboração das questões da segunda fase fundamentou-se na Teoria de Registro de Representação Semiótica e utilizou ao menos dois registros de representação semiótica em cada questão.

O aplicativo foi testado por 10 alunos voluntários da Licenciatura em Matemática e Engenharia de Produção Agroindustrial, de diferentes anos, de uma universidade estadual. A pesquisa avaliou a usabilidade e eficiência do aplicativo. Percebeu-se que o celular pode se tornar um forte aliado tanto para o ensino, como para a aprendizagem. Entre os fatores apontados, está a possibilidade de utilização do aplicativo para estudo, em modo *offline*, em qualquer tempo e lugar, além da dinamicidade.

No Quadro 3, pode-se observar a síntese da pesquisa de Waideman (2018).

Quadro 3 - Síntese da dissertação de Waideman

Tema	Uso do aplicativo "Derivadas Quis" para o estudo de derivadas.
Objetivo Geral	Aplicativo para estudo de derivadas, podendo o usuário acessar a teoria sobre o tema e questões de revisão (derivada de função real de variável real) e aprofundamento (diferentes conceitos de derivadas, representação gráfica, tratamentos e conversões).
Conclusão	Os resultados apresentados foram que o aplicativo é de fácil acesso pelo celular e pode se tornar aliado tanto para o ensino, como para a aprendizagem do conteúdo de derivadas. Ainda, um dos fatores apontados pelos acadêmicos participantes foi a questão da possibilidade de utilização do aplicativo para estudo, em modo *offline*.

Fonte: adaptado de Waideman (2018).

Homa (2018) descreve em sua tese de doutorado que não buscou encontrar a solução para os problemas de ensino e aprendizagem do Cálculo, mas sim prover mais informações sobre as dificuldades com o conhecimento matemático relacionado ao pensamento variacional. O autor investigou um modelo de avaliação diagnóstica fundamentado na análise de erro, executável em um sistema de avaliação computacional que identifica as dificuldades dos alunos dos cursos de Engenharias na resolução de problemas envolvendo os conceitos de Derivadas.

Os resultados apontaram que o sistema denominado Avaliação Diagnóstica Auxiliada por Computador (ADAC) identificou de forma satisfatória as dificuldades matemáticas, estando as mesmas, associadas às habilidades e competências gerais necessárias à resolução de problemas com Derivadas, dos alunos participantes do experimento.

O Quadro 4 apresenta a síntese da pesquisa de Homa (2018).

Quadro 4 - Síntese da dissertação de Homa

Tema	Avaliação Diagnóstica Auxiliada por Computador, visando a identificação das dificuldades dos alunos dos cursos de Engenharia na resolução de problemas envolvendo o conteúdo de derivadas.
Objetivo Geral	Investigar um modelo de avaliação diagnóstica fundamentado na análise de erro, executável em um sistema de avaliação computacional que identifica as dificuldades dos alunos de engenharias na resolução de problemas envolvendo os conceitos de Derivadas.
Conclusão	Considera-se que a pesquisa realizada levou a uma resposta positiva para o objetivo geral de investigar um modelo de avaliação diagnóstica fundamentado na análise de erro, executável em um sistema de avaliação computacional que identifica as dificuldades dos alunos de cursos de Engenharia na resolução de problemas envolvendo os conceitos de Derivadas.

Fonte: adaptado de Homa (2018).

Martins Júnior (2015) coloca como forma objetiva a discussão sobre as contribuições da realização de atividades exploratórias para a aprendizagem de diversos conteúdos relacionados a derivadas de funções reais de uma variável real, no ensino de Cálculo I, a partir da visualização proporcionada pelo *software* GeoGebra. A pesquisa do autor é fundamentada por estudos sobre a Educação Matemática no Ensino Superior, com foco no Ensino de Derivadas em Cálculo e na Visualização proporcionada pelas Tecnologias da Informação e Comunicação na Educação Matemática (TICEM), onde os resultados obtidos apontam que a visualização proporcionada pelo *software* GeoGebra contribuiu para uma ressignificação de diversos conceitos e propriedades de derivadas que são requisitados na construção de gráficos de funções reais, além de destacar como fundamental, nos processos de ensino e aprendizagem de Cálculo I, pois viabiliza um equilíbrio entre os processos visuais e os processos algébricos.

No Quadro 5, pode-se observar a síntese da pesquisa de Martins Júnior (2015).

Quadro 5 - Síntese da dissertação de Martins Júnior

Tema	Ensino de Derivadas em Cálculo I, por meio da aprendizagem a partir da visualização com o uso do Geogebra.
Objetivo Geral	Identificar e analisar as possíveis contribuições da utilização do *software* GeoGebra aos processos de ensino e aprendizagem de Cálculo I, a partir da realização de atividades de construção e interpretação de funções e gráficos.
Conclusão	As atividades exploratórias desenvolvidas para a pesquisa, com o uso do *software* matemático GeoGebra, apontam para a preparação do professor em conhecimento pedagógico e conhecimento específico, com um saber que oriente para um ensino em que a sua participação seja a de mediador na aprendizagem dos alunos, proporcionando a construção das etapas para a realização de experimentação, conjectura e exploração, durante a construção dos conhecimentos relacionados ao tópico de derivadas.

Fonte: adaptado de Martins Júnior (2015).

Lopes (2015) buscou analisar a aprendizagem de derivadas de funções em um ambiente construcionista, em uma disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, ofertada em formato de educação bimodal (parte presencial e parte a distância), onde foi criado um ambiente construcionista composto por uma proposta de atividades desenvolvidas com o *software* GeoGebra, em um Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA).

De acordo com Lopes (2015) se pode observar que a aprendizagem dos alunos nesse processo esteve relacionada à atitude da professora e dos alunos como habitantes no AVA, ao vivenciarem a abordagem do “Estar Junto Virtual”, sendo que a aprendizagem ocorreu a partir da/na interação entre professora e alunos e entre alunos em espaços virtuais de aprendizagem, bem como a proposta desenvolvida em um ambiente construcionista favoreceu os processos de aprendizagem dos conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral, oportunizando momentos de reflexão e interação entre alunos e professora, e entre alunos.

No Quadro 6, tem-se a síntese da pesquisa de Lopes (2015), apresentando aspectos relacionados à temática da pesquisa, o objetivo e as considerações finais do autor.

Quadro 6 - Síntese da dissertação de Lopes

Tema	Aprendizagem em um Ambiente Construcionista para o desenvolvimento dos conhecimentos de Cálculo I em espaços virtuais.
Objetivo Geral	Analisar a aprendizagem de Derivadas de funções em um ambiente construcionista, em uma disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I.
Conclusão	Pode-se perceber as possibilidades de aprendizagem que emergem a partir da interação entre professores e alunos e entre os alunos em AVA, organizado em uma abordagem construcionista, considerando assim que a aprendizagem do aluno está diretamente relacionada à atitude por ele assumida no espaço virtual.

Fonte: adaptado de Lopes (2015).

Fonseca (2017) descreve em seu estudo que a proposição de tarefas pode oportunizar aos estudantes a exploração de ideias necessárias à compreensão do conceito de derivadas, em especial tarefas a serem aplicadas em momentos que iniciam o estudo de derivadas, em sua abordagem formal.

O autor demonstra a sequência de tarefas e apresenta subsídios para a compreensão do conceito inicial sobre derivadas, observando o papel ativo do aluno nas resoluções e o papel de mediação do professor, que durante a execução da tarefa contribuem para o processo de ensino, na qual o conceito de derivadas não é previamente apresentado para os alunos/grupos, mas sim sistematizado durante a aula, no qual salienta que essa proposta de tarefas é uma sugestão para o professor, na qual este tem autonomia para analisar, selecionar e adequar as tarefas conforme suas reais situações de sala de aula. Espera-se que esta sequência de tarefas contribua com o trabalho docente e na construção de conceitos iniciais sobre o tema derivadas no ensino de Cálculo Diferencial e Integral.

No Quadro 7, pode-se observar o tema, o objetivo geral e as considerações finais da pesquisa de Fonseca (2017).

Quadro 7 - Síntese da dissertação de Fonseca

Tema	Proposta de tarefas para um estudo inicial de Derivadas.
Objetivo Geral	Organizar tarefas que integrem um ambiente educacional para a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, em especial tarefas a serem aplicadas em momentos que antecedem o estudo de derivadas.
Conclusão	Pode-se notar indícios de aprendizagem do conceito de derivadas, uma vez que os alunos manipularam e exploraram itens necessários para a compreensão desse conceito, como: sequência de diferenças e quociente de diferenças (taxa de variação média e instantânea), na qual de forma intuitiva estabeleceram o conceito de derivada em um ponto.

Fonte: adaptado de Fonseca (2017).

Souza (2016), por meio do seu estudo de pesquisa explora um ponto de vista teórico, abordando as potencialidades (possíveis vantagens, desvantagens ou entraves) no uso de uma metodologia ativa, no caso a Aprendizagem Baseada em Problemas, no ensino e na aprendizagem de noções de Cálculo Diferencial e Integral (CDI), sob uma perspectiva transdisciplinar, tendo assim uma abordagem qualitativa, a qual está contemplada sob a perspectiva de uma pesquisa teórica, isso no sentido de analisar as principais contribuições teóricas em relação ao ensino e aprendizagem de noções de Cálculo por meio da Aprendizagem Baseada em Problemas.

O autor conclui que por meio da inserção de problemas motivadores, reais ou realísticos, almejou-se amenizar os entraves observados no ensino e na aprendizagem de Cálculo, bem como promover a construção de conhecimentos transdisciplinares.

No Quadro 8, apresenta a síntese da pesquisa de Souza (2016), referente ao ensino de cálculo por meio de metodologias ativas.

Quadro 8 - Síntese da dissertação de Souza

Tema	O ensino de noções de Cálculo Diferencial e Integral por Meio da Aprendizagem baseado em Problemas, utilizando metodologias ativas.
Objetivo Geral	Explorar do ponto de vista teórico, quais são as potencialidades (possíveis vantagens, desvantagens ou entraves) no uso de uma metodologia ativa, no caso o PBL, no ensino e na aprendizagem de noções de Cálculo Diferencial e Integral (CDI), sob uma perspectiva transdisciplinar.
Conclusão	Para Souza (2016) o processo de ensino e aprendizagem, onde simplesmente se falar sobre os conceitos de CDI, provavelmente o estudante esquecerá; se mostrar como se faz, por meio das definições e técnicas, possivelmente ele lembrará; mas, se conseguir envolvê-lo, de modo ativo e significativo, certamente, ele compreenderá aquilo que se pretende ensinar. Complementa o autor que a partir dessa pesquisa, se espera que novas reflexões acerca do uso de uma metodologia de ensino ativa, em especial, o PBL, possam ser direcionadas à área de Cálculo.

Fonte: adaptado de Souza (2016).

A pesquisa de Lemke (2017) foi um estudo qualitativo, que tratou sobre o ensino de Cálculo, especialmente, o ensino de funções reais de duas variáveis reais e alguns tópicos de derivadas parciais, como interpretação geométrica e taxa de variação, utilizando um material interativo (Livro Dinâmico), que apresentava propostas de atividades, questionamentos, situações-problemas e objetos de aprendizagem desenvolvidos no *software* GeoGebra. As análises dessas aplicações auxiliaram na melhoria do material produzido, bem como ajudou a refletir sobre potencialidades e desafios da inserção de objetos de aprendizagem em sala de aula, tanto no processo de ensino, como na avaliação mediada por essas tecnologias.

No Quadro 9, pode-se observar a síntese da pesquisa de Lemke (2017), referente a utilização de um livro dinâmico para o ensino de derivadas.

Quadro 9 - Síntese da dissertação de Lemke

Tema	Construção de um livro dinâmico para o estudo das funções reais de duas variáveis com a utilização do *software* Geogebra.
Objetivo Geral	Trazer uma abordagem dinâmica para o ensino de derivadas parciais e algumas de suas aplicações, mediada por recursos dinâmicos do *software* GeoGebra.
Conclusão	Segundo Lemke (2017) o material interativo elaborado auxiliou na reflexão sobre as potencialidades e os desafios da inserção de objetos de aprendizagem em sala de aula, tanto no processo de ensino, como na avaliação mediada por essas tecnologias, contribuindo assim para o ensino de cálculo tanto pela dinamicidade a que ele oferece, como pela sua visualização, uma vez que conceitos, por exemplo, como de taxa de variação, como o próprio nome indica é um conceito dinâmico e que se somente trabalhado no ambiente do lápis e do papel pode não possibilitar muitas simulações e experimentações.

Fonte: adaptado de Lemke (2017).

E por fim na pesquisa de Rachelli (2017), tem-se uma descrição quanto a compreensão dos conceitos de derivada clássica e derivada fraca por estudantes de um curso de mestrado em Ensino de Matemática, sob a perspectiva teórica e metodológica do modelo cognitivo APOS, cuja sigla vem das palavras ***A****ction*, ***P****rocess*, ***O****bject* e ***S****ucess* (Ação, Processo, Objeto, Sucesso), utilizando se de uma abordagem com diferentes noções da derivada ao longo da história, com início na derivada clássica até chegar ao conceito de derivada fraca, tendo como base a decomposição genética, proporcionando aos alunos o desenvolvimento de mecanismos mentais de abstração em que a reflexão seja utilizada na resolução de problemas matemáticos.

Para Rachelli (2017), os estudantes foram capazes de realizar atividades fundamentais, utilizando corretamente os conceitos de derivada clássica e de derivada fraca para a resolução de problemas matemáticos, eles tiveram a compreensão destes conceitos, onde se vislumbrou com perspectivas para futuras investigações.

No Quadro 10, pode-se observar a síntese da pesquisa de Rachelli (2017), o qual apresenta o tema, o objetivo e as considerações finais da pesquisa realizada.

Quadro 10 - Síntese da dissertação de Rachelli

Tema	Compreensão dos conceitos de derivada clássica e derivada fraca, utilizando análise segundo o modelo cognitivo APOS.
Objetivo Geral	Investigar como se dá a compreensão dos conceitos de derivada clássica e derivada fraca por estudantes de um curso de mestrado em Ensino de Matemática, sob a perspectiva teórica e metodológica do modelo cognitivo APOS.
Conclusão	Segundo Rachelli (2017), o estudo permitiu concluir que os estudantes foram capazes de realizar atividades envolvendo o conteúdo de derivadas na resolução de problemas matemáticos, bem como, apontou que é preciso estudo que tratem com mais detalhes a passagem da derivada de função de uma variável para as derivadas parciais de funções de duas ou mais variáveis com a utilização do referencial teórico e metodológico APOS em cursos de Cálculo na graduação, quando os estudantes estão construindo o conceito de derivada clássica.

Fonte: adaptado de Racheli (2017).

A partir da revisão bibliográfica, se percebe a necessidade de propor uma sequência de atividades envolvendo os conteúdos de Derivadas, utilizando a resolução de problemas, pois se percebe que ainda existem poucos trabalhos que envolvam este conteúdo. É nesse ponto de vista que algumas pesquisas sobre o Cálculo de Derivadas buscam demonstrar as concepções dos estudantes desenvolvidas em ambientes de sala de aula, com o auxílio do professor. Diante disso pode-se verificar o quanto a resolução de problemas os auxilia e se torna importante no processo de ensino e aprendizagem do Cálculo, uma vez que professores dessa disciplina podem utilizar essa metodologia para auxiliar nas dificuldades que os acadêmicos apresentam no processo de ensino e aprendizagem do conteúdo de Derivadas.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo se apresenta os referenciais teóricos a respeito da história do cálculo derivada baseada nos autores Baron (1985), Bardi (2010), Santana (2010), Santos (2011), Russo (2017) e Stewart (2013), o ensino da derivada, utilizando as pesquisas de Catapani (2001), Barbosa (2004), Zuin (2001), Villarreal (1999), D'Avoglio (2002) e Rezende (2003), e a resolução de problemas a partir das ideias dos pesquisadores Polya (1978, 1995), Dante (1998, 2006, 2009), Echeverría e Pozo (1998) e Allevato e Onuchic (2014).

3.1 A HISTÓRIA DO CÁLCULO DE DERIVADAS

O conceito de derivadas surgiu com Pierre Fermat no século XVII, por meio de seus estudos sobre funções, ele chegou a um impasse sobre a definição do que era uma reta tangente, percebendo que algumas das funções estudadas não batiam com a definição de reta tangente da época, onde ficou conhecido como "problema da tangente".

Foi assim, então, que ele começou a resolver o problema da seguinte maneira: para determinar uma reta tangente a uma curva no ponto P, ele definiu outro ponto Q na curva e a considerou a reta PQ, aproximando o ponto Q ao ponto P, obtendo assim retas PQ que se aproximavam de uma reta *t* que Fermat chamou de reta tangente ao ponto P. Estas foram as ideias consideradas que deram início ao conceito de derivadas. Entretanto, Fermat não possuía as ferramentas necessárias, por exemplo, quanto ao conceito de limite, por ainda não ser conhecido na época (SANTANA, 2010).

O Cálculo como é conhecido atualmente, se desenvolveu por meio de combinações de problemas e teorias, os quais fomentaram diferentes formulações, que, por sua vez, geraram os conceitos, teorias e técnicas apropriadas para resolvê-los.

Há de se ressaltar de forma histórica, que o modelo geométrico teve influência direta no desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral. Por um lado, a diferenciação, que foi desenvolvida paralelamente com problemas relacionados à construção de retas tangentes a uma determinada curva; de outro lado; a integração, que se desenvolveu a partir de problemas de quadraturas de curvas, ou seja, determinação de áreas de regiões limitadas por uma curva, eixos e ordenadas, conforme descrito por Baron (1985) e Stewart (2013).

Porém foi apenas com Leibniz e Newton que o cálculo diferencial se tornou possível e importante para as ciências exatas. Newton desenvolveu a sua teoria voltada para as taxas de variação e Leibniz concentrou-se no cálculo da derivada como sendo uma diferencial. Assim, Leibniz criou fórmulas para denotar a derivada e as diferenciais e depois estabeleceu regras de derivação, conforme apresentado por Santana (2010) e Stewart (2013).

Gottfried Wilhelm Leibniz nasceu em Leipzig na Alemanha em 1646, ingressou na Universidade em 1661 aos 15 anos, onde estudou Teologia, Direito, Filosofia e Matemática e aos 17 anos adquiriu seu diploma de bacharel. Recebeu seu título de doutor aos 20 anos pela Universidade de Altdorf, em Nuremberg.

Segundo Santos (2011), Leibniz ingressou na vida diplomática, nunca deixando de lado suas pesquisas na Matemática. Suas contribuições para o Cálculo começaram no ano de 1675, quando publicou seu primeiro teorema, o qual tratava do que se conhece hoje em dia, Integração por Partes, e a partir daí suas contribuições não paravam de surgir. Sua simbologia para as derivadas e para as integrais são as que mais se assemelham com as que se utilizam atualmente.

Sendo assim, foi Leibniz quem introduziu as notações dx, dy, dz e $\int$ em seu trabalho Acta Eruditorum, escrito em conjunto com Johann Bernoulli (1667-1748), tal trabalho trata do Cálculo Diferencial e Integral (RUSSO, 2017).

Já Isaac Newton (1643-1727) nasceu em Woolsthorpe, perto de Licolnshire na Inglaterra. Sua vida pode ser dividida em três períodos distintos, o primeiro foi o que se pode chamar de sua infância, de 1643 a 1669. O segundo período foi de 1669 a 1687, o qual foi altamente produtivo, sendo que lecionou em Cambridge. E o terceiro período foi de 1687 até sua morte, onde atuou como funcionário do governo inglês altamente remunerado em Londres, mais voltado à pesquisa matemática. Suas contribuições para o Cálculo começaram no ano de 1665 ao desenvolver a simbologia para os fluxões, ou como é conhecida, notação de "pontos", e foi com essa simbologia que Newton desenvolveu seu Método de Fluxões e Fluentes, que se equivale ao Cálculo Diferencial e Integral de Leibniz (SANTOS, 2011). Essa parte da Matemática é mais conhecida por se relacionar aos cálculos de derivadas e integrais. Ou seja, são ferramentas que ajudam a calcular números muito pequenos, mas que são maiores que zero.

Newton e Leibniz sintetizaram dois conceitos, que é denominada derivada e integral, bem como desenvolveram as ferramentas para gerenciá-los, mostraram que são conceitos inversos e ensinaram como se usar uma forma unificada para se resolver problemas que até então estavam sob o estudo de caso a caso, possibilitando que o cálculo infinitesimal tão versátil, para a resolução de problemas em diferentes áreas como a

Matemática, a Física, a Tecnológica e a Economia. A derivada é, por exemplo, um conceito fundamental na Física, pois explica acelerações, velocidades instantâneas e forças (STEWART, 2013).

Já a outra definição de Cálculo, diferenciais e integrais, é apresentada pelo autor Jason Sócrates Bardi em seu livro “A Guerra do Cálculo”. De acordo com ele, Cálculo se descreve como:

> [...] um conjunto de conhecimentos, é um tipo de análise matemática que pode ser usado para estudar grandezas em mudanças – corpos em movimento, por exemplo. Basicamente, o Cálculo é um conjunto de ferramentas matemáticas para analisar esses corpos em movimento (BARDI, 2010, p.22).

Ainda, Bardi (2010), explica que com o cálculo pode-se expressar uma variável em termos da outra. Sendo considerado um dos maiores avanços matemáticos desde os tempos dos gregos, com ele tornou-se possível a resolução de problemas da Geometria (BARDI, 2010). Já, quanto às diferenças, ele descreve que serão “pequenos acréscimos ou decréscimos instantâneos em grandezas que variam” (BARDI, 2010, p.22).

O cálculo diferencial surgiu como uma ferramenta para minimizar os cálculos realizados, fazendo com que o resultado fosse mais preciso. Segundo Stewart (2013), os problemas aplicados em nosso cotidiano estão inseridos na otimização, visto que existem:

> [...] aplicações práticas em muitas situações do dia a dia. Um homem de negócios quer minimizar os custos e maximizar os lucros. Um viajante quer minimizar o tempo de transporte. O Princípio de Fermat na óptica estabelece que a luz segue o caminho que leva o menor tempo. Resolver problemas tais como maximizar áreas, volumes e lucros e minimizar distâncias, tempo e custos (STEWART, 2013, p.294).

A definição de derivada como é conhecida hoje, deve-se também a Cauchy que a apresentou por volta de 1823, como razão de variação infinitesimal, embora Newton e Leibniz, já no século XVII tenham utilizado os fundamentos desse conceito como método para relacionar problemas de quadraturas e tangentes (SANTANA, 2010).

Portanto, os registros das derivadas explorados no decorrer da história, demonstram o caminho que foi percorrido até os dias atuais, em destaque com muitas formas possíveis e diferentes, facilitando seu uso, dando ao seu usuário a escolha de um registro de anotação ou notação mais eficaz no problema a ser resolvido (SANTANA, 2010).

3.1.1 Ensino da Derivada

No estudo matemático a derivada é considerada um dos conceitos fundamentais do Cálculo, onde se tem uma interpretação significativa no contexto teórico e em sua aplicação na prática. Para Zuin (2001), as derivadas estão presentes em diversas situações cotidianas relacionadas ao movimento e à variação, como exemplo tem-se:

> O cálculo da distância percorrida por um corpo em movimento, sua velocidade e aceleração; comprimentos de curvas; áreas; volumes; analisar os valores de máximo e mínimo de uma função; relacionar declividade de uma curva e taxa de variação, são alguns dos problemas, entre muitos outros, que levaram ao desenvolvimento do Cálculo (ZUIN, 2001, p. 14).

A derivada tem sido um dos tópicos do Cálculo Diferencial e Integral em que os alunos apresentam dificuldades de aprendizagem, tanto na questão de compreender o problema, como na concepção em se resolver o problema, pode se perceber esse fato nas pesquisas relacionadas ao ensino de derivadas, pois sinalizam que há problemas nesse processo e apontam caminhos a serem seguidos para superar essas dificuldades intrínsecas ao processo (CATAPANI, 2001; BARBOSA, 2004).

Villarreal (1999, p. 7) relata que “o conceito de derivada mostra-se como uma noção que apresenta dificuldades frequentes e persistentes para os estudantes e sua compreensão é de fundamental importância nos cursos de Cálculo”, onde se define que a derivada é um conceito que pode ser explorado a partir de diversos focos: derivada como um limite, como inclinação da reta tangente a uma curva em um ponto dado, além de situações que envolvem taxa de variação, máximos e mínimos.

Existem pesquisas, como as de Pinto (2010), Rossi (2012) e Weigand (2014) que descrevem que os conceitos fundamentais do Cálculo (números, limites, derivadas e integrais) são fontes de dificuldades dos estudantes que cursam o Ensino Superior, colocando as causas das dificuldades relacionadas ao ensino e à aprendizagem de conteúdos básicos anteriores as disciplinas de Cálculo. Ressalta Rezende (2003) que essas dificuldades no ensino e aprendizagem do cálculo podem ser advindas de dificuldades de natureza epistemológicas ou/e dificuldades relacionadas aos métodos de ensino utilizados. Segundo o autor, há pesquisas que defendem as ideias de abordagens básicas do Cálculo, antes do aluno chegar ao Ensino Superior, por meio de abordagens adequadas e bem formuladas, a fim de amenizar as dificuldades na transição do Ensino Médio para o Ensino Superior, especialmente no que diz respeito às dificuldades enfrentadas no ensino e na aprendizagem de conceitos que são específicos de Cálculo Diferencial e Integral. Rezende (2003) causas observa que:

> [...] a ausência das ideias e problemas essenciais do Cálculo no ensino básico de matemática, além de ser um contrassenso do ponto de vista da evolução histórica do conhecimento matemático, é, sem dúvida, a principal fonte dos obstáculos epistemológicos que surgem no ensino superior de Cálculo (REZENDE, 2003, p. 402).

Entretanto, uma das possíveis para as dificuldades dos alunos na aprendizagem do conceito de derivada pode estar relacionada a dificuldades na aprendizagem de limite de um cálculo de áreas, que acarretam assim, como consequência, dificuldades em derivadas, decorrentes do fato de a derivada ser um limite, a que se destina a uma variável de uma equação (REZENDE, 2003).

D'Avoglio (2002) menciona que a dificuldade está na compreensão do conceito de derivada de uma função em um ponto, quando definida de modo formal, a partir do conceito de limite. O autor, objetivando verificar qual era o conhecimento sobre o conceito de derivada de alunos que já haviam estudado o assunto, aplicou um teste de sondagem e identificou que os alunos trocam:

> Derivada com reta tangente, derivada num ponto com a função derivada, derivada com regra para se achar derivada, reta tangente com coeficiente angular da reta tangente e, que muitos apresentam dificuldade de expressão (D'AVOGLIO, 2002, p. 27).

D'Avoglio (2002) apresenta assim evidências de que a introdução do conceito de derivada de uma função em um ponto, partindo do conceito de velocidade, por ser algo conhecido do aluno, contribuiu positivamente para o processo de aprendizagem. Para o autor, assim possível associar um conhecimento anterior ao novo conhecimento, onde o novo conceito passou a ter algum significado, despertando, assim, o interesse dos alunos, pois o estudante do curso universitário está em busca de uma formação sólida que o capacite para o mercado de trabalho, bem como o ensine a resolver problemas. Ainda, considera-se importante que o estudante conheça as aplicações dos conceitos desenvolvidos pelo professor de Cálculo, para que os conteúdos estudados passem a ter algum significado prático.

A partir desse ponto de vista é necessário que os alunos conheçam os instrumentos do Cálculo, que possam explorar os conceitos e as aplicações de forma contextualizada, visto que:

> [...] essa prática contextualizada exige do aluno uma associação de vários conteúdos estudados em outras disciplinas, bem como práticas vivenciadas. Por outro lado, o professor, enquanto articulador, mediador e aprendiz, ampliam seus conhecimentos, gerando assim uma prática cotidiana mais significativa para o ensino do Cálculo Diferencial e Integral (BARBOSA, 2004, p. 42).

Quando se discute sobre o ensino de derivadas, pode-se perceber que o foco dos alunos, muitas vezes, fica restrito à aplicação de regras de derivação, se tornando assim necessária a utilização de algum conceito para o desenvolvimento de alguma atividade, onde os alunos geralmente apresentam dificuldades em sua realização. Porém uma possível causa para esse fato ocorrer é que os alunos não estão familiarizados a resolver situações problemas em que seja necessária a utilização/aplicação dos conceitos (BARBOSA, 2004).

Barbosa (2004) identifica em sua pesquisa que a maior parte dos alunos por ele investigado dedicam apenas poucas horas extraclasses para os estudos, e, quando estudam, muitas vezes o foco é dado à resolução de exercícios, geralmente resolvidos de forma mecânica, somente aplicando regras sem significados. Complementa o autor que, os alunos, sozinhos, muitas vezes não são capazes de estabelecer relações entre as disciplinas matemáticas e sua aplicação prática em seu curso. Barbosa (2004) afirma que:

> A contextualização do saber é uma ferramenta indispensável para a questão da transposição didática, pois implica recorrer a contextos que tenham significado para o aluno, envolvendo-o não só intelectualmente, mas também afetivamente, sendo assim uma estratégia fundamental para a construção de significados. Sabemos que a falta de sentido da aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral origina-se, em parte, das dificuldades decorrentes dessa transposição. O aluno só compreende os vínculos do conteúdo estudado quando fica compreensível para ele essa passagem. Por isso, contextualizar no ensino de Cálculo vincularia os conhecimentos aos lugares onde foram criados e onde são aplicados, isto é, incorporar vivências concretas ao que se vai aprender e incorporando o aprendizado a novas vivências (BARBOSA, 2004, p. 41).

Dificuldade estas que também são enfrentadas pelos docentes de Matemática que, geralmente, têm uma formação matemática formal, onde eles mesmos desconhecem algumas aplicações, embora a formação do docente em Matemática, muitas vezes, não o desperta em relação à aplicação dos conteúdos, cabe ao professor da disciplina de Cálculo buscar esse conhecimento para ser explorado em sala de aula, pois as aplicações podem ser uma forma de estimular e motivar os estudantes para o estudo desse conteúdo.

3.2 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

De acordo com Polya (1995) e Dante (1998) a resolução de problemas matemáticos pode ser descrita como sendo qualquer tipo de situação que exija do indivíduo condições para que chegue a solucioná-lo, utilizando seus conhecimentos matemáticos. Segundo Polya (1995) a resolução de problemas como uma metodologia de ensino, na qual interessa-se por resolver problema, se deve a ideia de apreender e compreender uma situação proposta, bem como, possibilita relacionar os conteúdos matemáticos as outras áreas de conhecimento, os colocando em prática e se atentando aos procedimentos de cálculos matemáticos. Assim pode-se perceber como esse conhecimento auxilia na resolução de problemas advindos do seu entorno, de tarefas cotidianas e até em situações que precisam de raciocínio complexo.

Ainda, para o autor quando se fala em resolução de problemas, o mesmo não se torna o bastante apenas para explicar e ensinar o aluno a resolver problemas, mas sim incentivá-lo a propor soluções, partindo da realidade que o cerca e do seu cotidiano, sendo assim um merecedor de sua dedicação ao estudo, habituando-se ao ato de resolver problemas, visando buscar respostas aos seus questionamentos e indagações, para isso ele irá se envolver em um processo de reflexão sobre a situação posta, bem como terá que tomar decisões, quanto ao caminho a ser traçado para determinar uma solução.

A relação entre a Resolução de Problemas e a Educação Matemática é descrita, por Schroeder e Lester (1989, p. 31), sob três formas de apontamentos:

> Ensinar sobre resolução de problemas: Esta abordagem refere-se basicamente a Polya (2006), que sugere um modelo, mostrando como o professor pode trabalhar sobre resolução de problemas. Esse modelo estabelece quatro fases distintas: compreender o problema, estabelecer um plano, executar o plano e fazer um retrospecto reconsiderando e reexaminando o resultado final e o caminho que levou à solução;
>
> Ensinar para resolver problemas: Esta abordagem refere-se a ensinar a matemática necessária para resolver problemas. Neste aspecto, o professor se concentra na maneira como a matemática é ensinada e o que dela pode ser aplicada na resolução de problemas rotineiros e não-rotineiros;
>
> Ensinar através da resolução de problemas: Nesta abordagem, o professor tem por objetivo levar o aluno a produzir um novo conhecimento. Para isso, ele deve propor um problema e, durante sua resolução, novos conceitos, conteúdos ou procedimentos vão sendo evidenciados de forma que o aluno possa construir novos conhecimentos.

Na Educação Matemática a resolução de problemas é uma das tendências atuais, tendo como objetivo a proposição no desenvolvimento de conceitos matemáticos.

É nessa conjuntura que a matemática se tornará algo em contento, desafiador e, consequentemente, por meio dela, o aluno desenvolverá capacidades gerais de raciocínio, sendo que muitos estudiosos da área da Educação Matemática, como por exemplo, os autores Polya (2006) e Onuchic (1999) têm defendido a ideia em se utiliza as situações-problema como um meio de ensinar e aprender a Matemática desenvolvendo assim estratégias de pensamento e raciocínio.

Complementa Dante (1998) que a utilização da resolução de problemas no ensino e aprendizagem da matemática se define como sendo uma metodologia que deve merecer atenção, tanto por parte dos alunos, quando se propõem a resolver o problema, como também por parte de todos os professores que utilizam essa metodologia. No processo de resolução de problemas se pode envolver o aluno em situações da vida real, motivando-o assim para o desenvolvimento do modo de pensar matemático, despertando assim a sua motivação natural ao estudo de problemas reais.

Ainda, para o autor o processo de resolver problemas pode despertar o interesse do aluno no desenvolvimento dos conteúdos, quando ele se envolve em diferentes situações problemas, podem desenvolver capacidades relativas ao trabalho individual ou em grupo, autonomia, análise crítica, entre outras, bem como, quando se interessa pelos conhecimentos matemáticos para a resolução de uma situação específica, pode se estimular a capacidade de resolver problema, além de uma série de conjuntos de comportamentos que estão vinculados a uma ação tanto física como mental, como sendo um ponto de partida para que o aluno raciocine e pense de maneira adequada.

Com relação ao ato de ensinar e aprender, utilizando essa metodologia, Dante (1998) coloca que o ensinar remete aos procedimentos matemáticos que podem realmente contribuir para o desenvolvimento do aluno.

Ressalta Polya (1995) que existem outros fatores que influenciam no sucesso da solução de problemas, sendo eles: a forma da aplicação dos problemas, as diferentes estratégias para resolver o problema em Matemática e os processos metodológicos no ensino da Matemática, esses elementos são balizadores de uma tarefa docente estreitando assim o relacionamento entre o ensino e a aprendizagem.

O autor também relata em sua obra que ao resolver problema ocorre o despertar do aluno, no momento em que busca compreender a situação proposta, pois ele começa a questionar-se sobre como resolver o problema, levando-o a várias descobertas e a ativar seus conhecimentos matemáticos prévios, bem como mobiliza seu pensamento crítico, fazendo com que ele desenvolva a sua forma de aprender.

A resolução de problemas, nessa perspectiva, se destaca de uma forma mais do que meramente objetiva, ao passo em que se darão as proposições ao aluno, onde ele irá buscar uma solução, sob a orientação e coordenação do professor, de forma contínua no decorrer do ato de se ensinar e aprender, ou seja, o aluno se torna atuante durante todo o processo, pois, em meio ao problema, ele deve apresentar-se como responsável pela construção do seu próprio conhecimento.

Nesse sentido, percebe-se que é preciso, em sala de aula, que o professor, através de elementos construtivos, forneça situações problemas cotidianas, com o intuito de os alunos analisarem e apreciarem a situação para o seu devido entendimento, tendo como base o cálculo para resolver a mesma. Ao resolver problemas que envolvam aspectos da realidade, o aluno percebe a relação entre a teoria matemática e sua aplicação, o que pode despertar o seu interesse em querer resolvê-lo, utilizando para isso o seu pensamento lógico e sua criatividade a partir de um ato intuitivo, que poderá auxiliar no desenvolvimento de sua capacidade de análise crítica, interpretativa e compreensiva (POLYA, 1978). Entretanto, uma das formas mais acessíveis de proporcionar aos alunos, a utilização da resolução de problemas como uma metodologia de ensino, baseia-se na apresentação de situações abertas e sugestivas que exijam dos alunos uma atitude ativa ou um esforço para buscar suas próprias respostas e a construção de seu próprio conhecimento.

Para isso, pressupõe-se que os alunos tenham uma base preliminar para que possam vir a desenvolver conhecimentos matemáticos, descrevendo as ideias de respostas em situações de formas diferentes.

A resolução de problemas, também é vista como uma forma de aprender a aprender, onde o ensinar a resolver problemas não consiste tão somente em dotar os alunos de habilidades e estratégias eficazes, mas sim também em criar neles os devidos hábitos, bem como a atitude de enfrentar a aprendizagem como um problema para o qual devem encontrar uma resposta (POLYA, 1995).

Ao se definir um problema, deve-se considerar que o mesmo desperte a curiosidade do aluno, para que desperte a sua capacidade de criatividade, colocando em sintonia com o seu raciocínio, bem como a sua forma de pensar e agir, colocando todos os seus atos de aprendizagem e ensinamento em prática.

Dessa forma, argumenta Dante (2003) que também é preciso que o aluno tenha a capacidade de compreender e interpretar o problema, fazer as devidas representações e aplicar suas próprias estratégias. Complementa o autor, que a resolução de problemas possibilita ao aluno verificar o resultado que obteve e, por conseguinte, o seu desenvolvimento.

Dante (2009) descreve que a maior parte do nosso pensamento consciente é sobre problemas, quando não referem-se a simples contemplação, ou devaneios, nossos pensamentos estão voltados a algum fim, descreve que os objetivos da resolução de problemas, se definem em fazer o aluno a pensar de forma produtiva, colocando que o mesmo desenvolva o seu raciocínio, bem como ensinar que o mesmo enfrente situações novas, dando a oportunidade de que o aluno se envolva às aplicações da Matemática, colocando assim as etapas de estratégias para resolver problemas.

Além disso, para Dante (1998) a interpretação e a resolução de situações-problema possibilitam que os alunos mobilizem os seus conhecimentos de forma organizada, podendo exercitar seu raciocínio lógico ao aplicar suas estratégias de resolução em diversos tipos de situações-problema.

Enquanto para Polya (1986), um problema de resolução que se tenha resultado é na verdade um desafio e um pouco de descobrimento, uma vez que não existe um método rígido do qual o aluno possa sempre seguir para encontrar a solução de uma situação-problema, na qual não se torna em si uma questão somente de ensinar a resolver problemas, mas também de ensinar a propor problemas para si mesmo, ao transformar a realidade em um problema que mereça ser questionado e estudado.

Porém a aprendizagem da solução da resolução de problemas somente se transformará em autônoma e espontânea, se for transportada para o âmbito do cotidiano, do seu dia a dia, gerando no aluno um despertar da curiosidade de atitudes de procurar respostas para suas próprias perguntas ou questões problemas, pois o mesmo se habituará a questionar ao invés de receber respostas já elaboradas por outros.

Porém, em alguns casos, como estes, esses não são problemas verdadeiros, pois não existe um real desafio ou uma real necessidade de validação do resultado, podendo desmotivar o estudante a solucionar problemas verdadeiros por achar que é uma repetição.

Surgindo assim por intermédio de um novo significado, em que se mostra uma nova maneira de se ensinar e aprender matemática, em que os conteúdos sejam sempre aplicados através da Resolução de Problemas.

Entende-se assim que o aluno, ao aprender a Matemática, o mesmo parte para uma resolução problema, tendo como objetivo um foco particular de Matemática e aplicabilidade dos métodos e, usando estratégias convenientes, busca-se a solução do problema, com a participação efetiva dos alunos, seja individual, aos pares ou em pequenos grupos, possibilitando-lhes ver os conhecimentos e procedimentos matemáticos surgirem com significado e compreensão, bem como se torna crucial o papel e a ação do professor que começa com a escolha e preparação do problema apropriado ao conteúdo ou ao conceito que pretende construir com vistas ao cumprimento do seu propósito matemático, orientado pelos programas curriculares estipulados pela escola; precisa deixar de ser o centro das atividades.

Pois quando o conteúdo se coloca de uma forma estratégica e em etapas que se explicam ao vínculo do preceito de cada uma, em que a atitude do aluno, ao se colocar apenas como um observador, onde a eminência ao incentivo os torna passível em se resolver o problema, observa-se, que ao analisar o comportamento dos alunos o mesmo estimula o trabalho colaborativo, levando os alunos a pensar, dando-lhes tempo e incentivando a troca de ideias entre eles, utilizando assim os seus conhecimentos prévios e técnicas operatórias já conhecidas necessárias à resolução do problema proposto, pois os mesmo já estão preparados.

Porém ao atender os alunos em suas dificuldades, e colocando-os como questionadores, acompanha, se assim as suas explorações e os ajuda de uma forma, em que a questão se torna como sendo uma explicação, e se mostre como realmente necessária, ao se resolver o problema que podem surgir no decurso da resolução.

Resoluções estas certas, erradas ou feitas por diferentes processos matemáticos, sobretudo os mais produtivos, devem ser apresentadas para que todos os alunos as analisem e discutam.

Há de se verificar que a exploração matemática de um erro é muitas vezes esclarecedora e enriquecedora, tanto para os alunos que erraram quanto para os que acertaram e o resolveram bem e para o professor. Agora, num trabalho em conjunto, discutem-se as diferentes resoluções registradas na sala de aula.

Porém, quando se discute a resolução de problemas, a situação-problema é o ponto de partida da atividade matemática e não o ápice. Deve-se aproveitar na sua formulação os conhecimentos já adquiridos pelos alunos no seu dia a dia, ou aqueles decorrentes da sua realidade e que lhes sejam potencialmente significativos e compreensíveis. A partir de então se constrói novos conhecimentos considerando a motivação e disposição deles para se relacionar compreensiva e significativamente com os novos conteúdos.

Assim, George Polya (1978) descreve em seu livro que "A arte de resolver problemas" um método de solucionar problemas através de conteúdos matemáticos, podendo mostrar ao estudante que conceitos matemáticos estão inter-relacionados a vários problemas.

Segundo Dante (1998), no processo de resolução de problemas, os alunos precisam buscar de forma contínua, informações, bem como os devidos conhecimentos matemáticos, pois estes são os mais valiosos recursos estratégicos; onde se tem uma postura investigativa e crítica, de maneira a assumir essas mudanças no ensino e aprendizagem de forma mais natural.

Justifica-se ainda, que para a resolução do problema em parte, mesmo com treinamento de estratégias de raciocínio e de pensamento, os mesmos poderiam ser generalizados a outras áreas do currículo ou conhecimento, bem como a vida diária, implicando assim na existência de alguns apontamentos de raciocínio ou em formas de se resolver problemas, que podem ser ensinados de maneira abstrata e que podem ser aplicados a qualquer campo do conhecimento, onde o aluno se define pela sua capacidade de ver e compreender o que foi apresentado para que o mesmo tenha condições de resolver (DANTE, 1998).

Dessa forma, entende-se que a resolução de situações-problema deveria ser uma prática com frequência nas aulas de Matemática Aplicada aos alunos de Arquitetura, pois a sua utilização pode contribuir para o ensino de conceitos matemáticos tornando a aprendizagem do aluno interessante e, ao mesmo tempo, colocando como base na conscientização de seus processos de pensamento e na relação que ele pode estabelecer entre a formalização da Matemática Aplicada e a resolução de problemas do cotidiano profissional. Contudo, a resolução de problemas pode promover habilidades para resolver diferentes situações problemas, tais como: problemas do cotidiano, problemas pessoais, problemas sociais e problemas quebra-cabeças (POLYA, 1995), por meio das apresentações em forma de exercícios ou questões, que seriam desenvolvidos usando os conhecimentos e os princípios de outras áreas, por exemplo, da Arquitetura, desde que o tema ou assunto se relacione a algo que desperte e estimule o interesse do aluno, como descreve Dante (1998).

É fato que quando o Cálculo for apresentado de acordo como os modelos padrões para se resolver o problema, o papel do professor nesse processo de resolução de problemas, terá que fazer as devidas intervenções, no sentido de que ele e seus alunos busquem junto à solução de uma situação que, a princípio, não está no enunciado do problema. Sendo que o aluno deve contribuir com seus conhecimentos prévios, buscando as vivências cotidianas e o professor deverá ajudá-lo com seus conhecimentos, sempre observando os objetivos que almeja atingir com aquela situação proposta.

Em descrição feita pelos autores Dante (1998) e Polya (1995) em que os mesmos têm o entendimento sobre o que envolve a resolução do problema, e onde se aplica as estratégias que as leva a soluções dos problemas, que pode e surge durante as etapas das atividades, bem como algumas adversidades que se mostra e se descreve ao promover as reais condições para um tipo de aprendizado, onde se tem apenas um ambiente, onde se torne propício ao desenvolvimento intelectual do aluno, onde se busca a atuação do mesmo em sala de aula, trazendo assim as abordagens conceituais, que oportunizem os mesmo em se querer entender o que diz o professor.

Conclui-se que ao se lidar com as tamanhas exigências nas questões do cálculo que envolva a resolução de problemas, que estão pautadas em competências de compreender o problema, colocando como base ao conhecimento da habilidade que cada aluno apresenta, tendo assim o seu estímulo ao interesse do aprendizado, que se incorpora aos contextos de um mundo real, onde as experiências se tornam uma linguagem ao se desenvolver as suas noções de cálculos matemáticos.

3.2.1 Tipos de Problemas

Dante (1998) descreve que se durante a vida escolar forem dadas oportunidades ao aluno de se envolver com diferentes situações de resolução problema, quando adulto agirá com inteligência e naturalidade ao ter que enfrentar seus problemas da vida diária, sejam eles de ordem econômica, política e social, e quando o professor adota a metodologia da resolução de problemas, seu papel será de incentivador, facilitador, mediador das ideias apresentadas pelos alunos, de modo que estas sejam produtivas, levando os alunos a pensarem e a gerarem seus próprios conhecimentos, onde se cria um ambiente de cooperação, de busca, de exploração e descoberta, deixando claro que o mais importante é o processo e não o tempo gasto para resolvê-lo ou a resposta final, mas sim em saber resolvê-lo, quando se é dado um problema para ser resolvido em grupo ou individualmente, é importante que o professor em suas explicações, descreva a leitura e a compreensão do mesmo, colocando em prática o agir do pensar do aluno.

Assim, Dante (2009, p.18) ressalta que a “formulação da resolução de problemas traz essa possibilidade em vários aspectos: as situações-problema desenvolvem o poder de comunicação do aluno, quando trabalhadas oralmente, e valorizam o conhecimento prévio do aluno, uma vez que dão a oportunidade de ele mesmo explorar, organizar e expor seus pensamentos, estabelecendo uma relação entre noções informais, intuitivas e a linguagem abstrata e simbólica da matemática”, podendo assim ser apresentados em forma de exercícios ou questões a serem desenvolvidos usando conhecimentos e princípios matemáticos relacionados a saberes de outras áreas, por exemplo, da Arquitetura, desde que o tema ou assunto se relacione a algo que desperte e estimule o interesse do aluno.

Entretanto em Dante (1991, p.14), enuncia que o ‘’real prazer de estudar Matemática está na satisfação que surge quando o aluno, por si só, resolver um problema, acredita que quando um aluno consegue desenvolver o processo de resolução, o mesmo se sente mais motivado em resolver outras situações problemas e quando os dados estão relacionados ao seu cotidiano o interesse é maior’’.

Conforme descrito por Dante (2009, p.18), os objetivos da resolução de problemas, são:

> [...] fazer o aluno pensar produtivamente. Desenvolver o raciocínio do aluno. Preparar o aluno para enfrentar situações novas. Dar oportunidade aos alunos de se envolverem com aplicações da matemática. Tornar as aulas de matemática mais interessantes e desafiadoras. Equipar o aluno com estratégias e procedimentos que auxiliam na análise e na solução de situações em que se procura um ou mais elementos desconhecidos. Dar uma boa alfabetização matemática ao cidadão comum, tendo início desde a base.

Ainda para o autor cabe ao professor ter em mente que a teoria e a prática precisam estar em sintonia, no sentido de que os objetivos matemáticos aplicados devem estar bem claros quando ele propuser a resolução de uma situação-problema ao aluno. Colocando assim ao aluno, em uma posição na qual poderá tomar as suas próprias decisões e fazer uso dos dispositivos didáticos fornecidos pelo professor.

Dante (1998) classifica os problemas em vários tipos mencionando que: primeiramente deverão ser aplicados os *exercícios de reconhecimentos*, fazendo assim com o que aluno reconheça, identifique e lembre-se de conceito, em segundo apresentar *exercícios de algoritmos*, servindo para treinar a habilidade e/ou procedimentos de conhecimentos desenvolvidos anteriormente, em terceiro os *problemas padrão*, os quais a solução já esteja contida no seu enunciado, no qual a tarefa é basicamente transformar a linguagem usual em linguagem matemática, objetivando que o aluno em se recordar e fixar os fatos por meio dos algoritmos, que se relacionam as quatro operações, em quarto os *problemas em processos que envolvam a heurística*, onde a solução envolva as operações que não estão contidas no enunciado, exigindo do aluno um tempo para pensar e arquitetar um plano de ação, e em quinto, *problemas que envolvam a aplicação*, também chamados de situações problemas, onde se retratam situações reais do dia-dia e que exigem o uso da matemática para serem resolvidos, e em sexto e último, *problemas de quebra cabeça*, que consiste em charadas matemáticas recreativa, e a sua solução depende quase sempre de um golpe de sorte ou da facilidade em perceber algum truque.

Segundo Dante (2007, p. 12):

> As rápidas mudanças sociais e o aprimoramento cada vez maior e mais rápido da tecnologia impedem que se faça uma previsão exata de quais habilidades, conceitos e algoritmos matemáticos seriam úteis hoje para preparar um aluno para sua vida futura. Ensinar apenas conceitos e algoritmos que atualmente são relevantes parece não ser o caminho, pois eles poderão tornar-se obsoletos daqui a quinze ou vinte anos, quando a criança de hoje estará no auge de sua vida produtiva. Assim, um caminho bastante razoável é preparar o aluno para lidar com situações novas, quaisquer que sejam elas. E, por isso, é fundamental desenvolver nele iniciativa, espírito explorador, criatividade e independência por meio da resolução de problemas.

Conforme a descrição de Dante (1998) a resolução de problema pode tornar as aulas de Matemática, mais interessantes e desafiadoras, pois proporcionam um maior envolvimento no processo e resolução, aguçando a criatividade e colaborando com o desenvolvimento de estratégias que possam ser aplicadas em diferentes situações.

Para Dante (2003), um problema não precisa necessariamente apresentar um enunciado extenso ou incluir dados supérfluos para que seja uma ótima situação-problema a ser resolvida. Sendo que uma situação de resolução-problema deve exigir por parte do aluno o cálculo de mais de uma operação Matemática e que estas não estejam evidentes no enunciado.

Tal situação precisa ter uma linguagem acessível, estar de acordo com as vivências dos alunos, e que exija a capacidade de raciocínio a partir dos conhecimentos estudados, para assim tornar-se uma situação que seja em si um problema.

O processo de resolução-problema é algo complexo, uma vez que depende de vários fatores já descritos anteriormente, sendo necessário que o aluno tenha a capacidade de compreender e interpretar o problema, fazer as devidas representações e aplicar suas próprias estratégias. Além disso, a resolução de problemas possibilita ao aluno verificar o resultado que obteve e, por conseguinte, o seu desenvolvimento em sala de aula.

Para Dante (2009, p.17),

> [...] a atividade Matemática não se resume a apenas a sua definição, mas sim ao problema. Pois só há um problema, que precisa de uma resolução, se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão, em que lhe é imposta, colocando a estrutura e a forma descritiva, bem como a situação que lhe é apresentada, onde as aproximações sucessivas ao conceito são construídas para resolver um certo tipo de problema; e num outro momento, o aluno utiliza o que aprendeu para resolver outros, porém o aluno não constrói um conceito em resposta a um problema, mas constrói um campo de conceitos que tomam sentido num campo de problemas.

Salienta-se que o professor deve propor situações problemas que possibilitem a produção e a reprodução do conhecimento, onde o aluno deve participar ativamente compartilhando dos seus resultados e conquistas, analisando as reflexões e as respostas, buscando assim uma forma em que se aprende a aprender.

Porém, se torna necessário que o professor atenda os alunos em suas dificuldades, colocando-se como interventor e questionador, acompanhando as suas explorações e ajudando-os, quando necessário, a resolverem problemas secundários que podem surgir no decurso da resolução: notação; passagem da linguagem natural para a linguagem matemática; conceitos relacionados e técnicas operatórias; a fim de possibilitar a continuação do trabalho.

Entretanto para se evitar essas atitudes, convém apresentar poucos problemas com distintas graduações de dificuldades e aplicação de diferentes estratégias, sendo que a linguagem deve ser simples evitando a não compreensão do problema, permitindo o manuseio e o uso de materiais concretos, dispensando *a priori* a valorizar a resposta é sim todo o processo para determiná-la, incentivando o aluno as suas descobertas, explorando as diversidades de estratégias utilizadas, bem como a exposição de dificuldades e os obstáculos enfrentados, a análise e verificação da solução, a criação de forma ordenada de novas resoluções dos problemas e a identificação do erro de forma clara e objetiva ao assunto apresentado, para que por meio dele possa compreender o que deveria ter sido feito.

Polya (1995) detalha que todas as situações de resoluções problema se originam de um processo de construção entre os alunos e o professor, trazendo assim na sala de aula a formulação e a escrita do problema (linguagem verbalizada para a linguagem matemática da situação), bem como uma discussão do grupo para obter a resolução e a descoberta de novos conhecimentos matemáticos, sendo tais assuntos interpretados e analisados, no contexto de ensino e aprendizagem em conjunto na relação alunos e professor.

Nesse sentido, Polya (1995, p. 2) menciona que existem dois objetivos a considerar na resolução de problemas, sendo: auxiliar os alunos a resolver o problema que lhe é apresentado e desenvolver no estudante a capacidade de resolver futuros problema por si próprio.

Conforme Polya (2006) os problemas podem ser classificados em três tipos, os problemas rotineiros, os problemas de determinação e os problemas de demonstração, e podem ser resolvidos utilizando perguntas chaves, como:

> Existe alguma palavra, frase ou parte da proposição do problema que não entendo ou qual a dificuldade que se mostra do problema, ou qual o tipo de meta a ser resolvida, como se começa o problema , existe algum tipo de problema que seja igual, poderia fazer a resolução pelos meus próprios meios, chegando assim um resultado que fosse igual ao proposto, poderia de uma forma explicativa ensinar aos meus amigos em sala de aula, de uma forma mais resumida, assim como finalizar a resolução do problema como base de exercícios já resolvidos anteriormente (ECHEVERRÍA; POZO, 1998, p.25).

Polya (2006) explica que um problema será rotineiro se ele puder ser solucionado pela substituição de dados específicos no problema genérico resolvido antes, ou pelo seguimento passo a passo, de algum exemplo conhecido.

O autor, ainda, informa que os problemas de determinação têm como objetivo encontrar a incógnita, sendo que as suas partes principais são: a própria incógnita, os dados e a condicionante.

Polya (2006, p. 4) salienta que se:

> [...] aprende a solucionar problemas, resolvendo-os e imitando o que as outras pessoas fazem ao resolver os seus e, nesse sentido, cabendo apenas ao professor, se assim o desejar, a desenvolver a capacidade aos seus alunos, e proporciona-lhes muitas oportunidades entre a prática e a imitação, de uma maneira que os mesmos saibam resolvê-los.

Tanto que nesse momento é muito importante que o professor seja um indagador ao invés de um respondedor.

Os problemas rotineiros não avaliam, por si só, as atitudes, ou os procedimentos, e a forma de como os alunos administram os seus conhecimentos, onde não se exigem estratégias para a sua solução, onde a resolução do problema já está contida no próprio enunciado, onde a tarefa básica é transformar a linguagem usual para uma linguagem Matemática, identificando quais as operações que realmente são apropriadas para se resolver o problema.

Polya (2006) menciona que durante a resolução de um problema deve se deixar que os alunos deem palpites e que descubram por si próprios as resoluções e que os professores em si, devem indicar caminhos os quais devem ser realmente adotados se forem aceitos pelos estudantes e não os impor.

Isso, leva ao papel do professor nesse processo de resolução de problemas, em se fazer as devidas intervenções, no sentido de que ele e seus alunos busquem junta a solução de uma situação que, a princípio, não está no enunciado do problema. Sendo que o aluno deve contribuir com seus conhecimentos prévios, buscando as vivências cotidianas e o professor deverá ajudá-lo com seus conhecimentos, sempre observando os objetivos que almeja atingir com aquela situação proposta.

E quando se traz essa discussão, e para que todos entendam o que se busca na compreensão para a resolução de um problema, onde se colocam em prática, vários fatores, que impliquem o cálculo matemático, sendo explicado de uma forma verbal e clara, onde a compreensão os incentivem a novos questionamentos, ideias e dicas, e os colocando assim, como sendo base da determinação da solução da resolução de problemas pelos alunos, discutindo os diferentes caminhos de resolução, e os incentivando para soluções variadas e diversas.

Porém o grande desafio é encontrar problemas que envolvam os alunos nas aulas de Matemática, que oportunizem a interação professor e alunos, buscando o comprometimento de conduzir os alunos durante todo processo de execução da atividade, tirando dúvidas, colocando novos pontos de vista com relação ao problema tratado e permitindo o ato de pensar sobre o assunto, instigando a capacidade de resolução. Dessa forma, permitindo o desenvolvimento da resolução do problema, no qual o aluno aprende conceitos, técnicas, o uso linguagem matemática, o entendimento dos cálculos, tornando-se consciente do modo a utilizá-los na solução do problema.

Conclui-se que a resolução de problemas, tanto Polya (1995), como para Dante (2003) que ao utilizar essa metodologia os alunos podem interpretar e compreender problemas, ou os mesmo podem criá-los, colocando assim os problemas para serem discutidos, resolvidos e analisados muitas vezes e podem surgir erros, como excesso ou falta de informação, valores absurdos, respostas erradas, linguagem e termos inadequados, porém o aluno lá na frente perceberá seus erros, e isso permite enriquecer o processo de ensino e aprendizagem, visto que na compreensão de um problema não é suficiente compreender as palavras, a linguagem e os símbolos apresentados, mas é imprescindível assumir a busca da sua solução, superando dificuldades e obstáculos apresentados, onde a revisão dos conteúdos aplicados no processo de resolver o problema, é uma fase importante por se tratar de uma peça fundamental, na qual o aluno reflita sobre os devidos conceitos que envolvem os cálculos matemáticos necessários para a resolução do problema.

3.2.2 As fases da Resolução de Problemas

De acordo com Polya (1986), a resolução de um problema é na verdade um desafio e um pouco de descobrimento, uma vez que não existe um método rígido do qual o aluno possa sempre seguir para encontrar a solução de uma situação-problema.

Para Polya (1995), primeiramente precisa se compreender o problema, ou o que se pede no problema, e quais são os dados e as condições do problema possibilitando fazer uma figura ou um esquema, onde se torne possível estimar a resposta, e em segundo deverá ser feito a elaboração de um plano, em que se demonstre o seu plano para resolver o problema, e em que estratégia você tentará e pode desenvolvê-lo, sempre se lembrando de um problema semelhante que pode ajudá-lo a resolver este, e tentando organizar os dados em tabelas e gráficos, e buscar também resolver o problema por partes, e em terceiro executar o plano de uma forma elaborada verificando o passo a passo, efetuando todos os cálculos indicado no plano, e executando todas as estratégias pensadas, obtendo várias maneiras de resolver o mesmo problema, e por último em quarto o em se fazer o retrospecto ou verificação, examinando se a solução obtida está correta, ou se existe outra maneira de resolver o problema.

Dessa forma, questionamentos como estes fazem parte da compreensão do problema, pois fazem parte dos estágios de percepção e aperfeiçoamento da compreensão (POLYA, 1978). Ainda, para o autor, durante essas etapas, o professor necessita trabalhar com seus alunos as operações mentais correspondentes às indagações e sugestões.

Além disso, quando o professor resolve um problema em aula, deve dramatizar um pouco as suas ideias e fazer a si próprio as mesmas indagações que utilizará para ajudar os alunos, pois por meio dessas orientações, o aluno acabará por descobrir o uso correto das indagações e sugestões realizadas pelo professor e, ao fazê-lo, adquirirá algo importante do que o simples conhecimento de um fato matemático qualquer.

Assim, no desenvolvimento de uma resolução de problema, o professor em sala de aula ensina o seu aluno a resolver cálculos matemáticos, visto que ele mostra e explica aos alunos, um meio de construir a sua própria compreensão e interpretação de como se faz para se chegar a um determinado resultado.

Ainda é recomendado por Polya (2006, p. 5) que a curiosidade dos alunos deva ser estimulada, apresentando-lhes problemas compatíveis com os seus conhecimentos e, o professor deve auxiliar os alunos a resolvê-los com perguntas estimulantes, objetivando despertar-lhes o gosto pelo raciocínio independente, dando-lhes certos meios para solucionar os problemas de maneira adequada.

Em Polya (2006) há um destaque para o porquê da importância do aluno se sentir motivado, no que se refere, em específico, a resolver problemas, pois a inteligência se torna um recurso fundamental para se resolver problemas do cotidiano, problemas pessoais, problemas sociais, problemas científicos, quebra-cabeças, entre outros.

Sendo que este tipo de visão pode surgir gradualmente, após tentativas infrutíferas e um período de hesitação, aparecer repentinamente, num lampejo, como uma ideia brilhante. Complementa o autor que

> [...] seria um engano supor que a resolução de problemas seja puramente uma questão intelectual: persistência e emoções desempenham, nesse caso, um papel importante. Fraqueza de vontade e aqui essência por comodismo para fazer um pouquinho podem bastar para um problema rotineiro na sala de aulas. Mas, para resolver um problema científico sério, é necessária uma força de vontade capaz de sobreviver a anos de trabalho e decepções amargas. A persistência flutua entre esperança e desespero, entre satisfação e decepção. É fácil prosseguir quando se pensa que a solução se encontra na primeira esquina, mas é difícil perseverar quando não se vê uma saída para a dificuldade. Exultamos quando a nossa previsão se confirma. Ficamos desalentados quando o caminho que vimos seguindo com certa confiança é repentinamente bloqueado e, aí, a nossa persistência fraqueja (POLYA, 2006, p. 130).

E para acelerar esse processo algumas vezes, é necessário ser feito a introdução por meio de indagações e sugestões, através de questionários em que se pergunta sobre: você já resolveu um problema semelhante a esse; ou já viu o mesmo problema proposto de maneira um pouco diferente; conhece algum problema relacionado com este; conhece algum conteúdo que já estudou que possa lhe ser útil; é possível resolver o problema por partes; é possível traçar um caminho para buscar a solução? (POLYA, 1995).

Entretanto em Dante (1988, p. 10), demonstra que uma situação problema pode ser apresentada como uma atividade que solicite uma "maneira matemática de pensar e conhecimentos matemáticos para solucioná-lo, e que para a devida escolha do tipo de problema o professor deve ter o cuidado de selecionar uma situação que tenha a possibilidade de satisfazer a maioria da turma".

Assim, Dante (2009, p. 29) descreve as fases de como se resolver um problema da seguinte forma:

> Compreender o problema: a) O que se pede no problema? b) Quais são os dados e as condições do problema? c) É possível fazer uma figura, um esquema ou um diagrama? d) É possível estimar a resposta? Elaborar um plano: a) Qual é o seu plano para resolver o problema? b) Que estratégia você tentará desenvolver? c) Você se lembra de um problema semelhante que pode ajudá-lo a resolver este? d) Tente organizar os dados em tabelas e gráficos. e) Tente resolver o problema por partes. Executar o plano: a) Execute o plano elaborado, verificando-o passo a passo. b) Efetue todos os cálculos indicados no plano. c) Execute todas as estratégias pensadas, obtendo várias maneiras de resolver o mesmo problema. Fazer o retrospecto ou verificação: a) Examine se a solução obtida está correta. b) Existe outra maneira de resolver o problema? c) É possível usar o método empregado para resolver problemas semelhantes?

Segundo o autor o professor deve ser um participante, no sentido de fazer coerentemente as devidas interferências ao examinar a solução que cada aluno encontrou, se esta é correta ou não: se correta deve ser feito questionamentos, do tipo se existem outras maneiras de se chegar a mesma solução; e se errada, verificar onde está o erro e ajudá-lo nesse processo construtivo na busca da solução correta.

Além disso, a interpretação e a resolução de situações-resolução de problema possibilitam que os alunos mobilizem os seus conhecimentos de forma organizada, podendo exercitar seu raciocínio lógico ao aplicar suas estratégias de resolução em

Por isso, concorda-se com Dante (1998) que no processo de resolver problemas deve-se deixar que o aluno se desperte por meio de seus próprios caminhos, mesmo que algumas vezes seja necessário buscar outras possibilidades, ou seja, traçar outro plano, por meio de uma compreensão em que ele saiba resolvê-la.

Há de se entender que o desenvolvimento da habilidade para se resolver o problema, aprimora cada vez mais a inteligência e prepara o aluno para resolver vários tipos de problemas.

Entretanto, entende-se que os alunos devem ser instigados, com a prática em se resolver o problema, desenvolvendo assim de forma inteligente e compreensiva as habilidades e as estratégias para que resolvam situações problemas e encontrem as soluções de maneira que tenham o entendimento da compreensão.

Sempre lembrando que a vida do indivíduo ser humano está literalmente ligada e permeada por desafios e soluções, por Resoluções de Problemas que levem o mesmo, a se promover como parte importante da sociedade.

É preciso compreender que a inteligência necessita do raciocínio, do pensar, do refletir, e a Resolução de Problemas favorece esse desenvolvimento mental. E, o papel do professor na Resolução de Problemas é ser o mediador, que leva os alunos a pensar, dando-lhes tempo e incentivando a troca de ideias entre eles, onde o professor os incentiva a utilizarem seus conhecimentos prévios e técnicas operatórias já conhecidas necessárias à resolução do problema proposto, estimulando-os a escolher diferentes caminhos (métodos) a partir dos próprios recursos de que dispõem, onde se procura e se busca um resultado, sendo que após serem sanadas as dúvidas e analisadas as resoluções e as soluções obtidas para o problema, o professor tenta, com toda a classe, organiza a estrutura em linguagem matemática, que esteja padronizando em seus conceitos, e em seus princípios e procedimentos construídos através da resolução do problema, destacando as diferentes técnicas operatórias e as demonstrações das propriedades qualificadas sobre o assunto (POLYA, 1995).

Polya (1995, p.3) reitera que a obrigação de um professor de matemática é

> [...] utilizar ao máximo a oportunidade que tem para desenvolver nos alunos a habilidade de resolver problemas, sendo que esses problemas não seriam nem muito fáceis e nem muito difíceis, naturais e interessantes, desafiando a sua curiosidade e ao nível de seu conhecimento, coloca como ênfase quando descreve em que, sendo que o professor auxilia seus alunos apenas o suficiente e discretamente, deixando-lhes alguma independência ou pelo menos alguma ilusão de independência, eles podem se inflamar e desfrutar a satisfação da descoberta.

Dessa forma, o professor é um mediador, que facilita o conhecimento, que orienta seus alunos para que eles mesmos sigam o seu desenvolvimento nos cálculos e as suas estratégias nos problemas propostos, tendo assim uma maior motivação em querer se chegar à resolução.

Entende-se que os autores Polya (1998) e Dante (2003) descrevem que as fases, ao atenderem os alunos em suas dificuldades, os colocam como questionadores, acompanhando assim as suas explorações, e os ajuda de uma forma, em que a questão se torna como sendo uma explicação, e se mostra como realmente necessária, ao se resolver o problema que podem surgir no decurso da resolução, assim o aluno o compreende, surgindo assim por intermédio de um novo significado, em que se mostra uma nova maneira de se ensinar e aprender matemática, em que os conteúdos sejam sempre aplicados através da resolução de problemas, colocando assim como exemplo, temas que permitam tal abordagem, estabelecendo assim uma união entre conceitos matemáticos e também de outras áreas de conhecimento, constituindo assim uma ferramenta que em sintonia a outras ações pedagógicas poderá contribuir ao se desenvolver as competências e habilidades para que o aluno saiba entender e compreender a resolução de problemas matemáticos, sendo como um aprendizado tanto para os alunos como para o professor, proporcionando assim entre eles uma troca de informações.

3.2.3 A Resolução de Problemas no Ensino Superior

A resolução de problemas, conforme a descrição do autor Araújo (2014) é uma das metodologias de ensino e aprendizagem mais eficientes e práticas para serem consideradas em aulas de Matemática que são ministradas no Ensino Superior, pois, entre outros aspectos, possibilita ao aluno relacionar conceitos da Matemática com a área de conhecimento profissional.

No Ensino Superior a resolução de problemas se destaca em um contexto ao qual o aluno tenha a oportunidade de resolver situações problemas, usando diferentes estratégias, e também tem a possibilidade de formular problemas, permitindo que o mesmo realmente se envolva de forma direta nos processos, aumentando assim o seu nível de motivação, sendo encorajado a investigar e tomar decisões que sejam reais e eficientes, procurando padrões, estabelecendo conexões, bem como discutir ideias e as identifica em possíveis alternativas para se resolver o problema proposto.

Segundo Polya (2006), na resolução de um problema o aluno é motivado a elaborar estratégias de resolução, a usar o seu raciocínio lógico e, dependendo da situação, trabalhar em equipe, discutindo ideias e as transformando em ações.

Utilizar metodologias como a resolução de problemas na sala de aula, além de tornar a aula atrativa e mais dinâmica, possibilita ao aluno exercitar suas práticas individuais e de grupo com base em seu raciocínio lógico, requisitos, hoje, importantes em diferentes atividades profissionais do Ensino Superior. Além disso, entende-se que os alunos podem ter a oportunidade de discutir com os colegas e o professor, de argumentar, de criticar, de interagir por forma a haver uma partilha de ideias, de estratégias, de raciocínios, de pensamentos matemáticos e de desenvolver a sua capacidade de comunicação.

Devido a isso, concorda-se com a perspectiva de que um problema é uma importante ferramenta para apresentação, exploração, execução de debates e investigações de um conteúdo matemático e que os exercícios podem contribuir quando se deseja consolidar e averiguar aspectos envolvendo cálculos matemáticos.

Porém há de discutir que mesmo reconhecendo o papel da resolução de problemas durante o desenvolvimento da Matemática, somente no final do século XX é que passou a ser estudada uma forma de utilizá-los como metodologia de ensino dentro da Matemática. Esta prática teve grande influência do livro "How to Solve It" de George Polya, publicado em 1945. Sendo que este trabalho de pesquisa trouxe a preocupação, no ensino da Matemática Aplicada, de como os problemas são resolvidos, elaborando técnicas que pudessem ser utilizadas em qualquer situação que se fizesse necessária à busca de uma solução.

Nesses últimos anos, diversas novas pesquisas foram conduzidas nesta área e possibilitaram à resolução de problemas uma posição de destaque dentro do Ensino da Matemática. Contudo, quando se fala em "solucionar problemas", especialmente no âmbito escolar, existe uma ligação natural com a ideia de resolver questões de Matemática.

Como metodologia, a resolução de problemas pode auxiliar no processo de ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos, aproximando esses conceitos da realidade dos estudantes, quando utilizada de forma adequada. Araújo (2014) aponta a resolução de problemas como uma metodologia que traz importantes contribuições para o ensino, uma vez que possibilita que o estudante desenvolva seu pensamento matemático de maneira diferenciada, e não apenas com atividades rotineiras.

Nesta linha de raciocínio, Onuchic (1999, p. 208) aponta a crença de que o uso da metodologia de resolução de problemas pode "ajudar os alunos a compreender os conceitos, os processos e as técnicas operatórias necessárias dentro do trabalho feito em cada unidade temática" como sendo a principal razão pelo seu interesse em abordá-la no Ensino da Matemática.

A autora destaca que a resolução de problemas deve ser um caminho para a construção de novos conhecimentos, como também para aplicar aquilo que já foi construído anteriormente. Assim, a metodologia de resolução de problemas, exige do estudante e do professor a criatividade, além disso, permite que o estudante participe da resolução e construção dos conceitos matemáticos, auxiliando desta forma em sua aprendizagem (ONUCHIC, 1999).

Entende-se que o uso de problemas na aprendizagem matemática pode auxiliar os estudantes nos questionamentos pela busca de uma solução, contribuindo para um raciocínio lógico, fazendo com que estes abdiquem do uso de regras padronizadas.

Para que a aprendizagem por meio da metodologia de resolução de problemas aconteça, o professor é peça fundamental e insubstituível. O professor deve ser um mediador ativo, uma vez que ele é o responsável por lançar questões que desafiem os estudantes, e ao mesmo tempo deve ajudá-los a superar as dificuldades encontradas. Além de mediador, ele deve ser o controlador e o incentivador da aprendizagem, levando seus estudantes a pensar antes de realizar qualquer operação (ÁVILA, 2004).

Durante a resolução de problemas o professor deve ir observando o trabalho de seus estudantes, incentivando-os a relacionar a conhecimentos trabalhados anteriormente, bem como fazer uso das técnicas operatórias já estudadas e ainda, estimular que os estudantes troquem ideias entre si. Contudo, durante a resolução de problemas, o professor não deve fornecer as respostas prontas, e sim, demonstrar confiança no que os estudantes vão construindo (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014).

Ressalta-se que durante a resolução do problema, quando o professor é questionado, é importante que ele indique o caminho por meio de perguntas secundárias, sem fornecer respostas prontas, levando os estudantes a construir suas próprias estratégias e, também, avaliá-las conforme progride na resolução. Chama-se a atenção quanto ao nível de dificuldade do problema que será levado para a sala de aula, este deve ser adequado ao nível escolar dos estudantes, para que a averiguação seja coerente, não se tornando um problema trivial e nem mesmo um problema impossível (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014).

Em suas pesquisas Onuchic e Allevato (2014) identificaram três diferentes formas de se trabalhar com a metodologia de resolução de problemas em sala de aula: o ensino *sobre* a resolução de problemas, o ensino *para* a resolução de problemas e o ensino *através* da resolução de problemas.

No ensino *sobre* a resolução de problemas, Onuchic e Allevato (2004) consideram a resolução de problemas como algo novo, como um novo conteúdo que deve ser ensinado. Allevato (2014, p. 213) destaca que o livro escrito por George Polya "tornou-se referência no ensino sobre resolução de problemas. Esta obra pode ser considerada, talvez, o mais importante exemplo entre os trabalhos com teor essencialmente voltado a ensinar sobre resolução de problemas".

O ensino *sobre* a resolução de problemas não é uma abordagem corriqueira em sala de aula no ensino superior, pois já se refere à técnica a ser ensinada.

Pode ser de uma forma exemplificada, porém no contexto da programação linear, onde se ensina um procedimento a ser seguido de modo a obter a solução das questões (identificar as variáveis, função objetivo e restrições; aplicar um algoritmo de resolução – Simplex; escrever a resposta ao problema).

Já, no ensino *para* a resolução de problemas a base reside na aplicação do conteúdo matemático, dessa forma "[...] a matemática é considerada utilitária de modo que, embora a aquisição de conhecimento matemático seja de primordial importância, o propósito principal do ensino é ser capaz de utilizá-lo" (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014, p.38).

O ensino por meio da resolução de problemas é aquele em que o conteúdo se desenvolve a partir da necessidade da resolução do problema. Para o professor, a resolução do problema é o meio de se chegar ao ensino de determinado conteúdo matemático, sendo esse o objetivo da proposta, por outro lado, entende-se que para o estudante, o conteúdo matemático é o meio e não a finalidade da proposta, sendo que o aprendizado matemático é consequência do problema resolvido.

A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação por meio da Resolução de Problemas é uma perspectiva de ensino que está apoiada na tríade ensino-aprendizagem-avaliação e que utiliza o problema para desenvolver a construção do conhecimento de algum conceito matemático de forma que o aluno possa construir seu próprio aprendizado com compreensão e significado.

Nessa metodologia, o ensino e a aprendizagem de tópicos matemáticos começam a partir de um problema, denominado, problema gerador, que seja útil ao desenvolvimento do conteúdo; ou seja, que contenha aspectos fundamentais desse tópico matemático que se quer desenvolver em aula de aula. Ferramentas e técnicas matemáticas devem ser desenvolvidas durante o processo de busca por soluções adequadas ao problema proposto e a avaliação é entendida como parte integrante desse processo.

Segundo Allevato e Onuchic (2014), o debate coletivo em busca da solução do problema, favorece uma abordagem por meio de tentativas diferenciadas de resolução em um mesmo grupo, visto que cada indivíduo aborda o problema de maneira diferente.

Essa estratégia é também importante, pois caso aconteçam equívocos durante a resolução, estes podem ser considerados como erros do coletivo, afastando a percepção de fracasso individual que poderia ocorrer caso a resolução fosse restrita a cada estudante. A presença dos erros durante o percurso da resolução do problema não pode servir como desestímulos aos estudantes para o prosseguimento da atividade (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014).

Com isso, o professor tem papel fundamental em lidar com eles de maneira natural, sem levantar culpados ou desconsiderar toda a trajetória que levou a tais conclusões, mas sim, apontar caminhos que os levem a encontrar novas alternativas ou diferentes abordagens (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014). Echeverría (1998, p. 65) contribui quando afirma: “Nesse sentido, os erros não devem ser tratados como fracassos, mas como fonte de informação para o professor na sua tarefa de “treinador” e para uma significativa avaliação do aluno”.

Por fim, acredita-se que esta metodologia de ensino e aprendizagem seja uma importante ferramenta que o professor possa utilizar com o intuito de despertar o interesse de seus alunos para os conteúdos matemáticos desenvolvidos, na disciplina de Matemática Aplicada, bem como pode auxiliar no desenvolvimento crítico e o trabalho coletivo em busca de soluções.

4 ATIVIDADES ENVOLVENDO O CONTEÚDO DERIVADAS

Neste capítulo apresentam-se as atividades selecionadas para o desenvolvimento da fase de experimentação envolvendo o conteúdo de Derivadas, utilizando a metodologia de Resolução de Problemas.

Optou-se por construir uma sequência de atividades com quinze problemas de cálculos de derivadas, os quais se apresenta a seguir a análise *a priori* realizada, onde se trabalhou em sala de aula o conceito de Derivadas e suas aplicações, de forma que após esclarecidas as dúvidas iniciaram-se as atividades com uma lista de problemas que contemplavam o conteúdo de cálculo de Derivadas, tendo o professor como mediador, quanto aos questionamentos feitos pelos alunos, em que foi permitido aos alunos que desenvolvessem as atividades em grupo para que pudessem conversar e compartilhar as estratégias de resolução do problema, porém a entrega dos registros da realização das atividades se deu de forma individual.

Segundo Stewart (2013) na solução de problemas de otimização, o desafio está em determinar a função que deve ser maximizada ou minimizada. Nesse sentido, buscou-se neste trabalho de pesquisa apresentar modelos e soluções de problemas de otimização que surgem como aplicação do conceito de derivada no campo de estudos da Matemática Aplicada inserida ao Curso de Arquitetura e Urbanismo. Entende-se que tais problemas exigem a determinação de valores máximos e/ou mínimos absolutos das funções que os representam, chamados assim de problemas de otimização pelo fato de que as soluções encontradas com esta técnica são as melhores possíveis para cada caso (STEWART, 2013).

Na sequência, tem-se que os problemas selecionados são exercícios de reconhecimento, que foram desenvolvidos a partir de quatros etapas de Polya (2006), visando vislumbrar caminhos que o acadêmico possa percorrer ao longo da realização da proposta didática, sendo que este caminho não é único, e o mesmo pode utilizar uma estratégia distinta, desde que utilize os conhecimentos matemáticos adequadamente, exigindo assim, uma criação por parte do mesmo ao fazer estratégias para se resolver o problema de cálculo em inúmeras situações, sendo destacado que os problemas selecionados são de otimizações definidos em maximizações (01, 02, 08, 09, 12 e 13) minimizações (03, 05, 06, 07, 10, 11, 14 e 15) e custo marginal e adicional (04).

Ainda, os problemas inseridos no estudo de pesquisa são como *exercícios de reconhecimentos*, pois podem permitir que o estudante reconheça, identifique e lembre-se do conceito (DANTE,1998).

As atividades foram retiradas de livros de cálculo utilizados, pela instituição em que foi realizada a aplicação e coleta de dados, na disciplina de Matemática Aplicada. Os livros utilizados foram dos autores Stewart (2013), Macedo; Castanheira; Rocha (2006) e Goldstein; Lay; Schneider (2006), sendo o primeiro um livro base da disciplina e os demais são livros complementares.

Problema 01 – Um fazendeiro tem 1.200 m de cerca e quer cercar um campo retangular na margem de um rio reto. Ele não precisa de cerca ao longo do rio. Quais as dimensões do campo que tem a maior área? (STEWART, 2013, p.294).

Na primeira etapa "Compreensão do problema" propõe-se a identificação dos dados apresentados no problema, sendo:

- O perímetro da cerca é de 1.200 m, sendo que as dimensões se referem a três partes, haja vista, o que descreve o enunciado, que a cerca não precisa estar ao longo do rio, em que se verifica a possibilidade de fazer esboços de campos de modo rasos e extensos ou profundos e estreitos, propondo-se uma diversidade de áreas.

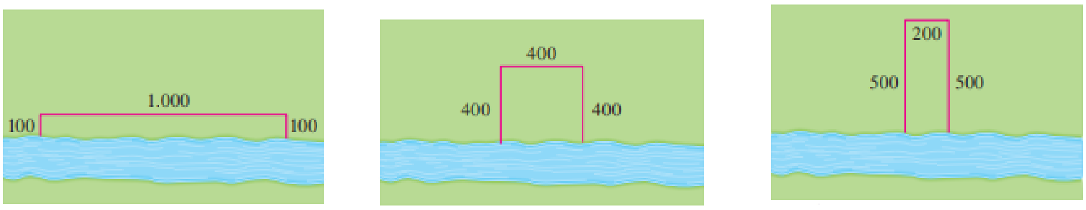
- A incógnita do problema corresponde a encontrar as dimensões do campo que tem a maior área.

Já na segunda etapa "Estabelecimento de um plano", espera-se que os acadêmicos elaborem uma estratégia para a resolução da situação proposta, podendo ser:

Primeiramente fazer a esquematização com as medidas possíveis para um perímetro de 1200 metros, em que tais esquematizações as definem como campos rasos, extensos, profundos e estreitos, obtendo assim diferentes áreas, sendo necessária, a análise das esquematizações para determinar a maior área. Por esse motivo, é preciso que os acadêmicos façam as esquematizações, pois eles precisam compreender as possibilidades de se definir vários tipos de áreas com os dados do problema em questão.

Alguns exemplos de esquematização/esboço são apresentados na Figura 1.

Figura 1- Exemplos de esquematização do problema 01



Fonte: retirado de Stewart (2013, p.294).

A partir das esquematizações tem-se três possibilidades diferentes para o perímetro, como por exemplo, os descritos a seguir: 100+1000+100 = 1200; 500+200+500 = 1200 ou 400+400+400 = 1200.

Em seguida, calcula-se a área para cada esquematização, sendo que é um retângulo e sua área é obtida por base multiplicada pela altura:

- Primeiro a esquematização de área de 1000 x 100 = 100.000 m²

- Segundo a esquematização de área de 400 x 400 = 160.000 m²

- Terceiro a esquematização de área de 200 x 500 = 100.000 m²

Tais esquematizações são necessárias ao aluno, para que perceba que a maior área é a apresentada na esquematização.

Na terceira etapa "Execução do plano" espera-se que os acadêmicos coloquem em prática o plano estabelecido na etapa anterior. Uma possibilidade será apresentada a seguir.

Atribui-se variáveis para as dimensões do retângulo, sendo x e y e adota-se uma simbologia para área, sendo A.

Assim, a área será dada pela função $A(x) = x.y$, na qual precisa ser expresso em termos de x. Para expressar y em termos de x, é preciso utilizar o perímetro.

O perímetro pode ser expresso como, $P = x + x + y$. Substituindo no perímetro as informações do problema, obtém-se: $1200 = 2x + y$. No perímetro, isolando-se o y tem-se a seguinte equação: $y = 1.200 - 2x$.

Retornando ao cálculo da área, tem-se: A(x) = x.y, substituindo y por "$1.200 - 2x$", a área ficará: $A = x\,(1.200 - 2x)$. Logo a área será $A = 1200x - 2x^2$.

Para determinar a dimensão x, de modo que a área seja a maior possível é preciso igualar a função a zero e aplicar a deriva. Ou seja, primeiramente igualando a zero obtém-se $0 = 1200x - 2x^2$ e realizando o cálculo da derivada chega-se a $1200 - 4x = 0$.

Assim, resolvendo a equação “$1200 - 4x = 0$”, encontra-se o valor de x, $x = 300$. Substituindo na fórmula do perímetro, pode-se encontrar o valor do y, sendo $y = 600$.

Na última etapa “Retrospecto do problema”, almeja-se que os acadêmicos verifiquem se o resultado encontrado é adequado.

Para tanto, é preciso verificar se os valores encontrados $x = 300$ e $y = 600$ estão corretos, substituindo-se os mesmos nas fórmulas da área $A = x.y$ e do perímetro $P = 2x + y$ (Quadro 11).

Quadro 11 - Cálculo da área e perímetro

Área	**Perímetro**
$A = x.y$ $A = 300 . 600$ $A = 180\ 000$	$P = 2x + y$ $P = 2.300 + 600$ $P = 1200$

Fonte: a pesquisa.

Portanto, a área máxima é 180 000 m².

Problema 02 – Um fazendeiro com 300 m de cerca, quer cercar uma área retangular e então dividi-la em quatro partes com cercas paralelas a um lado do retângulo. Qual é a maior área total possível das quatro partes?

a) Faça vários diagramas ilustrando a situação, alguns com divisões rasas e largas e alguns com divisões profundas e estreitas. Encontre as áreas totais dessas configurações. Parece que existe uma área máxima? Ser for estime –a.
b) Faça um diagrama ilustrando a situação geral. Introduza uma notação e marque no diagrama seus símbolos.
c) Escreva uma expressão para a área total.
d) Use a informação dada para escrever uma equação que relacione as variáveis.
e) Use a parte (d) para escrever a área total como uma função de uma variável.
f) Acabe de resolver o problema e compare sua resposta com sua estimativa da parte (a) (STEWART, 2013, p. 299).

Na primeira etapa “Compreensão do problema” propõe-se a identificação dos dados apresentados no problema, sendo:

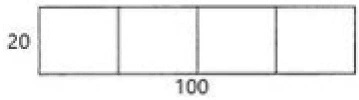
- O perímetro de 300 m de uma cerca, sendo que as dimensões se referem em quatro partes, haja vista, o que descreve o enunciado, sendo que estas partes devem estar paralelas a um lado do retângulo.

- A incógnita do problema envolve a determinação das dimensões das quatro partes que têm a maior área.

Na etapa “Estabelecimento de um plano”, primeiramente é preciso fazer a esquematização com as medidas possíveis para um perímetro de 300 metros, onde tais esquematizações as definem em quatro partes retangulares em rasas e largas, obtendo assim diferentes áreas de cercas (Quadro 12), sendo necessária, a análise das esquematizações para determinar a maior área.

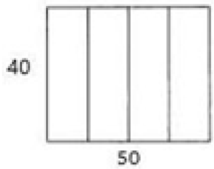
Quadro 12 - Esquematizações de áreas da cerca

Primeira esquematização de área da cerca (E1).



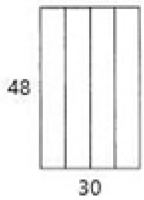
Pode-se verificar na primeira esquematização das divisões rasas e largas o perímetro, que corresponde a P= 100+100+20+20+20+20 = 300 m.

Segunda esquematização de área da cerca (E2).



Pode-se verificar nesta esquematização das divisões profundas e estreitas que o perímetro é P= 40+40+40+40+50+50 = 300 m.

Terceira esquematização de área da cerca (E3).



Nesta esquematização das divisões profundas e estreitas, o perímetro corresponde a P= 30+30+48+48+48+48= 300 m.

Fonte: adaptado de Stewart (2013).

Em seguida, é necessário realizar os cálculos em que se estabeleçam as áreas das esquematizações:

E1 = 100 X 20 = 2.000 m².

E2 = 50 X 40 = 2.000 m².

E3 = 30 X 48 = 1.440 m².

Sendo que o valor máximo encontrado para a área é 2.000 m².

Para a "Execução do plano", pode-se atribuir variáveis para as dimensões do retângulo, sendo x e y e adotar uma simbologia para área, sendo A. Assim, a área será dada pela função $A(x) = x.y$, na qual y precisa ser expresso em termos de x. Para expressar y em termos de x, é preciso utilizar o perímetro.

Para escrever uma expressão para a área total, tem-se: $A(x) = x.y$, onde x e a base e y a altura. Já para o perímetro tem-se $2x + 5y = 300$, isolando y, obtém-se: $y = \frac{300-2x}{5}$ ou $y = 60 - \frac{2x}{5}$.

Substituindo na equação $A(x) = x.y$, tem-se que a área corresponde a $A(x) = x.\left(60 - \frac{2x}{5}\right)$.

Dessa forma, $A(x) = 60x - \frac{2x^2}{5}$, onde se inicia o processo de derivação da área A'(x): $A'(x) = 60 - \frac{4x}{5}$. Igualando a zero e determinando o valor de x, tem-se: $60 - \frac{4x}{5} = 0$; $x = \frac{300}{4}$; $x = 75$. Obtendo assim, o resultado em que x é 75.

Na última etapa "Retrospecto do problema", é encontrado a área máxima dada pela equação $A(x) = 60x - \frac{2x^2}{5}$ e substitui-se x por 75, tem-se:

A$(x) = 60.75 - \frac{2.75^2}{5}$

A(x) = 4.500 – 2.250

A(x)= 2.250 metros quadrados.

Problema 03 – Uma cerca de 2,00 m de altura corre paralela a um edifício alto, a uma distância de 1,00 m do Edifício. Qual o comprimento da menor escada que se apoia no chão e na parede do prédio, por cima da cerca? (STEWART, 2013, p. 300).

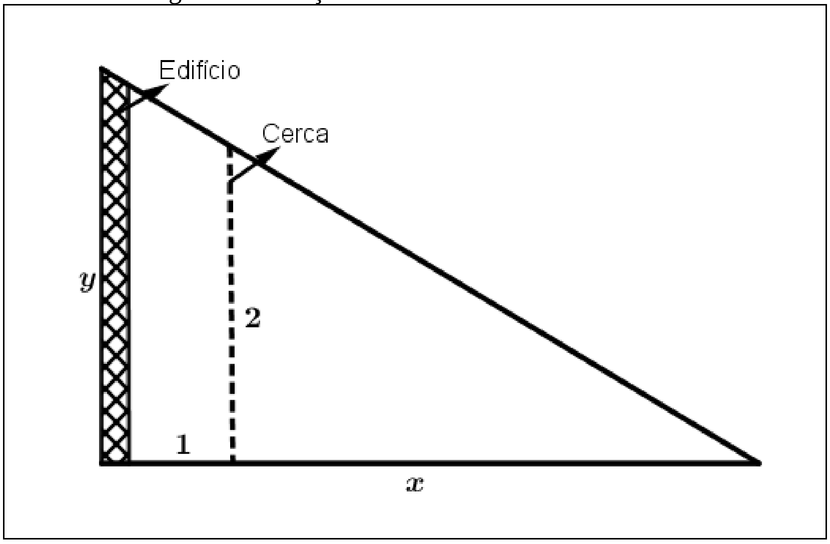
Na primeira etapa "Compreensão do problema" propõe-se a identificação dos dados apresentados no problema, sendo:

- Uma cerca de 2,00 m de altura corre paralela a um edifício alto, a uma distância de 1,00 m do Edifício, em que se pede ou quer saber qual o comprimento da menor escada que se apoia no chão e na parede do prédio, por cima da cerca.

- A incógnita do problema é "Qual o menor comprimento da escada?".

Na etapa "Estabelecimento de um plano", primeiramente precisa-se fazer a esquematização com as medidas possíveis de uma cerca de 2,00 m de altura corre paralela a um edifício alto, a uma distância de 1,00 m do Edifício, onde tais esquematizações precisam apresentar a altura com as devidas medidas paralelas a distância do edifício, obtendo assim a posição da cerca em relação ao prédio e a sua altura (Figura 2), sendo necessária, a análise das esquematizações para determinar a maior área.

Figura 2 - Esboço da altura e da distância da cerca



Fonte: a pesquisa.

Para a "Execução do plano", pode-se atribuir variáveis para as dimensões do triângulo retângulo, sendo x e y e adotar uma simbologia para o comprimento da escada, sendo C. Assim, C será dada pela função $C^2 = x^2 + y^2$, pelo Teorema de Pitágoras, na qual y precisa ser expresso em termos de x. Para expressar y em termos de x, é preciso utilizar a derivação.

Por semelhança de triângulos, obtém-se: $\frac{x}{x-1} = \frac{y}{2}$; $y = \frac{2x}{x-1}$.

Após, substituindo-se $y = \frac{2x}{x-1}$ em $C^2 = x^2 + y^2$, tem-se: $f(x) = C^2 = x^2 + \left(\frac{2x}{(x-1)}\right)^2$.

Assim, inicia-se o processo de derivação da equação, onde se deriva $f(x)$ o igualando a 0: $f\,'(x) = 2x - \frac{8x}{(x-1)^3} = 0$; $f\,'(x) = 2x\left(1 - \frac{4}{(x-1)^3}\right) = 0$.

A derivada tem solução $x = 0$. Então, a equação fica $1 = \frac{4}{(x-1)^3}$. Resolvendo esta equação obtém-se: $(x-1)^3 = 4$; $\sqrt[3]{(x-1)^3} = \sqrt[3]{4}$; $(x-1) = \sqrt[3]{4}$; $x = \sqrt[3]{4} + 1$.

Em $f(x) = x^2 + \left(\frac{2x}{(x-1)}\right)^2$ é preciso avaliar o divisor, pois tem que ser diferente de 1.

Na última etapa "Retrospecto do problema", substitui-se $x = \sqrt[3]{4} + 1$ na $f(x)$: $f(x) = \left(\sqrt[3]{4} + 1\right)^2 + \left(\frac{2\left(\sqrt[3]{4}+1\right)}{\left(\sqrt[3]{4}+1-1\right)}\right)^2$.

Obtendo assim, $f(x) = C^2 = 2.4^{\frac{1}{3}} + 5 + 4.2^{\frac{1}{3}} + 4^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{2}{3}}$, onde C^2 é 17,32173, resultando assim em C ≈ 4,1619.

Problema 04 – Sendo o custo para produzir x unidades de um determinado artigo dado pela função $C(x) = 0{,}06\,x^2 + 0{,}03 + 60$ reais, com uma produção diária de 20 unidades, determinar:

a) O custo adicional quando o nível de produção passar de 20 para 21 unidades.
b) O custo marginal para 20 unidades (MACEDO; CASTANHEIRA, ROCHA, 2006, p.174).

Na primeira etapa "Compreensão do problema" propõe-se a identificação dos dados apresentados no problema, sendo:

- O custo para produzir x unidades de um determinado artigo dado pela função $C(x) = 0{,}06\,x^2 + 0{,}03 + 60$ reais.

- A produção diária de 20 unidades.

- A incógnita do problema é o custo adicional quando a produção passar de 20 para 21 unidades, bem como o custo marginal para 20 unidades e o custo marginal de 20 unidades.

Na etapa "Estabelecimento de um plano", calcula-se a diferença entre o custo de 20 e 21 unidades para obter o custo adicional $C_A(x)$, ficando: $C_A(x) = C(21) + C(20)$. Para determinar o custo marginal, calcula-se a derivada da função $C(x)$.

Em seguida, se inicia a "Execução do plano". Primeiramente, para encontrar o custo adicional, utiliza-se a função $C(x)$ e se calcula x igual a 20 e x igual a 21.

Para 20 unidades: $C(20) = 0{,}06.20^{\,2} + 0{,}03.20 + 60$; $C(20) = 84{,}60$.

Para 21 unidades: $C(21) = 0{,}06.21^{\,2} + 0{,}03.21 + 60$; $C(21) = 87{,}09$.

Em seguida, para determinar o custo marginal $C_M(x)$, calcula-se a derivada da função $C(x)$, sendo: $C_M(x) = C'(x) = 0{,}12x + 0{,}03$.

Na última etapa "Retrospecto do problema", faz-se o cálculo do custo adicional e do custo marginal.

O custo adicional é dado por: $C_A(x) = C(21) + C(20)$; $C_A(x) = 87{,}09 - 84{,}60$; $C_A(x) = 2{,}49$.

O custo marginal para 20 unidades corresponde a $C_M(20) = 0{,}12.20 + 0{,}03 = 2{,}43$.

Problema 05 – Um fazendeiro quer cercar uma área de 15.000 m², em um campo retangular e então dividi-lo ao meio com uma cerca paralela a um dos dois lados do retângulo. Como fazer isso de forma que minimize o custo da cerca? (STEWART, 2013, p. 300).

Na primeira etapa "Compreensão do problema" propõe-se a identificação dos dados apresentados no problema, sendo:

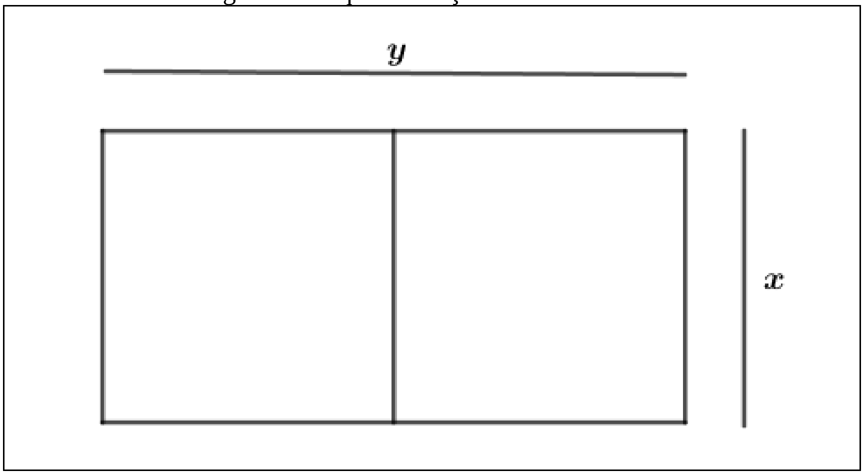
- Um fazendeiro quer cercar uma área de 15.000 m².

- O campo é retangular e será dividido ao meio por uma cerca paralela a um dos lados.

- A incógnita do problema corresponde a determinação da divisão da cerca de forma que minimize o custo dela.

Na etapa "Estabelecimento de um plano", primeiramente se pode fazer a esquematização para uma área de 15.000 m², considerando a divisão da cerca (Figura 3).

Figura 3 - Esquematização da área da cerca



Fonte: a pesquisa.

Assim, a área será dada pela função $A(x) = x.y$. Como o terreno é de 15 000 m², então, pode-se dizer que: $x.y = 15.000$, obtendo assim $x = \frac{15.000}{y}$. Mas, é preciso que y seja expresso em termos de x. Para expressar y em termos de x, é preciso utilizar o perímetro (P).

Para a "Execução do plano", tem-se que encontrar o perímetro, sendo $P = 3.x + 2.y$. Em seguida, sabe-se que $x = \frac{15.000}{y}$. Então, substituindo o x na equação do perímetro, obtém-se: $P = \frac{45.000+2y^2}{y}$.

Para encontrar o mínimo do perímetro é preciso fazer a derivada do P. A derivada do perímetro P', corresponde a $P' = \frac{2y^2-45000}{y^2}$. Agora, iguala-se à derivada de P' a zero, para determinar y, sendo: $0 = \frac{2y^2-45000}{y^2}$; $2y^2 - 45000 = 0$; $y = 150$.

O passo a seguir é encontrar o x na equação. Para $x = \frac{15.000}{y}$, e $y = 150$, obtém-se que $x = \frac{15000}{150}$, logo x =100.

Na última etapa "Retrospecto do problema", substitui-se x e y pelos seus respectivos resultados já encontrados anteriormente, onde se tem que: $A(x) = x.y$; $A(x) = 100.150$; $A(x) = 15000$ e $P = 3.x + 2.y$; $P = 3.100 + 2.150$; $P = 300 + 300$; $P = 600\ m$. O perímetro mínimo é 600 metros.

Problema 06 – Encontre as dimensões de uma caixa retangular com base quadrada e volume de 8.000 cm³ que possa ser feita, com a menor quantidade de material (GOLDSTEIN; LAY; SCHNEIDER, 2006, p. 185).

Na primeira etapa "Compreensão do problema" propõe-se a identificação dos dados apresentados no problema, sendo:

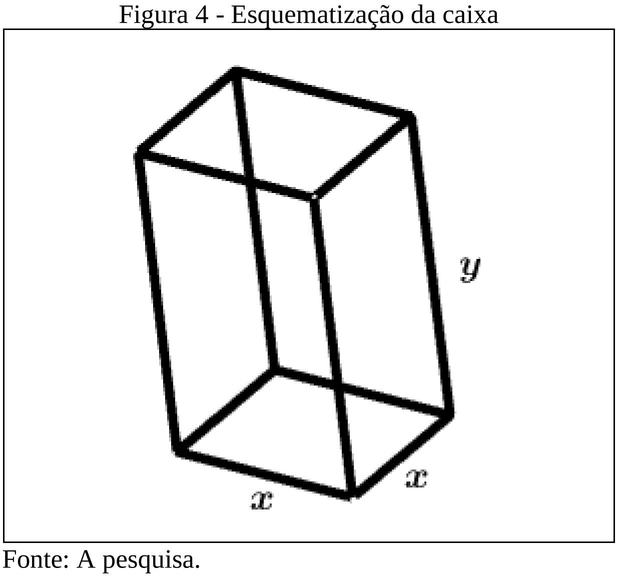
- Uma caixa retangular com base quadrada.

- O volume de 8.000 cm³.

- A incógnita do problema do problema é determinar as dimensões da caixa de forma a diminuir a quantidade de material.

Na etapa "Estabelecimento de um plano", primeiramente se pode fazer um esboço da caixa retangular de base quadrada (Figura 4).

Figura 4 - Esquematização da caixa



Fonte: A pesquisa.

Assim, o volume da caixa é dado por: volume = comprimento x largura x altura.

Sendo que o volume da caixa já foi definido como 8.000 cm³, então: $8.000 = y.x.x$; $8.000 = y.x^2$. Isolando y, tem-se: $y = \frac{8.000}{x^2}$.

Para encontrar a quantidade mínima de material para construção da caixa, precisa-se determinar a área total da caixa.

Para a "Execução do plano", tem-se que encontrar a área lateral A_L, a área da base A_B, para então determinar a área total. Logo, a A_T da caixa é: $A_T = 2.A_B + 4.A_L$; $A_T = 2.x^2 + 4.xy$. Em seguida, sabe-se que $y = \frac{8.000}{x^2}$. Então, substituindo o y na equação da A_T, obtém-se: $A_T = 2.x^2 + 4.x.\frac{8.000}{x^2}$; $A_T = \frac{32.000+2x^3}{x}$.

Em seguida é preciso fazer a derivada da A_T, que corresponde a $A'_T = -\frac{32000}{x^2} + 4x$. Após, iguala-se à derivada a zero, para determinar x, sendo: $0 = -\frac{32000}{x^2} + 4x$; $x = 20$.

O passo a seguir é encontrar o y. Para $y = \frac{8.000}{x^2}$ e $x = 20$, tem-se que $y = \frac{8.000}{20^2} = 20$.

Na última etapa "Retrospecto do problema", substitui-se x e y pelos seus respectivos resultados já encontrados anteriormente, onde se tem que: $8.000 = y.x^2$; $8.000 = 20.20^2$. Como a igualdade se verifica, logo as dimensões são 20x20x20 cm.

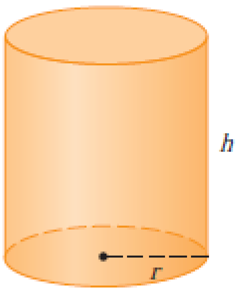
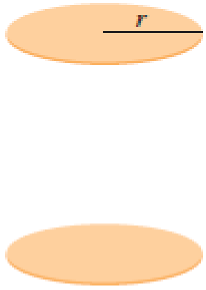
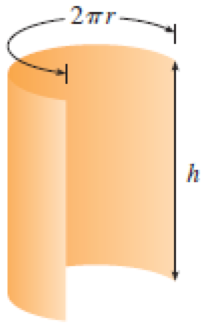
Problema 07 - Uma lata cilíndrica fechada deve conter 1 litro (1000 cm³) de líquido. Como poderíamos escolher a altura e o raio para minimizar o material usado na confecção da lata? (STEWART, 2013, p. 295).

Na primeira etapa "Compreensão do problema" propõe-se a identificação dos dados apresentados no problema, sendo:

- Uma lata cilíndrica fechada.
- O volume de 1 litro.
- A incógnita do problema do problema é determinar a altura e o raio para minimizar o material para construção da lata.

Na etapa "Estabelecimento de um plano", primeiramente fazer a devida esquematização da lata, conforme a Figura 5.

Figura 5 - Esquematizações da lata

Formato da Lata	**Bases da Lata**	**Lateral da Lata**
 h – altura; r – raio		

Fonte: Retirado de Stewart (2013, p. 295).

Assim, o volume da lata é dado pelo volume (V) de um cilindro: $V = \pi r^2 h$.

Sendo que o volume da lata deve ser de 1000 cm³, então: $1.000 = \pi r^2 h$. Isolando h, tem-se: $h = \frac{1.000}{\pi r^2}$.

Para encontrar a quantidade mínima de material para construção da lata, precisa-se determinar a área total.

Para a "Execução do plano", tem-se que encontrar a área lateral A_L, a área da base A_B, para então determinar a área total da lata. Logo, a A_T da lata é: $A_T = 2.A_B + A_L$; $A_T = 2\pi r^2 + 2\pi r h$. Em seguida, sabe-se que $h = \frac{1.000}{\pi r^2}$. Então, substituindo o h na equação da A_T, obtém-se: $A_T = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{1.000}{\pi r^2}$; $A_T = 2\pi r^2 + \frac{2.000}{r}$. Observe que r tem que ser maior que zero.

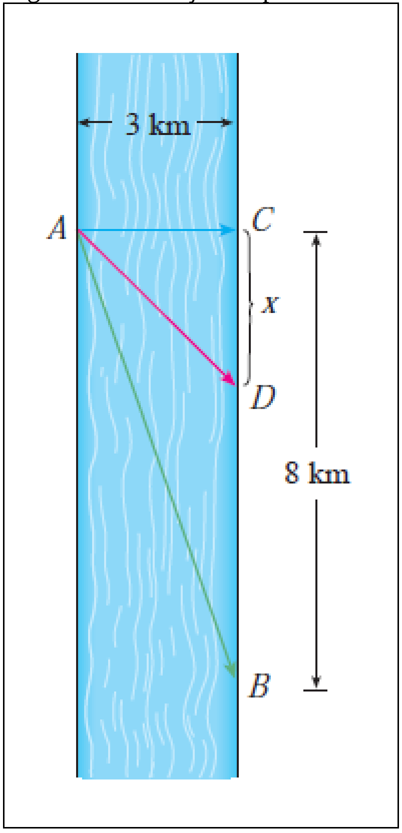
Em seguida é preciso fazer a derivada da A_T, que corresponde a $A'_T = -\frac{2000}{r^2} + 4\pi r$. Após, iguala-se à derivada a zero, para determinar r: $0 = -\frac{2000}{r^2} + 4\pi r$; $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$.

O passo a seguir é encontrar a altura h. Para $h = \frac{1.000}{\pi r^2}$ e $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$, tem-se que $h = \frac{1.000}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}\right)^2}$. Observando a equação resultante pode-se dizer que $h = 2r$.

Na última etapa "Retrospecto do problema", substitui-se $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ e $h = 2r$ pelos seus respectivos resultados já encontrados anteriormente, onde se tem que: $V = \pi r^2 h$; $V = \pi\left(\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}\right)^2 .2.\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$. Como a igualdade se verifica, logo a altura deve ser igual a duas vezes o raio para se minimizar o custo na confecção da lata.

Problema 08 - Um homem lança seu bote em um ponto A na margem de um rio reto, com uma largura de 3 km, e deseja atingir tão rápido quanto possível um ponto B na outra margem, 8 km rio (Figura 6). Ele pode dirigir seu barco diretamente para o ponto C e então seguir andando para B, ou rumar diretamente para B, ou remar para algum ponto D entre C e B e então andar até B. Se ele pode remar a 6 km/h e andar a 8 km/h, onde ele deveria aportar para atingir B o mais rápido possível? Supõem-se que a velocidade da água seja desprezível comparada com a velocidade na qual o homem rema (STEWART, 2013, p. 297).

Figura 6 - Ilustração do problema 08



Fonte: Retirado de Stewart (2013, p. 297).

Na primeira etapa "Compreensão do problema" propõe-se a identificação dos dados apresentados no problema, sendo:

- O rio tem uma largura de 3 km.

- Existem os pontos A, B, C e D.

- Deseja atingir do ponto inicial a um ponto B na outra margem, sendo 8 km rio abaixo.

- O homem rema a 6 km/h e anda a 8 km/h.

- A incógnita do problema do problema é determinar onde o homem deve aportar para atingir o ponto B rapidamente.

Na etapa "Estabelecimento de um plano", primeiramente sabe-se que a distância do ponto C até o ponto D é x, que a distância do ponto D até o ponto B corresponde a "8 – x", e pelo Teorema de Pitágoras encontra-se a distância do ponto A ao ponto D, ou seja, "$\sqrt{x^2+9}$". Pode-se utilizar a equação que determina o tempo para encontrar x, sendo a equação: $Tempo = \frac{distância}{velocidade}$.

Para a "Execução do plano", será utilizada a equação: $Tempo = \frac{distância}{velocidade}$.

Então, o tempo gasto remando é $\frac{\sqrt{x^2+9}}{6}$ horas, enquanto o tempo gasto andando é $\frac{8-x}{8}$ horas. Para determinar o tempo total (T) somam-se as equações, da seguinte forma: $T(x) = \frac{\sqrt{x^2+9}}{6} + \frac{8-x}{8}$. Como o domínio da função está no intervalo de 0 a 8, ou seja, $x \in [0, 8]$. Pode-se notar que, se $x = 0$, o homem rema para C, e se $x = 8$, ele rema para B.

A derivada de T é $T'(x)$: $T'(x) = \frac{x}{6\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{8}$.

Assim, igualando a derivada a zero, tem-se: $\frac{x}{6\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{8}$; $4x = 3\sqrt{x^2+9}$; $x = \frac{9}{\sqrt{7}}$.

Na última etapa "Retrospecto do problema", é encontrado o mínimo de x, que ocorre em um número crítico ou nos extremos do domínio [0, 8], calcula-se T em todos os três pontos: $T(0) = 1{,}5$; $T\left(\frac{9}{\sqrt{7}}\right) = 1 + \frac{\sqrt{7}}{8} \approx 1{,}33$ e $T(8) = \frac{\sqrt{73}}{8} \approx 1{,}42$.

Uma vez que o menor desses valores de T ocorre quando $x = \frac{9}{\sqrt{7}}$.

Dessa forma, o homem deve aportar o bote no ponto $\frac{9}{\sqrt{7}}$ km rio abaixo a partir do ponto C.

Questão Problema 09 – Encontre as dimensões de um retângulo com perímetro de 100 m cuja área seja a maior possível (STEWART, 2013, p. 300).

Na primeira etapa "Compreensão do problema" propõe-se a identificação dos dados apresentados no problema, sendo:

- Retângulo.

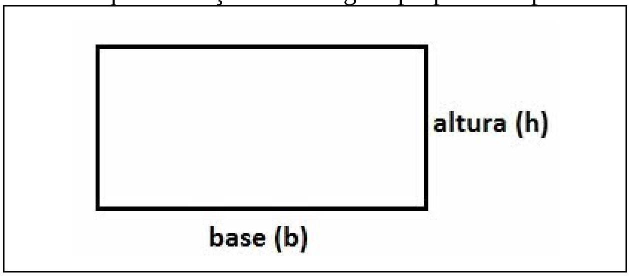
- Perímetro de 100 m.

- O limite desse retângulo será descrito em base (b) e altura (h).

- A incógnita do problema corresponde à determinação das dimensões de um retângulo, tendo o perímetro já descrito em 100 m, sendo que a área seja a maior possível.

Na etapa "Estabelecimento de um plano", primeiramente se pode fazer a esquematização para um perímetro de 100 m (Figura 7), fazendo assim a relação que envolve o perímetro P e as variáveis b e h.

Figura 7 - Esquematização do retângulo proposto no problema 09



Fonte: Retirado de Stewart (2013, p. 300).

Para a "Execução do plano", será utilizada a equação, que envolva as variáveis e o perímetro, onde P = 2. (b + h), onde P= Perímetro, b = Base e h = Altura.

Em que a equação relacionada se descreve 2b + 2h =100, assim pode-se isolar a variável b, ficando $b = \frac{100-2.h}{2}$, onde se tem $b = 50 - h$. Na sequência do cálculo para se obter a área na equação tem-se: $A = b\,.h$.

Na última etapa "Retrospecto do problema", é substituído a variável b, na equação $A = b.h$, em que; $A = (50 - h).h$, resultando assim em; $A = 50.h - h^2$, onde para encontrar o máximo, é preciso derivar e igualar a zero, A = 50.h – h², onde se inicia a derivação de $A' = 50 - 2.h$, em que $50 - 2.h = 0$, tendo assim que: $2.h = 50$, aonde se chegar ao resultado de $h = \frac{50}{2}$, obtendo assim que: h = 25 m.

Onde se encontra o b = 50 – 25 = 25 m, tendo assim as dimensões do retângulo em que o b= 25 m e a altura h = 25 m.

Questão Problema 10 - Encontre as dimensões de um retângulo com área de 1.000 m², cujo perímetro seja o menor possível (STEWART, 2013, p. 300).

Na primeira etapa "Compreensão do problema" propõe-se a identificação dos dados apresentados no problema, sendo:

- Encontras as dimensões de um retângulo.

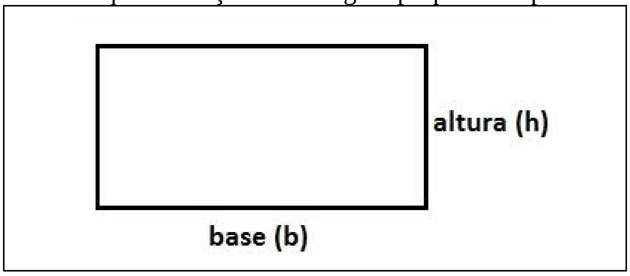
- A área de 1.000 m².

- O limite desse retângulo será descrito em base (b) e altura (h).

- A incógnita do problema corresponde à determinação das dimensões de um retângulo, tendo a área já descrita em 1.000 m², sendo que o perímetro seja o menor possível.

Na etapa “Estabelecimento de um plano”, primeiramente se pode fazer a esquematização para uma área retangular sabendo que ela tem uma área igual a 1.000 m², tendo assim a delimitação da cerca com os lados definidos como base (b) em relação à altura (h), conforme a Figura 8.

Figura 8 - Esquematização do retângulo proposto no problema 10



Fonte: Retirado de Stewart (2013, p. 300).

Para a “Execução do plano”, será utilizada a equação $A = b.h$, onde b corresponde a base e h é a altura. Sabe-se que a área é de 1.000 m², seguindo a equação de b.h = 1.000, sendo assim $b = \frac{1.000}{h}$. O perímetro é dado por: P = 2.b + 2. h, com base nas informações anteriores, tem-se que P = $\frac{2.000}{h}$ + 2. h, na sequência a equação que dará origem a P $= \frac{2.h^2+2.000}{h}$, onde para encontrar o mínimo, precisa-se derivar e igualar a zero. A derivada de P, corresponde a $P' = \frac{4.h^2-2.h^2-2.000}{h^2} = \frac{2.h^2-2.000}{h^2}$.

Na última etapa “Retrospecto do problema”, iguala-se a zero a derivada obtida anteriormente, $\frac{2.h^2-2.000}{h^2}$ = 0, tendo assim 2.h² - 2.000 = 0, onde 2.h² = 2.000, obtendo assim o h² = $\frac{2.000}{2}$, em que se resulte h² = 1.000, chegando assim ao resultado em que h= $10\sqrt{10}$. Sabendo-se que b = $\frac{1.000}{h}$, onde h= 10. $\sqrt{10}$, substituindo obtém-se b = $\frac{1.000}{10.\sqrt{10}}$, sendo o resultado de b = $10.\sqrt{10}$, tendo assim os resultados em que b = $10.\sqrt{10}$ e h= 10. $\sqrt{10}$.

Questão Problema 11 - Uma caixa com uma base quadrada e sem tampa tem volume de 32 000 cm³. Encontre as dimensões da caixa que minimizem a quantidade de material usado (STEWART, 2013, p. 300).

Na primeira etapa “Compreensão do problema” propõe-se a identificação dos dados apresentados no problema, sendo:

- Uma caixa quadrada.

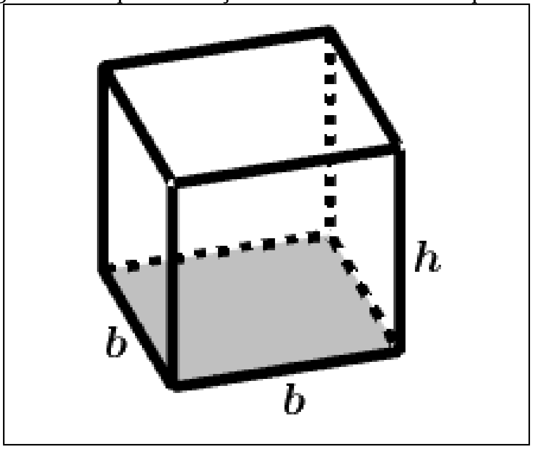
- O volume é de 32.000 m².

- O limite dessa caixa quadrada será descrito em base (b) e altura (h), sem a tampa.

- A incógnita do problema corresponde à determinação das dimensões da caixa quadrada que minimizam a quantidade de material usado, tendo assim o volume já descrito.

Na etapa “Estabelecimento de um plano”, primeiramente se pode fazer uma esquematização da caixa quadrada e apresentar na mesma as variáveis que irão representar a altura, a largura e o comprimento (Figura 9).

Figura 9 - Esquematização da caixa com base quadrada



Fonte: Adaptado de Stewart (2013).

Para a “Execução do plano”, será utilizado o volume da caixa, V = b². h = 32.000, a área da base e a área lateral representada pelas equações A_b= b², A_L= 4.b.h, e a área total da caixa, A = b²+ 4.b.h, onde na equação do volume, irá se isolar a altura, h$= \frac{32.000}{b^2}$.

Na sequência do cálculo será feito a substituição da área, tendo assim a equação em que A= b² + 4.b.($\frac{32.000}{b^2}$) = b²+ $\frac{128.000}{b}$ = $\frac{b^3+128.000}{b}$, onde se tem o valor mínimo da área pelo cálculo da derivada, $A' = \frac{3.b^3 - b^3 - 128.000}{b^2} = \frac{2.b^3 - 128.000}{b^2}$, e em seguida se é preciso igualar a derivada a zero, $\frac{2.b^3 - 128.000}{b^2}$ = 0.

Na última etapa “Retrospecto do problema”, a partir da equação anterior determinasse a variável b, em que 2b³ - 128.000 = 0, onde b³= $\frac{128.000}{2}$, o resultado da base é b = 40 cm.

Agora, a partir da equação h= $\frac{32.000}{b^2}$, onde já se tem o resultado de b, irá ser determinada a variável h, sendo: h = $\frac{32.000}{40^2}$ =$\frac{32.000}{1.600} = 20$. Assim, o resultado obtido corresponde a: h = 20 cm e b = 40 cm.

Questão Problema 12 - Encontre as dimensões do retângulo com a maior área que pode ser inscrito em um triângulo equilátero com lado L se um dos lados do retângulo estiver sobre a base do triângulo (STEWART, 2013, p. 300).

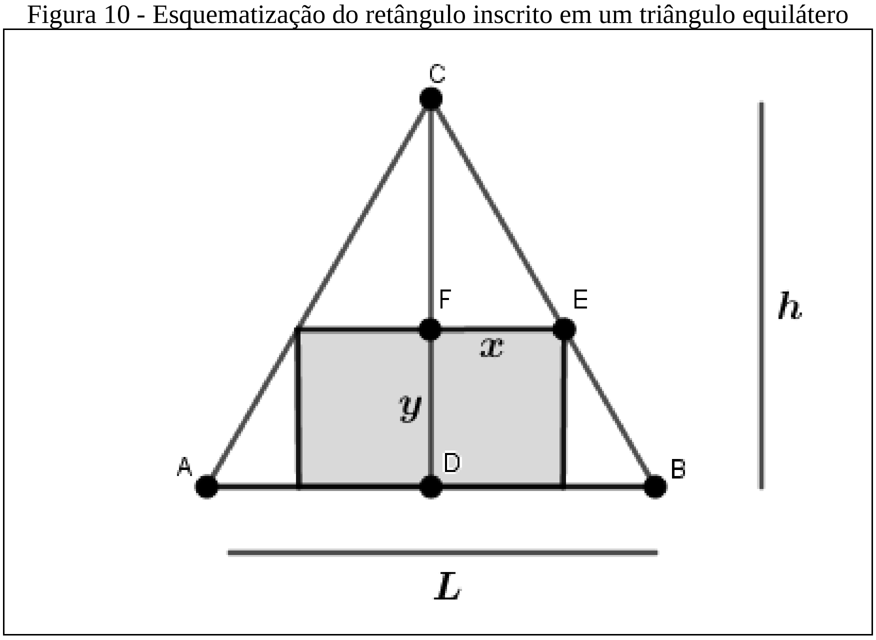
Na primeira etapa "Compreensão do problema" propõe-se a identificação dos dados apresentados no problema, sendo:

- Encontrar as dimensões do retângulo, inscrito sobre um triângulo equilátero.

- A incógnita do problema corresponde à determinação das dimensões do retângulo com a maior área que pode ser inscrito em um triângulo equilátero com lado L se um dos lados do retângulo estiver sobre a base do triângulo.

Na etapa "Estabelecimento de um plano", primeiramente será feito a esquematização da situação problema apresentada, com suas respectivas medidas representadas por incógnitas (Figura 10).

Figura 10 - Esquematização do retângulo inscrito em um triângulo equilátero



Fonte: A pesquisa.

Para a "Execução do plano" utilizando o teorema de Pitágoras para o triângulo CDB, tem-se a altura h: de h ^{2} = L^2 - $\left(\frac{L}{2}\right)^2$; h ^{2} = $\frac{3}{4}$ L^2; h = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ L. Pela semelhança de triângulos, considerando o triângulo CDB e o triângulo CFE, tem-se: $\frac{h}{h-y}\ \frac{\left(\frac{L}{2}\right)}{x}$.

Substituindo-se h = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ L, na equação $\frac{h}{h-y}\ \frac{\left(\frac{L}{2}\right)}{x}$, obtém-se: $\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}.L\right)-y} = \frac{\frac{L}{2}}{x}$; $\sqrt{3}.x$ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$. L – y;

y= $\frac{\sqrt{3}}{2}$. L – $\sqrt{3}\ x$.

Na última etapa "Retrospecto do problema", sabe-se que a área do retângulo é A= 2.x.y, onde substituindo-se y por y= $\frac{\sqrt{3}}{2}$ L – $\sqrt{3}\ x$, tem-se: A= 2x$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ .(L-2x)\right)$; A = $\sqrt{3}$.L.x – $2\sqrt{3}x^2$. Iniciando assim o processo da maximização onde, A´(x) = $\sqrt{3}$ L – 4$\sqrt{3}$x= 0, onde x= $\frac{\sqrt{3}.L}{4.\sqrt{3}}$, obtendo assim o resultado em que $x=\frac{L}{4}$, e na sequência em y= $\frac{\sqrt{3}}{2}$. L – $\sqrt{3}\,.\ x$, substitui-se $x=\frac{L}{4}$, obtendo: y=$\frac{\sqrt{3}}{2}$. $\left(L-\ \frac{2.L}{4}\right)$; y=$\frac{\sqrt{3}.}{4}L$.

Como deseja se saber as dimensões do retângulo sabe-se que um dos lados é "x + x", sendo $\frac{L}{4}+\frac{L}{4}$, portanto $\frac{L}{2}$ e o outro lado corresponde a y = $\frac{\sqrt{3}.}{4}L$.

Logo, as dimensões são $\frac{L}{2}$ e $\frac{\sqrt{3}.}{4}L$.

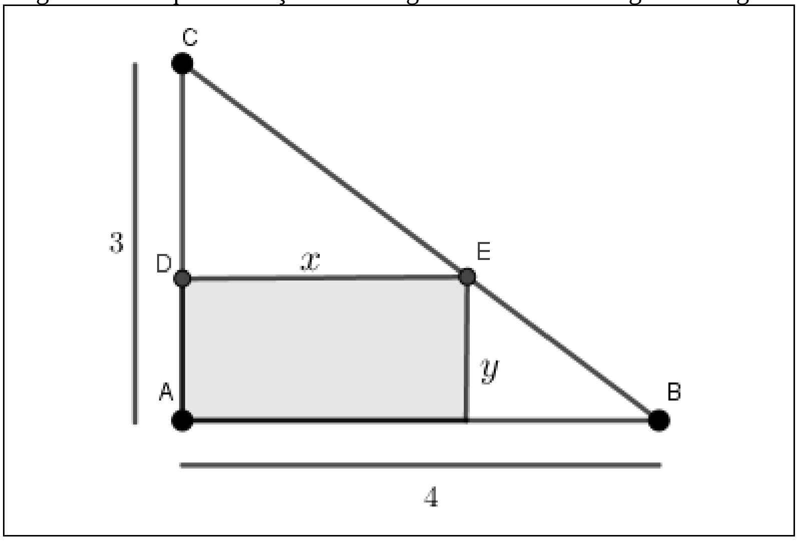
Questão Problema 13 - Encontre a área do maior retângulo que pode ser inscrito em um triângulo retângulo com catetos de comprimentos 3 e 4 cm, se dois lados do retângulo estiverem sobre os catetos (STEWART, 2013, p. 300).

Na primeira etapa "Compreensão do problema" propõe-se a identificação dos dados apresentados no problema, sendo:

- Retângulo inscrito em um triângulo retângulo.
- Os catetos têm comprimentos 3 e 4 cm.
- A incógnita do problema corresponde à determinação das dimensões da área do maior retângulo que pode ser inscrito em um triângulo retângulo com catetos de comprimentos 3 e 4 cm, se dois lados do retângulo estiverem sobre os catetos.

Na etapa "Estabelecimento de um plano", primeiramente será feito a devida esquematização, na qual será apresentado o retângulo inscrito no triângulo retângulo (Figura 11), sendo detalhados os lados com as suas devidas variáveis e medidas dos catetos.

Figura 11 - Esquematização do retângulo inscrito no triângulo retângulo



Fonte: A pesquisa.

Para a "Execução do plano", pela semelhança de triângulos, considerando o triângulo ABC e o triângulo DEC, tem-se: $\frac{3-y}{x} = \frac{3}{4}$; $y = \frac{12-3x}{4}$.

Na última etapa "Retrospecto do problema" sendo a definição da área, em que A = *x. y,* onde A = *x.* $\left(\frac{12-3x}{4}\right)$, sendo que A= $\frac{12x-3x^2}{4}$, iniciando assim o seu processo de derivação em que: A´(*x*)=$-\frac{3x}{2} + 3$. Igualando a derivada a zero tem-se: $-\frac{3x}{2} + 3 = 0$; x=2. Substituindo o valor de x na equação $y = \frac{12-3x}{4}$, tem-se: $y = \frac{12-3.2}{4} = \frac{3}{2}$.

Logo o resultado da área do retângulo será dado por: A = *x.y* = $\frac{3}{2}$.*2*, sendo que a área máxima é de A = 3 cm².

Questão Problema 14 – Às margens superiores e inferiores de um pôster têm 6 cm e cada margem lateral tem 4 cm. Se a área do material impresso no pôster é de 384 cm², encontre as dimensões do pôster com a menor área (STEWART, 2013, p. 300).

Na primeira etapa "Compreensão do problema" propõe-se a identificação dos dados apresentados no problema, sendo:

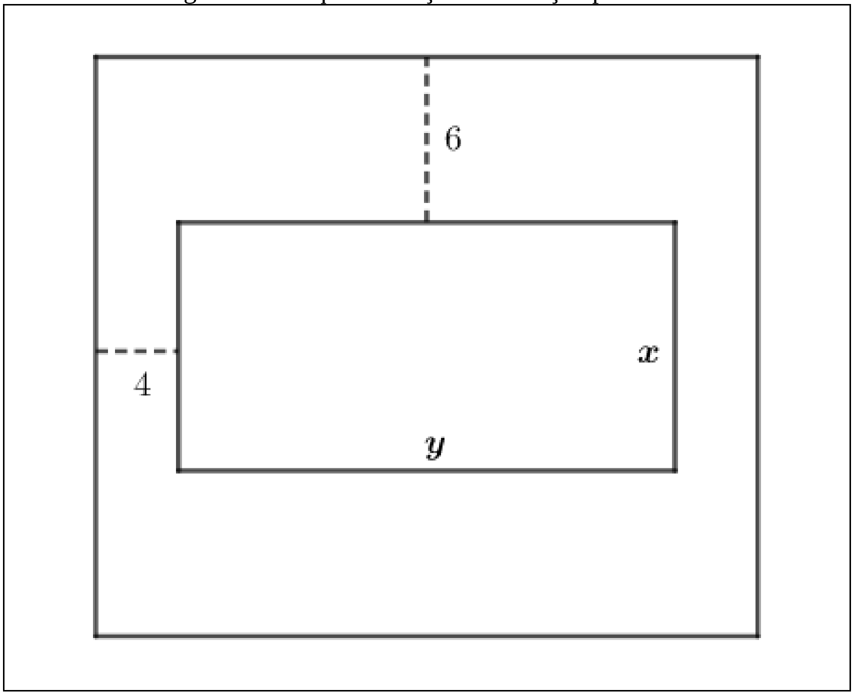
- A área de 384 m².

- As margens superiores e inferiores de um pôster têm 6 cm e cada margem lateral tem 4 cm.

- A incógnita do problema corresponde à determinação das dimensões do pôster com a menor área, onde as suas margens superiores e inferiores têm 6 cm e cada margem lateral tem 4 cm, sendo que a área do material impresso no pôster é de 384 cm².

Na etapa “Estabelecimento de um plano”, primeiramente se pode fazer a esquematização para uma área de 384 cm², fazendo assim a relação que envolve as variáveis de x e y, com relação às medidas de 6 cm e 4 cm (Figura 12).

Figura 12 - Esquematização da situação problema



Fonte: A pesquisa.

Para a “Execução do plano” em sequência as dimensões menores da área do pôster têm como equação: $Ap = (x+8).(y+12)$, porém a área do material em questão mede 384 cm², então a relacionando as variáveis x e y, tem-se: Am = *x.y*; 384 = *x.y*; $y=\frac{384}{x}$.

Substituindo $y=\frac{384}{x}$ na equação $Ap = (x+8).(y+12)$, tem-se: $A_p = (x+8).\left(\frac{384}{x} + 12\right) = \frac{3.072}{x}$ + 12.x + 480.

Na última etapa “Retrospecto do problema” maximizando a equação em função da variável de *x*: $A_p{}'(x) = -\frac{3.072}{x^2} + 12$. Igualando a derivada a zero, tem-se: $-\frac{3.072}{x^2} + 12 = 0$; $\frac{3.072}{x^2} = 12$; 12. x^2 = 3.072; $x^2 = \frac{3.072}{12}$; x^2= 256; x = $\sqrt{256}$; *x* = 16 cm. Para a obtenção de y= $\frac{384}{x}$, onde se substitui o x=16 para se obter o y, sendo $y = \frac{384}{16}$, tendo assim o resultado em que *y = 24*.

Fazendo assim prospecto da equação com os resultados das variáveis de x e y, onde as dimensões se relacionam a base que é x + 8, onde 16 +8 = 24 cm e a altura que é *y* + 12, onde 24 +12 = 36 cm.

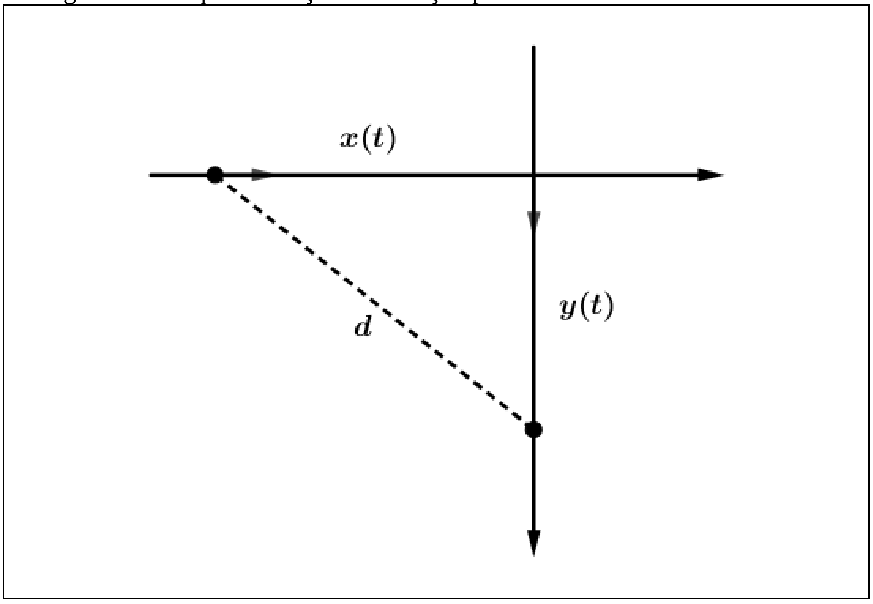
Questão Problema 15 - Um barco deixa as docas às 14 h e viaja para o sul com velocidade de 20 km/h. Outro barco estava rumando leste a 15 km/h e alcança a mesma doca às 15 h. Em que momento os dois barcos estavam mais próximos um do outro? (STEWART, 2013, p. 301).

Na primeira etapa "Compreensão do problema" propõe-se a identificação dos dados apresentados no problema, sendo:

- Um barco deixa as docas às 14 h e viaja para o sul com velocidade de 20 km/h.
- Outro barco estava rumando leste a 15 km/h e alcança a mesma doca às 15 h.
- A incógnita do problema corresponde à determinação do tempo em que os dois barcos estão próximos um do outro, sendo que um dos barcos está a 20 km/h e viaja para o sul e deixou as docas às 14h, enquanto o outro estava rumando a leste a uma velocidade de 15 km/h e alcança a mesma doca às 15 h.

Na etapa "Estabelecimento de um plano", primeiramente será feito a devida ilustração ou esquematização sendo necessária a relação entre os barcos e as direções entre eles, a velocidade de cada um e o sentido das direções, conforme a (Figura 13).

Figura 13 - Esquematização da situação problema envolvendo dois barcos



Fonte: A pesquisa.

No estabelecimento do plano, observando a esquematização da situação problema, pode-se determinar que $y(t) = 20t + y_0$ e $x(t) = 15t + x_0$. Calculando x(t), obtém-se que $x_0 = -45$ e calculando y(t) tem-se que $y_0 = -40$. Logo, $y(t) = 20t - 40$ e $x(t) = 15t - 45$. Agora, é preciso determinar a distância D(t) entre os barcos.

Na última etapa, "Retrospecto do problema", encontra-se a distância que é dada por: $D(t) = \sqrt{\left(y(t)\right)^2 + \left(x(t)\right)^2}$.

Seguindo a resolução tem-se que: $D(t) = \sqrt{(20t - 40)^2 + (15t - 45)^2}$; $D(t) = \sqrt{625t^2 - 2950t + 3625}$. Em seguida, é preciso minimizar a equação D(t): $D'(t) = \frac{125x - 295}{\sqrt{25x^2 - 118x + 145}}$. Igualando a derivada a zero, tem-se: $0 = \frac{125x - 295}{\sqrt{25x^2 - 118x + 145}}$; $0 = 125x - 295$; $x = 2{,}36$. Portanto, os barcos estavam mais próximos às 2,36h, porém pode-se fazer a conversão em relação a 0,36h, que equivale a 21 minutos e 36 segundos, então os barcos estavam próximos às 2h 21min 36s.

5 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

As atividades foram desenvolvidas com um grupo composto por 22 acadêmicos do Curso de Arquitetura e Urbanismo do Centro Universitário Luterano de Ji-Paraná/RO, sendo proposto trabalhar com atividades didáticas de aplicações de cálculo de Derivada, de forma a possibilitar o uso da metodologia de resolução de problemas, por meio do trabalho coletivo entre os acadêmicos. Para análise dos dados, os acadêmicos foram identificados por A1, A2, A3, ..., A22. O experimento ocorreu em 2019, durante o primeiro semestre, com duração de 6 encontros (Quadro 13).

Quadro 13 - Encontros da fase de experimentação

Encontros	**Descrição**
1° e 2°	Apresentação da proposta didática, do questionário, do conteúdo de derivadas e aplicação do termo de consentimento.
3° e 5°	Resolução dos problemas 1 a 15.
6°	Finalização e discussão das atividades.

Fonte: a pesquisa.

Inicialmente, esse estudo de pesquisa foi realizado com acadêmicos no curso de Arquitetura e Urbanismo, tendo uma relação de 13 participantes do sexo feminino, tendo a idade entre elas de 22 a 25 anos, e 9 participantes do sexo masculino, tendo a idade entre eles de 19 a 23 anos, 12 acadêmicos trabalhavam, sendo 9 em Escritórios de Engenharia e Arquitetura e 3 em Lojas de Materiais de Construção. Também, de acordo com as respostas dos acadêmicos ao questionário pode-se identificar que 8 têm dificuldades em cálculos matemáticos, envolvendo os conteúdos de Cálculo, Desenho Arquitetônico, Geometria Gráfica e Estatística. Com relação a importância do conhecimento matemático para atuar profissionalmente os alunos responderam que aos projetos arquitetônicos e urbanísticos, aspectos estéticos, funcionalidade e segurança das construções são pensados a partir de proporções, escalas e medidas que requerem alto grau de precisão. Ainda, um dos participantes respondeu que “*o gosto pelos aspectos matemáticos deve estar aliado aos conhecimentos como a arte e a engenharia*”.

Como exemplificação de onde utilizar os cálculos matemáticos na vida profissional, os acadêmicos responderam que está relacionado a área para se planejar e desenhar os espaços tendo em vista o seu melhor aproveitamento, e que exige muitas habilidades com cálculos. Com relação a utilização dos conhecimentos matemáticos na vida cotidiana os acadêmicos relataram que o arquiteto tem que ser capaz, portanto, de propor soluções inovadoras e criativas para melhorar as relações das pessoas com as distintas construções, tendo um conhecimento matemático que lhe dê um suporte para não se comete erros nos seus projetos. Quanto à reprovação na disciplina de Matemática Aplicada apenas 4 acadêmicos haviam relatado que estavam à fazendo pela segunda vez, tendo como grau de dificuldades a relação dos cálculos da matemática básica.

E em seguida, trabalhou-se o conceito de Derivadas e suas aplicações e depois de esclarecidas as dúvidas iniciaram-se as atividades com uma lista de problemas que contemplavam o conteúdo de Derivadas. Foi solicitado aos alunos que desenvolvessem as atividades em grupo para que pudessem conversar e compartilhar as estratégias de resolução (Figura 14), porém a entrega dos registros da realização das atividades se deu de forma individual e aleatória.

Figura 14 - Imagens dos acadêmicos durante a fase de experimentação

Fonte: acadêmicos do Curso de Arquitetura e Urbanismo do Centro Universitário Luterano de Ji-Paraná-CEULJI.

A primeira atividade escolhida e proposta para a análise detalhada do cálculo envolvia a determinação das dimensões de um campo para que tenha a maior área, conforme se pode observar este problema envolve uma aplicação das derivadas, especificamente, a maximização da área de uma região retangular, sendo conhecidas as delimitações da cerca, descrita assim no problema apresentado na (Figura 15).

Figura 15 - Problema 01 da sequência de atividades

Problema 01 – Um fazendeiro tem 1.200 m de cerca e quer cercar um campo retangular na margem de um rio reto. Ele não precisa de cerca ao longo do rio. Quais as dimensões do campo que tem a maior área?

Fonte: Retirado de Stewart (2013, p.294).

Nessa atividade, após a leitura da situação proposta e diálogo entre os acadêmicos de uma forma aleatória emergiram questionamentos, como:

> *Acadêmico A1: Professor, como eu interpretaria esses dois lados. Poderia utilizar várias formas de interpretar esses lados na figura?*
> *Resposta: Você deverá fazer algumas ilustrações, com relação aos lados da cerca.*
> *Acadêmico A7: Poderia usar os dois lados como incógnita, relacionando-os ao comprimento da cerca?*
> *Resposta: Sim, você pode, colocando as estas variáveis com letras e as igualando ao comprimento da cerca.*
> *Acadêmico A5: Poderia fazer a variação desses lados como incógnita, relacionando-os ao comprimento da cerca?*
> *Resposta: Sim, lembrando que os lados só se referem ao perímetro, não sendo necessário se fazer a margem do rio.*

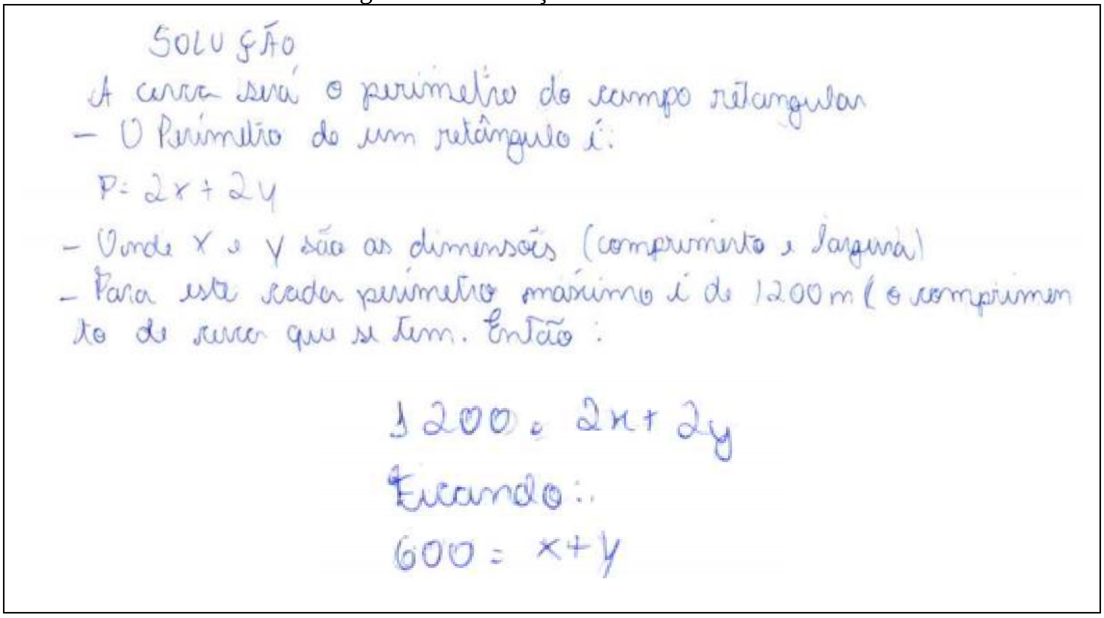
Na primeira questão, sobre a demarcação da cerca, procurou-se levar o acadêmico a compreender os cálculos da derivada, em situações problemas de otimização de maximização, sendo preciso assim identificar pontos essenciais para se iniciar a resolução do problema em questão.

O aluno A1 faz a sua leitura da situação proposta e tenta por meio dessa compreender o que está sendo solicitado. Em seguida, busca informações que se evidenciam com a determinação de um dos lados da cerca, proposta no problema, fazendo assim o levantamento e a coleta de dados das informações relevantes.

Esse momento na realização da atividade remete a "compreensão do problema" proposta por Polya (1995), no qual o acadêmico precisou identificar a figura geométrica, como sendo previamente retangular, e que as relacione as delimitações de uma cerca, tendo assim como referências básicas os conhecimentos matemáticos ao cálculo do perímetro, sem esquecer que um retângulo tem lados congruentes.

O aluno A1, ao associar as incógnitas x e y, as utiliza para representar as dimensões da figura dada no problema e por meio das esquematizações se inicia a fase do "estabelecimento do plano", descrita por Polya (1995). Como é um terreno retangular, logo o aluno sabe que os lados de um retângulo são proporcionais, chegando à fórmula do perímetro, como "P=2x + 2y", sabendo que o perímetro máximo é de 1200 metros, e as deduzindo de 1.200 = 2.x + 2.y, onde a correlação da equação se destina a interpretação do resultado em que 600= x + y, descrito assim na (Figura 16).

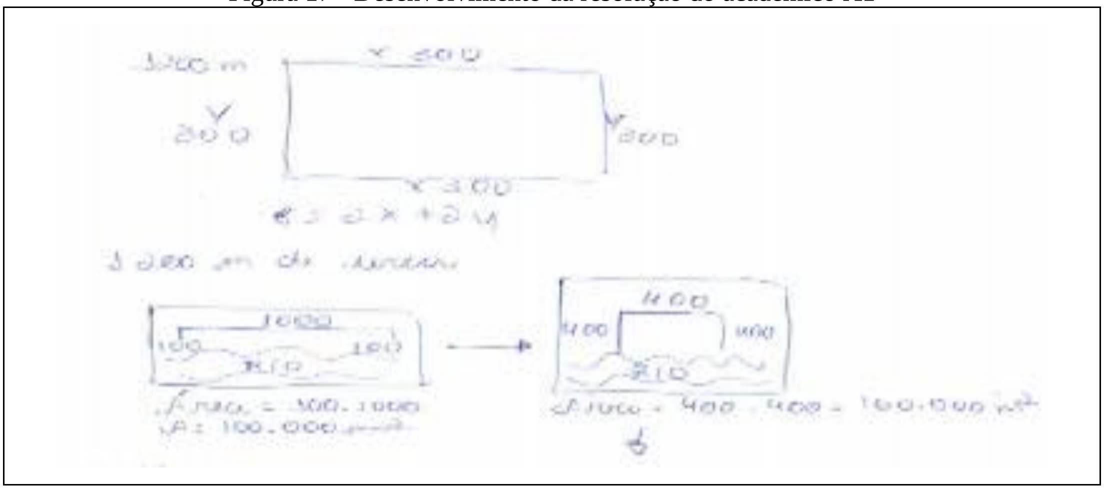
Figura 16 - Resolução do acadêmico A1



Fonte: Material produzido pelo acadêmico A1.

Observa-se na Figura 17, que o acadêmico A1 utiliza a estratégia de esquematização, uma das propostas indicadas por Polya (1995) para representar assim as possibilidades para determinação das dimensões da cerca, associando assim, a três situações diferentes, a partir dos dados apresentados no problema.

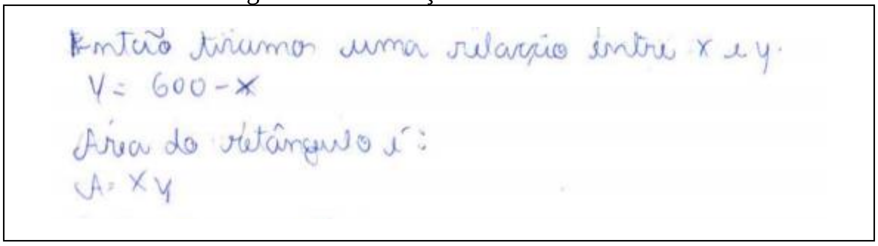
Figura 17 - Desenvolvimento da resolução do acadêmico A1



Fonte: Material produzido pelo acadêmico A1.

O acadêmico A1 define a área como sendo uma função de duas variáveis, e a relaciona a y= 600-x e em seguida, o acadêmico determina que a área (A) do retângulo, onde x e y, se definem entre a profundidade (y) e a largura (x) do retângulo (em metros), sendo expressa assim por A = x.y, conforme a Figura 18.

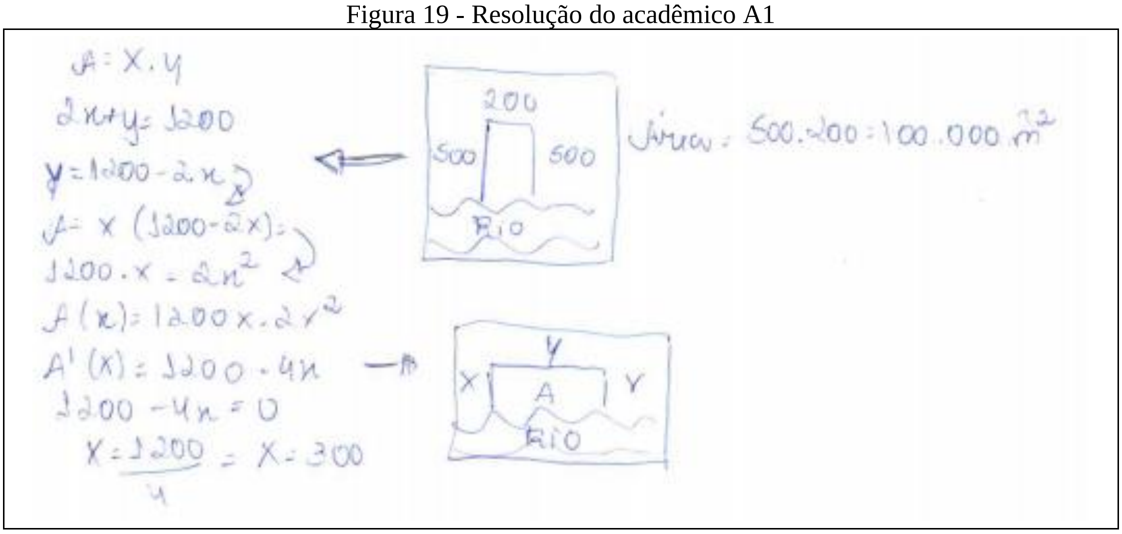
Figura 18 - Resolução do acadêmico A1



Fonte: Material produzido pelo acadêmico A1.

Tendo estabelecido uma equação para o cálculo do perímetro e da área, o acadêmico A1 utiliza-se das informações dos resultados obtidos pelas duas variáveis e esquemas para determinar assim a primeira variável que é x (Figura 19).

Figura 19 - Resolução do acadêmico A1



Fonte: Material produzido pelo acadêmico A1.

Para execução do plano da estratégia utilizada, conforme a proposição feita por Dante (1998), o acadêmico A1 tendo obtido o valor de x, descreve em seu processo a derivação a partir da equação da área (A), para assim encontrar o resultado de y, obtendo a correlação da área aos limites de x, onde A= x.(600 – x) , tendo que A= 600.x - x^2, sequenciando o seu processo de derivação, chegando ao resultado final de suas duas variáveis de x e y, realizando o retrospecto do problema em questão, conforme se observa na Figura 20.

Figura 20 - Resolução do acadêmico A1

Substituindo x e y

$A = x\,(600 - x)$

$A = 600\,x - x^2 \rightarrow x = 0 \quad y = 600$

$A = 600x - x^2 \rightarrow 0 = 600 - 2x$

$\dfrac{dA}{dx} = 600 - 2x = 0 \qquad 2x = 600$

$x = \dfrac{600}{2}$

$x = 300m \quad \rightarrow y = 300$

$y = 600 - x \rightarrow y = 600 - 300$

Fonte: Material produzido pelo acadêmico A1.

No segundo problema, é solicitada a determinação da maior área total de um terreno retangular, no qual se pretende colocar uma cerca (Figura 21).

Figura 21 - Problema 02 da sequência de atividades

Problema 02 – Um fazendeiro com 300 m de cerca, quer cercar uma área retangular e então dividi lá em quatro partes com cercas paralelas a um lado do retângulo. Qual é a maior área total possível das quatro partes?

a) Faça vários diagramas ilustrando a situação, alguns com divisões rasas e largas e alguns com divisões profundas e estreitas. Encontre as áreas totais dessas configurações. Parece que existe uma área máxima? Ser for estime –a.

b) Faça um diagrama ilustrando a situação geral. Introduza uma notação e marque no diagrama seus símbolos.

c) Escreva uma expressão para a área total.

d) Use a informação dada para escrever uma equação que relacione as variáveis.

e) Use a parte (d) para escrever a área total como uma função de uma variável.

f) Acabe de resolver o problema e compare sua resposta com sua estimativa da parte (a).

Fonte: Stewart (2013, p. 299).

Nesta atividade, em sala de aula, sob uma perspectiva a este trabalho de pesquisa, ensejou-se a levar o acadêmico a compreender os dois conceitos, o primeiro quanto ao do cálculo da derivada , na sua compreensão do problema e no seu estabelecimento de plano e o segundo a proposição da maneira em ser resolver o problema, inserindo assim a concepção de estratégias, como uma base sólida para a solução, porém em alguns momentos, os mesmos foram questionados sobre a questão, se tinham dificuldades em interpretar a situação problema, bem como em executar as possíveis estratégias para se resolver o problema, em que alguns responderam que tinham uma pequena dificuldade, mas que conseguiriam compreender e resolver a questão, e os outros demais saberiam por meio de alguns exemplos dados, resolver tranquilamente a questão (DANTE , 2006; POLYA, 1995).

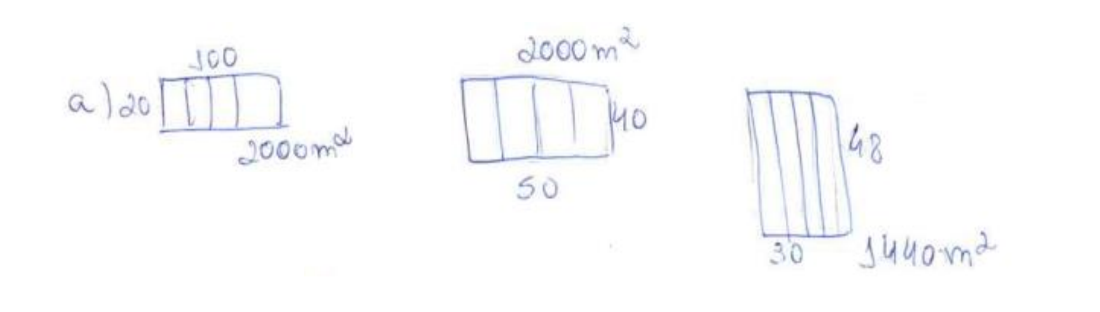
Os acadêmicos iniciam a resolução da atividade, compreendendo a situação proposta que envolve o problema e estabelecendo um plano, utilizando-se de esquematizações construídas pelos mesmos, e começam a ilustrar as situações que se fazem pertinentes ao problema em questão, usando assim de suas pressupostas divisões de áreas de diferentes dimensões, sendo evidenciada assim as suas interpretações iniciais, sobre as quais discutiram as estratégias de resoluções de forma compartilhada, possibilitando a interação entre eles a respeito do problema, como indicado por Polya (2006), Dante (1998) , Stweart (2013) e Onuchic e Allevato (2004).

Seguindo a resolução do problema proposto, os alunos fizeram alguns questionamentos, quanto a propositura do que se quer saber e o que se pede para se resolver no problema, conforme diálogo a seguir:

> *Acadêmico A4: Professor como que eu interpretaria esses lados poderia interpretar um retângulo, um quadrado, ou apenas apresentar a esquematização.*
> *Resposta: Sim, você deverá apresentar algumas esquematizações, sendo que elas devem coincidir com os 300 metros da cerca.*
> *Acadêmico A2: Esses lados devem ser iguais ou não.*
> *Resposta: Depende da análise que você esteja interpretando o problema, mas você tem que analisar primeiramente o que a questão lhe pede.*
> *Acadêmico A6: Poderia fazer a variação desses lados com uma variável, relacionando-os ao comprimento da cerca, já utilizando o plano que tenho em mente.*
> *Resposta: Sim, sem problemas.*

Na resolução da letra (a), o acadêmico A2 faz a devida esquematização ilustrativa das áreas prováveis de uma forma interpretativa aos limites de base (y) e da altura (x), as colocando com diferentes medidas (Figura 22), tendo assim a compreensão do problema no seu enunciado, em definir a sua forma de pensar e em usar o seu raciocínio, como base de se se estabelecer o plano na esquematização dos possíveis lados , um dos pontos descritos por (POLYA, 2006) para ser estabelecer um plano e assim o desenvolvimento da situação problema em etapas distintas para se ter o resultado da solução do problema.

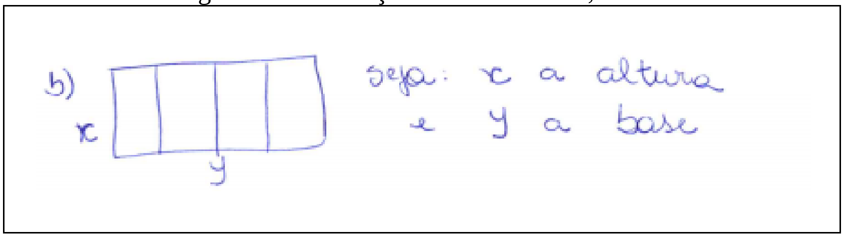
Figura 22 - Resolução do Problema 02, letra a



Fonte: Material produzido pelo acadêmico A2.

Na Figura 23, pode se observar a forma ilustrativa da resolução em que o acadêmico A2, começa a resolver a questão (b), utilizando-se de um esboço para representação em esquematização da cerca em suas possíveis partes, pegando como referência a proposta de Dante(1998), em que o acadêmico insere a correlação da base (b) com a altura (h) às colocando com as suas respectivas dimensões e as suas variáveis em que x(h) e y(b), representadas por linhas em seus posicionamentos, sendo estas linhas de base na horizontal (y) e linhas de altura na vertical (x), definindo as linhas horizontais e verticais em sua esquematização para dar sequência a uma das partes da solução do problema.

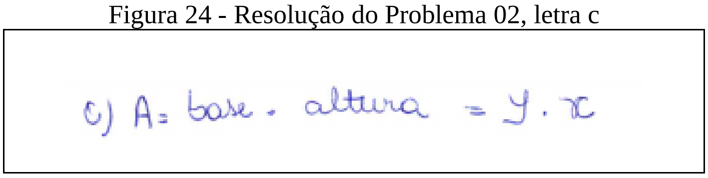
Figura 23 - Resolução do Problema 02, letra b



Fonte: Material produzido pelo acadêmico A2.

Na Figura 24, se verifica que o acadêmico A2, responde à questão (c) apresentando a expressão que está relacionada a uma área total da situação problema, utilizando as variáveis x e y, as correlacionando a base (y) e a altura (x).

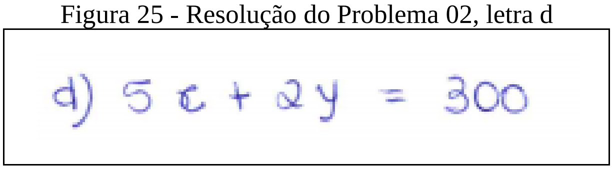
Figura 24 - Resolução do Problema 02, letra c



Fonte: Material produzido pelo acadêmico A2.

Na questão (d), o acadêmico A2 usa das informações retiradas do problema para descrever uma equação para a situação proposta, utilizando as variáveis x e y em linhas de posicionamento, como já descrito anteriormente, onde a equação se interpreta na esquematização de 5 linhas (x) na vertical e de 2 linhas (y) na horizontal, com base a esquematização das divisões da questão (b), onde no referido enunciado já se tinha a divisão em 4 partes de cercas paralelas ao lado do retângulo, determinando a equação de 5.x + 2.y = 300, conforme a Figura 25.

Figura 25 - Resolução do Problema 02, letra d



Fonte: Material produzido pelo acadêmico A2.

Continuando a resolução da atividade, com base na descrição o acadêmico A2 dar sequência a equação utilizando-se as informações da questão anterior, para obter a área total, por meio da função de suas duas variáveis, ainda não obtidas em resultado, as correlacionando a esquematização das linhas verticais de 5(x) e horizontais de 2(y), tendo assim a definição da equação da área (A), conforme a Figura 26.

Figura 26 - Resolução do Problema 02, letra e

e) $5x = 300 - 2y$

$$x = \frac{300 - 2y}{5}$$

$$A = y \cdot \left(\frac{300 - 2y}{5} \right)$$

$$A = \frac{300y - 2y^2}{5}$$

Fonte: Material produzido pelo acadêmico A2.

Na questão (f), o acadêmico A2, solucionar a situação problema, fazendo a correlação da Área (A), com detalhe ao retrospecto do problema, inserido assim em todas as etapas anteriores, como compreender o problema de uma forma em que o mesmo entenda, o que está sendo resolvido e aplicado aos cálculos matemáticos, estabelecendo um plano em si, sobre o problema, utilizando-se de suas estratégias que pode possibilitar a determinação do resultado da questão (POLYA, 2006). Dessa forma, o acadêmico A2, obtém o respectivo parâmetro do resultado da derivação da equação da área, porém ainda não das variáveis de x e y, onde a isola em relação a 5, e iguala 300-4. y = 0, tendo uma equação que dará o resultado de uma das variáveis em y = 75, e consequentemente o resultado da outra variável em que se obtêm x = 30, e as comparando com a estimativa com relação a questão (a), chegando assim ao seu resultado final, quanto a dimensão da sua área total em seus 2.250 m², conforme a Figura 27.

Figura 27 - Resolução do Problema 02, letra f

f) $A = \frac{300 - 4y}{5}$

$300 - 4y = 0$

$4y = 300$

$y = 75\,m$

calculando x

$$x = \frac{300 - 150}{5} = 30\,m$$

$$A = 75 \cdot 30 = 2.250\,m^2$$

Fonte: Material produzido pelo acadêmico A2.

A terceira situação-problema (Figura 28) teve início com os acadêmicos, lendo e interpretando as informações do problema, bem como discutindo sobre o mesmo com os demais colegas em sala de aula.

Figura 28 - Problema 03 da sequência de atividades

Problema 03 – Uma cerca de 2,00 m de altura corre paralela a um edifício alto, a uma distância de 1,00 m do Edifício. Qual o comprimento da menor escada que se apoie no chão e na parede do prédio, por cima da cerca?

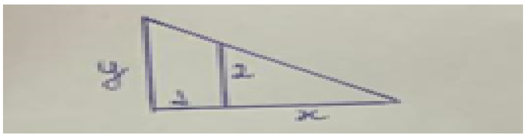
Fonte: Stewart (2013. p.300).

Após a realização da leitura e compreensão do problema os acadêmicos dialogam com o professor.

> *Acadêmico A9: Professor, como que eu faço para ter os dados principais, primeiramente verifica a altura em relação ao comprimento?*
> *Resposta: Sim, primeiramente você deverá verificar a compreensão do que quer saber sobre o problema em questão, colete os dados como altura e comprimento.*
> *Acadêmico A10: A minha altura incide sobre o meu comprimento para eu começar a equação?*
> *Resposta: Sim, ela incide, porém, o comprimento se torna variável.*
> *Acadêmico A3: Poderia fazer a correlação entre o comprimento e a altura?*
> *Resposta: Sim, porém há de se verificar que as duas incidem sobre uma equação de variáveis.*

No primeiro momento o acadêmico A3, insere os dados que compreende a altura e o comprimento, dando início a uma fase de compreensão e a interpretação para se resolver o problema, sendo destacado assim as suas devidas variáveis propostas, iniciando a elaboração de uma esquematização que se definem como parâmetros para a solução do problema (Figura 29).

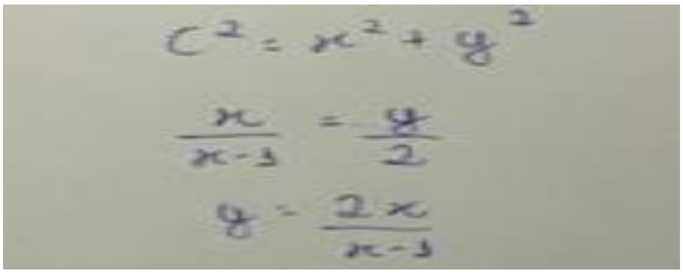
Figura 29 - A esquematização feita pelo aluno para a compreensão do problema



Fonte: Material do acadêmico A3.

Após a ilustração do triângulo como exemplo da escada o acadêmico A3, dá sequência a compreensão do problema, utilizando o teorema de Pitágoras para determinar uma função que a correlaciona o comprimento (C), como $C^2 = x^2 + y^2$, e se obtém a primeira equação apresentada na Figura 30, visto que o triângulo apresentado e um triângulo retângulo, onde atribuiu como variáveis x e y, pegando o comprimento como base de referência ao chão (x) e a altura (y), em relação às duas paredes paralelas. Para a segunda equação percebesse que o acadêmico A3, estabeleceu uma relação de proporção com relação às medidas, sabendo que tal situação se esquematiza a uma semelhança de triângulos, conforme a Figura 29.

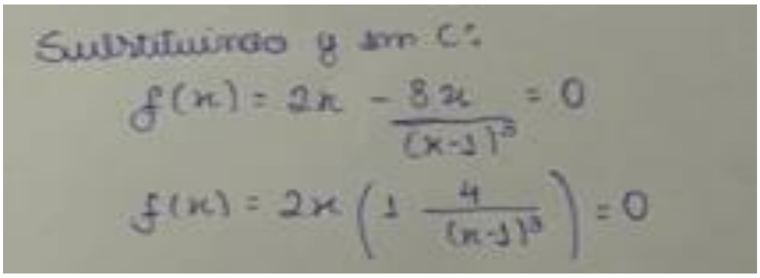
Figura 30 - Equação apresentada pelo acadêmico A3



Fonte: Material produzido pelo acadêmico A3.

Em seguida o acadêmico A3 dando continuidade à sua resolução, calcula a função estabelecida, substituindo a variável de y em C, e a definindo assim como uma função correlacionada de x, tendo a aplicação em sua forma de cálculo, onde deriva f(x) o igualando a zero, porém o mesmo se esquece de colocar o sinal de subtração na equação $f\,'(x) \ = 2x\left(1 - \frac{4}{(x-1)^3}\right) = 0$, conforme a Figura 31.

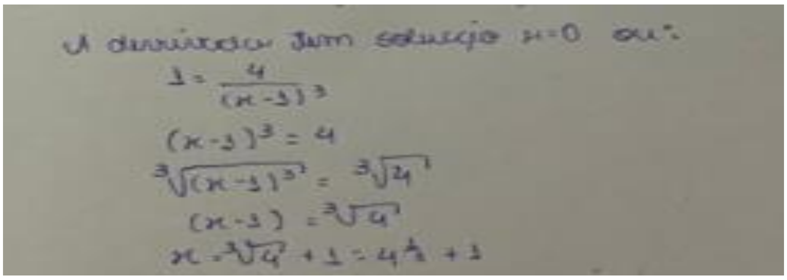
Figura 31 - Resolução do acadêmico A3



Fonte: Material produzido pelo acadêmico A3.

Nesse momento o acadêmico A3, já com as informações obtidas nas etapas anteriores, faz a correlação de 1 e o iguala a equação em sua fração, onde correlaciona o *x*, colocando o plano de resolução em ação, visto que o mesmo insere o cálculo em sua fase de resolução, tendo neste momento já pré-estabelecido o seu plano e a fase de sua resolução, obtendo apenas nesta etapa o resultado de umas das variáveis que é o x.

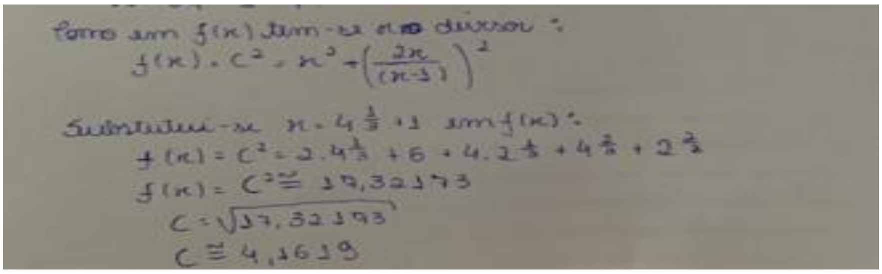
Figura 32 - O aluno desenvolvendo a derivação, com a aplicação das variáveis



Fonte: Material do acadêmico A3.

Nesta etapa o acadêmico A3, com base na descrição do retrospecto do problema, tendo as informações que se fazem importantes a solução, aplicando-a de uma forma ordenada a substituição da função em x, tendo como base a equação, e inserindo assim os dados e a obtenção do resultado em função de f(x) a equação em seu processo de derivação, tendo o resultado de sua raiz em relação a C, como comprimento mínimo ou menor da escada, tendo assim o seu resultado final de uma forma satisfatória e objetiva da propositura do problema, conforme a Figura 33.

Figura 33 - O aluno finaliza o problema, determinando o valor da variável C



Fonte: Material do acadêmico A3.

O quarto problema se descreve em uma situação sobre cálculo de custo adicional e marginal na produção de um determinado objeto (Figura 34). Nessa atividade os acadêmicos começaram observando as informações do problema e discutindo sobre ele com os demais colegas em sala de aula, tendo como referência à análise para solução de problemas alguns parâmetros adotados pelos autores Polya (2006) e Dante (1998).

Figura 34 - Problema 4 da sequência de atividades

Problema 04 – Sendo o custo para produzir x unidades de um determinado artigo dado pela função $C(x) = 0{,}06\,x^2 + 0{,}03 + 60$ reais, com uma produção diária de 20 unidades, determinar:

a) O custo adicional quando o nível de produção passar de 20 para 21 unidades.
b) O custo marginal para 20 unidades.

Fonte: Macedo, Castanheira e Rocha (2006, p.174).

Os acadêmicos começam a realizar a compreensão do problema identificando alguns pontos importantes e relevantes, relacionado a situação da proposta que envolve o problema ao qual se pedia o custo adicional de um artigo e o seu custo marginal.

Na fase da compreensão do problema a resolução do problema proposto, os acadêmicos fizeram alguns questionamentos, como:

> *Acadêmico A8: Professor para que eu possa iniciar a questão devo fazer a substituição de x pela produção diária.*
> *Resposta: Sim, você deverá fazer a devida substituição, porém se atentar que o problema lhe pede uma variação desse valor em questão.*
> *Acadêmico A11: Preciso tirar as devidas diferenças entre os valores.*
> *Resposta: Sim, pois, o que define a resolução ao resultado e o preço do valor do artigo em questão.*

Após, a fase de compreensão do problema, conforme a descrição do autor Polya (2006), em que o acadêmico define um ponto de partida ao seu raciocínio, tendo assim a percepção de uma estratégia por meio do diálogo com o professor/pesquisador e os demais colegas em sala, em que o mesmo se desperta em procurar saber, tendo assim em mente do seu raciocínio a um possível resultado. O acadêmico A8, na função $C(x) = 0{,}06\,x^2 + 0{,}03.x + 60$, calcula a imagem da função atribuindo para x a quantidade de 20 unidades, chegando assim a um valor estipulado de R \$84,60 (Figura 35).

Figura 35 - Resolução do Problema 04, letra a

$$\begin{aligned} A)\quad & C(x) = 0{,}06 \cdot x^2 + 0{,}03 \cdot x + 60 \text{ reais} \\ & C(x) = 0{,}06 \cdot 20^2 + 0{,}03 \cdot 20 + 60 \\ & C(x) = 84{,}60 \end{aligned}$$

Fonte: Material produzido pelo acadêmico A8.

Em seguida, o acadêmico A8 substitui a variável de x na função de $C(x) = 0{,}06x^2 + 0{,}03.x + 60$, e inserido assim a x o valor de 21, obtendo um resultado estipulado no valor de R \$87,09 (Figura 36).

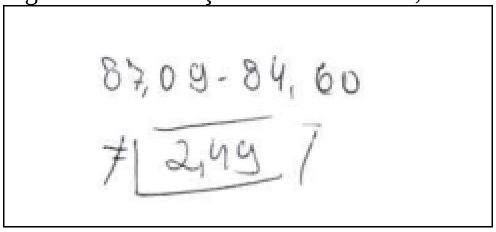
Figura 36 - Resolução do Problema 04, letra a

$$\begin{aligned} & C(x) = 0{,}06 \cdot x^2 + 0{,}03 \cdot x + 60 \\ & C(x) = 0{,}06 \cdot 21^2 + 0{,}03 \cdot 21 + 60 \\ & C(x) = 87{,}09 \end{aligned}$$

Fonte: Material produzido pelo acadêmico A8.

Na fase final da situação da resolução do problema o acadêmico A8 faz a dedução do resultado dos valores que foram encontrados, C(21) – C(20) encontrando o custo adicional, referente a diferença entre R$ 87,09 e R$ 84,60, porém o acadêmico A8, não realizou o retrospecto do problema em questão (Figura 37).

Figura 37 - Resolução do Problema 04, letra a

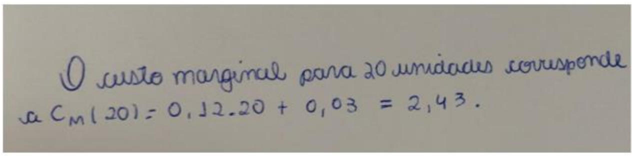


Fonte: Material produzido pelo acadêmico A8.

Nessa atividade o acadêmico A8, encontra apenas o valor do custo adicional, mas não realiza os cálculos para determinar o custo marginal, sendo que provavelmente tenha esquecido em realizar as operações do cálculo matemático.

Enquanto o outro acadêmico A11, faz a devida correlação ao resultado que se descreve o custo marginal, em seu resultado de 2,43, conforme a Figura 38.

Figura 38 - Resolução do Problema 04, letra a



Fonte: Material produzido pelo acadêmico A11.

No quinto problema (Figura 39) os acadêmicos iniciaram a resolução da atividade, a qual se delimita a cercar uma área de 15.000 m² em uma área de campo retangular, de forma a minimizar o custo da cerca a partir das informações fornecidas no problema.

Figura 39 - Problema 5 da sequência de atividades

Problema 05 – Um fazendeiro quer cercar uma área de 15.000 m², em um campo retangular e então dividi-lo ao meio com uma cerca paralela a um dos dois lados do retângulo. Como fazer isso de forma que minimize o custo da cerca?

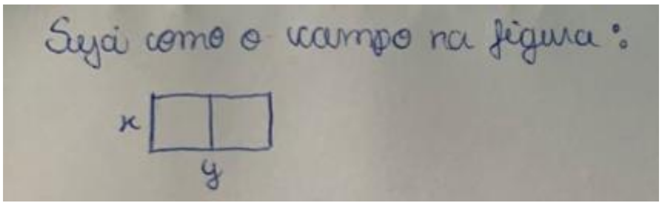
Fonte: Stewart (2013, p.300).

Em fase preliminar a realização da atividade os acadêmicos fizeram alguns questionamentos inerentes a alguns pontos importantes a solução do problema:

Acadêmico A13: Professor como a área em específico e retangular poderia fazer as limitações utilizando assim duas variáveis
Resposta: Sim, você pode fazer, sabendo que tais variáveis precisam estar inseridas nas divisões da área.
Acadêmico A15: Haverá necessidade de eu ter que identificar o perímetro pra inserir na equação.
Resposta: Sim, pois, o perímetro define a área em questão, sendo uma parte desta cerca em paralelo ao retângulo.

Na resolução inicial da questão, o acadêmico A13, faz a devida esquematização ilustrativa da área, utilizando-se de um esboço para representação em esquematização da cerca em suas duas possíveis partes (Figura 40), inserindo na ilustração do esquema as suas respectivas dimensões as variáveis x e y, tomando como referência a proposta de Dante (1998), em que o mesmo descreve que para se ser resolver um problema é preciso primeiro compreender o problema, e após o entendimento, busca se estabelecer uma linha de raciocínio para um plano.

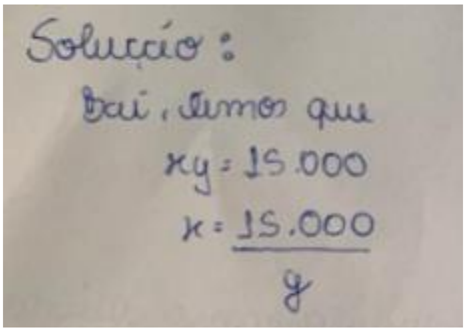
Figura 40 - Esquematização do acadêmico A13



Fonte: Material produzido pelo acadêmico A13.

Na Figura 41, o acadêmico A13 identificou através de sua interpretação a compreensão do problema, que já se tinha uma área definida em 15.000 m², porém não se tinha as possíveis dimensões ou resultados das variáveis de x e y, sendo assim o mesmo apresentou a equação que estava relacionada a área do terreno, escrevendo o x em função da variável y.

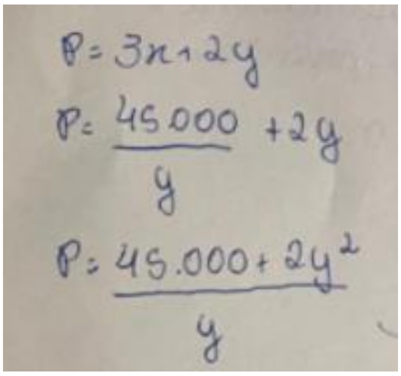
Figura 41 - Equação da área do terreno



Fonte: Material produzido pelo acadêmico A13.

Na Figura 42, o acadêmico A13, apresentou a equação que está relacionada ao perímetro do terreno, pegando como base a esquematização que se define aos pontos das parcelas das divisões da cerca, tendo em sua mente a correlação de duas linhas horizontais em (y) e três linhas verticais (x), colocando o perímetro em relação às variáveis de x e y, aplicando como base a equação do perímetro, e em prática o seu raciocínio, em que o coeficiente de x é 3 e o coeficiente de y é 2, portanto determinando a expressão matemática que irá descrever o perímetro para a situação dada, em que P=3.x +2.y, e onde o acadêmico inicia o seu processo para a derivação, conforme a Figura 42.

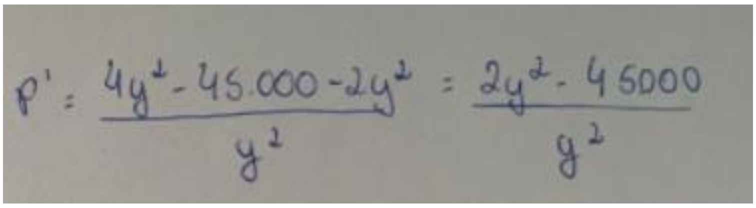
Figura 42 - Resolução do cálculo do perímetro



Fonte: Material produzido pelo acadêmico A13.

Na Figura 43, pode-se observar que o acadêmico A13, inicia a derivação do perímetro em relação à variável y, a partir das características da função encontrada, o acadêmico utiliza a regra de derivação de quociente, sendo o dividendo derivado (***u'***) multiplicado pelo divisor (***v***) menos o divisor derivado (***v'***) vezes o dividendo (***u***), tudo dividido pelo divisor ao quadrado (v^2).

Figura 43 - Cálculo da derivada, para determinar a equação do perímetro



Fonte: Material produzido pelo acadêmico A13.

Observa-se na Figura 44, que o acadêmico A13 iguala a equação a zero, obtendo assim o resultado da variável que corresponde a y, onde o mesmo coloca em ação o desenvolvimento do seu plano, visto que determina o resultado de uma das variáveis, com base no processo de resolução de um problema proposto pelo autor Polya (1995), assim obtêm o resultado de y = 150 m.

Figura 44 - Determinando a variável y

$$\frac{2y^2 - 45.000}{y^2} = 0$$

$$2y^2 - 45.000 = 0$$

$$2y^2 = 45.000$$

$$y^2 = 225.000$$

$$y = 150 \text{ m}$$

Fonte: Material produzido pelo acadêmico A13.

E por fim na Figura 45, o acadêmico A13, obtém o resultado da outra variável que corresponde a x, utilizando o resultado de y encontrado anteriormente, obtido o resultado final da situação problema.

Figura 45 - Encontrando a variável x

$$x = \frac{15.000}{150} = 100 \text{ m}$$

Fonte: Material produzido pelo acadêmico A13.

O sexto problema envolve a determinação da quantidade mínima de material para a confecção de uma caixa que possa armazenar 8.000 cm³ (Figura 46).

Figura 46 - Problema 06 da sequência de atividades

Problema 06 – Encontre as dimensões de uma caixa retangular com base quadrada e volume de 8.000 cm³ que possa ser feita, com a menor quantidade de material.

Fonte: Goldstein, Lay e Schneider (2006, p. 185).

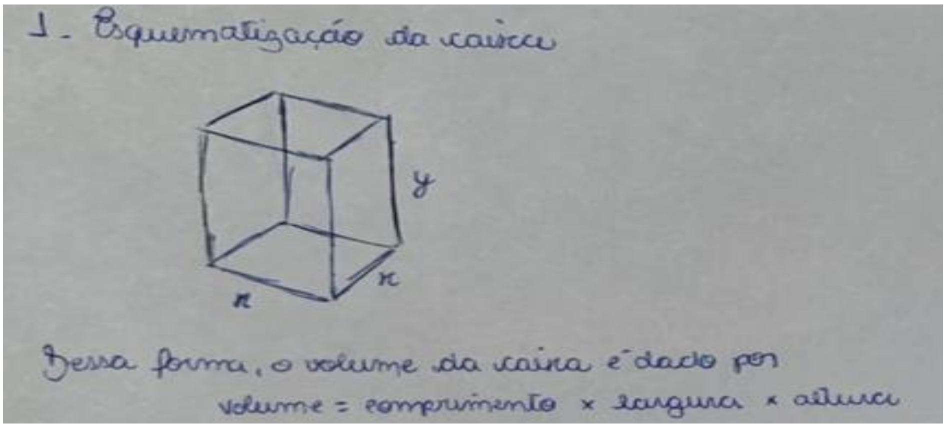
Os acadêmicos iniciaram a resolução da atividade, interpretando a mesma e em seguida, discutindo com o professor e os colegas para compreender a situação problema proposta, e feito por eles alguns questionamentos com base em algumas dúvidas:

> *Acadêmico A16: Professor para que eu possa iniciar a questão devo fazer correlação do que envolve a área retangular da caixa.*
>
> *Resposta: Sim, você deverá fazer a correlação da base, em relação à altura, bem como o comprimento.*
> *Acadêmico A14: Essas medidas podem ser usadas de forma aleatórias, para que eu obtenha de uma forma satisfatória o resultado.*

Resposta: Sim, desde que essas medidas estejam dentro do que se propõem a questão.

Na Figura 47, o acadêmico A16, inicia a questão fazendo a correlação da esquematização, tendo em vista que já tem um dado do problema que é o volume. Neste momento, ele começa a compreender e a interpretar a situação problema descrevendo que o volume está relacionado ao comprimento, largura e altura.

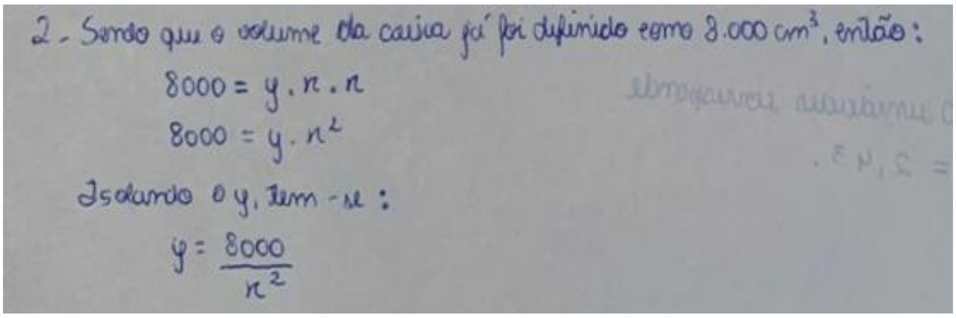
Figura 47 - Resolução do acadêmico A16



Fonte: Material produzido pelo acadêmico A16.

Na Figura 48, pode-se observar que o acadêmico A16, se utiliza das informações descritas na situação problema e das informações referente ao cálculo do volume para descrever uma equação que represente a situação problema dada, em seguida escreve a variável y em função da variável x.

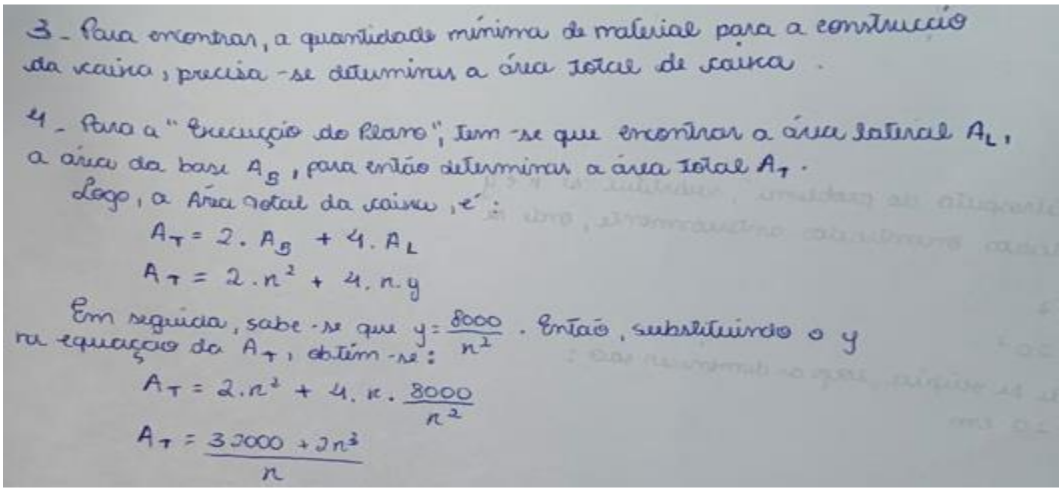
Figura 48 - Resolução do acadêmico A16



Fonte: Material produzido pelo acadêmico A16.

Na sequência da etapa anterior, em que se observa na Figura 49, em que o acadêmico A16, precisa encontrar a quantidade mínima de material para se construir a caixa, onde o mesmo faz a sua correlação da área total, se utilizando da relação da área da base e da área lateral para obter a sua área total.

Figura 49 - Resolução do acadêmico A16



3 - Para encontrar, a quantidade mínima de material para a construção da caixa, precisa-se determinar a área total da caixa.

4 - Para a "Execução do Plano", tem-se que encontrar a área lateral A_L, a área da base A_B, para então determinar a área total A_T.

Logo, a Área total da caixa, é:

$$A_T = 2 . A_B + 4 . A_L$$

$$A_T = 2 . x^2 + 4 . x . y$$

Em seguida, sabe-se que $y = \frac{8000}{x^2}$. Então, substituindo o y na equação da A_T, obtém-se:

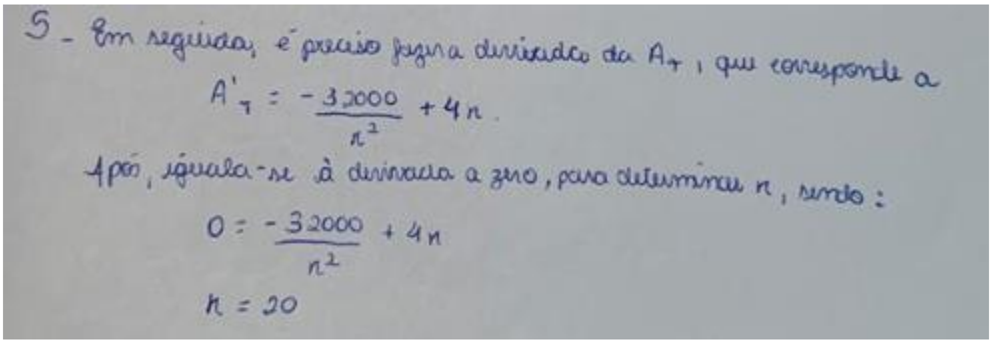
$$A_T = 2 . x^2 + 4 . x . \frac{8000}{x^2}$$

$$A_T = \frac{32000 + 2x^3}{x}$$

Fonte: Material produzido pelo acadêmico A16.

Com base na equação da área total descrita anteriormente, o acadêmico A16, inicia o processo de derivação da área total (A’t), para se obter uma de suas variáveis, em descrição a Figura 50, em que a relação se descreve a x, onde a iguala a zero, tendo o seu resultado em que x = 20.

Figura 50 - Resolução do acadêmico A16



5 - Em seguida, é preciso fazer a derivada da A_T, que corresponde a

$$A'_T = -\frac{32000}{x^2} + 4x$$

Após, iguala-se à derivada a zero, para determinar x, sendo:

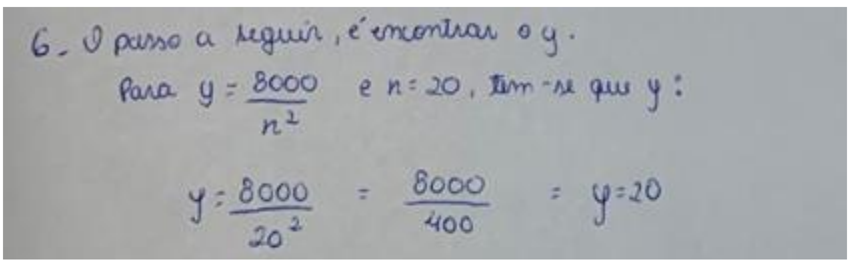
$$0 = -\frac{32000}{x^2} + 4x$$

$$x = 20$$

Fonte: Material produzido pelo acadêmico A16.

Dando continuidade ao seu raciocínio o Acadêmico A16, com a obtenção do resultado de uma de suas variáveis, inicia as suas correlações para se ter o resultado de y, utilizando da equação, e substituindo-o para assim saber que y = 20.

Figura 51 - Resolução do acadêmico A16



6 - O passo a seguir, é encontrar o y.

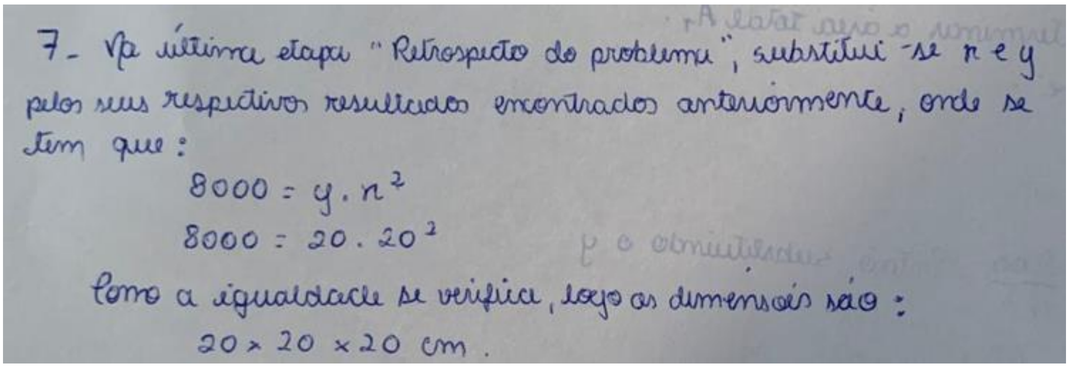
Para $y = \frac{8000}{x^2}$ e $x = 20$, tem-se que y:

$$y = \frac{8000}{20^2} = \frac{8000}{400} = y = 20$$

Fonte: Material produzido pelo acadêmico A16.

Nesta penúltima etapa da resolução da situação problema, o acadêmico A16, faz um retrospecto do problema com base nos resultados obtidos em relação as suas duas variáveis de x e y, utilizando-se de sua capacidade de aprender a aprender, se habituando a resolver questões, buscando utilizar seus conhecimentos para resolver a situação problema (DANTE, 1998).

Figura 52 - Resolução do acadêmico A16


7- Na última etapa "Retrospecto do problema", substitui-se x e y pelos seus respectivos resultados encontrados anteriormente, onde se tem que:

$8000 = y . x^2$

$8000 = 20 . 20^2$

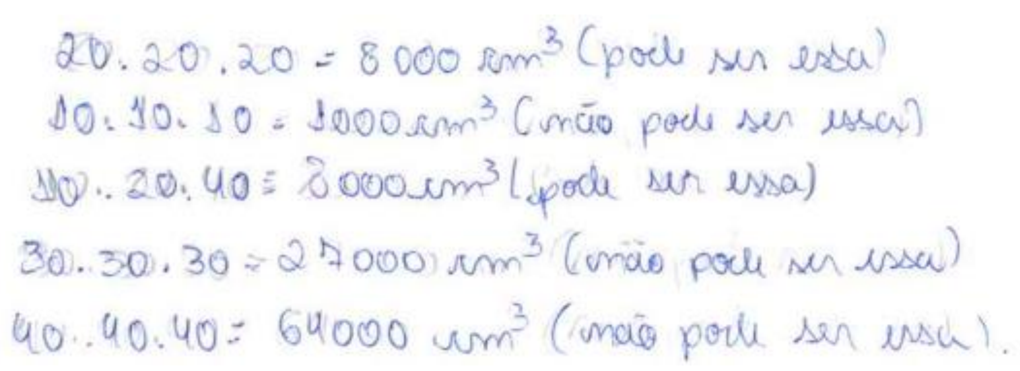
Como a igualdade se verifica, logo as dimensões são:

20 x 20 x 20 cm.

Fonte: Material produzido pelo acadêmico A16.

Dando a última continuidade à resolução do problema, o acadêmico A16, atribui valores para o comprimento, a largura e a altura, de modo que o resultado seja igual a 8.000 cm³, colocando em prática a sua linha de raciocínio e definindo a sua estratégia de uma forma criativa, conforme a (Figura 53).

Figura 53 - Resolução do acadêmico A16


20 . 20 . 20 = 8 000 cm³ (pode ser essa)

10 . 10 . 10 = 1000 cm³ (não pode ser essa)

10 . 20 . 40 = 8000 cm³ (pode ser essa)

30 . 30 . 30 = 27000 cm³ (não pode ser essa)

40 . 40 . 40 = 64000 cm³ (não pode ser essa).

Fonte: Material produzido pelo acadêmico A16.

Nessa atividade pode-se perceber que o aluno A16 identificou duas soluções que satisfaz o comprimento, a largura e a altura a ser igual a 8000 cm³. Após realizar a análise ele indica que a alternativa correta é o comprimento, a largura e a altura ser igual 20cm cada, pois a base é quadrada, então poderia ter três medidas diferentes, interpretadas pelas descrições de Dante (1998), em se resolver o problema.

Na sequência, o sétimo problema (Figura 54), solicitava que fossem encontradas as dimensões de uma lata cilíndrica para se pudesse armazenar 1 litro de líquido, observando que para a construção desse objeto era necessário minimizar o material para a sua confecção.

Figura 54 - Problema 07 da sequência de atividades

Problema 07 - Uma lata cilíndrica fechada deve conter 1 litro (1000 cm^3) de líquido. Como poderíamos escolher a altura e o raio para minimizar o material usado na confecção da lata?

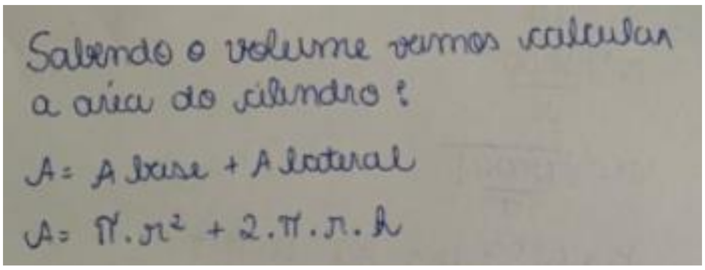
Fonte: Stewart (2013, p.295).

Na resolução do problema, os acadêmicos argumentaram algumas dúvidas inerentes ao enunciado e dúvidas sobre a questão, como:

> *Acadêmico A17: Professor qual a área da lata, vou ter que achar o raio, com uma variável da altura primeiramente.*
> *Resposta: Sim, você começar com aplicação da equação que evidencia a altura, pois o volume você já tem que é um 1 Litro.*
> *Acadêmico A18: A área desse metal pode ser proporcional ou não ao meu gasto do meu material.*
> *Resposta: Depende das circunstâncias que se colocam e desde que essas medidas estejam dentro do que se propõem a questão.*

O acadêmico A17, inicia a resolução da atividade, estabelecendo um plano, pois o mesmo já tem informações importantes advindas do enunciado, como o volume do objeto, e que o mesmo é um cilindro, e que deve ser considerada a área da base e a área lateral, conforme a Figura 55. Dessa forma, o acadêmico determina a área total fazendo a adição da área da base com a área lateral.

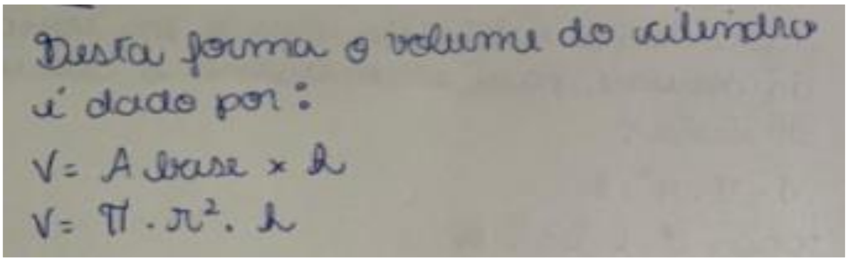
Figura 55 - Resolução do cálculo de área



Fonte: Material produzido pelo acadêmico A17.

Na sequência, o acadêmico A17, determina o volume da lata cilíndrica (Figura 56), sabendo que é necessário multiplicar a área da base (A base) em relação a altura (h). Ainda, pode-se observar que o acadêmico utiliza a fórmula da área de uma circunferência para área da base, tendo em vista que se trata de um cilindro, logo a área da base corresponde a πr^2, onde r é o raio.

Figura 56 - O aluno A17, utilizando-se da equação que define o volume


Desta forma o volume do cilindro é dado por:

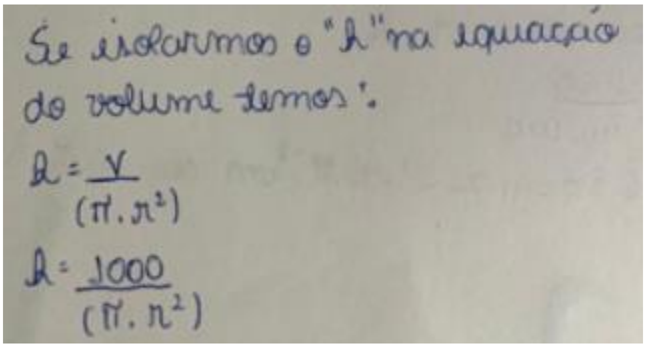
$V = A\,base \times h$

$V = \pi . r^2 . h$

Fonte: Material do acadêmico A16.

Em seguida, com base na equação do volume, o acadêmico A17 substitui o volume de 1 litro por 1000 cm³ e isola a variável h (Figura 57).

Figura 57 - Isolando a variável h na equação do volume


Se isolarmos o "h" na equação do volume temos:

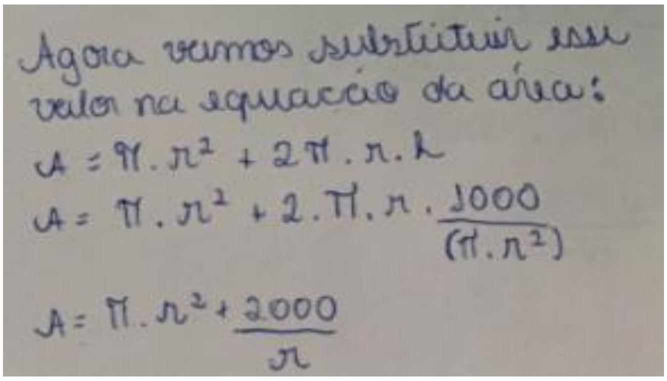
$h = \frac{V}{(\pi . r^2)}$

$h = \frac{1000}{(\pi . r^2)}$

Fonte: Material produzido pelo acadêmico A17.

Após, o acadêmico A17, retoma a equação determinada para a área total e nessa equação ele substitui a variável h encontrada anteriormente, conforme a Figura 58.

Figura 58 - Resolução com a substituição da área


Agora vamos substituir esse valor na equação da área:

$A = \pi . r^2 + 2\pi . r . h$

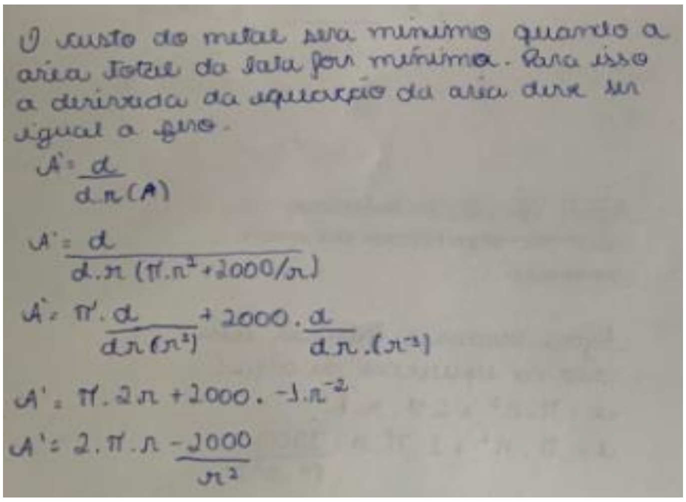
$A = \pi . r^2 + 2 . \pi . r . \frac{1000}{(\pi . r^2)}$

$A = \pi . r^2 + \frac{2000}{r}$

Fonte: Material produzido pelo acadêmico A17.

Pode-se observar na Figura 59, que o acadêmico A17, descreve previamente a equação e deduz que o custo do metal será mínimo quando a área do total da lata for mínima, para isso ele pressupõe que precisa derivada da equação da área e a igualar a zero.

Figura 59 – Cálculo da derivada da equação da área



O custo do metal será mínimo quando a área total da lata for mínima. Para isso a derivada da equação da área deve ser igual a zero.

$A' = \frac{d}{d.r}(A)$

$A' = \frac{d}{d.r}(\pi.r^2 + 2000/r)$

$A' = \pi.\frac{d}{dr}(r^2) + 2000.\frac{d}{dr}.(r^{-1})$

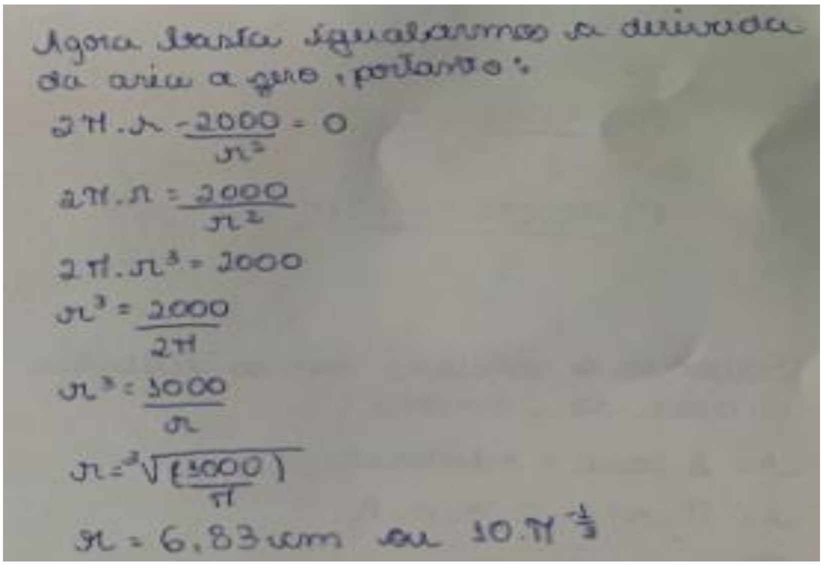
$A' = \pi.2r + 2000.-1.r^{-2}$

$A' = 2.\pi.r - \frac{2000}{r^2}$

Fonte: Material produzido pelo acadêmico A17.

Para determinar o raio da lata de forma cilíndrica, o acadêmico A17 iguala a derivada a zero, obtendo o resultado do raio, conforme se observa na Figura 60.

Figura 60 - Determinação do resultado do raio



Agora basta igualarmos a derivada da área a zero, portanto:

$2\pi.r - \frac{2000}{r^2} = 0$

$2\pi.r = \frac{2000}{r^2}$

$2\pi.r^3 = 2000$

$r^3 = \frac{2000}{2\pi}$

$r^3 = \frac{1000}{\pi}$

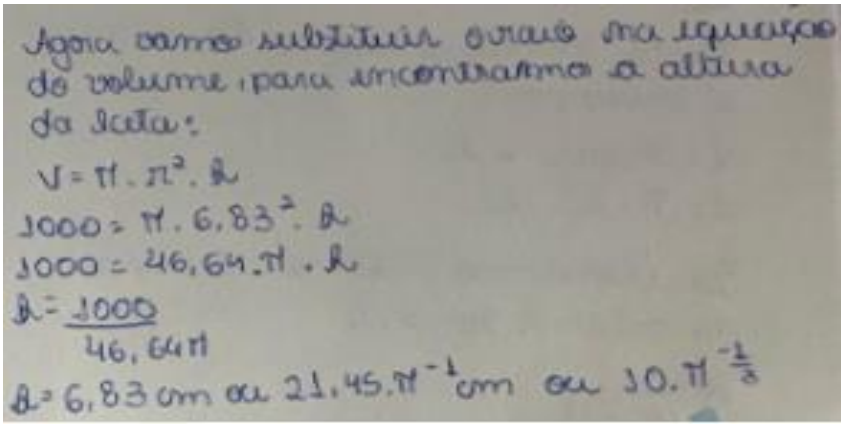
$r = \sqrt[3]{\left(\frac{1000}{\pi}\right)}$

$r = 6,83$ cm ou $10.\pi^{-\frac{1}{3}}$

Fonte: Material produzido pelo acadêmico A17.

Na Figura 61, o acadêmico A17, descreve a equação do volume, substituindo o raio e o volume com os seus devidos dados já obtidos nas sequências anteriores, e achando assim à altura da lata, nessa etapa o acadêmico vê a situação do problema como sendo uma questão que precisa da criatividade de quem aprende, para conseguir a sua solução de uma forma estratégica (DANTE, 1998; POLYA, 1995).

Figura 61 - Determinando a altura da lata


Agora vamos substituir o raio na equação do volume, para encontrarmos a altura da lata:

$V = \pi . r^2 . h$

$1000 = \pi . 6,83^2 . h$

$1000 = 46,64 . \pi . h$

$h = \frac{1000}{46,64\pi}$

$h = 6,83$ cm ou $21,45 . \pi^{-1}$ cm ou $10 . \pi^{-\frac{1}{3}}$

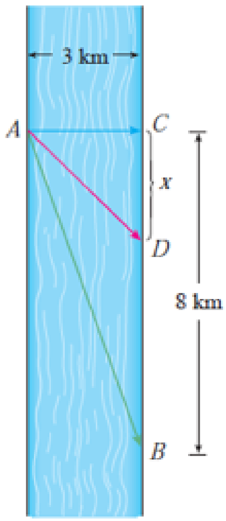
Fonte: Material produzido pelo acadêmico A17.

Os procedimentos utilizados pelo acadêmico A17 foram adequados, mas ele não chega à solução, pois não considerou a lata fechada, no cálculo da área total da lata.

O oitavo problema envolve o lançamento de um bote localizado em um ponto A na margem de um rio, que deseja atingir rapidamente um ponto B do outro lado da margem (Figura 62).

Figura 62 - Problema 08 da sequência de atividades

Problema 08 - Um homem lança seu bote em um ponto A na margem de um rio reto, com uma largura de 3 km, e deseja atingir tão rápido quanto possível um ponto B na outra margem, 8 km rio. Ele pode dirigir seu barco diretamente para o ponto C e então seguir andando para B, ou rumar diretamente para B, ou remar para algum ponto D entre C e B e então andar até B. Se ele pode remar a 6 km/h e andar a 8km/h, onde ele deveria aportar para atingir B o mais rápido possível? Supõem-se que a velocidade da água seja desprezível comparada com a velocidade na qual o homem rema.



Fonte: Stewart (2013, p.297).

Os acadêmicos iniciam o estudo para a resolução da atividade 08, compreendendo a proposta que envolve esse tipo de situação-problema, e analisam as características pertinentes ao enunciado e a exploração de novos conceitos de estratégias para resolvê-lo, onde pode se formular possíveis conceitos de resolução, tornando a Matemática um conhecimento mais próximo entre eles.

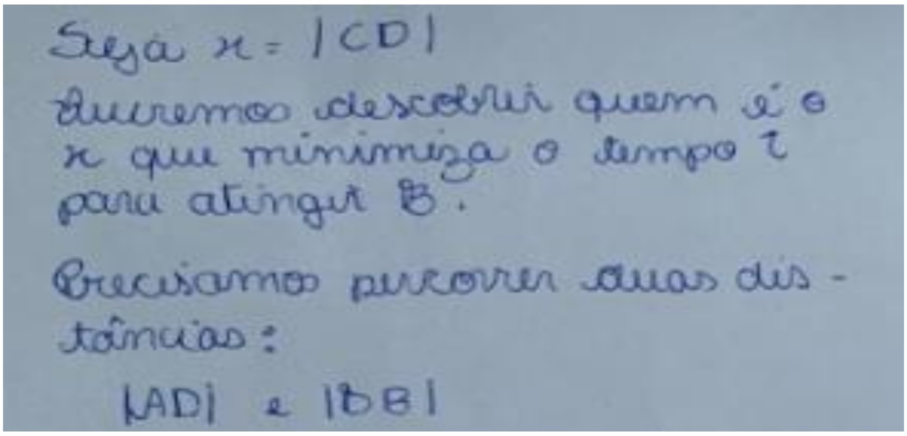
Na fase inicial de resolução da situação problema, alguns acadêmicos fizeram alguns questionamentos, quanto a propositura do problema:

> *Acadêmico A19: Professor para que eu possa iniciar a questão devo fazer a esquematização das devidas distâncias, colocando as variáveis e as relacionando com os pontos A.B, C e D.*
> *Resposta: Sim, você deverá fazer a correlação das variáveis dos trechos lembrando que você já tem a duas distâncias de 3 km e 8 Km.*
> *Acadêmico A11: Posso usar essas medidas através de um retângulo podem ser usadas como uma equação que esteja a margem, para que eu obtenha de uma forma satisfatória o resultado.*
> *Resposta: Sim, sendo que os mesmos vão lhe auxiliar na definição do tempo percorrido.*

O acadêmico A19 inicia sua resolução tomando a esquematização apresentada na situação problema para compreender o mesmo e assim estabelecer um plano de estratégias, sendo capaz de perceber na realidade cotidiana o problema e buscar resolvê-lo, utilizando de uma ideia de que problema é uma situação nova, e que exige a busca de uma solução, e que envolve a definição de objetivos e elaboração de estratégias (DANTE, 1998).

Na Figura 63, pode-se observar que o acadêmico A19, inicia a correlação de CD, para se atingir o ponto B, e o relaciona ao percurso das distâncias entre AD e DB, dados pelos pontos apresentados no problema, o colocando como um intérprete da situação, visando o desenvolvimento do seu conhecimento matemático para solucionar a questão.

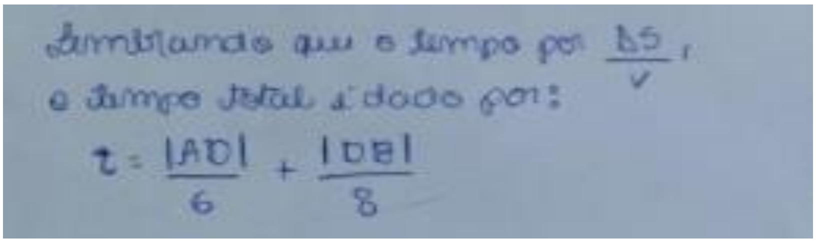
Figura 63 - Resolução para a minimização para se percorrer as duas distâncias


Seja $x = |CD|$
Queremos descobrir quem é o x que minimiza o tempo t para atingir B.
Precisamos percorrer duas distâncias:
$|AD|$ e $|DB|$

Fonte: Material produzido pelo acadêmico A19.

Na Figura 64, o acadêmico A19, estabelece uma equação utilizando a variável tempo (t), com relação aos trechos que devem ser percorridos, atribuindo a eles uma notação com os respectivos trechos e as suas distâncias.

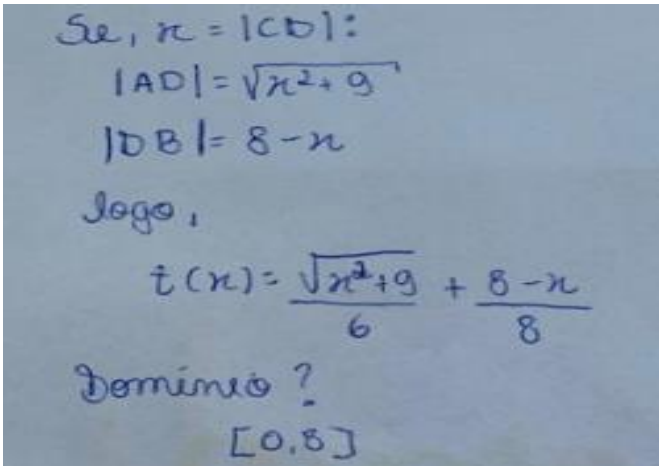
Figura 64 - Equação construída pelo acadêmico A19



Fonte: Material produzido pelo acadêmico A19.

Na Figura 65, pode-se observar que o acadêmico A19 determina as distâncias entre os pontos A e D e os pontos D e B, mas não indicam como estabeleceram as mesmas. Porém, observa-se um triângulo retângulo formado pelos pontos A, C e D, onde se tem as medidas de AC e CD, logo utilizando-se o teorema de Pitágoras, pode-se determinar a medida AD e com relação a medida DB, o acadêmico sabe que a medida de CB corresponde a 8 km e a medida de CD é x, logo a medida de DB corresponde a 8-x. Em seguida, o acadêmico A19, substitui na equação do tempo (t) as distâncias encontradas.

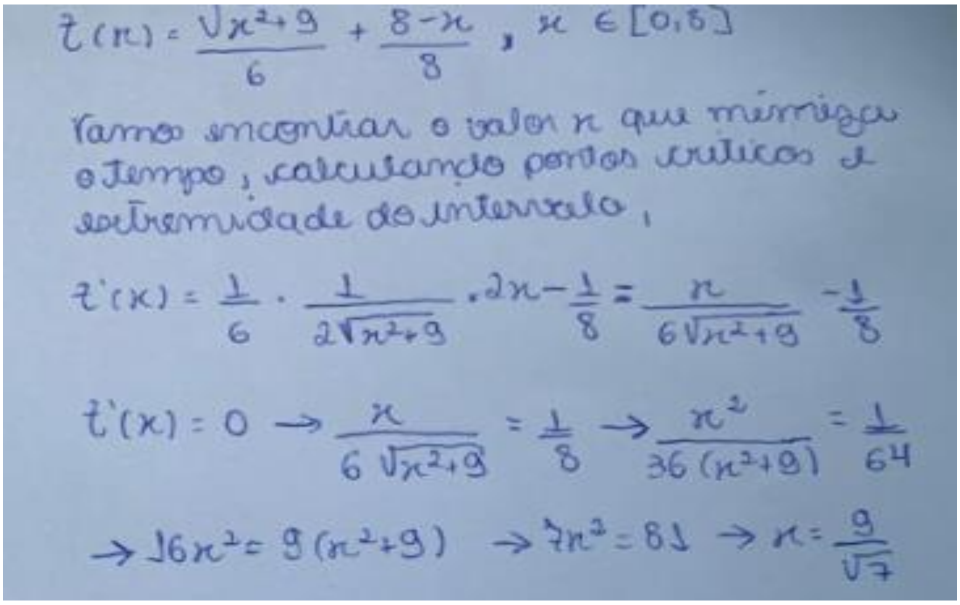
Figura 65 - Resolução do acadêmico A19



Fonte: Material produzido pelo acadêmico A19.

Na Figura 66, observa-se que o acadêmico A19 faz a derivada da equação do tempo estabelecida anteriormente. Após ele igualar a equação a zero, para encontrar o valor da variável x, utilizando-se das estratégias com base na concepção de Dante (1991, p. 9), onde o mesmo descreve que um problema é qualquer situação que exija o pensar do indivíduo para solucioná-la.

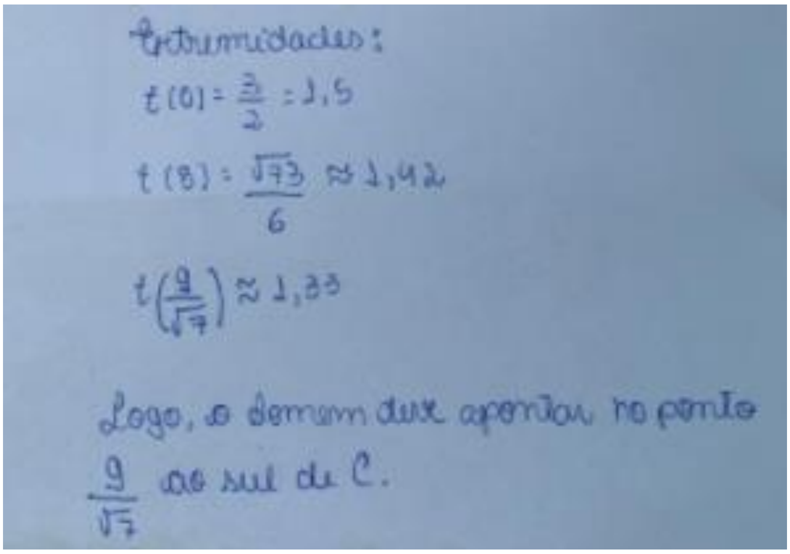
Figura 66 - Cálculo da derivada e determinação da variável x



Fonte: Material produzido pelo acadêmico A19.

Na Figura 67, observa-se que o acadêmico A19 expõe a solução do problema, após avaliar alguns valores para a variável x, aplicando assim as habilidades e estratégias de uma forma que se faça eficaz, onde também cria o hábito e a atitude de enfrentar a aprendizagem como uma situação problema para o qual está prestes a encontrar a resposta que dá a solução do problema.

Figura 67 - Resolução do acadêmico A19



Fonte: material produzido pelo acadêmico A19.

No problema 9 (Figura 68) os acadêmicos na fase de início a resolução, retiram as informações relevantes do problema e dialogam sobre ele e delimitam um raciocínio para se chegar ao resultado, bem como podem desenvolver assim um direcionamento para a discussão em grupo das estratégias a serem utilizadas na resolução do problema, colocando assim em prática a troca de ideias, durante as discussões, pois é onde os mesmos expressam suas ideias, justificam suas formas de abordagem e de compreensão da atividade, e identificam as técnicas e ferramentas usadas na resolução do problema.

Figura 68 - Problema 09 da sequência de atividades

Questão Problema 09 - Encontre as dimensões de um retângulo com perímetro de 100 m cuja área seja a maior possível.

Fonte: Stewart (2013, p.300).

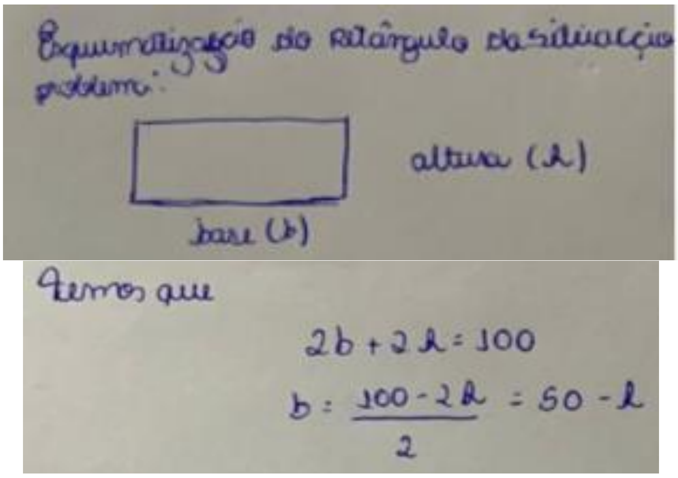
Conforme Dante (1998), descreve que um problema pode envolver mais que uma simples operação de cálculo, possibilitando desenvolver estratégias, onde se busca assim vários caminhos para solucioná-lo, de acordo com a sua realidade e conhecimentos específicos para resolvê-lo, com base nessa descrição os acadêmicos iniciam o problema com a situação proposta para resolvê-lo, ao qual se detalha com relação à determinação das dimensões de um retângulo, tendo o perímetro já inserido em 100 metros, considerando que a área seja a maior possível.

Em se iniciar à situação proposta para a resolução do problema em questão, os acadêmicos fizeram alguns apontamentos de dúvidas ao processo de solução:

> *Acadêmico A3: Professor para que eu possa iniciar a questão devo fazer a esquematização do retângulo, colocando as variáveis e as relacionando assim a base e a altura.*
> *Resposta: Sim, você deverá fazer a correlação das variáveis de x e y lembrando que você já tem um perímetro definido que é de 100 m.*
> *Acadêmico A12: Essas medidas do retângulo podem ser usadas como uma equação que esteja ao perímetro, para que eu obtenha de uma forma satisfatória o resultado.*
> *Resposta: Sim, sendo que os mesmos vão lhe auxiliar para se obter a maior área possível do retângulo.*

Na etapa em que se inicia a “Compreensão do problema”, conforme o autor Polya (2006), o acadêmico A12 faz a esquematização da equação do retângulo relacionando as variáveis da base e da altura, com o perímetro já estabelecido (Figura 69), tentando assim resolver o problema e observar o que fazem os outros acadêmicos em relação à situação proposta.

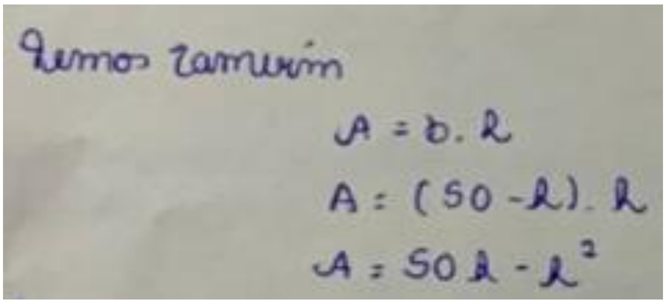
Figura 69 - Esquematização da equação do retângulo



Fonte: Material produzido pelo acadêmico A12.

Sendo que em seguida o acadêmico A12, faz a referência da equação que se destina a área, tendo como variáveis a base (b) e a altura (h), para então substituir a base na equação da área por (50-h), conforme descrito na Figura 70.

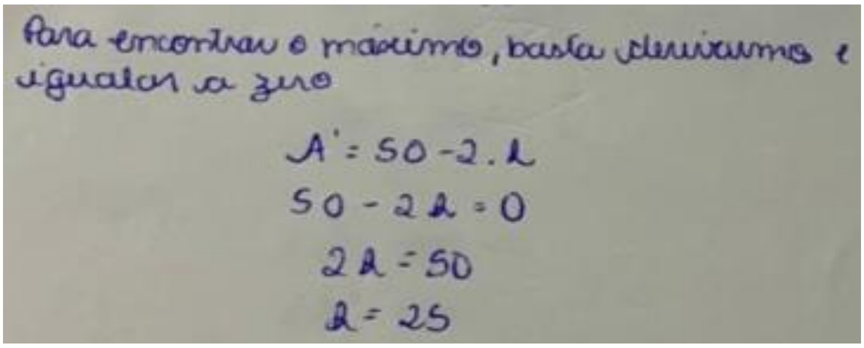
Figura 70 - Equação da área descrita



Fonte: Material produzido pelo acadêmico A12.

Em sequência o acadêmico A12, inicia a derivação para obter o resultado, com base em algum problema relacionado com este ou por algum conteúdo que já estudou e que possa lhe ser útil (POLYA, 1995). Entende-se que foi possível resolver o problema por partes em seu processo de derivação e o igualando a zero, podendo ser esse o caminho percorrido para buscar a solução, conforme a Figura 71.

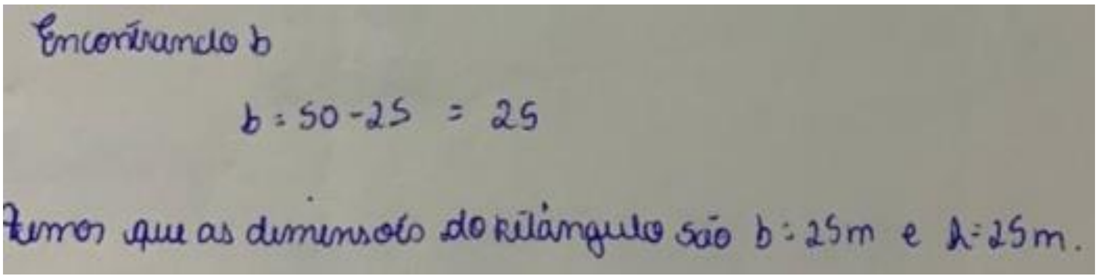
Figura 71 - Equação ilustrada em que se obtém o resultado de h



Fonte: Material produzido pelo acadêmico A12.

Por fim ao resultado do problema o acadêmico A12, determina o valor da base, pois já conhece o valor da altura h, conforme a Figura 72.

Figura 72 - Resolução para encontrar b



Fonte: Material produzido pelo acadêmico A12.

O problema seguinte, na Figura 73, envolve a determinação das dimensões de um retângulo, onde o acadêmico, precisa compreender o problema, e perceber claramente o que é necessário, e ver como os dados estão inter-relacionados, buscando ideias para a resolução, de forma a estabelecer e executar um plano, bem como fazer uma reflexão sobre a resolução completa, revendo-a e discutindo-a entre os outros demais acadêmicos (DANTE, 1998).

Figura 73 - Problema 10 da sequência de atividades

Questão Problema 10 - Encontre as dimensões de um retângulo com área de 1.000 m^2, cujo perímetro seja o menor possível.

Fonte: Stewart (2013, p.300).

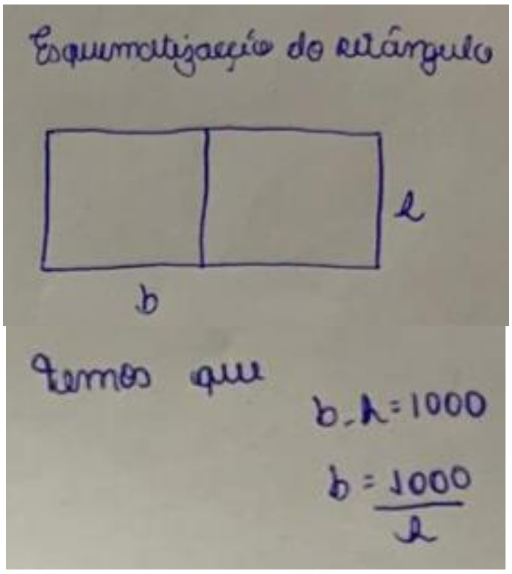
Os acadêmicos iniciam a fase para a resolução da questão problema, compreendendo a situação da proposta que envolve o problema, e despertam o interesse no desenvolvimento do conteúdo e a aplicação dos seus conhecimentos matemáticos para a resolução de uma situação específica, sendo estimulado a capacidade de resolver problema, bem como uma série de conjuntos de comportamentos que estão vinculados a uma ação tanto física como mental, como sendo um ponto de partida para que raciocine e pense de maneira adequada, retirando todas as informações pertinentes ao problema (POLYA, 2006), como por exemplo , uma área já descrita em 1.000 m², e que o perímetro seja o menor possível, onde o limite desse retângulo que poderá ser descrito em relação à base (b) e altura (h).

Quanto a alguns relatos de dúvidas de alguns dos acadêmicos, onde os mesmos fizeram alguns apontamentos para se iniciar a sua resolução:

> *Acadêmico A21: Professor para que eu possa iniciar a questão devo fazer a esquematização do retângulo, colocando as variáveis e as relacionando assim a base e a altura.*
> *Resposta: Sim, você deverá fazer a correlação das variáveis de x e y lembrando que você já tem uma área definido de 1.000 m².*
> *Acadêmico A22: Essas medidas do retângulo podem ser usadas como uma equação que esteja a área já definida, para que eu obtenha de uma forma satisfatória o resultado.*
> *Resposta: Sim, sendo que os mesmos vão lhe auxiliar para se obter o menor perímetro possível do retângulo em questão.*

Para a compreensão do problema, de acordo com Polya (2006) é preciso que o estudante se interesse pela situação em estudo, pois assim começa a questionar-se sobre como resolver o problema, levando-o a várias descobertas e a ativar seus conhecimentos matemáticos prévios. Desta forma, percebe-se que para a resolução deste problema, o acadêmico A21 faz a ilustração do retângulo (Figura 74) e indica que área está relacionada às variáveis da base (b) e da altura (a).

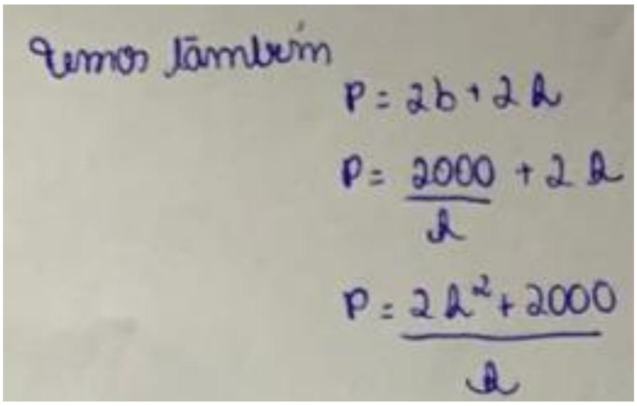
Figura 74 - Esquematização para se obter a equação, com a variável b



Fonte: Material produzido pelo acadêmico A21.

Nesta etapa, o acadêmico A21 utiliza-se da equação que se descreve em P = 2b + 2h, utilizando a informação de que b$=\frac{1000}{h}$, onde pode-se perceber que foi necessário que o acadêmico colocasse em prática a sua capacidade de análise matemática e estruturar o seu raciocínio, bem como a sua forma de pensar e agir, conforme a descrição na Figura 75.

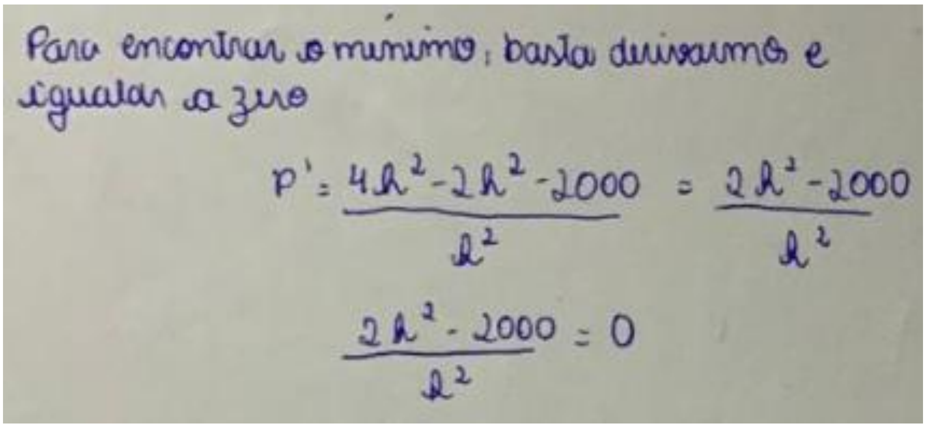
Figura 75 - Equação para se obter o perímetro



Fonte: Material produzido pelo acadêmico A6.

Para a sequência da resolução do problema o acadêmico A21 inicia o processo de derivação da equação (Figura 76).

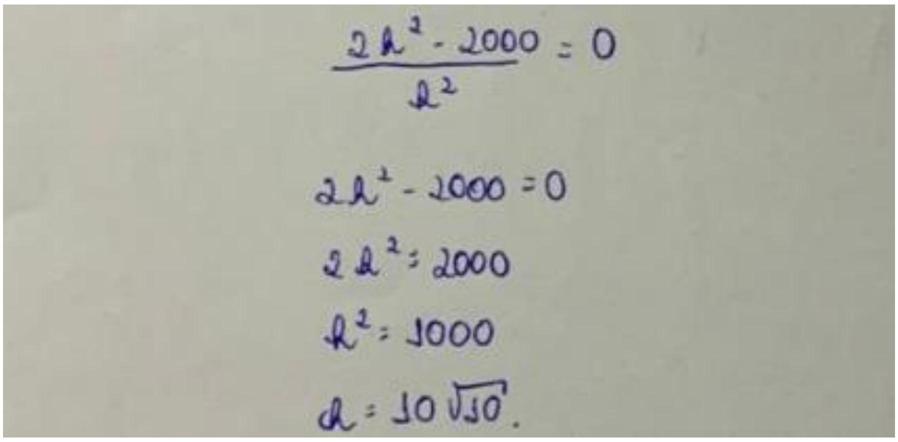
Figura 76 - Equação descrevendo a base e altura em relação ao perímetro



Fonte: Material produzido pelo acadêmico A21.

E, na sequência o acadêmico A21, isola na equação encontrada anteriormente a variável h, obtendo o resultado da mesma (Figura 77).

Figura 77 - Determinação da altura



Fonte: Material produzido pelo acadêmico A21.

Por fim, parte para a resolução do problema, tendo como objetivo um foco particular de Matemática e aplicabilidade dos métodos e, usando estratégias convenientes, onde se buscou a solução do problema, onde o acadêmico A21, demonstra o resultado de b, fazendo a substituição da variável h, já encontrada, chegando ao resultado final, conforme a Figura 78.

Figura 78 - Obtenção do resultado de b

Encontrando b

$$b = \frac{1000}{10\sqrt{10}} = \frac{1000}{\sqrt{10}} = \frac{100\sqrt{10}}{10} = 10\sqrt{10}$$

Fonte: Material produzido pelo acadêmico A21.

Os acadêmicos iniciaram a resolução da ***Questão Problema 11*** (Figura 79), compreendendo a situação que envolve o problema.

Figura 79 - Problema 11 da sequência de atividades

Questão Problema 11 - Uma caixa com uma base quadrada e sem tampa tem volume de 32 000 cm^3. Encontre as dimensões da caixa que minimizam a quantidade de material usado.

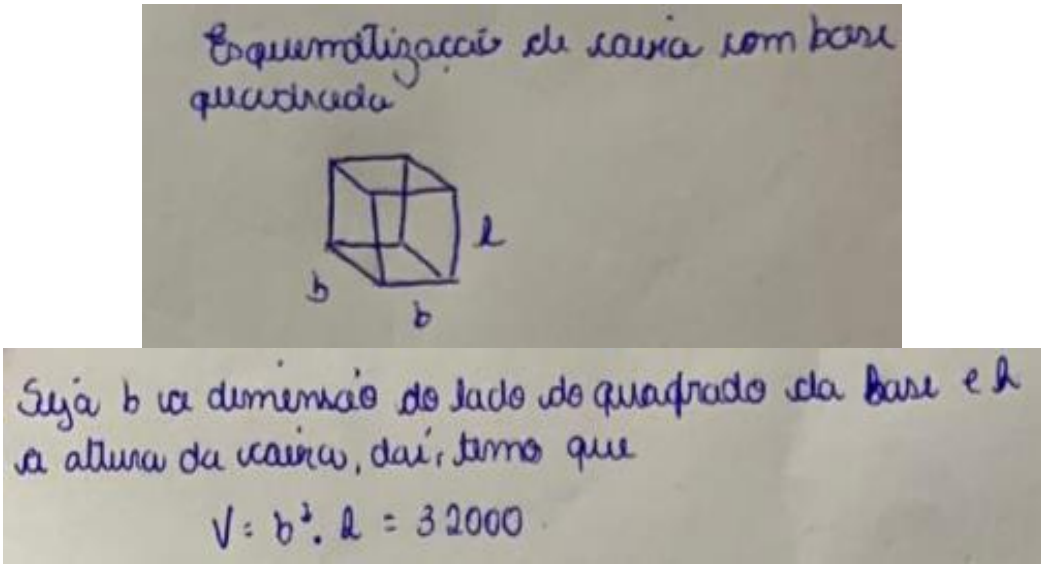
Fonte: Stewart (2013, p.300).

Seguindo a resolução do problema proposto, os alunos fizeram questionamentos, como:

> *Acadêmico A14: Professor para que eu possa iniciar a questão devo fazer correlação do volume que envolve as dimensões da caixa.*
> *Resposta: Sim, você deverá fazer a correlação da base, em relação à altura, bem como o comprimento, originando assim uma equação que represente o volume já dado no exercício.*
> *Acadêmico A12: Essas medidas podem ser usadas de forma aleatórias ou não, para que eu obtenha de uma forma satisfatória o resultado.*
> *Resposta: Não, pois essas medidas já estão inseridas dentro do que se propõe a questão, sendo que você já tem um valor específico.*

Na Figura 80, o acadêmico A14, apresenta a esquematização da situação problema proposta. Em seguida, a partir dos dados do problema, sabendo que é uma caixa quadrada, o mesmo determina a fórmula do volume do objeto, atribuindo as variáveis da base, como b e da altura, como h.

Figura 80 - Esquematização para se obter o volume


Esquematização de caixa com base quadrada

b

b

h

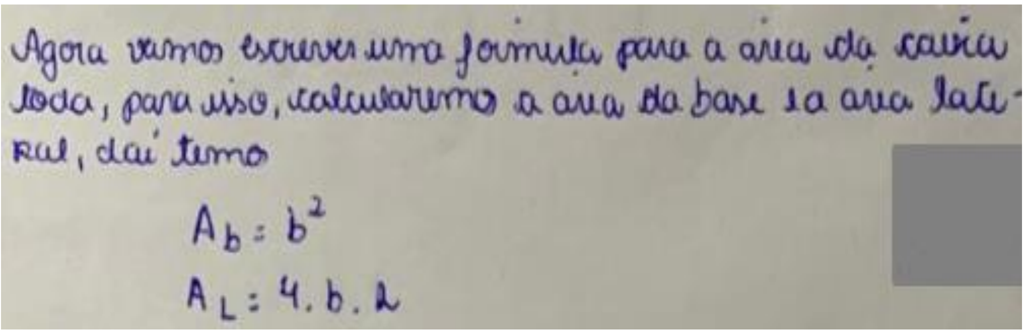
Seja b a dimensão do lado do quadrado da base e h a altura da caixa, daí, temos que

$V = b^2 . h = 32000$

Fonte: Material produzido pelo acadêmico A14.

No desenvolver, o acadêmico A14 faz a descrição da área da caixa, para isso, o mesmo apresenta a área da base e a área lateral, definindo assim duas equações, entende-se que tais equações servirão como base de sua estratégia para resolver o problema (Figura 81).

Figura 81 - Fórmula para os cálculos das áreas


Agora vamos escrever uma fórmula para a área da caixa toda, para isso, calcularemos a área da base e a área lateral, daí temos

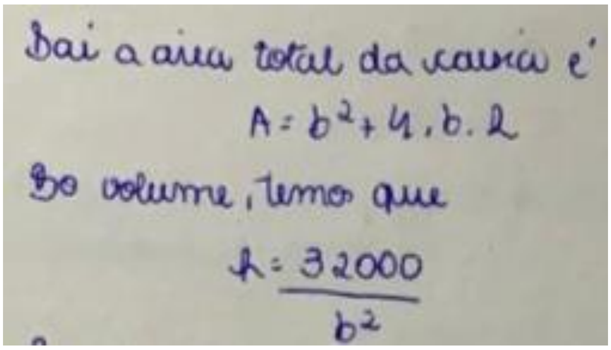
$A_b = b^2$

$A_L = 4 . b . h$

Fonte: Material produzido pelo acadêmico A14.

Em seguida, o acadêmico A14, determina a equação da área total e apresenta a equação do volume, na qual escreve a altura em função da base, conforme pode-se observar na Figura 82.

Figura 82 - Equação descrita da área para se ter a relação da altura (h)



Daí a área total da caixa é

$$A = b^2 + 4.b.h$$

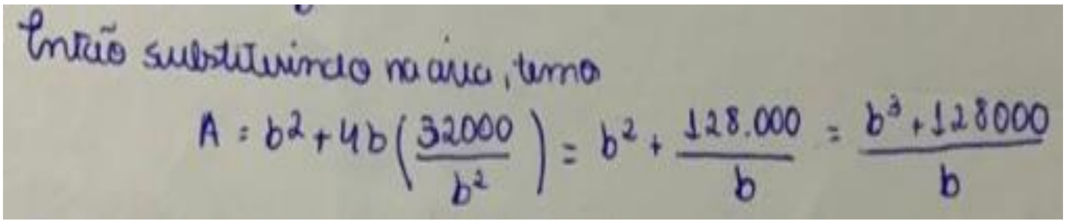
Do volume, temos que

$$h = \frac{32000}{b^2}$$

Fonte: Material produzido pelo acadêmico A14.

Após, o acadêmico A14, inicia o processo de substituição da altura na fórmula da área total, dando assim o prosseguimento ao cálculo matemático, colocando em prática o seu pensamento (Figura 83).

Figura 83 - Processo de substituição na equação



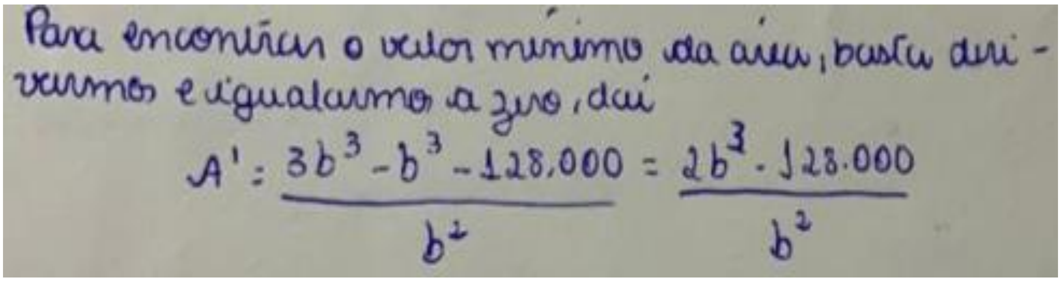
Então substituindo na área, temos

$$A = b^2 + 4b\left(\frac{32000}{b^2}\right) = b^2 + \frac{128.000}{b} = \frac{b^3 + 128000}{b}$$

Fonte: material produzido pelo acadêmico A14.

Em seguida parte para o processo de derivação da equação, para posteriormente encontrar e obter o valor mínimo da área (Figura 84).

Figura 84 - Resolução da equação para se obter o valor mínimo da área



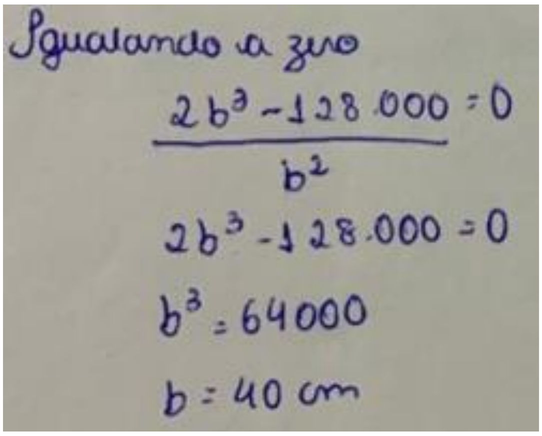
Para encontrar o valor mínimo da área, basta derivarmos e igualarmos a zero, daí

$$A' = \frac{3b^3 - b^3 - 128.000}{b^2} = \frac{2b^3 - 128.000}{b^2}$$

Fonte: Material produzido pelo acadêmico A14.

Igualando a derivada a zero, o acadêmico A14, encontra o resultado de b, conforme a ilustração apresentada na Figura 85.

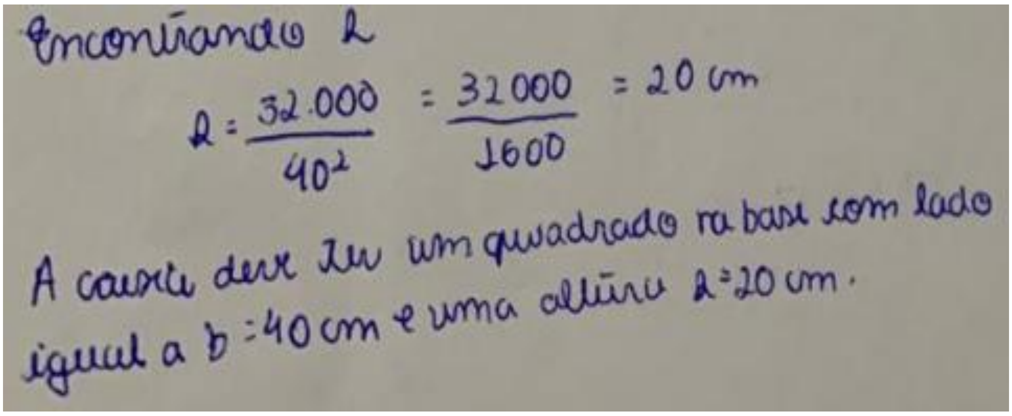
Figura 85 - Determinação da variável b



Fonte: Material produzido pelo acadêmico A14.

E ao final da resolução do problema, em que o acadêmico A14, já com o resultado definido de b, obtêm o resultado de h, utilizando assim os seus conhecimentos matemáticos (Figura 86).

Figura 86 - Obtendo o resultado de h



Fonte: Material produzido pelo acadêmico A14.

Os acadêmicos em relação a resolução da ***Questão Problema 12***, compreendem a situação da proposta que envolve o problema, iniciando o seu reconhecimento, de forma que o compreenda, o identifique e se lembrem de algum conceito matemático que permita a resolução do mesmo, sabendo que precisam apresentar às dimensões do retângulo com a maior área que pode ser inscrito em um triângulo equilátero com lado L (Figura 87).

Figura 87 - Problema 12 da sequência de atividades

Questão Problema 12 - Encontre as dimensões do retângulo com a maior área que pode ser inscrito em um triângulo equilátero com lado L se um dos lados do retângulo estiver sobre a base do triângulo.

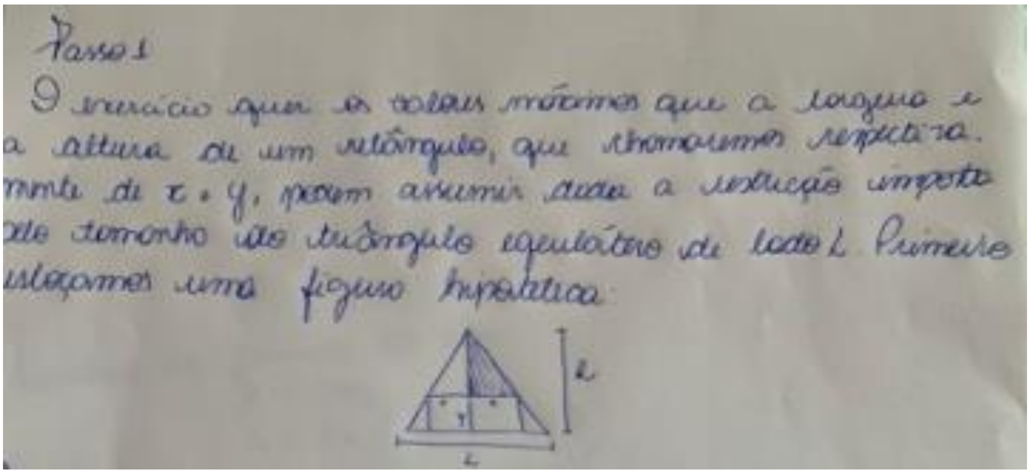
Fonte: Stewart (2013. p.300).

Para a resolução do problema em questão, foi necessário conversar com os acadêmicos a respeito de algumas dúvidas que surgiram após a leitura do problema, como:

> *Acadêmico A16: Professor para que eu possa iniciar a questão devo fazer a esquematização utilizando assim de duas variáveis em relação a x e y, tendo em vista que tenho a semelhança dos lados.*
> *Resposta: Sim, você deverá fazer a esquematização tendo em vista que eles são equiláteros, porém deverá verificar o que tem a maior área.*
> *Acadêmico A15: Como um dos lados já está definido como L, e a área ainda não está definida na questão, posso fazer a correlação entre as variáveis.*
> *Resposta: Sim, sendo que as variáveis de h e L, vão lhe auxiliar para se chegar ao resultado, em que x e y estão inseridos.*

Para a compreensão do problema em questão o acadêmico A15 começa descrevendo a situação de forma interpretativa, para em seguida apresentar uma esquematização, atribuindo variáveis para as medidas dos lados do triângulo (L), bem como para os lados do retângulo, sendo base (x) e altura (y) (Figura 88).

Figura 88 - Ilustração do triângulo retângulo



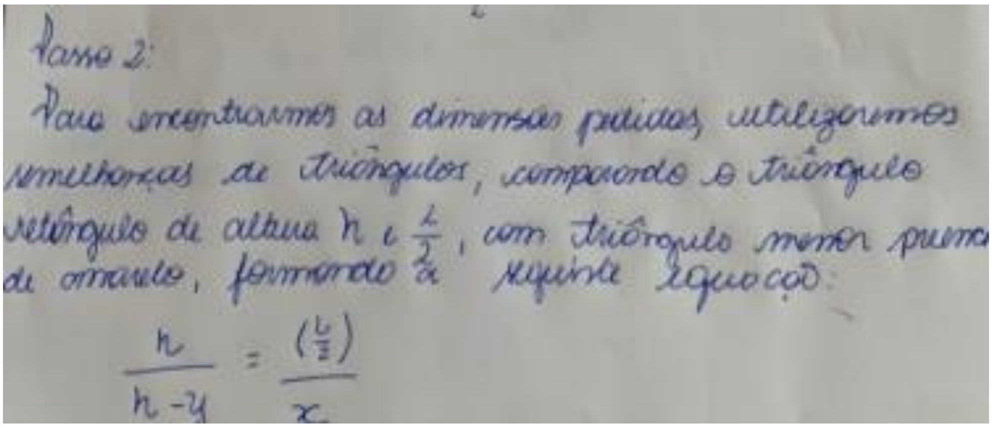
Passo 1

O exercício quer os valores máximos que a largura e a altura de um retângulo, que chamaremos respectivamente de x e y, podem assumir dada a restrição imposta pelo tamanho do triângulo equilátero de lado L. Primeiro esboçamos uma figura hipotética

Fonte: Material produzido pelo acadêmico A15.

Após a compreensão do problema e com base na esquematização realizada, o acadêmico A15, descreve uma equação a partir da semelhança de triângulos (Figura 89).

Figura 89 - Equação descrita pela semelhança de triângulos



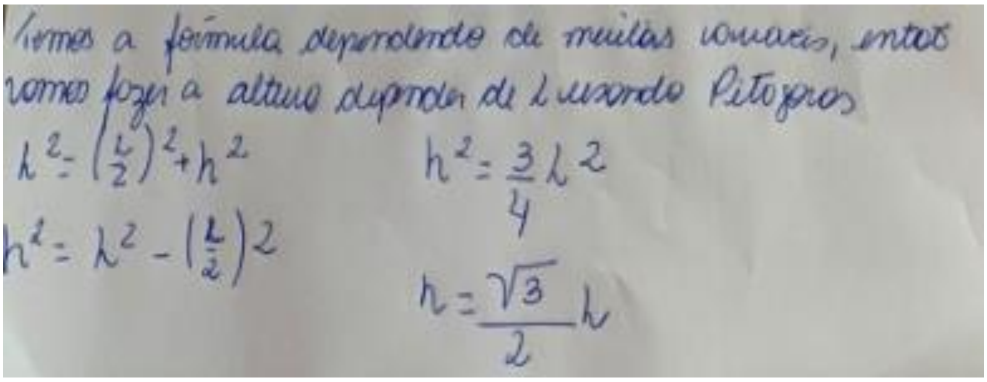
Passo 2:
Para encontrarmos as dimensões pedidas utilizaremos semelhanças de triângulos, comparando o triângulo retângulo de altura h e $\frac{L}{2}$, com triângulo menor prima de amarelo, formando a seguinte equação:

$$\frac{h}{h-y} = \frac{\left(\frac{L}{2}\right)}{x}$$

Fonte: Material produzido pelo acadêmico A15.

Em sequência, de forma implícita pode-se perceber que o acadêmico A15 por meio da sua esquematização visualiza que existem dois triângulos retângulos, que lhe permite utilizar o teorema de Pitágoras para escrever a altura (h) em função do lado (L) do triângulo, conforme a descrição na Figura 90.

Figura 90 - Equação descrita utilizando a correlação de Pitágoras



Temos a fórmula dependendo de muitas variáveis, então vamos fazer a altura depender de L usando Pitágoras

$$L^2 = \left(\frac{L}{2}\right)^2 + h^2$$

$$h^2 = L^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2$$

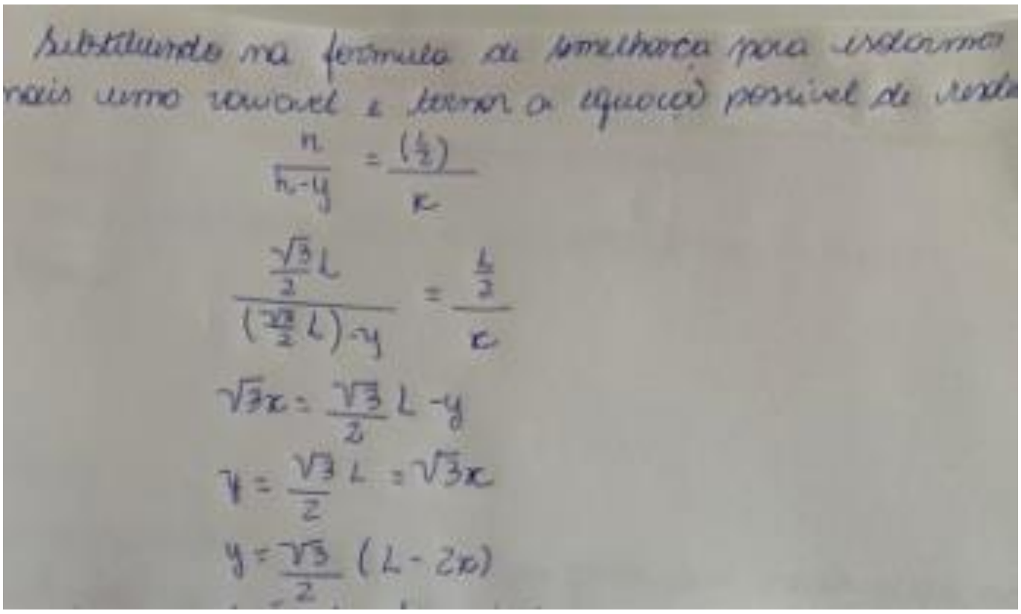
$$h^2 = \frac{3}{4}L^2$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}L$$

Fonte: Material produzido pelo acadêmico A15.

Em seguida o acadêmico A15, utiliza as duas equações encontradas anteriormente para escrever, identificando quais as operações que realmente são apropriadas para se resolver o problema, conforme a (Figura 91).

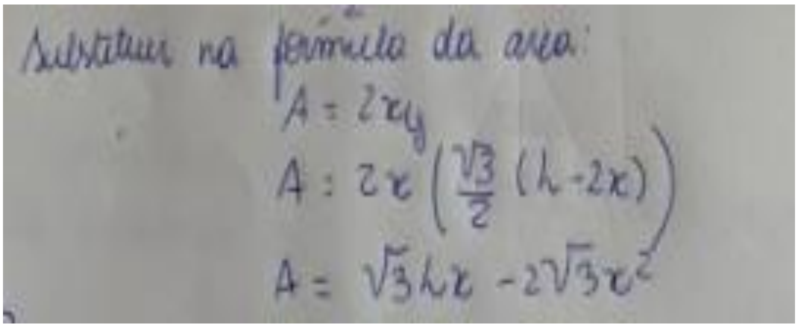
Figura 91 - Equação com a substituição das variáveis



Fonte: Material produzido pelo acadêmico A15.

Na sequência, o acadêmico A15, utiliza a fórmula da área (A=2xy), substituindo a variável y pela equação encontrada na etapa anterior (Figura 92).

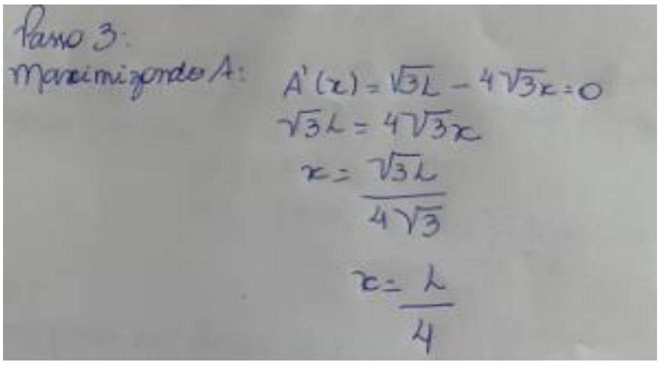
Figura 92 - Equação descrita para se obter a área



Fonte: Material produzido pelo acadêmico A15.

Na etapa seguinte, o acadêmico A15, deriva a equação da área e imediatamente a iguala a zero para obter o resultado da variável x, conforme se pode observar na Figura 93.

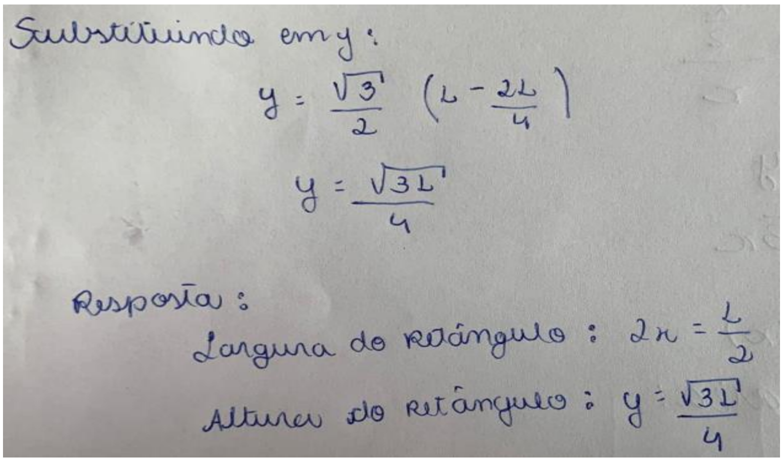
Figura 93 - Resultado da variável x



Fonte: Material produzido pelo acadêmico A15.

Ao final da resolução do problema, o acadêmico A15, retoma a equação y=$\frac{\sqrt{3}}{2}(L-2x)$, substituindo a variável x por $\frac{L}{4}$, pois dessa forma consegue, também escrever y em função do lado de medida L, obtendo a largura e altura do retângulo (Figura 94).

Figura 94 - Determinação da largura e altura do retângulo



Fonte: Material produzido pelo acadêmico A15.

Os acadêmicos iniciaram a resolução da ***Questão Problema 13***, compreendendo a situação proposta que envolve o problema (Figura 95).

Figura 95 - Problema 13 da sequência de atividades

Questão Problema 13 - Encontre a área do maior retângulo que pode ser inscrito em um triângulo retângulo com catetos de comprimentos 3 e 4 cm, se dois lados do retângulo estiverem sobre os catetos.

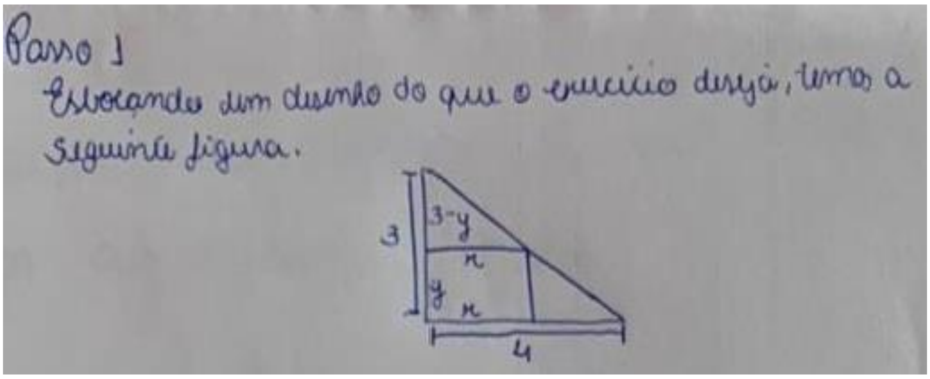
Fonte: Stewart (2013, p.300).

Os acadêmicos antes de iniciar a questão problema fizeram alguns questionamentos, como:

> *Acadêmico A7: Professor para que eu possa iniciar a questão devo fazer a esquematização do triângulo retângulo, colocando as variáveis.*
> *Resposta: Sim, você deverá fazer a correlação das variáveis de x e y em relação aos catetos de 3 e 4 cm.*
> *Acadêmico A11: Essas medidas dos catetos podem ser usadas como fração, para que eu obtenha de uma forma satisfatória o resultado.*
> *Resposta: Sim, sendo que os mesmos vão lhe auxiliar para se obter a área do maior retângulo.*

Na fase inicial da resolução do problema o acadêmico A7 começa a "Estabelecer um plano", com a esquematização de um triângulo retângulo com catetos conforme a seguinte (Figura 96), sendo detalhados os lados com as suas devidas variáveis de x e y, correlacionados aos catetos com comprimentos de medida 3 e 4 cm respectivamente.

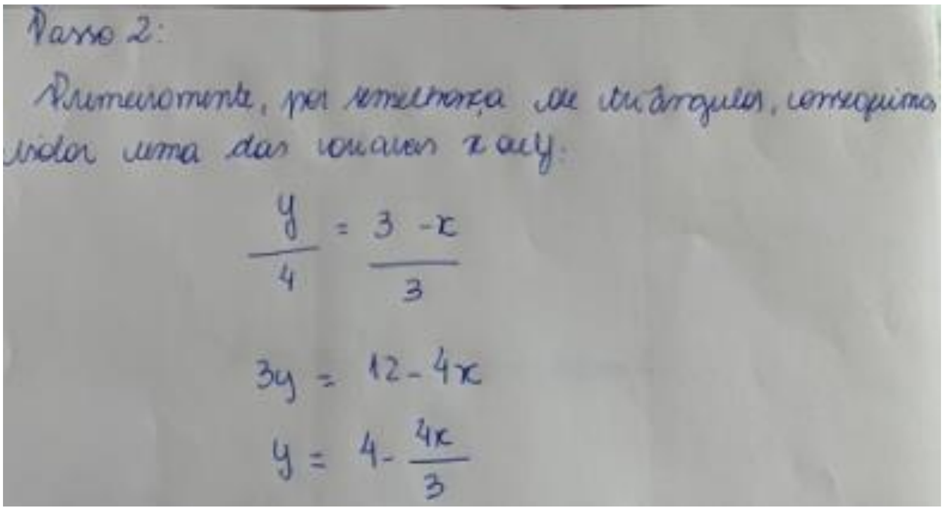
Figura 96 - Esquematização do acadêmico A7



Fonte: Material produzido pelo acadêmico A7.

Após a esquematização do triângulo retângulo o acadêmico A7 interpreta o seu esquema e percebe que pode utilizar seu conhecimento matemático relativo à semelhança de triângulos para isolar a variável de y (Figura 97).

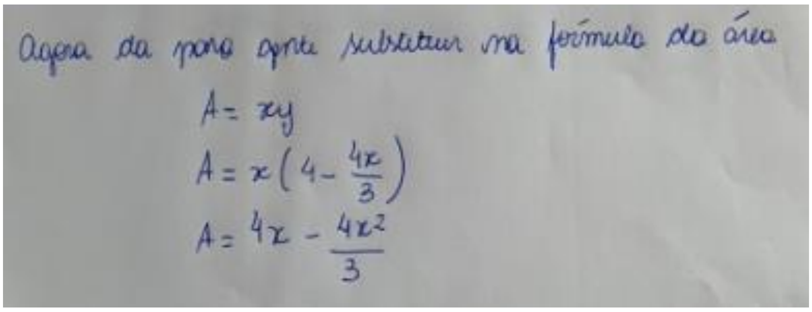
Figura 97 - Equação elaborada pelo acadêmico A7



Fonte: Material produzido pelo acadêmico A7.

E na sequência da propositura da resolução do problema o acadêmico A7, insere a equação que define a área em relação às suas duas variáveis, dando sequência a execução do plano, conforme se observa na (Figura 98). Ainda, nesse momento, o acadêmico substitui a variável y pela equação encontrada anteriormente, para que possa escrever a área em função de x.

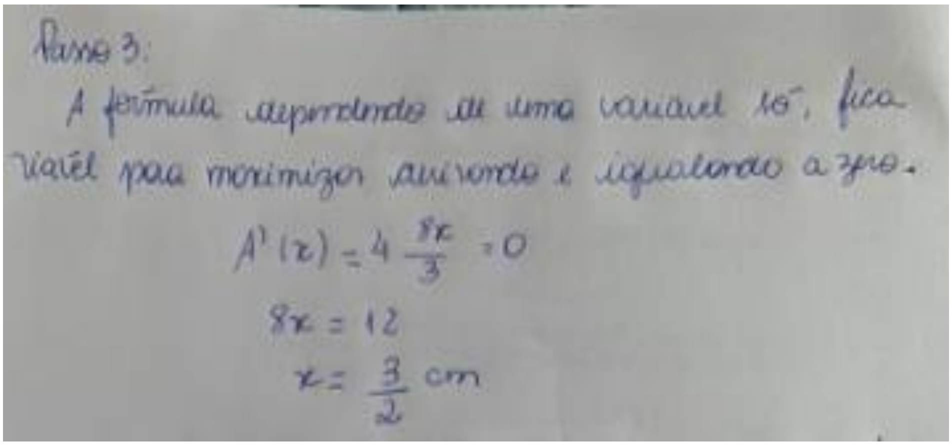
Figura 98 - Ilustração da equação do acadêmico A7



Fonte: Material produzido pelo acadêmico A7.

No retrospecto do problema o acadêmico A7 dá continuidade ao processo para maximizar a derivada, para obter o resultado da variável de *x* (Figura 99).

Figura 99 - Demonstração da equação com a variável de x



Passo 3:

A fórmula dependendo de uma variável só, fica viável para maximizar derivando e igualando a zero.

$$A'(x) = 4 - \frac{8x}{3} = 0$$

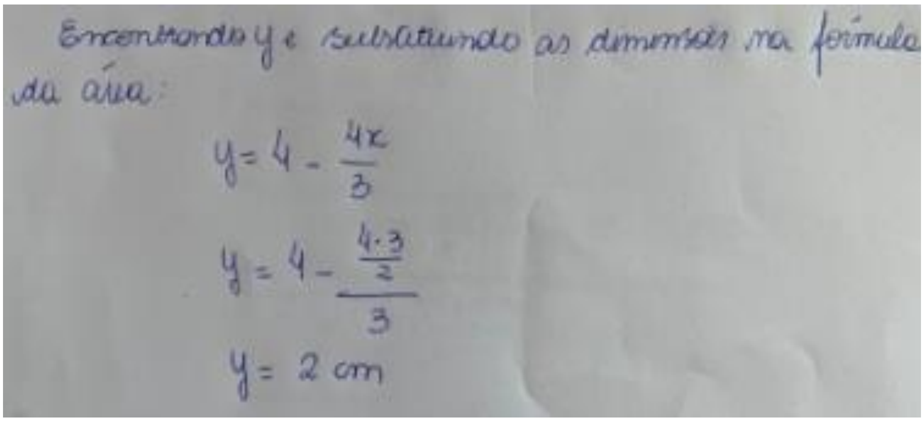
$$8x = 12$$

$$x = \frac{3}{2} \text{ cm}$$

Fonte: Material produzido pelo acadêmico A7.

O acadêmico A7, após a obtenção da variável de *x*, inicia a substituição de *x*, chegando assim ao resultado de *y*, conforme a Figura 100.

Figura 100 - Demonstração da equação com a variável de y



Encontrando y e substituindo as dimensões na fórmula da área:

$$y = 4 - \frac{4x}{3}$$

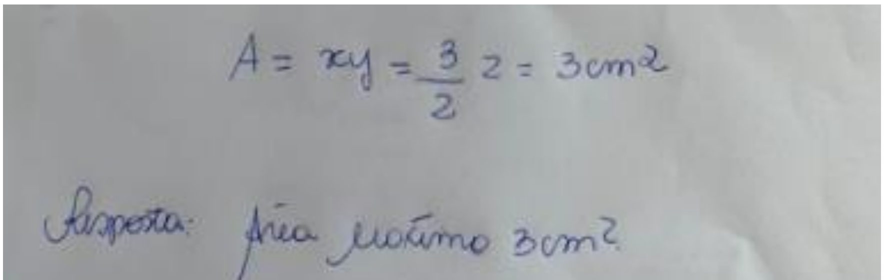
$$y = 4 - \frac{\frac{4 \cdot 3}{2}}{3}$$

$$y = 2 \text{ cm}$$

Fonte: Material produzido pelo acadêmico A7.

Por fim, o acadêmico A7, obtém a área, utilizando os valores das duas variáveis x e y já encontradas (Figura 101).

Figura 101 - Demonstração da equação da área



$$A = xy = \frac{3}{2} 2 = 3 \text{cm}^2$$

Resposta: Área máxima 3cm^2

Fonte: Material produzido pelo acadêmico A7.

Os acadêmicos iniciam a resolução da ***Questão Problema 14*** compreendendo a situação proposta que envolve o problema, ao qual se descreve com relação às dimensões de um pôster para se ter a menor área (Figura 102).

Figura 102 - Problema 14 da sequência de atividades

Questão Problema 14 - As margens superiores e inferiores de um pôster têm 6 cm e cada margem lateral tem 4 cm. Se a área do material impresso no pôster é de 384 cm^2, encontre as dimensões do pôster com a menor área.

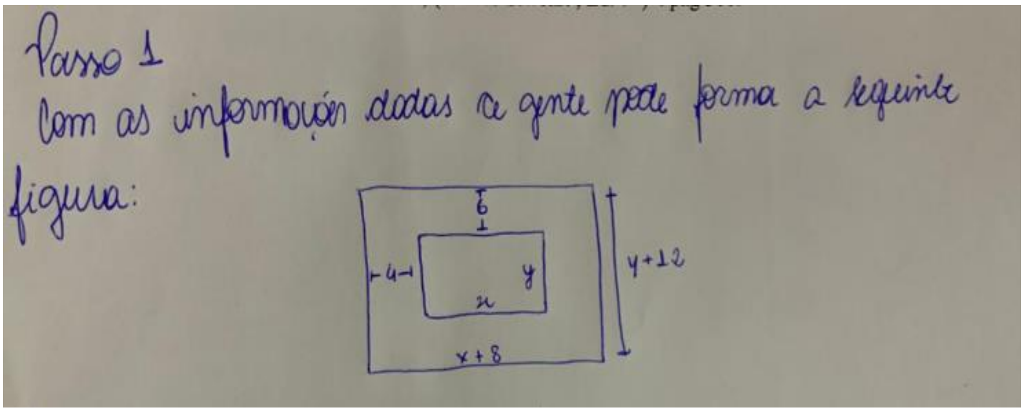
Fonte: Stewart (2013, p.300).

Os acadêmicos fizeram alguns questionamentos, quanto a propositura do que se quer saber e o que se pede para se resolver o problema:

> *Acadêmico A8: Professor para que eu possa iniciar a questão devo fazer a esquematização utilizando assim de duas variáveis em relação a x e y, tendo em vista que há duas medidas de 4 e 6 cm.*
> *Resposta: Sim, você deverá fazer a esquematização tendo em vista que os mesmos já estão descritos na margem lateral, superior e inferior.*
> *Acadêmico A9: Como a área já está definida na questão, posso fazer a correlação entre as variáveis para se obter uma das dimensões do pôster.*
> *Resposta: Sim, sendo que as variáveis vão lhe auxiliar para se saber a área do pôster e do material.*

Para a compreensão do problema em questão o acadêmico A9, faz a devida esquematização, inserindo assim as devidas variáveis de x e y, e as correlacionando as medidas de 4 e 6 cm, conforme se pode observar na Figura 103.

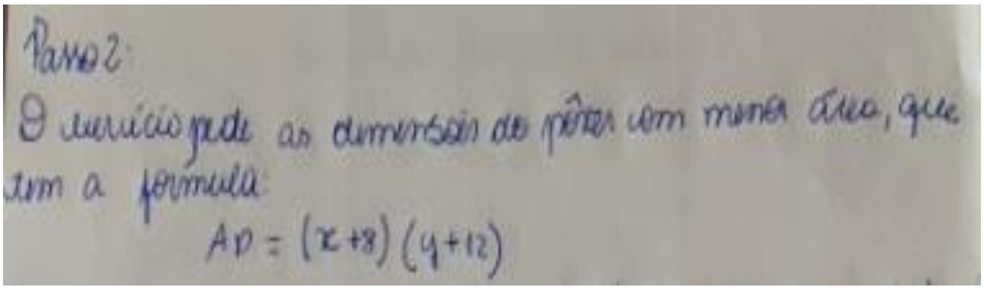
Figura 103 - Esquematização do pôster



Fonte: Material produzido pelo acadêmico A9.

Para a continuidade da resolução do problema o acadêmico A9, inicia a execução do plano, onde descreve a área do pôster, relacionando as medidas das margens inferiores e superiores, bem como a sua margem lateral, obtendo assim a equação, que se descreve na Figura 104.

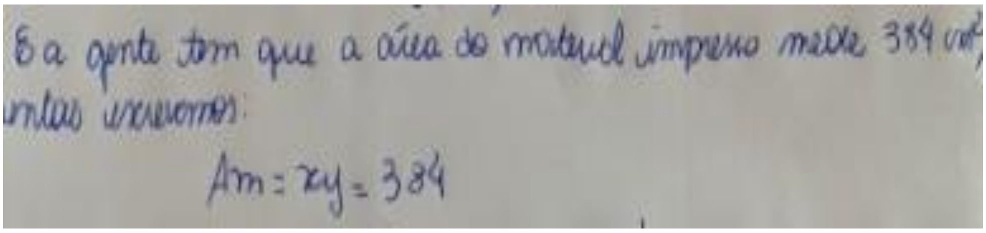
Figura 104 - Equação que relaciona a área do pôster



Fonte: Material produzido pelo acadêmico A9.

Após a obtenção da equação que descreve a área do pôster, o acadêmico A9, insere a equação que descreve a área do material, conforme se pode observar na Figura 105.

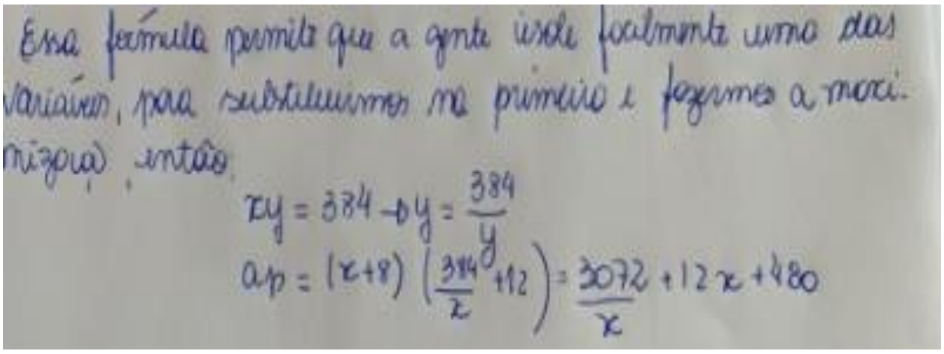
Figura 105 - Área do material



Fonte: Material produzido pelo acadêmico A9.

E na sequência das equações já estabelecidas, em que o mesmo descreve a área do material, isolando y, imediatamente substitui esse y da área do material na área do pôster, para que a mesma seja descrita apenas em função de x (Figura 106).

Figura 106 - Equação em que acadêmico A4 faz a substituição das variáveis


Essa fórmula permite que a gente isole facilmente uma das variáveis, para substituirmos na primeira e fazermos a maximização, então:

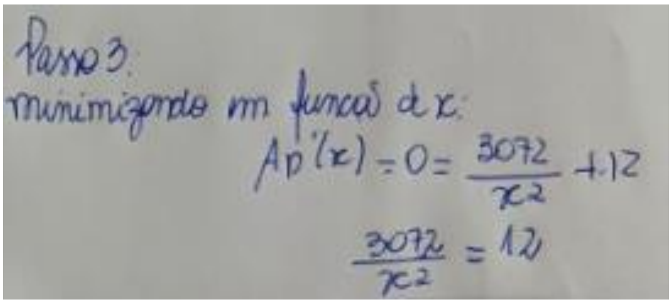
$xy = 384 \to y = \frac{384}{y}$

$a_p = (x+8)\left(\frac{384}{x}+12\right) = \frac{3072}{x} + 12x + 480$

Fonte: Material produzido pelo acadêmico A9.

E por fim na última etapa, o acadêmico A9, descreve o retrospecto do problema minimizando a equação, aplicando assim os seus conhecimentos dos conceitos matemáticos necessários para a resolução do problema a que se dedica (Figura 107).

Figura 107 - Equação em que acadêmico A9 faz a derivação para obter o x


Passo 3:

minimizando em função de x:

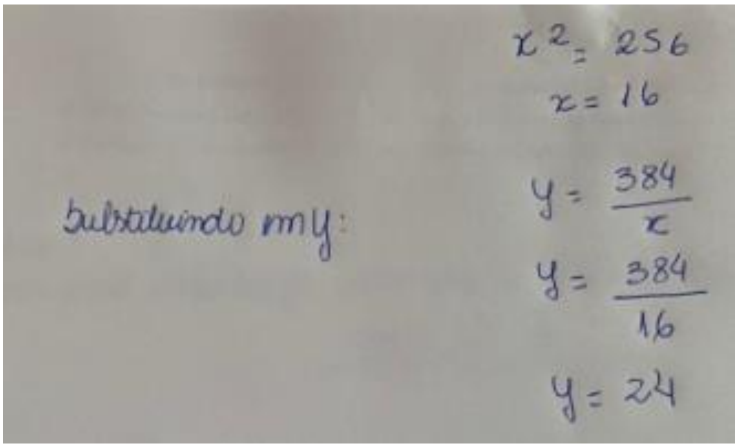
$A_p'(x) = 0 = \frac{3072}{x^2} + 12$

$\frac{3072}{x^2} = 12$

Fonte: Material produzido pelo acadêmico A9.

O acadêmico A9, descreve o resultado obtido em x e na sequência faz o processo de substituição em y, para obter o seu resultado (Figura 108).

Figura 108 - Resultados das variáveis de x e y


$x^2 = 256$

$x = 16$

substituindo em y:

$y = \frac{384}{x}$

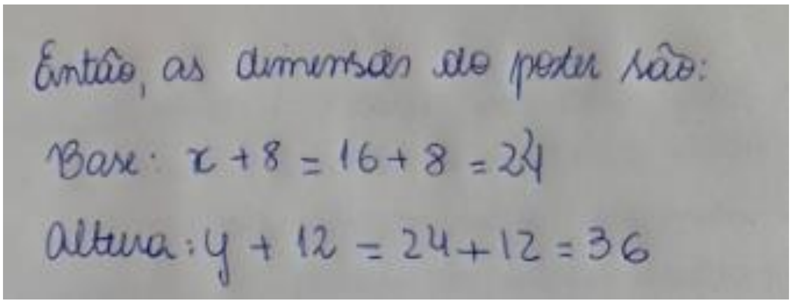
$y = \frac{384}{16}$

$y = 24$

Fonte: Material produzido pelo acadêmico A9.

O aluno por fim apresenta as dimensões do pôster, tendo em vista que conhece os valores das variáveis x e y (Figura 109).

Figura 109 - Resultado do problema



Fonte: Material produzido pelo acadêmico A9.

Os acadêmicos iniciam a resolução da última questão (Figura 110), buscando entender o problema, identificar a incógnita e os dados, bem como estabelecer relações entre os dados e a incógnita.

Figura 110 - Problema 15 da sequência de atividades

Questão Problema 15 - Um barco deixa as docas às 14 h e viaja para o sul com velocidade de 20 km/h. Outro barco estava rumando leste a 15 km/h e alcança a mesma doca às 15 h. Em que momento os dois barcos estavam mais próximos um do outro?

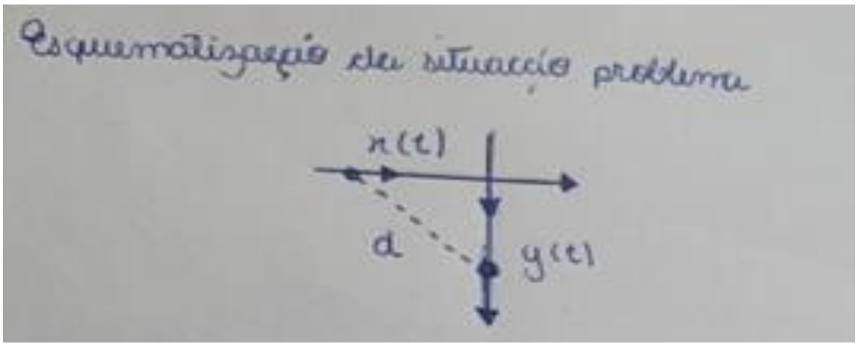
Fonte: Stewart (2013, p.300).

Para compreender o problema, os acadêmicos precisaram tirar algumas dúvidas que surgiram no decorrer da leitura do mesmo, sendo:

> *Acadêmico A19: Professor para que eu possa iniciar a questão devo fazer a esquematização da direção dos dois barcos, pois um estar para o sul e o outro para o leste.*
> *Resposta: Sim, você deverá fazer a esquematização tendo em vista que eles estão em direções distintas, e com velocidades diferentes em relação ao ponto da doca.*
> *Acadêmico A5: Essas medidas das velocidades provavelmente estejam relacionadas ao tempo estimado.*
> *Resposta: Sim, sendo que os mesmos vão lhe auxiliar para se obter o tempo em que os dois deverão se encontrar.*

Para a compreensão do problema o acadêmico A5, faz a esquematização de uma forma detalhada, para que o mesmo tenha o entendimento da relação entre os barcos e as direções entre eles, a velocidade de cada um e o sentido das direções, trazendo assim alguns pontos descritos por Polya (2006) que é a esquematização para se entender e compreender o problema, conforme a Figura 111.

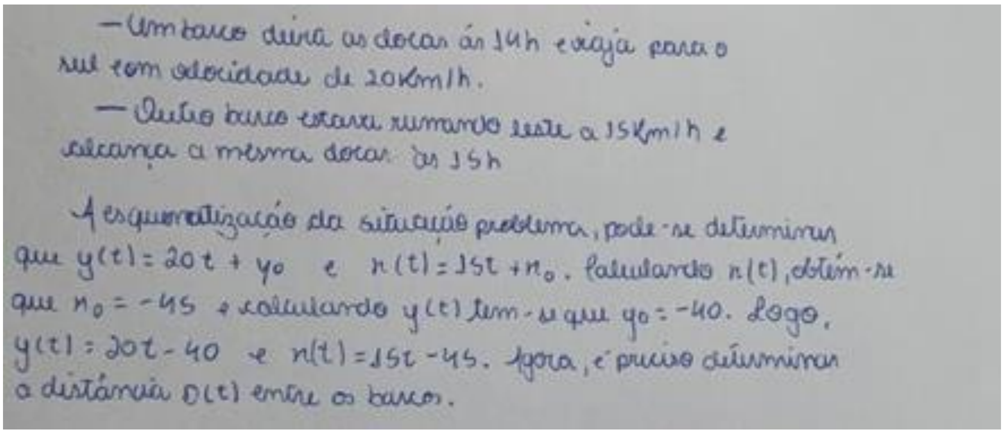
Figura 111 - Esquematização dos botes feito pelo acadêmico A19



Fonte: Material produzido pelo acadêmico A19.

Em sua continuidade a resolução do problema, o acadêmico A5, desenvolve o estabelecimento de um plano, traçando assim uma estratégia, relacionando a velocidade ao tempo em que se define o tempo de saída e o tempo de chegada, sendo observado assim a equação da variável em função do tempo em que $y(t) = 20t + y_0$ e $x(t) = 15t + x_0$, onde obtém-se que $x_0 = -45$ e o cálculo da variável y(t) tem-se que $y_0 = -40$, sendo que $y(t) = 20t - 40$ e $x(t) = 15t - 45$, conforme a (Figura 112).

Figura 112 - Interpretação do acadêmico A5



— Um barco deixa as docas às 14h e viaja para o sul com velocidade de 20km/h.

— Outro barco estava rumando leste a 15km/h e alcança a mesma doca às 15h

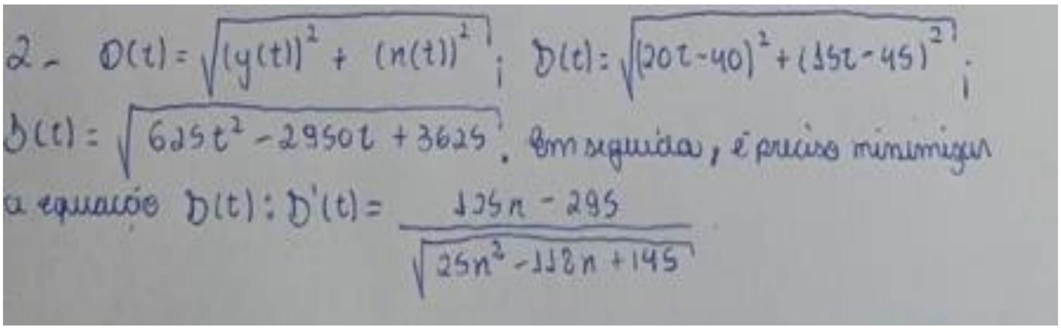
A esquematização da situação problema, pode-se determinar que $y(t) = 20t + y_0$ e $x(t) = 15t + x_0$. Calculando $x(t)$, obtém-se que $x_0 = -45$ e calculando $y(t)$ tem-se que $y_0 = -40$. Logo, $y(t) = 20t - 40$ e $x(t) = 15t - 45$. Agora, é preciso determinar a distância $D(t)$ entre os barcos.

Fonte: Material produzido pelo acadêmico A5.

Em seguida o acadêmico A5, na referida equação inicia o processo de derivação, onde se obtêm o resultado de minimização da função, ainda se acredita nessa etapa que o estudante retomou conceitos matemáticos e/ou um problema semelhante, sendo essa questão relevante para se alcançar o seu resultado, onde é preciso determinar a distância

D(t) entre os barcos, onde encontra-se a distância que é dada pela equação em que: $D(t) = \sqrt{\left(y(t)\right)^2 + (x(t))^2}$; $D(t) = \sqrt{(20t - 40)^2 + (15t - 45)^2}$; $D(t) = \sqrt{625t^2 - 2950t + 3625}$, e na sequência , onde é preciso minimizar a equação em que D(t): $D'(t) = \frac{125x - 295}{\sqrt{25x^2 - 118x + 145}}$., conforme a (Figura 113).

Figura 113 - Equação do acadêmico A19 em que define resultado de t

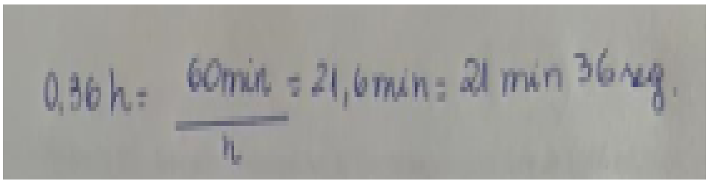


2- $D(t) = \sqrt{(y(t))^2 + (n(t))^2}$; $D(t): \sqrt{(20t-40)^2 + (15t-45)^2}$;
$D(t): \sqrt{625t^2 - 2950t + 3625}$. Em seguida, é preciso minimizar a equação $D(t): D'(t) = \frac{125n - 295}{\sqrt{25n^2 - 118n + 145}}$

Fonte: Material produzido pelo acadêmico A5.

Tendo assim a variável t sendo 0,36 horas, o acadêmico A5 passa os décimos de horas para minutos e segundo, fazendo assim a sua conversão, conforme a Figura 114.

Figura 114 - Relação do resultado descrito de t feito pelo acadêmico A5

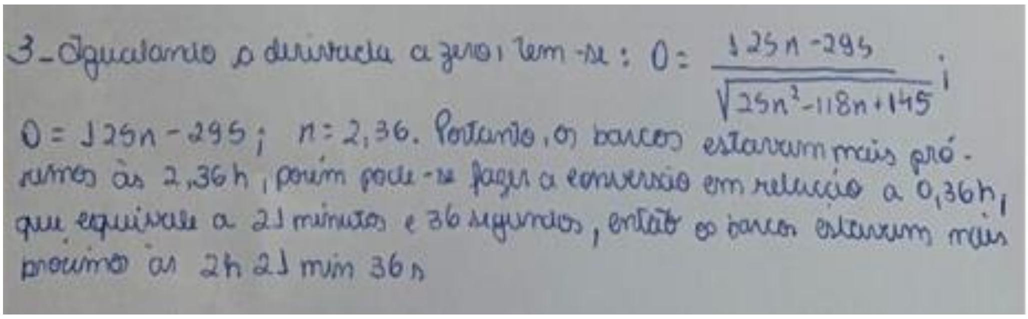


$0{,}36h: \frac{60min}{h} = 21{,}6min = 21$ min 36 seg.

Fonte: Material produzido pelo acadêmico A5.

E por fim, o acadêmico A5, apresenta a resposta encontrada para o problema igualando a derivada a zero, onde tem-se: $0 = \frac{125x - 295}{\sqrt{25x^2 - 118x + 145}}$; $0 = 125x - 295$;obtendo o resultado de $x = 2{,}36$, conforme a (Figura 115).

Figura 115 - O valor mínimo do tempo para que os barcos se encontrem


3- Igualando a derivada a zero, tem-se: $0 = \frac{125n - 295}{\sqrt{25n^2 - 118n + 145}}$;
$0 = 125n - 295$; $n = 2,36$. Portanto, os barcos estavam mais próximos às 2,36h, porém pode-se fazer a conversão em relação a 0,36h, que equivale a 21 minutos e 36 segundos, então os barcos estavam mais próximos às 2h 21 min 36 s

Fonte: Material produzido pelo acadêmico A5.

Considerando os problemas propostos, pode-se observar que os acadêmicos não realizaram o retrospecto do problema 9, podendo ter ocorrido o esquecimento do mesmo.

Ao analisar o questionário pós aplicação das atividades pode-se identificar que quais dificuldades, os acadêmicos, sentiram ao resolver os problemas em sala de aula, pois relataram que tiveram dificuldades na interpretação do enunciado dos problemas, mas que não eram pontos de obstáculos na identificação do caminho que deveria ser seguido para solução do mesmo. Também relataram que tiveram dificuldades em coletar os dados que se encontravam no problema para inseri-los nas situações envolvendo a utilização do conteúdo de Derivadas.

Segundo os acadêmicos, no momento em que as dificuldades eram superadas, por meio da mediação do professor ou com o auxílio dos colegas, conseguiam utilizar adequadamente os conteúdos do cálculo de derivadas necessários para a resolução das situações-problema.

Julgaram importante o ensino com a metodologia de resolução de problemas, pois possibilitou a aplicação de seus planos e estratégias em suas projeções, visto que pode contribuir para a percepção do acadêmico frente aos erros e os acertos encontrados durante a realização das situações.

Eles, ainda mencionaram que se sentiram surpresos quanto da capacidade do raciocínio lógico para determinação da solução das atividades, pois puderam perceber que eram capazes de resolvê-los, seguindo as etapas e que seriam capazes de resolver outros problemas, pois já tinham uma base de raciocínio já esquematizada, conforme as indicações de Polya (1995, 2006), Dante (1998) e Onuchic e Allevato (2004).

Portanto, entende-se que ao se utilizar a resolução de problemas, nos cálculos de aplicação da derivada, pode-se auxiliar os acadêmicos do Curso de Arquitetura e Urbanismo a resolver situações práticas, envolvendo assim conceitos importantes para sua vida profissional e o seu cotidiano, como o cálculo de uma área em otimizações – maximizações, minimizações e custos marginais, de um espaço geométrico, ou de um ambiente projetado, bem como um cálculo de prospecção de produção.

Há de se notar que o acadêmico de Arquitetura e Urbanismo, aprende e compreende a resolver problemas em diversas situações, utilizando o cálculo de derivada, com a aplicação de funções de uma variável real; o cálculo de valores máximos e mínimos, assim como a derivação para otimização de funções de uma variável real, e também desenvolve as habilidades de identificar e resolver os tipos de funções e representá-las em suas esquematizações e ilustrações graficamente do problema, analisá-las e aplicá-las, bem como usar as suas estratégias específicas para resolução de problemas que envolvem o cálculo, e o entendimento em se empregar adequadamente as regras de derivação em suas aplicações.

Também, as atividades selecionadas, envolvendo otimização e o cálculo de derivadas, oportunizaram a revisão de conteúdos, como o teorema de Pitágoras, a relação da semelhança de triângulos, cálculo de uma área de região quadrada, de uma região retangular e até mesmo o aprofundamento referente aos cálculos com volume.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta pesquisa, pode-se perceber que a utilização da metodologia de resolução de problemas no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, em sala de aula, possibilita aos acadêmicos participarem da construção dos conceitos matemáticos, criar estratégias, testar hipóteses, trabalhar em grupo, trocar ideias sobre o processo de resolução com os colegas e o professor.

Durante o desenvolvimento e elaboração deste trabalho, foi feita uma revisão bibliográfica dos conceitos de derivadas e, em seguida, foram propostos alguns problemas de otimização aplicados às áreas do conhecimento, com foco em aplicações no campo de pesquisa da Arquitetura e Urbanismo.

Quanto a revisão bibliográfica descrevemos alguns apontamentos de alguns autores, como por exemplo, Dante (1998) que apresenta que o ensinar remete aos procedimentos matemáticos que podem realmente contribuir para o desenvolvimento do aluno, e o Polya (1995) que existem outros fatores que influenciam no sucesso da solução de problemas, sendo eles: a forma da aplicação dos problemas, as diferentes estratégias para resolver o problema em Matemática e os processos metodológicos no ensino da Matemática.

A investigação do tema no banco de teses e dissertações da CAPES contribuiu para identificar que a metodologia de resolução de problemas vem sendo utilizadas no Ensino Superior na abordagem dos conteúdos de Derivadas. Além disso, por meio dessa pesquisa se pode constatar que essa metodologia viabiliza a aproximação dos conceitos desenvolvidos com o mundo real e prático dos acadêmicos, de forma a potencializar a sua aprendizagem.

Destaca-se também, o que foi observado nos livros didáticos de cálculo e no estudo da revisão de literatura, que há questões contextualizadas que fundamentam e podem ser utilizadas na abordagem metodológica de resolução de problemas, e em especial as aplicações de derivadas, nesse sentido, em que as atividades elaboradas, nesta investigação, em que se descrevem e indicam caminhos para os professores adaptarem/selecionarem as atividades presentes nos livros didáticos, onde, entende-se que os objetivos específicos de pesquisar e construir situações problemas para o conteúdo de aplicações de derivadas, sendo subsidiado pela a análise dos livros realizada.

A proposta deste estudo de pesquisa, que envolve a prática para a resolução de problemas, tanto por Dante (1998), como Polya (1995), vieram ao encontro do que já se almejava, pois os dois estimulam os alunos a raciocinar e a organizar os seus pensamentos, montar as estratégias, aplicá-las e validá-las. As contribuições de Onuchic e Allevato (2004), em que o professor deve inicialmente escolher o problema gerador, e que deve partir de um conteúdo ainda não estudado, e em seguida, os alunos fazem uma leitura individual do problema, de modo que estabeleçam uma compreensão própria do que lhes foi apresentado, onde os alunos reúnem-se em grupos e fazem uma nova leitura e uma possível discussão, onde cada integrante possa expressar seu entendimento a partir do problema proposto, sendo que neste momento o professor pode auxiliar o esclarecimento de algum conceito que os alunos não tenham compreendido.

Com relação aos alunos, buscou-se oportunizar a participação dos mesmos na construção dos conceitos, e, ainda, auxiliar no desenvolvimento de uma aprendizagem que relacione os conhecimentos matemáticos a situações práticas, onde aprendem a organizar as suas ideias, aplicando os conhecimentos que já possui e os desenvolvidos em sala de aula, sendo o mais importante deste estudo de pesquisa em questão, onde o acadêmico no processo de buscar uma melhor solução para o problema, coloca em ação a sua criatividade, explorando assim o seu pensamento, inferência e percepção.

Com base a essa proposta que se insere ao objetivo desta pesquisa, denota-se o que é realmente esperado, em que o aluno do Ensino Superior, resolva os problemas práticos com conceitos que estão fundamentados pelo cálculo, fazendo assim um estudo aprofundado sobre as situações problemas, e que o mesmo desperte na sua consciência a importância, do porquê das demonstrações, demonstrações estas que o fazem entender e compreender o significado do problema, estando assim preparados em um certo futuro, de serem capazes de explicar as soluções para se resolver um problema de Cálculo, adquirindo assim um interesse investigativo em habilidades matemáticas, essenciais a sua caminhada profissional.

Se destaca também que a resolução de problemas que envolvem estes conceitos a solução destes problemas por meio de aplicações do cálculo de derivadas podem ser um fator importante e um diferencial para se resolver problemas, de modo rápido, em situações que surgem de modo rotineiro e que ensejam o uso da aplicação de estratégias, colocando o acadêmico em uma realidade diferente da tradicional, em que se exige dele empenho, dedicação e determinação.

Observou-se nesse estudo, o estímulo do acadêmico a organizar os seus pensamentos, montando assim estratégias, aplicando as várias possibilidades de situações e validando as soluções dos resultados obtidos, onde o mesmo é levado a interpretar o enunciado da questão, e a estruturando em situações descritas em que ele tenha o domínio, objetivo este que levar o acadêmico a produzir e a desenvolver conhecimentos, durante a sua resolução, novos conceitos se fazem partem aos conteúdo ou procedimentos que vão sendo evidenciados de forma que o mesmo possa revisar e aprofundar seus conhecimentos.

Além disso, como professor/pesquisador na disciplina de Matemática Aplicada, vejo que há uma viabilidade na aproximação desses conceitos com o mundo real dos acadêmicos, de forma a potencializar a aprendizagem, trazendo para os mesmos em sala de aula, esta proposta e as reflexões sobre o uso da metodologia de resolução de problemas, onde se espera despertar nos mesmos o interesse em fazer o uso em específico dessa metodologia e em elucidar distintas situações. Ao abordar essa metodologia, no Ensino Superior, entende-se que promove a discussão de conteúdos, a trocas de conhecimento entre os acadêmicos, desencadeia a curiosidade, coloca em prática o pensar/refletir e o raciocínio, trazendo benefícios para uma formação proativa acadêmica, durante o processo da busca por resolver problemas.

Entende-se que este trabalho de pesquisa servirá como um material de estudos com algumas aplicações de Cálculo Diferencial para auxiliar os alunos da graduação em Arquitetura e Urbanismo, e por conseguinte, ampliar os seus conhecimentos em relação ao Cálculo Diferencial, contribuindo para a formação acadêmica e para o desenvolvimento dos seus conhecimentos.

A pesquisa configurou-se como essencial para a futura formação destes acadêmicos, visto primeiramente no que se refere sobre a metodologia de ensino e aprendizagem para a resolução de problemas, pois, foi na pesquisa que se efetivou um aprofundamento teórico e prático com relação aos mesmos, pois observou-se as suas potencialidades, equívocos e fragilidades, possibilitando com isso, oportunidades de aperfeiçoamento e melhorias ou alterações nos aspectos que ensejam as soluções para se resolver as situações problemas aplicadas e discutidas em sala de aula.

Há como sugestão possível de desdobramento desta pesquisa, em que a investigação da metodologia de resolução de problemas, seja a partir da elaboração de problemas reais envolvendo a área de Arquitetura e Urbanismo.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G. **Trabalhar através da Resolução de Problemas: Possibilidades em dois diferentes contextos.** VIDYA EDUCAÇÃO, Santa Maria, v. 34, n. 1, p. 209-232 jun. 2014.

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. **Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que através da resolução de problemas**. In: ONUCHIC, L. R. et al. (org.). Resolução de problemas: teoria e prática. Jundiaí: Paco, 2014.

ARAÚJO, A. I. S. de. **Trabalhando a Resolução e Exploração de Problemas como uma Metodologia de Ensino de Matemática**. In: Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática. Anais. Recife: Grupo Lematec - Edumatec/UFPE, 2014.

ARAÚJO, J. L.; BORBA, M. C. **Construindo Pesquisas Coletivamente em Educação Matemática.** In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.) Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática, Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

ÁVILA, M. G. de. **História da Matemática e Resolução de Problemas: Uma Aliança Possível.** 185 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Luterana do Brasil, Canoas, 2004.

BARBOSA, M. A. **O insucesso no ensino e aprendizagem na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral.** 101f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2004.

BARDI, Jason Sócrates. **A guerra do cálculo: Newton, Leibniz e o maior matemático de todos os tempos**. 2ª edição. Rio de Janeiro: Record, 2010.

BARON, Margareth E. **Curso de história da matemática: origens e desenvolvimento do cálculo**. Matemática grega. Tradução de José Raimundo Braga Coelho, Rudolf Maier e Maria José M. M. Mendes. Brasília: Universidade de Brasília, 1985.

CATAPANI, E. C. **Cálculo em serviço: um estudo exploratório.** Bolema, Rio Claro, ano 14, n. 16, p. 48-62, outubro, 2001.

CERVO, A. L.; BERVIAN, P. A. **Metodologia científica**. 5. ed. São Paulo: Prentice Hall, 2002.

COSTA, S. F. **Método Científico: os caminhos da investigação**. São Paulo: Harbra, 2001.

CRESWEL, J. W. **Projeto de pesquisa: método qualitativo, quantitativo e misto.** 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2007.

DANTE, L. R. **Criatividade e resolução de problemas na prática educativa de matemática.** Rio Claro: [s.n.], Tese de Doutorado. IGCE-UNESP. 1988.

_____. **Didática da resolução de problemas de matemática**. 3. ed. São Paulo: Ática, 1991.

_____. **Didática da Resolução de Problemas da Matemática.** São Paulo: Ática, 1996.

_____. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. 2ªed. São Paulo: Ática, 1998.

_____. **Didática da Resolução de problemas de matemática. 1ª a 5ª séries**. Para estudantes do curso Magistério e professores do 1º grau. 12ª ed. São Paulo: Ática, 2003.

_____. **Matemática.** Volume 3 1ª edição 336 pág. Editora Ática. 2006.

_____. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática.** São Paulo: Ática, 2007.

_____. **Formulação e resolução de problemas de matemática: teoria e prática**. 1. Ed. São Paulo: Ática, 2009.

D'AVOGLIO, A. R. **Derivada de uma função num ponto: Uma forma significativa de introduzir o conceito**. 2002. 63 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002.

DEMO, P. **Pesquisa e construção de conhecimento**: metodologia científica no caminho de Habermas. Rio de Janeiro: Tempo Brasileiro, 1997.

DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. **Introdução: a disciplina e a prática da pesquisa qualitativa.** In: DENZIN, N. K. e LINCOLN, Y. S. (Orgs.). O planejamento da pesquisa qualitativa: teorias e abordagens. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2006. p. 15-41.

ECHEVERRÍA, M. del P. P. **A Solução de Problemas em Matemática. In: POZO, J. I. A Solução de Problemas**: Aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: Artmed, 1998. p. 43-65.

ECHEVERRÍA, M. del P. P.; POZO, J. I. **Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender**. In: POZO, J. I. A solução de problemas: Aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: Artmed, 1998.

FONSECA. M. O. S. **Proposta de Tarefas para um Estudo Inicial de Derivadas**. 101 p. Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática: Universidade Tecnológica Federal do Paraná. UTFPR. Biblioteca do Campus Londrina.Londrina.PR 2017.

FIORENTINI**,** D. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos.** 2. ed. Campinas: Autores associados, 2007.

FIRESTONE, W.A. **Meaning in method: the rethoric of quantitative and qualitative research.** P.16-21 vol. 7 n. 16 Educational Researcher. 1987.

GOLDSTEIN, L. J.; LAY, D. C.; SCHNEIDER, D. I. **Matemática Aplicada.** 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2006.

HOMA, A. I. R. **Avaliação Diagnóstica Auxiliada por Computador: Identificação das Dificuldades dos Alunos dos Cursos de Engenharia na Resolução de Problemas com Derivadas**. 2014 p. Tese de Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática. Universidade Luterana do Brasil. UBRA. Canoas. RS. 2018.

LEMKE, R. **Funções Reais de Duas Variáveis e Geogebra: Um Livro Dinâmico para o Ensino de Cálculo.** 190 p. Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias. Universidade do Estado de Santa Catarina – UDESC., http://www.udesc.br/bibliotecauniversitaria. Joinville. SC. 2017.

LINO, M. A. Os registros de representação semiótica na aprendizagem de derivada. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, Bahia, 2015.

LOPES, V. R. **Aprendizagem em um Ambiente Construcionista:** explorando conhecimentos de Cálculo I em espaços virtuais. 152 p. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. UFMS. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Campo Grande 2015.

LUPINACCI, M. L. V; BOTIN, M. L. M. **Resolução de problemas no ensino de matemática**. Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática, Recife, 2004.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986.

MARCONI, M. de A.; LAKATOS, E. M. **Fundamentos de metodologia científica**. 7. ed. São Paulo: Atlas, 2010.

MARTINS JÚNIOR. J. C. M. **Ensino de Derivadas em Cálculo I: Aprendizagem a partir da Visualização com o uso do Geogebra.** 123 p. Dissertação de Mestrado Profissional em Educação Matemática: Universidade Federal de Ouro Preto. UFOP, Ouro Preto Biblioteca Depositária: Repositório Institucional da UFOP. Ouro Preto. MG. 2015.

ONUCHIC, L. de L. R. ***Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas*****.** In: BICUDO, M. A. V. (Org.). Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas. p. 199-218. São Paulo: Unesp, 1999.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. **Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas**. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org.) Educação Matemática: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004.

OLIVEIRA, M. M. **Como fazer pesquisa qualitativa.** 3 ed. Revista e ampliada. Petrópolis, RJ: Vozes, 2010.

_____. **Como fazer pesquisa qualitativa.** 5. ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2013.

PINTO, G. T. D. C. **Limite de função real no ensino médio: uma proposta para o seu**

Ensino e aprendizagem. 171p. Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática- Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais- PUC/MG, Belo Horizonte, 2010.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.
_____. **A arte de resolver problemas**. Primeira reimpressão. Tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de janeiro: Interciências, 1986. 179 p.

_____. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

_____. **A arte de resolver Problemas**: um novo aspecto do método matemático. Editora Interciência. Rio de Janeiro-RJ, 2006.

_____. **Dez mandamentos para professores**. Revista do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, v.10, p. 2-10, 1987. Disponível em: https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/2/1/dez-mandamentos-para-o-professor Acesso em: 9 jan. 2021.

MACEDO, L. R. D.; CASTANHEIRA, N. P.; ROCHA, A. **Tópicos de matemática aplicada**. Curitiba. Ibpex, 2006.

MINAYO, Maria Cecília de Souza. **O desafio do conhecimento.** São Paulo: Hucitec, 2001.

MOREIRA, D. A. **O método fenomenológico na pesquisa**. São Paulo: Pioneira Thompson, 2003.

RACHELLI**,** J. **Compreensão dos conceitos de derivada clássica e derivada fraca: análise segundo o modelo cognitivo APOS.** 294 p. Tese de Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática Instituição de Ensino: Universidade Franciscana-UF, Santa Maria Biblioteca Depositária: Centro Universitário Franciscano. 2017.

REZENDE, W. M. **O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica**. Tese de Doutorado. São Paulo: FE-USP, 2003.

RICHARDSON, R. J. **Pesquisa social: métodos e técnicas**. São Paulo: Atlas, 1999.

ROSSI, M. I. **A aprendizagem das aplicações das integrais indefinidas em equações diferenciadas através da resolução de problemas**. 141 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2012.

RUSSO. C. L. **A Simbologia na História do Cálculo**. 64 p. Trabalho de Conclusão de Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia. IFSP– Campus São Paulo, como requisito para obtenção do título de licenciada em Matemática. 2017.

SCHROEDER, T. L.; LESTER JR, F. K. **Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving**. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (ed.). New Directions for Elementary School Mathematics. Reston: NCTM, 1989.

SANTANA, A. M. Universidade Federal de Rondônia. **Aplicação das Derivadas**. 2010. Disponível em:http://www.dmejp.unir.br/menus_arquivos/1787_anderso_marcolino.pdf. Acessado em 05 ago. 2020.

SANTOS, W C. **As ideias envolvidas na gênese do Teorema Fundamental do Cálculo, de Arquimedes a Newton e Lebninz.** 102 p. Dissertação de Mestrado em Ensino da Matemática, pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. PUC/SP. 2011.

SILVEIRA, J. F. P. **O que é matemática?** 2001. Disponível em: http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/resu1.html Acesso em: 12 Dez. 2020.

SOUZA, D. B. **O ensino de Noções de Cálculo Diferencial e Integral por meio da aprendizagem baseada em Problemas**. 159 p. Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática. Instituto Federal de Educação, Ciência Tecnologia de São Paulo. IFSP. São Paulo, 2016.

STEWART, J. **Cálculo** – Vol. 1. 7.ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

VIEIRA, M. M. F; ZOUAIN, D. M. Pesquisa qualitativa em administração: teoria e prática. Rio de Janeiro: Editora FGV, 2005.

VILLARREAL, M. E. **Pensamento Matemático de Estudantes Univesitários de Cálculo e Tecnologias Informáticas.** Tese (Doutorado em Educação Matemática), UNESP, Rio Claro, 1999.

WAIDEMAN, A. C. **Um aplicativo para o estudo de derivadas**. 173p. Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática: Universidade Tecnológica Federal do Paraná. UTFPR, Biblioteca Depositária: Biblioteca do Campus Londrina, 2018.

WEIGAND, H. G. **A discrete approach to the concept of derivative**: ZDM Mathematics Education, jun. 2014.

ZUIN, E. S. L. **Cálculo: uma abordagem histórica.** In: LAUDARES, J. B.; LACHINI, J. (Orgs.). Educação Matemática: a prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo. p. 13-36. Belo Horizonte: FUMARC, 2001.

APÊNDICES

APÊNDICE A - QUESTIONÁRIO INICIAL

01 – Qual a sua Idade: ---

02 – Qual o seu Sexo: ( ) F ; ( ) M

03- Qual o seu Semestre: --

04 - Você trabalha? Qual a sua área de atuação?

----

05 - Você tem dificuldades em cálculos matemáticos? Quais conteúdos?

----

06 - Você considera importante o conhecimento matemático para sua área de atuação? Justifique.

----

07 - Você conhece alguma aplicação dos cálculos matemáticos na sua futura área de atuação? Cite dois exemplos?

----

08 - Você aplica os conhecimentos matemáticos no seu dia a dia? Cite dois exemplos

----

09 – Quantas vezes você já reprovou em Matemática Aplicada.

A ( ) 01 vez ; B ( ) 02 vezes ; C (   ) Nenhuma

APÊNDICE B - QUESTIONÁRIO FINAL

01 - O que você acha ou achou de trabalhar com os conteúdos matemáticos relacionados à sua área de atuação em Arquitetura e Urbanismo? Justifique.

----

02 – Houve algum cálculo na Aplicação da Matemática Aplicada que você teve maior dificuldade? Quais foram às dificuldades encontradas.

03– As aulas permitiram maior interação em Sala de Aula no desenvolvimento dos Cálculos da Matemática Aplicada? Justifique.

ANEXOS

ANEXO A - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

ULBRA CENTRO UNIVERSITÁRIO LUTERANO DE JI-PARANÁ

Recredenciado pela Portaria Ministerial nº 3.950, de 30/12/02, D.O.U. nº 252, de 31/12/02

ASSOCIAÇÃO EDUCACIONAL LUTERANA DO BRASIL

Convidamos o (a) Sr (a) ou seu filho(a) para participar da Pesquisa

Título: RESOLVENDO PROBLEMAS NA DISCIPLINA DE MATEMÁTICA APLICADA NO CURSO DE ARQUITETURA E URBANISMO DO CEUJI DE JI-PARANÁ / RO

Objetivo: O objetivo geral dessa pesquisa é investigar as contribuições da utilização da metodologia de resolução de problemas na disciplina de Matemática Aplicada do curso de Arquitetura e Urbanismo, visando a formação integral do estudante relacionando a teoria a situações práticas.

Procedimentos: Será aplicado um questionário

Dos desconfortos e dos riscos**:** Os possíveis riscos que podem ocorrer são: quebra acidental de confidencialidade e eventuais constrangimentos dos participantes, podendo os mesmos desistir da atividade proposta a qualquer momento.

Dos benefícios**:** Espera-se que o participante adquira um conhecimento matemático relacionado à sua futura área de atuação, favorecendo o estabelecimento da teoria relacionada à prática.

Reconheço que tenho liberdade de recusar a continuar ou de retirar meu consentimento em qualquer momento, sem penalização alguma. Sei que posso buscar, junto ao (à) coordenador (a) do projeto, esclarecimentos de qualquer natureza, inclusive os relativos à metodologia de trabalho. Os responsáveis pela pesquisa garantem o sigilo que assegure a privacidade dos sujeitos quanto aos dados confidenciais envolvidos na pesquisa. Tenho ciência de que as atividades são sempre registradas e podem ser utilizadas para fins científicos, como publicações e participações em congressos, nos limites da ética e do proceder científico íntegro e idôneo – e de que a minha participação nesta pesquisa é completamente isenta de qualquer ônus financeiro. Caso eu venha a ter qualquer despesa decorrente da minha participação nesta pesquisa, serei imediatamente ressarcido mediante a devolução dos valores despendidos. O (A) pesquisador (a) responsabiliza-se por reparar danos eventuais associados e/ou decorrentes da pesquisa, sejam eles imediatos ou tardios, inclusive no que diz respeito às indenizações. Sei que meu nome ou o material que indique minha participação não será liberado sem minha permissão e que os dados e instrumentos utilizados na pesquisa ficarão arquivados com o pesquisador responsável por um período de 5 anos, e após esse tempo serão destruídos.

Para qualquer outra informação, o (a) Sr (a) poderá entrar em contato com o pesquisador pelo Tel. 069-98114-9029 ou poderá entrar em contato com o Comitê de Ética em Pesquisa – CEP/CEULJI/ULBRA, na sala 001 prédio C, telefone (69) 34163136 e-mail comiteeticaceulji@ulbra.br

Consentimento Pós–Informação

Eu,____fui informado sobre o que o pesquisador quer fazer e porque precisa da minha colaboração, ou de meu filho (a) ____ e entendi a explicação. Por isso, eu concordo em participar do projeto, sabendo que não vou ganhar nada e que posso sair quando quiser. Este documento é emitido em duas vias que serão ambas assinadas por mim e pelo pesquisador, ficando uma via com cada um de nós.

____

Assinatura do participante e RG

____

Assinatura do pesquisador responsável

Cidade, _____/_________/_____

ANEXO B - CARTA DE ACEITE DO LOCAL DE REALIZAÇÃO DA PESQUISA

ULBRA **CENTRO UNIVERSITÁRIO LUTERANO DE JI-PARANÁ**

ASSOCIAÇÃO EDUCACIONAL LUTERANA DO BRASIL

Ji-Paraná /RO, 12 de janeiro de 2018

Ao Comitê de Ética em Pesquisa em Seres Humanos da ULBRA/RS

Prezados Senhores

Declaro que tenho conhecimento e autorizo a realização do projeto de pesquisa intitulado **"RESOLVENDO PROBLEMAS NA DISCIPLINA DE MATEMÁTICA APLICADA NO CURSO DE ARQUITETURA E URBANISMO DO CEUJI DE JI-PARANÁ / RO"** proposto pelo(s) pesquisador (es) Clarissa de Assis Ogin e Nilton de Araújo Ribeiro.

O referido projeto será realizado (a) no **Centro Universitário Luterano de Ji-Paraná - RO**, e só poderá ocorrer a partir da apresentação do Parecer do Colegiado de aprovação do Comitê de Ética em Seres Humanos da ULBRA/RS.

Atenciosamente

Nadine Lessa

Coordenadora do Curso de Arquitetura e Urbanismo - CEUJI-ULBRA

ANEXO C - PARECER DO COMITÊ DE ÉTICA

CENTRO UNIVERSITÁRIO
LUTERANO DE JI-
PARANÁ/ULBRA/RO

PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP

DADOS DO PROJETO DE PESQUISA

Título da Pesquisa: RESOLVENDO PROBLEMAS NA DISCIPLINA DE MATEMÁTICA APLICADA NO CURSO DE ARQUITETURA E URBANISMO DO CEUJI DE JI-PARANÁ / RO

Pesquisador: NILTON DE ARAUJO RIBEIRO

Área Temática:

Versão: 3

CAAE: 83252318.4.0000.5297

Instituição Proponente: Centro Universitário Luterano de Ji-Paraná/ULBRA/RO

Patrocinador Principal: Financiamento Próprio

DADOS DO PARECER

Número do Parecer: 2.757.299

Apresentação do Projeto:

A resolução de problemas é uma metodologia que intensifica e dinamiza o processo de ensino e aprendizagem, propiciando assim uma união de saberes e conceitos na busca de uma solução, na qual oaluno aprende e compreende conceitos matemáticos ao longo do processo da resolução, além de verificar se as suas interpretações para a resolução do cálculo foram satisfatórias ou não. A resolução de problemas visa o desenvolvimento e a aplicação do raciocínio, podendo incentivar os alunos para o estudo da Matemática, na qual o processo de ensino e aprendizagem pode ser desenvolvido através de desafios, problemas interessantes ou relevantes que possam ser explorados e não apenas resolvidos. a resolução de problemas, em sala de aula, propicia um ambiente de motivação, bem como se apresenta como uma alternativa para envolver o aluno em processos elaborados de pensamento entre o raciocinar e o calcular. Nessa perspectiva, a resolução de problemas objetiva ensinar, aprender e avaliar o conhecimento matemático desenvolvido pelos alunos, sob a orientação e coordenação do professor, tendo uma forma de se ensinar e aprender de modo contínuo, ou seja, o aluno é atuante durante todo o processo, pois, em meio ao problema, ele deve apresentar-se como responsável pela construção do seu próprio conhecimento.

Objetivo da Pesquisa:

O problema dessa investigação está pautado em verificar: quais as possibilidades e desafios na

Endereço: Av Engenheiro Manfredo Barata Almeida da Fonseca 762
Bairro: Jardim Aurélio Bernardi **CEP:** 76.900-000
UF: RO **Município:** JI-PARANA
Telefone: (69)3416-3136 **Fax:** (69)3416-3131 **E-mail:** comiteeticaceulji@ulbra.br

utilização da metodologia de resolução de problemas com os alunos da disciplina de Matemática Aplicada do curso de Arquitetura e Urbanismo. O objetivo geral dessa pesquisa é investigar as contribuições da utilização da metodologia de resolução de problemas na disciplina de Matemática Aplicada do curso de Arquitetura e Urbanismo, visando a formação integral do estudante relacionando a teoria a situações práticas. Para atingir o objetivo geral dessa pesquisa, entende-se necessário estabelecer os seguintes objetivos específicos, sendo eles:

• Investigar a metodologia de resolução de problemas;
• Pesquisar sobre Educação Matemática Crítica;
• Pesquisar e elaborar situações problemas envolvendo assuntos da área do curso de Arquitetura e Urbanismo relacionados aos conteúdos matemáticos desenvolvidos na disciplina de Matemática Aplicada;
• Investigar as contribuições e limitações das atividades propostas.

Avaliação dos Riscos e Benefícios:
Todos bem avaliados.

Comentários e Considerações sobre a Pesquisa:
Importante para a área.

Considerações sobre os Termos de apresentação obrigatória:
Todos bem apresentados.

Recomendações:
Apresentar relatório semestralmente e ao final de acordo com o caso.

Conclusões ou Pendências e Lista de Inadequações:
Sem pendências.

Considerações Finais a critério do CEP:
Parecer aprovado.

Este parecer foi elaborado baseado nos documentos abaixo relacionados:

Tipo Documento	Arquivo	Postagem	Autor	Situaçã
Informações Básicas do Projeto	PB_INFORMAÇÕES_BÁSICAS_DO_PROJETO_1067431.pdf	20/06/2018 17:32:21		Aceito
TCLE / Termos de Assentimento /	TCLEFINAL.docx	20/06/2018 17:30:33	NILTON DE ARAUJO RIBEIRO	Aceito

Justificativa de Ausência	TCLEFINAL.docx	20/06/2018 17:30:33	NILTON DE ARAUJO RIBEIRO	Aceito
Outros	novafolharosto.pdf	16/05/2018 17:10:22	NILTON DE ARAUJO RIBEIRO	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	tclenovo.pdf	11/05/2018 18:11:08	NILTON DE ARAUJO RIBEIRO	Aceito
Outros	questionarios.pdf	11/05/2018 18:08:42	NILTON DE ARAUJO RIBEIRO	Aceito
Folha de Rosto	pagina0001.pdf	24/01/2018 14:53:09	NILTON DE ARAUJO RIBEIRO	Aceito
Projeto Detalhado / Brochura Investigador	PROJETO.pdf	24/01/2018 14:44:09	NILTON DE ARAUJO RIBEIRO	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	DOC.docx	24/01/2018 14:41:54	NILTON DE ARAUJO RIBEIRO	Aceito
Declaração de Instituição e Infraestrutura	DOC.pdf	24/01/2018 14:40:48	NILTON DE ARAUJO RIBEIRO	Aceito

Situação do Parecer:
Aprovado

Necessita Apreciação da CONEP:
Não

JI-PARANA, 05 de Julho de 2018

Assinado por:
Susana Maria Mana de Aráoz
(Coordenador)

Endereço: Av Engenheiro Manfredo Barata Almeida da Fonseca 762
Bairro: Jardim Aurélio Bernardi **CEP:** 76.900-000
UF: RO **Município:** JI-PARANA
Telefone: (69)3416-3136 **Fax:** (69)3416-3131 **E-mail:** comiteeticaceulji@ulbra.br