UNIVERSIDADE LUTERANA DO BRASIL

DIRETORIA ACADÊMICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

SEQUÊNCIA DIDÁTICA ELETRÔNICA NO GOOGLE CLASSROOM: UMA PROPOSTA SOBRE FUNÇÕES EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA

RAFAEL JONATAN PERTILE

Canoas, 2021

UNIVERSIDADE LUTERANA DO BRASIL
DIRETORIA ACADÊMICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

RAFAEL JONATAN PERTILE

SEQUÊNCIA DIDÁTICA ELETRÔNICA NO GOOGLE CLASSROOM: UMA PROPOSTA SOBRE FUNÇÕES EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós- Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil, como requisito à obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Carmen Teresa Kaiber

Canoas, 2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação – CIP

P469s Pertile, Rafael Jonatan.
Sequência didática eletrônica no Google Classroom : uma proposta sobre funções exponencial e logarítmica / Rafael Jonatan Pertile. – 2021.
160 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Luterana do Brasil, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Canoas, 2021.
Orientadora: Profa. Dra. Carmen Teresa Kaiber.

1. Educação matemática. 2. Sequência didática eletrônica. 3. Função exponencial. 4.Função logarítmica. 5. Estudos de recuperação. I. Kaiber, Carmen Teresa. II. Título.

CDU 372.851

Bibliotecária responsável – Heloisa Helena Nagel – 10/981

RAFAEL JONATAN PERTILE

SEQUÊNCIA DIDÁTICA ELETRÔNICA NO GOOGLE CLASSROOM: UMA PROPOSTA SOBRE FUNÇÕES EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA

Linha de pesquisa: Ensino e Aprendizagem em Ciências e Matemática

Dissertação apresentada no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Data de Aprovação: 17/08/2021

BANCA EXAMINADORA

Prof(a). Dr(a). Valmir Ninow
Colégio Estadual Senhora de Loudes

Prof(a). Dr(a). Marlise Geller
Universidade Luterana do Brasil – ULBRA

Prof(a). Dr(a). Claudia Lisete Oliveira Groenwald
Universidade Luterana do Brasil – ULBRA

Prof(a). Dr(a). Carmen Teresa Kaiber (Orientador(a))
Universidade Luterana do Brasil – ULBRA

AGRADECIMENTOS

Agradeço, em primeiro lugar, a Deus, por ter permitido a minha existência e abençoado meus passos até chegar aqui.

À minha família, pelo apoio nesta etapa da minha vida e a compreensão que tiveram nos momentos em que não pude estar presente. Agradeço, em especial, aos meus pais Ivanor e Maria, meus irmãos Maicon e Alex e minha namorada Daiane, pela paciência e por estar sempre ao meu lado, apoiando-me.

À minha orientadora, professora Carmen Teresa Kaiber, pela amizade, dedicação, paciência e sabedoria que sempre disponibilizou para a realização deste trabalho.

Aos colegas do grupo de pesquisa, pelas discussões e auxílio em todas as etapas da pesquisa.

Aos funcionários e professores do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECIM) – ULBRA, que desempenharam um papel fundamental em minha formação acadêmica e pessoal.

Aos colegas do PPGECIM, pelos conhecimentos compartilhados, trabalhos e estudos realizados e, especialmente, pelas grandes amizades construídas.

Aos professores participantes da investigação, pelo apoio e comprometimento que disponibilizaram.

À banca examinadora, formada pelo professor Doutor Valmir Ninow e professoras Doutoras Claudia Lisete Oliveira Groenwald e Marlise Geller, pelas considerações realizadas para o aprimoramento do trabalho.

Agradeço, também, à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela oportunidade de desenvolver este trabalho como bolsista.

RESUMO

Apresenta-se, aqui, um estudo que tem por objetivo investigar a organização de uma Sequência Didática Eletrônica disponível no Google Classroom, com foco no trabalho com Funções Exponencial e Logarítmica, para o desenvolvimento de estudos de recuperação de alunos que apresentem dificuldades sobre o tema. A investigação foi desenvolvida em uma perspectiva qualitativa e envolveu o a estruturação de um conjunto de testes de conhecimentos sobre o tema e o desenvolvimento uma sequência didática abordando os objetos de conhecimento referente a funções exponencial e logarítmica, buscando disponibilizar a alunos e professores um material que atendesse às necessidades de aprendizagem. A pesquisa foi desenvolvida em três etapas, considerando os aportes da Investigação Baseada no Design (IBD), que são: estudo preliminar, design da trajetória didática, implementação da trajetória didática e avaliação ou análise retrospectiva. Assim, na primeira etapa foi desenvolvida uma análise de um conjunto de livros didáticos tendo como foco o estudo de Funções e analisados documentos oficiais sobre o que dizem a respeito do trabalho com Funções. Na segunda etapa, foi desenvolvida a Sequência Didática Eletrônica e implementada na plataforma Google Classroom, sendo composta por seis módulos: Propriedades das Potencias, Função Exponencial, Equação e Inequação Exponencial; Propriedades dos Logaritmos, Função Logarítmica e Equação e Inequação Logarítmica. Em cada módulo há Testes de Conhecimentos e as Sequências Didáticas para estudos. Os Testes de Conhecimentos proporcionam aos estudantes situações que buscam identificar o quanto tem entendimento ou domina o assunto do módulo. A ideia é o estudante utilizar o teste como um caminho para reflexão e identificação de suas dificuldades ou necessidades em relação aos temas estudados. Já as Sequências Didáticas têm por função proporcionar um ambiente para o estudo das noções, conceitos e procedimentos dos temas envolvidos, os quais os estudantes não tenham se apropriado adequadamente quando do desenvolvimento desses. Na sua organização foram utilizados materiais de estudos, vídeo aulas e quizzes, para o aluno desenvolver os conceitos trabalhados em cada módulo. Os materiais de estudos foram construídos no Power Point, visando integrar tanto o uso das Tecnologias Digitais, por meio de objetos de aprendizagem, vídeos explicativos, uso do software GeoGebra através de animações, como também, atividades de construção, manipulação e por fim, resolução de atividades. Na terceira etapa, a Sequência Didática Eletrônica produzida foi analisada por um grupo de professores de Matemática para verificação da sua adequação ao objetivo proposto, seguindo um protocolo de análise constituído. A partir dessa análise, destaca-se que: a questão da contextualização do conteúdo, onde são trazidos elementos os quais possibilitam ao aluno associar com a vida real, a linguagem utilizada ao longo do trabalho, sendo acessível e adequada, a presença dos conceitos necessários para a abordagem dos conteúdos propostos, os quizzes apresentados no final de cada Sequência Didática como sendo algo diferente e bom para o aluno foram considerados como os principais pontos positivos. Também se constatou que as questões epistêmicas da Sequência Didática foram bem avaliadas apontando que a mesma aborda os objetos de conhecimento de forma adequada, com situação de contextualização e resolução de problemas, apresentando-os os objetos sob diferentes formas de representação. Porém, argumentos e relações e mesmo de linguagens (referente as representações) precisam ser ampliados.

Palavras-chave: Educação Matemática. Sequência Didática Eletrônica. Função Exponencial. Função Logarítmica. Estudos de Recuperação.

ABSTRACT

We present here a study that aims to investigate the organization of an Electronic Didactic Sequence available on Google Classroom, with a focus on working with Exponential and Logarithmic Functions, for the development of recovery studies for students who have difficulties on the subject. The investigation was developed from a qualitative perspective and covered the structure of a set of knowledge tests on the subject and the development of a didactic sequence addressing the knowledge objects related to exponential and logarithmic functions, looking for making available to students and teachers a material that would attend for learning needs. The research was developed in three stages, considering the contributions of the Design Based Investigation (IBD), which are: preliminary study, design of the didactic trajectory, implementation of the didactic trajectory and evaluation or retrospective analysis . So, in the first stage, an analysis of a set of textbooks was developed, focusing on the study of Functions and analyzing official documents about what they say about working with Functions. In the second stage, the Electronic Didactic Sequence was developed and implemented on the Google Classroom platform, composed by six modules: Properties of Potentials, Exponential Function, Equation and Exponential Inequation; Properties of Logarithms, Logarithmic Function and Equation and Logarithmic Inequation. In each module there are Knowledge Tests and Didactic Sequences for studies. The Knowledge Tests provide students with situations that look for identify how much they understand or master the subject of the module. The idea is that the student use the test as a way for reflection and identification of their difficulties or needs regarding the topics studied. The Didactic Sequences, on the other hand, have the function of providing an environment for the study of the notions, concepts and procedures of the themes involved, which students have not appropriately acquired when developing these. In its organization, study materials, video classes and quizzes were used, for the student to develop the concepts worked on in each module. The study materials were built in Power Point, aiming to integrate both the use of Digital Technologies, through learning objects, explanatory videos, use of GeoGebra software through animations, as well as construction activities, manipulation and finally, resolution of activities. In the third stage, the Electronic Didactic Sequence produced was analyzed by a group of Mathematics teachers to verify its adequacy to the proposed objective, following a constituted analysis protocol. From this analysis, it is highlighted that: the issue of contextualization of the content, where elements are brought that allow the student to associate with real life, the language used throughout the work, being accessible and adequate, the presence of the necessary concepts for the approach of the proposed contents, the quizzes presented at the end of each Didactic Sequence as something different and good for the student were considered as the main positive points. It was also found that the epistemic issues of the Didactic Sequence were well evaluated, pointing out that it adequately addresses the objects of knowledge, with a situation of contextualization and problem solving, presenting the objects under different forms of representation. However, arguments and relationships and even languages (regarding representations) need to be expanded.

Keywords: Mathematics Education. Electronic Didactic Sequence. Exponential Function. Logarithmic Function. Recovery Studies.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1- Placa de Larsa 27
Figura 2- Investigações na Área 31
Figura 3- Níveis de análise propostos pelo EOS 41
Figura 4- Componentes e Indicadores Epistêmicos (Ferramenta de Análise Epistêmica) 43
Figura 5- Ferramenta de Análise Cognitiva (FAC) 45
Figura 6- Ferramenta de Análise Ecológica (FAECO) 46
Figura 7- Ferramenta de Análise Emocional (FAEMO) 46
Figura 8- Ferramenta de Análise Interacional (FAI) 47
Figura 9- Ferramenta de Análise Mediacional (FAM) 47
Figura 10– Dimensões da Idoneidade Didática: esquema de análise 48
Figura 11- Fases da Investigação 51
Figura 12 –Conceito de Função 58
Figura 13- Definição de Função 58
Figura 14- Gráfico de uma Função 59
Figura 15- Construção de Gráfico 59
Figura 16- Crescimento Populacional 60
Figura 17- Uso de planilha eletrônica 61
Figura 18- Exercícios resolvidos 61
Figura 19- Situação contextualizada 62
Figura 20- Gráfico da Função Exponencial 62
Figura 21- Exercício resolvido- Função Exponencial 63
Figura 22- Aplicações da Função Exponencial 63
Figura 23- Exercícios Complementares 64
Figura 24- Retomada de Conceitos 64
Figura 25- Crescimento bacteriano 65
Figura 26- Exercícios Propriedade dos Logaritmos 66
Figura 27- Exercícios Função Logarítmica 66
Figura 28- Construção de Gráficos da Função Logarítmica 67
Figura 29- Exercícios Função Logarítmica 67
Figura 30- Equações Logarítmicas 68
Figura 31- Autoavaliação 69
Figura 32- Geólogo analisando rochas e arqueólogo escavando fósseis 70
Figura 33- Tarefa para introduzir o conceito emergente 71
Figura 34- Contextualização: juros compostos 71
Figura 35- Exercícios manipulação em duplas 72
Figura 36- Exemplo de notação científica e exercício para escrever na notação científica contextualizada 73
Figura 37- Definição de Função Exponencial, propriedades e exemplos 73
Figura 38- Exercícios de manipulação e exercícios para resolver 74
Figura 39- Conclusões sobre o gráfico de função exponencial 74
Figura 40- Considerações sobre o gráfico de função exponencial 74
Figura 41- Construção de gráfico usando o GeoGebra 75
Figura 42- Exercícios propostos em dupla de equação exponencial e inequação exponencial 75
Figura 43- Atividades em Duplas- Introdução aos Logaritmos 76
Figura 44- Introdução aos Logaritmos 76

Figura 45- Definição de Logaritmo 77
Figura 46- Exercícios resolvidos- Logaritmos 77
Figura 47- Exercícios- Propriedade dos Logaritmos 78
Figura 48- Definição da Função Logarítmica 79
Figura 49- Gráfico da Função Logarítmica 79
Figura 50- Análise do Gráfico da Função Logarítmica 79
Figura 51- Relação do Gráfico da Função Logarítmica e da Função Exponencial 80
Figura 52- Exercício resolvido- Inequação Logarítmica 81
Figura 53- Questões de vestibular 82
Figura 54- Organização da Sequência Didática Eletrônica no Classroom 85
Figura 55- Estrutura da Sequência Didática Eletrônica 86
Figura 56- Quadro sobre os objetivos de cada Módulo 89
Figura 57- Questão referente ao Módulo I- Nível Fácil 91
Figura 58- Questão referente ao Módulo IV- Nível Médio 92
Figura 59- Questão referente ao Módulo II- Nível Difícil 93
Figura 60- Parte das Lâminas do Módulo I 95
Figura 61- Quiz Módulo I 97
Figura 62- Parte das Lâminas do Módulo II 98
Figura 63- Parte do Quiz do Módulo II 99
Figura 64- Parte das Lâminas do Módulo III 101
Figura 65- Parte do Quiz do Módulo III 101
Figura 66- Parte das Lâminas do Módulo IV 103
Figura 67- Parte do Quiz do Módulo IV 104
Figura 68- Parte das Lâminas do Módulo V 105
Figura 69- Parte do Quiz do Módulo VI 106
Figura 70- Parte das Lâminas do Módulo VI 108
Figura 71- Parte das Lâminas do Módulo VI 109
Figura 72- Esquema da análise da Sequência Didática Eletrônica 112
Figura 73- Diferentes idades dos participantes 113
Figura 74- Idades dos participantes da pesquisa 113
Figura 75- Diferentes níveis de ensino de atuação dos participantes 114
Figura 76- Atuação atual dos participantes 114
Figura 77- Conhecimento/ domínio sobre Tecnologias Digitais para uso em sala de aula 115
Figura 78- Tecnologias Digitais na prática docente 116
Figura 79- Aplicativos ou *softwares* usados para o ensino de Funções 117
Figura 80- Instrumento de Avaliação sobre os Módulos de estudo 119
Figura 81- Instrumento de Avaliação sobre os Testes de Conhecimentos 119
Figura 82- Instrumento de Avaliação sobre a Sequência Didática Eletrônica em geral 120
Figura 83- Avaliação Módulo I – questões 1 a 6 121
Figura 84- Avaliação Módulo I- questões 7 a 12 122
Figura 85- Avaliação Módulo I - Teste de Conhecimento 123
Figura 86- Avaliação Módulo II- questões 1 a 6 124
Figura 87- Avaliação Módulo II- questões 7 a 12 125
Figura 88- Avaliação Módulo II- Teste de Conhecimento 126
Figura 89- Avaliação Módulo III- questões 1 a 6 127
Figura 90- Avaliação Módulo III- questões 7 a 12 128
Figura 91- Avaliação Módulo III- Teste de Conhecimento 129
Figura 92- Avaliação Módulo IV- questões 1 a 6 130

Figura 93- Avaliação Módulo IV- questões 7 a 12 131
Figura 94- Avaliação Módulo IV- Teste de Conhecimento 132
Figura 95- Avaliação Módulo V- questões 1 a 6 133
Figura 96- Avaliação Módulo V- questões 7 a 12 134
Figura 97- Avaliação Módulo V- Teste de Conhecimento 135
Figura 98- Avaliação Módulo VI- questões 1 a 6 136
Figura 99- Avaliação Módulo VI- questões 7 a 12 137
Figura 100- Avaliação Módulo VI- Teste de Conhecimento 138
Figura 101- Instrumento de Avaliação sobre a Sequência Didática em geral 139

Sumário

INTRODUÇÃO 13

1 SOBRE A INVESTIGAÇÃO 18

1.1 OBJETIVOS 19

2 SOBRE FUNÇÕES, SEU ENSINO E APRENDIZAGEM 20

2.1 ENSINO E APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES 22

2.2 FUNÇÃO EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA 28

2.3 INVESTIGAÇÕES SOBRE O TRABALHO COM FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS 32

3 TECNOLOGIAS DIGITAIS E OS ESTUDOS DE RECUPERAÇÃO 37

3.1 ESTUDOS DE RECUPERAÇÃO 39

4 ENFOQUE ONTOSSEMIÓTICO 43

5 ASPECTOS METODOLÓGICOS 51

5.1 SOBRE O DESIGN DA TRAJETÓRIA DIDÁTICA 54

5.2 PARTICIPANTES DA INVESTIGAÇÃO E INSTRUMENTOS DE COLETA DE DADOS 55

6 AS PRIMEIRAS ANÁLISES E A SEQUÊNCIA DIDÁTICA ELETRÔNICA DAS FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS 56

6.1 PRIMEIRAS ANÁLISES: OS DOCUMENTOS OFICIAIS 56

6.2 PRIMEIRAS ANÁLISES: LIVROS DIDÁTICOS 58

6.3 A SEQUÊNCIA DIDÁTICA ELETRÔNICA: FUNÇÕES EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA 85

6.3.1 **Testes de Conhecimento** 92

6.3.2 **Sequência Didática** 95

6.3.2.1 Sequência Didática do Módulo I: Propriedades das Potências 97

6.3.2.2 Sequência Didática do Módulo II: Função Exponencial 100

6.3.2.3 Sequência Didática do Módulo III: Equação e Inequação Exponencial 102

6.3.2.4 Sequência Didática do Módulo IV: Propriedades dos Logaritmos 104

6.3.2.5 Sequência Didática do Módulo V: Função Logarítmica 107

6.3.2.6 Sequência Didática do Módulo VI: Equação e Inequação Logarítmica 109

7 ANÁLISE DE DADOS – ANÁLISE DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA NA PERSPECTIVA DE UM GRUPO DE PROFESSORES 112

7.1 PERFIL DOS PROFESSORES PARTICIPANTES DA INVESTIGAÇÃO 1143

7.2 USO DAS TECNOLOGIAS E O TRABALHO COM FUNÇÕES 117

7.3 SOBRE A SEQUÊNCIA DIDÁTICA – MÓDULOS E OS RESPECTIVOS TESTES DE CONHECIMENTOS 120

7.3.1 Módulo I- Propriedades das Potências e Testes 1262

7.3.2 Módulo II- Função Exponencial e Testes 126

7.3.3 Módulo III- Equações e Inequações Exponenciais 129

7.3.4 Módulo IV- Propriedades dos Logatirmos e Testes 12631
7.3.5 Módulo V - Função Logarítmica e Testes 1353
7.3.6 Módulo VI- Equações e Inequações Logarítmicas e Testes 12636
7.4 SOBRE A SEQUÊNCIA DIDÁTICA (GERAL) 140
7.5 EM BUSCA DE UMA SÍNTESE 14042
CONSIDERAÇÕES FINAIS 144
REFERÊNCIAS 148
ANEXOS: 154
Anexo A: Termo de Consentimento livre e Esclarecido 154
APÊNDICES 158
APÊNDICE A– INSTRUMENTO DE INVESTIGAÇÃO JUNTO AOS PROFESSORES: 158
CARACTERIZAÇÃO DO DOCENTE 158

INTRODUÇÃO

O estudo de Funções, tanto na Educação Básica como no Ensino Superior é de particular relevância. Considera-se importante, já no Ensino Fundamental, trabalhar com a ideia da existência de variáveis e da relação de dependência que pode ser estabelecida, bem como, a partir de recorrências, estabelecer uma lei matemática que a represente. De acordo com Kaiber (2002), tais noções permitem o desenvolvimento de um tipo de pensamento que, em outras áreas da Matemática não é tão bem desenvolvido, ou não está presente.

Se, no Ensino Fundamental, esses entendimentos e mesmo a formulação de relações de dependência simples, em contextos ou situações do domínio dos estudantes, são desejáveis e necessárias, no Ensino Médio, o envolvimento com modelos já mais específicos, como o cálculo de uma distância percorrida em função do tempo gasto para percorrê-la a uma determinada velocidade, surge ao se estudar diferentes situações e fenômenos que podem ser descritas por meio de relações e funções. Já no Ensino Superior, o estudo de Funções é basilar para todos os cursos das áreas científica e tecnológica (KAIBER, 2002).

No que se refere à aprendizagem de Funções e buscando as competências propostas para o estudo das mesmas, no Ensino Médio, é observa-se que é incentivada a abordagem do tema a partir da relação de dependência entre duas grandezas, assim como é dado ênfase à necessidade de abordá-la segundo diferentes tipos de representações, conforme posto na Base Nacional Curricular Comum (BNCC) (BRASIL, 2017).

Por outro lado, nos últimos anos, o surgimento de diferentes tecnologias voltadas para o ensino e aprendizagem tem modificado as salas de aula e a postura de professores e estudantes. Kaiber et. al. (2010) apontam que a exploração de recursos computacionais se faz necessária para que a educação cumpra seu papel, em um contexto em que a tecnologia se mostra cada vez mais presente. Os autores se mostram favoráveis à utilização desses recursos, uma vez que proporcionam aos estudantes interação com um espaço de aprendizagem diferenciado, com acesso a diferentes mídias como *softwares*, vídeos, objetos de aprendizagem, *chats*, entre outros. Tal entendimento está presente, também, na BNCC, que aponta como uma das competências gerais da educação básica o acesso, compreensão, utilização e criação de tecnologias digitais da informação e comunicação de maneira crítica e reflexiva como caminho para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva (BRASIL, 2017).

Defende-se a escolha da utilização das Tecnologias Digitais por serem um significativo recurso educacional, permitindo ao docente estabelecer condições de aprendizagem em que o discente possa raciocinar logicamente, criar, comunicar e interagir no desenvolvimento do ensino e aprendizagem, sendo sujeito ativo nesse processo (GROENWALD; MORENO, 2007).

Nesse contexto, entende-se pertinente e necessário que educadores e educandos tenham a oportunidade de experimentar a utilização das Tecnologias Digitais no ambiente escolar, o que pode se tornar um proveitoso apoio ao trabalho docente e auxiliar no desenvolvimento dos estudantes. Uma das ferramentas capazes, de proporcionar ambientes favoráveis ao ensino e à aprendizagem é uma plataforma chamada Google, o Google Classroom. É uma plataforma LMS (Learning Management System, que no Brasil, é conhecida como Ambiente Virtual de Aprendizagem) gratuita e livre de anúncios e que criado pela divisão do Google for Education, tendo como finalidade auxiliar professores, em sala de aula, aprimorando a qualidade do ensino e da aprendizagem. A ferramenta permite que os educadores publiquem atualizações e tarefas de aula, acrescentem ou excluam alunos e até mesmo forneçam feedback. Para acessar os serviços do Google Classroom, é preciso ter uma conta de e-mail associada ao Google (DAUDT, 2015).

As funcionalidades do Google Classroom, a facilidade de acesso e utilização e a possiblidade de permitir o desenvolvimento de um espaço de colaboração *online*, projetado para apoiar e completar as aulas presenciais ou até mesmo aulas a distância, foram os aspectos que influenciaram a escolha dessa plataforma para o desenvolvimento da presente investigação. Ela pode ser acessada de qualquer dispositivo que tenha acesso à Internet e tenha um navegador (*browser*), pois não necessita de instalação local e um servidor dedicado, podendo ser utilizada em smartphones.

Porém, os desafios enfrentados, pela comunidade escolar, no ano de 2020, para o desenvolvimento das atividades remotas via Classroom contribuíram para a escolha do trabalho nessa plataforma. Inicialmente a investigação tinha como foco a utilização da plataforma SIENA – Sistema Integrado de Ensino e Aprendizagem, contudo, principalmente, a facilidade de acesso e mesmo a familiaridade dos estudantes com o Classroom foram decisivos pela opção do trabalho com a mesma.

Em termos educacionais, um dos desafios que se mantém refere-se às aprendizagens em Matemática na Educação Básica que, apesar das investigações na área e das reflexões advindas do trabalho no âmbito da Educação Matemática, continua sendo um desafio para investigadores e professores. Isso porque nem sempre as aprendizagens se dão de forma satisfatória em uma primeira ação, por isso, são necessários mecanismos para que sejam oportunizados aos estudantes espaços para a recuperação de conteúdo, visto que ela permite tanto, ao aluno uma segunda chance de aprendizagem, como ao professor uma nova oportunidade para encontrar uma outra metodologia que se enquadre ao perfil do educando.

Um dos problemas recorrentes no sistema educacional está em suprir necessidades de alunos que não desenvolvem as aprendizagens entendidas como necessárias no período proposto para tal. Embora prevista em lei, a chamada recuperação de conteúdos, ou da aprendizagem, nem sempre está colocada de modo efetivo e organizado no currículo escolar. De acordo com Grossi (2008), historicamente, o sistema educacional desenvolve os estudantes de maneira homogênea, assumindo que todos são semelhantes durante o processo de aprendizagem, independente do contexto em que estão estabelecidos e ritmos de aprendizagem. Assim, entende-se pertinente o desenvolvimento de trabalhos e investigações que considerem a possibilidade de os estudantes necessitarem de estudos de recuperação para retomar e reestruturar noções, conceitos e procedimentos que não tenham sido construídos ou dos quais eles não tenham se apropriado adequadamente.

Por outro lado, argumenta-se que as Tecnologias Digitais são capazes de proporcionar ambientes propícios de serem utilizados para desenvolver um trabalho que considere o ritmo dos estudantes, suas dificuldades individuais, os contextos nos quais estão inseridos, constituindo-se em recurso o qual pode permitir um trabalho de recuperação individualizada.

Nesse contexto, a investigação aqui apresentada está vinculada à linha de pesquisa de Ensino e Aprendizagem em Ciências e Matemática do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECIM) da Universidade Luterana do Brasil (ULBRA) e tem por objetivo investigar a organização de uma Sequência Didática Eletrônica disponível no Google Classroom com foco nos temas

Função Exponencial e Função Logarítmica para o desenvolvimento de estudos de recuperação de alunos que apresentem dificuldades sobre o tema.

A opção por um trabalho com foco em Funções, mais especificamente as Exponenciais e Logarítmicas, se relaciona ao entendimento de que é um tema relevante, pois elas que expressam fenômenos de importância, tanto no âmbito do estudo formal como em aplicações no dia a dia dos indivíduos, devendo ser valorizadas no Ensino Médio, e desenvolvidas de modo que os estudantes adquiram aprendizagens significativas sobre as situações nas quais devem aplicá-las.

A investigação foi realizada em uma perspectiva qualitativa e envolveu a estruturação de um conjunto de testes de conhecimentos sobre o tema e o desenvolvimento de uma sequência didática abordando os objetos de conhecimento referentes às funções exponencial e logarítmica, buscando disponibilizar a alunos e professores um material que atendesse às necessidades de aprendizagem. Teoricamente, buscou apoio em estudos já realizados sobre o tema, nas demandas apontadas pela Base Nacional Comum Curricular e nos aportes do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (EOS).

Assim, este texto dissertativo está organizado em sete capítulos. O primeiro capítulo refere-se à contextualização da investigação, onde são destacadas as motivações e as justificativas para desenvolvê-la, bem como a questão norteadora e seus objetivos. Os três capítulos seguintes destacam aspectos teóricos que envolvem a investigação, com foco no ensino e aprendizagem de Funções, na utilização de recursos tecnológicos digitais no ensino e aprendizagem bem como na recuperação de conteúdos, além em aspectos teóricos e metodológicos do EOS pertinentes à investigação.

O quinto capítulo apresenta os procedimentos metodológicos. O capítulo seis destaca os primeiros resultados do trabalho realizado com a apresentação da Sequência Didática.

Por fim, o sétimo capítulo apresenta resultados da investigação referentes a uma avaliação realizada na Sequência Didática por parte de um grupo de professores de Matemática. O trabalho tem seu fechamento com a apresentação de considerações finais.

No que segue, são apresentados temas os quais se considera importantes de serem abordados, em termos teóricos, na investigação: Dificuldades na aprendizagem de Funções e a própria temática Funções, Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática, Funções nos documentos oficiais, Tecnologias Digitais, Recuperação de Conteúdos e levantamento de pesquisas já realizadas sobre o tema.

1 SOBRE A INVESTIGAÇÃO

A presente pesquisa surgiu de uma inquietação do pesquisador em procurar caminhos e estratégias que qualifiquem os processos de ensino e aprendizagem no Ensino Médio. Particularmente, a preocupação com as dificuldades que estudantes enfrentam, ao estudarem Funções, motivou o desenvolvimento de um trabalho com foco em um grupo de funções específicas, no caso, Funções Exponencial e Logarítmicas, tomando como base para o desenvolvimento deste estudo, que se coloca como um estudo de recuperação, a utilização de uma Sequência Didática a ser utilizada em uma plataforma digital.

A escolha pela temática de Funções, mais especificamente as Exponenciais e Logarítmicas, ocorreu pelo fato de que, entre os assuntos de Matemática apresentados e discutidos, no primeiro ano do Ensino Médio, o estudo de Funções é o que trata de conceitos que são basilares na Matemática (pensamento variacional, relação de dependência, construção de modelos). Por outro lado, a discussão permanente sobre as melhores estratégias, metodologias e recursos para o trabalho com a Matemática faz com que se busque, constantemente, um trabalho qualificado o qual permita ao estudante participar ativamente das suas aprendizagens. Tais questões seguem apresentando-se como desafios para investigadores e professores.

O foco da investigação, o qual tem como referência as Funções Exponencial e Logarítmica, não está em uma aprendizagem inicial, mas no entendimento de que, nem sempre, as aprendizagens se dão, de forma satisfatória, em um primeiro momento, o que leva à necessidade de um trabalho que disponibilize aos alunos tempos, ambientes e espaços para a retomada de estudos para que as aprendizagens sejam viabilizadas. Constitui-se, também, em oportunidade afim de que os professores e a comunidade escolar busquem recursos, metodologias e estratégias para que atendam às necessidades dos estudantes.

Os argumentos apresentados destacam a relevância do estudo de Funções e a necessidade do seu desenvolvimento, na Educação Básica, bem como a necessidade de um olhar investigativo sobre as aprendizagens. Nesse contexto, surge a problemática desta investigação: Como implementar uma sequência didática eletrônica sobre Função Exponencial e Função Logarítmica para apoiar estudos de recuperação para o Ensino Médio na perspectiva do Enfoque Ontossemiótico?

1.1 OBJETIVOS

Esta investigação, tem como objetivo geral investigar a implementação de uma sequência didática eletrônica[1] disponível no Google Classroom, com foco nas Funções Exponencial Logarítmica, para o desenvolvimento de estudos de recuperação para alunos do 1º ano do Ensino Médio que apresentem dificuldades sobre o tema[2].

Para alcançar o objetivo geral, foram traçados os seguintes objetivos específicos:

- investigar um conjunto de questões sobre Funções Exponencial e Logarítmica para compor um teste de conhecimentos a ser implementado no Google Classroom;
- investigar e selecionar metodologias, estratégias e recursos adequados ao desenvolvimento de uma sequência didática para ser implementada no Google Classroom;
- validar a sequência didática desenvolvida a partir da análise realizada por um grupo de professores de Matemática.

---

[1] A Sequência Didática Eletrônica é composta por Testes de Conhecimento e pelo que é chamado Sequência Didática (composta dos materiais de estudo, vídeos, atividades...).

[2] Destaca-se que, inicialmente, o objetivo era, além de desenvolver a sequência didática, aplicá-la junto a um grupo de estudantes do Ensino Médio do Instituto Federal de Educação de Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul *Campus* Bento Gonçalves, o que teve que ser alterado em função das medidas sanitárias impostas pela pandemia da COVID-19.

2 SOBRE FUNÇÕES, SEU ENSINO E APRENDIZAGEM

Godino, Batanero e Font (2003) declaram que toda a análise histórica mostra que a Matemática é um agrupamento de conhecimentos em constante evolução, e se desenvolve com o intuito de solucionar problemas matemáticos, tanto no âmbito da própria Matemática como em problemas aplicáveis, solucionem situações de interesse da sociedade.

Atualmente, na conceitualização de Função, são notados traços da mesma a partir da Babilônia a 2500 a. C. que, de acordo com Alvarenga, Barbosa e Ferreira (2014), falam sobre a descoberta, na Babilônia, de tábuas relacionadas à Matemática, apontando que "[...] entre as mais de meio milhão de tábuas encontradas, 400 com conteúdos apenas matemáticos, há várias com problemas sobre relações entre variáveis ou sobre relações entre números. " (ALVARENGA, BARBOSA E FERREIRA, 2014, p. 163).

Oliveira (1997) destaca que os povos babilônios, embora que já desfrutassem de parte do entendimento do que hoje se conhece como funções, ainda não conseguiam elaborar um modelo, ou seja, encontrar uma solução geral para problemas semelhantes, pois cada novo problema era uma ocasião nova. Pitágoras de Samos, em experiências com o monocórdio, notou que a dependência entre os sons emitidos com a posição na qual ele pressionava a corda. Com isso, os pitagóricos e seus estudos com o monocórdio trouxeram uma grande contribuição ao conceito de função, mostrando a interdependência de variáveis, interligando a região a qual era pressionada com a nota emitida (OLIVEIRA, 1997).

Diversos povos também contribuíram para a formação da noção que se tem de função atualmente, embora sem o conhecerem de fato. Porém, os avanços no tema se deram, segundo Caraça (2016), pela noção de que a função é um instrumento matemático indispensável para o estudo quantitativo de fenômenos naturais, os quais tiveram início com Galileu (1564-1642) e Kepler (1571-1630).

Conforme Baumgart (1992), historicamente o estudo de funções está diretamente ligado à necessidade de resolver situações e problemas oriundos da relação do homem em seu cotidiano. Segundo o autor, Galileu Galilei (1564- 1642) e Issac Newton (1642- 1727) utilizaram, em suas pesquisas, as ideias de lei de formação e dependência entre dois ou mais fenômenos, a qual condiz com o conceito de função.

O conceito de Função tem, em sua história, uma trajetória lenta e progressiva, demorando séculos para atingir a forma como se exibe presentemente. Para Zuffi (2001, p. 15), esse desenvolvimento compreende três fases:

> A Antiguidade, momento em que são verificados alguns casos de dependência entre duas quantidades, sem destacar, ainda, as noções gerais de quantidades variáveis e de funções. A Idade Média, onde visualizamos as noções funcionais expressas sob forma geométrica e mecânica, em que cada caso concreto de dependência entre duas quantidades era representado, preferencialmente, através de um gráfico ou por uma descrição verbal. E, por fim, o período Moderno, no qual começam a prevalecer expressões analíticas de funções, sendo, no final do século XVII, o momento mais intenso no desenvolvimento da noção de função, aproximando da que atualmente conhecemos. (ZUFFI, 2001, p. 15)

De acordo com Youschkevitch (1976), Gottfried Wilhelm Von Leibniz (1646-1716), foi o primeiro matemático a utilizar o termo função, como sendo qualquer parte de uma linha reta, ou seja, segmentos adquiridos pela construção de infinitas retas correspondentes a um ponto fixo e a pontos de uma determinada curva. Ainda de acordo com o autor, alguns anos mais tarde, o matemático suíço Jean Bernoulli (1667-1748) utilizou o termo função para dizer que as quantidades dependem, diretamente, de uma variável, definindo-a de maneira explicita, como expressão analítica, porém sem explicar como construir a função a partir de uma variável independente.

Segundo Boyer (1996), Leonhard Paul Euler (1707-1783) formulou diversos algoritmos e notações. Uma das suas principais formulações, é a $f(x)$, que, atualmente, é de utilização universal, para indicar a lei de uma função. Quando uma variável depende de outra mediante uma expressão analítica, diz-se que y é uma função de x.

Ainda conforme o autor, outro matemático, Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) deu uma definição formal de função a qual é muito parecida com a utilizada atualmente:

> Se uma variável y está relacionada com uma outra variável x, de tal forma que sempre que um valor numérico é atribuído a x, existe uma regra de acordo com a qual um único valor de y é determinado, então y diz-se uma função da variável independente x. (BOYER, 1996, p. 106).

Aleksandrov (1994) aponta que as definições de variáveis e função são generalizações teóricas de variáveis concretas. Velocidade, área e distância, são exemplos disso. Diversas fórmulas são expressas na forma $y = \frac{1}{2}ax^2$, podendo-se destacar a Lei da Queda dos Corpos, a qual determina que a distância, na queda, cresce ao quadrado do tempo, sendo representada na fórmula $s = \frac{gt^2}{2}$. Em relação à Matemática, para calcular a área de um triangulo retângulo, onde se tenha um ângulo α, e o lado correspondente *x*, segue-se a lei $A = \frac{1}{2}ax^2$. Porém, essas representações revelam a passagem de uma grandeza de variável concreta, para uma variável geral (x, y), o que se constitui em um grau de abstração o qual pode gerar dificuldades aos alunos, as quais serão discutidas posteriormente (ALEKSANDROV, 1994).

Nessa perspectiva, Caraça afirma que “o conceito de função nos aparece, no campo matemático, como o instrumento próprio para o estudo das leis” (CARAÇA, 2016, p.121), porém, em termos da construção do conhecimento matemático escolar, entende-se que a apropriação desse conceito, que não é trivial, deve ocorrer de forma gradual ao longo de toda a Educação Básica.

Pondera-se que o conceito de função é nuclear à construção do conhecimento matemático, sendo importante sua abordagem em todos os níveis de ensino, estando presente na busca pelo entendimento dos mais variados fenômenos. Particularmente, no Ensino Médio, além de contribuir para o desenvolvimento do pensamento variacional, o conjunto de conhecimentos sobre Funções permite ao estudante preparar-se para o Ensino Superior nas áreas científica e tecnológica. Nesse sentido, Rêgo afirma que:

> O conceito de função constitui-se, além disso, de um dos principais pré-requisitos para grande parte dos conteúdos desenvolvidos no Ensino Superior, uma vez que inúmeros problemas das Ciências Exatas, da Tecnologia, da Saúde e Ciências Sociais Aplicadas podem ser modelados e estudados utilizando-se funções de uma ou várias variáveis. (RÊGO, 2000, p.20).

Os apontamentos apresentados buscam colocar em foco não só a importância das funções para a descrição de fenômenos e solução de problemas de diferentes áreas, como também, principalmente, a importância do desenvolvimento de seu conceito, ou os diferentes aspectos que concorrem para a formação desse conceito, na construção do pensamento matemático, na Educação Básica, nas questões relacionadas ao seu ensino e aprendizagem, o que passa a ser discutido a seguir.

2.1 ENSINO E APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES

As primeiras discussões envolvendo o conteúdo de Funções começaram ainda durante o século XVII. De acordo com Iezzi (2010), as três expressões Função, Constante e Variável, no vocabulário da Matemática, devem-se ao matemático alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 -1716), sendo que a notação *f(x)* foi primeiramente utilizada pelo matemático e físico suíço Leonhard Paul Euler (1707- 1783), para indicar a lei de formação de uma Função. Porém, segundo o autor, a definição mais próxima de função, utilizada nos dias atuais, é atribuída ao matemático alemão Lejeune Dirichlet (1805-1859), como já destacado.

O conceito de Função expõe dificuldades em diversos níveis de ensino e em distintos pontos em relação a como entender, analisar e conceder definições a esse conceito. Para Zatti:

> A formação de conceitos é um dos tópicos de maior importância no processo de ensino-aprendizagem de Matemática; no entanto, são muitas as dificuldades na compreensão desta questão. Na evolução da ciência, os próprios matemáticos enfrentaram obstáculos para entender alguns conceitos, principalmente os relacionados à função, os quais alteraram sua compreensão do conceito, conduzindo a aperfeiçoamentos teóricos durante séculos a fim de serem criados e aceitos pela comunidade acadêmica (ZATTI, 2010, p.12).

Sobre as possíveis dificuldades enfrentadas pelos estudantes com relação ao estudo de Funções, Oliveira destaca que “os obstáculos podem ser procurados a partir de uma análise histórica ou a partir de dificuldades persistentes nos alunos” (OLIVEIRA, 1997, p.13). Portanto, é importante que os docentes estejam atentos, durante as aulas, analisando as interrogações e os equívocos produzidos pelos estudantes enquanto resolvem atividades envolvendo Funções, com o objetivo de identificar esses obstáculos e dificuldades e procurar metodologias adequadas a um trabalho que possibilite aos estudantes vencerem tais obstáculos.

Ruiz (1994) destaca que, por meio das distintas compreensões e períodos históricos, é possível reconhecer os obstáculos epistemológicos ligados ao desenvolvimento do conceito de Funções. Tais obstáculos epistemológicos foram considerados no estudo desenvolvido por Ninow (2019) bem como no presente trabalho, embora não se constitua em ponto de análise.

Assim, de acordo com Ruiz (1994), esses obstáculos epistemológicos estão relacionados, principalmente à: concepção estática, dissociação existente entre medida e números, razão e proporção, homogeneidade das proporções, concepção geométrica das variáveis, concepção algébrica e concepção mecânica de curva. Apresentam-se a seguir, as principais características desses obstáculos apresentados pelo autor.

- Concepção estática: a ideia mais primitiva de função estava contida nas noções de mudança e relacionamento entre magnitudes variáveis. No entanto, os matemáticos por muito tempo, apegados à tradição euclidiana, observam as entidades matemáticas como algo "estático". Eles interpretam as magnitudes físicas e as proporções entre elas como algo diferente das igualdades estritamente numéricas. Essa concepção de "variabilidade" como característica exclusiva das grandezas físicas pode ser considerada um claro obstáculo episemológico ao desenvolvimento do conceito de função.
- Dissociação entre magnitudes e números: atualmente associamos naturalmente qualquer quantidade de uma magnitude com uma certa medida numérica, mas no pensamento grego, magnitudes e números eram objetos muito diferentes. Os números eram sempre discretos, enquanto as magnitudes eram contínuas. Essa profunda dissociação levou ao fracasso em observar as leis físicas como funções matemáticas e, consequentemente, constituiu um obstáculo epistemológico.
- Razão ou proporção: dos gregos e até os século XV, a proporção foi escrita discursivamente e não como desigualdade escrita em forma de frações. Galileu escreveu: “os espaços percorridos por um corpo em queda livre são, entre eles, como o quadrado do tempo necessário para percorrê-los”. O aspecto funcional da proporção foi completamente oculto por seu caráter estritamente escalar. Por esse motivo, é considerada um obstáculo epistemológico para o desenvolvimento da noção de variável e, consequentemente, para a noção de função.
- Homogeneidade nas proporções: a homogeneidade sempre conduziu à comparação de magnitudes da mesma natureza e isso impediu encontrar, de forma significativa, dependências entre variáveis de diferentes magnitudes, germe de qualquer relação funcional.
- Concepção geométrica das variáveis: na matemática grega outro obstáculo com forte dependência da geometria também se configurava. Eles construíram uma Álgebra Geométrica cujos elementos primários acabaram sendo os segmentos de linha. Com eles definiram todas as operações do cálculo. A soma foi interpretada como a adição de segmentos, a diferença como a eliminação de uma parte do segmento igual ao segmento de subtraendo. A multiplicação do segmento levou à construção de uma representação do segmento levou à construção de uma representação

bidimensional e o produto dos dois segmentos *a* e *b* foi considerado um retângulo com os lados *a* e *b*. O produto de três segmentos deu um paralelepípedo, e o produto de um maior número de fatores, na álgebra geométrica, não pôde ser considerado. A divisão só era possível com a condição de que a dimensão do dividendo fosse maior do que a dimensão do divisor.

- Concepção algébrica: a simbolização algébrica fez com que outro novo obstáculo surgisse no desenvolvimento do conceito de função. No século XVIII é definido: *"Uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta de alguma forma por essa quantidade variável e números ou quantidades constantes" .* Pensa-se que as únicas relações dignas de estudo são aquelas que podem ser descritas por meio de expressões e equações algébricas. Essa forte dependência entre expressão analítica e função tornou-se um obstáculo até que a ideia de correspondência arbitrária emergiu nas mentes dos matemáticos. Mas, para isso, foi necessário o surgimento de novas ferramentas, como a teoria dos conjuntos e um desenvolvimento formal e definitivo dos números reais.
- Concepção mecânica de curva: posteriormente, o desenvolvimento do conceito de função seria acompanhado pelo nascimento de uma curva. Mas, inicialmente, as curvas não foram consideradas como gráficos da relação funcional; em vez disso, foram tomadas como trajetórias de pontos móveis (curvas "mecânicas"). Essa concepção permaneceu na mente de matemáticos como Galileu, Torricelli, Roberbal ou Newton. Eles não foram vistos como um conjunto de pontos que satisfazem condições específicas dadas pela relação funcional. (RUIZ, 1994, p. 198).

Considera-se que o conhecimento e entendimento dos obstáculos que são constitutivos da formação do conceito de Função, tais como os apontados pelo autor, são de fundamental importância para que o professor possa organizar o processo de ensino e aprendizagem. Não que na escola se vá refazer todo o processo histórico do desenvolvimento do conceito, mas conhecer os obstáculos, significá-los no contexto atual do ensino, pode contribuir para uma proposta que permita ao estudante defrontar-se com suas dificuldades, significá-las e buscar resolver os conflitos que emergem durante o enfrentamento de dificuldades. Tratar o conceito de Função como pronto e acabado, sem possibilitar ao estudante o enfrentamento de dificuldades, só contribui para um ensino formal, desprovido de significado.

As dificuldades, durante o ciclo de ensino e aprendizagem, já se fazem presentes nos conceitos prévios que norteiam o conceito principal de funções, como dito por Markovits, Eylon e Buckheimer (1995), pois envolvem os conceitos que, além de serem muito complexos, não se fazem tão triviais para os alunos. Esses autores afirmam que são inúmeras as dificuldades em torno do ensino de Função e que elas estão relacionadas ao nível de complexidade dos conceitos que as definem, como domínio, contradomínio e imagem.

Markovtis, Eylon e Bruckheimer (1995) também fazem ligações das dificuldades ao fato que, em exercícios onde é necessário que os alunos utilizem vários passos, como, por exemplo, para identificarem se um número pertence à imagem de uma função, devem ser seguidas três operações, respectivamente: avaliar se esse número pertence ao contradomínio, calcular a pré-imagem e testar se a mesma pertence ao domínio. Esses passos, segundo os pesquisadores, precisam ser devidamente compreendidos pelos estudantes, porque, se não os souberem, terão dificuldade na aprendizagem de funções.

Nesse contexto, Kaiber pondera que:

> A aquisição do conceito de função não somente necessita do desenvolvimento prévio das ideias básicas de variável, dependência, regularidade e generalização como também de um trabalho significativo que possibilite ao estudante transitar entre a concepção de variável discreta e a atribuição de significado a variáveis que assumam valores no universo dos números reais. (KAIBER, 2002, p.4)

As ideias da autora estão alicerçadas, em parte, nas concepções de Bergeron e Herscovics (1982), no que se refere ao ensino e aprendizagem de funções. Os autores desenvolveram uma categorização para o estudo das mesmas para alunos do ensino secundário, tomando como referência obstáculos cognitivos enfrentados por estudantes observados em pesquisas. Esses pesquisadores usaram uma abordagem construtivista, partindo da utilização do conhecimento informal dos alunos para a formalização, sendo cada nível foi construído sobre o anterior.

Assim, de acordo com os autores, a compreensão do conceito de Função se dá em quatro níveis: compreensão intuitiva, matematização inicial, abstração e formalização. Cada um desses níveis oferece propriedades gerais próprias, que partem do emprego do conhecimento informal do cotidiano, passando pela organização e quantificação dos primeiros conhecimentos intuitivos, pela generalização, a qual possibilita que o conceito se destaque do procedimento efetuado para alcançá-lo, até a utilização da linguagem simbólica, a qual caracteriza a formalização (KAIBER, 2002).

Os níveis de compreensão do conceito de Função apontados por Bergeron e Herscovics (1982) são destacados e descritos no que segue.

- Compreensão Intuitiva: pensamento com base na percepção visual e ações primitivas não quantificadas, resultando em aproximações.
- Matematização Inicial: organização e quantificação das primeiras noções intuitivas para a construção de um conceito.
- Abstração: o conceito se destaca do procedimento e alcança uma existência própria com generalizações.
- Formalização: uso da linguagem simbólica, justificação lógica das operações, descontextualização e descoberta dos axiomas.

Considerando esses quatro níveis, os autores afirmam que, primeiramente, o estudante seria um observador e experimentador, fazendo ponderações intuitivas do comportamento de variáveis presentes em seu cotidiano, desenvolvendo um "pré-conceito de função". No próximo nível, esse aluno já estaria apto a dimensionar essas variáveis pré-concebidas, seja por tabelas, gráficos ou fórmulas, dando ênfase para às relações de dependência já existentes. No terceiro nível, desenvolveria a competência de distinguir as relações comuns das Funções, compreendendo a relação de dependência entre as variáveis para, enfim, no quarto nível dar significado às definições e registros analisados.

Particularmente, referindo-se à importância das diferentes formas de representação na formação do conceito de Função os autores destacam:

> Ambas as distinções são essenciais na construção do conceito generalizado de função[...] Por exemplo, representações gráficas podem proporcionar uma análise se os dados estão simplesmente na forma de tabela [...] As representações algébricas se mostram essenciais na construção de funções, não apenas elas produzem um resumo de um grande número de dados, mas elas conduzem a noção de "regra" bem melhor que as representações numéricas e gráfica. (BERGERON E HERCOSVICS, 1982, p. 82).

Assim, tomando como referência o apresentado por Bergeron; Herscovics (1982), é adequado afirmar que, para compreender o conceito de função, se faz necessário, entre muitos aspectos cognitivos, dar significado, articular e transitar entre as diferentes formas de representação, ou seja, os estudantes devem entender que a expressão algébrica, o gráfico, as tabelas e outros representam um mesmo conceito e cada um deles, separadamente, não o esgotam de maneira alguma.

Ao longo da Educação Básica, o ensino de Funções encontra um espaço significativo no currículo na disciplina de Matemática. Contudo, resultados de investigações que serão descritas, posteriormente, mostram que o conceito de Função não é compreendido de maneira eficiente pelos estudantes que, muitas vezes, chegam ao Ensino Superior com obstáculos na concepção e entendimento da relação funcional e no conhecimento de funções elementares.

2.2 FUNÇÃO EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA

Arquimedes de Siracusa, (287 a.C. – 212 a.C.), em seu livro Contador de Areia (250 a.C.), esperava determinar a quantidade precisa de grãos de areia para preencher o universo solar. Para a resolução, Arquimedes criou um método: analisou os números de 1 a 10^8, ou seja, até uma miríade de miríade, que poderiam ser escritos, na numeração grega, como sendo de primeira ordem; em seguida, os números de 10^8 até 10^{16} como sendo de segunda ordem, em que a unidade é 10^8, e assim consecutivamente (BOYER, 1996). Arquimedes utilizou, desse modo, uma regra equivalente à propriedade da multiplicação de potências com a mesma base:

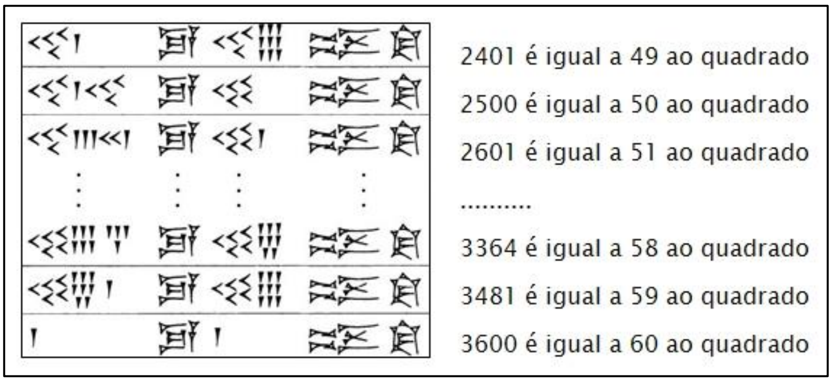
$$10^3 \times 10^8 \times 10^8 \times 10^8 \times 10^8 \times 10^8 \times 10^8 \ldots = 10^{51}$$

Obteve como resultado 10^{51}, mas não havia recursos necessários para ser caligrafado na numeração alfabética da época, que apenas permitia escrever números até 10.000 (uma miríade) (BALL, 1960).

Um dos marcos iniciais sobre operações de potenciação, foi localizado num papiro egípcio, que data do final do Império Médio (cerca de 2100-1580 a.C.). Nesse documento, no cálculo do volume de uma pirâmide quadrangular, é utilizado um par de pernas como símbolo para o quadrado de um número (BALL, 1960).

O conhecimento de potência era, da mesma forma, popular aos babilônios. Fauvel destaca o conteúdo de uma tábua de argila conhecida como “tabuinha de Larsa” (FAUVEL, 1987, p.22), onde era apresentado o sistema de numeração sexagesimal.

Figura 1 – Placa de Larsa



Fonte: Fauvel (1987).

De acordo com Fauvel, distintos registros antigos também apresentam tabelas evolvendo as potências sucessivas de um dado número, as quais eram utilizadas para resolver problemas de astronomia e de operações comerciais, tais como: “Quanto tempo levará a duplicar certa quantia de dinheiro, a uma taxa anual de 20%? ” (FAUVEL, 1987, p. 24).

Tais apontamentos históricos evidenciam que problemas envolvendo potências e suas propriedades remontam à antiguidade e foram evoluindo, sempre relacionados à busca da solução.

Assim, no começo do século XVII, surgiram os logaritmos, concebidos como um instrumento auxiliar dos cálculos aritméticos, transformando produtos em somas, quocientes em diferenças, o que, atualmente, é realizado com o auxílio de calculadoras e computadores. Lima (1991) ressalta que os logaritmos surgiram e foram estudados antes do desenvolvimento dos conceitos sobre funções. Sua utilização inicial consistia no fato de que, devido às suas propriedades, é possível realizar cálculos aritméticos extensos por meio de procedimentos mais elementares.

No final do século XVI e início do século XVII, matemáticos se uniram para desenvolver as chamadas tábuas de logaritmos, a junção, em uma única tabela, do valor dos logaritmos de diversos números. Tais tabelas foram desenvolvidas para simplificar o entendimento toda vez que fosse realizado um cálculo aritmético, para analisar a relação entre os logaritmos das grandezas envolvidas.

Os estudos sobre os mesmos foram divididos por dois grandes matemáticos, o suíço Jost Bürgi (1552-1632) e o escocês John Napier (1550-1617). Porém, segundo Boyer (1996), não há dados concretos que declarem quem foi o primeiro a desenvolver a teoria, sendo que, devido ao fato de Napier ter publicado sobre as tábuas, em 1614 e Bürgi, em 1620, os créditos da descoberta são de Napier.

Uma tábua de logaritmos é feita por duas colunas de números. A coluna da esquerda contém números naturais a direita, seu logaritmo correspondente. Para que seja feita uma multiplicação de dois números, é preciso somar seus logaritmos; o que resulta é o logaritmo do produto. Para achar o produto, basta ler na tábua, da direita para a esquerda, qual o número tem aquele logaritmo. Na divisão de dois números, o processo é parecido, basta subtrair os logaritmos. Para elevar um número a sua potência, é preciso multiplicar o logaritmo do número pelo expoente. Já para extrair a raiz enésima de um número, o procedimento é dividir o logaritmo do número pelo indicador da raiz.

Conhecimentos e dados referentes ao desenvolvimento histórico de um saber, bem como suas origens, evolução e o contexto em que esses conhecimentos tiveram lugar e os problemas que buscavam resolver são relevantes ao processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Não que, necessariamente, o professor vai levar esse contexto para a sala de aula, sistematicamente, mas seu conhecimento enseja o desenvolvimento de estratégias e a proposta de problemas que podem revestir determinados conceitos e procedimentos de significado.

Miranda e Laudares (2007) ponderam que, dentre os principais objetivos do ensino e aprendizagem de Matemática, está a compreensão conceitual do objeto matemático em estudo. Ela ocorre, de acordo com os autores, quando se utilizam metodologias de estudo, as quais considerem diferentes abordagens, sejam elas descritivas explicativas e de análise, do tipo algébrico, numérico ou geométrico.

Para a elaboração conceitual, Polya (1995) argumenta sobre a necessidade do pensamento heurístico, que dá suporte a todo o conjunto de conhecimentos adquiridos e da sua mobilização, estabelecendo novas ideias para execução. De acordo com o autor,

> À medida que avança o nosso exame do problema, prevemos com clareza cada vez maior o que deve ser feito para a sua resolução e como isso deve ser feito. Ao resolver um problema matemático, podemos prever, se tivermos sorte, que um certo teorema conhecido poderá ser utilizado, que um certo problema já anteriormente resolvido poderá ser útil, que a volta à definição de um certo problema já anteriormente resolvido poderá ser útil, que a volta a definição de um certo termo técnico poderá ser necessária. Não prevemos essas coisas com certeza, apenas com um certo grau de plausibilidade. (POLYA, 1995, p.130).

Tanto os apontamentos de Miranda e Laudares (2007), como os de Polya (1995) concorrem para a concretização das aprendizagens no que se refere a funções. Para Rezende (2004), um dos processos mais importantes para se iniciar a aprendizagem de funções é classificar de que modo elas variam, constituindo uma conexão do conceito de função com a realidade e sua origem histórica.

É consenso entre pesquisadores, como já apontado, que tanto o ensino como a aprendizagem de funções devem ocorrer considerando o desenvolvimento de etapas, devido ao nível de complexibilidade que o conceito envolve, devendo ocorrer, ainda, em sintonia com o desenvolvimento do aluno.

Particularmente, no que se refere à aprendizagem de Funções Exponencial e Logarítmica é recomendado o estudo de Logaritmos e, segundo Corrêa (1989), esse deve ser antecedido por um estudo referente a potenciação e suas propriedades, pois esses constituem conhecimentos prévios importantes para a construção gradativa do conceito de Logaritmo e, posteriormente, de Funções Exponencial e Logarítmica.

Quanto à resolução de problemas envolvendo a Função Exponencial e a Função Logarítmica, Silva (2016) aponta para a importância do trabalho com problemas que permitam ao aluno defrontar-se com situações nas quais ele precisa atribuir significado, o que, talvez, até então, não tenha acontecido. De acordo com o autor, deve-se

> considerar que um problema envolvendo uma relação exponencial e logarítmica não deve ser uma proposta mecânica, na qual o aluno aplica fórmulas de maneira metódica, mas deve ser centrada numa dinâmica na qual o aluno deve ser levado a interpretar o enunciado apresentado e desenvolver um raciocínio capaz de resolvê-lo, fazendo uso de conhecimentos adquiridos anteriormente. Dessa forma observa-se que o aluno constrói um campo de conceitos em resposta a um problema. Um novo conceito matemático é construído a partir da articulação de conceitos anteriores. (SILVA, 2016, p. 98).

No que se refere às dificuldades ligadas ao trabalho com a Função Exponencial, Freitas e Almouloud (2014) destacam, principalmente, que são relacionadas à própria complexidade do conceito, em resoluções que forçam o aluno a utilizar as conversões de registro de representação, tanto de figural para algébrico, como algébrico para gráfico. Os autores apontam, também, que os educandos misturam as ideias de crescimento linear e exponencial.

Particularmente no que se refere às diferentes formas de representação de uma função Sierpinska (1992), destaca que “Os estudantes têm tido problemas em fazer a ligação entre as diferentes representações de funções: fórmulas, gráficos, diagramas, descrições verbais de relações; em interpretar gráficos; em manipular símbolos relacionados a funções. ” (SIERPINSKA, 1992, p.25). Isso também foi apontado por

Bergeron e Herscovics (1982) e Freitas e Almouloud (2014).

2.3 INVESTIGAÇÕES SOBRE O TRABALHO COM FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

Tendo em vista o tema desta pesquisa, direcionada a investigar aspectos do ensino e aprendizagem de Funções Exponenciais e Logarítmicas, a partir da elaboração de uma Sequência Didática Eletrônica, apresenta-se, a seguir, uma revisão da produção acadêmica publicada entre os anos de 2011 e 2020, que contempla propósitos semelhantes à presente pesquisa.

A delimitação da consulta das obras seguiu critérios preestabelecidos, sendo o primeiro critério o limite temporal das publicações. Como segundo, tomaram-se as possíveis ferramentas de busca e a primeira opção adotada foi o Google Acadêmico, visto que sua cobertura ampliou-se significativamente, ao longo dos anos, o que o torna, segundo Halevi, Moed, Bar-Ilan (2017), uma importante base de dados de literatura acadêmica. Considera-se, assim, que o resgate das publicações científicas, no Google Acadêmico, compreende um campo significativo da web e seu emprego, como instrumento de recuperação de literatura acadêmica é apropriado e viável para a construção de revisões bibliográficas (Meier; Conkling, 2008).

Uma pesquisa, no Banco de Teses e Dissertações da CAPES, adotando como restrição a busca pela associação de termos que personalizam o estudo em desenvolvimento também foi realizada. Assim, a procura ocorreu considerando os termos que foram tomados, de forma isolada, ou em combinação, a saber: “sequência didática”, “funções exponencial e logarítmicas”, “enfoque ontossemiótico”.

O levantamento desse conjunto de pesquisas resultou em uma amostra de setenta e quatro trabalhos (cumprindo o filtro temporal 2011-2020). A investigação foi realizada entre março e maio de 2020.

Na busca por pesquisas que conseguissem amparar ou indicar direções para a elaboração, construção e implementação da proposta de estudos com foco no ensino e aprendizagem das Funções Exponencial e Logarítmica foram identificados quatro trabalhos que se deduziu serem importantes para a investigação a ser elaborada. Destaca-se que, inicialmente, foram procuradas pesquisas (artigos, teses ou dissertações) que contemplassem o ensino e/ou aprendizagem de Funções (Exponencial e Logarítmica) as quais utilizassem como aporte teórico o Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática. E, em um segundo momento, buscaram-se pesquisas contemplando o mesmo conteúdo, porém, utilizando outros referenciais teóricos. No quadro da Figura 2, apresentam-se os trabalhos selecionados.

Figura 2 – Investigações na Área

Ano/Autor	Título	Tipo
2017 Lina Flavia Morete de Queiros Maia	Modelação Matemática Na Sala De Aula: O Conceito De Função Exponencial Numa Sequência De Atividades Para O 1º Ano Do Ensino Médio	Dissertação
2013 Silvio Tadeu Teles da Silva	O Ensino Das Funções Exponencial e Logarítmica Por Atividade	Dissertação
2016 Rodrigo Felipe da Silva	Funções Exponencial e Logarítmica	Dissertação
2019 Valmir Ninow	O Estudo De Funções No Ensino Médio: Uma Investigação Sob a Perspectiva Do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática	Tese
2013 Luísa Silva Andrade	Reflexões sobre o Ensino de Funções sob a perspectiva do Enfoque Ontossemiótico	Artigo

Fonte: a pesquisa.

A investigação de Maia (2017) tem como objetivo apresentar uma série de atividades para ensinar o conteúdo referente à Função Exponencial bem como sua definição na tentativa de formalizar as características que foram descobertas pelos alunos. A investigação inicia trazendo uma análise de trechos de documentos curriculares que tratam da função exponencial e, contribuindo com esses documentos, apresenta uma das tendências em Educação Matemática, a Modelagem Matemática proposta por Bassanezi (2004) e os pressupostos da Modelação Matemática defendida por Biembengut e Hein (2016). A sequência de exercícios é composta por oito atividades envolvendo situações cotidianas para que os alunos, em duplas ou trios, discutam sobre elas, para obter os modelos matemáticos que solucionam essas situações e, em seguida, construam os gráficos das curvas que descrevem tais situações utilizando planilhas eletrônicas de cálculo.

Como conclusão, a autora afirma que, ao apresentar o conceito, os alunos poderão estabelecer a relação entre as variáveis envolvidas, estabelecendo o modelo matemático que descreve tal relação, tornando a compreensão mais simples e prática. Por fim, acredita que essa pesquisa possa colaborar com os processos pedagógicos do professor, em sala de aula, propiciando ao aluno o estímulo à discussão, argumentação, reflexão, compreensão e ao desenvolvimento de sua criatividade.

Silva (2013), em sua dissertação, teve como objetivo analisar a potencialidade do ensino das funções exponencial e logarítmica por meio de atividades. A metodologia de pesquisa utilizada foi a engenharia didática. Com os dados obtidos das análises preliminares, foi organizada uma sequência didática com quinze atividades, jogos e testes diagnósticos que foram analisados a priori, aplicados a 21 alunos do 1º ano de uma escola pública estadual da cidade de Belém do Pará, sendo feitos em dez encontros. As análises a posteriori comprovaram que é plausível os estudantes desenvolverem modelos matemáticos associados às Funções Exponencial e Logarítmica sem que o educador os exponha e que o desempenho dos educandos, na prática das leituras e construções gráficas, foi melhor do que sua performance quando educados do modo tradicional.

O confronto entre o pré e pós-testes mostrou que aconteceu um acréscimo significativo na quantidade de acertos. O mesmo ocorreu quando foram confrontados os resultados do teste aplicado aos alunos vindos do 1º ano que tiveram ensino regulado na exposição oral seguida de exemplos e exercícios. Esses resultados possibilitaram concluir que a sequência didática proposta agregou os conhecimentos e cooperou para que capacidades úteis ao desenvolvimento dos alunos fossem aperfeiçoadas, resultando num melhor desempenho dos alunos participantes da investigação. O autor ainda destaca que o emprego da contextualização torna as aulas de Matemática mais atraentes, visto que umas das incertezas que mais rodeiam os alunos é entender quando irão aplicar, em sua vida, os conteúdos que aprendem na escola. Cita também, que os estudantes se mostraram espantados, no decorrer das atividades, por haver aplicações de Funções Exponenciais e Logarítmicas em inúmeras áreas do conhecimento, o que permitiu uma aproximação entre o investigador e os investigados.

A investigação de Silva (2016) teve como objetivo principal o ensino de funções exponenciais e logarítmicas, procurando apresentar aos professores o modo mais interessante e coerente, de ensinar o conteúdo aos seus alunos. O autor ressalta que ao começar o ensino de Funções, é necessário realizar um passeio pela história do tema, procurando revelar suas raízes. A pesquisa ainda traz as compreensões do conteúdo segundo os documentos oficiais (PCNEM- Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio) e (DCN- Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica). Buscando consolidar o aprendizado, foram abordados e utilizados conceitos aritméticos e geométricos, visto que são importantes para o estudo das

Funções, com situações-problema contextualizadas, procurando cativar os educandos no desenvolvimento de ensino e aprendizagem, causando o levantamento de hipóteses e consolidando a aprendizagem.

Essas situações-problema, segundo Silva (2016), foram realizadas através de atividades propostas em que se objetivou explorar a caracterização das Funções Logarítmica e Exponencial, pensando em confrontá-las ao com situações do cotidiano, para tanto, foram propostos determinadas atividades, como, por exemplo: a utilização do BRO-ce Calc no Ensino de potenciação com números irracionais, o jogo de xadrez, mágica do baralho e a resolução de problemas da OBMEP (Olímpiada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas) e do ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio).

Por fim, o autor defende que o ensino de ambas as Funções necessita enfatizar, fortemente, aplicações e contextualizações, de maneira oposta ao que ocorre atualmente na educação, que enfatiza o cálculo algébrico e o uso de fórmulas matemáticas prontas. Sugere, ainda, que os educandos percebam o motivo da utilização dos modelos exponencial e logarítmico, apresentando as diferenciações dessas Funções, como também seu emprego durante o desenvolvimento da civilização humana.

A pesquisa de Ninow (2019) teve como objetivo o desenvolvimento e a aplicação de uma proposta de estudos com foco no ensino e aprendizagem de Funções no Ensino Médio, sob a perspectiva do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e a Instrução Matemática (EOS). A investigação procurou desenvolver conceitos, definições e métodos relacionados ao conteúdo de Funções, apreciando os diversos tipos, Afim, Quadrática, Modular, Exponencial, Logarítmica, e por fim, Trigonométricas. A investigação foi delineada e desenvolvida a partir das recomendações propostas nos documentos oficiais OCNEM (Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio) e BNCC (Base Nacional Comum Curricular), o currículo da escola, os significados de referência do objeto matemático Função, além dos aportes teóricos e metodológicos do EOS.

Os materiais de estudos da pesquisa foram constituídos por grupos de situações-problema para cada tema aprendido, materiais produzidos no Power Point, objetos de aprendizagem, vídeos pré-selecionados e uso do software Geogebra, além de exercícios de produção, manipulação e resolução de problemas. O diagnóstico gerado com base no emprego da proposta de estudo foi efetivado, assumindo como referência os componentes e indicadores da Idoneidade Didática, nível de análise proposto no âmbito do EOS.

Ninow (2019) destaca, ainda, que a proposta apresentada, considerou e atendeu todos os componentes e indicadores da Idoneidade Didática do Enfoque Ontossemiótico de maneira satisfatória e permitiu aos alunos um formato de aprendizado distinto, no qual cada um teve a oportunidade de seguir o seu ritmo de estudos, retomando, intensificando e aprimorando conceitos, noções, definições e procedimentos, apontando a solução de aleatórios, divergências e obstáculos no estudo do conteúdo Funções.

O último trabalho aqui destacado é de Andrade (2013), que está publicado, na Educação Matemática em Revista, e apresenta uma discussão de aspectos do processo de ensino e aprendizagem do conceito de Função, com base nos significados institucionais destacados no componente epistêmico linguagem proposto por Godino, Rivas e Arteaga (2012) e formados no Enfoque Ontossemiótico do conhecimento e na instrução matemática (EOS). Nas discussões, são abordadas atividades fundamentadas nesse constructo teórico, na tentativa de melhorar a aprendizagem do conceito de Função, através de situações-problema que potencializem o desenvolvimento de elementos linguísticos e representacionais em Matemática, as quais foram organizadas considerando os níveis de compreensão do conceito de Função estabelecidos por Bergeron e Herscovics (1982).

O artigo procurou aprofundar os conhecimentos sobre o EOS e lançar um olhar baseado em representações, sob a perspectiva didático-epistêmico-cognitiva que pode ser demonstrada em situações-problema, em torno da aprendizagem de Funções. A partir do significado institucional de interpretação das Funções, pode-se compreender a ênfase na importância de aplicar as condições reais ao campo do conhecimento ou situações cotidianas, bem como na exploração de várias representações (especialmente representações gráficas).

A análise desses cinco trabalhos foi relevante, pois mostrou as diferentes possibilidades de se utilizar o Enfoque Ontossemiótico, ou como trabalhar com as Funções Exponenciais e Logarítmicas para desenvolver, estruturar, analisar e validar uma proposta da presente pesquisa.

3 TECNOLOGIAS DIGITAIS E OS ESTUDOS DE RECUPERAÇÃO

A utilização das Tecnologias Digitais, no espaço educacional, está cada vez mais presente, como forma de atualização do processo de ensino e aprendizagem, como meio de comunicação com o educando e como estratégia e recurso para o desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos. As Tecnologias Digitais têm se consolidado como possibilidade para o desenvolvimento dos processos educativos, permitindo ao docente desenvolver situações de aprendizagem nos quais o estudante é chamado a agir, criar, comunicar, intervir desenvolver estratégias, sendo sujeito ativo nesse processo.

Nesse contexto, a Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2017) também destaca o uso de Tecnologias Digitais, em sala de aula, e que os alunos necessitam desenvolver um olhar crítico, ético e estético, e não somente técnico e de seu uso, para que, assim, possam selecionar, filtrar, compreender e produzir, criticamente, sentidos em quaisquer campos da vida social.

Sobre as tecnologias digitais, a BNCC apresenta, no âmbito das competências gerais da Educação Básica, que uma competência importante a ser desenvolvida refere-se a:

> Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva. (BRASIL, 2017, p.9)

Quanto à área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, o documento aponta que o aluno necessita

> aprender a estruturar linguagens argumentativas que lhes permitam comunicar, para diversos públicos, em contextos variados e utilizando diferentes mídias e tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC), conhecimentos produzidos e propostas de intervenção pautadas em evidências, conhecimentos científicos e princípios éticos e responsáveis. (BRASIL, 2017, p.112)

É importante destacar a indicação, na Base, de que as tecnologias digitais de informação e comunicação devem ser utilizadas, de maneira crítica e reflexiva, e contribuir para que os estudantes desenvolvam autonomia e exerçam protagonismo na sua vida estudantil e pessoal. Ou seja, além de contribuírem para o processo de aquisição de conhecimentos e resolução de problemas, as tecnologias devem estar a serviço da construção da cidadania.

A interação do aluno com as redes virtuais possibilita uma mudança nas formas de leitura e escrita, induzindo-o a ele pensar sobre o próprio pensar, podendo propocionar maior conhecimento sobre o contexto, segundo os autores Sloczinski e Chiaramonte:

> [...] os textos na internet se apresentam formando uma cadeia de informações, com sequência livre para o usuário (ou aprendiz) ligada de maneira criativa por meio de links. Esses textos podem ser modificados, ampliados e reconstruídos a partir da pesquisa em diferentes áreas do conhecimento, encontradas no "mundo virtual" rompendo com a forma hierárquica da estrutura escolar tradicional. (SLOCZINSKI; CHIARAMONTE, 2005, p. 45).

Aliada às tecnologias digitais, a aprendizagem deve ser considerada como um processo em que os alunos desenvolvem autonomia e criticidade, não podendo configurar-se apenas em transferência de informações (SOARES; BRUSTOLIN, 2014). Os recursos digitais possibilitam a vinculação imediata com um universo carregado de conhecimentos, conceitos, tradições, juízos, o que poderá aumentar o pensamento crítico do aluno.

Monteiro (2013) destaca que as Tecnologias Digitais estão presentes no desenvolvimento natural do progresso social e tecnológico na educação. Portanto, o uso desses instrumentos não é mais o principal ponto das discussões na educação. Importa saber de que maneira eles podem ser aprofundados no ensino e como podem trazer o máximo de benefícios.

Os alunos usam os computadores para se entreter no dia a dia, como por exemplo, acessar jogos e navegar na Internet, portanto, passam mais tempo nos computadores do que em outras atividades (MONTEIRO, 2013). Perante esse contexto, os educadores precisam estar dispostos a colocar esses recursos em sala de aula, a fim de estimular a capacidade dos educandos de usar as Tecnologias Digitais no processo de aprendizagem.

As tecnologias digitais se apresentam como um importante instrumento no processo de ensino e aprendizagem, garantindo amplo acesso à informação (ALMEIDA E ARAÚJO JR., 2015). Portanto, ao se formular um plano de pesquisa viável para a utilização da tecnologia, é necessário adquirir conhecimentos técnicos e servir como método de ensino na área de ensino e pesquisa para docentes (MARTINIANO E ROCHA, 2015).

A criação e o uso de sequências didáticas eletrônicas fundamentadas em tecnologias digitais são um instrumento visto e utilizado no dia a dia dos estudantes, e pode ajudar os educadores a promover uma aprendizagem significativa, visto que usam materiais potencialmente importantes. Para ZABALA (1998, p.18), sequência didática é "um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais que têm um princípio e um fim conhecido, tanto pelos professores como pelos alunos". Groenwald, Zoch e Homa (2009) observam que o benefício de utilizar uma sequência didática eletrônica é a viabilidade de poder aproveitar uma variedade de recursos com um alto padrão de qualidade.

Godino (2011) destaca que as tecnologias digitais se constituem em instrumento fundamental para a aprendizagem de Matemática no século 21, sendo necessitário que todos os centros de educação garantam a todos os educandos possuam acesso a mesma. Os educadores precisam elevar o nível de exigência no uso da tecnologia, para desenvolver a concepção dos alunos sobre os objetos matemáticos discutidos, instigar o seu interesse e intensificar a sua competência em matemática.

Em sua pesquisa, Araujo (2017) faz uma ligação que serviu como orientação para o desenvolvimento desta pesquisa. O autor evidencia que o uso das Tecnologias Digitais pode contribuir para o desenvolvimento do processo de estudos de recuperação, desde que os docentes assimilem as três extensões capitais da docência tecnológica: a formação, as inquietações e as possibilidades. Com isso, foi desenvolvida uma Sequência Didática Eletrônica sobre as Funções Exponenciais e Logarítmicas para o desenvolvimento de estudos de recuperação de alunos do 1º ano do Ensino Médio que apresentem dificuldades sobre o tema.

3.1 ESTUDOS DE RECUPERAÇÃO

Segundo Aurélio (2020), recuperação é uma ação ou efeito de recuperar. Quando se refere ao ensino, educação, é um estágio preparatório para novos testes que um estudante reprovado tem que realizar para alcançar o grau ou aprender matéria que precisa, a visto que se faz uma prova após essa ocasião.

Na presente investigação, e tomando como referência Lemos (2017), a recuperação é compreendida como ato ou efeito de recuperar, retomar o que não foi inteiramente firmado no que se refere à tomada de concepções ou técnicas. A recuperação é adotada, aqui, como elemento necessário ao desenvolvimento do ensino e da aprendizagem, não se estabelecendo em período separado, que acontece através da realização de uma prova a qual busca, somente, recuperar uma nota, por exemplo. Contudo, a recuperação aqui proposta é composta de conhecimentos próprios, os quais analisam as necessidades, dificuldades e obstáculos expostos pelos alunos, ocorrendo de forma paralela às aulas e tão logo as dificuldades se apresentem (LEMOS, 2017).

Nessa perspectiva, Groenwald e Moreno (2007) ponderam que a recuperação se estabelece como um componente fundamental, no processo de ensino e aprendizagem, no qual se procura a superação das dificuldades e a aprendizagem dos conteúdos abordados.

A recuperação surgiu na educação em forma de lei, na LDB nº 5692 de 11 de agosto de 1971 (BRASIL, 1971), no art. 14: "O aluno de aproveitamento insuficiente poderá obter aprovação mediante estudos de recuperação proporcionados obrigatoriamente pelo estabelecimento" e, no parágrafo 1º do art.11: "os estabelecimentos de ensino de 1º e 2º graus funcionarão entre os períodos letivos regulares para, além de outras atividades, proporcionar estudos de recuperação aos alunos de aproveitamento insuficiente...". É possível perceber que a noção de recuperação estava mais relacionada à melhoria das notas obtidas pelos estudantes nas avaliações para uma aprovação do que, propriamente, à qualidade da aprendizagem apresentada. Naquela época, Bacha e Maluf (1974) já recomendavam que a recuperação de conteúdos necessitaria ser particular para cada dificuldade individual apresentada e que era obrigação da escola proporcioná-la aos estudantes.

Atualmente, na educação brasileira, existem leis e orientações educacionais sobre a recuperação, como a Lei das Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) de nº 9394, sancionada em 20 de dezembro de 1996, (BRASIL, 1996), que diz, respectivamente, em seus artigos 12, 13 e 24, que é necessário "prover meios para a recuperação dos alunos de menor rendimento" (inciso V), "estabelecer estratégias de recuperação para os alunos de menor rendimento" (inciso IV) e que há "obrigatoriedade de estudos de recuperação, de preferência paralelos ao período letivo, para os casos de baixo rendimento escolar, a serem disciplinados pelas instituições de ensino em seus regimentos" (inciso V).

Com isso, nota-se que a lei, ao mesmo tempo que reconhece a necessidade de oportunizar espaços aos estudantes os quais não conquistaram seus objetivos de aprendizagem ao longo do processo, o que é positivo, reconhece, também, que nem sempre os sistemas de ensino são capazes de promover uma educação a qual atenda a todos, com suas peculiaridades, contextos sociais diferentes, além de períodos e velocidades diferenciados.

De acordo com a indicação do Conselho Estadual de Educação (CEE) nº 05/98 (SÃO PAULO, 1998), a obrigação da escola não é apenas com o ensino, mas, sobretudo, com a aprendizagem. E, nesse contexto, a recuperação deve ser percebida como um dos elementos de todo o processo de ensino e aprendizagem de uma escola que aceite a heterogeneidade de particularidades e necessidades de todos os educandos.

Já o Conselho Estadual de Educação do Rio Grande do Sul (CEEd/RS), através do Parecer nº 740/99, relata que os estudos de recuperação têm como finalidade amparar o educando na redução das incertezas e na superação das dificuldades apresentadas durante o processo de ensino e aprendizagem e devem ser preparados pela instituição, em grupo, ou de modo individualizado (RIO GRANDE DO SUL, 1999).

Segundo Monteiro (2013), a recuperação necessita fazer parte do dia a dia escolar, no qual todos os elementos devem estar concentrados, para que o processo de ensino e aprendizagem aconteça, de maneira efetiva, possibilitando aos discentes que exibem dificuldades de aprendizagem tenham a oportunidade de se desenvolver, considerando suas potencialidades. Para isso é fundamental que o docente oportunize espaços e tempos aos alunos os quais possuam dificuldades, para que os mesmos se desenvolvam e retomem aprendizagens que não foram realizadas ou consolidadas.

A recuperação de conteúdos é compreendida como retomada de estudos, no qual são realizadas revisões sobre os conteúdos trabalhados, que não devem ser reprodução das mesmas metodologias que já foram usadas. Para Belther (2005), é preciso que se desenvolva um trabalho diversificado e significativo:

> [...] o trabalho de recuperação dos alunos deve apresentar-se diverso daquele oferecido pelo professor da classe regular, pois se o aluno não aprendeu com a metodologia do professor regular, não é pedagogicamente correto que se repita o mesmo procedimento pelo professor do reforço. Esse trabalho precisa ser significativo, atraente e motivador; não deve apresentar um caráter punitivo, mas uma nova possibilidade de aprender e agora de forma mais individualizada, para atender à diversidade de características, de necessidades e ritmos de cada aluno. As aulas devem centrar-se no desenvolvimento de habilidades básicas que auxiliarão a aprendizagem nas diferentes disciplinas escolares. Assim, ao invés de se priorizar o desenvolvimento de conteúdos específicos, a prioridade deve ser o desenvolvimento de habilidades básicas que contribuirão para todas as áreas de conhecimento. As dificuldades específicas com os conteúdos das disciplinas devem ficar a cargo, sobretudo, do trabalho do professor da classe

> regular, que deve cuidar delas a partir da recuperação contínua dos alunos no desenvolvimento das aulas regulares (BELTHER, 2005, p. 172).

Segundo Mario et al (2007), apreciar a individualidade de cada pessoa é um comprometimento moral de colaborar com as mudanças indispensáveis para a constituição de uma sociedade mais igualitária. Também, para os pesquisadores, a escola não pode sustentar-se com similar sistematização, currículo e formas de atendimentos inalterados, sob pena de acentuar, cada vez mais, o quadro das dificuldades, isto é, continuar com propostas educativas semelhantes para estudantes com atributos particulares.

Os apontamentos apresentados, tanto no que se refere à utilização das tecnologias digitais, no processo educativo e, particularmente, no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, como no entendimento e na defesa de que, no processo de aprendizagem, deve ter espaço de qualidade para que estudantes que não realizem as aprendizagens necessárias, no tempo didático inicialmente estabelecido, tenham a oportunidade de fazê-lo, estão na base da estruturação da Sequência Didática desenvolvida na presente investigação.

Porém, a necessidade de organizar, em termos matemáticos e didáticos essa Sequência Didática levou à busca de um aporte que orientasse essa organização, encontrando-se, no Enfoque Ontossemiótico, elementos os quais foram importantes e que passam a ser destacados.

4 ENFOQUE ONTOSSEMIÓTICO

O Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e a Instrução Matemática (EOS) se apresentam como um princípio teórico que busca articular e aproximar fundamentos teóricos utilizados, na investigação em Educação Matemática, a partir de pressupostos antropológicos e semióticos sobre a Matemática, seu ensino e aprendizagem. De acordo com Godino, Batanero e Font,

> O ponto de partida do EOS é a formulação de uma ontologia de objetos matemáticos que contemple o triplo aspecto da Matemática: como atividade socialmente compartilhada de resolução de problemas, como linguagem simbólica e sistema conceitual logicamente organizado (GODINO, BATANERO e FONT, 2008, p.12).

Os autores destacam que as noções teóricas do EOS podem servir, tanto como instrumento de avaliação e reflexão de uma proposta educativa, como para a orientação e preparação da mesma, podendo, ainda, serem utilizadas, pelo educador, na própria prática docente.

No âmbito do EOS, de acordo com Godino (2011), são referidos cinco níveis de análise os quais são aplicáveis a um processo de estudo matemático planificado ou implementado: Sistemas de Práticas, Configurações de Objetos e Processos Matemáticos, Configurações e Trajetórias Didáticas, Dimensão Normativa e Idoneidade Didática, que são apresentados no quadro da Figura 3.

Figura 3 - Níveis de análise propostos pelo EOS

Níveis de Análise	**Características**
Sistemas de Práticas	Refere-se a planificação e implementação de um processo de estudo de uma noção, conceito ou conteúdo matemático, bem como as práticas relacionadas.
Configurações de Objetos e Processos	Tem a finalidade de descrever a complexidade das práticas como fator explicativo dos conflitos semióticos produzidos em sua realização.
Configurações Didáticas	Objetiva a identificação e descrição das interações, relacionando-as com a aprendizagem dos estudantes.
Dimensão Normativa	Referem-se ao sistema de normas referentes a convenções, hábitos, costumes, leis, diretrizes curriculares que regulam o processo de ensino e aprendizagem.
Idoneidade Didática	Baseia-se nos quatro níveis análises anteriores e constitui-se em uma síntese final, orientada a identificação de potenciais melhoras do processo de estudo e de novas implementações.

Fonte: adaptado de Godino, Batanero e Font (2008, p. 25-26).

Godino, Font e Wilhelmi (2008) apontam que os quatro primeiros níveis de análise (Sistemas de Práticas, Configurações de Objetos e Processos Matemáticos, Configurações e Trajetórias Didáticas e Dimensão Normativa) são ferramentas para uma didática descritiva-explicativa. Já o quinto nível, a Idoneidade Didática, se fundamenta, nos quatro níveis anteriores, e estabelece uma síntese organizada para avaliar se as atividades implementadas são inconvenientes ou adequadas, visando à identificação de melhoras do processo de ensino e aprendizagem.

Assim, no âmbito do EOS, a Idoneidade Didática se apresenta como um sistema que possibilita uma movimentação de uma didática descritiva-explicativa para uma didática normativa, a uma didática que é voltada para uma ação mais prática e competente na sala de aula (GODINO, 2011).

Godino, Batanero e Font (2008) evidenciam que a Idoneidade Didática de um processo de instrução se define como a articulação lógica e metódica de seis dimensões relacionadas entre si, apresentadas a seguir:

- Epistêmica: refere-se ao grau de representatividade dos significados institucionais implementados ou pretendidos com relação a um significado de referência.
- Cognitiva: expressa o grau em que as aprendizagens pretendidas/implementadas estão, na zona de desenvolvimento potencial dos alunos, assim como a proximidade das aprendizagens adquiridas das que foram pretendidas ou implementadas.
- Emocional: refere-se ao grau de desenvolvimento dos alunos no processo de ensino e aprendizagem. Está relacionada a fatores, tanto da instituição (objetos matemáticos e processo de estudo), como do aluno (atitudes, emoções, afetos, motivações e história escolar prévia).
- Interacional: grau em que os modos de interação (entre professor e estudantes e entre os estudantes) permitem identificar e resolver conflitos de significado e favorecem a autonomia da aprendizagem.
- Mediacional: grau de disponibilidade e adequação dos recursos materiais e temporais necessários para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem.
- Ecológica: grau de adaptação do processo de estudo ao projeto educativo da escola, às diretrizes curriculares, às condições do entorno social. (GODINO et.al., 2006).

Assim, tomando-se as dimensões da Idoneidade Didática, no contexto da organização de um projeto de aprendizagem, consideram-se elementos basilares a um processo de estudo matemático: o conteúdo do conhecimento, o significado que é atribuído pelos estudantes aos objetos postos em jogo, as formas de interação e mediação, as normas que orientam os processos de estudo em todos os níveis e o que advém do contexto em que todo esse processo de desenvolve.

Godino (2011) assinala que, embora sejam apresentadas isoladas, o que permite análises focadas em uma ou outra dimensão de modo específico, todas as dimensões interagem e se articulam, permitindo, ainda, serem percebidas a partir de diferentes graus de adequação (alta, média, baixa). Sobre a questão Godino, Batanero e Font destacam, ainda:

> Os distintos elementos podem interagir entre si, o que sugere a extraordinária complexidade dos processos de ensino e aprendizagem. Atingir uma alta adequação em uma das dimensões, por exemplo, a epistêmica, pode requerer uma das capacidades cognitivas que não possuem os estudantes para os quais está direcionado o ensino. Uma vez obtido um certo equilíbrio entre as dimensões epistêmica e cognitiva é necessário que a trajetória didática otimize a identificação e solução de conflitos semióticos. Os recursos técnicos e o tempo disponível também interatuam com as situações problemas, a linguagem, etc. (GODINO, BATANERO e FONT, 2008, p.24)

Cada uma das dimensões da Idoneidade Didática é tomada, também, como uma idoneidade. Assim, é possível fazer referência, por exemplo, a uma Idoneidade Epistêmica, Idoneidade Cognitiva, Idoneidade Mediacional, Idoneidade Emocional, Idoneidade Interacional e Idoneidade Ecológica.

Como já apresentado, cada uma dessas dimensões ou idoneidade faz referência a um objeto, questão, comportamento ou sujeito de um processo de ensino e aprendizagem. Além disso, cada uma dessas dimensões ou idoneidades é apresentada a partir de um conjunto de indicadores e descritores que pontuam, de maneira detalhada, a que se refere cada uma dessas dimensões.

No que se refere à Idoneidade Epistêmica, Godino (2011) pondera, como questão principal para se obter uma alta idoneidade epistêmica, a escolha e adequação de situações-problema. Porém, embora apontar as situações-problema seja componente fundamental para uma alta idoneidade epistêmica, salienta, também, o valor das diversas representações, meios de expressão, definições, proposições, procedimentos, como também suas justificações, destacando, assim, os indicadores de idoneidade epistêmica, os quais são apresentados no quadro da Figura 4.

Figura 4 - Componentes e Indicadores Epistêmicos (Ferramenta de Análise Epistêmica).

Componentes	Indicadores
Situações-problema	a) apresenta-se uma mostra representativa e articulada de situações de contextualização, exercícios e aplicações; b) propõem-se situações de generalização de problemas (problematização).
Linguagem	a) uso de diferentes modos de expressão matemática (verbal, gráfica, simbólica), tradução e conversão entre as mesmas; b) o nível de linguagem é adequado aos estudantes; c) propõem-se situações de expressão matemática e interpretação.

Regras: definições, proposições, procedimentos	a) as definições e procedimentos são claros e corretos e estão adaptados ao nível educativo a que se dirigem; b) apresentam-se enunciados e procedimentos fundamentais do tema para o nível educativo dado; c) propõem-se situações nos quais os estudantes tenham que generalizar ou negociar definições, proposições ou procedimentos.
Argumentos	a) as explicações, comprovações e demonstrações são adequadas ao nível educativo a que se dirigem; b) promovem-se situações nos quais os estudantes tenham que argumentar.
Relações	a) os objetos matemáticos (problemas, definições, proposições) se relacionam e conectam entre si.

Fonte: Godino (2011, p. 49-68).

Em Godino et al (2006), é evidenciado que, para se alcançar uma alta idoneidade epistêmica, é necessário sugerir situações-problema as quais considerem os significados de referência e aplicar em situações que possibilitem investigar os conhecimentos almejados, por meio da problematização e contextualização, em que os alunos sejam instigados a formular e reformular questões, assim como empregá-las em diferentes situações. Quanto à linguagem, assinalam para um trabalho direcionado às distintas representações, traduções e conversões, como também práticas que possibilitem aos educandos propagar e compartilhar suas proposições, procedimentos e argumentos. Sem deixar de colocar em evidência as outras dimensões, definições, proposições e procedimentos marcam que esses devem ser tomados dos significados de referência e ajustados ao nível dos alunos, sendo devidamente explanados. Os autores apontam, ainda, que:

> O juízo positivo sobre a idoneidade epistêmica de um processo de estudo deve levar em conta as conexões e interações entre os elementos mencionados. Os elementos conceituais, proposições e procedimentos devem ter sido contextualizados mediante a situações, explicados e justificados com argumentos pertinentes e todos os estes elementos apoiados por recursos expressivos e eficazes (GODINO et al, 2006, p. 233).

Andrade (2014), tomando como referência Godino (2011), apresenta o que denomina de “ferramentas de análise”. Assim, os componentes e indicadores da Idoneidade Epistêmica apresentados, no quadro da Figura 4, compõem a chamada Ferramenta de Análise Epistêmica – FAE. A autora destaca, ainda: a Ferramenta de Análise Cognitiva- FAC (Figura 5); a Ferramenta de Análise Ecológica- FAECO (Figura 6); a Ferramenta de Análise Emocional- FAEMO (Figura 7); a Ferramenta de Análise Interacional- FAI (Figura 8); a Ferramenta de Análise Mediacional- FAM (Figura 9). A seguir, essas ferramentas de análise serão apresentadas.

A ferramenta de Análise Cognitiva (FAC), tem como objetivo determinar se os significados almejados estão na zona de desenvolvimento potencial dos estudantes, incumbindo-os a estruturar atividades que permitam tal aproximação (GODINO, 2011; ANDRADE, 2014).

Godino (2011) define como componentes, o raciocínio lógico, a leitura e interpretação e a análise, procurando então, constituir indicadores que identifiquem o desenvolvimento cognitivo dos estudantes e auxiliem no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, conforme apresentado na Figura 5.

Figura 5 - Ferramenta de Análise Cognitiva (FAC)

Componentes	Indicadores
Raciocínio Lógico	a) propõem-se situações que possibilitam observar, analisar, raciocinar, justificar ou provar ideias; b) promovem-se situações nos quais os alunos tenham que coordenar as relações previamente criadas entre os objetos (problema, definições, informações).
Leitura/Interpretação	a) apresentam-se situações de expressão matemática e interpretação nos quais os estudantes possam pensar, analisar e refletir sobre as informações; b) propõem-se situações de leitura e interpretação adequadas ao nível dos estudante; c) apresentam-se situações que possibilitem analisar ou referir-se a um mesmo objeto matemático, considerando diferentes representações.
Análise/Síntese	a) propõem-se situações de particularização e de generalização de problemas; b) promovem-se situações em que os estudantes precisam relacionar objetos matemáticos (problema, definições, informações) de forma específica ou ampla.

Fonte: Andrade (2014, p. 106)

Para a Ferramenta de Análise Ecológica (FAECO), de acordo com Andrade (2014) e Godino (2011), os elementos que se encontram fora da sala de aula, condicionam a atividade que está sendo desenvolvida, referindo-se à sociedade, à escola, à pedagogia e à didática da Matemática. O autor também destaca que o procedimento de estudo acontece em um contexto educacional determinado por finalidades e que valores para formação de cidadãos e profissionais devem ser respeitados.

Diante disso, Andrade (2014) considerou, como componentes para definir essa ferramenta, a escola, o currículo e a sociedade, procurando atender as perspectivas e considerar um plano de ação formativo para aprender Matemática avaliando o entorno no qual ela é desenvolvida. Os componentes e indicadores que constituem essa ferramenta são apresentados no quadro da Figura 6.

Figura 6 - Ferramenta de Análise Ecológica (FAECO)

Componentes	Indicadores
Escola	a) espaço de desenvolvimento e aprendizagem envolvendo experiências contempladas nesse processo (aspectos culturais, cognitivos, afetivos, sociais e históricos); b) constitui-se em espaço que possibilita o uso de metodologias, recursos diversificados e tecnologia; c) ambiente que incentiva a formação de valores e pensamento crítico.
Currículo	a) o ensino está adaptado às orientações da escola, aos documentos oficiais; b) apresentam-se situações de problematização e contextualização, realizando conexões com outros conteúdos; c) valoriza-se a pluralidade cultural dos alunos; d) os conteúdos e a avaliação atendem as diretrizes curriculares; e) o ensino é coerente ao nível educativo a que se dirige;
Sociedade	a) percebe-se a valorização de aspectos da vida dos estudantes no ambiente escolar; b) percebe-se a presença da comunidade no processo de escolarização promovida pela escola.

Fonte: Andrade (2014, p. 107).

A Ferramenta de Análise Emocional (FAEMO) busca constituir indicadores que destaquem o comprometimento dos discentes durante o processo de ensino, por meio de configurações didáticas. Assim, conforme (Andrade, 2014), são consideradas como componentes de análise a motivação/interesse, o envolvimento e as crenças/atitudes, conforme apresentado no quadro da Figura 7.

A autora ressalta, ainda que,

> [...] os aspectos afetivos devem ser considerados no processo de ensino e aprendizagem por instituições de ensino e, em particular, pelo professor. O domínio afetivo envolve, portanto, aspectos institucionais e se concretiza por meio de normas de caráter afetivo que condicionam o trabalho docente. ANDRADE (2014, p.108).

Figura 7 - Ferramenta de Análise Emocional (FAEMO)

Componentes	Indicadores
Motivação/Interesse	a) incentiva-se o trabalho cooperativo; b) propõem-se situações adaptadas ao nível educativo dos alunos, levando em consideração seus interesses.
Envolvimento	a) apresentam-se configurações didáticas que proporcionam o envolvimento dos estudantes; b) estimulam-se as relações entre professor-aluno, aluno-aluno, professor- professor, para qualificar o processo de ensino e aprendizagem.
Crenças/Atitudes	a) promove-se um trabalho que supere a visão da Matemática como algo difícil e acessível a poucos.

Fonte: Andrade (2014, p. 108).

Godino et al (2006) ressaltam que, para se conseguir uma alta idoneidade emocional, as situações sugeridas, durante o processo de ensino e aprendizagem, necessitam indicar um ambiente de trabalho que considere as curiosidades dos estudantes, seu envolvimento e um trabalho cooperativo.

Quanto à Ferramenta de Análise Interacional (FAI), de acordo com (Godino, 2012; Andrade, 2014), procura investigar as relações formadas entre professor-aluno, aluno-aluno e aluno-conhecimento, visando entender, definir ou minimizar os conflitos semióticos que ocorrem no processo instrucional.

Andrade (2014) ressalta, ainda, que, para a criação desses componentes, apresentados na figura 8, foram também levados em conta,

> [...] os princípios de aprendizagem sócio-construtivista assumidos pelo EOS, os quais valorizam a presença de momentos em que os estudantes assumem a responsabilidade da aprendizagem. A aceitação desse princípio de autonomia da aprendizagem, segundo Godino (2011), é uma característica da TSD, em que 'as situações de ação, comunicação e validação são vistas como momentos adidácticos dos processos de estudo, ou seja, situações em que os alunos são protagonistas na construção dos conhecimentos pretendidos' (ANDRADE, 2014, p. 108).

Figura 8 - Ferramenta de Análise Interacional (FAI)

Componentes	Indicadores
Diálogo/Comunicação	a) propõem-se momentos de discussão coletiva; b) há espaço para intervenção docente e discente; c) promovem-se oportunidades de discussão/superação dos conflitos semióticos através da argumentação.
Interação	a) propõem-se situações que ampliam as relações de comunicação com outros alunos, com o professor, com o material de ensino; b) organizam-se situações para identificação e resolução de conflitos semióticos mediante interpretação de significados.
Autonomia	a) propõem-se momentos em que os discentes assumam a responsabilidade do estudo; b) apresentam-se situações que possibilitem ao estudante raciocinar, fazer conexões, resolver problemas e comunicá-los.

Fonte: Andrade (2014, p. 109).

Por fim, a Ferramenta de Análise Mediacional (FAM), proposta por Andrade (2014), Godino (2011) sugere como componentes e indicadores os recursos tecnológicos, evidenciando que precisam ser analisadas, também, as condições ambientais da sala de aula, a relação aluno e professor e o tempo destinado ao ensino e à aprendizagem. Levando em consideração esses pressupostos, propõe, então, dois componentes para a FAM: recursos didáticos e tempo didático, conforme apresentado no quadro da figura 9.

De acordo com Andrade (2014), a Ferramenta possibilita o seu uso para avaliar a flexibilidade e a adequação dos recursos necessários para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem da Matemática por meio de materiais concretos, recursos e tempo.

Figura 9 - Ferramenta de Análise Mediacional (FAM)

Componentes	Indicadores
Recursos Didáticos	a) evidencia-se a presença de materiais adequados ao desenvolvimento do processo de ensino e adaptados ao nível educativo a que se dirigem; b) há uma diversificação de recursos para auxiliar no processo de ensino, tais como: audiovisuais, material concreto, livros, entre outros;

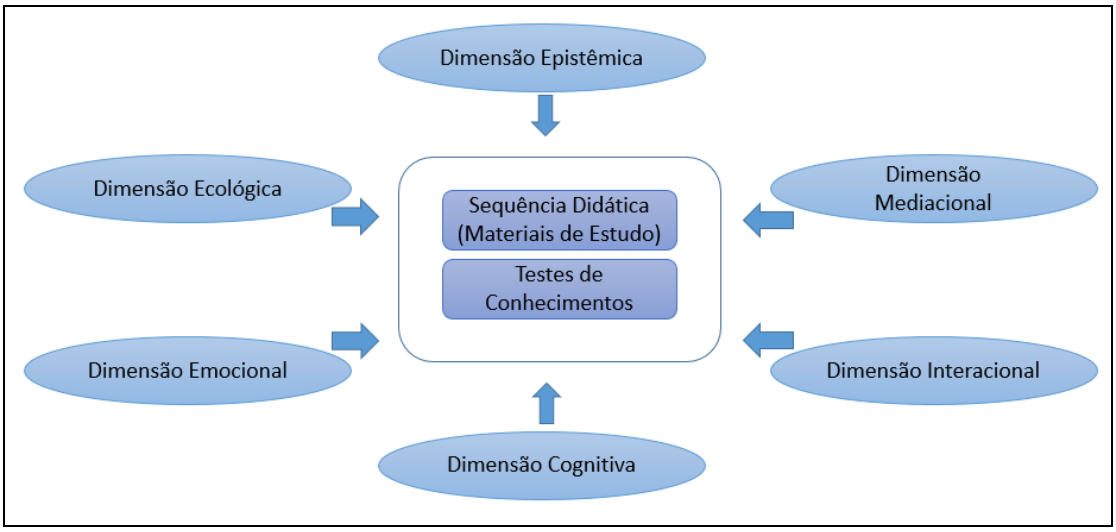
	c) propõe-se a organização e experimentação de situações práticas.
Tempo didático	a) apresentam-se situações de ensino que contemplam diversas modalidades (estudo pessoal, cooperativo, tutorial, presencial); b) evidencia-se a organização do tempo para intervenção docente, trabalho autônomo dos estudantes e momentos de discussão; c) dedica-se um tempo maior para o desenvolvimento dos conhecimentos, caso os estudantes apresentem dificuldade de compreensão.

Fonte: Andrade (2014, p. 109).

A elaboração da Sequência Didática se valeu dos componentes e indicadores das diferentes idoneidades, para orientar a sua organização e constituição, sempre que possível ou pertinente. Assim, as Ferramentas de Análise Epistêmica, Cognitiva, Emocional, Interacional e Mediacional foram utilizadas, tanto para a seleção das questões do teste de conhecimento como na elaboração da sequência didática.

No que se refere às análises fundamentadas pelo EOS, foi lançado um olhar para a proposta de estudos da Sequência Didática, por meio das dimensões da Idoneidade Didática, buscando alcançar graus de idoneidade o mais alto possível, nos tópicos estudados, considerando cada uma das dimensões, segundo esquematiza a Figura 10.

Figura 10– Dimensões da Idoneidade Didática: esquema de análise



Fonte: o autor.

Assim, tanto os Testes de Conhecimento propostos como a Sequência Didática foram estruturados tendo como orientação os componentes e indicadores das dimensões apontadas pela Idoneidade Didática.

5 ASPECTOS METODOLÓGICOS

Considerando a questão de investigação que norteia o trabalho realizado e os objetivos estabelecidos, a investigação se coloca em uma perspectiva qualitativa. Bogdan e Biklen (1994) apontam que as pesquisas qualitativas se caracterizam por ter o ambiente como fonte de dados, que são essencialmente qualitativos e analisados de forma indutiva por um investigador, que é o responsável pela recolha de dados; os procedimentos metodológicos seguem pressupostos qualitativos e o interesse está mais no processo que nos resultados.

Pelo tipo de trabalho proposto e no âmbito de uma investigação de orientação qualitativa, tomou-se como aporte os constructos da Investigação Baseada no Design (IBD)[3] (Godino et. al., 2013), que se refere ao *design* e à análise sistemática de estratégias e ferramentas instrucionais. Embora na IBD o design instrucional e a investigação sejam interdependentes, ou seja, uma investigação não contempla somente a fase de design (projetar), mas também, a experimentação e a avaliação de resultados (Godino et al, 2013), no contexto da investigação produzida, a fase da experimentação, ou seja, a aplicação da Sequência Didática produzida junto a estudantes de Ensino Médio não foi desenvolvida. Inicialmente, o objetivo era implementar uma fase de experimentação junto aos estudantes, mas a realidade que se apresentou na Escola onde seria realizada não permitiu que ocorresse.

De acordo com Godino et. al. (2013), a Investigação baseada no Design busca superar a lacuna existente entre as investigações científicas e as práticas educativas, assumindo como pressuposto que a pesquisa educativa, separada da prática, pode não considerar elementos e influências dos contextos sobre a natureza complexa dos resultados ou, ainda, não identificar adequadamente as restrições e condições.

Godino et al (2013) ressaltam que o coletivo de autores que compõem o The Design Based Research Collective (DBRC) estabeleceram cinco características para o IBD, a saber:

- o objetivo central do design, em torno das aprendizagens, e o desenvolvimento de teorias de aprendizagens (ou teorias em constituição) estão interligados;
- o desenvolvimento e a investigação são ciclos contínuos de design, implementação e análise;

[3] Tradução livre do autor de Investigación basada en el Diseño (IBD) (GODINO et. al., 2013).

• a investigação baseada no design deve levar em conta teorias que podem ser compartilhadas com professores e designers instrucionais para comunicar implicações relevantes;

• a investigação deve explicar como funcionam os designs, não apenas documentar o sucesso ou fracasso, mas informar sobre as interações que refinam a compreensão das questões envolvidas na aprendizagem;

• o desenvolvimento e a implementação devem se basear em métodos que possam ser documentados e permitam conectar os processos de intervenção com os resultados.

Os autores destacam, ainda, que a IBD, normalmente, é projetada em um "ambiente de aprendizagem" que contempla atividades, materiais, ferramentas e outros elementos para apoio à aprendizagem, o que leva a maioria desses experimentos a serem destinados a apoiar a aprendizagem de estudantes em um conteúdo particular.

Em seus estudos, Godino et al (2013) consideram quatro fases para a IBD,

• Estudo preliminar das dimensões epistêmicas–ecológica, cognitiva–afetiva e instrucional.

• Design da trajetória didática, seleção dos problemas, sequência e análise a priori dos mesmos, com indicações dos comportamentos esperados dos estudantes e a planificação das intervenções controladas do professor.

• Implementação da trajetória didática, observação das interações entre os sujeitos e os recursos e avaliação da aprendizagem atingida.

• Avaliação ou análise retrospectiva, que segue um contraste entre o previsto no design e o observado na implementação.

Os autores destacam que essas fases se relacionam, diretamente, com as da Engenharia Didática, sendo que a utilização da denominação diferenciada se refere à fundamentação e desenvolvimento das fases, segundo os pressupostos ontológicos, semióticos, pragmáticos e antropológicos próprios do EOS (Godino et al, 2013).

Godino et al (2013) apontam que, em cada uma das fases do IBD (estudo preliminar, design, implementação e avaliação), devem ser consideradas as dimensões epistêmica, cognitiva, afetiva, interacional e ecológica, estabelecendo os significados institucionais postos em jogo em cada fase do processo, os significados pessoais dos estudantes, as interações entre professor, estudante, material e as negociações de significados (GODINO, 2014). Como já destacado, embora o trabalho considere os aportes da IBD, a fase de experimentação não foi realizada, porém, foi mantida a estrutura inicial, pois se tem a intenção de dar continuidade à investigação desenvolvendo experimentações.

Assim, considerando as fases da IBD, bem como as decisões tomadas frente ao processo investigativo, o quadro da Figura 11 destaca as fases da pesquisa.

Figura 11- Fases da Investigação

FASES	DESCRIÇÃO
Estudo Preliminar	• Análise de um conjunto de livros didáticos tendo como foco o estudo de Funções. • Análise dos documentos oficiais sobre o que dizem a respeito do trabalho com Funções. • Análise dos conteúdos dos conhecimentos que propostos a serem ensinados sobre às Funções Exponencial e Logarítmica.
Design da Trajetória Didática	• Criação de um Banco de Questões sobre Funções Exponencial e Logarítmica. • Tomada de decisões sobre os temas de interesse. • Construção da Sequência Didática. • Implementação na plataforma Google Classroom
Implementação da Trajetória Didática	• Fase não desenvolvida.
Avaliação ou Análise Retrospectiva	• Análise produzida na Sequência Didática por um grupo de professores.

Fonte: a pesquisa.

Destaca-se que o projeto inicial envolvia a implementação da trajetória didática, o que não ocorreu em função da pandemia da COVID-19, que manteve as escolas fechadas durante o ano de 2020, sendo as atividades desenvolvidas em modo remoto. Esse tipo de atividade envolveu uma organização que, no caso do Instituto Federal, inviabilizou a implementação do projeto. Porém, foi intensificada a fase de Avaliação, que, inicialmente, seria realizada por professores em exercício no Instituto Federal que desejassem participar. Assim, optou-se por avaliar a Sequência Didática, enquanto proposta, ampliando-se o número de professores participantes dessa avaliação. Foram convidados a participar da mesma 50 professores e ex-professores do Instituto Federal e professores de Matemática que estavam desenvolvendo seus estudos de pós-graduação no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil – ULBRA, porém o instrumento de avaliação foi aplicado junto a um grupo de 50 professores, dos quais apenas 30 responderam à pesquisa. Esse recorte ocorreu em função de se ter acesso aos contatos desses professores, em um momento crítico para o País, como um todo.

5.1 SOBRE O DESIGN DA TRAJETÓRIA DIDÁTICA

A Sequência Didática Eletrônica Funções Exponencial e Logarítmica foi organizada considerando duas partes distintas, interligadas, mas não dependentes: Testes de Conhecimento e Sequência Didática.

Para a produção dos Testes de Conhecimentos foram tomados como referência estudos e análises produzidas na fase de Estudo Preliminar. Assim, considerou-se o proposto na Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2017) na área da Matemática, tendo como enfoque o tema Funções, mais precisamente, Exponenciais e Logarítmicas. Também foram considerados os resultados da análise produzida, em um conjunto de livros didáticos, com o intuito de verificar não só conteúdos que são abordados, mas também os caminhos adotados para essa abordagem (análise guiada pelos componentes e indicadores da Idoneidade Didática referente às dimensões epistêmico-ecológicas, cognitivo-afetivo e instrucional). Por fim, destacam-se os pressupostos presentes no Relatório Nacional do PISA/2012 (BRASIL, 2014).

Assim, as questões propostas, nos testes, foram retiradas ou adaptadas de livros didáticos, provas do Exame Nacional do Ensino Médio, provas de vestibulares de diferentes Instituições e provas das Olimpíadas Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, entre outros.

As questões foram tomadas, em um primeiro momento, a partir da construção de um banco de questões identificadas como relacionadas às Funções Exponencial e Logarítmicas, incluindo propriedades de Potências e Logaritmos. Desse conjunto, as questões foram sendo categorizadas, considerando o conteúdo de conhecimento a que se referia e o possível grau de dificuldade (fácil, média ou difícil). Também foram sendo analisadas de acordo com os componentes e indicadores da Idoneidade Epistêmica, dimensão da Idoneidade Didática do EOS, conforme apresentado no quadro da Figura 4.

Já a Sequência Didática foi organizada, considerando 6 módulos, 3 que correspondem ao estudo da Função Exponencial e 3, referentes à Função Logarítmica. A Sequência Didática e sua organização é apresentada no Capítulo 5 desta Dissertação.

5.2 PARTICIPANTES DA INVESTIGAÇÃO E INSTRUMENTOS DE COLETA DE DADOS

Dados referente à análise da Sequência Didática Eletrônica Funções Exponencial e Logarítmica (Testes de Conhecimento e Sequência Didática) foram obtidos a partir do protocolo Instrumento de Investigação – Análise (Apêndice A), o qual foi aplicado junto a um grupo de 30 professores de Matemática que possuem, ou já possuíram vínculos com o Instituto Federal de Educação de Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul, Campus Bento Gonçalves ou com o PPGECIM (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática) da Ulbra (Universidade Luterana Do Brasil).

O Instrumento de Investigação foi organizado em três seções, cada uma com um objetivo diferente. A primeira é destinada ao termo de consentimento em que o professor precisa concordar em participar da pesquisa (Anexo A). A segunda seção é referente ao perfil do docente, sendo dividida em duas partes: a primeira, formada por um grupo de perguntas fechadas com o intuito de traçar a formação acadêmica e a área de atuação profissional; a segunda é destinada a questões relacionadas à utilização de tecnologias digitais (com questões fechadas e abertas). Por fim, a terceira seção, refere-se à Sequência Didática Eletrônica, que é separada em três partes: a primeira com questões fechadas que envolvem a Sequência Didática; a segunda parte, também composta com questões fechadas questionando os professores sobre os Testes de Conhecimentos, sendo que, nessas duas partes, o professor avalia cada módulo individualmente. E, para finalizar, a terceira seção apresenta seis questões sendo quatro fechadas e duas abertas, para que os professores opinem sobre a Sequência Didática em geral.

Destaca-se que a investigação contou com a autorização dos professores participantes (Anexo B), tendo sido submetida ao Comitê de Ética em Pesquisa em Seres Humanos (CEP) e aprovada pelo parecer consubstanciado do CEP, número 4.006.087 de 2020.

6 AS PRIMEIRAS ANÁLISES E A SEQUÊNCIA DIDÁTICA ELETRÔNICA FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

No presente capítulo, são apresentadas o que se denominou de primeiras análises, os estudos e análises que foram realizados previamente para que fosse elaborada e organizada a Sequência Didática. Para esse estudo, foi investigado na Base Nacional Comum Curricular, nas Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio e num conjunto de livros didáticos, tendo como foco o estudo de Funções. A seguir, será apresentada a Sequência Didática Eletrônica Funções Exponencial e Logarítmica (testes de conhecimento e sequência didática). Por isso, são destacados aspectos da leitura de documentos oficiais e, em seguida, a análise de livros didáticos.

6.1 PRIMEIRAS ANÁLISES: OS DOCUMENTOS OFICIAIS

No que se refere à aprendizagem de Funções e buscando as competências e habilidades propostas para o estudo Funções no Ensino Médio, é observa-se que é incentivada a abordagem do tema a partir da relação de dependência entre duas grandezas, bem como é dado ênfase à necessidade de abordá-la segundo diferentes tipos de representações, conforme posto na Base Nacional Curricular Comum (BNCC) (BRASIL, 2017, p. 527) quando é destacado ser necessário compreender função “para identificar a relação de dependência entre duas grandezas em contextos significativos e comunicá-la, utilizando diferentes escritas algébricas, além de resolver situações-problema por meio de equações e inequações.”

A BNCC aponta, também, as habilidades previstas para que os alunos entendam o que se refere às Funções Exponencial e Logarítmica, sugerindo que eles desenvolvam, mais especificamente, na parte de Funções Exponenciais, as seguintes aptidões:

> Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais é necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira e o do crescimento de seres vivos microscópicos, entre outros. (BRASIL, 2017, p. 528).

Já para Funções Logarítmicas, as habilidades que precisam ser atingidas referem-se a:

> Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais é necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros. (BRASIL, 2017, p. 528).

As duas habilidades citadas, tanto a que se refere às Funções Exponenciais como às Logarítmicas, estão relacionadas à Competência Específica 3, a qual se refere a:

> Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente (BRASIL, 2017, p. 535).

Assim, as habilidades indicadas para o desenvolvimento dessa competência específica, de acordo com o documento, estão relacionadas à “interpretação, construção de modelos, resolução e formulação de problemas matemáticos envolvendo noções, conceitos e procedimentos quantitativos, geométricos, estatísticos, probabilísticos, entre outros. ” (BRASIL, 2017, p. 535).

Na Competência Específica 4, que visa “compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas. ” (BRASIL, 2017, p. 538) estão atreladas duas habilidades, ligadas tanto às Funções Exponenciais como às Logarítmicas e referem-se a:

> Comparar e analisar as representações, em plano cartesiano, das funções exponencial e logarítmica para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada uma, com ou sem apoio de tecnologias digitais, estabelecendo relações entre elas. (BRASIL, 2017, p. 531).

Por fim, a Competência Específica 5, que se refere a:

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (BRASIL, 2017, p. 540).

Nessa competência foi possível identificar uma única habilidade, relacionada, particularmente, à Função Exponencial e que se refere à “Identificar e associar sequências numéricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos para análise de propriedades, incluindo dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas. ” (BRASIL, 2017, p. 541).

Anteriormente, a BNCC, era orientada pelas Orientações Curriculares para o Ensino Médio, que foram formadas a partir de um enorme debate com as equipes técnicas dos Sistemas Estaduais de Educação, docentes e discentes da rede pública e representantes do grupo acadêmico. O principal objetivo desse documento é colaborar para o diálogo entre professor e a escola sobre a prática docente.

Fazendo uma busca nas Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio – PCNEM, mais especificamente no Volume 2- Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, também são encontradas algumas indicações de como iniciar o estudo de Funções, como, por exemplo,

> ser iniciado com uma exploração qualitativa das relações entre duas grandezas em diferentes situações: idade e altura; área do círculo e raio; tempo e distância percorrida; tempo e crescimento populacional; tempo e amplitude de movimento de um pêndulo, entre outras. (BRASIL, 2006, p.72)

O material ainda complementa afirmando que é significativo que o aluno seja instigado a demonstrar outras relações fundamentais e ainda, ilustre qualitativamente, os gráficos que caracterizem essas relações, mostrando quais gráficos crescem ou decrescem em maior velocidade.

Já relacionado às Funções Exponenciais e Logarítmicas, não são trazidas ao professor muitas orientações, dizendo apenas que situações cotidianas sobre crescimento populacional elucidam, de maneira eficaz, o modelo exponencial e também,

> Dentre as aplicações da Matemática, tem-se o interessante tópico de Matemática Financeira como um assunto a ser tratado quando do estudo da função exponencial – juros e correção monetária fazem uso desse modelo. Nos problemas de aplicação em geral, é preciso resolver uma equação exponencial, e isso pede o uso da função inversa – a função logaritmo. (BRASIL, 2006, p.75)

Para finalizar o bloco referente às Funções, o documento aponta que, para o nível de ensino que está sendo trabalhado, não é aconselhável que se faça um estudo muito aprofundado sobre os logaritmos.

6.2 PRIMEIRAS ANÁLISES: LIVROS DIDÁTICOS

A existência do PNLD justifica-se pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) Nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que assegura a distribuição de material didático como parte do dever do Estado com a educação escolar pública (Art. 4º): “VIII – atendimento ao educando, em todas as etapas da educação básica, por meio de programas suplementares de material didático-escolar, transporte, alimentação e assistência à saúde.

O Programa Nacional do Livro Didático- PNLD foi criado pelo Decreto nº 91.542, de 19 de agosto de 1985. Sua elaboração empenhou-se com a avaliação e o compartilhamento dos livros a todos os alunos das escolas públicas de 1º grau. O Programa distribui para essas escolas, a cada quatro anos, livros didáticos que os estudantes usarão durante o ano letivo, de forma totalmente gratuita: o aluno não paga e tem acesso a materiais didáticos de qualidade. A escolha de cada escola não interfere no conteúdo que será lecionado. Isso se deve ao fato de que todos os livros selecionados estão em concordância com a BNCC e suas especificidades.

Segundo a Associação Brasileira de Editores de Livros (ABRELIVROS), a qualidade dos exemplares distribuídos às escolas públicas do país melhorou satisfatóriamente após implantação, em 1985, do PNDL, mantido pelo Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE), do Ministério da Educação, com recursos do Orçamento Geral da União e do salário-educação.

Os livros que serão analisados, em seguida, terão como foco os capítulos ligados às Funções Exponenciais e Logarítmicas, dando enfase a como é abordado a assunto inicial, o que é trabalhado ao longo do capítulo e como são as estruturas das atividades propostas. Os exemplares são: Conexões Com a Matemática presente no PNLD do ano de 2018 e Matemática - Contexto e Aplicações do PNLD em 2015. A escolha desses dois livros para análise, se deu pelo fato de estarem presentes no PNLD, entre os livros mais indicados, e constarem como livros didáticos apontados pelo Instituto Federal de Educação de Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul Campus Bento Gonçalves (local onde, inicialmente a investigação iria ocorrer).

O primeiro livro a ser apresentado é da editora Moderna, intitulado Conexões com a Matemática, 3ª edição, de autoria de Fabio Martins de Leonardo (Leonardo, 2016). A obra é organizada em 11 capítulos. Aqui, serão abordados o capítulo 3, o qual se refere ao tópico de Funções, e os capítulos 7 e 8, relativos às Funções Exponenciais e Logarítmicas. Antes de trabalhar com cada modelo de Função, a obra apresenta um capítulo inicial onde são discutidos: conceito de função, representação gráfica, Função Polinomial, funções definidas por mais de uma sentença e, por fim, Função Inversa. Para abordar o conceito inicial de Função, é apresentada uma situação-problema, conforme destacado na Figura 12.

Figura 12 –Conceito de Função

1 Conceito de função

1.1 A ideia de função no cotidiano

Nas férias escolares, Mônica e seus pais decidiram fazer uma viagem para Bonito. Para isso, procuraram uma agência de turismo que oferecia pacotes de acordo com a quantidade de pessoas que viajaria. O pacote que a família de Mônica escolheu custava R$ 600,00 por pessoa. Considerando essas informações, podemos calcular o valor a ser pago na viagem relacionando duas grandezas: a quantidade de pessoas e o preço correspondente a essa quantidade. Veja.

Quantidade de pessoas	Preço (R$)
1	600,00
2	1.200,00
3	1.800,00
5	3.000,00
n	$600n$

Fonte: Leonardo (2016, p.54).

De acordo com Selbach, uma situação-problema oferece ao aluno, um momento para

> atuar de forma protagonista, expondo o que sabe, mostrando o seu pensar, colocando em ação seu esforço e sua linguagem, transferindo conhecimentos construídos em uma situação para outra, avaliando sua adequação e esboçando conclusões. (SELBACH, 2010, p. 92).

Em seguida, é apresentada uma explicação afirmando que o preço é a Função da quantidade de pessoas e, que a cada número o qual define o número de pessoas corresponde um único número, o qual define o preço total. Em seguida, depois de explorar a situação intuitivamente, é apresentada a definição de Função baseada na relação entre conjuntos, conforme ilustrado na Figura 13.

Figura 13- Definição de Função.

Considerando dois conjuntos, A e B, não vazios, dizemos que f é uma **função** de A em B (ou que y é uma função de x) se, e somente se, para cada elemento x de A existe, em correspondência, um único elemento y de B.
Indicamos essa função assim: $f: A \rightarrow B$ (lemos: "função f de A em B").

Fonte: Leonardo (2016, p.56).

Para abordar o conteúdo de gráficos, novamente, é exposto um problema aplicado ao cotidiano, que retrata a evolução de arrecadação das receitas federais, corrigidas pelo IPCA (Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo). A Figura 14 ilustra essa situação.

Figura 14- Gráfico de uma Função.

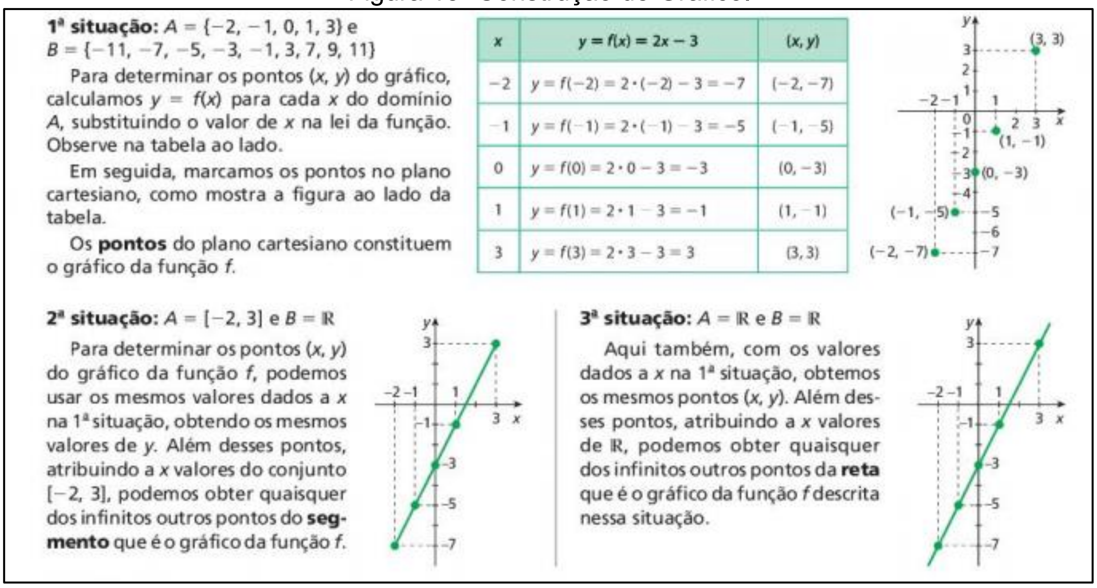
Fonte: Leonardo (2016, p.61).

As Orientações Curriculares Nacionais orientam que os alunos do Ensino Médio:

> [...] saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do cotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática non desenvolvimento científico e tecnológico (BRASIL, 2006, p.69).

Toda Função possui uma representação gráfica que a identifica e que a torna única em meio a diversas outras Funções, então é fundamental que o livro trabalhe, de maneira clara, para que o aluno compreenda a construção de gráficos e, para isso, são ilustradas três situações, que, ao final, ficam como sugestão de como construir um gráfico, o qual parte de conjunto já estabelecido. Então são transpassados esses dados para os gráficos, conforme ilustra a Figura 15.

Figura 15- Construção de Gráfico.



1ª situação: $A = \{-2, -1, 0, 1, 3\}$ e $B = \{-11, -7, -5, -3, -1, 3, 7, 9, 11\}$

Para determinar os pontos (x, y) do gráfico, calculamos $y = f(x)$ para cada x do domínio A, substituindo o valor de x na lei da função. Observe na tabela ao lado.

Em seguida, marcamos os pontos no plano cartesiano, como mostra a figura ao lado da tabela.

Os **pontos** do plano cartesiano constituem o gráfico da função f.

x	$y = f(x) = 2x - 3$	(x, y)
-2	$y = f(-2) = 2 \cdot (-2) - 3 = -7$	$(-2, -7)$
-1	$y = f(-1) = 2 \cdot (-1) - 3 = -5$	$(-1, -5)$
0	$y = f(0) = 2 \cdot 0 - 3 = -3$	$(0, -3)$
1	$y = f(1) = 2 \cdot 1 - 3 = -1$	$(1, -1)$
3	$y = f(3) = 2 \cdot 3 - 3 = 3$	$(3, 3)$

2ª situação: $A = [-2, 3]$ e $B = \mathbb{R}$

Para determinar os pontos (x, y) do gráfico da função f, podemos usar os mesmos valores dados a x na 1ª situação, obtendo os mesmos valores de y. Além desses pontos, atribuindo a x valores do conjunto $[-2, 3]$, podemos obter quaisquer dos infinitos outros pontos do **segmento** que é o gráfico da função f.

3ª situação: $A = \mathbb{R}$ e $B = \mathbb{R}$

Aqui também, com os valores dados a x na 1ª situação, obtemos os mesmos pontos (x, y). Além desses pontos, atribuindo a x valores de $\mathbb{R}$, podemos obter quaisquer dos infinitos outros pontos da **reta** que é o gráfico da função f descrita nessa situação.

Fonte: Leonardo (2016, p.63).

Quanto aos exercícios ligados a este capítulo, envolvem tanto atividades algébricas como com problemas contextualizados. Vale ressaltar que a ideia não está relacionada somente a conexões estabelecidas entre a Matemática e o cotidiano ou entre a Matemática e outras áreas do conhecimento. Nesse sentido, Barbosa (2004), ao mencionar a contextualização, acrescenta:

> A utilização do termo “contextualização” tem sido indevida, já que todas as atividades da matemática escolar pertencem a um determinado contexto. Dessa forma, não cabe reivindicar a contextualização do ensino da Matemática. Ele já está contextualizado. A questão é outra. Qual é o contexto? Quais contextos desejamos? (BARBOSA, 2004, p.2)

Na sequência da obra, no que se refere às Funções Exponenciais, há um exemplo sobre o crescimento populacional (Figura 16), onde são trazidos dados estatísticos do Censo Demográfico do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) a partir de 2010, fazendo projeções até o ano de 2030.

Figura 16- Crescimento Populacional.

Ano	População estimada
2010	190.755.799
2011	190.755.799 + 0,0117 · 190.755.799 ≃ 192.987.642
2012	192.987.642 + 0,0117 · 192.987.642 ≃ 195.245.597
⋮	⋮
2029	235.184.800 + 0,0117 · 235.184.800 ≃ 237.936.462
2030	237.936.462 + 0,0117 · 237.936.462 ≃ 240.720.318

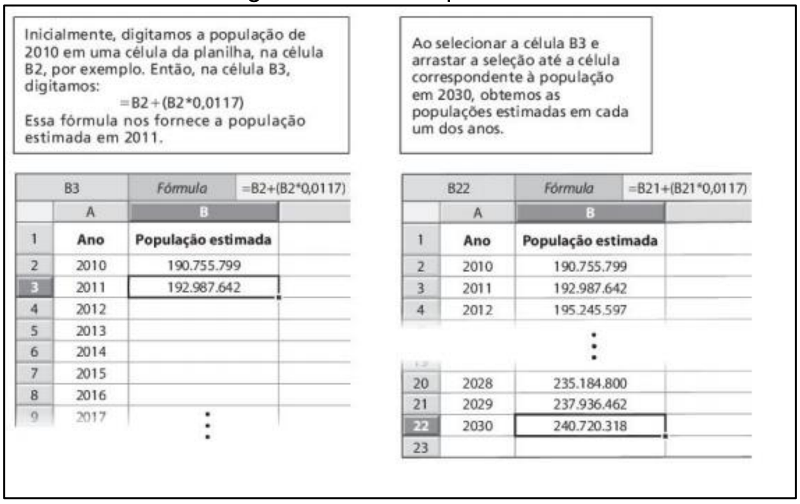
◆ Observação

Nesta página do IBGE, há diversas projeções para a população do Brasil e dos estados brasileiros: <www.ibge.gov.br/apps/populacao/projecao/>. Acesso em: 31 ago. 2015.

Fonte: Leonardo (2016, p.149).

Outro ponto positivo a destacar o estímulo ao uso de tecnologia, nesse caso, as planilhas eletrônicas como um facilitador nesse processo. O autor argumenta que, além de evitar todo trabalho que se tem ao construir uma tabela com diversas informações e a linha seguinte sempre depender da anterior, faz a utilização de uma planilha eletrônica é mais rápida e há menor chances de errar, visto que os cálculos são realizados pelo software, conforme Figura 17.

Figura 17- Uso de planilha eletrônica.


Inicialmente, digitamos a população de 2010 em uma célula da planilha, na célula B2, por exemplo. Então, na célula B3, digitamos:
=B2+(B2*0,0117)
Essa fórmula nos fornece a população estimada em 2011.

B3	Fórmula	=B2+(B2*0,0117)
	A	B
1	Ano	População estimada
2	2010	190.755.799
3	2011	192.987.642
4	2012	
5	2013	
6	2014	
7	2015	
8	2016	
9	2017	

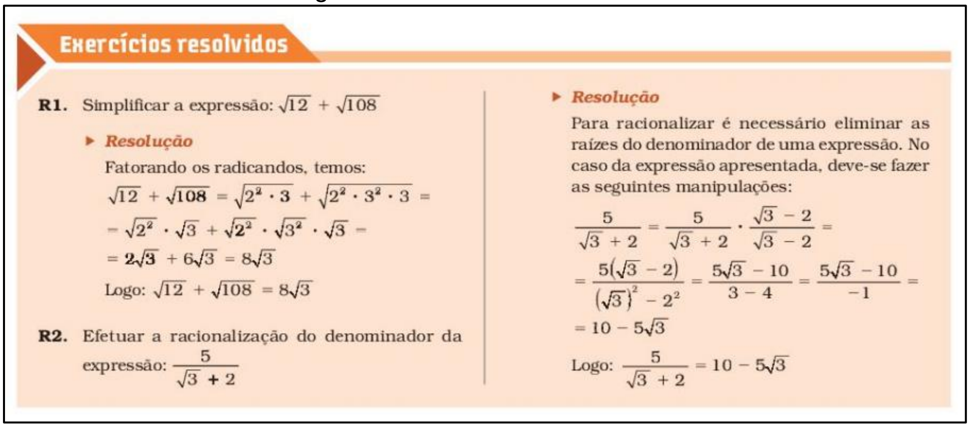
Ao selecionar a célula B3 e arrastar a seleção até a célula correspondente à população em 2030, obtemos as populações estimadas em cada um dos anos.

B22	Fórmula	=B21+(B21*0,0117)
	A	B
1	Ano	População estimada
2	2010	190.755.799
3	2011	192.987.642
4	2012	195.245.597
20	2028	235.184.800
21	2029	237.936.462
22	2030	240.720.318
23		

Fonte: Leonardo (2016, p.149).

O exemplar reforça o estudo do conteúdo potência, e suas propriedades, o que segundo o autor, facilitará, posteriormente, no entendimento da Função Exponencial. Nesse tópico, são trabalhados, potência com expoente natural, com expoente inteiro, a com expoente racional, com expoente irracional e com expoente real. Para cada um dos temas, é trazida a notação geral, com a sua resolução, do passo a passo até ela. Também são propostas listas de exercícios resolvidos (Figura 18) e, posteriormente, são dados exercícios para que o aluno resolva.

Figura 18- Exercícios resolvidos.


Exercícios resolvidos

R1. Simplificar a expressão: $\sqrt{12} + \sqrt{108}$

▸ *Resolução*

Fatorando os radicandos, temos:

$$\sqrt{12} + \sqrt{108} = \sqrt{2^2 \cdot 3} + \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 3} =$$
$$= \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{3} =$$
$$= 2\sqrt{3} + 6\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$$

Logo: $\sqrt{12} + \sqrt{108} = 8\sqrt{3}$

R2. Efetuar a racionalização do denominador da expressão: $\frac{5}{\sqrt{3}+2}$

▸ *Resolução*

Para racionalizar é necessário eliminar as raízes do denominador de uma expressão. No caso da expressão apresentada, deve-se fazer as seguintes manipulações:

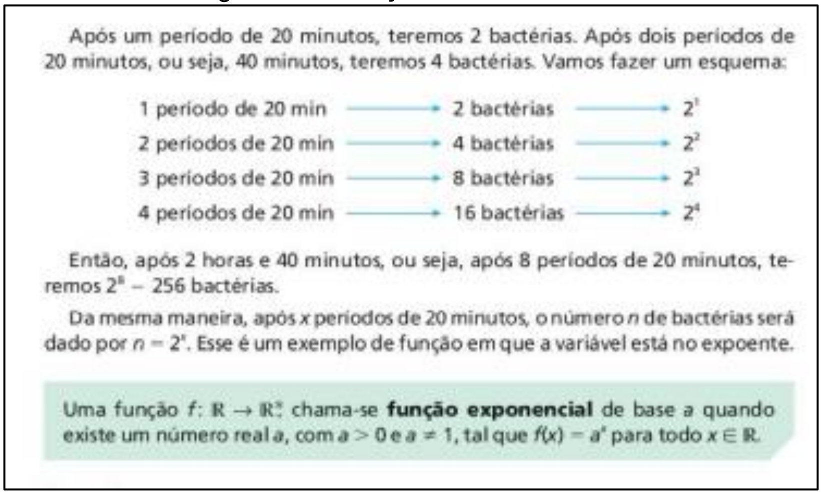
$$\frac{5}{\sqrt{3}+2} = \frac{5}{\sqrt{3}+2} \cdot \frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}-2} =$$
$$= \frac{5(\sqrt{3}-2)}{(\sqrt{3})^2 - 2^2} = \frac{5\sqrt{3}-10}{3-4} = \frac{5\sqrt{3}-10}{-1} =$$
$$= 10 - 5\sqrt{3}$$

Logo: $\frac{5}{\sqrt{3}+2} = 10 - 5\sqrt{3}$

Fonte: Leonardo (2016, p.153).

Para iniciar a Função Exponencial, o livro ilustra uma situação contextualizada, envolvendo o crescimento populacional de bactérias e as divisões binárias. Para a resolução, são utilizadas regras de 3 simples para chegar à forma da Função. De acordo com Orso (2014), o uso de modelos matemáticos para o estudo do crescimento biológico coopera, de maneira expressiva para o entendimento tanto do que envolve a Função Exponencial como das preocupações que envolvem esse crescimento em relação à saúde e segurança alimentar. Em seguida, é oferecida ao aluno a definição da Função Exponencial, conforme ilustra a Figura 19.

Figura 19- Situação contextualizada.



Após um período de 20 minutos, teremos 2 bactérias. Após dois períodos de 20 minutos, ou seja, 40 minutos, teremos 4 bactérias. Vamos fazer um esquema:

1 período de 20 min → 2 bactérias → 2^1

2 períodos de 20 min → 4 bactérias → 2^2

3 períodos de 20 min → 8 bactérias → 2^3

4 períodos de 20 min → 16 bactérias → 2^4

Então, após 2 horas e 40 minutos, ou seja, após 8 períodos de 20 minutos, teremos $2^8 = 256$ bactérias.

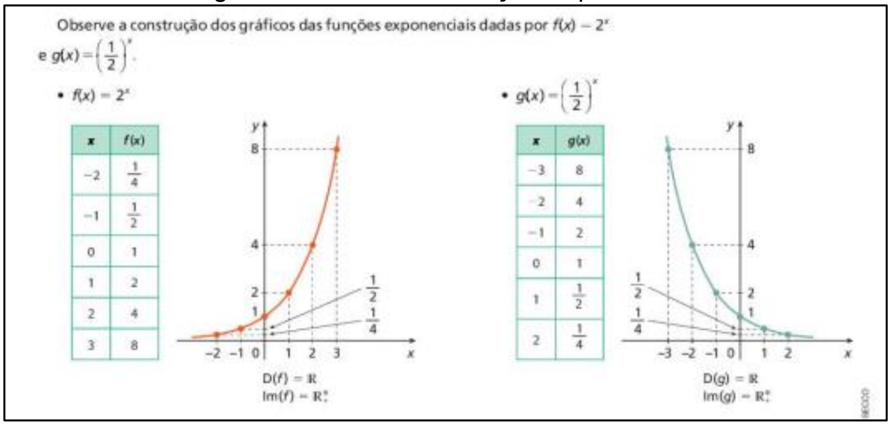
Da mesma maneira, após x períodos de 20 minutos, o número n de bactérias será dado por $n = 2^x$. Esse é um exemplo de função em que a variável está no expoente.

Uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ chama-se **função exponencial** de base a quando existe um número real a, com $a > 0$ e $a \neq 1$, tal que $f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Fonte: Leonardo (2016, p.155).

Quanto à construção de gráficos, são propostas duas Funções e, em seguida, é construída uma tabela em que são atribuídos os valores de x, para descobrir os respectivos valores de y, conforme Figura 20.

Figura 20- Gráfico da Função Exponencial.



Fonte: Conexões com a Matemática (p.155, 2016).

Em seguida, novamente, o exemplar propõe a utilização de um software, dessa vez, para a construção de gráficos. Cabe ressaltar que não é mencionado nenhum programa para que o aluno utilize, apenas que ele faça uso de algum para ter um melhor entendimento quanto às características de cada um. Para isso, é escolhido o conteúdo Funções com a base sendo maior que 1 e base estando entre 0 e 1. A cada assunto discutido, imediatamente após, são sugeridas atividades para resolução, sendo que a primeira, vem solucionada pelo autor, segundo ilustra a Figura 21.

Figura 21- Exercício resolvido- Função Exponencial.

Exercício resolvido

R5. Observar o gráfico da função f, dada por $f(x) = a \cdot 3^{-x} + b$, e determinar os valores de a e b.

▸ *Resolução*

Os pontos (1, 1) e (0, 1) pertencem ao gráfico de f.

Para $x = -1$, temos: $f(-1) = 1$

Assim: $1 = a \cdot 3^{-(-1)} + b \Rightarrow$

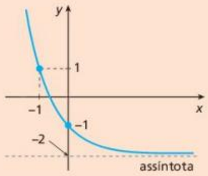
$\Rightarrow 1 = a \cdot 3 + b$ (I)

Para $x = 0$, temos: $f(0) = -1$

Assim: $-1 = a \cdot 3^{-(0)} + b \Rightarrow -1 = a \cdot 1 + b$ (II)

Resolvendo o sistema formado por (I) e (II), obtemos: $a = 1$ e $b = -2$

Portanto, $f(x) = 3^{-x} - 2$, ou seja: $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 2$



◆ Observação

Nesse caso, a assíntota do gráfico é a reta $y = -2$, pois o gráfico se aproxima cada vez mais dessa reta, sem tocá-la.

Para $f(x) \leq -2$, teríamos:

$\left(\frac{1}{3}\right)^x - 2 \leq -2 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x \leq 0$

Isso é um absurdo, pois $\left(\frac{1}{3}\right)^x$ é sempre maior que zero.

◆ Reflita

Por que, neste caso, $f(x)$ não pode ser menor ou igual a -2?

Fonte: Leonardo (2016, p.157).

Conforme mostra a Figura 22, é reservado, dentro do capítulo da Função Exponencial, um tópico referente às aplicações que ocorrem dentro dela. Também cita, por exemplo, a Biologia, Geologia, Engenharia e Matemática Financeira. Para isso, são expostos dois exemplos resolvidos sobre aplicação financeira e projeção da população de uma determinada região. Em seguida, são apresentados quatro exercícios envolvendo situações contextualizadas.

Figura 22- Aplicações da Função Exponencial.

a) Um capital de R$ 100,00 foi investido em uma aplicação financeira que rende 2% ao mês. Podemos utilizar a expressão $M(t) = 100 \cdot 1{,}02^t$ para calcular o saldo M dessa aplicação após t meses.

Para $t = 1$, temos: $M(1) = 100 \cdot 1{,}02^1 \Rightarrow M(1) = 102$

Portanto, após 1 mês o saldo será de R$ 102,00.

Para $t = 12$, temos: $M(12) = 100 \cdot 1{,}02^{12} \Rightarrow M(12) \simeq 126{,}82$

Logo, após 1 ano o saldo será aproximadamente de R$ 126,82.

b) Em determinada cidade, o número de habitantes é dado pela função H, sendo $H(r) = k \cdot 2^{3r}$, em que k é constante e r (que é o raio de distância a partir do centro dessa cidade) é positivo e dado em quilômetro.

Sabendo que existem 12.288 habitantes em um raio de 4 km contados desde o centro, quantos habitantes há em um raio de 6 km?

Empregando a função dada, podemos descobrir o valor da constante k:

$H(r) = k \cdot 2^{3r}$

$12.288 = k \cdot 2^{3 \cdot 4} \Rightarrow 12.288 = k \cdot 2^{12} \Rightarrow k = \frac{12.288}{2^{12}} \Rightarrow k = \frac{12.288}{4.096} \Rightarrow k = 3$

Assim, para calcular o número de habitantes que há em um raio de 6 km, substituímos a constante k por 3 e o raio r por 6:

$H(r) = k \cdot 2^{3r} \Rightarrow H(6) = 3 \cdot 2^{3 \cdot 6} \Rightarrow H(6) = 3 \cdot 2^{18} \Rightarrow H(6) = 786.432$

Portanto, há 786.432 pessoas em um raio de 6 km.

Fonte: Leonardo (2016, p.158).

Por fim, são trabalhados os sistemas, as equações e inequações exponenciais, trazendo uma breve definição dos mesmos e apresentado exemplos algébricos resolvidos para, posteriormente ser sugerida uma outra lista de atividades referentes aos temas citados. Após, o livro sugere nova lista para praticar os novos conhecimentos, denominada lista de exercícios complementares (Figura 23), onde são trabalhadas mais tarefas com aplicações do cotidiano e aprofundamento do conteúdo trabalhado ao longo do capítulo, trazendo, inclusive, questões do ENEM.

Figura 23- Exercícios Complementares.

13. (Enem) Embora o Índice de Massa Corporal (IMC) seja amplamente utilizado, existem ainda inúmeras restrições teóricas ao uso e às faixas de normalidade preconizadas. O Recíproco do Índice Ponderal (RIP), de acordo com o modelo alométrico, possui uma melhor fundamentação matemática, já que a massa é uma variável de dimensões cúbicas e a altura, uma variável de dimensões lineares. As fórmulas que determinam esses índices são:

$$\text{IMC} = \frac{\text{massa (kg)}}{[\text{altura (m)}]^2} \qquad \text{RIP} = \frac{\text{altura (cm)}}{\sqrt[3]{\text{massa (kg)}}}$$

ARAUJO, C. G. S.; RICARDO, D. R. Índice de massa corporal: um questionamento científico baseado em evidências. *Arq. Bras. Cardiologia*, v. 79, n. 1, 2002 (adaptado).

Se uma menina, com 64 kg de massa, apresenta IMC igual a 25 kg/m², então ela possui RIP igual a:

alternativa e

a) $0{,}4\ \text{cm/kg}^{\frac{1}{3}}$ **c)** $8\ \text{cm/kg}^{\frac{1}{3}}$ **e)** $40\ \text{cm/kg}^{\frac{1}{3}}$

b) $2{,}5\ \text{cm/kg}^{\frac{1}{3}}$ **d)** $20\ \text{cm/kg}^{\frac{1}{3}}$

Fonte: Leonardo (2016, p.163).

Para encerrar o capítulo, o exemplar apresenta ao aluno, uma autoavaliação (Figura 24), para que ele possa, após responde-las, sendo todas de múltipla escolha, saber quais partes referentes a esse estudo que precisam ser revisadas novamente. Isso se deve ao fato de haver uma tabela a qual indica o que cada questão tem por objeto matemático. Quanto à autoavaliação, é um “processo ativo em que os sujeitos estabelecem os objetivos que norteiam a sua aprendizagem, tentando monitorizar, regular e controlar as suas cognições, motivação e comportamento, com o intuito de os alcançar” (ROSÁRIO, 2004, p.37).

Figura 24- Retomada de Conceitos.

	Número da questão									
Objetivos do capítulo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Efetuar as operações de potenciação e radiciação.	X	X	X							
Identificar uma função exponencial.				X	X					
Analisar e construir o gráfico de uma função exponencial.					X	X	X			
Resolver situações-problema que envolvam funções exponenciais.								X		
Resolver equações, sistemas e inequações exponenciais.									X	X
Páginas do livro referentes ao conceito	150 a 154	150 a 154	150 a 154	154 a 157	154 a 157	154 a 157	154 a 157	158	159 a 163	159 a 163

Fonte: Leonardo (2016, p.164).

Para iniciar o capítulo referente à Função Logarítmica, o autor conta sobre o terremoto que ocorreu em setembro de 2015 no Chile. De a escala Richter de 8,3 graus de magnitude, que teve pelo menos 11 mortos, e sendo considerado o de maior intensidade, em 2015, é um dos mais fortes, no mundo, nos últimos 25 anos. Segundo a teoria de Ausubel (1976), no momento em que a aprendizagem significativa não se concretiza, o educando emprega a aprendizagem mecânica, isto é, "decora" o tema, o qual, mesmo não sendo significativo para ele, é gravado de jeito avulso, sendo esquecido depois de algum tempo. Por isso, torna-se importante começar o conteúdo de modo que o aluno se sinta interessado, para se aprofundar no assunto.

Em seguida, é apresentada a ideia de logaritmo, trazendo uma situação-problema sobre o crescimento bacteriano (Figura 25). Após, a definição e as propriedades dos logaritmos são demonstradas.

Figura 25- Crescimento bacteriano.

Tempo (t)	0	1	2	3	4
Número de bactérias (n)	1	2	4	8	16

Analisando os dados, concluímos que o número n de bactérias em função da quantidade t de horas pode ser descrito por: $n = 2^t$

Com base nessas informações, podemos responder às seguintes perguntas:

- Quantas bactérias haverá após 10 horas?

  Essa é uma pergunta que envolve potenciação, e a resposta é:

  $$n = 2^t \Rightarrow n = 2^{10} \Rightarrow n = 1.024$$

  Logo, haverá 1.024 bactérias.

- Em quantas horas haverá 1.024 bactérias?

  Essa é uma pergunta que envolve logaritmo, pois, para respondê-la, devemos encontrar o valor do **expoente** t na equação: $1.024 = 2^t$

  O valor de t é 10 horas, pois $2^{10} = 1.024$.

  Dizemos que 10 é o **logaritmo** de 1.024 na **base** 2. Representamos assim:

  $$10 = \log_2 1.024 \quad \text{ou} \quad \log_2 1.024 = 10$$

Fonte: Leonardo (2016, p.169).

Seguindo os mesmos caminhos do capítulo referente à Função Exponencial, após cada tema ser exibido e demonstrado, são trazidos, nessa ordem, exemplos já desenvolvidos, exercícios propostos também já desenvolvidos e, por fim, atividades a serem resolvidas individualmente, conforme a Figura 26. Vale ressaltar que, nessa parte inicial para tratar dos logaritmos e suas propriedades operatórias, logaritmo de produto, logaritmo de quociente e logaritmo uma potência, todas as atividades propostas são de resolução algébrica direta, não havendo nenhuma situação contextualizada.

Figura 26- Exercícios Propriedade dos Logaritmos.

Exercícios propostos Registre as respostas em seu caderno

12. Aplicando as propriedades estudadas, simplifique ao máximo cada um dos itens.

a) $\log_2(64\cdot 13)$ $6+\log_2 13$

b) $\log_{\sqrt{2}}(2\cdot 3)$ $2+\log_{\sqrt{2}} 3$

c) $\log_3(13\cdot 3)$ $\log_3 13+1$

d) $\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{16}\right)^9$ 18

e) $\log\left(\frac{1}{10}\right)^{19}$ -19

f) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{26}{32}\right)$ $\log_{\frac{1}{2}} 13+4$

13. Utilizando as propriedades dos logaritmos, determine o valor de A.

a) $A=\log 30+\log 7-\log 21$ 1

b) $A=\log_2 100-\log_2 25$ 2

14. Admitindo satisfeitas as condições de existência, desenvolva as expressões abaixo, aplicando as propriedades dos logaritmos.

a) $\log_a(b\cdot c\cdot d)$ $\log_a b+\log_a c+\log_a d$

b) $\log_a\left(\frac{2\cdot k}{d}\right)$ $\log_a 2+\log_a k-\log_a d$

c) $\log_a a^{-n}$ $-n$

d) $\log_a\left(\frac{1}{y}\right)$ $-\log_a y$

Fonte: Leonardo (2016, p.173).

Para abordar o conceito de Função Logarítmica, o autor relembra o exemplo trazido, no início do capítulo, que retrata o crescimento bacteriano, no qual, aplicando as propriedades logarítmicas, se chega a quantidade t de horas, sendo determinada em função da quantidade n de bactérias com isso, é apresentada a definição de Função Logarítmica. Os exercícios propostos para esse tema são exclusivamente para o cálculo do domínio das Funções, conforme ilustra a Figura 27.

Figura 27- Exercícios Função Logarítmica.

R13. Identificar o domínio das seguintes funções:

a) $g(x)=\log(x^2-1)$ **b)** $h(x)=\log_{x+1}(4-x^2)$

▸ *Resolução*

a) $g(x)=\log(x^2-1)$

Pelas condições de existência, devemos ter: $x^2-1>0$

Estudando o sinal da função dada por $y=x^2-1$, cujos zeros são -1 e 1, podemos fazer o seguinte esquema:

Portanto, $D(g)=\{x\in\mathbb{R}\mid x<-1 \text{ ou } x>1\}$.

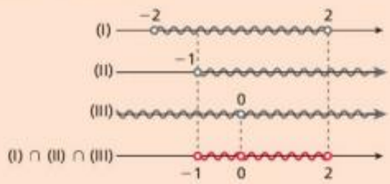
b) $h(x)=\log_{x+1}(4-x^2)$

Pelas condições de existência, temos:

(I) $4-x^2>0\Rightarrow -2<x<2$

(II) $x+1>0\Rightarrow x>-1$

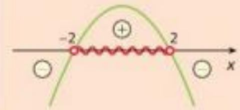
(III) $x+1\neq 1\Rightarrow x\neq 0$



Portanto, $D(h)=\{x\in\mathbb{R}\mid -1<x<2 \text{ e } x\neq 0\}$.

◆ **Observação**

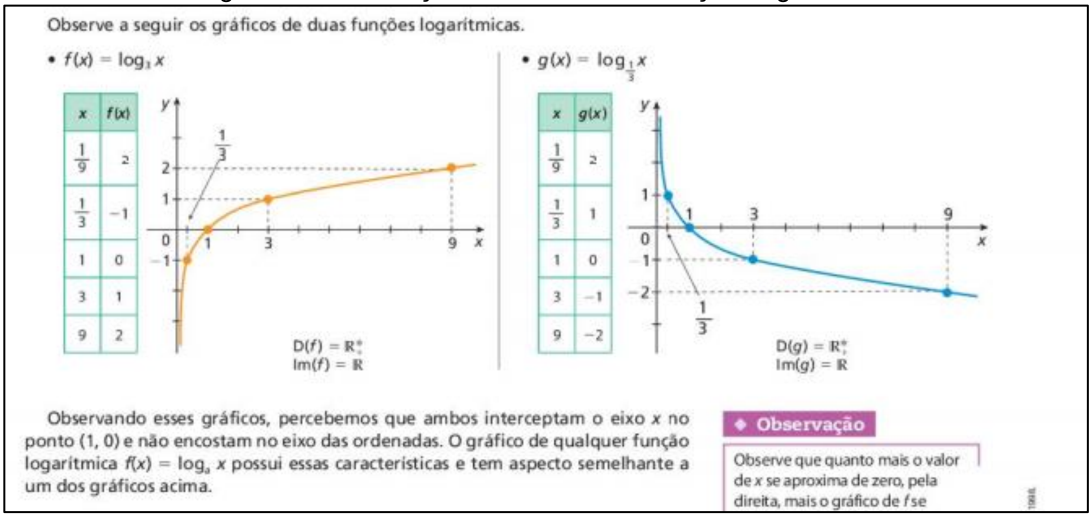
Para $4-x^2>0$, temos:



Fonte: Leonardo (2016, p.177).

Logo em seguida, o livro aborda, novamente, de maneira muito similar ao capítulo anterior, a construção de gráficos (Figura 28), ou seja, indica duas Funções para a construção, uma crescente e outra decrescente, atribuindo valores de x para identificar os respectivos valores de y, para depois, traçar os pontos no plano cartesiano. Junto com essa parte, já são explicados, as propriedades da Função Logarítmica.

Figura 28- Construção de Gráficos da Função Logarítmica.



Observe a seguir os gráficos de duas funções logarítmicas.

- $f(x) = \log_3 x$

x	$f(x)$
$\frac{1}{9}$	2
$\frac{1}{3}$	-1
1	0
3	1
9	2

$D(f) = \mathbb{R}_+^*$
$Im(f) = \mathbb{R}$

- $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

x	$g(x)$
$\frac{1}{9}$	2
$\frac{1}{3}$	1
1	0
3	-1
9	-2

$D(g) = \mathbb{R}_+^*$
$Im(g) = \mathbb{R}$

Observando esses gráficos, percebemos que ambos interceptam o eixo x no ponto (1, 0) e não encostam no eixo das ordenadas. O gráfico de qualquer função logarítmica $f(x) = \log_a x$ possui essas características e tem aspecto semelhante a um dos gráficos acima.

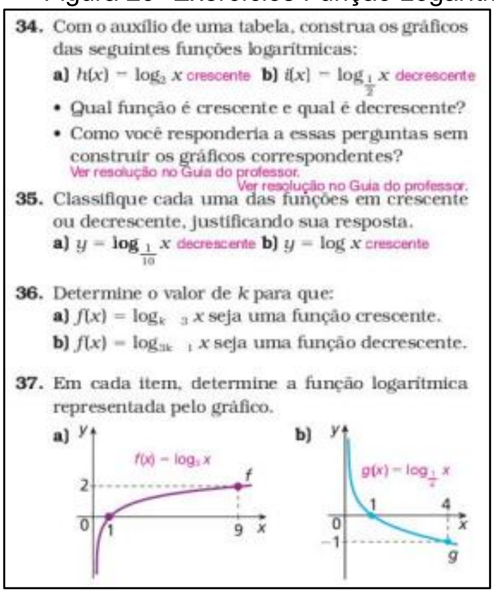
Observação

Observe que quanto mais o valor de x se aproxima de zero, pela direita, mais o gráfico de f se

Fonte: Leonardo (2016, p.178).

Antes de iniciar o conteúdo das equações e inequações logarítmicas, o livro traz uma semelhança entre as Funções Exponenciais e Logarítmicas, demonstrando que são simétricas. Consequentemente, seus gráficos são simétricos em relação à reta x=y, denominada a bissetriz dos quadrantes ímpares. Em seguida, é apresentado um exercício resolvido para explicar o que foi explanado. Quanto aos exercícios propostos nesse trecho, são todos voltados à construção de gráficos logarítmicos e ao crescimento e decrescimento da Função Logarítmica, conforme Figura 29.

Figura 29- Exercícios Função Logarítmica.



34. Com o auxílio de uma tabela, construa os gráficos das seguintes funções logarítmicas:
a) $h(x) = \log_2 x$ crescente **b)** $i(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ decrescente
- Qual função é crescente e qual é decrescente?
- Como você responderia a essas perguntas sem construir os gráficos correspondentes?

Ver resolução no Guia do professor.

Ver resolução no Guia do professor.

35. Classifique cada uma das funções em crescente ou decrescente, justificando sua resposta.
a) $y = \log_{\frac{1}{10}} x$ decrescente **b)** $y = \log x$ crescente

36. Determine o valor de k para que:
a) $f(x) = \log_{k-3} x$ seja uma função crescente.
b) $f(x) = \log_{3k-1} x$ seja uma função decrescente.

37. Em cada item, determine a função logarítmica representada pelo gráfico.
a) $f(x) = \log_3 x$ **b)** $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

Fonte: Leonardo (2016, p.181).

O último conteúdo trabalhado são as equações e inequações logarítmicas. Inicialmente, para isso, o livro esclarece que, para ser uma equação logarítmica, é preciso que se tenha, no mínimo, uma incógnita no logaritmando ou na base de um logaritmo. Para as inequações, o esclarecimento é similar, porém, ao invés de haver uma igualdade entre duas expressões, é utilizada para expressar uma desigualdade de duas expressões. Para resolvê-las, basta aplicar a mudança de variável ou usar as propriedades dos logaritmos. Há uma sequência exercícios resolvidos envolvendo as equações e inequações, além dos sistemas logarítmicos, sendo eles somente de resolução algébrica, conforme apresenta a Figura 30.

Figura 30- Equações Logarítmicas.

R16. Determinar o valor de x sabendo que $\log_6 (x + 5) = 2$.

▸ ***Resolução***

Primeiro, estabelecemos a condição de existência: $x + 5 > 0 \Rightarrow x > -5$

Em seguida, resolvemos a equação dada usando a definição de logaritmo:

$\log_6 (x + 5) = 2 \Rightarrow 6^2 = x + 5 \Rightarrow x = 31$

Como 31 atende à condição de existência do logaritmo, então x é igual a 31.

R17. Resolver a equação $\log_5 (2x + 7) = \log_5 (x - 6)$.

▸ ***Resolução***

Condição de existência:

$$\begin{cases} 2x + 7 > 0 \\ x - 6 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -\frac{7}{2} \\ x > 6 \end{cases} \Rightarrow x > 6$$

Para resolver equações como essa, podemos usar a consequência da definição de logaritmo:

$\log_a m = \log_a n \Rightarrow m = n$

Assim:

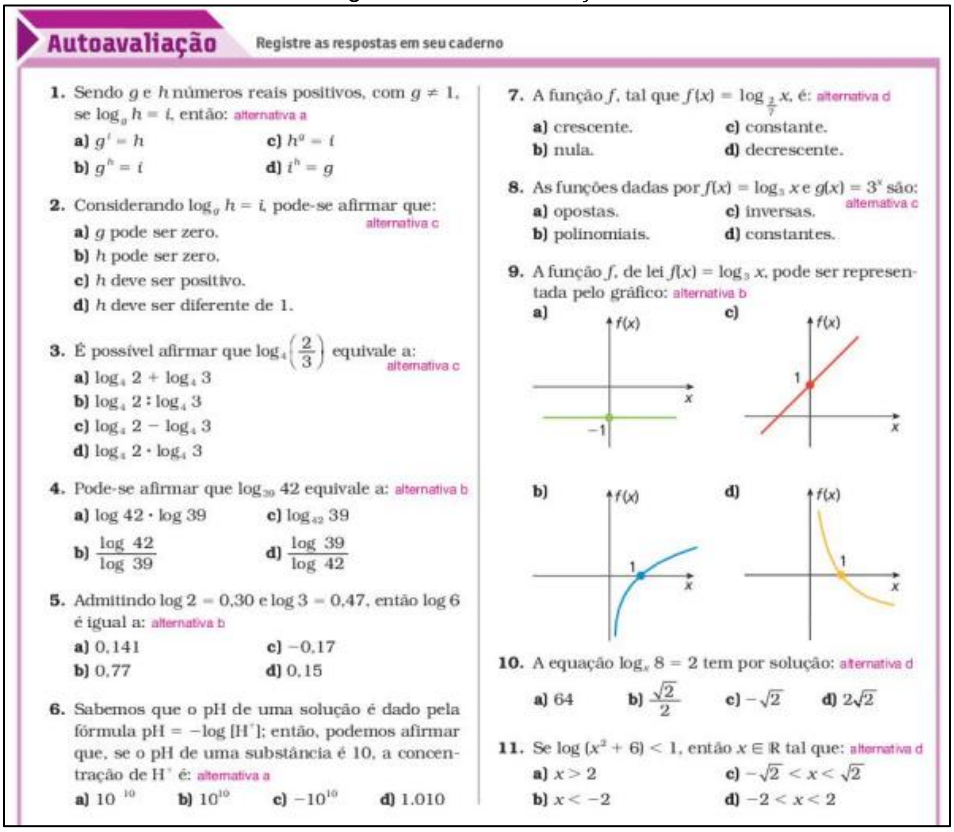
$\log_5 (2x + 7) = \log_5 (x - 6) \Rightarrow 2x + 7 = x - 6 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x - x = -6 - 7 \Rightarrow x = -13$

Como $x = -13$ não obedece à condição de existência ($x > 6$), concluímos que não existe x que satisfaça a equação, ou seja, $S = \varnothing$.

Fonte: Leonardo (2016, p.182).

Da mesma forma que o capítulo referente à Função Exponencial, para encerrar o capítulo, o autor apresenta uma autoavaliação (Figura 31), com atividades envolvendo todos os temas trabalhados durante o capítulo, para que o aluno, após resolvê-las, possa identificar quais partes do conteúdo precisam ser retomadas novamente. A fim de que o educando saber em quais pontos apresentou dificuldade, é exibida uma tabela indicando o número da questão, o objeto de aprendizagem nela envolvida, e por fim, a página do livro referente ao conceito de cada atividade.

Figura 31- Autoavaliação.



Autoavaliação Registre as respostas em seu caderno

1. Sendo g e h números reais positivos, com $g \neq 1$, se $\log_g h = i$, então: alternativa a
a) $g^i = h$ **c)** $h^g = i$
b) $g^h = i$ **d)** $i^h = g$

2. Considerando $\log_g h = i$, pode-se afirmar que: alternativa c
a) g pode ser zero.
b) h pode ser zero.
c) h deve ser positivo.
d) h deve ser diferente de 1.

3. É possível afirmar que $\log_4\left(\frac{2}{3}\right)$ equivale a: alternativa c
a) $\log_4 2 + \log_4 3$
b) $\log_4 2 : \log_4 3$
c) $\log_4 2 - \log_4 3$
d) $\log_4 2 \cdot \log_4 3$

4. Pode-se afirmar que $\log_{39} 42$ equivale a: alternativa b
a) $\log 42 \cdot \log 39$ **c)** $\log_{42} 39$
b) $\frac{\log 42}{\log 39}$ **d)** $\frac{\log 39}{\log 42}$

5. Admitindo $\log 2 = 0{,}30$ e $\log 3 = 0{,}47$, então $\log 6$ é igual a: alternativa b
a) 0,141 **c)** −0,17
b) 0,77 **d)** 0,15

6. Sabemos que o pH de uma solução é dado pela fórmula $pH = -\log [H^+]$; então, podemos afirmar que, se o pH de uma substância é 10, a concentração de H^+ é: alternativa a
a) 10^{-10} **b)** 10^{10} **c)** -10^{10} **d)** 1.010

7. A função f, tal que $f(x) = \log_{\frac{2}{7}} x$, é: alternativa d
a) crescente. **c)** constante.
b) nula. **d)** decrescente.

8. As funções dadas por $f(x) = \log_3 x$ e $g(x) = 3^x$ são: alternativa c
a) opostas. **c)** inversas.
b) polinomiais. **d)** constantes.

9. A função f, de lei $f(x) = \log_3 x$, pode ser representada pelo gráfico: alternativa b

10. A equação $\log_x 8 = 2$ tem por solução: alternativa d
a) 64 **b)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **c)** $-\sqrt{2}$ **d)** $2\sqrt{2}$

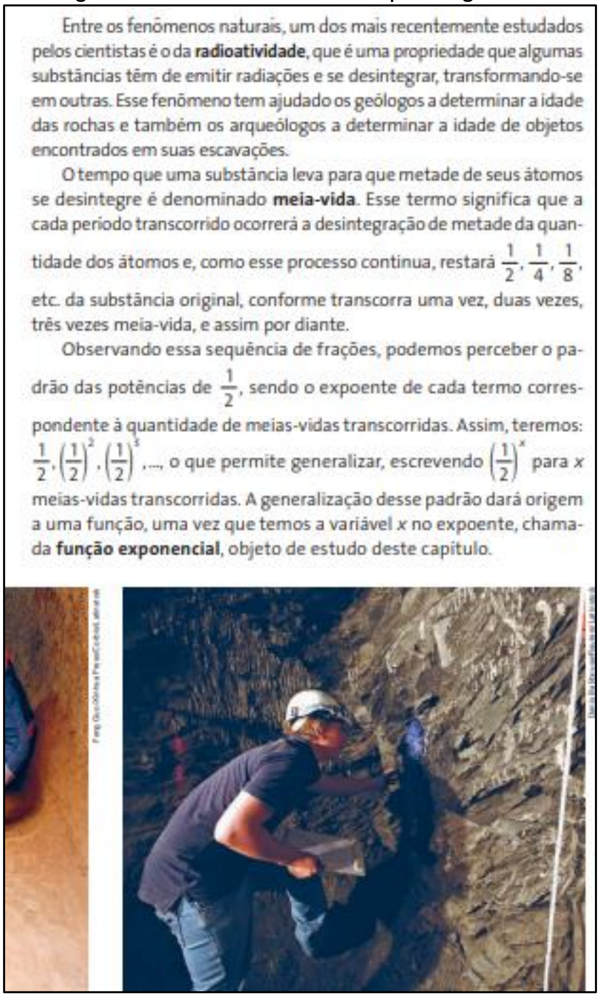
11. Se $\log (x^2 + 6) < 1$, então $x \in \mathbb{R}$ tal que: alternativa d
a) $x > 2$ **c)** $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$
b) $x < -2$ **d)** $-2 < x < 2$

Fonte: Leonardo (2016, p.187).

O segundo livro a ser analisado é Matemática Contexto e Aplicações, volume 1, segunda edição da editora Ática, de Luiz Roberto Dante (Dante, 2013), o mesmo está dividido em quatro unidades: Conjuntos Numéricos, Função Afim e Função Quadrática, Função Exponencial e Função Logarítmica e, por fim, Sequências e Trigonometria. Cada uma dessas unidades está organizada em capítulos. Como o foco dessa investigação são as Funções Exponenciais e Logarítmicas, serão esses os assuntos discutidos. As Funções Exponenciais aparecem na unidade três no quinto capítulo, que é subdividido em: Revisão de potenciação, Revisão de radiciação, Função exponencial, Equações exponenciais e Inequações exponenciais.

A unidade começa apresentando um cenário envolvendo o cotidiano (Figura 32) para demonstrar, a técnica da datação da idade de um material por meio do método do carbono-14, usada em Arqueologia e Antropologia. Segundo o autor o propósito de levantar o problema contextual envolvendo equações exponenciais é tornar os conceitos a serem estudados significativos. O livro propõe articulação com a Biologia, Química, Matemática Financeira, Geometria, sequência aritmética e situações do cotidiano.

Figura 32- Geólogo analisando rochas e arqueólogo escavando fósseis.



Entre os fenômenos naturais, um dos mais recentemente estudados pelos cientistas é o da **radioatividade**, que é uma propriedade que algumas substâncias têm de emitir radiações e se desintegrar, transformando-se em outras. Esse fenômeno tem ajudado os geólogos a determinar a idade das rochas e também os arqueólogos a determinar a idade de objetos encontrados em suas escavações.

O tempo que uma substância leva para que metade de seus átomos se desintegre é denominado **meia-vida**. Esse termo significa que a cada período transcorrido ocorrerá a desintegração de metade da quantidade dos átomos e, como esse processo continua, restará $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, etc. da substância original, conforme transcorra uma vez, duas vezes, três vezes meia-vida, e assim por diante.

Observando essa sequência de frações, podemos perceber o padrão das potências de $\frac{1}{2}$, sendo o expoente de cada termo correspondente à quantidade de meias-vidas transcorridas. Assim, teremos: $\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^3, \ldots$, o que permite generalizar, escrevendo $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ para x meias-vidas transcorridas. A generalização desse padrão dará origem a uma função, uma vez que temos a variável x no expoente, chamada **função exponencial**, objeto de estudo deste capítulo.

Fonte: Dante (2013, p. 146).

O conceito de função exponencial é implicitamente proposto. Através dessa sugestão, o autor apresenta uma situação de aprendizagem, a qual é mediada pelo docente através de questões e observações relevantes, que facilitam o entendimento dos estudantes (Figura 33). Essa prática pode promover o desenvolvimento de competências como investigação e síntese, com o auxílio dos professores, além de modelar problemas e verificar esse modelo.

Figura 33: tarefa para introduzir o conceito emergente.

Em uma cultura de bactérias, a população dobra a cada hora. Reúna-se com um colega e façam uma tabela com o número de bactérias nas 10 primeiras horas, considerando que há 1000 bactérias no início da pesquisa.

Cultura de bactéria *Escherichia coli* em placa de Petri.

Estimule os alunos a preencher a tabela corretamente, explicando-lhes, caso necessário, o que deve ser colocado em cada coluna. Se eles quiserem, podem até usar calculadora (a maioria dos celulares tem uma, por exemplo). Depois, confira com eles oralmente e passe a questioná-los sobre as questões propostas. No item ***a****, a ideia é que essa percepção ajude depois a entender intuitivamente que o gráfico da função exponencial não será uma reta. Nos itens* ***b****,* ***c*** *e* ***d****, a ideia é chegar intuitivamente para a lei da função exponencial que descreve a situação proposta.*

Veja um exemplo de tabela, com as primeiras linhas preenchidas.

Horas após o início	Número de bactérias	Proporção entre a quantidade de bactérias atual e a quantidade inicial
0	1000	1
1	2000	2

Fonte: Dante (2013, p. 147).

É apresentada ainda, uma seguda situação, que se refere à Matemática Financeira. É apresentado um enredo o qual conta que uma pessoa fez um empréstido, no banco e, em seguida, estimula o aluno a trabalhar com os juros compostos. Ainda prioriza realizar a solução bem detalhada, construindo até o modelo geral, que é utilizado em cálculos de valor final a uma determinada taxa de juros (Figura 34). Ao resolver o problema, há várias considerações visando ajudar a explicação docente.

Figura 34: Contextualização: juros compostos.

Acompanhe outra situação em que temos uma função exponencial:

Uma pessoa fez um empréstimo em um banco no valor de R$ 10 000,00 para pagar depois de 3 meses, à taxa de juros de 3% ao mês no regime de juros compostos.

Juros compostos: os juros são compostos quando, depois de cada período de tempo do investimento, os juros são somados ao montante do período anterior (juros sobre juros).

a) Qual será o montante a pagar no fim do:

- 1º mês?

$$10\,000 + \underbrace{0{,}03 \cdot 10\,000}_{3\%\text{ de }10\,000} = \mathbf{10\,300}$$

Sendo M o montante, C o capital e i a taxa, temos:

$M_1 = C + iC = C(1 + i)$

- 2º mês?

$$10\,300 + \underbrace{0{,}03 \cdot 10\,300}_{3\%\text{ de }10\,300} = \mathbf{10\,609}$$

$M_2 = M_1 + iM_1 = M_1(1 + i) = C(1 + i)(1 + i) = C(1 + i)^2$

- 3º mês?

$$10\,609 + \underbrace{0{,}03 \cdot 10\,609}_{3\%\text{ de }10\,609} = \mathbf{10\,927{,}27}$$

$M_3 = M_2 + iM_2 = M_2(1 + i) = C(1 + i)^2(1 + i) = C(1 + i)^3$

b) Qual seria o montante a pagar no fim de n meses?

$M = C(1 + i)^n$ em que M é o montante, C o capital, n o período de tempo e i a taxa de juros.

Fique atento!
Observe que M é dado em função de n. Esse é mais um exemplo de função exponencial.

Veja o gráfico dessa situação nos 12 primeiros meses:

Fonte: Dante (2013, p. 148).

Com esse exemplo, o livro traz as revisões de potenciação, para que o aluno possa descobrir se a expressão a^x realmente satisfaz a todo e qualquer número real x. Ele revisa, também, potência com expoente natural, com expoente inteiro, com expoente racional, com expoente irracional e com expoente real. Para cada um dos conteúdos, o autor as justifica com a resolução passo a passo de exercícios dados como exemplos, além de propor exercícios para resolução do aluno.

Em seguida, o autor apresenta atividades algébricas para testar os novos conhecimentos, sendo quatro recomendadas para serem resolvidas em duplas pelos alunos, conforme ilustra a Figura 35.

Figura 35: Exercícios manipulação em duplas

9. ATIVIDADE EM DUPLA Reduzam a uma única potência:

a) $2^3 \cdot 2^7 \cdot 2^2$ 2^{12}
b) $\frac{3^{10}}{3^4}$ 3^6
c) $\frac{a^6}{a}$, com $a \neq 0$ a^5
d) $(2^6)^x$ 2^{6x}
e) 7^{3^2} 7^9
f) $\frac{2^7 \cdot 2^3}{2^{-2}}$ 2^{12}

10. ATIVIDADE EM DUPLA Escrevam na forma de um produto de potências, de um quociente de potências ou de uma potência de potência:

a) 5^{x+y} $5^x \cdot 5^y$
b) 4^{x-3} $\frac{4^x}{4^3}$
c) 7^{3x} $(7^3)^x$ ou $(7^x)^3$
d) $(5x)^4$ $5^4 \cdot x^4$

11. ATIVIDADE EM DUPLA Escrevam como potência de base 3:

a) 2 187 3^7
b) $\frac{1}{9}$ 3^{-2}
c) 1 3^0
d) $\sqrt[5]{81}$ $3^{\frac{4}{5}}$
e) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ $3^{-\frac{1}{2}}$
f) 27^5 3^{15}

12. ATIVIDADE EM DUPLA DESAFIO Determinem o valor das seguintes expressões:

a) $E = \left[(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}\right]^{\sqrt{2}}$ 2
b) $E = 1^{\pi} + 0^{\sqrt{5}}$ 1

Fonte: Dante (2013, p. 153).

Por fim, antes de iniciar o conteúdo de Função Exponencial, o livro mostra a concepção de notação científica, buscando descrever uma conjuntura, na Astronomia e na Física, demonstrando como o número pode ser escrito na forma científica quando necessita simbolizar vastas distâncias, como a da Terra ao Sol: 149600000 km = $1{,}496.10^8$ km, conforme apresenta a Figura 36.

Figura 36: Exemplo de notação científica e exercício para escrever na notação científica contextualizada.

Veja exemplos de como escrever um número em notação científica:

a) $300 = 3 \cdot 100 = 3 \cdot 10^2$

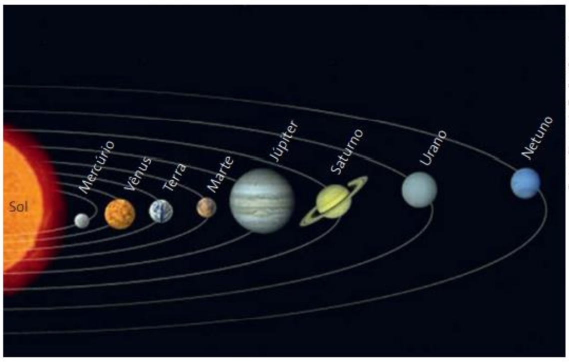
b) $0{,}0052 = 5{,}2 \cdot 0{,}001 = 5{,}2 \cdot 10^{-3}$

c) $32{,}45 = 3{,}245 \cdot 10 = 3{,}245 \cdot 10^1$

d) $5\,249 = 5{,}249 \cdot 1000 = 5{,}249 \cdot 10^3$

Agora, veja exemplos em informações científicas:

a) a distância média da Terra ao Sol: $149\,600\,000$ km $= 1{,}496 \cdot 10^8$ km;



Planetas do Sistema Solar.

Fonte: Dante (2013, p.154).

Para iniciar o conteúdo de Função Exponencial, a obra traz, novamente, de forma perceptível com a definição, mostrando as propriedades e exemplos, tarefas já solucionadas e sugerindo atividades de manipulação para aprender a definição e propriedades, como mostrado nas Figuras 37 e 38.

Figura 37: Definição de Função Exponencial, propriedades e exemplos.

Definição

Consideremos um número a real positivo tal que $a \neq 1$. A função exponencial de base a, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, representada por $f(x) = a^x$, é uma função que tem as seguintes propriedades, para quaisquer que sejam x e y reais:

1ª) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

2ª) $f(1) = a^1 = a$

3ª) $x < y \Rightarrow a^x < y$ quando $a > 1$

$x < y \Rightarrow a^x > y$ quando $0 < a < 1$

Exemplos:

a) $f(x) = 3^x$

b) $y = 5^x$

c) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

d) $f(x) = (0{,}4)^x$

e) $f(x) = \left(\sqrt{2}\right)^x$

f) $f(x) = 10^x$

Fonte: Dante (2013, p.159).

Figura 38: Exercícios de manipulação e exercícios para resolver.

Exercícios

28. Verifique quais das sentenças dadas correspondem à lei de uma função exponencial.
   x a) $f(x) = 9^x$
   x b) $f(x) = (0{,}666...)^x$
   c) $y = x^2$
   x d) $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$

29. Dada a função exponencial $f(x) = 4^x$, determine:
   a) $f(0)$; 1
   b) $f(3)$; 64
   c) $f(-1)$; $\frac{1}{4}$
   d) $f\left(\frac{1}{2}\right)$; 2
   e) $f\left(-\frac{1}{2}\right)$; $\frac{1}{2}$
   f) m tal que $f(m) = 1$. 0

Fonte: Dante (2013, p.159).

Em seguida, o autor trabalha com a construção de gráficos e a análise dos mesmos. Cabe ressaltar que o livro traz diversas considerações, trazendo as propriedades da Função Exponencial para o docente trabalhar, conforme as figuras 39 e 40.

Figura 39: Conclusões sobre o gráfico de função exponencial.

Observando essas tabelas e esses gráficos, concluímos que, para uma função exponencial:

- o gráfico é uma figura chamada **curva exponencial**, que passa por (0, 1);
- o gráfico não toca o eixo x, ou seja, $f(x) = a^x$ não assume o valor zero (não existe x real tal que $f(x) = 0$);
- o gráfico de $f(x) = a^x$ não tem pontos nos quadrantes III e IV;
- quando $a > 1$ e x varia da esquerda para a direita, a curva apresenta um crescimento lento enquanto x é negativo. À medida que x cresce, o crescimento de y se torna cada vez mais acentuado;
- $D(f) = \mathbb{R}$, $CD(f) = \mathbb{R}_+^*$, $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$, $f(1) = a$ e $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$. Observe no gráfico de $f(x) = 2^x$ que: $f(1) = 2$; $f(2) = 4$; $f(1 + 2) = f(3) = 8$ e $8 = 2 \cdot 4 = f(1) \cdot f(2)$, portanto $f(1 + 2) = f(1) \cdot f(2)$;
- $f(nx) = (f(x))^n$, para todo n inteiro e x real.

Fonte: Dante (2013, p.160).

Figura 40: Considerações sobre o gráfico de função exponencial.

Veja no gráfico de $f(x) = 2^x$ que: $f(2 \cdot 1) = f(2) = 4$ e $(f(1))^2 = 2^2 = 4$, portanto $f(2 \cdot 1) = (f(1))^2$;

- para $a > 1$, a função é crescente ($x_1 > x_2 \Rightarrow a^{a_1} > a^{x_2}$);
- para $0 < a < 1$, a função é decrescente ($x_1 > x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$);
- a função exponencial é sobrejetiva: $Im(f) = CD(f)$, ou seja, para todo número real $b > 0$ existe algum $x \in \mathbb{R}$ tal que $a^x = b$ (todo número real positivo é uma potência de a);
- a função exponencial é injetiva ($x_1 \neq x_2 \Rightarrow a^{x_1} \neq a^{x_2}$ ou usando a contrapositiva $a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$), pois ela é crescente ou decrescente;
- a função exponencial é bijetiva, logo, admite função inversa;
- a função exponencial é ilimitada superiormente.

Fonte: Dante (2013, p.160).

Há um espaço no livro, chamado Matemática e Tecnologia, conforme ilustra a Figura 41, onde é proporcionado, ao aluno, um manual explicando, passo a passo, como construir um gráfico no software matemático GeoGebra. Diversos recursos tecnológicos estão à disposição para amparar o docente, em sala de aula, possibilitando melhor compreensão do educando. Para isso, o professor necessita estar capacitado e ter a noção dos objetivos que pretende alcançar com o uso da tecnologia.

> Os professores precisam saber como usar os novos equipamentos e softwares e também qual é seu potencial, quais seus pontos fortes e seus pontos fracos. Essas tecnologias, mudando o ambiente em que os professores trabalham e o modo como se relacionam com outros professores, tem um impacto importante na natureza do trabalho do professor e, desse modo, na sua identidade profissional (VALENTE, 2008, p. 76).

Figura 41: Construção de gráfico usando o GeoGebra.

Matemática e tecnologia

Para construir gráficos de funções exponenciais vamos novamente utilizar o *software* Geogebra.

Construção do gráfico de uma função exponencial

Vamos construir o gráfico da função exponencial $f(x) = 2^x$ e destacar alguns pontos importantes. Para isso siga os passos a seguir.

1º passo: No campo "Entrada" (situado na parte inferior da tela) digite a função: $f(x) = 2$^x e tecle "Enter". Observe que "^" significa a operação de potenciação.

Fique atento! Não se esqueça de salvar suas construções.

2º passo: Para melhorar a visualização, clique com o botão direito do *mouse* sobre o gráfico da função exponencial. Na aba que será apresentada clique em "Propriedades" e, depois que abrir uma janela, clique em "Cor" e escolha uma nova cor para o seu gráfico. Em seguida, clique na aba "Estilo" e coloque a espessura da linha igual a 5. Feche a janela e observe que o gráfico ficou destacado.

3º passo: Na barra de ferramentas (parte superior da tela) clique na aba "Exibir" e depois em "Malha". Você deverá ter uma imagem (com exceção da cor escolhida) igual à apresentada abaixo.

Fonte: Dante (2013, p.162).

Após propor atividades algébricas ligadas à construção de gráficos, o livro começa a falar sobre as Equações exponenciais e as inequações exponenciais, definindo, exemplificando, exibindo atividades já resolvidas e sugerindo várias atividades algébricas. Parte delas deve ser realizada em duplas. Na primeira, é solicitado que os alunos encontrem o ponto de intersecção de dois gráficos. As duas tarefas são de manipulação em duplas, conforme ilustra a Figura 42.

Figura 42: Exercícios propostos em dupla de equação exponencial e inequação exponencial.

45. ATIVIDADE EM DUPLA Sabe-se que $f(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^{4x^2 - x}$ e $g(x) = (0{,}8)^{3(x+1)}$. Calculem os valores de a para que se tenha $f(a) = g(a)$. $a = \frac{3}{2}$ ou $a = -\frac{1}{2}$

46. ATIVIDADE EM DUPLA Se $\begin{cases} 3^{x+y} = 1 \\ 2^{x+2y} = 2 \end{cases}$, qual é o valor de $x - y$? -2

47. Descubra qual par (x, y) é solução do sistema: $\left(-\frac{5}{2}, 1\right)$

$$\begin{cases} 4^x \cdot 8^y = \frac{1}{4} \\ 9^x \cdot 27^{2y} = 3 \end{cases}$$

48. ATIVIDADE EM DUPLA Qual é o ponto comum aos gráficos de $f(x) = 4^{x-1}$ e $g(x) = 2$? $(2, 4)$

Fonte: Dante (2013, p.169).

Finalizado o capítulo referente à Função Exponencial, será abordado o capítulo seguinte do exemplar, o sexto, que apresenta a Função Logarítmica. Para isso, o autor inicia contando a história dos Logaritmos e dos grandes matemáticos presentes, Jost

Bürgi (1552-1632) e John Napier (1550-1617), que são os criadores das tábuas de logaritmos. Segundo a pesquisadora Groenwald,

> O enfoque histórico é uma proposta metodológica que permite ao aluno descobrir a gênese dos conceitos e métodos que aprenderá em aula. Em outras palavras este enfoque permitirá ao aluno fazer relação das ideias matemáticas desenvolvidas em sala de aula com suas origens. (GROENWALD, 2004, p.47).

Após o fechamento histórico do tema logaritmos, o livro traz algumas equações, que são sugeridas para serem resolvidas em duplas (Figura 43) sugere ao professor que instigue a turma a pensar sobre o motivo da dificuldade de resolver as questões de letras “e”, “f” e “g”.

Figura 43- Atividades em Duplas- Introdução aos Logaritmos.

Formem duplas e tentem resolver as seguintes equações:

a) $2^x = 4$ c) $10^x = 1000$ e) $2^x = 5$ g) $10^x = 990$

b) $2^x = 8$ d) $10^x = 10\,000$ f) $10^x = 8\,000$

Qual é a dificuldade encontrada ao tentar resolver os itens **e**, **f** e **g** que não foi encontrada ao resolver os itens de **a** a **d**? *O objetivo deste questionamento é que os alunos percebam que a dificuldade ocorre porque 5 não é potência inteira de 2, nem 8 000 e 990 são potências inteiras de 10.*

Tentem descobrir alguns detalhes sobre a solução das equações **e**, **f** e **g**; por exemplo, perto de que valor inteiro ela está, ou entre quais valores inteiros devemos buscar tais soluções. *No item e o esperado é que os alunos percebam que x deve estar entre 2 e 3. É possível que alguns sugiram que esteja mais perto do 2 do que do 3. No f, o esperado é que eles percebam que x deve*

Fonte: Dante (2013, p.175).

Em seguida, o autor apresenta uma nova situação, desta vez, contextualizada, sobre o crescimento populacional da América Latina, para poder, na sequência, desenvolver a noção de logaritmo, conforme ilustra a Figura 44.

Figura 44- Introdução aos Logaritmos.

Segundo o Banco Mundial, a previsão do crescimento demográfico na América Latina, no período de 2004 a 2020, é de 1,2% ao ano, aproximadamente. Em quantos anos a população da América Latina vai dobrar se a taxa de crescimento continuar a mesma?

Nessas condições, podemos organizar o seguinte quadro:

Tempo	População
Início	P_0
1 ano	$P_1 = P_0 \cdot 1{,}012$
2 anos	$P_2 = (P_0 \cdot 1{,}012) \cdot 1{,}012 = P_0(1{,}012)^2$
3 anos	$P_3 = P_0(1{,}012)^3$
⋮	⋮
x anos	$Px = P_0(1{,}012)^x$

Adap.: SIMIELLI, Maria Elena. Geoatlas. São Paulo: Ática, 2013.

Fique atento!

$100\% + 1{,}2\% = 101{,}2\% = \frac{101{,}2}{100} = 1{,}012$

Supondo que a população dobrará após x anos, temos:

$$P_x = 2P_0$$

Fonte: Dante (2013, p.175).

Para chegar à definição de logaritmo, é apresentada a pergunta mais recorrente no início desse estudo, que é: a que número x se deve elevar o número 2 para se obter 8? Então, é trazida a resolução desse problema para, em seguida, apresentar a definição de logaritmo e uma comparação com a forma exponencial, conforme Figura 45.

Figura 45- Definição de Logaritmo.

Dados os números reais positivos a e b, com $a \neq 1$, se $b = a^c$, então o expoente c chama-se **logaritmo de b na base a**, ou seja, $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$, com a e b positivos e $a \neq 1$.

Nessa equivalência temos:

Forma logarítmica	Forma exponencial
$\log_a b = c$ $\begin{cases} c\text{: logaritmo} \\ a\text{: base de logaritmo} \\ b\text{: logaritmando} \end{cases}$	$a^c = b$ $\begin{cases} b\text{: potência} \\ a\text{: base da potência} \\ c\text{: expoente} \end{cases}$

Fique atento!
Quando dizemos **logaritmo**, estamos nos referindo a um número.

Fonte: Dante (2013, p. 176).

Logo depois, é mostrada a condição de existência de um logaritmo e as cinco consequências que surgem através da sua definição. Vale ressaltar que esse primeiro tópico de assunto trabalhado não possui exercícios para resolução dos alunos, apenas exercícios já resolvidos em torno das consequências da definição do logaritmo, segundo ilustra a Figura 46.

Figura 46- Exercícios resolvidos- Logaritmos.

Exercícios resolvidos

1. Determine o valor de:
a) $\log_2 128$;
b) $\log_{\sqrt{3}} 9$;
c) $\log_{\frac{1}{9}} 3\sqrt{3}$.

Resolução:

a) Representando por x o valor procurado, temos:
$\log_2 128 = x \overset{\text{def}}{\Rightarrow} 2^x = 128 \Rightarrow 2^x = 2^7 \Rightarrow x = 7$
Portanto, $\log_2 128 = 7$.

b) $\log_{\sqrt{3}} 9 = x \Rightarrow (\sqrt{3})^x = 9 \Rightarrow \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^x = 3^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3^{\frac{x}{2}} = 3^2 \Rightarrow \frac{x}{2} = 2 \Rightarrow x = 4$
Logo, $\log_{\sqrt{3}} 9 = 4$.

c) $\log_{\frac{1}{9}} 3\sqrt{3} = \log_{3^{-2}} \left(3^1 \cdot 3^{\frac{1}{2}}\right) = \log_{3^{-2}} 3^{\frac{3}{2}} = x \Rightarrow$
$\Rightarrow (3^{-2})^x = 3^{\frac{3}{2}} \Rightarrow 3^{-2x} = 3^{\frac{3}{2}} \Rightarrow -2x = \frac{3}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow x = -\frac{3}{4}$

Portanto, $\log_{\frac{1}{9}} 3\sqrt{3} = -\frac{3}{4}$.

2. Determine os valores reais de x para os quais existe: $\log_2 (x - 3)$.

Resolução:

Como a base é 2 (positiva e diferente de 1), devemos impor que $x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3$.
Logo, $x \in \mathbb{R} \mid x > 3$.

3. Encontre o conjunto dos valores reais de x para os quais é possível determinar $\log_{x \;\; 2} (x^2 - 4x - 5)$.

Resolução:

- Pelas condições de existência, temos:
$x^2 - 4x - 5 > 0$
$a = 1 > 0$
$\Delta = 36 > 0$
$x' = 5$ e $x'' = -1$
Estudo do sinal:

$x < -1$ ou $x > 5$ (I)
- $\begin{cases} x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2 \\ x - 2 \neq 1 \Rightarrow x \neq 3 \end{cases}$ (II)

Satisfazendo simultaneamente as condições, estabelecemos o quadro de resolução:

Logo, o conjunto é $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$.

4. Calcule:
a) $2^{\log_2 10 \cdot \log_2 5}$ b) $2^{\frac{\log_2 3}{3}}$ c) $3^{1 + \log_3 5}$

Resolução:

a) $2^{\log_2 10 \cdot \log_2 5} = (2^{\log_2 5})^{\log_2 10} = 5^{\log_5 10} = 10$
propriedade das potências

b) $2^{\frac{\log_2 3}{3}} = 2^{\frac{1}{3} \cdot \log_2 3} = (2^{\log_2 3})^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3}$

c) $3^{1 + \log_3 5} = 3^1 \cdot 3^{\log_3 5} = 3 \cdot 5 = 15$

Fonte: Dante (2013, p.177).

Quanto às propriedades operatórias, são exibidas seguindo um mesmo procedimento. Primeiro é demonstrado o desenvolvimento, para chegar a cada notação e, posteriormente, são apresentados dois exemplos já resolvidos de cada propriedade, que são: logaritmo de um produto, logaritmo de um quociente, logaritmo de uma potência e mudança de base, para que, depois, seja mostrada uma lista de exercícios já resolvidos e outra para solucionar (Figura 47), sendo algumas delas, para serem realizadas em duplas. Destaca que são todos "exercícios nos quais o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou uma determinada técnica operatória" (ONUCHIC, 1999, p. 215).

Figura 47- Exercícios- Propriedade dos Logaritmos.

$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 5 \text{ e } x \neq 6\}$ $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{1}{2} \text{ e } x \neq 1\right\}$

6. ATIVIDADE EM DUPLA Determinem o conjunto dos valores reais de x para que seja possível definir:
   a) $\log_x (x - 3)$ $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$
   b) $\log_{x-1} (x + 4)$ $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1 \text{ e } x \neq 2\}$

7. ATIVIDADE EM DUPLA Classifiquem em verdadeiro (**V**) ou falso (**F**):
   a) $\log_5 1 = 1$ F
   b) $\log_1 5 = 5$ F
   c) $\log_5 5 = 1$ V
   d) $\log_5 1 = 0$ V
   e) $\log_7 3^7 = 3$ F
   f) $\log_3 3^7 = 7$ V
   g) $2^{\log_2 5} = 5$ V
   h) $2^{\log_5 2} = 5$ F

8. ATIVIDADE EM DUPLA Calculem o valor das expressões:
   a) $10^{\log_{10} 3}$ 3
   b) $2^{\log_2 5}$ 5
   c) $2^{\log_2 6 - \log_4 10}$ 10
   d) $3^{\log_3 7 \cdot \log_4 2}$ 7
   e) $2^{1 + \log_2 3}$ 6
   f) $2^{2 + 3\log_2 5}$ 500

9. Determine o desenvolvimento logarítmico das expressões:
   a) $\log (x^3 y)$ $3 \cdot \log x + \log y$
   b) $\log \left(\frac{\pi r^3 h}{3}\right)$ $\log \pi + 3 \cdot \log r + \log h - \log 3$
   c) $\log \left(\frac{\sqrt{x}}{y^2}\right)$ $\frac{1}{2} \cdot \log_3 x - 2 \cdot \log_3 y$

14. ATIVIDADE EM DUPLA Sendo $\log_a 2 = 20$ e $\log_a 5 = 30$, calculem o valor de $\log_a 100$. 100

15. ATIVIDADE EM DUPLA Determinem a expressão P sabendo que:
    a) $\log P = 2 \cdot \log a + 5 \cdot \log b$ $P = a^2 b^5$
    b) $\log_2 P = 3 \cdot \log_2 a + \log_2 b - 2 \cdot \log_2 c$ $P = \frac{a^3 b}{c^2}$

16. ATIVIDADE EM DUPLA Sabendo que $x = \log_{10} 5 + \log_{10} 8 - \log_{10} 4$, calculem o valor de x. $x = 1$

17. ATIVIDADE EM DUPLA Escrevam usando logaritmos de base 10:
    a) $\log_2 5$ $\frac{\log 5}{\log 2}$
    b) $\log_x 2$ $\frac{\log 2}{\log x}$

18. ATIVIDADE EM DUPLA Determinem o número cujo logaritmo na base a é 4 e na base $\frac{a}{3}$ é 8. 3^8

19. ATIVIDADE EM DUPLA Calculem $\log_3 5 \cdot \log_4 27 \cdot \log_{25} \sqrt{2}$. $\frac{3}{8}$

20. ATIVIDADE EM DUPLA Sabendo que $\log_{20} 2 = a$ e $\log_{20} 3 = b$, calculem o valor de $\log_6 5$. $\frac{1 - 2a}{a + b}$

Fonte: Dante (2013, p.181).

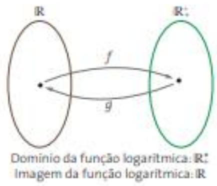
Referindo-se, agora, à Função Logarítmica, o autor faz menção ao capítulo anterior, Função Exponencial, e já apresenta a definição da Função Logarítmica (Figura 48), com exemplos e exercícios propostos para serem resolvidos em duplas, novamente, segundo Onuchic, de maneira mecânica, utilizando algum meio matemático.

Figura 48- Definição da Função Logarítmica.

Definição da função logarítmica

A inversa da função exponencial de base a é a função $\log_a: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, que associa a cada número real positivo x o número real $\log_a x$, chamado logaritmo de x na base a, com a real positivo e $a \neq 1$.

Observe que $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, dada por $f(x) = a^x$, tem a propriedade $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$, ou seja, $a^{x_1 + x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2}$.
A sua inversa $g: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, dada por $g(x) = \log_a x$, tem a propriedade $\log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$.



Como a função logarítmica é a inversa da função exponencial, temos:

$a^{\log_a x} = x$, para todo $x > 0$ e $\log_a (a^x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$

Fonte: Dante (2013, p.188).

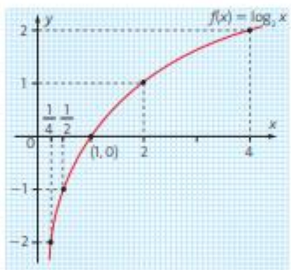
Para a construções de gráficos, o livro exibe duas funções, uma de natureza crescente (Figura 49) e outra decrescente, trazendo, junto, uma reflexão sobre o comportamento desse tipo de gráfico, fazendo comparações com a Função Exponencial e suas propriedades (Figura 50).

Figura 49- Gráfico da Função Logarítmica.

Observe os seguintes gráficos de funções logarítmicas:

a) $f(x) = \log_2 x$

x	$y = f(x)$
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2



Fique atento!
Os gráficos de $y = \log_a x$ e $y = \log_b x$, com $a > 1$ e $0 < b < 1$ quaisquer, têm o mesmo aspecto dos gráficos ao lado, respectivamente.

Fonte: Dante (2013, p.189).

Figura 50- Análise do Gráfico da Função Logarítmica.

- ao contrário da função exponencial $f(x) = a^x$ com $a > 1$, que cresce rapidamente, a função logarítmica $\log_a x$ com $a > 1$ cresce muito lentamente. Veja, por exemplo, que, se $\log_{10} x = 1\,000$, então $x = 10^{1\,000}$. Assim, se quisermos que $\log_{10} x$ seja maior do que 1 000, será preciso tomar um número x que tenha pelo menos 1 001 algarismos;
- a função logarítmica é injetiva, pois números positivos diferentes têm logaritmos diferentes. Ela é também sobrejetiva, pois, dado qualquer número real b, existe sempre um único número real positivo x tal que $\log_a x = b$. Portanto, ela é bijetiva (há uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{R}_+^*$ e $\mathbb{R}$);
- na função logarítmica $f(x) = \log_a x$ ($a > 0$ e $a \neq 1$), sendo ela crescente ou decrescente, o eixo das ordenadas é uma assintota vertical do gráfico, isto é, à medida que x tende para zero, o valor da função cresce ou decresce ilimitadamente.

Fonte: Dante (2013, p.189).

Em seguida, são trazidos dois pontos muito interessantes, primeiro, um tópico destinado à caracterização da Função Logarítmica e quando utilizar o modelo da Função em problemas. O segundo momento busca instigar o aluno a utilizar tecnologias (Figura 51) para trabalhar, tanto em sala de aula como em casa. Para isso, é apresentado o software GeoGebra, um software de Matemática dinâmica gratuito e multiplataforma para todos os níveis de ensino, que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo numa única aplicação. O autor traz um roteiro de como utiliza-lo e faz uma atividade na qual em um mesmo plano, o educando coloca todas as Funções aprendidas durante o ano.

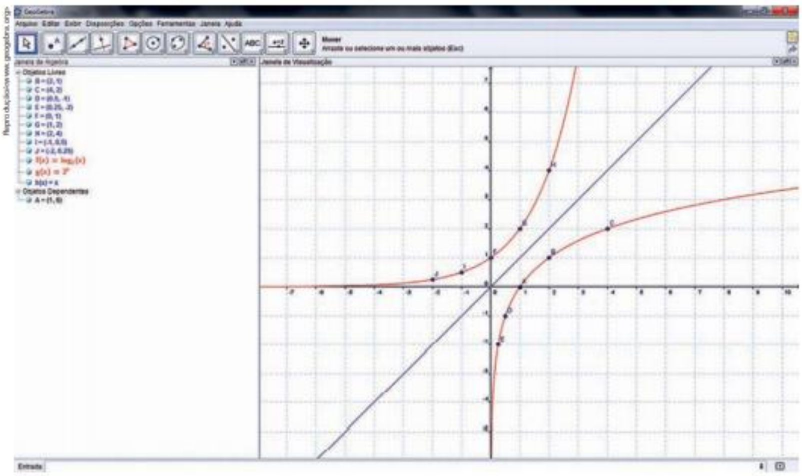
Figura 51- Relação do Gráfico da Função Logarítmica e da Função Exponencial.

Relação entre o gráfico de uma função logarítmica e de uma função exponencial de mesma base

Estudamos que os gráficos de duas funções inversas são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares ($y = x$). Agora, teremos a oportunidade de verificar melhor essa relação com funções logarítmicas e exponenciais.

1º passo: Repita os mesmos passos da construção do gráfico da função $f(x) = \log_2(x)$. Em seguida, digite no campo "Entrada" $g(x) = 2\text{^}x$ e tecle "Enter" e $h(x) = x$ e tecle "Enter".

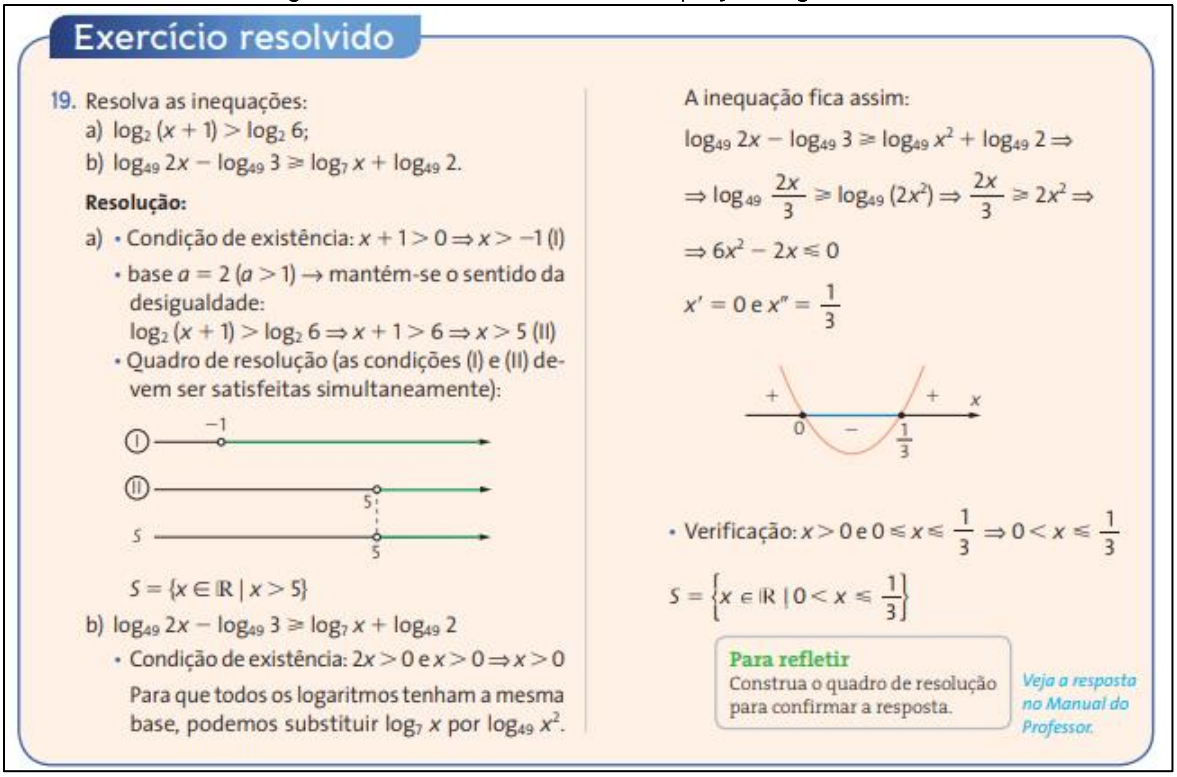
2º passo: No campo "Entrada" digite os pontos (um de cada vez): $F = (0, 1)$, $G = (1, 2)$, $H = (2, 4)$, $I = \left(-1, \frac{1}{2}\right)$ e $J = \left(-2, \frac{1}{4}\right)$. Observe que os pontos de A a E pertencem à função logarítmica, enquanto os pontos de F a J pertencem à função exponencial.



Fonte: Luiz Roberto Dante (2013, p.192).

O último tema a ser discutido são as equações e inequações logarítmicas. O autor começa já atribuindo alguns exemplos do que são e, posteriormente, apresenta uma lista de exercícios resolvidos para o aluno se adaptarem ao tema. Na sequência, é proposta uma lista de exercícios para resolução dos discentes sendo solicitado que algumas delas sejam respondidas em duplas. Para as inequações, são adotados os mesmos procedimentos (Figura 52).

Figura 52- Exercício resolvido- Inequação Logarítmica.



Exercício resolvido

19. Resolva as inequações:

a) $\log_2 (x + 1) > \log_2 6$;

b) $\log_{49} 2x - \log_{49} 3 \geq \log_7 x + \log_{49} 2$.

Resolução:

a) • Condição de existência: $x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$ (I)

• base $a = 2$ $(a > 1) \rightarrow$ mantém-se o sentido da desigualdade:
$\log_2 (x + 1) > \log_2 6 \Rightarrow x + 1 > 6 \Rightarrow x > 5$ (II)

• Quadro de resolução (as condições (I) e (II) devem ser satisfeitas simultaneamente):

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$

b) $\log_{49} 2x - \log_{49} 3 \geq \log_7 x + \log_{49} 2$

• Condição de existência: $2x > 0$ e $x > 0 \Rightarrow x > 0$

Para que todos os logaritmos tenham a mesma base, podemos substituir $\log_7 x$ por $\log_{49} x^2$.

A inequação fica assim:

$\log_{49} 2x - \log_{49} 3 \geq \log_{49} x^2 + \log_{49} 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_{49} \frac{2x}{3} \geq \log_{49} (2x^2) \Rightarrow \frac{2x}{3} \geq 2x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 6x^2 - 2x \leq 0$

$x' = 0$ e $x'' = \frac{1}{3}$

• Verificação: $x > 0$ e $0 \leq x \leq \frac{1}{3} \Rightarrow 0 < x \leq \frac{1}{3}$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq \frac{1}{3}\right\}$

Para refletir
Construa o quadro de resolução para confirmar a resposta.

Veja a resposta no Manual do Professor.

Fonte: Dante (2013, p.196).

Para finalizar o capítulo e a unidade, há o exemplar questões de vestibulares de todo o Brasil (Figura 53). Para a organização delas, são separadas por região (Norte, Nordeste, Centro-Oeste, Sudeste e Sul). Dentro de cada região, ainda são separadas por áreas do conhecimento, como, por exemplo, Química, Biologia, Ciências Sociais, entre outros. Segundo Pacca (1984), utilizar questões de vestibular facilita na identificação das lacunas que ficaram na aprendizagem e aprimora o processo de aprendizagem, visto que trabalhar com esse tipo de questão faz com o que o aluno fixe o conteúdo.

Figura 53- Questões de vestibular.

Vestibulares de Norte a Sul

Região Norte

1. *Química*
(UFPA) A quantidade x de nicotina no sangue diminuiu com o tempo t de acordo com a função $x = x_0$ e $\frac{kt}{2}$. Se a quantidade inicial x_0 se reduz à metade em 2 horas, em 5 horas existirá no sangue: (Se necessário considerar $\sqrt{2} = 1{,}41$.)
a) 17,4% de x_0.
x b) 17,7% de x_0.
c) 20,0% de x_0.
d) 20,3% de x_0.
e) 20,6% de x_0.

2. *Biologia*
(UFRR) Em pesquisa recente realizada por cientistas brasileiros de uma universidade federal comprovaram que a **ariranha** e o **mico-leão-dourado** são espécies em extinção no Brasil. Com o objetivo de preservar essas espécies, foram reunidos numa reserva florestal 120 ariranhas e 80 micos-leões-dourados. Constatou-se, após alguns anos, que o crescimento da população de ariranhas foi 5% ao ano e que a população de micos cresceu à taxa de 10% ao ano. Em quanto tempo, aproximadamente, após a reunião desses animais na reserva, o número de micos deve chegar ao dobro do número de ariranhas? (Use $\log 3 = 0{,}477$ e $\log 1{,}047 = 0{,}019$.)
x a) 25 anos
b) 20 anos
c) 30 anos
d) 15 anos
e) 10 anos

4. *Ciências Sociais*
(UFPE) Um boato se espalha da seguinte maneira: no primeiro dia, apenas uma pessoa tem conhecimento dele; no segundo, ela conta a outras três pessoas e, a cada dia que passa, todas as pessoas que sabem do boato contam-no para três novas pessoas. Assim, a sequência formada pelo número de pessoas que sabem do boato, em termos dos dias que passam, é dada por 1, 4, 16, 64... Em uma cidade com 1,5 milhão de habitantes, quantos dias serão necessários para que todas as pessoas sejam informadas do boato? (Aproxime sua resposta para o menor inteiro maior ou igual ao valor obtido. Dados: use a aproximação $\log_2 (1{,}5 \cdot 10^6) \simeq 20{,}52$.)
x a) 12
b) 13
c) 14
d) 15
e) 16

5. (UFRN) Se $\log_5 x + \log_5 y = 3$, com x e y inteiros maiores que 1, então:
a) $x \cdot y = 15$.
b) $x + y = 20$.
c) $x \cdot y = 25$.
x d) $x = y = 30$.

Região Centro-Oeste

Fonte: Dante (2013, p.202).

Os dois exemplares apresentados propiciam situações contextualizadas, dentro da Matemática e de outras áreas das ciências e da vida cotidiana como iniciação ao conteúdo matemático a ser aprendido, chamando a atenção do educando para o tema refletido, o qual está de acordo com as orientações curriculares traduzidas pelos PCNEM (BRASIL, 2020).

Ambos os livros seguem um modelo que se repete ao longo dos capítulos. Os elementos a serem estudados são exibidos com exemplos ou exercícios resolvidos e depois disso, oferecem listas de exercícios para serem resolvidas. A diferença é que, no segundo livro, há indicações de que algumas dessas atividades sejam resolvidas, em duplas, enquanto, no primeiro, não se tem nenhuma orientação sobre como devem ser trabalhados. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 2020), “não basta rever a forma ou metodologia de ensino, se mantivermos o conhecimento matemático restrito à informação, com as definições e os exemplos, assim como a exercitação, ou seja, exercícios de aplicação ou fixação. ”

Nos dois livros, há uma grande quantidade de exercícios resolvidos. Enfatizar atividades já solucionadas em detrimento de atividades onde o protagonismo investigativo do aluno sozinho seja capaz de construir as diversas ligações entre os conceitos e modos de raciocínio implicados em vários conteúdos, visto que exercícios resolvidos trazem estratégias pré-definidas de resolução, não está de acordo com os PCNEM (BRASIL, 2020), embora propor modelos, esboços para o aluno experimentar, fazer e validar conjecturas oportunize o desenvolvimento de habilidades e competências elencadas nesse documento como:

> - Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.
> - Discutir ideias e produzir argumentos convincentes. (BRASIL, 2020, p. 43)

A linguagem usada pelos autores está de acordo com o guia do PNLD 2018, nos dois conjuntos analisados (incluindo a seção do manual para professores), que são de simples acesso e prático de entender.

6.3 A SEQUÊNCIA DIDÁTICA ELETRÔNICA FUNÇÕES EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA

Apresenta-se, aqui, a Sequência Didática Eletrônica Funções Exponenciais e Logarítmicas, detalhando como foi elaborada e construída, bem como os aportes teóricos tomados como referência para essa construção.

A sequência, como um todo, está estruturada considerando duas partes interligadas, porém não dependentes, a saber: um conjunto de Testes de Conhecimento envolvendo questões relacionadas às Funções Exponencial e Logarítmica e a Sequência Didática envolvendo o estudo dessas funções, composta por seis módulos.

Para a estruturação da Sequência Didática Eletrônica, no que se refere, tanto à Sequência Didática Específica quanto aos Testes de Conhecimentos, optou-se por organizá-la em módulos para que o aluno, ao iniciar a Sequência, pudesse ter a autonomia de escolher em qual parte desejava aprofundar seus estudos se começaria desde o primeiro teste.

Assim, a Sequência Didática foi organizada em 6 módulos, 3 que correspondem ao estudo da Função Exponencial e 3 referentes à Função Logarítmica. Um módulo está ligado ao estudo das propriedades, ao estudo da Função e, por fim, um módulo que faz o estudo das equações e inequações.

A integra da Sequência está disponibilizada no endereço eletrônico: https://classroom.google.com/c/MTA3MjQ0MTQ4MTg5?cjc=2rccguy, que pertence a uma plataforma do Google, o Google Classroom, disponível no endereço eletrônico classroom.google.com. Para ter acesso à Sequência, há dois caminhos possíveis: o organizador da sala envia solicitações via e-mail, desde que o usuário possua uma conta Google, ou com um “Código da Turma”, que é gerado pela própria plataforma ao criador da sala, e deve ser repassado aos envolvidos.

O Google Classroom ou a Sala de Aula do Google é uma ferramenta on-line e gratuita, criada em 2014, e auxilia professores, alunos e escolas com um espaço para a realização de aulas virtuais. Conforme Alecrin (2014), por meio do sistema, os docentes podem publicar tarefas em uma página específica e verificar quem concluiu as atividades, além de tirar dúvidas em tempo real e atribuir notas pela atividade. Além de permitir anexar atividades e materiais em PDF, o Google Classroom possibilita a criação de perguntas que podem ser respondidas por múltipla escolha ou respostas curtas. A plataforma possibilita que os educadores publiquem atualizações e tarefas de aula, acrescentem ou excluam alunos e até mesmo forneçam feedback (DAUDT, 2015).

Alecrim (2014) pondera que o Google Classroom vem ajudando a conversação entre educadores e educandos, instigando a curiosidade e participação nas atividades on-line que são indicadas em sala de aula.

Sobre as funções e ferramentas da plataforma, o autor aponta que os alunos podem comunicar-se e receber notificações quando novos conteúdos são inseridos na sala de aula virtual. Pode ser acessada de qualquer dispositivo que contenha acesso à Internet e possua um navegador (browser), visto que não precisa de instalação local e um servidor destinado. Também pode ser baixada em smartphones nos aplicativos da Google Play Store (Android) ou no iTunes (iOS).

A sala de aula virtual possui três funções: mural, atividades e alunos. O mural, funciona como uma “linha do tempo”, onde aparecem as principais publicações e atividades da turma, que ficam visíveis tanto para alunos como para professores. Já a parte das atividades é destinada a colocar todo o conteúdo e permite anexação de links e arquivos relevantes, o que foi fundamental para anexar, na plataforma, toda Sequência Didática Eletrônica, pois, nessa parte, encontram-se, em tópicos, os seis Módulos e, dentro de cada um, estão anexados os vídeos explicativos, a Sequência Didática e os Testes Adaptativos, conforme apresentado na Figura 54. E por fim, a função alunos, que apresenta a lista de todos os estudantes que participam da sala virtual.

Figura 54- Organização da Sequência Didática Eletrônica no Classroom.

Fonte: o autor.

Para Zabala (1998, p.18), sequência didática é “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecido, tanto pelos professores como pelos alunos”. Tal entendimento vem ao encontro das ideias dos autores Pereti e Tonin da Costa (2013), que definem sequência didática como um conjunto de atividades articuladas entre si, planejadas para ensinar um conteúdo, etapa por etapa, organizadas de acordo com os objetivos que o professor visa alcançar durante o processo de ensino e aprendizagem.

Sequências didáticas, segundo Dolz e Schneuwly (2004), podem ser compreendidas como um conjunto de atividades organizadas, de maneira sistemática, planejadas para o processo de ensino e aprendizagem de um conteúdo. Também, consideraram que as mesmas são organizadas pelo professor com o objetivo de conseguir a aprendizagem de seus alunos, envolvendo atividades de aprendizagem e avaliação.

Groenwald e Moreno (2007) chamam a atenção para o que denominam como sequência didática eletrônica. No contexto de sequências didáticas já apresentado, de acordo com os autores, trata-se de um conjunto de materiais de estudo, atividades e tarefas organizadas e desenvolvidas com o uso das tecnologias digitais, utilizando diferentes recursos didáticos. Ainda, de acordo com os autores,

> A vantagem do uso de uma sequência didática em uma plataforma de ensino é a possibilidade da utilização de diferentes recursos, com padrão superior de qualidade, como vídeo-exemplos, textos com exemplos em movimento, ou seja, um conteúdo visual com maior qualidade. Assim, nesse ambiente virtual de aprendizagem, os alunos deixam de receber o mesmo conteúdo ao

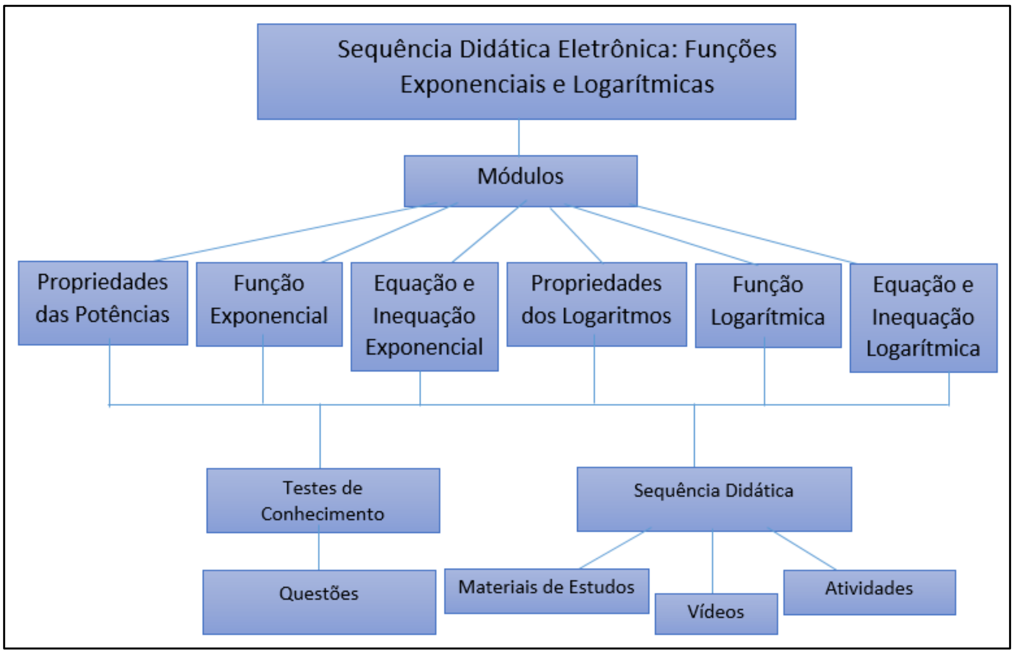
> mesmo tempo e passam a percorrer caminhos diferenciados, de acordo com o seu perfil de estudante e com o seu desempenho (GROENWALD; ZOCH; HOMA, 2009, p.2).

O emprego de uma sequência didática, em uma plataforma digital, deve propiciar benefícios aos educadores e aos educandos, dado que há uma perspectiva do uso de distintos artifícios visuais, como explicam os autores Groenwald, Zoch e Homa (2009), com modelos de maiores atributos, como vídeos explicativos, textos com exemplos em movimento, ou seja, uma questão visual com superior capacidade.

Ainda de acordo com os autores, no ambiente informatizado de aprendizagem, os discentes desenvolvem suas atividades de acordo com seu ritmo de aprendizagem, onde lhes serão apresentados os conteúdos com diferentes recursos metodológicos, necessários ao desenvolvimento das competências matemáticas e conforme suas escolhas preferências e desempenho.

No caso da presente investigação, a Sequência Didática Eletrônica: Funções Exponenciais e Logarítmicas foi desenvolvida procurando auxiliar na recuperação de conteúdos, a qual se compreende como parte fundamental no processo de ensino e aprendizagem, como a própria aprendizagem realizada em um primeiro momento. Assim, para a composição, procurou-se elaborar uma revisão de conceitos básicos, procedimentos e técnicas pertinentes ao estudo das Funções Exponenciais e Logarítmicas, por meio de Testes de Conhecimentos e Sequências Didáticas específicas, conforme esquema apresentado na Figura 55.

Figura 55- Estrutura da Sequência Didática Eletrônica.



Fonte: o autor.

Como já destacado à Sequência Didática Eletrônica é organizada em seis módulos, três destinados à Função Exponencial e três ligados à Função Logarítmica. Inicialmente, tem dois módulos que se referem às propriedades tanto das potências quanto dos logaritmos. Depois são propostos mais dois módulos para trabalhar ideias básicas referentes às Funções Exponencial e Logarítmica (definição, gráficos, aplicação, etc.) e, por fim, dois módulos envolvendo equações e inequações, tanto exponenciais como logarítmicas.

Foram estabelecidos os seguintes módulos: Propriedades das Potencias, Função Exponencial, Equação e Inequação Exponencial; Propriedades dos Logaritmos, Função Logarítmica, Equação e Inequação Logarítmica. Em cada módulo, há Testes de Conhecimentos e as Sequências Didáticas. Os Testes de Conhecimentos proporcionam ao aluno situações que buscam identificar o quanto ele tem entendimento ou domina o assunto de determinado módulo. Esses testes podem ser realizados em diferentes momentos: como um teste de conhecimentos iniciais, ao longo do estudo ou mesmo ao final do estudo. A ideia é o estudante utilizá-lo como um caminho para reflexão e identificação de suas dificuldades ou necessidades em relação aos temas estudados.

Quanto às Sequências Didáticas, elas têm por função proporcionar um ambiente para o estudo das noções, conceitos e procedimentos dos temas envolvidos, dos quais os estudantes não tenham se apropriado adequadamente quando do desenvolvimento dos mesmos. Embora tenha sido organizada visando a uma retomada ou para estudos de recuperação, a Sequência, ou partes dela, pode ser utilizada, também, no processo de ensino e aprendizagem inicial dos temas. Na sua organização, foram utilizados materiais de estudos, vídeoaulas e quizzes, para o aluno desenvolver os conceitos trabalhados em cada módulo. Os materiais de estudos foram construídos no Power Point, visando integrar, tanto o uso das Tecnologias Digitais, por meio de objetos de aprendizagem, vídeos explicativos, uso do software GeoGebra, através de animações, como também atividades de construção, manipulação e, por fim, resolução de atividades.

Como já destacado, os módulos de testes e estudos estão relacionados, mas são independentes, o que permite aos estudantes escolher, livremente, em qual módulo iniciar seus estudos, podendo, também, optar por realizar somente testes ou estudos.

Sobre a organização da Sequência Didática (Testes de Conhecimentos e Sequência Didática Específica), apontam-se ideias contidas no Relatório Nacional PISA/2012 (BRASIL, 2014) que também orientara esta organização. De acordo com o documento, se uma tarefa se refere apenas a objetos, símbolos ou estruturas matemáticas e não faz referência a temas que não sejam considerados próprios da Matemática, o contexto dessa tarefa é considerado intramatemático e a tarefa pode ser considerada como científica. Nesse caso, a relação entre um problema e a Matemática subjacente está explicitada no contexto daquele problema.

No documento do PISA (BRASIL, 2014), também é enfatizado que é pertinente utilizar tarefas que podem ser encontradas no mundo real e que possuem um contexto para o uso da Matemática, que influencia sua interpretação e resolução. Situações em que o contexto é hipotético, desde que tenha alguns elementos reais e que possa ser resolvido, por meio de conhecimentos matemáticos, também são apontados, destacando que, nesses casos, há uma conexão extramatemática. Tais apontamentos do mencionado documento estão alinhados aos pressupostos da Idoneidade Epistêmica cujos indicadores são tomados para análise.

Tomando como referência o trabalho desenvolvido por Ninow e Kaiber (2019), destacam-se objetivos para o estudo das Funções Exponenciais e Logarítmicas, os quais orientaram a constituição dos Testes de Conhecimentos:

- identificar a Função Exponencial e a Função Logarítmica em diferentes situações intramatemáticas e extramatemáticas;
- avaliar e resolver situações-problema abrangendo as Funções Exponenciais e Logarítmicas;
- empregar distintas linguagens (língua natural, algébrica, tabular e gráfica) para representações e soluções das situações-problema;
- interpretar e definir o domínio e conjunto imagem, de acordo com a situação;
- identificar e analisar o crescimento e decrescimento de uma Função a partir de situações contextualizadas;
- interpretar o sinal da Função na situação-problema abordada;
- analisar e interpretar as variações de uma Função (deslocamentos na horizontal e vertical);
- usar a linguagem simbólica relacionada, determinando o domínio e conjunto imagem, independentemente do contexto (NINOW E KAIBER, 2019).

Para melhor especificar a disposição dos materiais de estudos, no que segue, será exibida uma síntese (Figura 56) do que foi desenvolvido, em cada módulo, em termos de conceitos, definições, propriedades e procedimentos, assim como seus objetivos. Na sequência, será apresentada a composição geral dos materiais, ou seja, como são desenvolvidos os aspectos apontados.

Figura 56- Quadro sobre os objetivos de cada Módulo.

Módulos	Conceitos, definições, proposições e procedimentos abordados	Objetivos
Propriedades das Potências	Identificar e utilizar as propriedades operatórias: -Potência de expoente natural -Potência de expoente inteiro negativo -Potência expoente racional -Potência expoente irracional	- Identificar, Analisar, Efetuar e Relacionar as operações de potenciação.
Função Exponencial	- Formas de representação da função: língua natural, algébrica, tabular e gráfica. - Interpretação e determinação do domínio e conjunto imagem, de acordo com a situação abordada. -Construção e interpretação de tabelas e gráficos, de acordo com a situação problema enfrentada. - Identificação e análise do crescimento e decrescimento de uma função a partir de situações contextualizadas. -Análise e interpretação das variações de uma função (deslocamentos na horizontal e vertical). -Aplicações das Funções Exponenciais em diferentes situações intramatemáticas e extramatemáticas.	- Reconhecer a Função Exponencial e suas propriedades relativas ao crescimento ou decrescimento. - Construir o gráfico de uma Função Exponencial. - Identificar uma Função Exponencial com base em seu gráfico. - Reconhecer, Resolver e Relacionar situações problemas através da Função Exponencial.
Equação e Inequação exponencial	-Identificar equações e inequações exponenciais	- Reconhecer e Resolver uma equação exponencial. - Reconhecer e Resolver uma inequação exponencial.
Propriedades dos Logaritmos	Identificar e utilizar as propriedades operatórias: -Logaritmo de um produto -Logaritmo de um quociente -Logaritmo de uma potência -Mudança de base	-Identificar, Analisar, Relacionar e Efetuar as operações de logaritmos.
Função Logarítmica	- Formas de representação da função: língua natural, algébrica, tabular e gráfica. - Interpretação e determinação do domínio e conjunto imagem, de acordo com a situação abordada. - Construção e interpretação de tabelas e gráficos, de acordo com a situação problema enfrentada.	- Reconhecer a Função Logarítmica e suas propriedades relativas ao crescimento ou decrescimento. - Construir o gráfico de uma Função Logarítmica. - Identificar uma Função Logarítmica com base em seu gráfico -Reconhecer, Resolver e Relacionar situações problemas através da

	- Identificação e análise do crescimento e decrescimento de uma função a partir de situações contextualizadas. - Análise e interpretação das variações de uma função (deslocamentos na horizontal e vertical). - Aplicações das Funções Logarítmicas em diferentes situações intramatemáticas e extramatemáticas.	Função Logarítmica
Equação e Inequação logarítmica	- Identificar equações e inequações logarítmicas	- Reconhecer e Resolver uma equação logarítmica. - Reconhecer e Resolver uma inequação logarítmica.

Fonte: o autor.

6.3.1 **Testes de Conhecimento**

Nos Testes de Conhecimentos, foi estipulado um aproveitamento de 60% como indicativo da não necessidade de realizar estudos na Sequência Didática, porém se trata apenas de um parâmetro. Como já destacado, toda a sequência foi pensada no sentido de dar espaço e autonomia para os estudantes avaliarem seus conhecimentos sobre um tema. Ressalta-se que para cada Módulo, foram criados dois testes desse tipo, ambos com o mesmo grau de dificuldade. O primeiro é destinado ao aluno que fizer o teste antes de realizar os estudos, na Sequência Didática, o segundo, aos educandos que realizarem a Sequência Didática e queiram testar, novamente, os seus conhecimentos.

Em relação à pontuação das questões, foi seguido o modelo utilizado por Monteiro (2013), com a elaboração de um teste adaptativo implementado, também, em uma plataforma digital. Para esse modelo foi estabelecida uma pontuação de 0,35 para as questões de nível fácil, 0,5 para as de nível médio e 0,7 para as difíceis. Porém, como a plataforma do Google Classroom não aceita pontuação com números decimais, a mesma foi convertida em escalas de 10, passando a ser da seguinte maneira: 35 pontos para as questões com grau fácil, 50 de nível médio e por fim, 70 de nível difícil. Cada Teste de Conhecimento possui um total de 10 questões, sendo, 3 difíceis, 3 médias e 4 fáceis. Assim, para atingir um percentual de 60%, é preciso que o aluno alcance uma pontuação mínima de 300 pontos. Foi estabelecida essa pontuação, pois considera-se importante que aluno, ao resolver as questões, acerte, ao menos, uma questão difícil, além de ser também a média da maioria das escolas de rede estadual e municipal do Rio Grande do Sul. As questões foram classificadas em níveis de dificuldades definidas pelo autor como fáceis, médias e difíceis em analogia ao critério estabelecido por Lemos (2013):

> As questões classificadas como de nível básico envolvem somente um conceito ou um procedimento para sua resolução; as de nível intermediário dois conceitos ou procedimentos e as avançadas, três ou mais, sendo que nestas é exigido um nível maior de abstração por parte dos alunos. (LEMOS, 2013, p.32).

Além disso, foram tomados como referência os componentes epistêmicos de Godino (2008 e 2011), sendo eles: situações-problema, linguagens, definições, argumentos e relações. Embora os componentes epistêmicos não tenham sido considerados para estabelecer o grau de dificuldade de uma questão, foi possível perceber que uma questão considerada de grau fácil (envolvendo um conceito ou procedimento) não permite, por exemplo, que esteja envolvido algum tipo de relação. Para a composição do banco de questões dos testes de conhecimentos foram desenvolvidas, ao todo, 120 questões, com três níveis de dificuldades (fácil, médio e difícil), conforme é destacado em Lemos (2013), de modo a ser possível oferecer para os estudantes dois testes em cada módulo, ambos com o mesmo grau de dificuldade e mesmo número de questões, ou seja, cada Teste de Conhecimento possuí 10 questões. No que segue, apresentam-se exemplos de questões dos testes de conhecimento.

A questão apresentada, na Figura 57, por exemplo, refere-se a uma questão do Módulo I- Propriedade das Potências, sendo definida como uma questão com grau fácil de dificuldade, tal como é apontado em Lemos (2013).

Figura 57- Questão referente ao Módulo I- Nível Fácil.

Questão 9- ENEM- Um adulto humano saudável abriga cerca de 100 bilhões de bactérias, somente em seu trato digestivo. Esse número de bactérias pode ser escrito como:

- a) 10^9
- b) 10^{10}
- c) 10^{11}
- d) 10^{12}
- e) 10^{13}

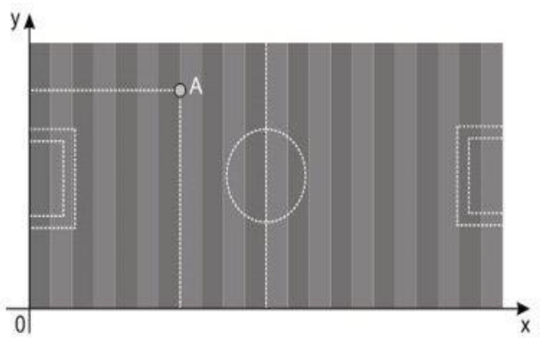
Questão retirada do ENEM 2013. Fonte: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos.

A questão faz referência a um tema de interesse (número de bactérias que um adulto abriga) mas, em termos matemáticos, envolve somente a escrita de um número (100 bilhões) em notação científica. Logo, por ser uma interpretação direta da questão com os conceitos referentes à notação científica, foi atribuído um grau de dificuldade fácil. Por envolver somente a escrita de um número em notação científica, no que se refere aos componentes epistêmicos, a questão tem foco em linguagens.

A segunda questão a ser discutida (Figura 58) trata-se do Módulo IV- Propriedades dos Logaritmos e foi atribuído um grau de dificuldade médio, como é destacado em Lemos (2013).

Figura 58- Questão referente ao Módulo IV- Nível Médio.

Suponha que um campo de futebol seja colocado em um sistema cartesiano ortogonal, conforme mostra a figura.



Para que o ponto *A* ($\log_{10}(x+1)+1$; $\log_{10}(x^2+35)$) tenha abscissa e ordenada iguais, é necessário e suficiente que:

a) $x > -1$ b) $x = 5$ c) $x < -1$ d) $x = -5$ e) $x > 5$

Questão retirada do ENEM 2012. Fonte: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos.

A questão refere-se a um terreno retangular (campo de futebol) colocado em um plano cartesiano, sendo solicitado que se determine um ponto cuja coordenada tem sua abscissa e ordenada dadas a partir de um logaritmo, obedecendo a uma condição dada (abscissa e ordenada iguais). A questão é apresentada, em linguagem natural e algébrica envolvendo um tratamento na sua solução (aplicação de propriedade operatória e procedimentos de resolução). Apresenta, ainda, uma representação figural da situação envolvida na questão. Diante disso, foi estabelecido um grau de dificuldade de nível médio para a questão e, no que se refere aos componentes epistêmicos, a mesma envolve uma situação-problema, a utilização de diferentes tipos de linguagens (natural, algébrica, figural) e o estabelecimento de relações.

Para finalizar, a terceira questão destacada, conforme ilustra a Figura 59, é considerada de grau de dificuldade difícil, tal como é abordado em Lemos (2013), que corresponde ao Módulo II- Função Exponencial.

Figura 59- Questão referente ao Módulo II- Nível Difícil.

A lei que representa uma estimativa do número de pessoas *(N)* que serão infectadas por uma virose, em uma grande região metropolitana, no período de 8 dias é N(t)= a * 2^{bt} , em que N(t) é o número de infectados *t* dias após a divulgação dessa previsão e *a* e *b* são constantes reais positivas. Considerando que, no dia em que foi anunciada a tal previsão, 3000 pessoas já haviam sido diagnosticadas com a virose e que dois dias depois o número já aumentara para 24000 pessoas, os valores de *a* e *b* e o número de infectados após 4 dias, são respectivamente:

a) 3000, 1.5 e 192000
b) 3000, 4 e 27000
c) 1500, 1.5 e 192000
d) 1500, 4 e 48000
e) 3000, 4 e 48000

Questão retirada do ENEM 2018. Fonte: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos.

Para a terceira questão, foi atribuído um grau de nível difícil, visto que ela demanda a solução de uma situação-problema que envolve o crescimento populacional e que segue um modelo exponencial, que é próprio do crescimento de populações. É uma situação-problema apresentada, em linguagem natural e algébrica, onde o estudante precisa ter a compreensão dos significados das variáveis e constantes envolvidas. A questão envolve, também, conceitos e procedimentos referentes à compreensão das equações exponenciais, uma vez que, nela, há a aplicação de propriedades como potência de expoente natural e potência de expoente racional. Assim, uma análise da questão permite perceber, fortemente, a presença dos componentes epistêmicos do EOS (situações-problemas, definições, linguagens, relações), como é destacado em Godino (2008 e 2011).

6.3.2 **Sequência Didática**

A construção da Sequência Didática foi realizada com a utilização do PowerPoint, tomando como referência as indicações propostas por Filatro (2009), que se refere a produção de materiais para o aprendizado eletrônico:

- devem incluir textos, imagens, gráficos, animações e vídeos;
- os textos devem ser sucintos e objetivos;
- utilizar uma linguagem acessível;

- destacar as informações mais importantes através de cores, negrito ou itálico;
- organizar os elementos da interface do material, para que estes não sobrecarreguem a tela.

A pesquisa optou por utilizar o Design Instrucional Fixo, que é proposta por Filatro (2009.) Ainda, segundo a autora, o Design Instrucional é baseado em uma atividade intencional e sistemática de ensino, que envolve o planejamento, o desenvolvimento e a aplicação de métodos, técnicas, atividades, materiais, eventos e produtos educacionais, em situações didáticas, com a finalidade de promover a aprendizagem. A pesquisadora afirma que o Design Instrucional "é um processo (conjunto de atividades) de identificar um problema (uma necessidade) de aprendizagem e desenhar, implementar e avaliar uma solução para esse problema. " (FILATRO, 2009, p.3).

Diante desses argumentos, considerou-se que a perspectiva apresentada pela autora, permeia os mesmos objetivos da presente investigação, desenvolver uma Sequência Didática, com um conjunto de atividades, que, interligadas, permitam ultrapassar dificuldades apresentadas em torno das Funções Exponenciais e Logarítmicas.

Para Filatro (2009), cinco fases que definem o Design Instrucional: análise, design, desenvolvimento, implementação e avaliação. Considera-se que tais fases estão alinhadas às fases da Investigação Baseada no Design-IBD (Godino, et.al.,2013), tomada como referência na presente investigação. Assim, o que vai se tomar de Filatro (2009) são os modelos de design.

Segundo Filatro (2009), há três modelos de design instrucional que podem colaborar para o planejamento e implementação de sequências e conjuntos de atividades. São eles: o design instrucional fixo, o aberto e o contextualizado. Optou-se pelo Design Instrucional Fixo, visto que nele há um planejamento criterioso das atividades, sendo todas arquitetadas antes de ficarem à disposição dos educandos. Nesse modelo, o conhecedor do design instrucional, ao lado de um grupo interdisciplinar, adota as determinações sobre como será a composição dos materiais e das atividades. Na presente pesquisa, o pesquisador realizou essa tarefa.

No que segue, são apresentadas as sequências didáticas organizadas para cada módulo, a saber:

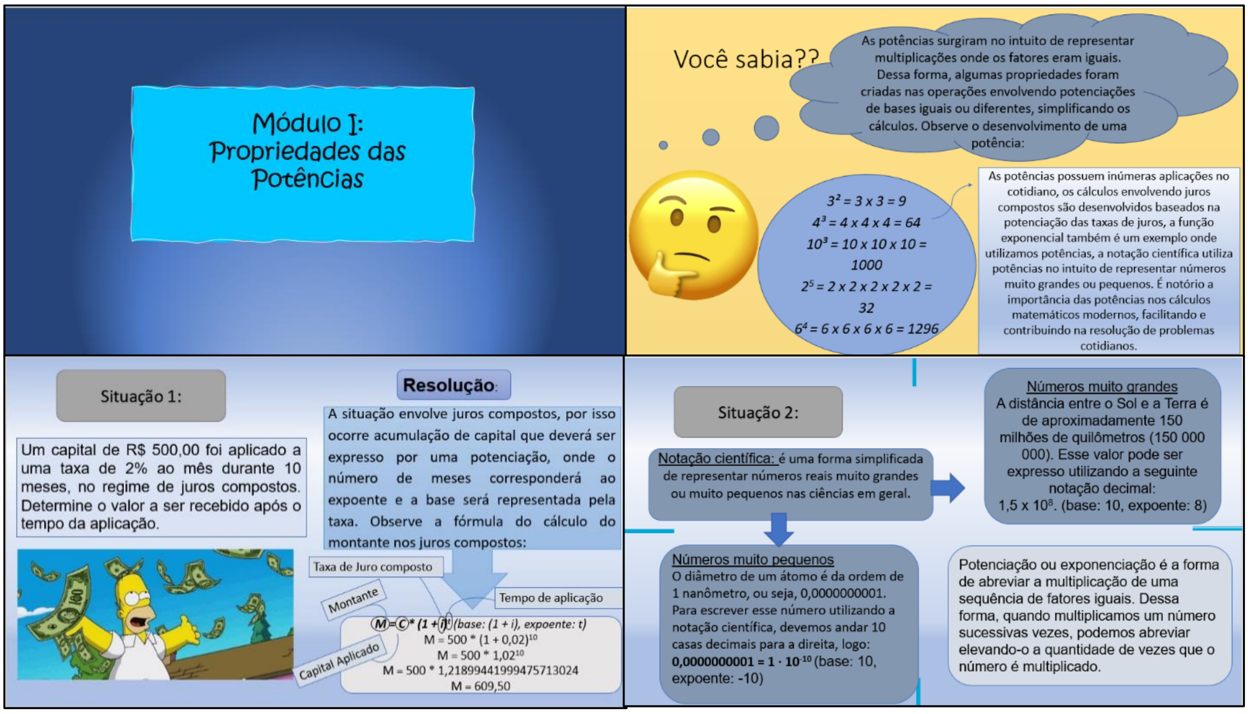
- Módulo I – Propriedades das Potências;
- Modulo II- Função Exponencial;

- Módulo III- Equações e Inequações Exponenciais;
- Módulo IV- Propriedades dos Logaritmos;
- Módulo V- Função Logarítmica;
- Módulo VI – Equações e Inequações Logarítmicas.

6.3.2.1 Sequência Didática do Módulo I: Propriedades das Potências

Considera-se que trabalhar com a compreensão dos conceitos, propriedades e a utilização das potências, em aplicações práticas, é importante para dar suporte à aprendizagem das Funções Exponenciais. Com isso, este módulo é destinado ao estudo das potências, abordando os principais conceitos e propriedades. A BNCC (2017) sugere que o aluno consiga efetuar cálculos com potências de expoentes inteiros, racionais e irracionais, além de aplicar esse conhecimento na representação de números em notação científica. Para isso, foi elaborado um material de estudo tratando sobre o que motivou o surgimento das potências, algumas de suas aplicações, como, por exemplo, na Matemática Financeira e na notação científica, a definição, e por fim, suas propriedades operatórias, produto e divisão de potências de mesma base, potência de potência, potências cuja base é uma divisão ou um produto e, por fim, os casos particulares da potência (potência de uma fração, potência de expoente igual a 0, potência de expoente igual a 1 e potência com o expoente negativo), conforme ilustra a Figura 60.

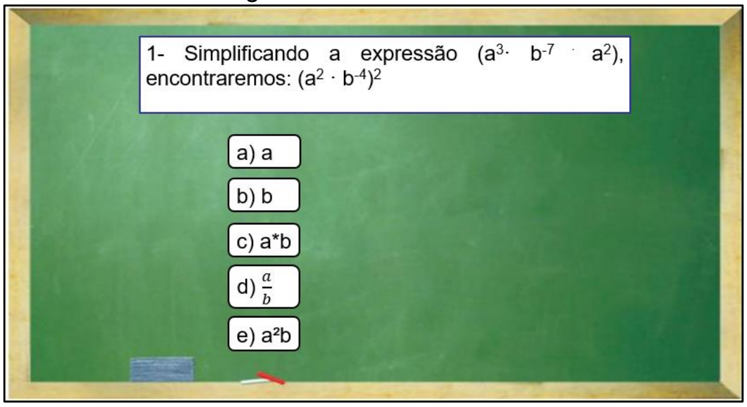
Figura 60- Parte das Lâminas do Módulo I.

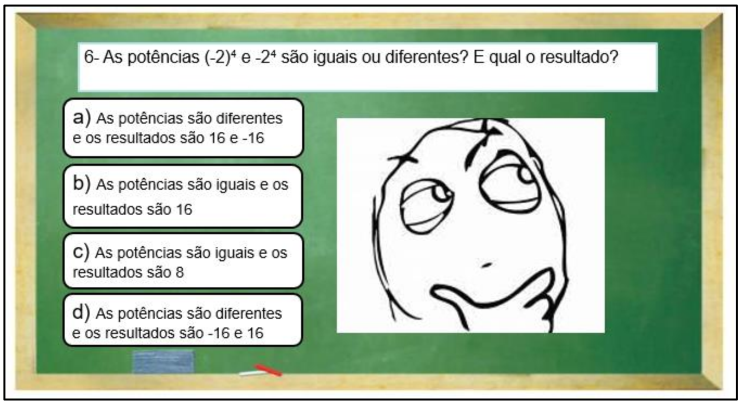


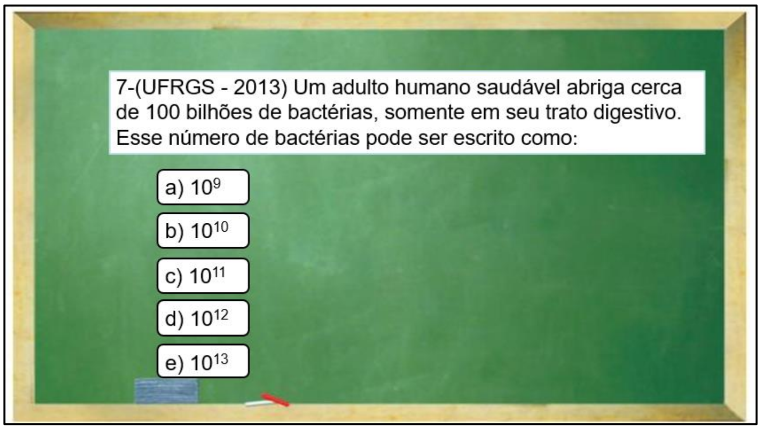
Fonte: o autor.

Ao final desse material, o aluno é desafiado, com um quiz, referente aos conceitos trabalhados ao longo da Sequência (Figura 61). A utilização de atividades que permitem a ação e pensamento do educando torna-se um coeficiente determinante no ensinar e aprender. Os quizzes, por exemplo, são atividades que podem ser realizadas, no espaço escolar, por meio de instrumentos tecnológicos, colaborando, eficientemente, na construção de conhecimentos e no processo de avaliação do aluno, amparando a aprendizagem de maneira significativa e lúdica (ARAÚJO et al., 2011).

Figura 61- Quiz Módulo I.





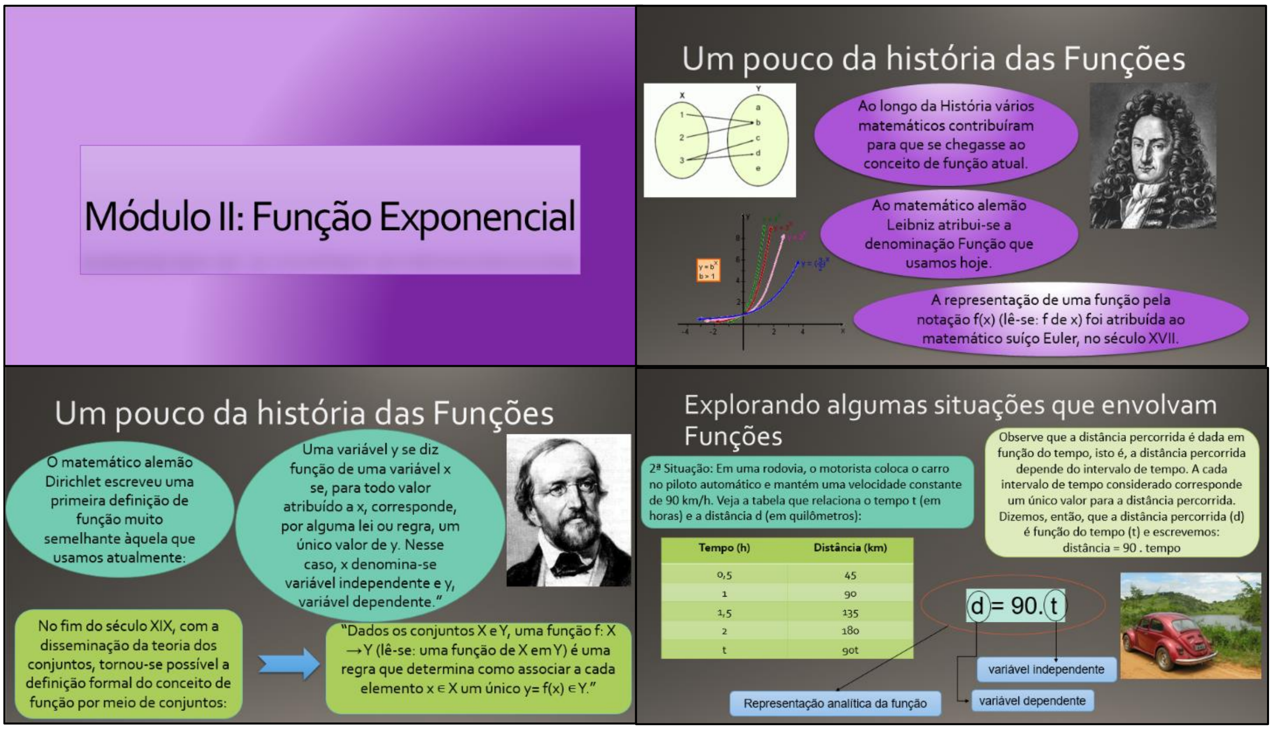


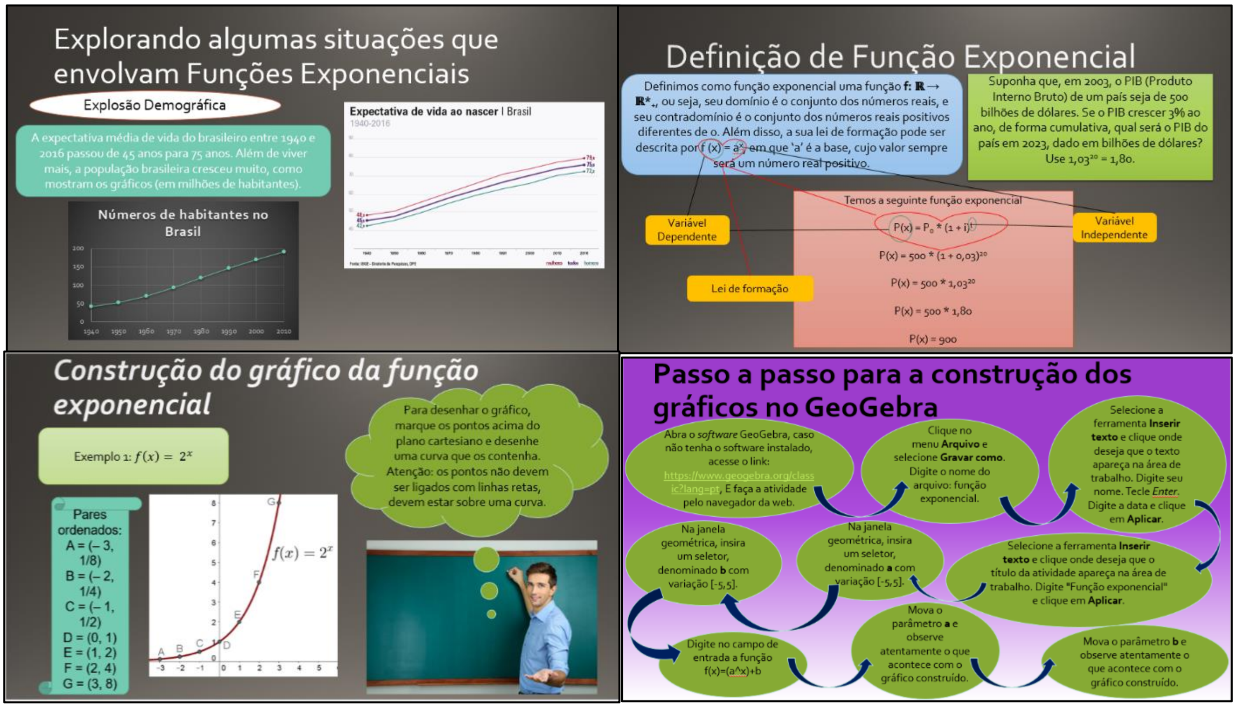
Fonte: o autor.

6.3.2.2 Sequência Didática do Módulo II: Função Exponencial

Neste módulo, são discutidas as noções fundamentais da Função Exponencial. Para isso, são apresentados os principais pontos da História envolvendo a Função e falando sobre o matemático alemão Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), que escreveu a primeira definição de função, com algumas de suas aplicações no cotidiano envolvendo relações de dependência como, por exemplo, quantidade de litros de gasolina e valor a pagar por ela, bem como tempo e distância percorrida para, depois, iniciar a ideia de Função Exponencial, trazendo aplicações como explosão demográfica, crescimento bacteriano, Matemática Financeira, entre outros, sua definição, propriedades e construção de gráficos. Para esse tópico, foi desenvolvido um tutorial, a fim de que o aluno utilize o software GeoGebra para conhecer os comportamentos das curvas do gráfico, conforme Figura 62. Tudo isso vem ao encontro das habilidades que precisam serem alcançadas pelos alunos, segundo a BNCC (2017). O educando precisa saber resolver problemas envolvendo Função Exponencial e interpretar a variação de grandezas envolvidas, em diferentes contextos do cotidiano, como, por exemplo, na Matemática Financeira.

Figura 62- Parte das Lâminas do Módulo II.

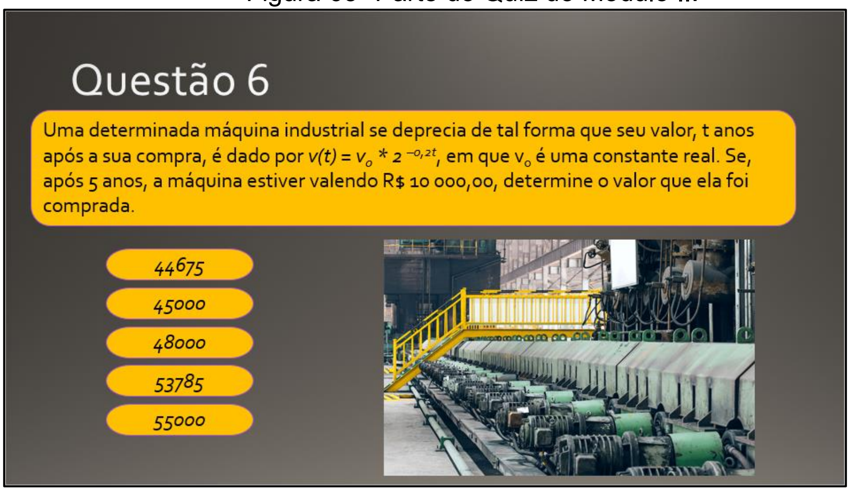


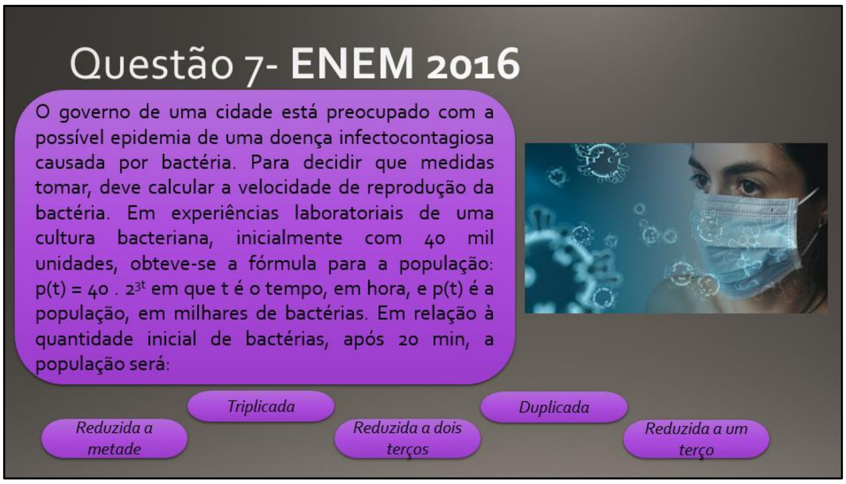


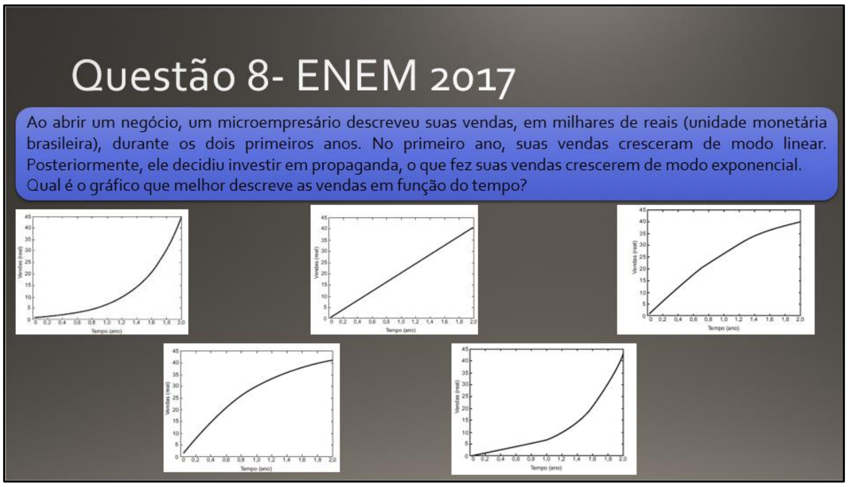
Fonte: o autor.

E, para finalizar, há novamente um quiz com 10 questões, para que o aluno, segundo Oliveira e Moita (2016), melhore a retenção do assunto e consiga identificar os pontos da matéria que precisam de reforço. Esse quiz se refere aos objetos de conhecimento trabalhados, ao longo do módulo, porém, como não era objetivo principal trabalhar com aplicação e definição de função em geral, não foi abordado ao longo do quiz, conforme ilustra Figura 63.

Figura 63- Parte do Quiz do Módulo II.





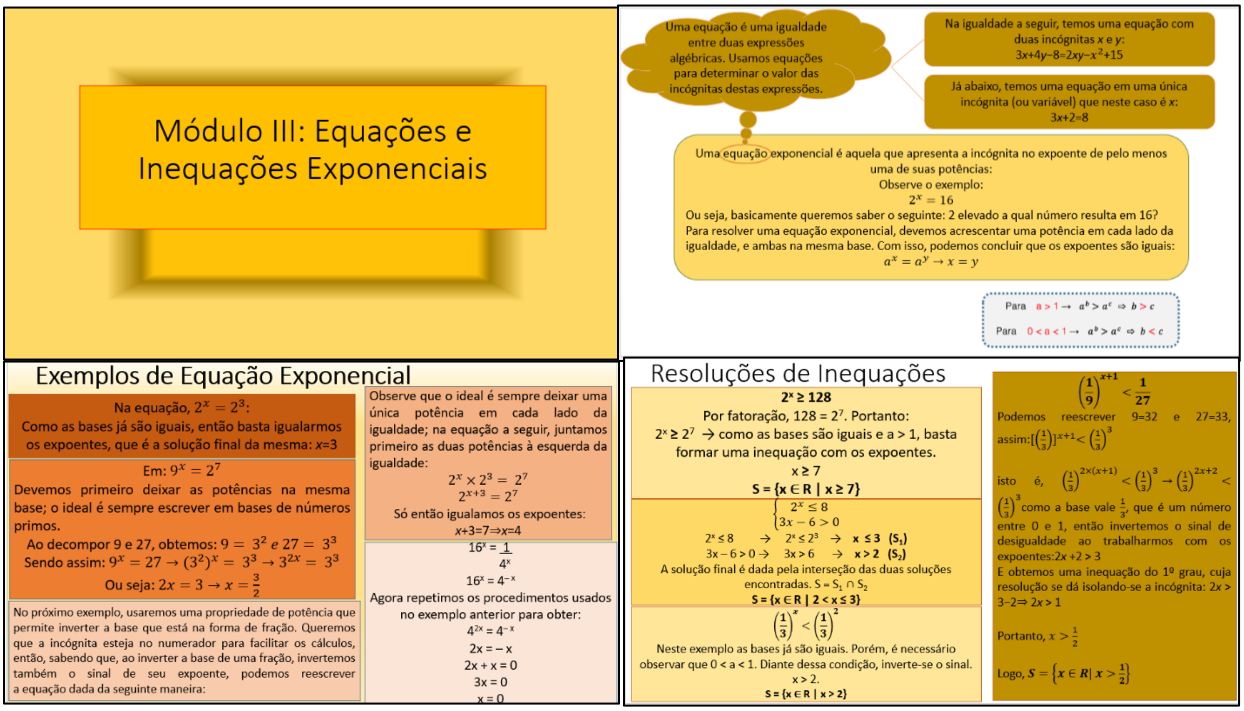


Fonte: o autor.

6.3.2.3 Sequência Didática do Módulo III: Equação e Inequação Exponencial

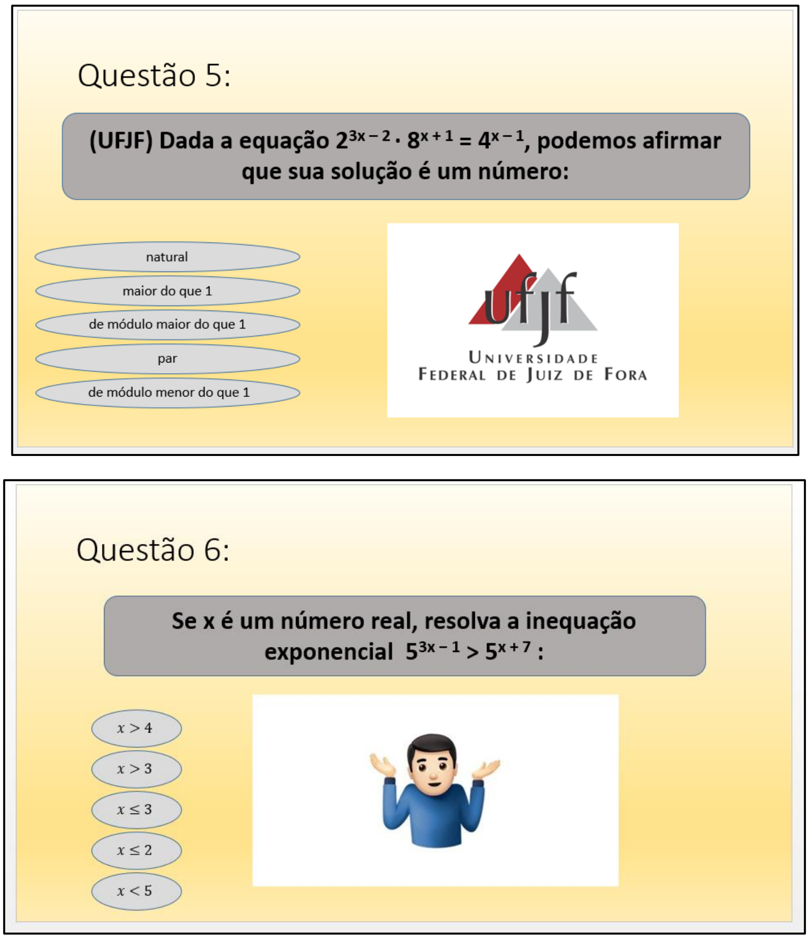
Este módulo foi destinado ao aluno que almeja desenvolver seus conhecimentos sobre as equações e inequações exponenciais, utilizando os materiais criados, sendo esse o mais objetivo, por se tratar de dois conteúdos bem específicos. Inicialmente, é apresentado o que é uma equação, para que, depois, seja trabalhada a ideia de equação exponencial e sua resolução. Ponderando, agora, sobre a inequação, ele seguiu, basicamente, os mesmos caminhos, porém, foi apresentada a diferença entre ambas (Figura 64). Quanto às habilidades propostas pela BNCC, no documento consta que o aluno deve ser capaz de revolver situações-problema abrangendo os dois conteúdos. O quiz foi montado baseado na resolução de equações e inequações, porém, não foram apresentadas situações-problema, somente questões que remetessem, diretamente, ao desenvolvimento algébrico (Figura 65).

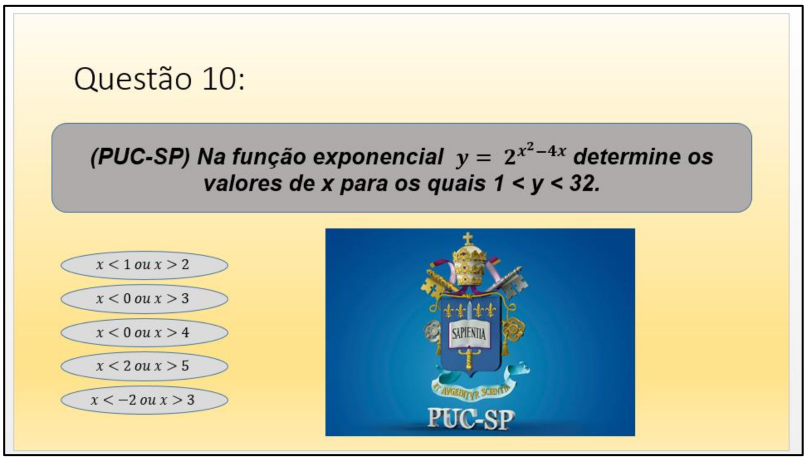
Figura 64- Parte das Lâminas do Módulo III.



Fonte: o autor.

Figura 65- Parte do Quiz do Módulo III.





Fonte: o autor.

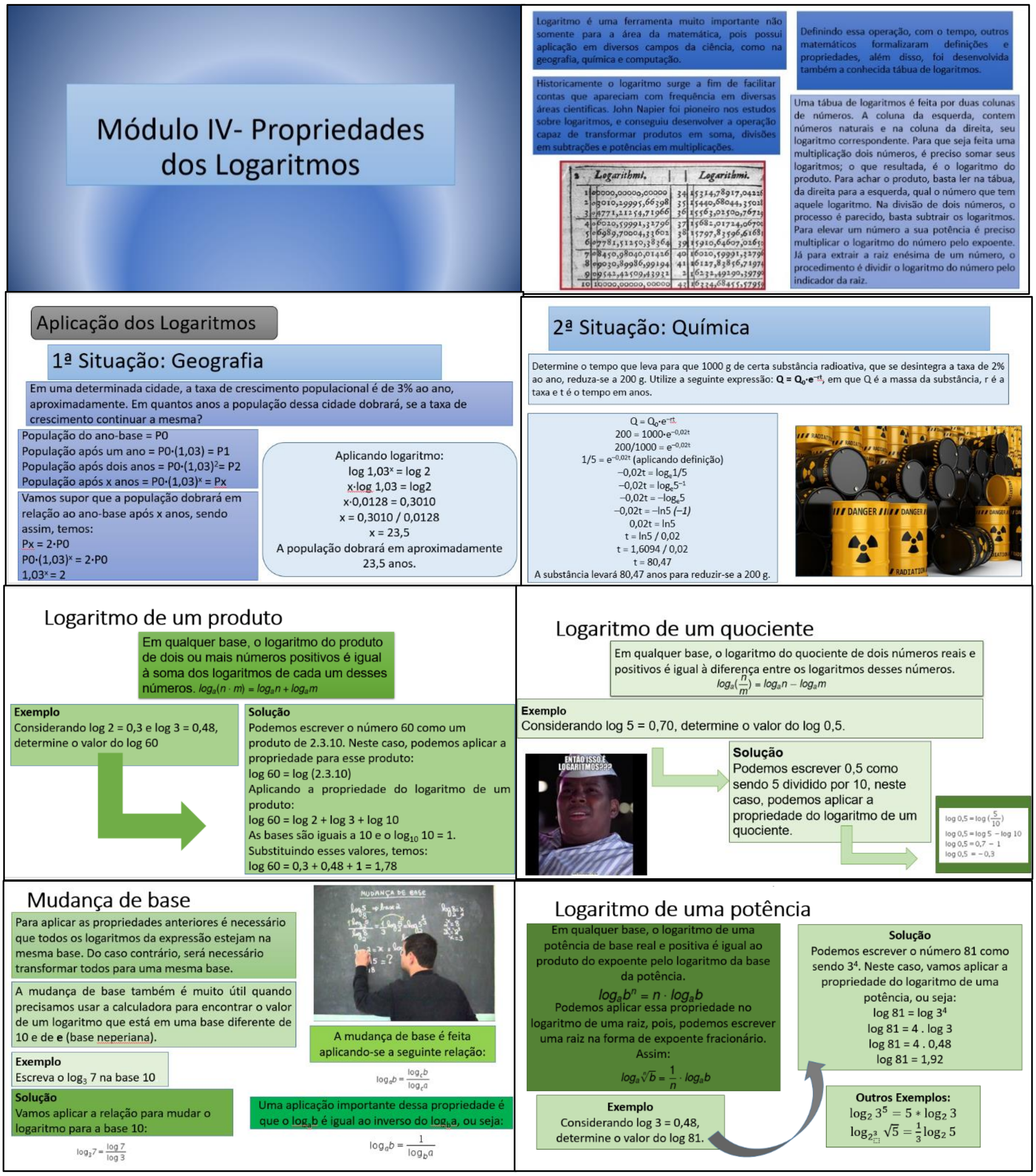
Com isso, foram finalizados os três módulos que fazem referência à parte da Função Exponencial. E, analisando os objetivos específicos dos livros didáticos, as habilidades propostas pela Base Nacional Comum Curricular (2017) e as habilidades estabelecidas nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2020, p.122), verifica-se que os educandos precisam, “corresponder uma função exponencial a seu gráfico, determinar o conjunto solução de uma equação exponencial e utilizar função exponencial na resolução de problemas. ” Com base em todas as habilidades trazidas, considera-se que os módulos buscam trabalhar todos os pontos levantados.

6.3.2.4 Sequência Didática do Módulo IV: Propriedades dos Logaritmos

Os três últimos módulos a serem apresentados referem-se à Função Logarítmica, segundo as OCN (2020). Não se recomenda um estudo exaustivo nesse nível de ensino sobre os logaritmos. Da mesma forma que aconteceu com a Função Exponencial, foi desenvolvido um material de revisão das propriedades dos Logaritmos, visto que esse conteúdo é estudado entre o oitavo e nono ano. Então considera-se fundamental a introdução desse estudo para a Função Logarítmica.

De acordo com as OCN (BRASIL, 2020, p.63), “um tratamento didático apropriado é a utilização da História e da Filosofia da Ciência para contextualizar o problema”. Por esse motivo, para iniciar o módulo referente às propriedades dos logaritmos, é apresentado um contexto histórico sobre os desenvolvimentos dos logaritmos e das tábuas de logaritmos. Em seguida, para contextualizar os logaritmos, são trazidas algumas situações em que eles podem ser vistos, como, por exemplo, Geografia, Química, Matemática Financeira e Medicina, para então, trazer uma definição e a nomenclatura dos logaritmos. Para finalizar a parte do conteúdo do material didático, são apresentadas as quatro propriedades operatórias: logaritmo de um quociente, logaritmo de um produto, logaritmo de uma potência e mudança de base, conforme ilustra a Figura 66.

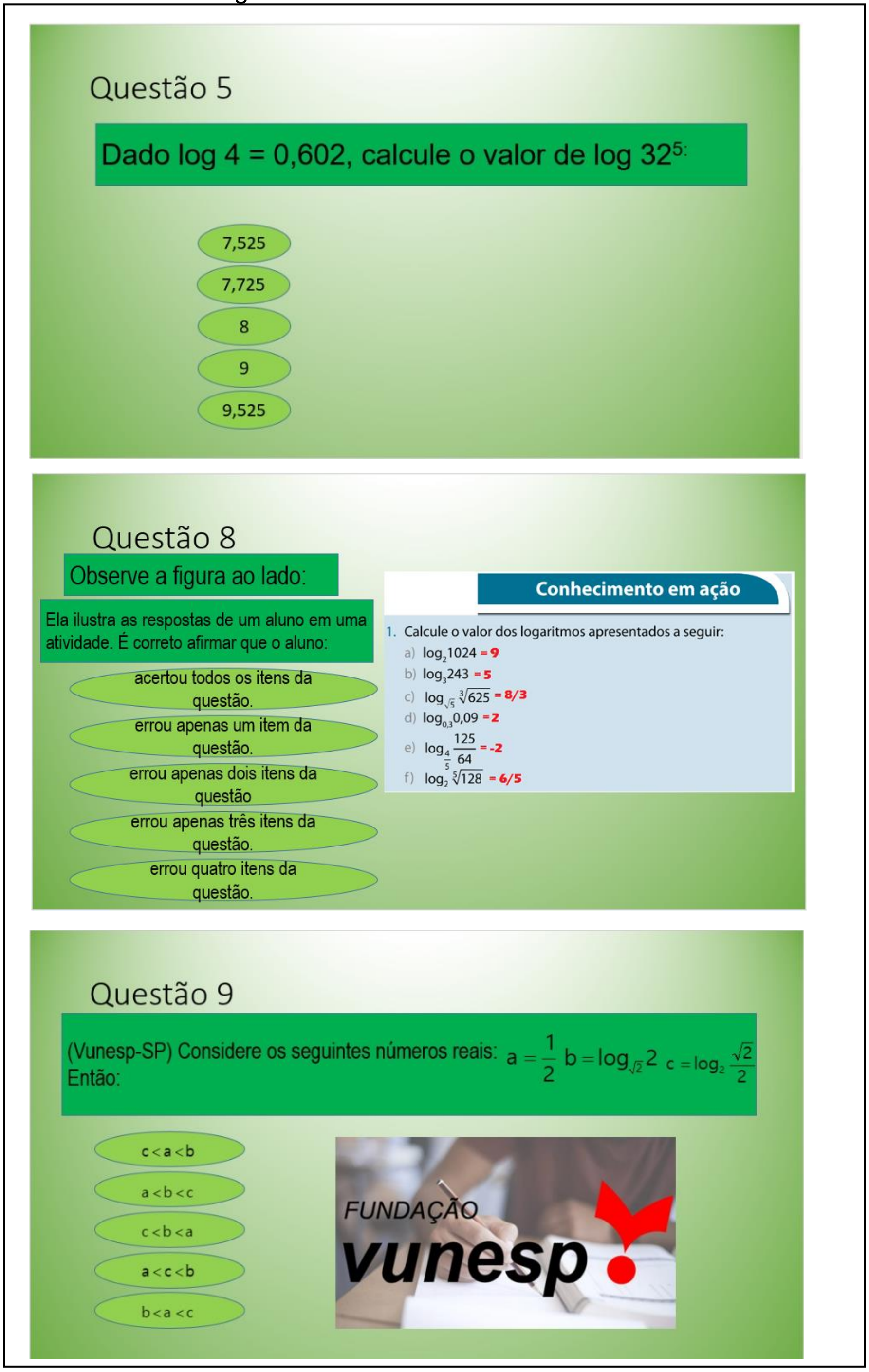
Figura 66- Parte das Lâminas do Módulo IV.



Fonte: o autor.

Para finalizar o material da Sequência Didática Específica, é trazido um quiz, preparando o aluno para o Teste de conhecimento que será feito posteriormente. São dez questões com perguntas objetivas em que o estudante necessita resolver as 4 propriedades operatórias. Essas questões foram retiradas ou adaptadas de livros didáticos e vestibulares. Vale destacar que pouco material foi encontrado com questões que envolvessem as propriedades operatórias em questões com um contexto, conforma mostra figura 67.

Figura 67- Parte do Quiz do Módulo IV.



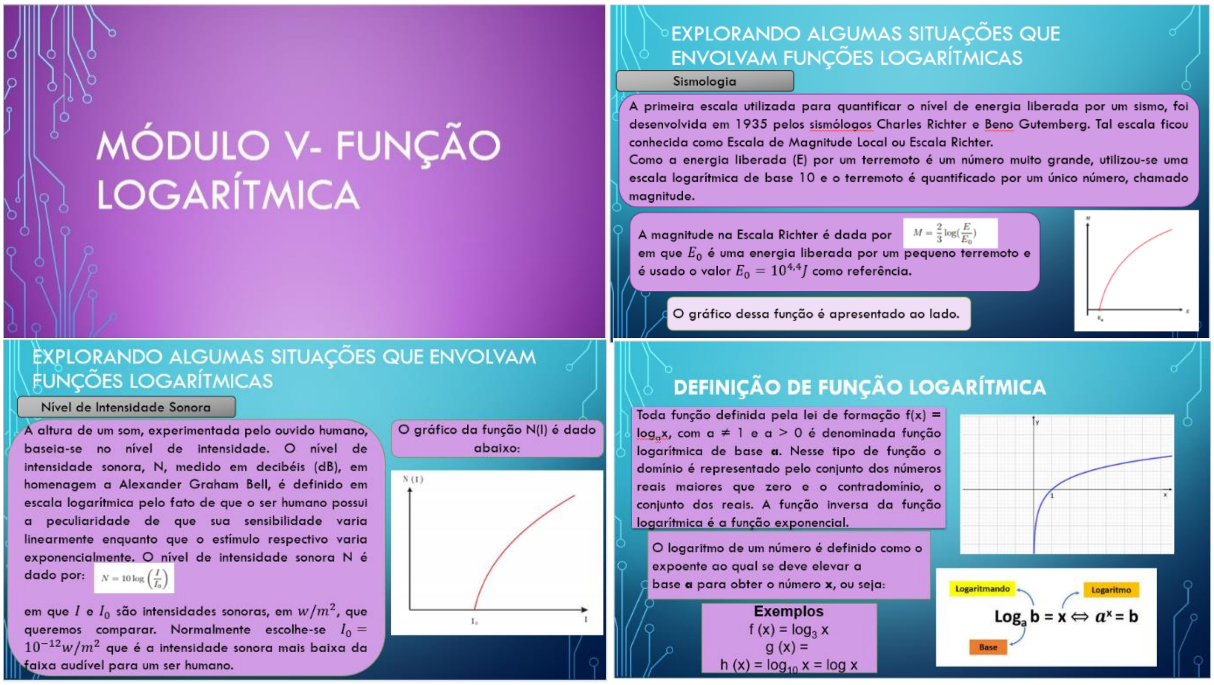
Fonte: o autor.

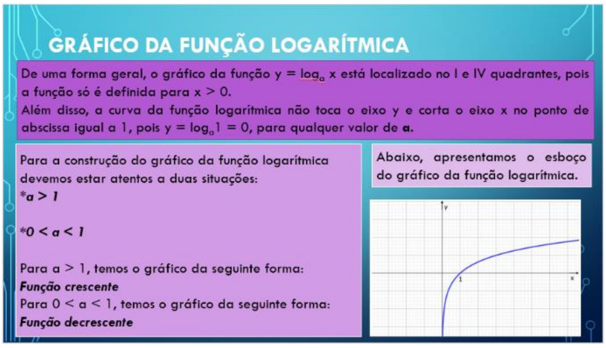
6.3.2.5 Sequência Didática do Módulo V: Função Logarítmica

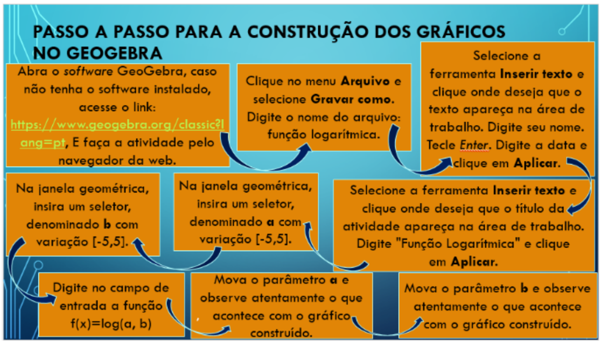
O quinto módulo é destinado ao estudo da Função Logarítmica. A BNCC (BRASIL, 2017, p.531) aponta que o aluno precisa alcançar as seguintes competências e habilidades: “Comparar e analisar as representações, em plano cartesiano, da função logarítmica para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) com ou sem apoio de tecnologias digitais. ” Diante disso, o módulo inicia com algumas situações que envolvam as Funções Logarítmicas, como, por exemplo, na altitude de uma localidade, na sismologia, intensidade sonora, entre outros, para depois ser discutidos, a definição, domínio, imagem e gráfico e suas propriedades (Figura 68).

Nesse módulo, também é apresentada uma comparação com a Função Exponencial. Por fim, como a BNCC apoia o uso de tecnologias, em sala de aula, a fim de que o aluno possa “compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais para produzir conhecimentos e resolver problemas” (BRASIL, 2017, p. 560), é trazida uma discussão, junto ao software GeoGebra, sobre a construção de gráfico no software e os possíveis comportamentos que o gráfico da Função Logarítmica possa ter.

Figura 68- Parte das Lâminas do Módulo V.



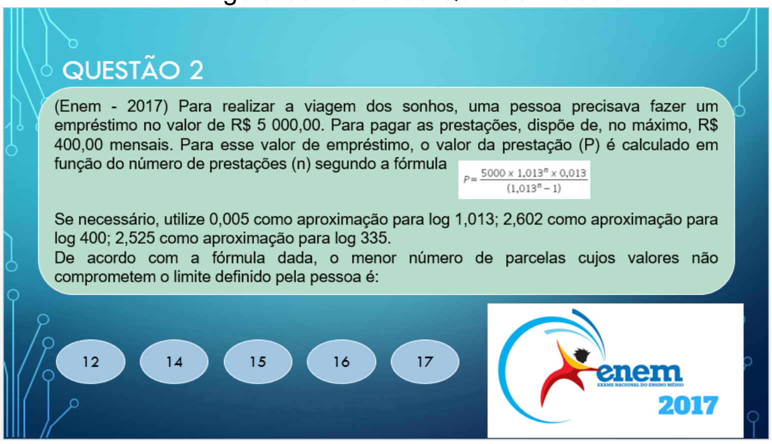


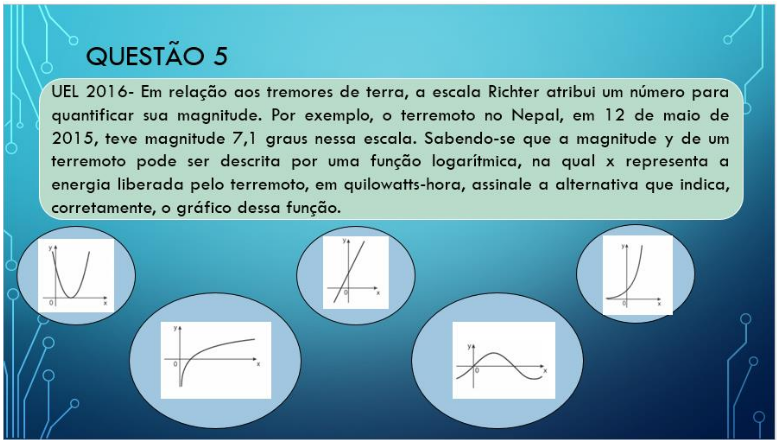


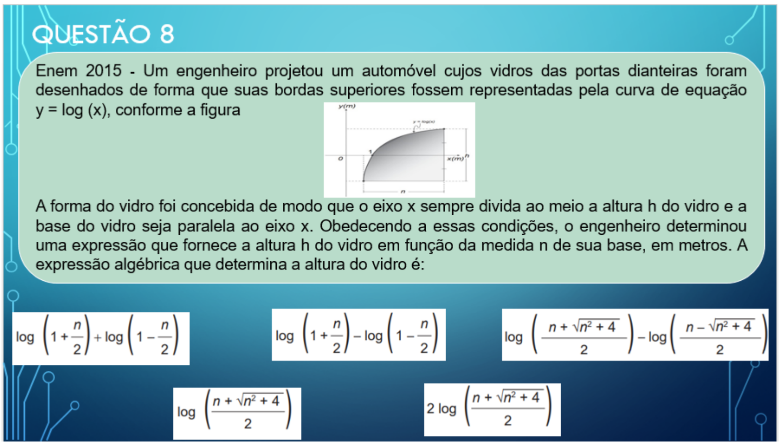
Fonte: o autor.

O quiz desenvolvido para essa Sequência conta com dez questões nas quais o estudante testa seus conhecimentos adquiridos junto ao material preparado. Essas questões, para serem resolvidas, fazem que o aluno utilize as propriedades dos logaritmos desenvolvidos no módulo IV, a definição de Função Logarítmica e a construção de gráficos. Grande parte delas possuem situações contextualizas. Ressalta-se que, nesse quiz, além de trazer questões retiradas ou adaptadas de livros didáticos e vestibulares, também há questões retiradas do Exame Nacional do Ensino Médio, conforme Figura 69.

Figura 69- Parte do Quiz do Módulo VI.







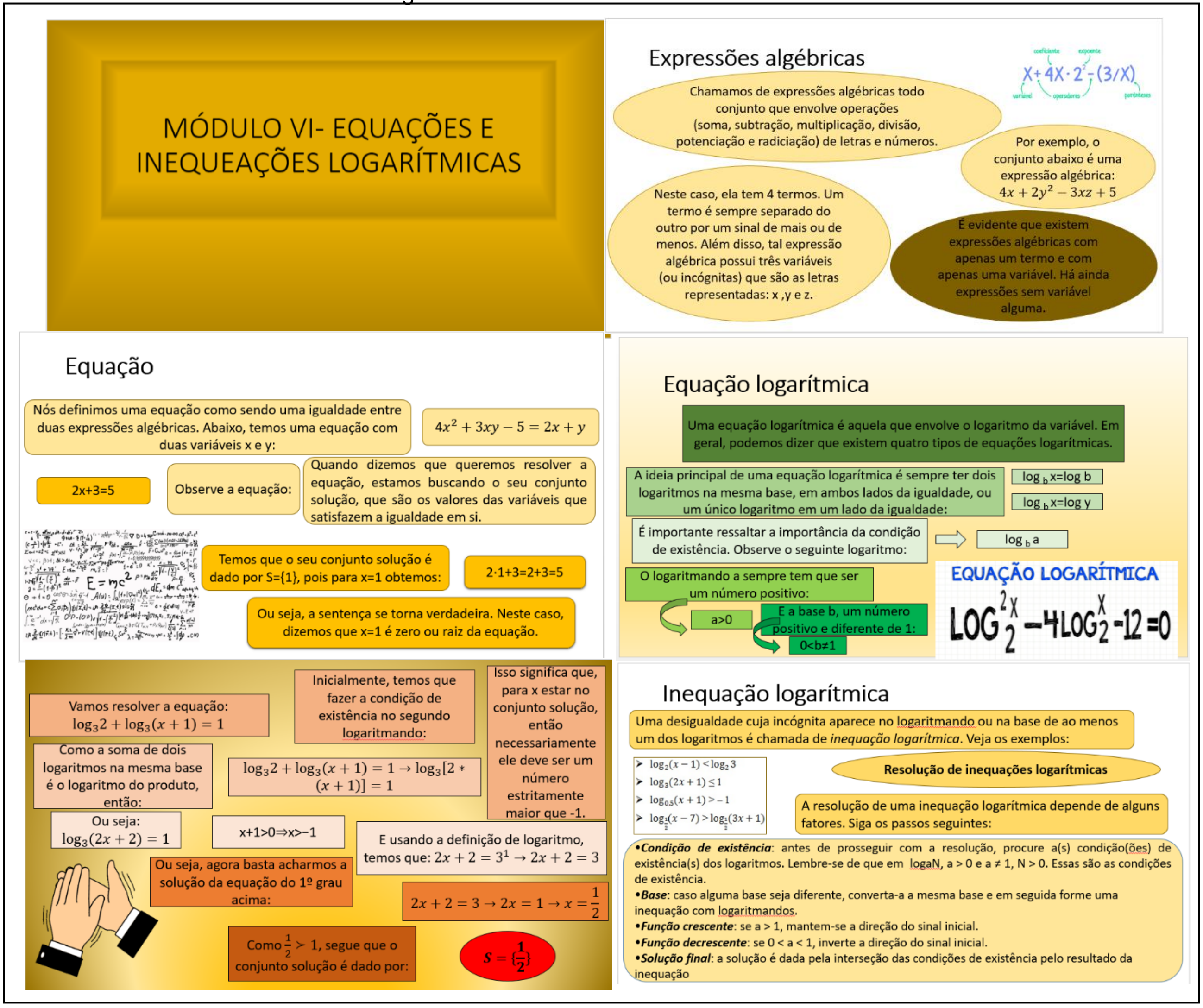
Fonte: o autor.

6.3.2.6 Sequência Didática do Módulo VI: Equação e Inequação Logarítmica

Para finalizar, o sexto módulo denominado Equação e Inequação Logarítmica, introduz a parte das equações logarítmicas. A Sequência inicia falando sobre as expressões algébricas, o que elas são, e sua definição, em seguida; é feito o mesmo com as equações, apresentando-as de uma forma em geral. A equação logarítmica é apresentada em uma linguagem informal, dizendo que ela, é aquela que envolve o logaritmo da variável. A seguir, são mostrados os quatro possíveis tipos e suas resoluções.

As inequações são exibidas já com uma definição também em linguagem informal, para facilitar o entendimento do aluno, afirmando que, para ser uma inequação logarítmica, é necessário que exista uma desigualdade, cuja incógnita apareça no logaritmando ou na base de, pelo menos, um dos logaritmos. São trazidas algumas dicas para a sua resolução e são ressaltadas as condições de existência (Figura 70). A BNCC (2017) aponta que os educandos necessitam desenvolver o pensamento algébrico, para que consigam identificar as relações de dependência entre duas grandezas e resolver situações-problema através das equações e inequações.

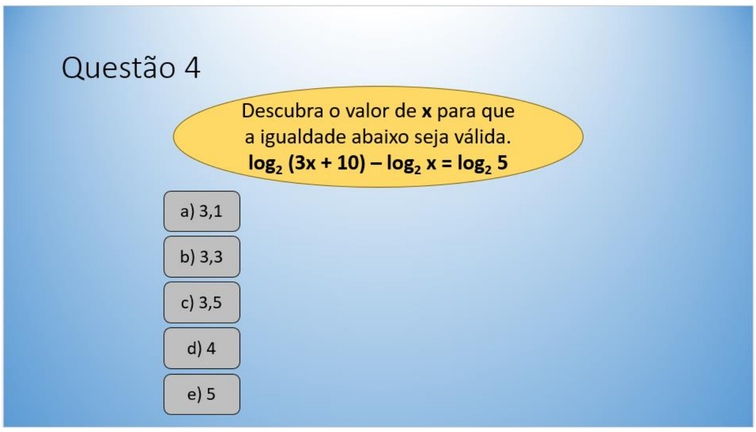
Figura 70- Parte das Lâminas do Módulo VI.

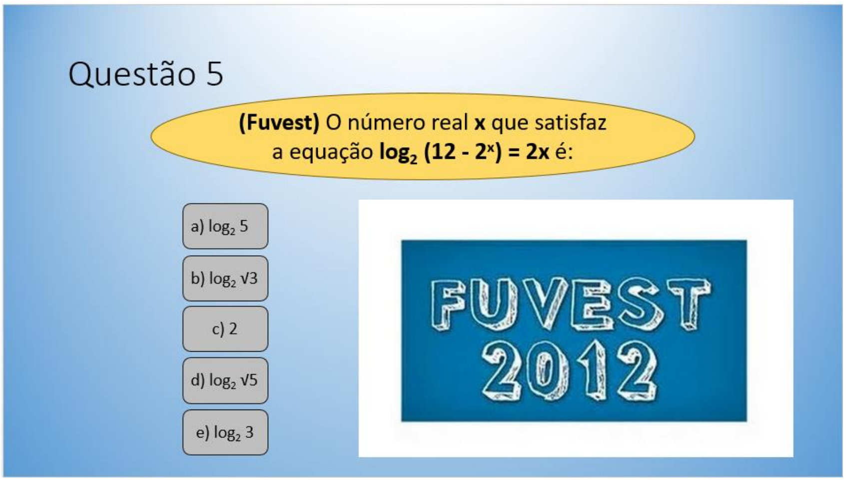


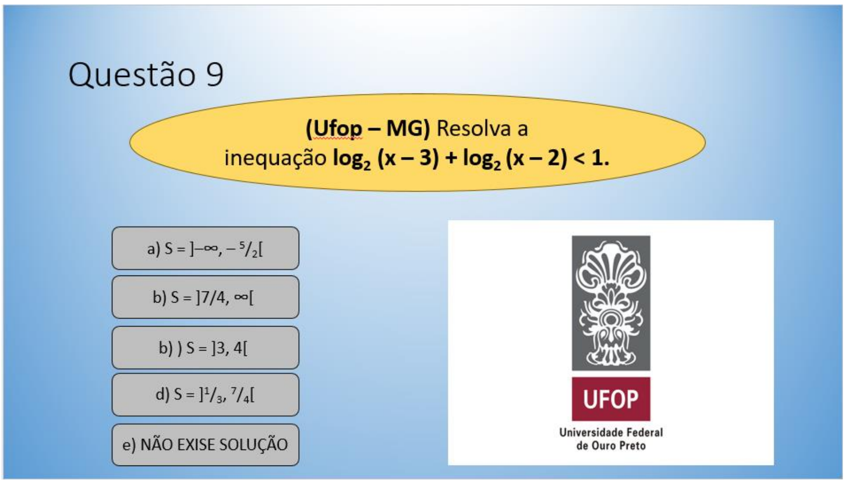
Fonte: o autor.

Por fim, do mesmo modo que foi estruturado o quiz das equações e inequações exponenciais, foi feita a resolução de equações e inequações, entretanto, não houve situações-problema, somente questões que exigissem, diretamente, desenvolvimento algébricos, conforme ilustra a Figura 71.

Figura 71- Parte das Lâminas do Módulo VI.







Fonte: o autor.

Considerando os objetivos dos livros didáticos (calcular logaritmos, identificar uma função logarítmica, analisar e construir gráficos, resolver situações-problema e resolver equações e inequações logarítmicas), as habilidades propostas pela Base Nacional Comum Curricular (2017), que já foram citadas, e as habilidades estabelecidas nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2020), onde se destaca que os educandos precisam resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas e comparar e analisar as representações, em plano cartesiano, das funções exponencial e logarítmica, formando relações entre elas, também se orienta que seja discutido o estudo de fenômenos que têm registro em escala logarítmica, como por exemplo, idade fóssil, intensidade de um abalo sísmico e intensidade de um som. Analisando todos os documentos pesquisados, considera-se que os três módulos referentes à Função Logarítmica contemplam todos os requisitos solicitados nos documentos e exemplares.

7 ANÁLISE DE DADOS – ANÁLISE DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA NA PERSPECTIVA DE UM GRUPO DE PROFESSORES

A Sequência Didática Eletrônica Funções Exponencial e Logarítmica foi apresentada a um grupo de professores para que os mesmos a avaliassem considerando o protocolo Instrumento de Investigação – Análise (Apêndice A). A partir da estrutura do Instrumento de Investigação, os dados advindos das manifestações desses professores serão apresentados considerando os seguintes aspectos:

- perfil dos professores participantes da investigação;
- o uso das Tecnologias Digitais, em sala de aula e o trabalho com Funções;
- a Sequência Didática (Módulos) e os Respectivos Testes de Conhecimentos;
- a Sequência Didática (geral).

Como a sequência didática é extensa, foi solicitado aos professores que analisassem, ou avaliassem, de modo geral, toda a sequência e, particularmente, focassem a análise em um módulo que foi identificado pelo pesquisador, ou seja, no momento em que o professor foi convidado a participar da pesquisa e avaliar a Sequência Didática Eletrônica, foi estipulado um módulo específico para que ele avaliasse. O instrumento de avaliação foi aplicado junto a um grupo de 50 professores, porém apenas 30 professores de Matemática responderam à pesquisa, os quais, possuem ou já possuíram vínculos com o Instituto Federal de Educação de Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul Campus Bento Gonçalves ou com o Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática - PPGECIM da Universidade Luterana Do Brasil, como já destacado. Ao longo do texto, quando forem apresentadas manifestações dos professores, os mesmos serão identificados pela abreviação P1, P2,...P30 (P de professor, seguido de numeração atribuída a cada participante).

O Instrumento de Investigação está dividido em três seções, cada uma com uma finalidade diferente. A primeira seção refere-se ao Termo de Consentimento Livre e Esclarecido em que o professor precisa concordar em participar da pesquisa. A segunda seção tem por objetivo traçar o perfil do professor, onde constam questões relacionadas à formação acadêmica, e à área de atuação profissional. Nessa seção, são realizadas perguntas relacionadas ao domínio e à utilização de tecnologias digitais em sala de aula. A terceira seção faz referência à Sequência Didática Eletrônica, na qual os professores são indagados sobre a Sequência Didática

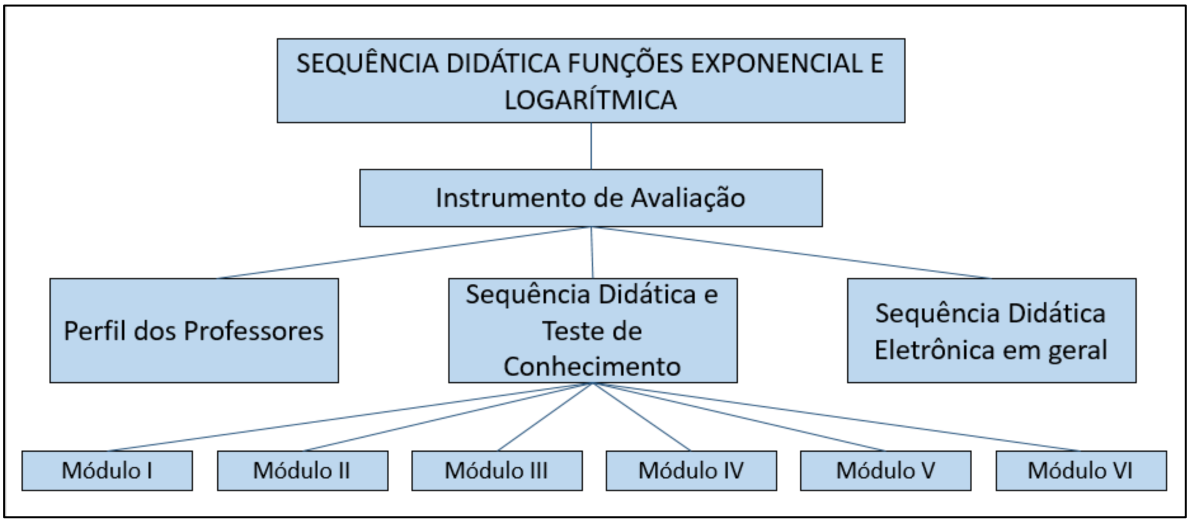
(Módulos), sobre os Testes de Conhecimentos e também sobre a Sequência Didática (geral).

A terceira e última seção do Instrumento de Investigação, diz respeito à Sequência Didática Eletrônica produzida. Como já mencionado, a fim de qualificar a pesquisa, optou-se por solicitar aos participantes que analisassem e avaliassem somente um módulo. Para cada módulo, foram selecionados 5 professores diferentes, com o objetivo que avaliassem tanto a Sequência Didática quanto o Teste de Conhecimento, em alguns pontos específicos, como, por exemplo, se abordam os conceitos, definições, proposições e procedimentos necessários ao estudo a que se propõem, se apresentam situações de contextualização, se fazem uso de diferentes tipos de expressão matemática (verbal, gráfica e simbólica), e além de tópicos ligados à questão visual, como a organização dos textos das lâminas e tipo de linguagem utilizado.

Ao todo, foram realizadas 12 perguntas (em forma de afirmação) envolvendo a Sequência Didática (Módulos), 10 questões relacionas ao Teste de Conhecimento e por fim, 6 perguntas ligadas à Sequência Didática Eletrônica em geral. As opções de resposta se apresentaram na forma de uma escala de concordância (DT-discordo totalmente; DP- discordo parcialmente; ND/NC – nem discordo nem concordo; CP – concordo parcialmente; CT – concordo totalmente), à exceção de duas questões abertas sobre a Sequência como um todo.

No esquema da Figura 72, é destacado como a análise será apresentada.

Figura 72: Esquema da análise da Sequência Didática Eletrônica

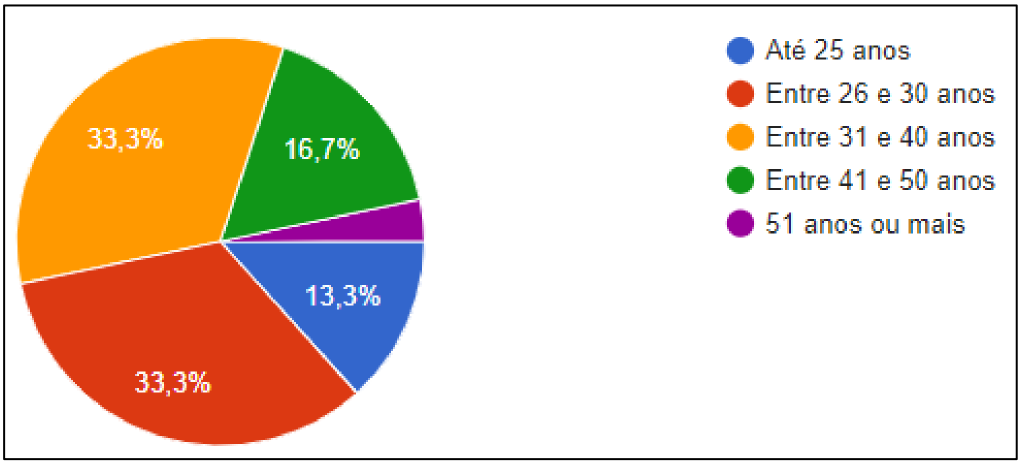


Fonte: o autor.

7.1 PERFIL DOS PROFESSORES PARTICIPANTES DA INVESTIGAÇÃO

Com a aplicação do instrumento de investigação, foi possível identificar que parte significativa do grupo (66,6%) possui idade entre 26 e 40 anos, seguidos do grupo que possui idade entre 41 e 50 anos (16,7%). Apenas 13,3% têm até 25 anos e 3,4% (um professor) tem 51 anos ou mais. Esses dados são apresentados no gráfico da Figura 73.

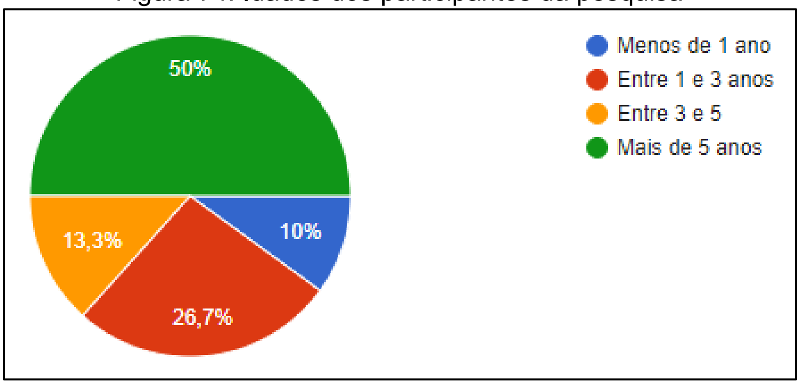
Figura 73- Diferentes idades dos participantes.



Fonte: a pesquisa.

Quanto ao tempo de atuação, em sala de aula, 15 professores responderam que atuam há mais de 5 anos profissionalmente, número que vem ao encontro com relação de idades apresentadas anteriormente, em que 26 dos 30 participantes responderam que possuem idades acima de 26 anos. Ao se buscar a colaboração de professores já atuantes no Instituto Federal e participantes de um programa de pós-graduação, havia a expectativa de um grupo mais experiente, que pudesse contribuir com diferentes pontos de vista sobre a elaboração da Sequência Didática. O gráfico da Figura 74 apresenta o tempo de experiência dos participantes.

Figura 74: Idades dos participantes da pesquisa

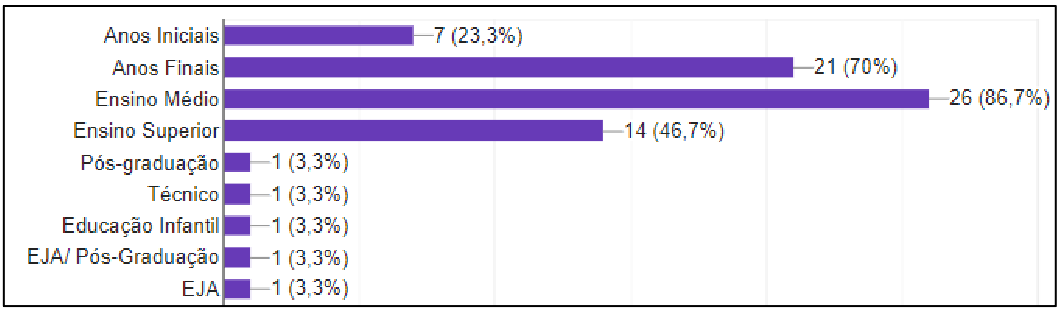


Fonte: a pesquisa.

Quanto a formação acadêmica, todos os participantes da pesquisa têm formação em Licenciatura em Matemática, com ano de formação entre 1992 e 2018, e que a grande maioria (86,7%), ou seja, 26 dos participantes, têm formação em pós-graduação (especialização, mestrado ou doutorado) na área de ensino e aprendizagem de Matemática.

Como o foco da investigação é o conteúdo das Funções Exponencial e Logarítmica e como esses temas são trabalhados no Ensino Médio, como destacado na Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017), optou-se por contar, preferencialmente, com professores que já tivessem atuado nesse nível de ensino, sendo que 26 dos participantes já tiveram, em algum momento, atuação no Ensino Médio. Somente 4 professores não atuaram no Ensino Médio, porém tiveram como experiência de abordar esses conteúdos nos anos finais do Ensino Fundamental, ou em alguma disciplina do Ensino Superior. O gráfico da Figura 75 destaca a atuação dos docentes nos diferentes níveis e modalidades de ensino.

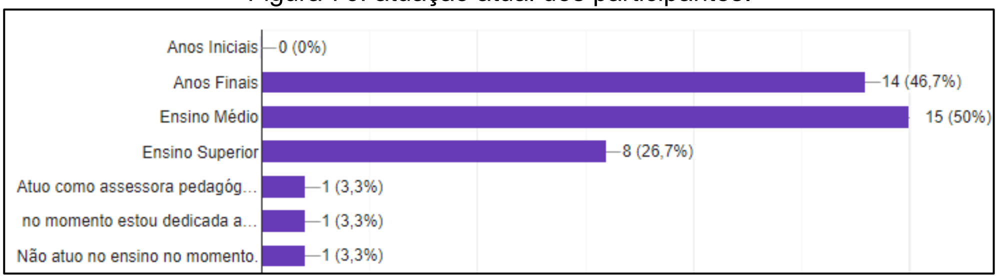
Figura 75- Diferentes níveis de ensino de atuação dos participantes.



Fonte: a pesquisa.

No que se refere à atuação atual, 50% dos participantes da pesquisa atuam no Ensino Médio, em torno de 26%, no Ensino Superior e, em torno de 46% nos anos finais do Ensino Fundamental. Porém, esses percentuais não são exclusivos, ou seja, os professores se encontram atuando em diferentes níveis de ensino (Figura 76).

Figura 76: atuação atual dos participantes.



Fonte: a pesquisa.

Para encerrar a seção referente ao perfil dos professores, foi questionado o município em que estão atuando. Pelo fato dos participantes terem algum vínculo com o Instituto Federal de Educação de Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul, Campus Bento Gonçalves ou com o PPGECIM- Programa de Pós-Graduação em

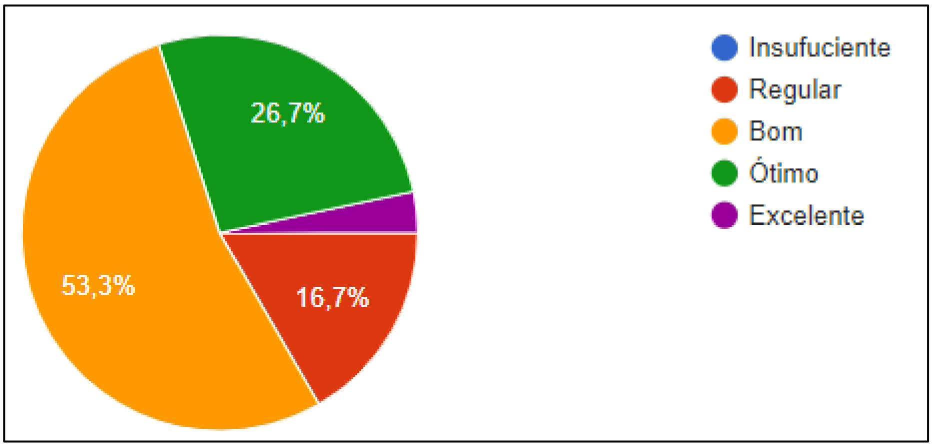
Ensino de Ciências e Matemática da Ulbra, que se localiza no município de Canoas, foi possível perceber incidência em duas regiões, Serra Gaúcha (Bento Gonçalves, Caxias do Sul, Farroupilha, Garibaldi, Monte Belo do Sul e Nova Prata) e região Metropolitana (Alvorada, Canoas, Guaíba Novo Hamburgo, Porto Alegre, São José do Sul e São Leopoldo). O município com maior número de professores em atuação é o de Bento Gonçalves, com 7 docentes.

7.2 USO DAS TECNOLOGIAS E O TRABALHO COM FUNÇÕES

A segunda seção do instrumento de investigação refere-se ao uso das tecnologias digitais na prática docente e, particularmente, para o estudo de Funções. Também foram questionadas as dificuldades enfrentadas pelo professor durante o processo de ensino e aprendizagem desse tema.

Foi possível identificar que parte significativa dos docentes (83,3%), conforme destacado no gráfico da Figura 77, afirma que possuem domínio ou tem conhecimento bom, ótimo ou excelente, quanto à utilização de tecnologias na prática docente, enquanto 16,7% acreditam ter conhecimento regular. As declarações dos professores apontam para um grupo que tem conhecimento sobre como utilizar as tecnologias digitais na prática docente.

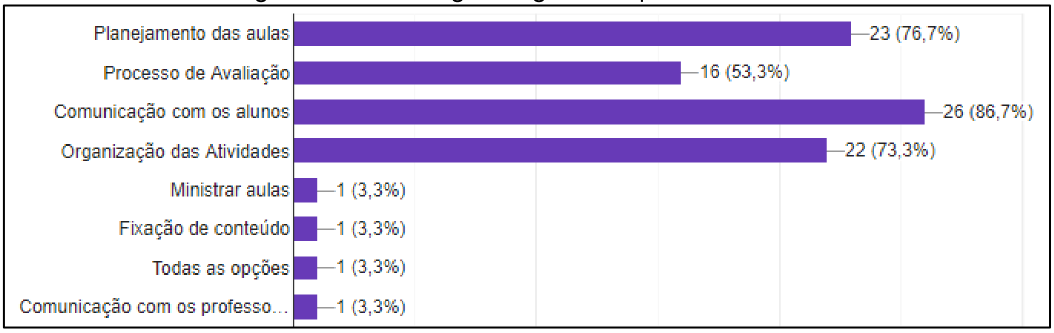
Figura 77- Conhecimento/ domínio sobre Tecnologias Digitais para uso em sala de aula.



Fonte: a pesquisa.

Outro ponto a destacar é em relação ao uso de tecnologias digitais em suas respectivas práticas docentes. Todos os professores responderam que utilizam algum tipo de tecnologia em algum momento de sua atividade. Quanto ao momento em que são utilizadas, as manifestações mais recorrentes apontam para: planejamento das aulas, processo de avaliação, comunicação com os alunos e organização das atividades. O gráfico da figura 78 representa essa situação.

Figura 78: Tecnologias Digitais na prática docente



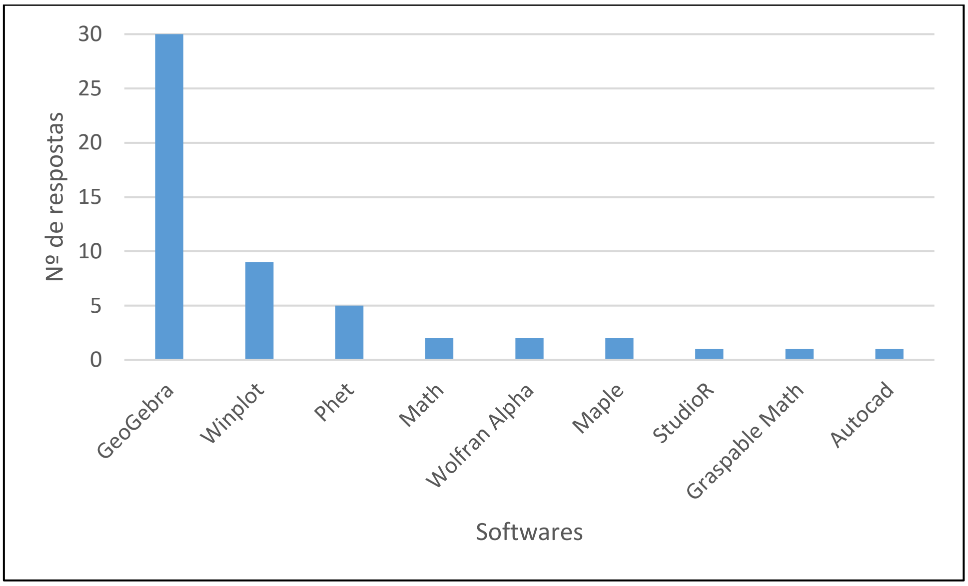
Fonte: a pesquisa.

Quanto aos recursos tecnológicos usados pelos professores para a realização de tais práticas, as respostas que tiveram maior recorrência foram quanto ao uso da Plataforma Google Meet (ferramenta para realizar videoconferência), das Plataformas do Google Classroom (já apresentada na presente pesquisa), Power Point (ferramenta utilizada para criação, edição e apresentações de slides) e WhatsApp (aplicativo de troca de mensagens e comunicação em áudio e vídeo). Ainda foi destacado como muito utilizado o *software* GeoGebra (*software* de Matemática dinâmica para diversos níveis de ensino que agrupa Geometria, Álgebra, gráficos, estatística e cálculo).

Embora os professores não tenham declarado, conjectura-se que a utilização do Google Meet e de outras ferramentas do Google for Education é devido ao período de ensino remoto em função da suspensão das aulas presenciais pela pandemia da COVID-19. Todas as escolas passaram a utilizar as ferramentas do Google para o desenvolvimento de suas ações junto aos estudantes.

Como a discussão da presente pesquisa refere-se aos objetos de conhecimento que envolvem o estudo de Funções, foram apresentadas duas questões envolvendo a utilização de tecnologias: a primeira foi se o docente poderia indicar algum aplicativo ou *software* que pudesse ser utilizado para abordar tal assunto e a segunda teve como objetivo complementar a primeira e saber quais seriam os aplicativos ou *softwares*. Todos os participantes responderam assinalando que sim, que poderiam indicar e, dentre os recursos apresentados, o *software* GeoGebra apareceu em todas as 30 respostas, seguido da indicação dos programas Winplot e Phet. As indicações dos professores podem ser vistas no gráfico da Figura 79.

Figura 79: Aplicativos ou *softwares* usados para o ensino de Funções.



Fonte: a pesquisa.

Para finalizar a segunda seção, foram apresentadas duas questões referentes ao ensino e aprendizagem de Funções. A primeira, trata das dificuldades enfrentadas pelo professor, ao ensinar o conteúdo; a segunda, das possíveis dificuldades que os alunos enfrentam durante o processo de aprendizagem. Como resposta envolvendo o ensino, os participantes destacaram a falta de conhecimentos prévios por parte dos alunos, a necessidade de implementar atividades que possam ser aplicáveis à realidade dos alunos e, por fim, a compreensão das relações de dependências e a construção de gráficos. Sobre as possíveis dificuldades de ensino, os professores destacaram:

> São duas as principais. A primeira é proporcionar o entendimento de função como relação de dependência e a segunda é com relação às variações da representação gráfica a partir das variações dos coeficientes das funções. (P18)
> Dificuldade em fazer referência às aplicações da Matemática às outras Ciências e, também, de fazer a conexão entre os diversos tipos de Funções, e, também, motivar o público discente com questões intrínsecas a sua realidade.(P11)
> Fazer o aluno compreender em um nível avançado a construção gráfica e os cálculos, pois eles apresentam muitas dificuldades com a Matemática básica.(P09)

Já para a segunda questão, sobre as dificuldades encontradas pelos alunos na aprendizagem de Funções, foram elencados tópicos como: passagem das representações gráficas para algébricas, ou vice e versa e reconhecer as características básicas de cada tipo de Função (lei de formação, domínio e imagem), além da dificuldade de conseguir elaborar ou modelar situações-problemas. Também são destacados conteúdos dos quais os alunos já deveriam ter domínio, que são considerados fundamentais para o estudo de Funções, como operações algébricas, frações, equações, potências, radiciação e falta de domínio da linguagem matemática. Para melhor ilustrar essas situações, destacam-se manifestações dos professores.

> A compreensão da letra como variável. Os alunos normalmente apresentam dificuldades em diferenciar expressões, equações e funções. Também algumas distinções, por exemplo: a letra "m" na aritmética indica metros, já na álgebra pode indicar uma quantidade de metros. (P07)
>
> Falta de domínio da linguagem matemática; dificuldade de relacionar as diferentes representações; elaborar modelos a partir de uma situação real e/ou simulada. (P10)
>
> Assim como na questão anterior, são duas as principais. A primeira é proporcionar o entendimento de função como relação de dependência e a segunda é com relação às variações da representação gráfica a partir das variações dos coeficientes das funções.(P17)

7.3 SOBRE A SEQUÊNCIA DIDÁTICA – MÓDULOS E OS RESPECTIVOS TESTES DE CONHECIMENTOS

Serão apresentados, aqui, os resultados advindos da análise/avaliação dos professores referentes à Sequência Didática – Módulos e os Testes de Conhecimento.

Para a criação desse instrumento de investigação, foram tomados como referência os componentes epistêmicos de Godino (2008 e 2011), sendo eles: situações-problema, linguagens, definições, argumentos e relações, e também as indicações propostas por Filatro (2009), que se referem a produção de materiais para o aprendizado eletrônico.

Como o professor que analisou determinado módulo analisou, também, o teste atrelado a esse módulo, julgou-se pertinente apresentar essa análise de modo conjunto. Assim, no que segue, são destacadas, em cada módulo analisado, a análise da sequência didática do módulo considerado, seguido da análise do teste correspondente ao módulo.

O instrumento de investigação apresentado aos professores para analisar a Sequência Didática, no que se refere aos Módulos, tinha uma seção com 12 itens, segundo os quais os módulos deveriam ser analisados ou avaliados seguindo aspectos, tal como destacado no quadro da Figura 80.

Figura 80 – Instrumento de Avaliação sobre os Módulos de estudo

Referente à Sequência Didática (módulos de estudo)	DT	DP	ND, NC	CP	CT
1- Aborda os conceitos, definições, proposições e procedimentos necessários ao estudo a que se propõem.					
2- Apresenta uma mostra representativa e articulada de situações de contextualização, exercícios e aplicações.					
3- Utiliza diferentes modos de expressão matemática (verbal, gráfica, simbólica), tradução e conversão entre essas.					
4- As explicações, comprovações e demonstrações são adequadas ao nível educativo a que se dirigem					
5- Os objetos matemáticos (problemas, definições, proposições) se relacionam e se conectam entre si					
6- Propõe situações que possibilitem observar, analisar, justificar ou provar ideias.					
7- Apresenta suficientes recursos de visualização como, por exemplo: textos, imagens, gráficos, animações e vídeos.					
8- Destaca com clareza as informações mais importantes, por meio de cores, destaques, negrito ou itálico					
9- Utiliza uma linguagem acessível.					
10- Os textos apresentados são sucintos e objetivos.					
11- Os elementos de interface do material estão organizados de modo que não sobrecarreguem a tela.					
12- Proporciona aprendizagem fora do ambiente escolar.					

Fonte: a pesquisa.

Já o instrumento que visava analisar ou avaliar os Testes de Conhecimentos foi organizado considerando 10 itens, conforme pode ser visto no quadro da Figura 81.

Figura 81- Instrumento de Avaliação sobre os Testes de Conhecimentos

Referente ao Teste de Conhecimentos	DT	DP	ND, NC	CP	CT
1- Aborda os conceitos, definições, proposições e procedimentos necessários ao estudo a que se propõem.					
2- Apresenta uma mostra representativa de situações de contextualização e propõe situações problemas.					
3- Utiliza diferentes modos de expressão matemática (verbal, gráfica, simbólica), tradução e conversão entre as mesmas.					
4- Utiliza nível de linguagem adequado aos estudantes.					
5- Apresenta situações de leitura e interpretação adequadas ao nível dos estudantes.					
6- Apresenta situações nas quais os estudantes tenham que generalizar ou negociar definições, proposições ou procedimentos.					
7- Apresenta situações que possibilitem observar, analisar ou justificar ideias.					
8- Apresenta diferentes situações de expressão matemática (verbal, gráfica, simbólica) e interpretação.					
9- Os elementos da interface do material são organizados a fim de que estes não sobrecarreguem a tela.					
10- As questões apresentadas são demonstram com clareza seus objetivos.					

Fonte: a pesquisa.

A última seção do Instrumento de Investigação refere-se a aspectos ligados à Sequência Didática em geral, ou seja, não apenas a um Módulo específico, mas sim, à análise da sequência como um todo. Foram considerados 6 itens que podem ser observados no quadro da Figura 82, segundo os quais todos os módulos deveriam ser analisados ou avaliados.

Figura 82: Instrumento de Avaliação sobre a Sequência Didática Eletrônica em geral

Referente a Sequência Didática Eletrônica em geral	DT	DP	ND, NC	CP	CT
1- Possibilita autonomia ao estudante na execução das atividades propostas.					
2- Desperta curiosidade para assuntos desconhecidos pelo estudante.					
3- Auxilia o estudante na retomada dos conceitos e procedimentos referente aos conteúdos abordados.					
4- Auxilia o aluno na aprendizagem dos conceitos e procedimentos referente aos conteúdos abordados.					

5- Destaque pontos positivos e negativos quanto a estrutura da Sequência Didática Eletrônica em geral.

____

6- Na sua opinião qual ou quais estratégias devem ser utilizadas para realizar a retomada de um determinado conteúdo?

____

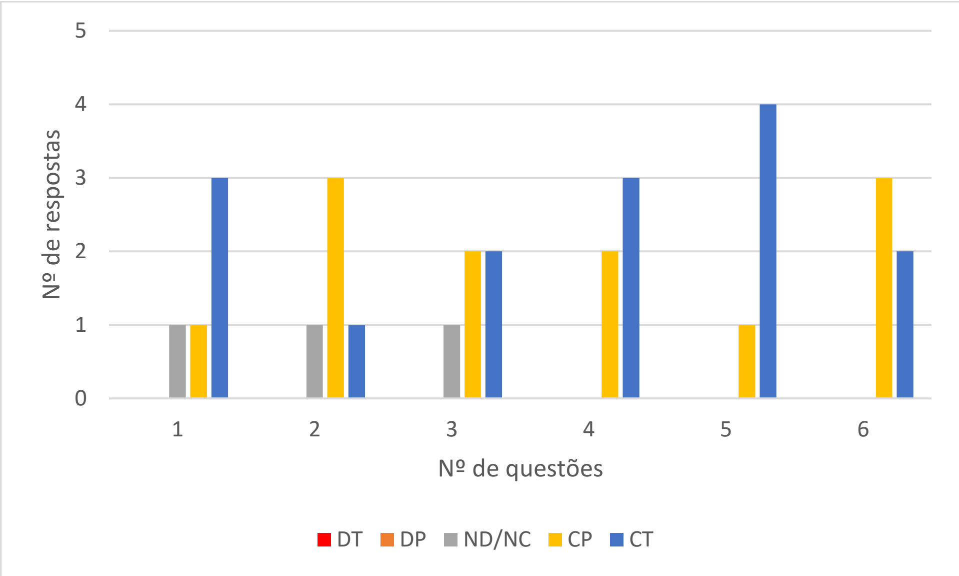
Fonte: a pesquisa.

Assim, no segue serão destacadas e analisadas manifestações dos professores referentes aos Módulos e dos Testes de Conhecimentos. As doze questões que compõem o instrumento de avaliação foram analisadas em dois blocos: no primeiro, apresenta-se a análise das seis questões que se referem aos aspectos epistêmicos, ou seja, referentes ao conteúdo do conhecimento abordado quanto aos conceitos e definições, o tipo de linguagem utilizada e seus diferentes tipos de representações, como também, se as explicações estão adequadas ao nível dos alunos; no segundo, é destacada a análise das outras seis questões, relacionadas a aspectos como questão visual, organização dos textos, cores, tipo de linguagem e, para finalizar, se a sequência tem potencial para proporcionar aprendizagens fora do ambiente escolar.

7.3.1 Módulo I - Propriedades das Potências e Testes

A análise do Módulo I - Propriedades das Potências foi realizada por cinco professores. Como já explicitado, no total, foram trinta professores participantes organizados em seis grupos para avaliar cada Módulo individualmente. Com relação às análises da Sequência Didática (Módulo), as questões foram divididas em dois blocos: as seis primeiras questões referem-se a aspectos epistêmicos (GODINO, 2008, 2011) enquanto, as seis últimas se referem a aspectos de visualização e organização (FILATRO, 2009). Quanto às opiniões dos professores, pode-se perceber que, em todos os itens, considerações indicando algum tipo de concordância, sejam elas parcial ou total, foram mais recorrentes. O gráfico da Figura 83 apresenta as manifestações dos professores sobre as primeiras seis questões do Módulo I.

Figura 83: Avaliação Módulo I – questões 1 a 6

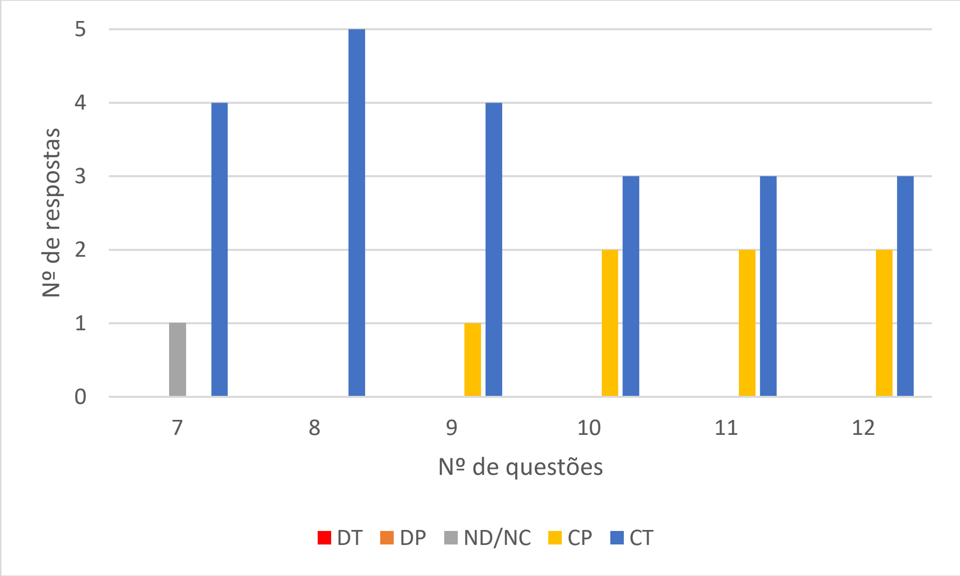


Fonte: a pesquisa.

Quando questionados se, no módulo, os objetos matemáticos apresentados (problemas, definições, proposições) se relacionam e se conectam entre si, se propõe situações que possibilitem observar, analisar, justificar ou provar ideias e se as explicações, comprovações e demonstrações estão adequadas ao nível educativo a que se dirigem (questões 4, 5 e 6) todos os professores apontaram que sim, o módulo contempla esses indicadores. Já com relação a aspectos ligados a conceitos, definições, proposições e procedimentos necessários ao estudo a que se propõe, se a sequência apresenta uma mostra representativa e articulada de situações de contextualização, exercícios e aplicações e se utiliza diferentes modos de expressão matemática (verbal, gráfica, simbólica) tradução e conversão entre essas (questões 1, 2 e 3), houve um professor que optou por permanecer neutro, ou seja, nem concordou nem discordou das sentenças.

Com relação às últimas seis questões da Sequência Didática (Módulos) que são referentes a aspectos visuais e de organização, observa-se, conforme o gráfico da Figura 84, que foram avaliadas positivamente.

Figura 84: Avaliação Módulo I- questões 7 a 12

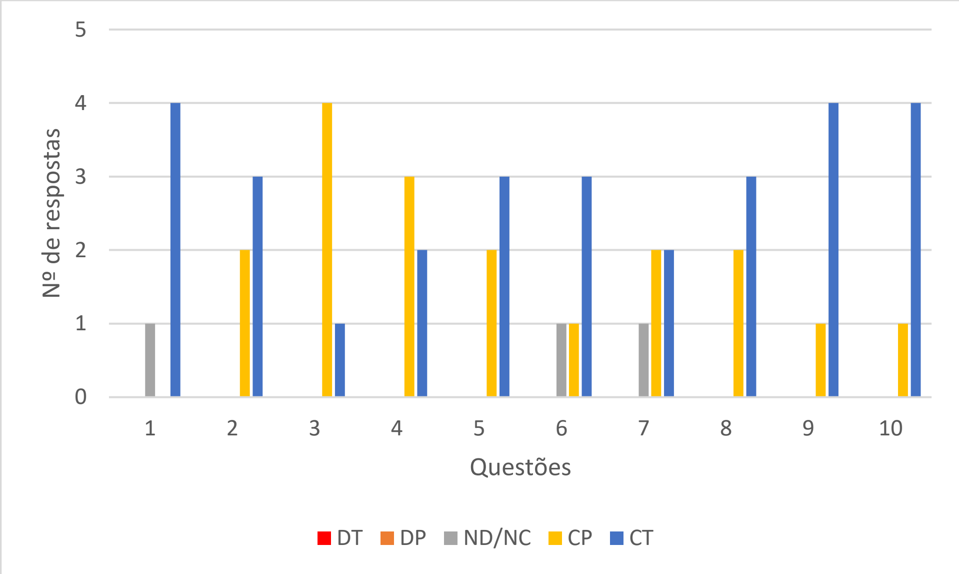


Fonte: a pesquisa.

Observando o gráfico da Figura 84, é possível perceber que, somente na questão 7 (se a Sequência Didática apresenta suficientes recursos de visualização como textos, imagens, gráficos, animações e vídeos), houve um posicionamento neutro. Nas demais questões que apontavam aspectos como a linguagem ser acessível ao nível do aluno, os slides apresentarem textos sucintos e objetivos, informações mais importantes destacadas, interface do material não ficasse sobrecarregadas com demasiadas informações e, também, pelo potencial de poder propiciar ao aluno uma aprendizagem fora do ambiente escolar (questões 8 a 12), as indicações foram para uma concordância, inclusive, com um posicionamento mais forte para a concordância total.

No que segue, apresentam-se os resultados referentes ao Instrumento de Investigação do Teste de Conhecimento referente ao Módulo I- Propriedades das Potências. Para a avaliação, tal como realizado na Sequência Didática, são exibidos elementos em forma de afirmativas, sobre os quais os participantes (os mesmos que responderam ao Instrumento de Avaliação sobre a Sequência Didática) expressaram seu grau de concordância, no gráfico da Figura 85, onde estão explicitadas as manifestações sobre o Teste de Conhecimentos do Módulo I.

Figura 85: Avaliação do Módulo I - Teste de Conhecimento



Fonte: a pesquisa.

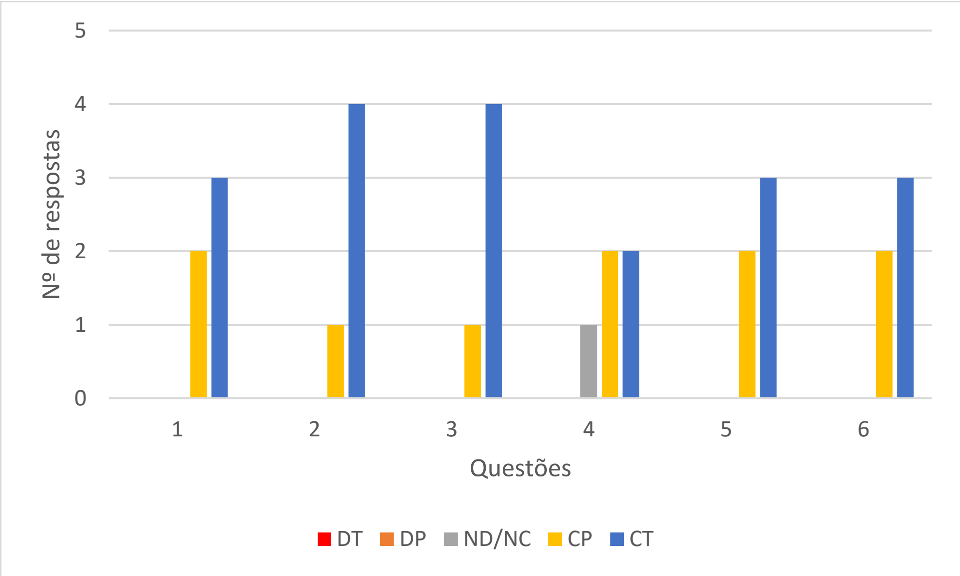
Nenhuma das questões apresentadas teve análises que discordassem das afirmações. Apenas três, das dez questões (questões 1, 6 e 7), apresentaram uma consideração que não teve nem concordância nem discordância. Essas questões dizem respeito ao Teste de Conhecimento, para abordar os conceitos, definições, proposições e procedimentos necessários ao estudo a que se propõem, apresentar situações nas quais os estudantes tenham que generalizar ou negociar definições, proposições ou procedimentos, além de apresentar situações que possibilitem observar, analisar ou justificar ideias.

Porém, as outras sete questões (2, 3, 4, 5, 8, 9, 10) foram todas avaliações positivas, ou seja, todas as análises tiveram algum tipo de concordância, senda ela plena ou total. Essas questões referiam-se ao Teste de Conhecimento, que apresenta uma mostra representativa de situações de contextualização e propõe situações-problema, utiliza diferentes modos de expressão matemática (verbal, gráfica, simbólica), tradução e conversão entre as mesmas, nível de linguagem adequado aos estudantes, situações de leitura e interpretação adequadas ao nível dos alunos, diferentes situações de expressão matemática (verbal, gráfica, simbólica) e interpretação, elementos da interface do material organizados, a fim de que não sobrecarreguem a tela e, por fim, as questões apresentadas demonstram, com clareza, seus objetivos.

7.3.2 Módulo II- Função Exponencial e Testes

A análise do Modulo II– Função Exponencial foi realizada por cinco professores. Com relação às respostas dos participantes da pesquisa referente às seis primeiras questões, que envolviam aspectos epistêmicos, ou seja, referentes ao conteúdo do conhecimento abordado (Função Exponencial), cinco das seis questões tiveram indicação de total concordância ou concordância plena com o que estava sendo apontado. Apenas uma questão, a de número 4, teve uma menção de não concordar nem discordar. A avaliação dos professores pode ser observada no gráfico da Figura 86.

Figura 86: Avaliação Módulo II- questões 1 a 6



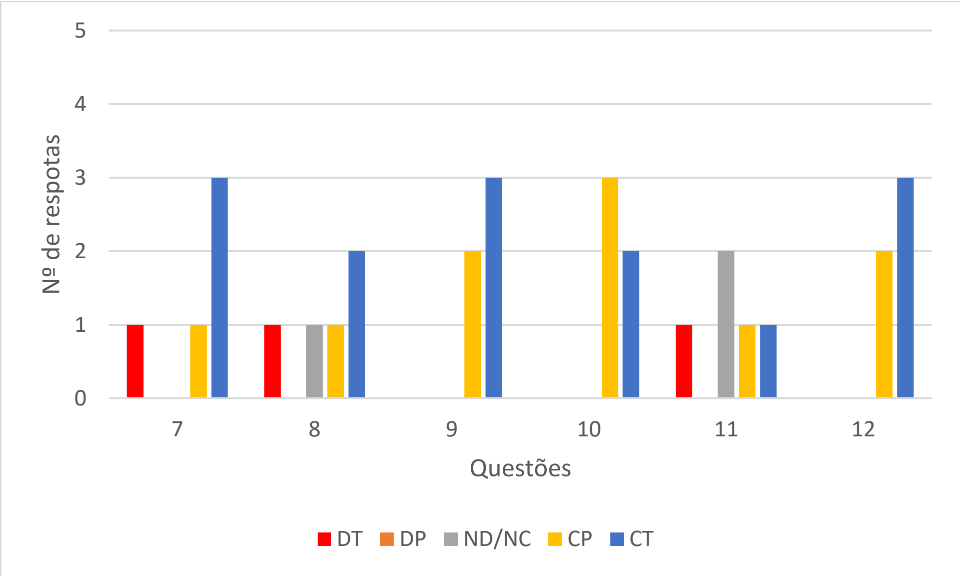
Fonte: a pesquisa.

Ao analisarem a sequência didática referente ao Módulo II– Função Exponencial, os professores concordam que a mesma apresenta conceitos, definições, proposições e procedimentos necessários ao estudo a que se propõe de modo adequado, que a sequência apresenta uma mostra representativa e articulada de situações de contextualização, exercícios e aplicações, que utiliza diferentes modos de expressão matemática (verbal, gráfica, simbólica), tradução e conversão entre essas, que os objetos matemáticos apresentados (problemas, definições, proposições) se relacionam e se conectam entre si e que propõe situações que possibilitem observar, analisar, justificar ou provar ideias (questões 1, 2 ,3, 5 e 6), conforme é apontado em Godino (2008 e 2011).

A quarta questão, que questionava se a sequência apresentava as explicações, comprovações e demonstrações de modo adequado ao nível educativo a que se dirigem, quatro professores consideraram que sim, esse aspecto era contemplado parcialmente ou contemplado totalmente, professor ficou neutro em ralação a se posicionar sobre essa questão.

As últimas 6 questões quando à Sequência Didática (Módulos) são referentes a pontos ligados à questão visual (FILATRO, 2009), como a organização dos textos e cores utilizados nas lâminas, tipo de linguagem utilizado e, para finalizar, se ela é capaz de proporcionar aprendizagem fora do ambiente escolar (Figura 87).

Figura 87: Avaliação Módulo II- questões 7 a 12



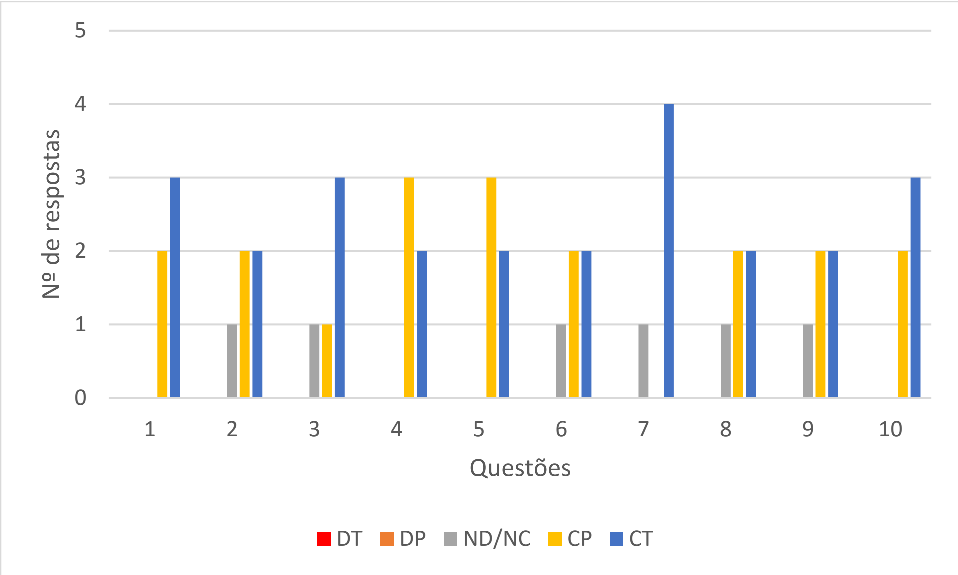
Fonte: a pesquisa.

Essas seis questões foram mais criticadas, sendo que, em três (questões 9, 10 e 12), os professores se manifestaram com concordância positiva total ou plena. Essas questões dizem respeito à linguagem ser acessível ao nível do aluno, os slides apresentarem textos sucintos e objetivos e referente ao material poder propiciar ao aluno uma aprendizagem fora do ambiente escolar.

Porém, as outras três questões (7, 8 e 11), que envolviam aspectos como apresentar diferentes tipos de representações que propiciassem a aprendizagem, que as informações mais importantes dos slides fossem destacadas e que a interface do material não ficasse sobrecarregada com demasiadas informações tiveram, como avaliação, uma resposta discordando totalmente dessas sentenças, enquanto que as outras quatro análises consideraram ter total concordância ou concordância plena com o que estava sendo apontado. Com isso, é possível perceber que, na visão dos professores, aspectos ligados à questão visual desse Módulo devem ser aprimorados, com o que se concorda.

No que segue, apresentam-se os resultados referentes ao Instrumento de Investigação do Teste de Conhecimento do Módulo II- Função Exponencial (Figura 88).

Figura 88: Avaliação Módulo II- Teste de Conhecimento



Fonte: a pesquisa.

Quatro das dez questões tiveram indicação de total concordância ou concordância plena com o que estava sendo apontado (questões 1, 4, 5 e 10), sendo que os pontos de maior destaque são as questões terem concordância com o conteúdo abordado, ou seja, abordar os conceitos e procedimentos necessário para tal tema, ter um nível de linguagem e apresentar situações de leitura e interpretações adequadas aos alunos, além de cada atividade apresentada apresentar com clareza os seus objetivos.

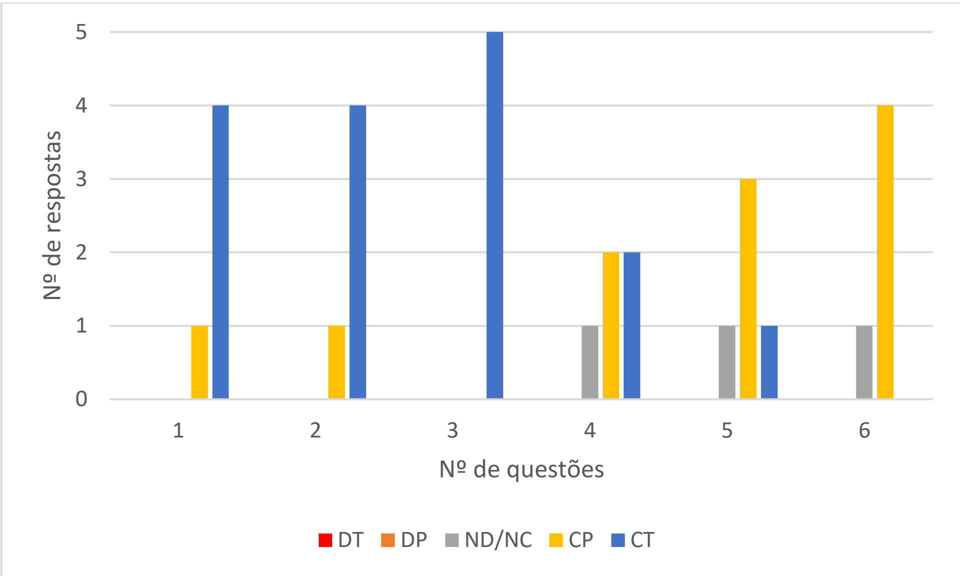
Nas outras seis sentenças que compõem o instrumento de avaliação, embora tenham prevalecido, também, considerações ponderando estarem de acordo, parcialmente ou totalmente, houve uma indicação com opinião nula, ou seja, não teve nem concordância nem discordância (questões 2, 3, 6, 7, 8 e 9). Esse fato ocorreu nas afirmações que traziam aspectos relacionados ao fato das atividades propostas apresentam situações de contextualização, se utilizava diferentes modos de expressão matemática, se propunha situações os quais permitissem ao aluno conjecturar ideias, se apresentava diferentes recursos de visualização e se os elementos que compõem a interface do material são organizados.

Com base nas avaliações, percebe-se que os pontos que necessitam de atenção e reavaliação são os que têm relação com o modo de representação dos objetos (trazer diferentes tipos de expressões matemática- verbal, gráfica e simbólica), que apresentem situações concretas para que possam fazer maior sentido ao estudante, bem como aspectos relacionados à visualização e interface do material.

7.3.3 Módulo III- Equações e Inequações Exponenciais

A análise do Módulo III– Equações e Inequações Exponenciais foi realizada por cinco professores e é apresentada no gráfico da Figura 89.

Figura 89: Avaliação Módulo III- questões 1 a 6



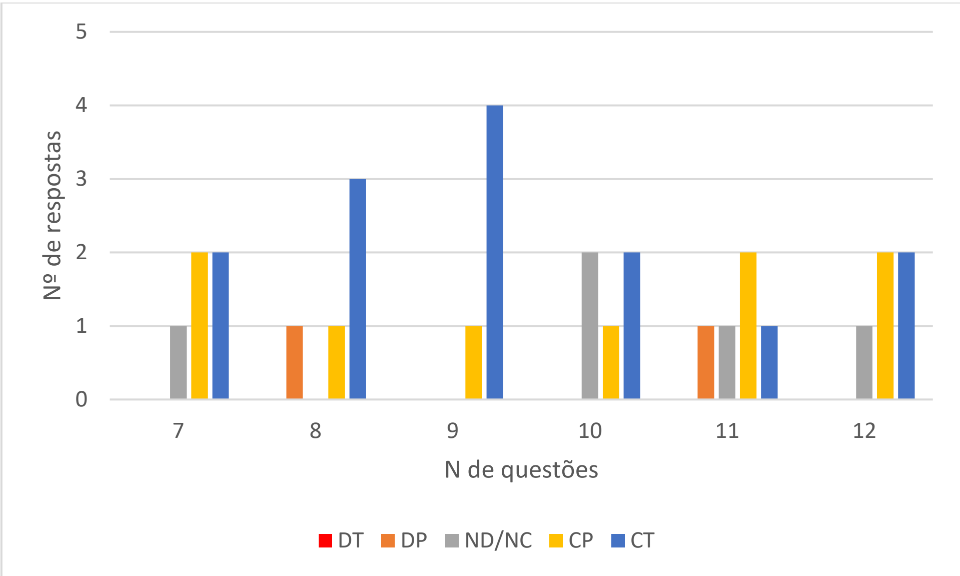
Fonte: a pesquisa.

Com relação às respostas dos participantes da pesquisa referentes às seis primeiras questões, que abrangiam aspectos dos fatores epistêmicos (GODINO 2008 e 2011), ou seja, referentes ao conteúdo do conhecimento abordado (Equações e Inequações Exponenciais), três das seis questões tiveram indicativo de total ou plena concordância com o que estava sendo apresentado (questões 1, 2 e 3). Essas questões referem-se a aspectos como a Sequência Didática, abordando os conceitos, definições, proposições e procedimentos necessários ao estudo a que se propõem, apresentando uma mostra representativa e articulada de situações de contextualização, exercícios e aplicações e utilizam diferentes modos de expressão matemática (verbal, gráfica, simbólica), tradução e conversão entre essas.

Contudo, as três outras questões apresentaram uma opinião neutra (questões 4, 5 e 6). Essas questões continham afirmações sobre a Sequência Didática apresentar as explicações, comprovações e demonstrações de caráter ajustado ao nível educativo a que se dirigem, os objetos matemáticos apresentados (problemas, definições, proposições) exibidos se relacionam e se conectam entre si e propõe situações que possibilitem observar, analisar, justificar ou provar ideias.

Quanto às últimas seis sentenças, que são relacionadas às questões de visualização e organização, conforme destaca Filatro (2009), houve mais críticas. Somente uma questão (questão 9) teve avaliações concordando com a afirmação, que se refere à Sequência Didática utilizar uma linguagem adequada e acessível ao aluno (Figura 90).

Figura 90: Avaliação Módulo III- questões 7 a 12

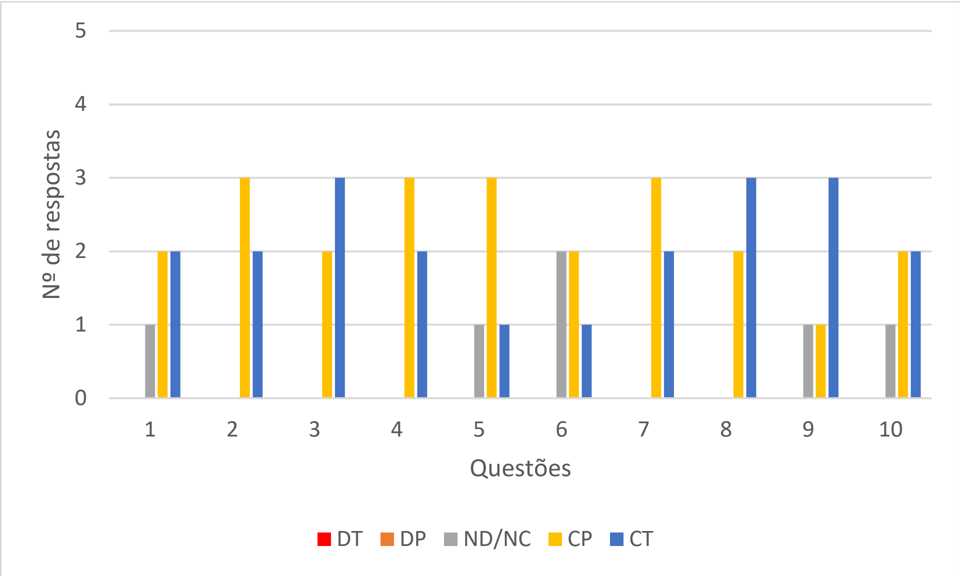


Fonte: a pesquisa.

Já as outras cinco questões (7, 8, 10, 11 e 12) tiveram uma mescla de considerações, com análises discordando, concordando ou não manifestando nenhum grau de concordância. Aspectos que mais se destacam (com discordância ou opinião nula) nessas análises, referem-se à Sequência Didática apresentar suficientes recursos de visualização, que de acordo com Filatro (2009) pode ser, por exemplo: textos, imagens, gráficos, animações e vídeos; destacar, com clareza, as informações mais importantes, por meio de cores, destaques, negrito ou itálico; os textos apresentados são sucintos e objetivos; os elementos de interface do material estão organizados de modo que não sobrecarreguem a tela. Portanto, aspectos referentes à questão visual desse Módulo, na opinião dos professores, precisam ser melhorados.

A avaliação dos professores referente ao Teste de Conhecimento do Módulo III- Equações e Inequações Exponenciais é apresentada no gráfico da Figura 91.

Figura 91: Avaliação Módulo III- Teste de Conhecimento



Fonte: a pesquisa.

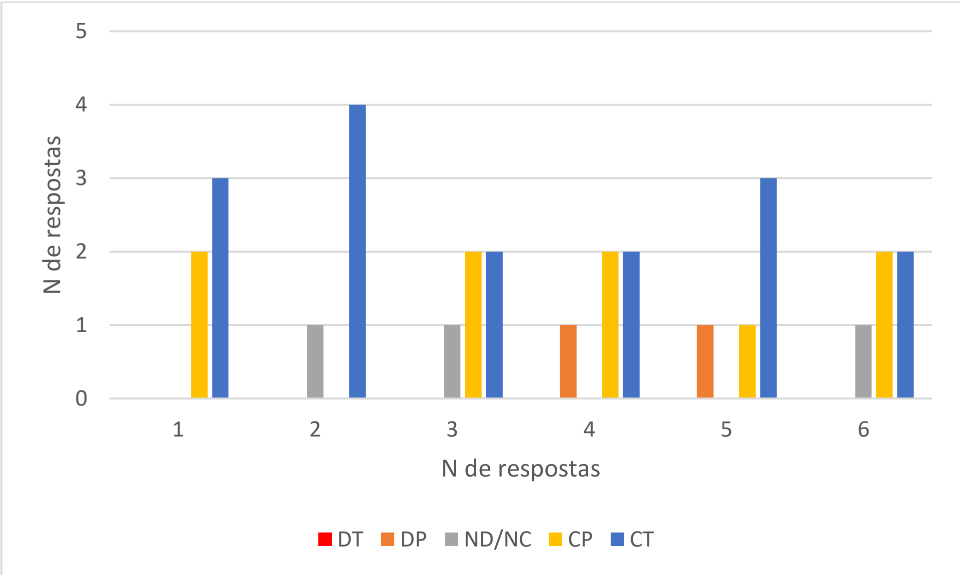
Nenhuma das questões apresentou considerações que discordassem das afirmações feitas. Porém, cinco sentenças tiveram umas manifestações neutras (questões 1, 5, 6, 9 e 10). Essas questões referem-se ao Teste de Conhecimento para abordar os conceitos, definições, proposições e procedimentos necessários ao estudo a que se propõem, apresentar situações de leitura e interpretação adequadas ao nível dos estudantes, situações nas quais os estudantes tenham que generalizar ou negociar definições, proposições ou procedimentos além dos os elementos da interface do material os quais são organizados a fim de que estes não sobrecarreguem a tela.

As outras cinco apresentam somente considerações positivas, ou seja, todas as avaliações dos participantes expressaram um grau de concordância quanto as sentenças (questões 2, 3, 4, 7 e 8). Esses pontos, considerados positivamente referem-se à: se o Teste de Conhecimento apresenta uma mostra representativa de situações de contextualização e propõe situações-problema; utiliza diferentes modos de expressão matemática (verbal, gráfica, simbólica), tradução e conversão entre as mesmas; utiliza nível de linguagem adequado aos estudantes; apresenta situações que possibilitem observar, analisar ou justificar ideias; apresenta diferentes situações de expressão matemática (verbal, gráfica, simbólica) e interpretação, que são os apontamentos trazidos em Godino (2008 e 2009).

7.3.4 Módulo IV- Propriedade dos Logaritmos

A análise do Módulo IV- Propriedade dos Logaritmos em relação as seis primeiras questões sobre a Sequência Didática (Módulos), que são referentes a aspectos epistêmicos, não apontou nenhuma manifestação que discordasse das afirmações postas, conforme apresenta o gráfico da Figura 92.

Figura 92: Avaliação Módulo IV- questões 1 a 6



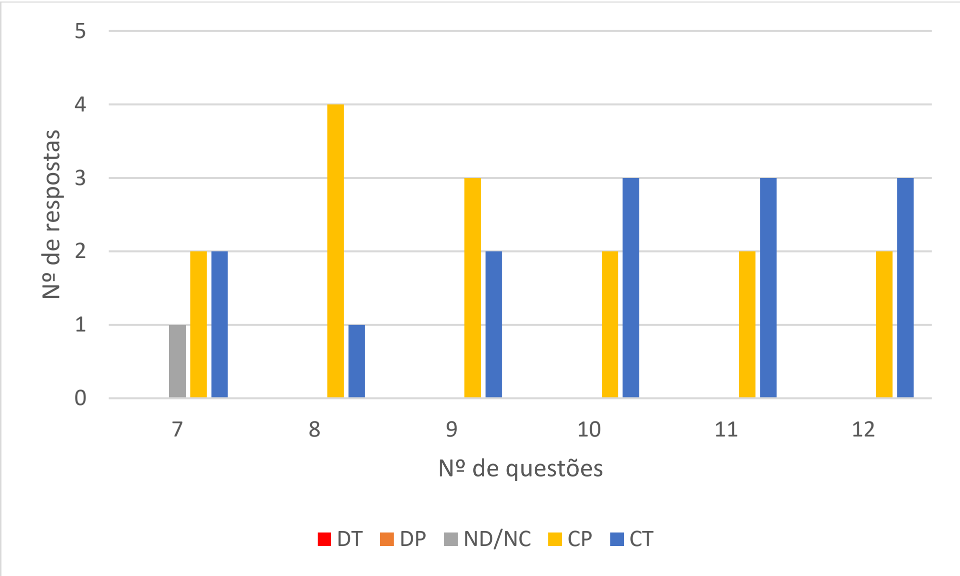
Fonte: a pesquisa.

Destaca-se que, em cinco das seis primeiras questões apresentadas, houve uma mistura de considerações neutras, discordâncias e concordâncias (questões 2, 3, 4, 5 e 6). Nessas questões, os itens se referiam à Sequência Didática quanto a utilizar diferentes modos de expressão matemática, as explicações, comprovações e demonstrações serem adequadas ao nível educativo a que se dirigem, os objetos matemáticos (problemas, definições, proposições) se relacionarem e se conectarem entre si, as situações propostas possibilitarem observar, analisar, justificar ou provar ideias apresenta uma mostra representativa e articulada de situações de contextualização, exercícios e aplicações, (GODINO, 2008 e 2011).

Somente a primeira questão teve como resultado, apenas análises considerando algum tipo de concordância, senda ela total ou plena. Essa questão, que recebeu apenas avaliações positivas, trata da Sequência Didática abordar os conceitos, definições, proposições e procedimentos necessários ao estudo a que se propõe.

As seis questões que enceram a seção referente à análise Sequência Didática, que se referem à questão de visualização, tipo de linguagem utilizada um ponto ligado à aprendizagem, cujo o objetivo é determinar se a Sequência Didática é capaz de proporcionar aprendizagem fora do ambiente escolar, se comparadas com as seis primeiras questões, tiveram menos avaliações discordantes, ou seja, não houve nenhum tipo de discordância e somente uma análise referente a uma questão teve uma opinião neutra. As demais considerações foram todas de concordância (Figura 93).

Figura 93: Avaliação Módulo IV- questões 7 a 12

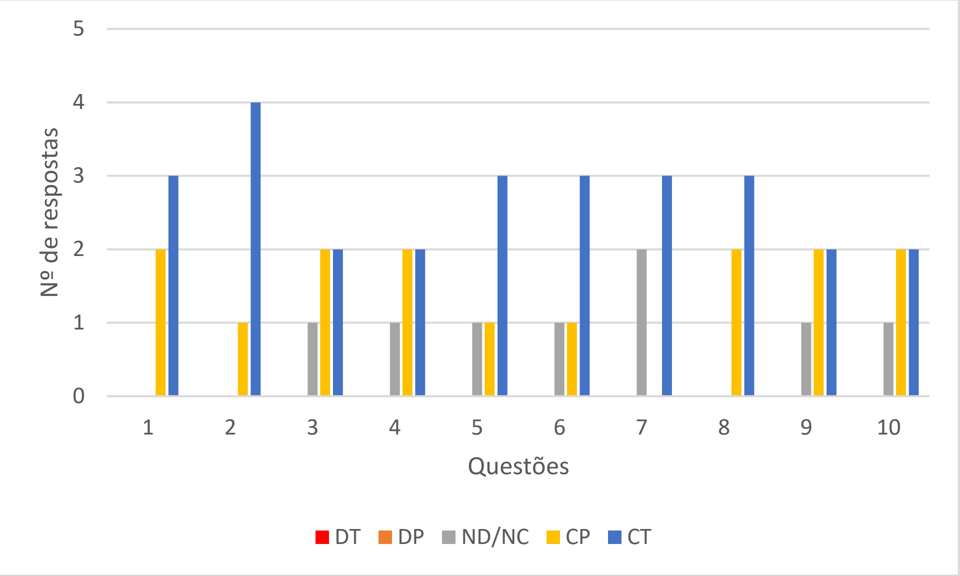


Fonte: a pesquisa.

A questão no qual houve uma análise que nem concordou nem discordou (questão 7) foi a afirmação que se retratou sobre a Sequência Didática apresentar suficientes recursos de visualização como, por exemplo, textos, imagens, gráficos, animações e vídeos. As demais sentenças (questões 8, 9, 10 e 11), que abordaram aspectos como destacar com clareza as informações mais importantes, utilizar uma linguagem acessível, os textos apresentados serem sucintos e objetivos, os elementos de interface do material estarem organizados de modo que não sobrecarreguem a tela, por fim, proporcionar, ao aluno, uma aprendizagem fora do ambiente escolar, tiveram somente considerações com algum tipo de concordância, sendo ela total ou plena, conforme mostra o gráfico da Figura 93.

Para finalizar, as análises do Módulo IV- Propriedades dos Logaritmos, apresentam-se, no gráfico da Figura 94, com resultados das análises referentes ao Teste de Conhecimento. Diante das dez questões apresentadas (as mesmas que foram apresentadas nos outros Módulos), não houve nenhuma avaliação que discordasse dos aspectos abordados, apenas algumas indicações neutras.

Figura 94: Avaliação Módulo IV- Teste de Conhecimento



Fonte: a pesquisa.

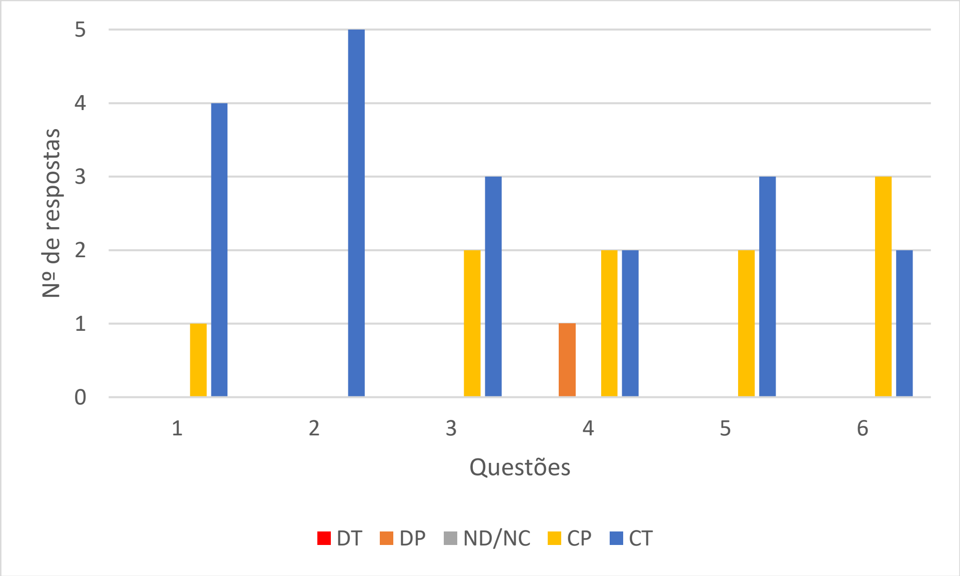
As afirmações que apresentaram somente análises de concordância (questões 1, 2 e 5) assinalavam aspectos de como o Teste de Conhecimento abordar os conceitos, definições, proposições e procedimentos necessários ao estudo ao que se propõem, apresentar uma mostra representativa de situações de contextualização e propor situações-problema e apresentar diferentes situações de expressão matemática (verbal, gráfica, simbólica) e interpretação.

Porém, as outras sete sentenças apresentaram respostas com opiniões nulas, destacando-se para a sétima questão, que teve dois participantes que optaram por não concordar nem discordar da seguinte afirmação: o Teste de Conhecimento apresenta situações que possibilitem observar, analisar ou justificar ideias. Ressalta-se que, entre todos os Módulos construídos, esse foi o que se encontrou mais dificuldades para sua organização, porque foi o tema com menos materiais disponíveis encontrados e isso ocorreu, tanto para a composição dos materiais de estudos, como a seleção de vídeos explicativos que auxiliassem na aprendizagem, como também para na seleção das questões para a composição dos quizzes disponibilizados e nos Testes de Conhecimentos.

7.3.5 Módulo V - Função Logarítmica e Testes

Na análise do Módulo V– Função Logarítmica, com relação às respostas dos participantes da pesquisa referentes às seis primeiras questões, que abrangiam pontos ligados a fatores epistêmicos, ou seja, referentes ao conteúdo do conhecimento abordado (Função Logarítmica), cinco das seis questões tiveram indicativo de total ou plena concordância com o que estava sendo apresentado. Apenas a quarta questão teve uma avaliação que não concorda nem discorda com a sentença indicada (Figura 95).

Figura 95: Avaliação Módulo V- questões 1 a 6



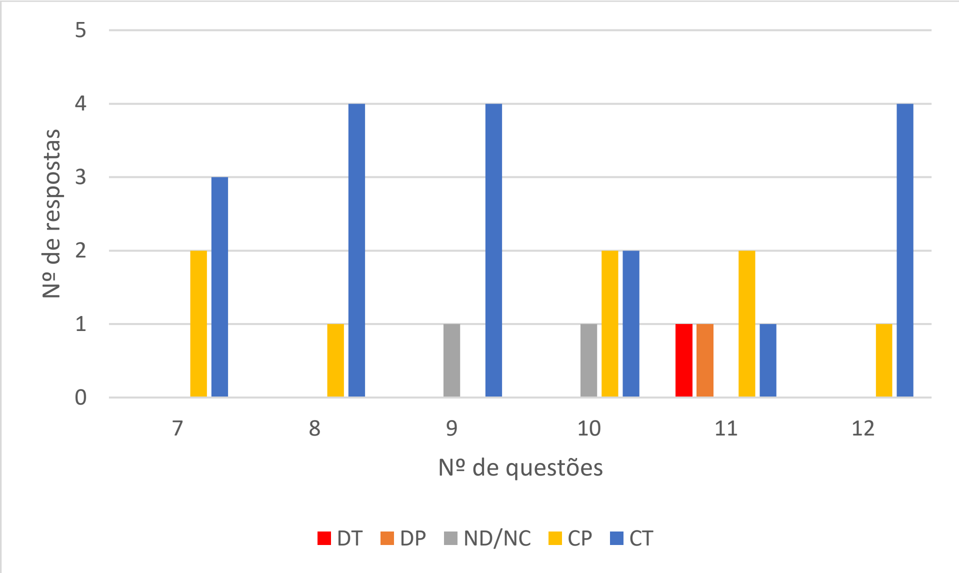
Fonte: a pesquisa.

Assim, ao avaliarem a Sequência Didática referente ao Módulo V– Função Logarítmica, os professores assinalaram que ela exibe conceitos, definições, proposições e procedimentos necessários ao estudo a que se propõe, de maneira apropriada e que a sequência apresenta uma mostra representativa e articulada de situações de contextualização, exercícios e aplicações, utiliza diferentes modos de expressão matemática (verbal, gráfica, simbólica), tradução e conversão entre essas, os objetos matemáticos apresentados (problemas, definições, proposições) se relacionam e se conectam entre si e que propõe situações que possibilitam observar, analisar, justificar ou provar ideias (questões 1, 2, 3, 5 e 6), como tal destaca Godino (2008 e 2011).

Contudo, a quarta questão a qual questionava sobre o fato da Sequência Didática apresentar as explicações, comprovações e demonstrações de caráter ajustado ao nível educativo a que se dirigem, quatro professores consideraram que esse aspecto era contemplado parcialmente ou totalmente. Apenas um professor se posicionou discordando plenamente sobre essa questão.

As últimas 6 questões, referentes a temas relacionados à parte visual, como a disposição dos escritos e cores usadas nos slides, tipos de linguagens usados um aspecto ligado à aprendizagem, cujo o objetivo era determinar se a Sequência Didática é capaz de proporcionar aprendizagem fora do ambiente escolar (Figura 96).

Figura 96: Avaliação Módulo V- questões 7 a 12



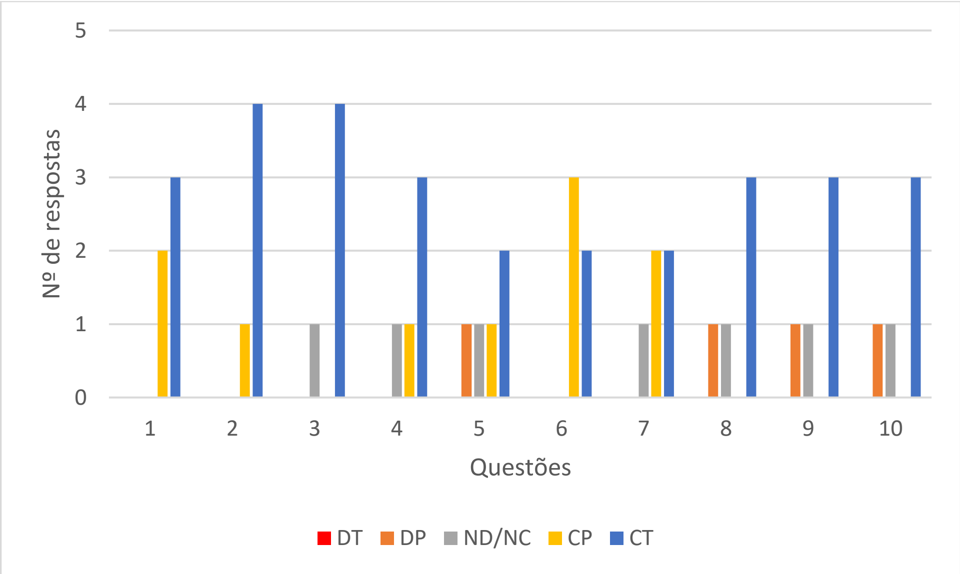
Fonte: a pesquisa.

Como no módulo anterior, ao comparar com as seis questões anteriores, obteve-se um pouco mais de críticas. Somente três afirmações (questões 7, 8 e 9) apresentaram concordância total ou parcial, que foram os aspectos relacionados a apresentar diferentes tipos de representações que propiciassem a aprendizagem, que as informações mais importantes das lâminas fossem destacadas para facilitar uma melhor visualização por parte do aluno e pudessem pelo modo poder propiciar ao estudante, uma aprendizagem fora do ambiente escolar.

Contudo, as outras três questões (questões 9, 10 e 11), que abordavam aspectos como apresentar uma linguagem acessível ao nível do aluno, conter, nas lâminas, somente textos sucintos e objetivos e que a interface do material não ficasse sobrecarregadas com excessivas informações, tiveram um misto de respostas. Grande parte concordou de forma plena ou completa, mas houve ao menos uma análise discordando ou com uma opinião nula, ou seja, não tendo nem concordância nem discordância. Com isso, nota-se que os aspectos que envolvem a questão visual desse Módulo necessitariam de algumas mudanças para que seus objetivos ficassem mais claros. Também seria importante buscar uma linguagem que aproxime, ainda mais, o aluno do conteúdo.

Apresentam-se, a seguir, os resultados da avaliação do Teste de Conhecimento referente ao Módulo V- Função Logarítmica (Figura 97).

Figura 97: Avaliação Módulo V- Teste de Conhecimento



Fonte: a pesquisa.

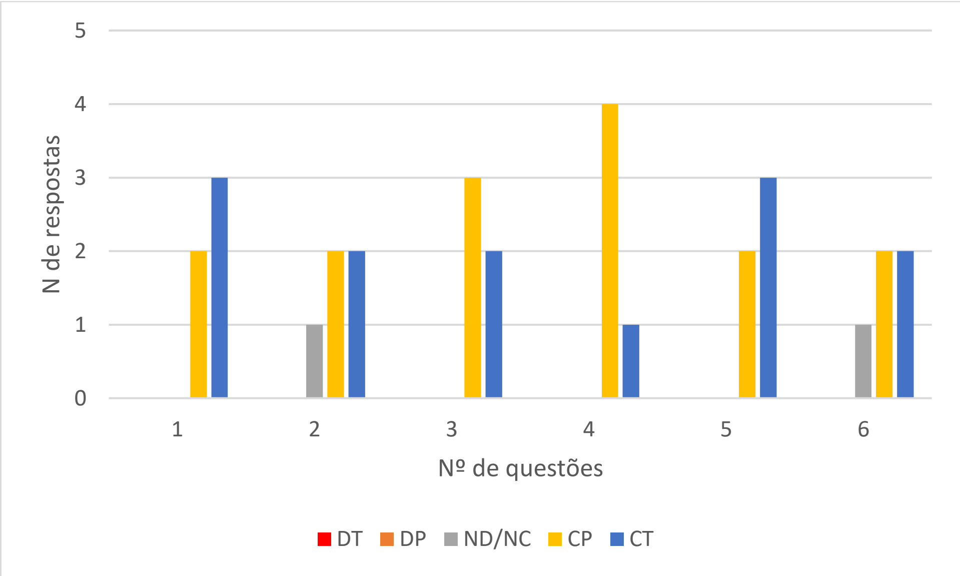
Somente três das dez questões tiveram indicativo de total ou plena concordância (questões 1, 2 e 6) com o que estava sendo assinalado, as quais referem-se ao conteúdo abordado, ou seja, se os conceitos e procedimentos necessários para o assunto são adequados, se as atividades propostas apresentarem situações de contextualização, se propõem situações-problema, e, por fim, se apresentam situações que possibilitem ao aluno generalizar ou negociar os procedimentos, definições e proposições.

Apesar de somente 30% das questões serem analisadas com um sinal de concordância, as sentenças restantes também tiveram, na maioria das respostas, um maior número de aceitação por parte dos professores avaliadores, contudo, teve-se uma mescla com outros tipos de réplicas, como discordância em parte ou nem discordar nem concordar (questões 3, 4, 5, 7, 8, 9 e 10).

7.3.6 Módulo VI- Equações e Inequações Logarítmicas

A análise do Modulo VI– Equações e Inequações Logarítmicas foi realizada por cinco professores diferentes dos que responderam às análises dos Módulos anteriores. Com relação as respostas dos participantes da pesquisa referentes às seis primeiras questões, que envolviam aspectos epistêmicos, ou seja, referentes ao conteúdo do conhecimento abordado (Equações e Inequações Logarítmicas), todas as seis questões tiveram total concordância, concordância plena ou opinião neutra com o que estava sendo apontado. O gráfico da Figura 98 destaca a manifestação dos professores em relação a essas seis primeiras questões.

Figura 98: Avaliação Módulo VI- questões 1 a 6



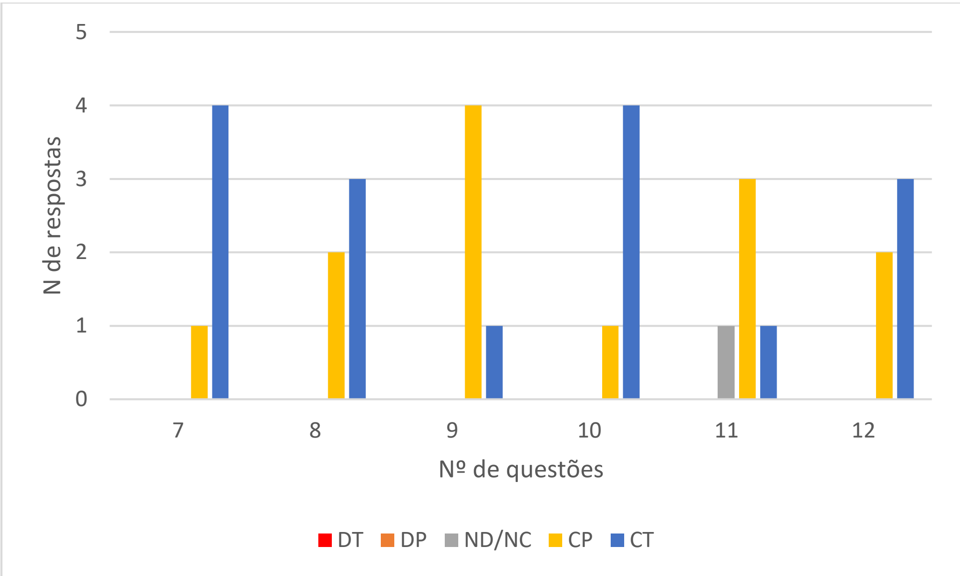
Fonte: a pesquisa.

Assim, ao analisarem a sequência didática referente ao Módulo VI– Equações e Inequações Logarítmicas, os professores concordaram que a mesma apresenta conceitos, definições, proposições e procedimentos necessários ao estudo a que se propõe, de modo adequado, e que a Sequência apresenta uma mostra representativa e articulada de situações de contextualização, exercícios e aplicações, utiliza diferentes modos de expressão matemática (verbal, gráfica, simbólica), tradução e conversão entre essas, os objetos matemáticos apresentados (problemas, definições, proposições) se relacionam e se conectam entre si, propõe situações que possibilitem observar, analisar, justificar ou provar ideias e a sequência apresenta as explicações, comprovações e demonstrações de modo adequado ao nível educativo a que se dirige (GODINO, 2008 e 2011).

As últimas 6 questões relacionadas a Sequência Didática (Módulos), são referentes a pontos ligados à questão visual (FILATRO, 2009), como a organização dos textos e cores utilizados nas lâminas, tipo de linguagem utilizado e, para finalizar, se ela é capaz de proporcionar aprendizagem fora do ambiente escolar. Com relação às 6 questões anteriores, obtiveram-se resultados semelhantes: cinco das seis questões, de maneira unânime, receberam avaliações somente de concordância e somente uma análise em uma questão teve uma consideração neutra, conforme mostra o gráfico da Figura 99.

Dentre as seis Sequências Didáticas (Módulos) analisadas, o Módulo VI- Equações e Inequações Logarítmicas foi o que apresentou maior porcentagem de considerações de total concordância, concordância plena.

Figura 99: Avaliação Módulo VI- questões 7 a 12

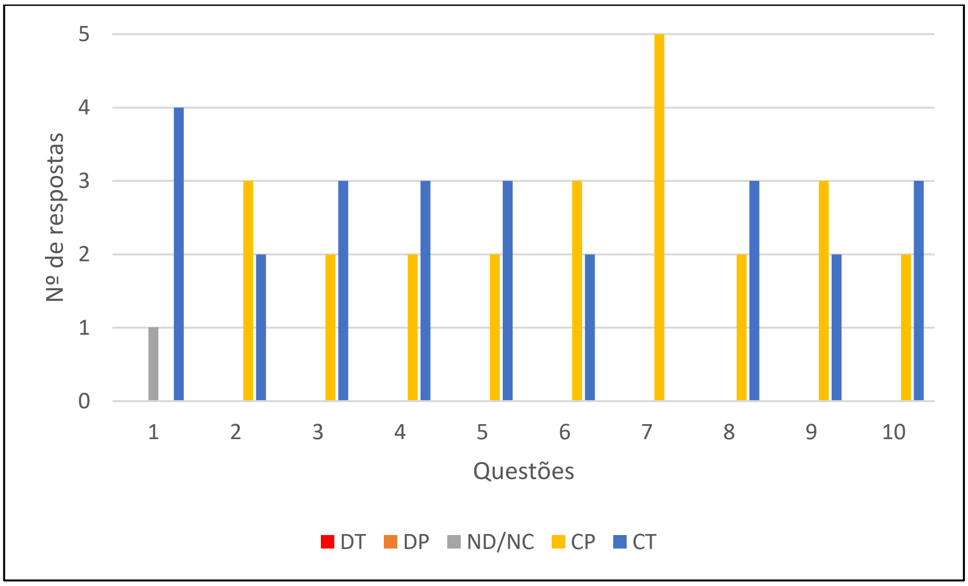


Fonte: a pesquisa.

Os resultados referentes ao Instrumento de Investigação do Teste de Conhecimento referente ao Módulo VI- Equações e Inequações Logarítmicas são destacados no gráfico da Figura 100.

Nove das dez questões (exceto a questão 1) tiveram indicação de total concordância ou concordância plena com o que estava sendo apontado. O destaque foi o fato das questões terem concordância com o conteúdo abordado. Somente uma questão teve uma análise com a consideração neutra, que foi quanto a abordar os conceitos, definições, proposições e procedimentos necessários ao estudo a que se propõem.

Figura 100: Avaliação Módulo VI- Teste de Conhecimento



Fonte: a pesquisa.

Com base nas avaliações, percebe-se que esse Módulo é o que menos apresentou pontos a serem retomados frente a avaliação.

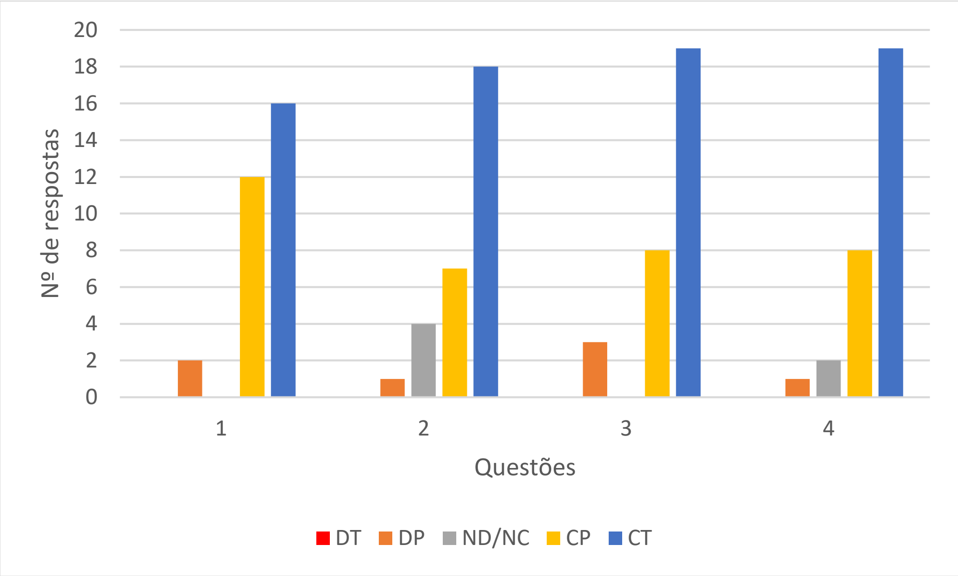
7.4 SOBRE A SEQUÊNCIA DIDÁTICA (GERAL)

São apresentadas, aqui, análises referentes à última seção do Instrumento de Avaliação. A parte final desse instrumento é marcada por seis questões que envolvem a Sequência Didática Eletrônica em geral. As quatro primeiras seguem o modelo dos itens anteriores, onde são exibidos elementos, em forma de afirmativa, sobre quais os participantes expressaram seu grau de concordância. Nas últimas duas questões foi solicitado aos participantes que se manifestassem sobre possíveis pontos positivos e negativos da Sequência Didática Eletrônica e sobre a retomada ou recuperação de conteúdos. Os professores foram convidados a se manifestar sobre quais estratégias consideravam importantes de serem utilizadas para que isso ocorra. Responderam a essa parte do instrumento 30 professores.

A primeira questão à Sequência Didática Eletrônica possibilitar autonomia aos estudantes para desenvolver as atividades propostas. Mais de 93% dos participantes da pesquisa mostraram concordância, reforçando, assim, um dos objetivos da presente investigação. Com relação à Sequência Didática Eletrônica despertar curiosidade nos alunos para assuntos que não são de seu conhecimento, obteve-se como retorno um grande grau de concordância, passando de 83%, o que se alinha com a primeira questão dessa seção, ou seja, se o material desperta curiosidade no aluno, isso pode colaborar para que o mesmo realize as atividades propostas, oportunizando desenvolver autonomia.

As duas últimas questões que encerram o bloco de sentenças afirmativas referem-se ao fato da Sequência Didática Eletrônica auxiliar o aluno na retomada de conteúdos e na aprendizagem sobre os mesmos temas. Como resultado, 90% dos professorem analisaram positivamente ambas alegações. Isso quer dizer que o material produzido pode ser utilizado em duas situações distintas, tanto para o aluno que não tenha nenhum conhecimento sobre o assunto, como para o estudante que já tenha algum conhecimento sobre o tema e que tenha algumas dificuldades para serem superadas. As manifestações dos professores sobre essas questões podem ser vistas no gráfico da Figura 101.

Figura 101: Instrumento de Avaliação sobre a Sequência Didática em geral



Fonte: a pesquisa.

A seguir, são apresentadas algumas das manifestações dos professores referentes aos pontos positivos e negativos em relação à Sequência Didática Eletrônica em geral.

> Pontos positivos: Textos objetivos, organizados de maneira sucinta e com clareza, exemplos e propostas bem estruturados corroborando no processo de aprendizagem dos estudantes. Pontos Negativos: Acho que o material está longo, poderiam estar separados em subgrupos para os alunos ter acesso a temática especificas e não ao todo conceito abordado. Ponto este que não desqualifica o trabalho, apenas questão de gosto na maneira de como abordar o conceito. (P21).
> A sequência é bem contextualizada, isso mostra a aplicabilidade de conteúdos, às vezes apresentados apenas de forma conceitual. A linguagem é acessível a adequada. As questões apresentadas têm uma excelente qualidade e diversidade. Porém, como sugestão, elas deveriam estar

> disponibilizadas em ordem de dificuldade. (P07).
> A sequência está muito bem estruturada, riquíssima em exemplos e situações que levam o aluno a associar com situações reais, aliando teoria à prática cotidiana. Apenas notei que alguns slides possuem muitas informações, sendo todas relevantes e significativas, sugiro talvez dissociar em mais de um slide. (P20).
> A sequência está bem estruturada, de forma que apresenta os conceitos necessários para a abordagem dos conteúdos propostos e exemplos que buscam associação com assuntos da vida real. Ainda, traz atividades de aplicação/retomada de conceitos antes da aplicação dos testes, o que possibilita ao estudante ter uma ideia do que compreendeu. Os testes apresentam um grau de dificuldade de nível médio a difícil, na maioria dos módulos. Por isso, é importante que nas atividades propostas anteriormente aos estudantes, também tenham questões mais complexas. Outra proposta, é inserir as questões do teste da mais simples a mais complexa e não de forma aleatória, pois pode desmotivar o estudante que, de primeira, não consegue resolver uma questão devido ao seu grau de dificuldade. (P08).
> Pontos positivos: a proposta está consistente e apresenta um detalhamento de explicações em relação aos conceitos envolvidos. Destaco a contextualização da proposta por meio do uso de diversas situações da realidade, envolvendo as demais áreas de conhecimento. Não observei nenhum ponto negativo, contudo, um ponto de atenção refere-se ao fato de como será dado o feedback para o estudante em relação ao teste de conhecimento, pergunto: caso o estudante tenha um desempenho não satisfatório, quais intervenções serão pensadas? Como será mapeado o que o estudante compreende e o que não compreende conceitualmente? Penso que propor intervenções a partir do desempenho dos estudantes no teste de conhecimento poderá ajudá-lo a superar as dificuldades entorno dos conceitos, procedimentos e técnicas que englobam as Funções Exponenciais e Logarítmicas. (P10).

Quando solicitados a se manifestarem sobre pontos positivos e negativos da Sequência Didática, foram destacados como pontos positivos aspectos referentes à estrutura da Sequência Didática Eletrônica como: a questão da contextualização do conteúdo, pois apresenta elementos que possibilitam ao aluno associar com a vida real, a linguagem utilizada ao longo do trabalho, que é acessível e adequada, a presença dos conceitos necessários para a abordagem dos conteúdos propostos, os quizzes apresentados no final de cada Sequência Didática como algo diferente e bom para o aluno.

No que se refere aos pontos negativos, foi ressaltado que o material está muito longo, o que demanda um maior tempo para o aluno desenvolver a Sequência Didática Eletrônica e que, por vezes, há muitas informações em um só slide. Quanto aos Testes de Conhecimentos, os pontos negativos mais recorrentes foram a complexibilidade das questões e, como sugestões, grande parte dos participantes, consideraram que seria pertinente organizar as questões segundo um grau de complexidade (da questão mais simples a mais complexa). Destaca-se, porém, que em princípio, os Testes de Conhecimentos não foram organizados dessa forma, o que pode ser repensado.

7.5 EM BUSCA DE UMA SÍNTESE

Considerando as manifestações dos professores como um todo, pondera-se que a Sequência Didática, a qual foi organizada considerando os aportes da Idoneidade Didática do EOS, atende a esses pressupostos com um grau de idoneidade que poderia ser considerado de médio para alto. No que se refere as questões epistêmicas, de modo geral, a Sequência foi bem avaliada, pois aborda os objetos de conhecimento de forma adequada, com situação de contextualização e resolução de problemas, apresentando-os os objetos sob diferentes formas de representação. Porém, argumentos e relações e mesmo de linguagens (referente às representações) precisam ser ampliados.

Quanto à linguagem utilizada durante toda a Sequência Didática (tanto nos módulos de estudo, para proporcionar a retomada do conteúdo, como Testes de Conhecimentos, para reforçar os conteúdos por meio de atividades), foi considerada, pela maioria dos participantes da investigação, estar adequada ao nível dos alunos.

No que se refere à Sequência Didática como um todo, os elementos de interface precisam ser revisados, assim como o volume de conteúdos e informações nos slides, bem como a organização e o destaque desses elementos nos slides, aspectos que foram indicados pelos professores avaliadores. Sobre os Testes de Conhecimentos, há Módulos os quais necessitam que questões sejam retomadas no sentido de apresentarem textos mais objetivos.

Um aspecto apontado como um ponto negativo refere-se à extensão da Sequência Didática. De fato, como um todo, a sequência é bem extensa, mas argumenta-se que envolve o estudo de duas Funções, Exponencial e Logarítmica além de conhecimentos prévios necessários ao estudo dessas Funções. Argumenta-se, também, que tem uma estrutura modular e, embora haja relação entre os módulos, os mesmos podem ser trabalhados de modo independente, ou seja, o aluno não tem a necessidade de fazer o estudo de cada Módulo, mas apenas aquele com o qual ele tenha mais dificuldades. Por certo, junto aos estudantes, poderá ser desenvolvida por um período referente ao trabalho com as Funções, no sentido que tão logo se percebam dificuldades na apropriação de conhecimentos nos quais um ou mais módulos possam ser trabalhados. Esse tempo didático, apontado pelos professores como inadequado, entende-se que pode ser adequado pelo próprio ritmo de trabalho dos estudantes.

Destaca-se que toda a Sequência Didática (módulos de estudo e Testes de Conhecimentos) vai ser retomada e reavaliada tomando como referência os aspectos destacados pelos professores avaliadores além de aspectos julgados pertinentes pelo pesquisador. A retomada da Sequência Didática para a apresentação e discussão dos dados obtidos com a análise/avaliação apresentada pelos professores permitiu uma meta análise no material produzido e a identificação de aspectos que precisam ser retomados. Ademais, os componentes e indicadores da Idoneidade Didática tomados como referência para a organização da sequência serão tomados, novamente, para uma reavaliação à luz da análise realizada pelos professores participantes e mesmo pelo pesquisador.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente estudo possibilitou investigar a organização de uma Sequência Didática Eletrônica disponibilizada no Google Classroom, mais especificamente no que se refere aos estudos das Funções Exponencial e Logarítmica, para o desenvolvimento de estudos de recuperação de alunos do 1º ano do Ensino Médio que apresentem dificuldades sobre o tema. Com um olhar, tanto para o conhecimento matemático, como para o processo de ensino e aprendizagem, o Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (EOS) foi tomado como referencial para embasar a organização da Sequência. Os aportes do EOS foram tomados, ainda, como embasamento metodológico da investigação, que se desenvolveu em uma perspectiva qualitativa.

A partir das análises realizadas, foi possível perceber que a proposta de estudo envolvendo as Funções desenvolvidas, sob a perspectiva do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática, consente ao que se defende e o que está posto na legislação sobre a retomada de conteúdos e mesmo sobre o estudo das funções envolvidas.

As ferramentas de análise propostas pelo EOS se constituíram em elementos fundamentais para se alcançar, tanto uma visão detalhada da proposta, como uma mais geral, possibilitando identificar os pontos fortes e frágeis dos materiais. No que se refere, especificamente, ao estudo das Funções Exponencial e Logarítmica, analisa-se que os itens constituídos para os materiais de estudos (Módulos) se apresentaram como apropriados para uma retomada, aprofundamento e desenvolvimento com relação aos conteúdos abordados no primeiro ano do Ensino Médio.

Para o desenvolvimento dos mesmos, buscou-se explorar as situações-problema propostas e atividades contextualizadas visando, sempre que possível, estabelecer relações entre objetos do mundo real e, nesse sentido, a utilização dos recursos digitais foi um diferencial, pois com eles foi possível um trabalho com diferentes representações e uma diversidade de estratégias a partir de vídeos, objetos de aprendizagens, exercícios e utilização do *software* GeoGebra.

Retomando os objetivos específicos da pesquisa, que eram, inicialmente, investigar um conjunto de questões sobre as Funções Exponencial e Logarítmica para, assim, compor um Teste de Conhecimento para ser disponibilizado na plataforma do Google Classroom e, posteriormente investigar e selecionar metodologias, estratégias e recursos adequados para o desenvolvimento de uma Sequência Didática (Módulos de estudo) para também ser implementada no Google Classroom, e por fim, avaliar essa Sequência Didática Eletrônica desenvolvida a partir de uma análise realizada por um grupo de professores de Matemática, considera-se que todos os objetivos da presente investigação foram atingidos. Isso porque foi desenvolvida uma Sequência Didática Eletrônica com Testes de Conhecimentos, materiais de estudo, objetos de aprendizagem, atividades no software GeoGebra e vídeos explicativos para cada Módulo de estudo e a mesma foi avaliada.

Outro ponto a destacar refere-se ao material produzido, que pode servir, também, para auxiliar professores em suas aulas, bem como para ser disponibilizado aos estudantes em distintos momentos durante o estudo das Funções Exponencial e Logarítmica. Para isso, almeja-se encontrar meios em que esse material produzido possa estar disponível abertamente a quem quiser acessá-lo. Espera-se que a metodologia utilizada nesta investigação consiga ser uma ferramenta para a prática docente e aconselha-se que a retomada de conteúdo seja um ato contínuo e essencial no meio escolar, sendo percebida como um dos elementos do processo de ensino e aprendizagem, reverenciando as heterogeneidades e as necessidades de cada estudante.

Quanto às dificuldades encontradas pelo pesquisador, estão relacionadas à utilização de recursos informáticos para o desenvolvimento da Sequência Didática Eletrônica, tendo como principal empecilho as limitações na escrita para textos matemáticos, principalmente nos Testes de Conhecimentos, pois as questões tiveram que ser convertidas em um *software* que permite representar símbolos e fórmulas matemáticas (como, por exemplo, os expoentes e as bases nos logaritmos) para os padrões da web, para realizar a postagem na plataforma no Google *Forms* e, posteriormente, no Google Classroom.

Como sugestão para trabalhos futuros, além de ser retomada e melhorada a Sequência Didática Eletrônica com os resultados das análises dos professores e incrementada em uma outra plataforma, como, por exemplo, o Google *Sites*, também poderiam ser adicionadas algumas atividades *online* que envolvessem a temática Funções (na atual Sequência Didática Eletrônica, foram disponibilizadas apenas atividades no GeoGebra *online*). Outro aspecto que a ser retomado, na sequência, seria desenvolver um segundo Teste de Conhecimento para cada Módulo, a fim de que o aluno tivesse a oportunidade, se assim quisesse, de responder a um Teste de Conhecimento antes de realizar o Módulo e um segundo, após a realização do mesmo. Também se considera fundamental a aplicação da Sequência Didática Eletrônica desenvolvida junto a estudantes do Ensino Médio.

REFERÊNCIAS

ALECRIM, Emerson. Google Classroom, ambiente online para alunos e professores, é lançado globalmente. **Tecnoblog.** Disponível em: https://tecnoblog.net/163116/google-classroom-global/. Acesso em 25 mar. 2016.

ALMEIDA, Rosiney R.; ARAÚJO JR, Carlos. F. Atividades de ensino-aprendizagem de genética com o uso do *tablet*, **Revista de Produção Discente em Educação Matemática**, São Paulo, v. 4, 2015, n. 1, p. 79-90.

ALVARENGA, K.; BARBOSA, C. V.; FERREIRA, G. M. O conceito de função: o desenvolvimento baseado em alguns modelos desde o ano de 2000 a.C. até o século XX. IN: **Revista eletrônica de educação matemática** - REVEMAT, Florianópolis (SC), v.9, n. 1, p. 159-178, 2014.

ANDRADE, L. S. **Currículos de Matemática no Ensino Médio: um olhar sob a perspectiva do Enfoque Ontosemiótico do Conhecimento e a Instrução Matemática.** Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática. Universidade Luterana do Brasil. Canoas, 2014.

ARAUJO, F. S. Docência Tecnológica: Formação, Desafios E Possibilidades. **II Seminário de Formação Docente: Intersecção ente a Universidade e a Escola-Necessidades Formativas das Licenciaturas.** Dourados-Mato Grosso Sul. Disponível em: https://anaisonline.uems.br/index.php/seminarioformacaodocente/article/viewFile/4191/4846. Acesso em: 05 de jan. 2021.

AUSUBEL, D. P. **Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo.** Ed. Trillas. México, 1976.

BACHA, M. L.; MALUF, M. C. C. **Promoção e Recuperação.** Brasília, DF: Departamento de Documentação e Divulgação, 1974.

Ball, W. R. **A Short Account of the History of Mathematics.** New York: Dover Publications, 1960.

BARBOSA, J. C. A “contextualização” e a Modelagem na educação matemática do ensino médio. In: **ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO,** Recife: SBEM, 2004.

BAUMGART, J. K. **Álgebra.** Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula, vol. 4. São Paulo: Atual, 1992, 112p.

BELTHER, J. M. Os programas de recuperação paralela e a qualidade da educação em São Paulo. **Olhar de Professor**, Ponta Grossa, v. 8, n. 2, p. 163-167, 2005.

BERGERON, J. e HERCOVICS, N. **Levels in the understanding of functions concept. Proceedings of the Workshop of Functions**. Enschede, The Netherlands, 1982.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos.** Traduzido por: Maria João Alves, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Portugal, Porto Editora Ltda, 1994.

BOYER, C. B. **História da matemática**. 2ª ed.São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC). Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias/ Secretaria da Educação Básica. Orientações Curriculares para o Ensino Médio. Brasília: MEC/ SEF, 2006, v.2.

BRASIL, Guia do livro didático: PNLD 2020: Educação Básica, 2014. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/index.php. Acesso em 15 fev. 21.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília, DF, MEC, 2017.

BRASIL, Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Anísio Teixeira/INEP. **Relatório Nacional PISA/2012**. Brasília, 2014.

______. **Lei nº 5.692,** de 11 de agosto de 1971. Fixa as Diretrizes e Bases do ensino de 1º e 2º graus, e dá outras providências. Revogada pela Lei nº 9.394 de 20/12/1996. Disponível em: https://www2.camara.leg.br/legin/fed/lei/1970-1979/lei-5692-11-agosto-1971-357752-publicacaooriginal-1-pl.html. Acesso em: 21 dez. 2020.

______. **Lei n.º 9.394**, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Brasília, 1996. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm. Acesso em: 06 jan. 2021.

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da Matemática**. 9. ed. Lisboa: Gradiva, 2016.

CORRÊA, R. L. **O Espaço Urbano**. São Paulo, Ática, 1989.

COSTA, C. O. **Autonomia em Paulo Freire e educação indígena.** Dissertação (Mestrado em Educação) — Universidade Regional de Blumenau (FURB), 2013.

DANTE, L. R**. Matemática contexto & aplicações**, 2 ed, v.1– São Paulo: Ática, p.144- 173, 2013.

DAUDT, L. 6 Ferramentas do google sala de aula que vão incrementar sua aula. Disponível em: https://www.qinetwork.com.br/6-ferramentas-do-google-sala-de-aula-que-vao-incrementar-sua-aula/. Acesso em 15 de fev. 21.

FAUVEL, J. **Early Mathematics. Topics in the History of Mathematics** - Unit 1. Milton Keynes: The Open University, 1987.

FILATRO, A. **Design Instrucional na prática.** São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2009.

FREITAS, R. L.; ALMOULOUD, S. A., Rev. **Prod. Disc. Educação Matemática**, São Paulo, v.3, n.2, p.137-153, 2014.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; CONTRERAS, A.; ESTEPA, A.; LACASTA, E.; WILHELMI, M. **Anais** do Oitavo Congresso Europeu de Pesquisa em Educação Matemática (CERME 8), 2013.

GODINO, J. D. Origen y aportaciones de la perspectiva Ontosemiótica de Investigación em Didáctica de la Matemática. In A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J.

GODINO, J. D. Indicadores de idoneidade didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. **Anais** da XIII Conferência Internacional de Educação Matemática (CIAEM – IACME). Recife, Brasil, 2011.

GODINO, J. D; BATANERO, C e FONT, V. Um enfoque onto-semiótico do conhecimento e a instrução matemática. **Acta Scientiae,** Canoas, v. 10, n. 2 p,.7-37, 2008.

GODINO, J. D.; RIVAS, H.; ARTEAGA, P.; LASA, A.; WILHELMI, M. R. **Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico - semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos.** Recherches en Didactique des Mathématiques, p.167-200, 2012.

GODINO, J. D.; FONT, V.; WILHELMI, M. R. **Análisis didáctico de procesos de estudio matemático basado en el enfoque ontosemiótico.** Publicaciones, v. 38, p. 25-49, 2008.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. The onto-semiotic approach to research in Mathematics Education. **The International Journal on Mathematics Education (ZDM**), v.39, n.1-2, p. 127-135, 2003. Disponível em: < http://www.ugr.es/~jgodino/funcionessemioticas/ontosemiotic_approach.pdf>. Acesso em: 25 mar, 2015.

GROENWALD, C.; MORENO, L. Informática e Recuperação de Conteúdos: uma Experiência em Matemática. **Anais do IV CIEM.** Canoas: ULBRA, 2007.

GROENWALD, C. L. O.; ZOCH, L.; HOMA, A. I. R. Sequência Didática com Análise Combinatória no Padrão SCORM. **Bolema**, Rio Claro, ano 22, n.34, p.27-56, 2009.

GROENWALD, C. L. S. **Perspectivas em Educação Matemática.** Canoas: Ulbra, 2004.

GROSSI, E. **Assim não dá.** Nova Escola. Ano XXIII, número 214, 2008.

HALEVI, G.; MOED, H.; BAR-ILAN, J. Suitability of Google Scholar as a source of scientific information and as a source of data for scientific evaluation—Review of the literature. **Journal of informetrics**, v. 11, n.4, p. 823-834, 2017.

IEZZI, G. **Matemática Ciências e Aplicações**: Ensino Médio. 6 ed. São Paulo:

Editora Saraiva, 2010.

KAIBER, C. T. e ANDRADE, L. S. Reflexões sobre o Ensino de Funções sob a perspectiva do Enfoque Ontossemiótico. **Educação Matemática em Revista-RS**, p.27-36, 2013.

KAIBER, C. T. Una práctica de revolución de problemas en el estúdio de las funciones reales. In: IV Simposio de Educación Matemática, Chivilcoy- Buenos Aires. **Atas** do IV Simposio de Educación Matemática, p 1-15, 2002.

KAIBER, C. T.; VECCHIA, R. DALLA; SCAPIN, D. K. **A incorporação de calculadoras gráficas na estruturação de conceitos relacionados a coordenadas polares e equações paramétrica.** In: GROENWALD; C. L. O.; ROSA, M. (Eds.). Educação Matemática e Calculadoras – Teoria e Prática. p.15-43, 2010.

LEMOS, A. V. **Estudos De Recuperação No Ensino Fundamental: Uma Investigação No Âmbito Da Geometria Sob A Perspectiva Do Enfoque Ontossemiótico Do Conhecimento E Da Instrução Matemática.** Tese (Doutorado Acadêmico) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. Universidade Luterana do Brasil, Canoas, 2017.

LEMOS, A. V. **Recuperação de Conteúdos: desenvolvendo uma sequência didática sobre equações de 1º grau disponível no sistema integrado de ensino e aprendizagem (SIENA).** Dissertação (Mestrado Acadêmico) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. Universidade Luterana do Brasil, Canoas, 2013.

LEONARDO, F. M. **Conexões com a Matemática**. Editora Moderna, 3ª.ed, volume 1, 2016.

LIMA, E. L. **Meu professor de matemática e outras histórias.** Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de matemática, 1991.

MAIA, L. F. M. Q. **Modelação Matemática Na Sala De Aula: O Conceito De Função Exponencial Numa Sequência De Atividades Para O 1º Ano Do Ensino Médio**. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática. Universidade Federal De São Carlos – UFSCar. Sorocaba. 2017.

MARKOVITS, Z.; EYLON, B. S.; BRUCKHEIMER, M. Dificuldades dos alunos com o conceito de função. IN: **COXFORD, A. F. SHULTE, A. P. (Org.)**. As Idéias da Álgebra. Traduzido por Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, p. 49-69, 1995.

MARIO, C. et al. O reforço e a recuperação: parte integrante do processo de ensino e aprendizagem para o atendimento à diversidade de necessidade e de ritmos dos alunos. **Princípios e Métodos de Administração Escolar COPED**, São Paulo, 2007.

MARTINIANO, E.; ROCHA, Z. F. D. C. Disponibilização de um ambiente virtual de ensino e aprendizagem: o uso do Moodle na disciplina de biologia. **Revista**

Polyphonía, *[S. l.]*, v. 26, n. 2, p. 307–312, 2015. Disponível em: https://www.revistas.ufg.br/sv/article/view/38324. Acesso em: 05 mar. 2021.

MIRANDA, D. F.; LAUDARES, J. B. Informatização no Ensino da Matemática: investindo no ambiente de aprendizagem. In **Revista Zetetiké**. V. 15, n. 27, jan/jun, 2007.

MONTEIRO, A. B. **Estudos de Recuperação do conteúdo de frações com o uso de tecnologias da informação e comunicação.** Dissertação de mestrado em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Luterana do Brasil. Canoas. 2013.

NINOW, V. e KAIBER, C. T. Função Afim: uma Análise na Perspectiva da Idoneidade Epistêmica e Cognitiva do Enfoque Ontossemiótico. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 21, n.6, p.130-149, 2019.

Ninow, V. **O ESTUDO DE FUNÇÕES NO ENSINO MÉDIO: UMA INVESTIGAÇÃO SOB A PERSPECTIVA DO ENFOQUE ONTOSSEMIÓTICO DO CONHECIMENTO E DA INSTRUÇÃO MATEMÁTICA.** Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática. Universidade Luterana do Brasil. Canoas, 2019.

OLIVEIRA, A. D. M.; FILOMENA M. G. S. C. “Quizz, Na Sala de Aula: Uma Ferramenta de Inclusão no Processo de Ensino e Aprendizagem de Matemática”, In: **II Congresso Internacional de Educação Inclusiva, II Jornada Chilena Brasileira de Educação Inclusiva**, 2016.

OLIVEIRA, N. **Conceito de Função: uma abordagem do processo de ensino-aprendizagem.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1997.

ONUCHIC, L. de la R. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: **BICUDO, M. A. V. (org.)**. Pesquisa em educação matemática: concepções & perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, p. 199-218, 1999.

PACCA, J. L. A. . A Metodologia de Análise Nas Pesquisas Sobre Conceitos Alternativos. **Revista de Ensino de Física**, p. 20-30, 1984.

POLYA, G., **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático**. Tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo. – 2ª reimpressão - Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

REGO, T. C. **Vygotsky: uma perspectiva histórico-cultural da educação**. 10. ed. Petrópolis: Vozes, 2000.

RIO GRANDE DO SUL, Conselho Estadual de Educação. **Parecer 740/99**. Orientações para o Sistema Estadual de Ensino, 1999.

Rosário, P. **Estudar o estudar: As (Des)venturas do Testas**. Porto: Porto Editora, 2004.

Ruiz, L. **La noción de función: Análisis epistemológico y didáctico.** Tese.

Departamento de Didática da Matemática, Universidade de Granada, Espanha, 1994.

SÃO PAULO. **Conselho Estadual de Educação**. Indicação nº 05/98, São Paulo, 1998.

SELBACH, S. et al. **Matemática e Didática.** Petrópolis: Vozes, 2010.

SIERPINSKA, A. On understanding the notion of function. In: **Dubinsky & Harel** (Ed.). The concept of function – aspects of epistemology and pedagogy, M. A. A. Notes, v. 25, p. 25 – 58, 1992.

SILVA, R. F. **Funções Exponencial e Logarítmica.** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual Paulista. Presidente Prudente, 2016.

SILVA, S. T. T. **O Ensino das Funções Exponencial e Logarítmica por atividade.** Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2013.

SLOCZINSKI, H.; CHIARAMONTE, M. S. **Ambiente virtual: interação e aprendizagem. Informática na Educação - teoria & prática**, v. 8, n. 1, Porto Alegre: UFRGS, 2005.

SOARES, E. M. S.; BRUSTOLIN, R. K. Convivência em contextos escolares permeados pela tecnologia digital: algumas considerações. In: **SIMPÓSIO NACIONAL DE EDUCAÇÃO**, Frederico Westphalen, p. 648-659, 2014.

VALENTE, J. A. **As tecnologias digitais e os diferentes letramentos.** Revista Pátio. Porto Alegre, RS, v. 11, n. 44, 2008.

YOUSCHKEVITCH, A. P. **The concept of function. Archive for History of Exact Sciences**, v. 16, n. 1, p. 37-85. 1976.

ZABALA, A. A prática Eduativa: como ensinar. **Artmed** ed. Porto Alegre, 1998.

ZATTI, S. B. **Construção do conceito de função: uma experiência de ensinoaprendizagem através da resolução de problemas.** Dissertação de Mestrado – Centro Universitário Franciscano de Santa Maria, Santa Maria, 2010.

ZUFFI, E.M. (2001) Alguns Aspectos do Desenvolvimento Histórico do Conceito de Função, **Educação Matemática em Revista**, SBEM, Ano 8, No. 9/10, p.10-16.

ANEXOS:

Anexo A: Termo de Consentimento livre e Esclarecido

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

<table>
<tr><td colspan="14">1. IDENTIFICAÇÃO DO PROJETO DE PESQUISA</td></tr>
<tr><td colspan="14">Título do Projeto: SEQUÊNCIA DIDÁTICA ELETRÔNICA NO SISTEMA INTEGRADO DE ENSINO E APRENDIZAGEM (SIENA): UMA PROPOSTA PARA A RECUPERAÇÃO DE CONTEÚDOS SOBRE FUNÇÕES EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA</td></tr>
<tr><td colspan="8">Área do Conhecimento: Ensino e Aprendizagem em Ciências e Matemática</td><td colspan="6">Número de participantes: 90</td></tr>
<tr><td colspan="8">Curso: Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática</td><td colspan="6">Unidade: Canoas</td></tr>
<tr><td>Projeto Multicêntrico</td><td></td><td>Sim</td><td></td><td>Não</td><td>X</td><td>Nacional</td><td></td><td>Internacional</td><td>Cooperação Estrangeira</td><td></td><td>Sim</td><td>X</td><td>Não</td></tr>
<tr><td colspan="14">Patrocinador da pesquisa: Não se aplica.</td></tr>
<tr><td colspan="14">Instituição onde será realizado: Instituto Federal de Educação: Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul- Bento Gonçalves</td></tr>
<tr><td colspan="14">Nome dos pesquisadores e colaboradores: Rafael Jonatan Pertile e Carmen Teresa Kaiber</td></tr>
</table>

Você está sendo convidado (a) para participar do projeto de pesquisa acima identificado. O documento abaixo contém todas as informações necessárias sobre a pesquisa que estamos fazendo. Sua colaboração neste estudo será de muita importância para nós, mas, se desistir, a qualquer momento, isso não causará nenhum prejuízo para você.

<table>
<tr><td colspan="5">2. IDENTIFICAÇÃO DO PARTICIPANTE DA PESQUISA</td></tr>
<tr><td colspan="3">Nome:</td><td>Data de Nasc.:</td><td>Sexo:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Nacionalidade:</td><td>Estado Civil:</td><td colspan="2">Profissão:</td></tr>
<tr><td>RG:</td><td>CPF/MF:</td><td>Telefone:</td><td colspan="2">E-mail:</td></tr>
<tr><td colspan="5">Endereço:</td></tr>
</table>

3. IDENTIFICAÇÃO DO PESQUISADOR RESPONSÁVEL

Nome: Rafael Jonatan Pertile		Telefone: 54-996261316
Profissão: Estudante	Registro no Conselho Nº:	E-mail: rafapertile41@gmail.com
Endereço: RST 453 Km 104,5, Linha Sertorina, Farroupilha, RS		

Eu, participante da pesquisa, abaixo assinado(a), após receber informações e esclarecimento sobre o projeto de pesquisa, acima identificado, concordo de livre e espontânea vontade em participar como voluntário(a) e estou ciente:

1. Da justificativa e dos objetivos para realização desta pesquisa.
Trata-se de diminuir as dificuldades na Aprendizagem no Ensino de Funções de estudantes no Ensino Médio, como esse conteúdo tem sido desenvolvido nas escolas e como uma Sequência Didática Eletrônica pode contribuir para o seu desenvolvimento. Este projeto tem como objetivo, investigar as contribuições que uma sequência didática eletrônica apresenta no desenvolvimento de estudos de recuperação para alunos do 1º ano do Ensino Médio que apresentem dificuldades sobre o tema.

2. Do objetivo de minha participação.
Contribuir para a investigação das competências e habilidades matemáticas importantes para os estudantes doo 1º Ano do Ensino Médio Integrado do curso de Agropecuária do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul do Campus de Bento Gonçalves, bem como utilizar esse assunto como subsidio dos próximos conteúdos que utilizarão essa temática.

3. Do procedimento para coleta de dados.
As atividades propostas por esta pesquisa serão realizadas no semestre letivo 2020/2, A amostra será representada por alunos de três turmas de 1° ano do Ensino Médio Integrado do curso de Agropecuária do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul, a aplicação do teste e da sequência será realizada na escola no contra turno. A coleta de dados será disponibilizada pelo próprio sistema SIENA, onde o desempenho dos alunos será analisado através dos bancos de dados, gerados pela própria plataforma, para cada teste realizado pelos alunos em cada conceito do grafo. As notas estão compreendidas no intervalo [0,1 e 1], sendo que foi estabelecido o índice 0,6 para o desempenho considerado satisfatório para cada conceito do grafo. A análise dos dados a partir da aplicação da sequência didática eletrônica, vai ocorrer considerando os próprios resultados gerados pelo SIENA e também essa análise será baseada na categorização de erros proposta por Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar, (1987).

4. Da utilização, armazenamento e descarte das amostras.
Os dados ficarão salvos no sistema SIENA para consulta e análise do pesquisador e a sequência didática eletrônica ficará disponível para ser estudada por alunos, professores e pesquisadores, isso, até 6 meses após o término da pesquisa, findado esse prazo, os dados serão descartados. Será preservado as identidades dos acadêmicos, isto é, nomes fictícios serão utilizados na redação do texto final.

5. Dos desconfortos e dos riscos.
Não são esperados riscos e/ou desconfortos durante os desdobramentos propostos por

esta pesquisa. Visto que, as atividades serão realizadas por intermédio de softwares computacionais sob a forma de bancadas virtuais. Ademais, os acadêmicos terão total autonomia para não responder as questões sugeridas.

6. Dos benefícios.
Se for comprovado que a sequência didática eletrônica contribui para recuperação de conteúdos de função exponencial, essa pesquisa trará como benefício uma redução nas dificuldades de aprendizagem apresentadas pelos participantes da pesquisa em relação a funções dos tipos exponencial e logarítmica.

7. Dos métodos alternativos existentes.
Caso o participante da pesquisa não possa comparecer a uma das etapas propostas, a mesma poderá ser recuperada em horário pré-determinado e de comum acordo entre participante e pesquisador.

8. Da isenção e ressarcimento de despesas.
Os participantes desta pesquisa não terão nenhuma despesa, sendo assim, não são previstos ressarcimentos.

9. Da forma de acompanhamento e assistência.
Os participantes serão acompanhados e auxiliados pelo pesquisador em todas as etapas propostas.

10. Da liberdade de recusar, desistir ou retirar meu consentimento.
Tenho a liberdade de recusar, desistir ou de interromper a colaboração nesta pesquisa no momento em que desejar, sem necessidade de qualquer explicação. A minha desistência não causará nenhum prejuízo à minha saúde ou bem-estar físico. Não virá interferir em meus estudos nesta ou em qualquer outra Instituição de Ensino.

11. Da garantia de sigilo e de privacidade.
Os resultados obtidos durante este estudo serão mantidos em sigilo, mas concordo que sejam divulgados em publicações científicas, desde que meus dados pessoais não sejam mencionados.

12. Da garantia de esclarecimento e informações a qualquer tempo.
Tenho a garantia de tomar conhecimento e obter informações, a qualquer tempo, dos procedimentos e métodos utilizados neste estudo, bem como dos resultados finais desta pesquisa. Para tanto, poderei consultar o **pesquisador responsável (acima identificado)**. Em caso de dúvidas não esclarecidas de forma adequada pelo(s) pesquisador (es), de discordância com os procedimentos, ou de irregularidades de natureza ética, poderei ainda contatar o **Comitê de Ética em Pesquisa em Seres Humanos da Ulbra Canoas (RS),** com endereço na Rua Farroupilha, 8.001 – Prédio 14 – Sala 224, Bairro São José, CEP 92425-900 - telefone (51) 3477-9217, e-mail comitedeetica@ulbra.br.

Declaro que obtive todas as informações necessárias e esclarecimento quanto às dúvidas por mim apresentadas e, por estar de acordo, assino o presente documento em duas vias de igual conteúdo e forma, ficando uma em minha posse.

______________( ), _____ de ____________ de ______.

____ ____

Pesquisador Responsável pelo Projeto

Participante da Pesquisa e/ou Responsável

APÊNDICES

APÊNDICE A– INSTRUMENTO DE INVESTIGAÇÃO JUNTO AOS PROFESSORES

PPGECIM – PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO NO ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

Prezado(a) colega estou realizando uma pesquisa que tem como objetivo investigar as possíveis contribuições que uma Sequência Didática Eletrônica, disponível no Classroom, apresenta no desenvolvimento de estudos de recuperação para alunos do 1º ano do Ensino Médio, no que se refere à apropriação de conhecimentos e procedimentos relativos as Funções Exponencial e Logarítmica.

Sua contribuição é muito importante para a conclusão desta investigação.

Desde já agradeço.

Professor Rafael Jonatan Pertile   Orientadora: Dra. Carmen Teresa Kaiber

QUESTIONÁRIO:

TERMO DE CONSENTIMENTO - Eu, professor (a), após receber informações sobre este projeto de pesquisa, declaro que obtive todas as informações necessárias e, estou de acordo em participar da pesquisa.

( ) Autorizo   ( ) Não autorizo

CARACTERIZAÇÃO DO DOCENTE

1. Idade: _______ anos.

2. Indique sua formação de nível superior e o ano de formação:
   ____

3. Com relação à cursos de Pós-Graduação, você tem:
   ( ) Especialização em ____
   ( ) Mestrado em ____
   ( ) Doutorado em ____
   ( ) Não possui nenhum curso.
4. Tempo de docência (anos): ________ anos.

5. Em qual(ais) nível(eis) de ensino está lecionando em 2021?
   ( ) Séries Finais ( ) Ensino Médio ( ) Ensino Técnico ( ) Ensino Superior

6. Município que leciona: ________________________________

USO DAS TECNOLOGIAS DIGITAIS

7. Como você considera o seu conhecimento/ domínio sobre Tecnologias Digitais para uso em sala de aula.
   ( ) Insuficiente ( ) Regular ( ) Satisfatória ( ) Ótima ( ) Excelente

8. Você utiliza tecnologias digitais na sua prática docente. ( ) Não ( ) Sim

9. Se a sua resposta for positiva, utiliza as Tecnologias Digitais no(a):
( ) Planejamento das aulas
( ) Comunicação com os alunos
( ) Processo de Avaliação
( ) Organização das Atividades
( ) Outros:_________________

10. Cite os recursos tecnológicos que você mais utiliza (se for o caso)?
____

11. Particularmente no que se refere ao estudo de Funções, você pode indicar aplicativos ou softwares que possa utilizar como apoio?
____

12. Caso a resposta anterior for positiva, cite quais aplicativos ou softwares você indica:
____

13. Quais as dificuldades encontradas por você, no momento de ensinar o conteúdo de Funções?
____

14. Quais as dificuldades recorrentes apresentadas pelos alunos na aprendizagem de Funções?
____

Questionário avaliativo sobre a Sequência Didática Eletrônica referente as Funções Exponencial e Logarítmica

O questionário a seguir é formado por diversos elementos em forma de afirmações, sobre os quais deve ser expresso seu grau de concordância e decida se discorda totalmente (DT), discorda parcialmente (DP), nem discorda e nem concorda (ND,NC), concorda parcialmente (CP) e concorda totalmente (CT).

Referente à Sequência Didática (módulos de estudo)	**DT**	**DP**	**ND, NC**	**CP**	**CT**
1- Aborda os conceitos, definições, proposições e procedimentos necessários ao estudo a que se propõem.					
2- Apresenta uma mostra representativa e articulada de situações de contextualização, exercícios e aplicações.					
3- Utiliza diferentes modos de expressão matemática (verbal, gráfica, simbólica), tradução e conversão entre essas.					
4- As explicações, comprovações e demonstrações são adequadas ao nível educativo a que se dirigem					
5- Os objetos matemáticos (problemas, definições, proposições) se relacionam e se conectam entre si					
6- Propõe situações que possibilitem observar, analisar, justificar ou provar ideias.					
7- Apresenta suficientes recursos de visualização como, por exemplo: textos, imagens, gráficos, animações e vídeos.					
8- Destaca com clareza as informações mais importantes, por meio de cores, destaques, negrito ou itálico					
9- Utiliza uma linguagem acessível.					
10- Os textos apresentados são sucintos e objetivos.					
11- Os elementos de interface do material estão organizados de modo que não sobrecarreguem a tela.					
12- Proporciona aprendizagem fora do ambiente escolar.					
Referente ao Teste de Conhecimentos	**DT**	**DP**	**ND, NC**	**CP**	**CT**
1- Aborda os conceitos, definições, proposições e procedimentos necessários ao estudo a que se propõem.					
2- Apresenta uma mostra representativa de situações de contextualização e propõe situações problemas.					
3- Utiliza diferentes modos de expressão matemática (verbal, gráfica, simbólica), tradução e conversão entre as mesmas.					
4- Utiliza nível de linguagem adequado aos estudantes.					
5- Apresenta situações de leitura e interpretação adequadas ao nível dos estudantes.					
6- Apresenta situações nas quais os estudantes tenham que generalizar ou negociar definições, proposições ou procedimentos.					
7- Apresenta situações que possibilitem observar, analisar ou justificar ideias.					
8- Apresenta diferentes situações de expressão matemática (verbal, gráfica, simbólica) e interpretação.					
9- Os elementos da interface do material são organizados a fim de que estes não sobrecarreguem a tela.					
10- As questões apresentadas demonstram com clareza seus objetivos.					
Referente a Sequência Didática Eletrônica em geral	**DT**	**DP**	**ND, NC**	**CP**	**CT**
1- Possibilita autonomia ao estudante na execução das atividades propostas.					
2- Desperta curiosidade para assuntos desconhecidos pelo estudante.					
3- Auxilia o estudante na retomada dos conceitos e procedimentos referente aos conteúdos abordados.					

4- Auxilia o aluno na aprendizagem dos conceitos e procedimentos referente aos conteúdos abordados.					

5- Destaque pontos positivos e negativos quanto a estrutura da Sequência Didática Eletrônica em geral.

____

6- Na sua opinião qual ou quais estratégias devem ser utilizadas para realizar a retomada de um determinado conteúdo?

____