UNIVERSIDADE LUTERANA DO BRASIL

DIRETORIA ACADÊMICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

FRACTAIS: UMA POSSIBILIDADE DIDÁTICA PARA O DESENVOLVIMENTO DO CONTEÚDO DE GEOMETRIA NO ENSINO FUNDAMENTAL

BRUNA MARIELI REINHEIMER

Canoas, 2022.

UNIVERSIDADE LUTERANA DO BRASIL
DIRETORIA ACADÊMICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

BRUNA MARIELI REINHEIMER

FRACTAIS: UMA POSSIBILIDADE DIDÁTICA PARA O DESENVOLVIMENTO DO CONTEÚDO DE GEOMETRIA NO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Clarissa de Assis Olgin

Canoas, 2022.

BRUNA MARIELI REINHEIMER

FRACTAIS: UMA POSSIBILIDADE DIDÁTICA PARA O DESENVOLVIMENTO DO CONTEÚDO DE GEOMETRIA NO ENSINO FUNDAMENTAL

Linha de pesquisa: Ensino e Aprendizagem em Ciências e Matemática

Dissertação apresentada no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Joseide Justin Dallemole
Secretaria Estadual de Educação

Profa. Dra. Marlise Geller
Universidade Luterana do Brasil (ULBRA)

Prof. Dr. Agostinho Iaqchan Ryokiti Homa
Universidade Luterana do Brasil (ULBRA)

Profa. Dra. Clarissa de Assis Olgin (Orientadora)
Universidade Luterana do Brasil (ULBRA)

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Deus, pelo dom da vida, pela sabedoria e discernimento para trilhar essa caminhada.

Aos meus pais, Gerson e Maria de Fátima, por não medirem esforços para me proporcionar tudo que fosse necessário e sempre acreditarem e me impulsionarem a buscar os meus sonhos.

Ao meu irmão Jéferson Reinheimer e meu namorado Pedro Henrique por todo apoio, cuidado, por me ouvirem e acreditarem que eu conseguiria, por toda compreensão nos momentos em que precisei me ausentar.

À minha orientadora, professora Dra. Clarissa de Assis Olgin, pela dedicação, paciência e sabedoria, pelas conversas e conselhos, por toda a confiança e por me auxiliar a enxergar soluções onde não parecia ter.

À banca examinadora, professores Dra. Joseide Justin Dallemole, Dra. Marlise Geller e Dr. Agostinho Iaqchan Ryokiti Homa por toda contribuição direcionada ao aprimoramento desse trabalho.

À minha amiga Tatiane Fernandes por me ouvir, amparar, estar presente, acreditar e trilhar essa caminhada comigo, muito além da pós-graduação.

Aos colegas do PPGECIM pelos conhecimentos compartilhados, especialmente, pelas amizades construídas, em especial ao meu grupo de pesquisa por toda a parceria e auxilio ao longo dessa caminhada.

Aos professores do PPGECIM, que contribuíram para o meu desenvolvimento intelectual e profissional.

À direção da Escola Municipal de Ensino Fundamental Olavo Bilac de Três Coroas/RS, pelo apoio e auxilio durante a aplicação da pesquisa, bem como toda compreensão nos momentos em que precisei ausentar-me da sala de aula.

Agradeço, também, a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela oportunidade de desenvolver este trabalho como bolsista no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática.

RESUMO

Os Fractais revolucionaram a geração e reprodução de imagens, que dentre a vasta variedade de elementos da natureza, proporcionam aproximações de representações dessas formas, o que os coloca como um exemplo concreto da Geometria inserida em nosso cotidiano e que vem sendo utilizada por diferentes áreas do conhecimento, por exemplo, para descrever fenômenos dos sistemas caóticos, padrões em imagens, entre outros. Dessa forma, esta investigação, tem como objetivo investigar as contribuições da temática Fractal para o processo de ensino e aprendizagem da Geometria, desenvolvendo atividades com estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental. Para o desenvolvimento deste trabalho, optou-se pelo enfoque qualitativo, em que a pesquisadora participa ativamente na aplicação e coleta de dados. Para a análise da proposta didática envolvendo o Ensino de Geometria por meio da temática Fractais foi utilizado a análise descritiva interpretativa, a qual subsidiou a investigação dos materiais produzidos durante os encontros com o grupo de alunos, bem como as suas ações. Quanto aos aspectos teóricos, sua fundamentação está embasada em autores que discutem o Ensino de Geometria, a Geometria apresentada pela BNCC, o trabalho colaborativo, os desafios da educação contemporânea e o uso de metodologias ativas. Tal referencial serviu de base para a elaboração da sequência didática que explorou aspectos envolvendo os precursores dos estudos sobre Fractais, o desenvolvimento de construções de Fractais de Sierpinski, com o intuito de aprofundar conceitos geométricos, e entre outras atividades que foram baseadas na abordagem das tecnologias digitais por meio de aplicativos, do *software* GeoGebra, como também da gamificação, utilizando a plataforma *Kahoot*. A partir da aplicação da sequência didática desenvolvida, pode-se observar que os alunos demonstraram compreender conceitos geométricos de congruência, ponto médio, construções geométricas e suas ferramentas de desenho, bem como cálculos de área e perímetro. Sendo outro foco desta investigação a aprendizagem a partir de processos colaborativos, destaca-se a sua potencialidade, já que se pode evidenciar o engajamento e a colaboração mútua entre os participantes perante o ambiente de aprendizagem colaborativo gerado. Portanto, compreende-se a necessidade de abordagens diferenciadas, que supram as necessidades dos discentes, de ir além das metodologias tradicionais, conciliando o que é proposto pelos documentos norteadores da educação com recursos que insiram os alunos em aspectos da realidade, identificando os Fractais como uma possibilidade didática para o desenvolvimento de conceitos geométricos no Ensino Fundamental.

Palavras-chave: Educação Matemática. Ensino Fundamental. Geometria. Fractais.

ABSTRACT

Fractals have revolutionized image generation and reproduction, which among the vast variety of nature elements, provide approximations of representations of these forms, what places them as a concrete example of geometry inserted in our daily life and that has been used by different areas of knowledge, as examples, to describe phenomena of chaotic systems, patterns in images, among others. Thus, this investigation aims to investigate the contributions of the Fractal theme to the teaching and learning process of Geometry with students in the final years of Elementary Schoo. For the development of this work, it has a qualitative approach, in which the researcher actively participates in the data application and collection. For the analysis of the didactic proposal involving the Teaching of Geometry through the Fractals theme, the interpretative descriptive analysis was used, which supported the investigation of the materials produced during the meetings with the group of students, as well as their actions. As for the theoretical aspects, its foundation is based on authors who discuss the Teaching of Geometry, the Geometry presented by the BNCC, collaborative work, the challenges of contemporary education and the use of active methodologies. This reference served as the basis for the elaboration of the didactic sequence that explored aspects involving the precursors of studies on Fractals, the development of Sierpinski Fractals constructions, in order to deepen geometric concepts, and among other activities, which were also based on the approach of digital technologies through applications, and the GeoGebra software, as well as gamification, using the Kahoot platform. From the application of the didactic sequence developed, it can be observed that the students demonstrated to understand geometric concepts of congruence, midpoint, geometric constructions and their drawing tools, as well as area and perimeter calculations. As another focus of this investigation is learning from collaborative processes, its potential is highlighted, since it is possible to evidence the engagement and mutual collaboration between the participants in the generated collaborative learning environment. Therefore, it is understood the needing for differentiated approaches, which meet the needs of students, to go beyond traditional methodologies, reconciling what is proposed by the guiding documents of education with resources that insert students in aspects of reality, identifying Fractals as a didactic possibility for the development of geometric concepts in Elementary School.

Keywords: Mathematics Education. Elementary School. Geometry. Fractals.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Esta pesquisa apresenta uma investigação quanto ao desenvolvimento do conteúdo de Geometria por meio da exploração da temática Fractais na abordagem de conceitos geométricos. A qual foi desenvolvida por trabalhos colaborativos com um grupo de estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental, utilizando as metodologias ativas para revisar e aprofundar o conteúdo de Geometria plana, visando potencializar o processo de ensino e aprendizagem.

Tendo em vista que, segundo Petrillo, Melo e Pontes (2019), as contínuas transformações, seja na comunicação, nos avanços tecnológicos, na aceleração do tempo e de tudo que permeia o mundo, como ainda o fato dos alunos possuírem acesso ao que quiserem a hora que bem desejarem, então cabe ressaltar o desafio da Educação contemporânea, o qual destaca a necessidade dos docentes estarem atentos a diferentes métodos e propostas que irão agregar outras perspectivas ao ensino tradicional, para que além de suprir as novas demandas, desperte o interesse tanto nos alunos, como nos professores. Nesse sentido, entende-se que é preciso pensar em propostas didáticas para além do ensino tradicional, que utilize metodologias ativas e recursos tecnológicos, que despertem o interesse dos estudantes sobre os conteúdos e os preparem para a vida em uma sociedade tecnológica.

Tendo em vista estas considerações, percebe-se a necessidade de explorar novas metodologias no ensino de Geometria, visto que segundo Pires, Cury e Campos (2000, p. 15):

> A Geometria é considerada importante por pesquisadores e curriculistas porque, por meio dela, a criança desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive, além de ser um campo fértil para se trabalhar com situações-problema.

Com isso, a proposta desta pesquisa que tem por objetivo investigar as contribuições da temática Fractal para no processo de ensino e aprendizagem da Geometria, com estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental, com propostas da utilização do trabalho colaborativo e de metodologias ativas, para suprir com as necessidades dos processos de ensino atuais.

Assim, organizou-se esta dissertação em quatro capítulos. O primeiro, “A Pesquisa”, apresenta a justificativa seguida do problema de pesquisa, bem como os objetivos e a metodologia da investigação que teve um enfoque qualitativo buscando identificar a essência do desenvolvimento da temática Fractais no processo de ensino e aprendizagem da Geometria.

O segundo capítulo abrange a “Fundamentação Teórica”, que apresenta os aspectos históricos do Ensino de Geometria, o Trabalho Colaborativo, suas características e os Desafios da Educação Contemporânea.

No terceiro capítulo são apontadas as “Atividades didáticas com Fractais para o Ensino Fundamental”, no qual apresentam-se as ações desenvolvidas com alunos de 6º, 7º e 8º ano do Ensino Fundamental, acerca do conteúdo de Geometria por meio da temática Fractal.

O quarto capítulo apresenta a “Descrição e análise dos dados”, no qual há a descrição interpretativa das atividades desenvolvidas com os estudantes participantes da pesquisa.

Apresenta-se ainda, as “Considerações finais”, capítulo que se aborda os resultados da investigação e as considerações em relação ao seu desenvolvimento, visando identificar se os objetivos propostos foram alcançados.

1 A PESQUISA

Este capítulo apresenta a justificativa desta pesquisa, a qual buscou subsídios nos trabalhos de Eleutério (2021) e Oliveira (2019) a respeito da Geometria Fractal. Em seguida, há os objetivos (geral e específicos) e a metodologia utilizada na investigação.

1.1 JUSTIFICATIVA

Inicialmente, buscando compreender o tema de pesquisa referente a temática Fractal e o Ensino de Geometria, nos anos finais do Ensino Fundamental, em pesquisas a partir da implementação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), utilizou-se o banco de teses e dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Ensino Superior (CAPES) para identificar produções que pudessem contribuir para o desenvolvimento desta investigação, sendo assim, salienta-se que como a BNCC teve sua homologação final no ano de 2018, restringiu-se o período de pesquisa após esse marco até 2021, o que levou a 4 produções que contemplavam os assuntos especificamente para abordagens com Fractais no Ensino Fundamental, já que a maioria das produções utilizam os Fractais para trabalhar os conteúdos do Ensino Médio. Sendo assim, destacaram-se duas pesquisas (Quadro 1) que englobam especificamente o desenvolvimento de conceitos geométricos.

Quadro 1 - Categorização das produções encontradas

(Autor, ano)	Título - Universidade
(ELEUTÉRIO, 2021)	O Espaço de Hausdorff e a Dimensão Fractal: Estudo e Abordagens no Ensino Fundamental - Universidade Federal de Uberlândia
(OLIVEIRA, 2019)	Uma Proposta de Geometria de Fractais para a Sala de Aula - Universidade Federal de Juiz de Fora

Fonte: a autora.

Sendo assim, apresenta-se uma síntese referente as produções selecionadas, a respeito da temática Fractais, como seus objetivos, fundamentação teórica e contribuições para os processos de ensino e aprendizagem.

Eleutério (2021), autora da dissertação “O Espaço de Hausdorff e a Dimensão Fractal: Estudo e Abordagens no Ensino Fundamental” tem como objetivo apresentar aos estudantes do Ensino Fundamental os Fractais sobre três perspectivas: intuitiva, Dimensão de Hausdorff e Método Box Counting, visando relacionar tais conhecimentos ao Ensino de Geometria de forma prática e contextualizada, por meio de sugestões de atividades que relacionem os Fractais as habilidades de Matemática, estimulando atividades de medidas, construções com uso de material concreto, investigações e generalizações algébricas.

Inicialmente a autora aborda o tema Fractais, descrevendo o que é um Fractal, as suas principais características e exemplifica apresentando alguns Fractais clássicos como: A Poeira de Cantor, O Triângulo de Sierpinski, A Curva de Koch e A Curva de Peano.

Em seguida, a autora ainda aborda conceitos referentes aos espaços métricos e as dimensões de Fractais, identificando os Fractais como não pertencentes às geometrias Euclidianas, tendo em vista que estes não possuem dimensões inteiras, o que leva a ter as suas dimensões calculadas por Hausdorff, momento em que a autora apresenta a teoria de Hausdorff.

Já no seu terceiro capítulo, a autora apresenta as oficinas aplicadas com alunos dos anos finais do Ensino Fundamental, as quais visavam a construção de Fractais com materiais concretos e em seguida a sua abstração aritmética, onde deveriam registrar em uma tabela as relações encontradas após as iterações criadas.

Eleutério (2021) então conclui que a uso de Geometria Fractal teve a finalidade de fortalecer conhecimentos matemáticos no campo da generalização e abstração algébrica e também de apresentar possibilidades de aprofundamento do conhecimento matemático. Ainda, destacou a dificuldade dos alunos na compreensão da abstração do pensamento algébrico, também influenciados pelo período pós- pandemia, em que os alunos se encontram com algumas defasagens, mas salienta a importância e potencialidade do uso de Fractais para abordagens atrativas e incentivadoras da criatividade.

Dessa forma, a pesquisa realizada por Eleutério (2021) vem ao encontro da proposta desta dissertação, que visa utilizar os Fractais em abordagens geométricas, sendo que seus capítulos iniciais contribuem para as definições e exemplificações dos conceitos e características dos Fractais, os quais serão úteis para a construção da proposta de ensino dessa investigação.

Já Oliveira (2019) tem sua dissertação intitulada “Uma Proposta de Geometria de Fractais para a Sala de Aula”, a qual teve o objetivo de estimular professores a estudarem sobre outras geometrias, como a Geometria Fractal e propor atividades que introduzam ela na sala de aula com o auxílio da tecnologia.

O autor apresenta a Geometria Fractal e suas características, bem como os Fractais denominado por ele, como Fractais clássicos, como a Curva de Peano, a Curva de Koch, o Triângulo de Sierpinski e o Conjunto de Cantor.

Dando continuidade, o autor apresentou a sua proposta de didática para o ensino da Geometria Fractal, apresentando um conjunto de atividades, visando as construções dos Fractais clássicos, utilizando régua, papel e tesoura, como também o *software* Geogebra, atividades que trazem contribuições para a proposta de ensino e aprendizagem pretendida nesta pesquisa.

Sendo assim, por fim o autor conclui destacando a importância da abordagem dos Fractais no ensino de Matemática, pois, assim Oliveira (2019) também, acredita que ao utilizar a Geometria Fractal pode-se incentivar e cativar os alunos para a aprendizagem deste conteúdo.

Tendo em vista tais apontamentos, salienta-se as contribuições das duas dissertações analisadas para a produção e continuidade da presente investigação, considerando o fato de trazerem desde as abordagens históricas dos Fractais, como diferentes Fractais e suas características, além de sugestões de atividades para se trabalhar em sala de aula. Dessa forma, acredita-se que ao trabalhar a Geometria Fractal, pode-se consolidar conceitos geométricos importantes para os estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental, de forma contextualizada. Assim, o questionamento, que norteou o desenvolvimento deste trabalho foi: **Quais as contribuições da temática Fractal para o Ensino de Geometria nos anos finais do Ensino Fundamental, quando explorada por meio de trabalhos colaborativos?**

1.2 OBJETIVOS

O objetivo geral desta pesquisa foi investigar as contribuições da temática Fractal para o processo de ensino e aprendizagem da Geometria, desenvolvendo atividades com estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental.

1.2.1 Objetivos Específicos

Para atingir o objetivo geral desta pesquisa, foram estabelecidos os seguintes objetivos específicos:

- Pesquisar, selecionar e elaborar atividades de Geometria envolvendo Fractais para o desenvolvimento de uma sequência didática para trabalhar conceitos geométricos abordados nos anos finais do Ensino Fundamental.
- Aplicar a sequência didática proposta com alunos dos anos finais do Ensino Fundamental.
- Analisar as atividades didáticas, envolvendo os Fractais, quando trabalhadas em sala de aula, por meio de grupos colaborativos para o estudo de conteúdos de Geometria.

1.3 METODOLOGIA DA PESQUISA

Este capítulo abordará assuntos pertinentes à metodologia de pesquisa adotada para tal investigação, Minayo (2001, p. 44) define metodologia como:

> [...] a discussão epistemológica sobre o “caminho do pensamento” que o tema ou o objeto de investigação requer; a apresentação adequada e justificada dos métodos, técnicas e dos instrumentos operativos que devem ser utilizados para as buscas relativas às indagações da investigação; e a “criatividade do pesquisador”, ou seja, a sua marca pessoal e específica na forma de articular teoria, métodos, achados experimentais, observacionais ou de qualquer outro tipo específico de resposta às indagações específicas.

Dessa forma, o caminho metodológico a ser adotado nesta investigação, baseia-se em uma abordagem qualitativa, pois a pesquisa qualitativa visa além dos pressupostos quantitativos, ou seja, não tem por objetivo quantificar dados, mas sim identificar a essência do processo e/ou do objeto investigado. Trabalha com um universo de significados, motivos, aspirações, crenças, valores e atitudes (MINAYO, 2001). Assim, busca detalhar e descrever os dados, enfatizando o processo e não mais o objeto, é trabalhando qualitativamente que o pesquisador é ao mesmo tempo participante da investigação. Tal fato, leva a escolha dessa abordagem, pois se pretendeu observar como professora e pesquisadora, como ocorre o processo de ensino e aprendizagem quando se propõe trabalhar a temática Fractal com estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental.

Também considerada uma pesquisa social e por sua vasta abrangência, Yin (2016) diz preferir ao invés de definir pesquisa qualitativa em sua singularidade, elenca cinco características que as define, sendo elas:

> 1. estudar o significado da vida das pessoas, condições da vida real; 2. representar as opiniões e perspectivas das pessoas (participantes) de um estudo; 3. abranger as condições contextuais em que as pessoas vivem; 4. contribuir com revelações sobre conceitos existentes ou emergentes que podem ajudar a explicar o comportamento social humano; e 5. esforçar-se por usar múltiplas fontes de evidência em vez de se basear em uma única fonte (YIN, 2016, p. 29).

Com isso, identifica-se a pesquisa qualitativa como uma metodologia que ao coletar as particularidades investigadas, deve-se tomar cuidado para não generalizar tais resultados, tendo em vista que para cada grupo e/ou objeto estudado, aspectos físicos, sociais, étnicos, etc., podem modificar tal descoberta (YIN, 2016).

Considerando, os aspectos da pesquisa qualitativa, após análise dos objetos de conhecimento e habilidades a serem trabalhadas na temática Geometria, dispostos na BNCC, decidiu-se abrir o convite para alunos de 6º a 8º ano do Ensino Fundamental, que estudam na escola em que a pesquisadora exerce atividade profissional, sendo que os conteúdos abordados na sequência didática proposta contemplam os diferentes anos de ensino. Assim, com o intuito de promover um ambiente colaborativo de aprendizagem e de averiguar o desempenho dos alunos de acordo com sua faixa etária e ano escolar, destinou-se 5 vagas para cada ano, o que levou a um grupo de 13 alunos, sendo 5 do 6º, 4 do 7º e 4 do 8° ano, estudantes da Escola Municipal de Ensino Fundamental Olavo Bilac, da cidade de Três Coroas/RS, que aceitaram o convite e de forma voluntária, participaram da fase de aplicação das atividades no turno inverso às aulas. Para a participação dos estudantes foi solicitado o preenchimento e assinatura do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE – Apêndice A) e Termo de Assentimento Livre e Esclarecido (TALE – Apêndice B), conforme estabelecido pelo Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos (CEP), visto que esta pesquisa está devidamente cadastrada no (CEP), e aprovada por este, segundo Certificado de Apresentação de Apreciação Ética (CAAE): 23591519.1.0000.5349.

Dessa forma, cabe descrever os participantes da pesquisa, bem como o local para a coleta de dados, o que segue na seção seguinte.

1.3.1 Características da comunidade escolar

A Escola Municipal de Ensino Fundamental Olavo Bilac, é localizada no bairro Linha 28, na cidade de Três Coroas, interior da capital rio-grandense, que segundo dados do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) atualizados em 2021, possui 28.948 habitantes. A economia da cidade é baseada principalmente no setor calçadista, sendo que a maior parte dos responsáveis pelos alunos são trabalhadores deste meio, o que deixa uma perspectiva de que grande parte dos alunos seguem o mesmo caminho dos pais para dentro de fábricas de calçado. Acrescenta-se ainda, que a escola em questão se encontra mais afastada do centro da cidade, na qual recebe alunos vindos do interior, estes alunos recebem transporte gratuito custeado pela Prefeitura Municipal. No que diz respeito à classe econômica pode-se classificar os alunos entre baixa a média/alta.

A escola em si, como todas as outras 9 escolas de Ensino Fundamental do município, possui uma boa infraestrutura, todas as salas de aulas são equipadas com 1 televisor de 55 polegadas e 1 notebook, para que os professores possam utilizar como recursos no aprimoramento de suas aulas, essas ainda são bem iluminadas, arejadas e possuem ar condicionado. Sendo assim, a escola possui 9 salas de aula, auditório, uma sala de recursos para atendimentos do AEE (Atendimento Educacional Especializado), uma sala de jogos, um ginásio poliesportivo, cozinha e refeitório, sala de professores, biblioteca com um bom acervo, laboratório de informática bem equipado e secretaria. Além disso, conta com pátio coberto e uma pracinha para os pequenos.

Atualmente, atende 240 alunos, distribuídos entre 14 turmas, sendo uma de cada ano da educação básica, ou seja, da Pré-Escola ao 9º ano do Ensino Fundamental no turno da manhã e uma turma multisseriada de Jardim e Pré-escola e outras três, de 1º, 4º e 5º ano, no turno da tarde. Já em parceria com projetos ofertados pela rede municipal, a escola oferece aulas de xadrez, capoeira, karatê, dança e Educação Ambiental, no turno inverso às aulas.

Sua equipe administrativa e pedagógica é formada por uma diretora, uma coordenadora, uma secretária, 19 professores, dois auxiliares de professor, três serventes, um zelador e uma psicopedagoga.

A escola segue os planos de ação de acordo com o documento orientador do município, definidos pela rede municipal de ensino, que foi construído a partir da BNCC em encontro entre os professores das diferentes áreas e etapas da educação básica.

Assim, na seção seguinte, descreve-se a caracterização dos participantes da investigação.

1.3.2 Caracterização do grupo de alunos

O grupo de alunos que contribuiu para essa pesquisa foi formado por 13 estudantes (Figura 1), que participaram voluntariamente no turno inverso às aulas, estes possuem idades entre 11 e 14 anos. Importante destacar que, entre eles, apenas um reprovou em anos anteriores na disciplina de Matemática.

Figura 1 - Grupo de pesquisa[1]

Fonte: a pesquisa.

Os alunos foram questionados quanto a Matemática e sua atuação em sala de aula, sendo que 6 alunos responderam possuir um pouco de dificuldade na disciplina, mas unanimemente responderam que gostam ou acham interessante.

[1] Foi coletada previamente a autorização do uso de imagem (Apêndice C) pelos responsáveis dos alunos.

Quanto ao nível de aprendizagem, os alunos demonstraram não compreender exatamente o que é a Geometria e que nunca ouviram falar em Geometria Fractal, já em conversa com a professora titular das turmas, identifica-se segundo ela que os alunos apresentam poucas dificuldades em relação a disciplina, as quais surgem e são compreensíveis para um período pós pandemia, depois de passarem quase 2 anos em ensino remoto, no entanto todos buscam aprender, tirar dúvidas e possuem mais insegurança em relação ao que sabem do que realmente dificuldades.

Dessa forma, caracteriza-se o grupo como participativos e dedicados, visto que demonstraram, também, um bom entrosamento, apesar de serem de idades e anos distintos. Pode-se perceber que colaboraram entre si, e relacionaram-se de forma harmoniosa e tranquila no decorrer das atividades realizadas.

Ressalta-se que os alunos tiveram autonomia para organização do desenvolvimento de suas atividades, por hora deveriam trabalhar em grupos, em outros momentos, individual, mas sempre puderam ter liberdade de escolher com quem sentar e realizar o que era proposto. A pesquisadora apenas orientava a quantidade de participantes para cada atividade e os mesmos dividiam-se por afinidade, vale destacar que por mais que em algumas atividades cada aluno deveria realizar a sua de forma individual, os alunos mantiveram-se sentados em grupos, para que fosse possível trocar ideias, discutir as ações e promover um ambiente colaborativo.

Sendo assim, destaca-se, ainda, que se optou em utilizar a letra inicial dos nomes dos alunos para se referir a eles na etapa de descrição e análise dos dados coletados, bem como alunos que possuem a mesma inicial no nome, tiveram o acréscimo da letra inicial do seu sobrenome.

Já quanto ao uso de imagem, apesar de ter as autorizações assinadas pelos responsáveis dos alunos, decidiu-se em utilizar recursos para não identificação dos participantes na fase de análise das atividades, para evitar constrangimentos quanto as particularidades do desenvolvimento de cada um, já que a ideia não é julgar se está certo ou errado, mas sim analisar as potencialidades e limitações das atividades como um todo.

Por fim, organizou-se esta pesquisa nas etapas descritas no subcapítulo seguinte.

1.3.3 Etapas da pesquisa

Nesta investigação foram elencadas as seguintes etapas de pesquisa:

a) Organização de um **Referencial Teórico** sobre Aspectos históricos do Ensino de Geometria, ainda este visto pela BNCC, o Trabalho Colaborativo nos processos de formação e o uso de metodologias ativas nos atuais processos de ensino e aprendizagem, frente às diversas mudanças que enfrentam os sistemas educacionais.

b) Elaboração do **questionário inicial e final**: foi aplicado um questionário para identificar alguns conhecimentos prévios dos alunos em relação a Geometria e Fractais, como sua opinião sobre o sistema de ensino no qual está inserido, já o questionário final foi utilizado para verificar se os objetivos da pesquisa foram alcançados e a opinião dos alunos em relação às atividades.

c) **Estruturação da sequência didática** aplicada como experimentação desta pesquisa, com um grupo de alunos dos anos finais do Ensino Fundamental, essas atividades foram propostas por meio da exploração de Fractais, desenvolvidas pelos participantes de forma colaborativa com o uso de metodologias ativas, a fim de promovê-los como agentes produtores do seu conhecimento dentro do processo de ensino e aprendizagem.

d) **Aplicação da pesquisa:** desenvolvimento de atividades envolvendo a temática Fractais na abordagem de conceitos e conteúdos geométricos com um grupo de 13 estudantes do 6º, 7º e 8º ano dos anos finais do Ensino Fundamental, de uma escola municipal da cidade de Três Coroas/RS. Esta aplicação ocorreu em 9 momentos, dos quais foram divididos em quatro encontros no turno inverso às aulas.

e) **Análise dos encontros:** essa fase foi voltada ao tratamento das informações, análise de todos os materiais produzidos, rascunhos dos participantes, bem como pequenas gravações realizadas dos encontros e também relatos e registros dos alunos durante a sua participação. Ou seja, se analisou todos os materiais produzidos pelos alunos e o seu desenvolvimento, visando uma abordagem qualitativa, a partir da análise descritiva interpretativa, já que esta visa observar, registrar e analisar os fatores ou variáveis dos fenômenos ou processos estudados (PEROVANO, 2014), o que se identifica como um caminho viável para averiguar se os objetivos desta investigação foram atingidos e quais os efeitos gerados.

No próximo capítulo encaminha-se a fundamentação teórica que subsidiou esta investigação.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo se apresenta os referenciais teóricos a respeito dos aspectos históricos do Ensino de Geometria, a visão deste pela BNCC, o Trabalho Colaborativo seu desenvolvimento e desafios na sua execução, como também os Desafios da Educação Contemporânea, com o uso de metodologias ativas.

2.1 ASPECTOS HISTÓRICOS DO ENSINO DE GEOMETRIA

A Geometria está constantemente presente ao nosso redor, em nosso cotidiano e a tudo que nos cerca, assim como já dizia Monteiro (2015, p. 5) suas origens, "aparentemente coincidem com as necessidades do dia a dia das pessoas, como em divisão de terras, construções, observação do movimento dos astros e outras das várias atividades que sempre dependeram do seu desenvolvimento".

A Geometria teria surgido no antigo Egito, a partir da necessidade das divisões de terras, em que se estabeleceram as primeiras relações métricas e trigonométricas (EVES, 1992). No entanto, a sua origem exata é duvidosa, já que existem registros anteriores que apresentam aspectos geométricos, ou seja,

> Apesar do historiador grego Heródoto escrever que a geometria nasceu no antigo Egito, os registros mais antigos de atividades humanas no campo da geometria de que dispomos remontam à época dos babilônios há talvez cerca de cinco mil anos e foram aparentemente motivadas por problemas práticos de agrimensura (GORODSKI, 2002, p.1).

Assim, a cronologia do conhecimento geométrico, indica o uso de pensamentos geométricos para reconstruir limites em terras, de construir artefatos ou instrumentos, de construir moradias, de navegar, de se orientar, etc. (LOREZATO, 2008*).* Ainda, de acordo com o autor, inicialmente foi utilizado o próprio corpo humano (palmo, pé, passo, braça, cúbito) como as primeiras unidades de medidas, mas com o passar do tempo, por volta de 3500 a.C., quando na Mesopotâmia e no Egito começaram as construções de templos, surgiu a necessidade de medidas mais precisas, criando-se as primeiras medidas oficiais de comprimento, as réguas de madeira e metal, ou cordas com nós.

Posteriormente, por volta de 500 a.C. foi na Grécia em que fundaram as primeiras academias, tendo Tales e Pitágoras como participantes dessas ações, em que reuniram conhecimentos egípcios, etruscos, babilônicos e indianos para desenvolvê-los e aplicá-los na Matemática, nas navegações e na religião (MONTEIRO, 2015). Assim, salienta o autor que nessa época os livros de Geometria foram ganhando espaço devido à grande procura e interesse nos assuntos, levando a criação de novos instrumentos e também o aperfeiçoamento dos já existentes, como por exemplo, a substituição da estaca com cordas, pelo compasso.

Foi no período da escola pitagórica grega que ocorreu as maiores contribuições para estabelecer o método dedutivo-formal em Matemática, gerando o livro “Os Elementos”, de Euclides, que com seus 13 volumes trazia toda a matemática da época e também a sua aplicação, ricos materiais que são utilizados até os tempos atuais (GORODSKI, 2002).

Já quando se fala da Geometria no Brasil, Meneses (2007) nos aponta o surgimento dos conhecimentos geométricos vem a partir da guerra, quando no século XIV com a necessidade do desenvolvimento de armamentos bélicos, a Geometria teve seu papel de destaque, o que ainda com a necessidade do desenvolvimento militar surgiram as primeiras aulas de Artilharia e Fortificação, criando um novo cargo para o exército, o de engenheiro, onde a Geometria se enquadrou como seu principal objeto de conhecimento.

Assim, posteriormente, outras escolas que começaram a ter cursos de Matemática, Geometria, foram a Academia Real dos Guardas-Marinha e a Academia Real Militar, que com o passar dos anos se estabeleceram em curso secundário e curso de nível superior. No entanto, destaca-se que a Geometria passou a ser de suma importância, tornando-se a partir de 1832 pré-requisitos também para os cursos jurídicos, não sendo mais restrita aos meios militares. O que conta Monteiro (2015) que “após várias discussões, chegou-se ao consenso de que a Geometria, entre outras coisas, era responsável por levar o indivíduo a adquirir ideias exatas em Economia e Política, bem como auxiliava no desenvolvimento da razão e de fazer raciocinar com exatidão e método”.

A Geometria começou a ser valorizada, estendendo a sua obrigatoriedade também para os cursos das Academias Médico-cirúrgicas e nos cursos Politécnicos. O que deixou a Geometria não mais com um caráter militar, mas sim, relacionada a conhecimentos necessários para a formação humana, tornando-se disciplinas escolares, surgindo da necessidade de se trabalhar esses conceitos que seriam exigidos para o ingresso nos cursos superiores (MENESES, 2007).

Posteriormente um grande movimento para área da Matemática se deu a partir do IV Congresso Internacional de Matemática realizado em Roma, em 1908, quando foi criada a Comissão Internacional do Ensino de Matemática – *Internationale Mathematische Unterrichskomission (IMUK)* que, a partir de 1954, passou a ser chamada de *ICMI – Internacional Comission on Mathematical Instruction* (MONTEIRO, 2015; RODRIGUES, 2018). Segundo os autores, este movimento teve como objetivo evidenciar como estava o ensino da Matemática nos diversos países, o Brasil participou pela primeira vez em 1912, quando realizado em Roma, em que o IMUK analisou métodos e instruções matemáticas utilizadas em diversos países. Fazendo com que refletisse no ensino do Brasil posteriormente, por volta de 1928, quando houve a unificação das matemáticas, a Álgebra, a Aritmética e Geometria passaram a ser consideradas uma só disciplina, a Matemática.

Outra movimentação da Matemática Moderna começou a partir do grupo Bourbaki, formado por franceses que em 1940 e 1950 ministravam as aulas de matemática do Brasil, e tinham como foco uma Matemática avançada, contextualizada e mais acessível aos alunos. Momento em que segundo Pereira (2001) sucessivamente começaram a ser criados os grupos de estudos para as formações de professores em diferentes estados brasileiros, destacando-se o GEEMPA - Grupo de Estudos sobre o Ensino de Matemática de Porto Alegre, fundado em 1970, que disseminou informações e métodos modernos no território nacional, a Revista de Ensino trazia inovações para os professores que gostariam de adotar as referências do Movimento Matemática Moderna (MMM). Tal Movimento trazia a necessidade de modificar os processos de ensino para acompanhar os avanços tecnológicos, e que pudesse contribuir com os progressos científicos da sociedade. Influenciando em um ensino com foco nos aspectos formais, estruturais e na linguagem, que acabava dificultando a compreensão de conceitos (PIRES, 2008).

Desta forma, destaca-se a fragilização do Ensino de Geometria, durante o MMM, no qual os professores não estavam preparados para reproduzir os objetivos do Movimento, e acabavam por abandonar parcial ou totalmente o ensino, dessa forma a disciplina ficou em um plano secundário, perdeu o seu caráter intuitivo e pautou-se no formalismo (PAVANELLO, 1993).

Em contrapartida, apenas no final da década de 70 começaram a surgir projetos voltados para as experiências dos alunos, envolvendo a exploração e manipulação de objetos geométricos, destacando a importância do desenvolvimento do pensamento geométrico, tanto quanto o aritmético ou algébrico (PIRES; CURY; CAMPOS, 2000).

Anos depois, outro marco importante para o Ensino de Geometria foram as diretrizes curriculares entre os anos de 1980 a 1994, diretrizes que buscavam contrapor as ideias do MMM e os Parâmetros Curriculares Nacionais, que reformularam os objetivos dos processos educacionais no Brasil. Especificamente na área da Matemática, quando se trata da Geometria para o Ensino Fundamental, os objetivos estabelecidos pelos parâmetros englobavam: o espaço físico, ou seja, o domínio da materialização; a Geometria concebida como modelo do espaço físico (o domínio das figuras geométricas); os sistemas de representações das figuras, ou seja, o domínio das representações gráficas (BRASIL, 1998).

Além de que, as noções geométricas contribuem diretamente na aprendizagem de números e medidas, pois estimula a criança a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades e vice-versa. Até mesmo que com a exploração do mundo que as cercam, lhes permitem estabelecer relações com a Matemática e outras áreas do conhecimento (BRASIL, 1998).

Já em 2018, com a homologação final do documento norteador da Educação Brasileira, denominado Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que organizou as diferentes áreas do conhecimento em unidades temáticas e, na Matemática tem-se uma unidade para estudo dos conceitos e procedimentos relacionados à Geometria. Esse documento ressalta que “a Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento” (BRASIL, 2018, p. 271).

Dessa forma, cabe analisar a disposição da unidade temática Geometria e de seus objetos de conhecimento nos anos finais do Ensino Fundamental, dispostos na BNCC.

No 6° ano do Ensino Fundamental tem-se na unidade de Geometria (Figura 2) o trabalho com o plano cartesiano, figuras planas e espaciais, semelhança de figuras e estudo das retas.

Figura 2 - Geometria 6º ano do Ensino Fundamental (BNCC)

UNIDADE TEMÁTICA	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
GEOMETRIA	Plano cartesiano: associação dos vértices de um polígono a pares ordenados	**(EF06MA16)** Associar pares ordenados de números a pontos do plano cartesiano do 1º quadrante, em situações como a localização dos vértices de um polígono.
	Prismas e pirâmides: planificações e relações entre seus elementos (vértices, faces e arestas)	**(EF06MA17)** Quantificar e estabelecer relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e pirâmides, em função do seu polígono da base, para resolver problemas e desenvolver a percepção espacial.
	Polígonos: classificações quanto ao número de vértices, às medidas de lados e ângulos e ao paralelismo e perpendicularismo dos lados	**(EF06MA18)** Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros. **(EF06MA19)** Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos. **(EF06MA20)** Identificar características dos quadriláteros, classificá-los em relação a lados e a ângulos e reconhecer a inclusão e a intersecção de classes entre eles.
	Construção de figuras semelhantes: ampliação e redução de figuras planas em malhas quadriculadas	**(EF06MA21)** Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais.
	Construção de retas paralelas e perpendiculares, fazendo uso de réguas, esquadros e *softwares*	**(EF06MA22)** Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou *softwares* para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros. **(EF06MA23)** Construir algoritmo para resolver situações passo a passo (como na construção de dobraduras ou na indicação de deslocamento de um objeto no plano segundo pontos de referência e distâncias fornecidas etc.).

Fonte: Brasil (2018, p. 302-303).

Já no 7° ano do Ensino Fundamental a unidade de Geometria aborda as transformações geométricas de polígonos, simetrias, o estudo da circunferência como lugar geométrico, relações entre triângulos e o estudo dos ângulos formados a partir de retas, conforme se pode observar na Figura 3.

Figura 3 - Geometria 7º ano do Ensino Fundamental (BNCC)

UNIDADE TEMÁTICA	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
GEOMETRIA	Transformações geométricas de polígonos no plano cartesiano: multiplicação das coordenadas por um número inteiro e obtenção de simétricos em relação aos eixos e à origem	**(EF07MA19)** Realizar transformações de polígonos representados no plano cartesiano, decorrentes da multiplicação das coordenadas de seus vértices por um número inteiro. **(EF07MA20)** Reconhecer e representar, no plano cartesiano, o simétrico de figuras em relação aos eixos e à origem.
	Simetrias de translação, rotação e reflexão	**(EF07MA21)** Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou *softwares* de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros.
	A circunferência como lugar geométrico	**(EF07MA22)** Construir circunferências, utilizando compasso, reconhecê-las como lugar geométrico e utilizá-las para fazer composições artísticas e resolver problemas que envolvam objetos equidistantes.
	Relações entre os ângulos formados por retas paralelas intersectadas por uma transversal	**(EF07MA23)** Verificar relações entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal, com e sem uso de *softwares* de geometria dinâmica.
	Triângulos: construção, condição de existência e soma das medidas dos ângulos internos	**(EF07MA24)** Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°. **(EF07MA25)** Reconhecer a rigidez geométrica dos triângulos e suas aplicações, como na construção de estruturas arquitetônicas (telhados, estruturas metálicas e outras) ou nas artes plásticas. **(EF07MA26)** Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um triângulo qualquer, conhecidas as medidas dos três lados.
	Polígonos regulares: quadrado e triângulo equilátero	**(EF07MA27)** Calcular medidas de ângulos internos de polígonos regulares, sem o uso de fórmulas, e estabelecer relações entre ângulos internos e externos de polígonos, preferencialmente vinculadas à construção de mosaicos e de ladrilhamentos. **(EF07MA28)** Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a

		construção de um polígono regular (como quadrado e triângulo equilátero), conhecida a medida de seu lado.

Fonte: Brasil (2018, p. 308-309).

Dando sequência, no 8º ano do Ensino Fundamental a unidade de Geometria (Figura 4) trabalha a congruência de triângulos, o estudo dos ângulos notáveis e transformações geométricas (simetria, reflexão e rotação).

Figura 4 - Geometria 8º ano do Ensino Fundamental (BNCC)

UNIDADE TEMÁTICA	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
GEOMETRIA	Congruência de triângulos e demonstrações de propriedades de quadriláteros	**(EF08MA14)** Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos.
	Construções geométricas: ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares	**(EF08MA15)** Construir, utilizando instrumentos de desenho ou *softwares* de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares. **(EF08MA16)** Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um hexágono regular de qualquer área, a partir da medida do ângulo central e da utilização de esquadros e compasso.
	Mediatriz e bissetriz como lugares geométricos: construção e problemas	**(EF08MA17)** Aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas.
	Transformações geométricas: simetrias de translação, reflexão e rotação	**(EF08MA18)** Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de *softwares* de geometria dinâmica.

Fonte: Brasil (2018, p. 314-315).

Por fim, para o 9º do Ensino Fundamental a unidade de Geometria (Figura 5) trabalha a congruência de triângulos, o estudo dos ângulos notáveis e transformações geométricas (simetria, reflexão e rotação).

Figura 5 - Geometria 9º ano do Ensino Fundamental (BNCC)

UNIDADE TEMÁTICA	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
GEOMETRIA	Demonstrações de relações entre os ângulos formados por retas paralelas intersectadas por uma transversal	**(EF09MA10)** Demonstrar relações simples entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal.
	Relações entre arcos e ângulos na circunferência de um círculo	**(EF09MA11)** Resolver problemas por meio do estabelecimento de relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência, fazendo uso, inclusive, de *softwares* de geometria dinâmica.
	Semelhança de triângulos	**(EF09MA12)** Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.
	Relações métricas no triângulo retângulo Teorema de Pitágoras: verificações experimentais e demonstração Retas paralelas cortadas por transversais: teoremas de proporcionalidade e verificações experimentais	**(EF09MA13)** Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos. **(EF09MA14)** Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.
	Polígonos regulares	**(EF09MA15)** Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando régua e compasso, como também *softwares*.
	Distância entre pontos no plano cartesiano	**(EF09MA16)** Determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos quaisquer, dadas as coordenadas desses pontos no plano cartesiano, sem o uso de fórmulas, e utilizar esse conhecimento para calcular, por exemplo, medidas de perímetros e áreas de figuras planas construídas no plano.
	Vistas ortogonais de figuras espaciais	**(EF09MA17)** Reconhecer vistas ortogonais de figuras espaciais e aplicar esse conhecimento para desenhar objetos em perspectiva.

Fonte: Brasil (2018, p. 316-319).

Dessa forma, o próprio documento norteador da educação brasileira, a BNCC, afirma que durante os anos finais do Ensino Fundamental, a Geometria deve ser trabalhada com o intuito de consolidar e ampliar o que já foi estudado durante os Anos Iniciais, enfatizando tarefas que analisem e produzam transformações e ampliações/reduções de figuras geométricas planas, identificando seus elementos variantes e invariantes, de modo a desenvolver os conceitos de congruência e semelhança (BRASIL, 2018).

O que se entende também é que assuntos relacionados ao plano cartesiano, a posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais, podem desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Os quais, têm grande relevância para a investigação de propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes, o que destaca principalmente as ideias fundamentais de construção, representação e interdependência. O que remete a aprendizagem para o desenvolvimento de habilidades de percepção espacial; na elaboração de um sistema de propriedades geométricas e de uma linguagem que permitam este modelo; e a codificação e decodificação de desenhos (BRASIL, 2018).

Abordando a Geometria não mais como uma aplicadora de fórmulas, mas sim com tarefas e atividades que desenvolvam o raciocínio hipotético-dedutivo. Além disso, é nos anos finais do Ensino Fundamental que se visa a necessidade da relação entre a Geometria e a Álgebra.

Assim, como diz Fonseca (2009) a Geometria é uma das melhores oportunidades que existe para aprender a matematizar a realidade, visto que, permite descobertas, construções e manipulações, possibilitando novas investigações. O que vem ao encontro com o que é proposto na BNCC, que nos deixa clara a atuação da Geometria, como uma unidade temática de ensino que vai instigar os alunos a buscar, analisar, comparar, contrapor, e até mesmo recriar, de acordo com diferentes contextos.

O que se compreende é que a partir da exploração de elementos ligados à realidade do aluno, que as primeiras noções geométricas podem ser desenvolvidas, interligando as suas experiências cotidianas, elementos do espaço, formas bidimensionais e tridimensionais com conhecimentos numéricos, métricos e algébricos.

No entanto, cabe ressaltar a necessidade da observação e intervenção do professor para que o aluno consiga por si só fazer a relação do que lhe é proposto com o objeto matemático de fato, e abstrair o conhecimento. O que apesar de ser algo matematicamente visível, para os alunos é algo que pode ser bem difícil de se levar para o abstrato, assim como diz Kaleff (1998, p.16):

> Apesar de, para os matemáticos, não haver dúvidas de que os elementos geométricos (ponto, reta, plano, sólidos, etc.) pertencem ao mundo das ideias matemáticas, estes elementos tiveram sua origem no mundo físico e representam abstrações de objetos materiais. Esta ambiguidade é um fator perturbador para o ensino da Geometria, pois ela se apresenta como uma grande dificuldade para os alunos que não percebem que os elementos geométricos são abstratos e que mesmo ao observarem o desenho de uma figura geométrica no livro-texto ou no quadro-negro, ou mesmo sua imagem na tela do computador, estão, na realidade, vendo apenas uma representação do objeto geométrico.

O que nos alerta para situações de experimentação, visto que, o ato de ver desenvolve-se naturalmente, mas o ato de visualizar e identificar cada detalhe e até mesmo características não visíveis nesta representação, para de fato ter a percepção do objeto matemático, e abstrair o conhecimento, é mais complexo e necessita de atividades específicas que levem aos alunos a terem essa percepção. Sugere-se então, a manipulação de materiais concretos, de diferentes formas, cores, texturas, aplicados a atividades dirigidas que estimulem a construção dos modelos formais e mentais por cada aluno (KALEFF, 1998).

Por outro lado, vale destacar que não é apenas a manipulação de um material concreto que vai possibilitar a construção do conhecimento por parte do aluno, mas sim se essa manipulação ocorre por meio de reflexões e discussões, seja entre alunos ou mediada pelo professor. Ainda, que não ser apenas toda executada pelo professor, de modo que o aluno somente participe passivamente, é relevante que o aluno participe ativamente como sujeito da construção do seu conhecimento (RÊGO; RÊGO; VIEIRA, 2012).

Assim, compreende-se o Ensino de Geometria dos anos finais do ensino fundamental como “uma rede de conceitos interligados, formas de raciocínios e sistemas de representações que são utilizados para conceitualizar e analisar os espaços que nos envolvem - seja físico, ou seja, por nós imaginados” (BATTISTA, 2007, p. 843).

Dessa forma, visando trabalhar conceitos geométricos com alunos dos anos finais do Ensino Fundamental, utilizando a temática Fractais, encaminho o subcapítulo que abordará um breve resumo histórico da Geometria Fractal, como suas principais definições e características.

2.1.1 Geometria Fractal

O estudo dos Fractais começou a se consolidar na década de 60 com o Matemático Benoit Mandelbrot, quando se estabeleceu a ideia de que o que é visto em uma determinada escala de forma regular pode ser irregular quando se aproximado. E assim, surgem as ideias de irregularidades, que foram chamadas de Fractais por Mandelbrot inspirado no adjetivo *fractus,* que do latim, vem do verbo *frangere* que significa, fração, fragmentar, o que está diretamente ligado à sua dimensão (BARBOSA, 2005).

Já que, ainda segundo o autor, a dimensão dos Fractais se difere das dimensões euclidianas, o que se percebe ao analisar, pontos, retas, áreas e volumes, visto que as euclidianas são perceptíveis em primeira, segunda ou terceira dimensão, sempre sendo estas associadas a números inteiros, já as dimensões fractais são sempre valores fracionários.

Portanto, segundo Oliveira (2019), é considerado um Fractal, aquela estrutura que ao ser dividida em partes, obtêm-se partes idênticas à inicial, e ao se repetir o processo sucessivamente, o mesmo sempre ocorre. Processos esses obtidos a partir de um padrão de ocorrências ou iterações.

Sendo assim, além da dimensão dos Fractais, outras duas das suas principais propriedades são a autossimilaridade e a complexidade infinita. Que segundo Miranda *et al.* (2008), autossimilaridade é quando uma parte, de uma figura ou de um contorno, pode ser vista como uma réplica do todo, numa escala menor e a complexidade infinita é quando se executa um determinado procedimento, e no decorrer da mesma encontra-se como sub-procedimento o próprio procedimento anteriormente executado, destacando que em um único Fractal essa sucessão de processos é infinita.

Dessa forma, o estudo desses objetos geométricos é denominado a Geometria Fractal, que está diretamente ligada à uma ciência chamada *CAOS,* que segundo Barbosa (2005, p. 4):

> As estruturas fragmentadas, extremamente belas e complexas dessa geometria, fornecem uma certa ordem ao Caos, razão de ser, às vezes, considerada como a sua linguagem, que busca padrões dentro de um sistema por vezes aparentemente aleatório.

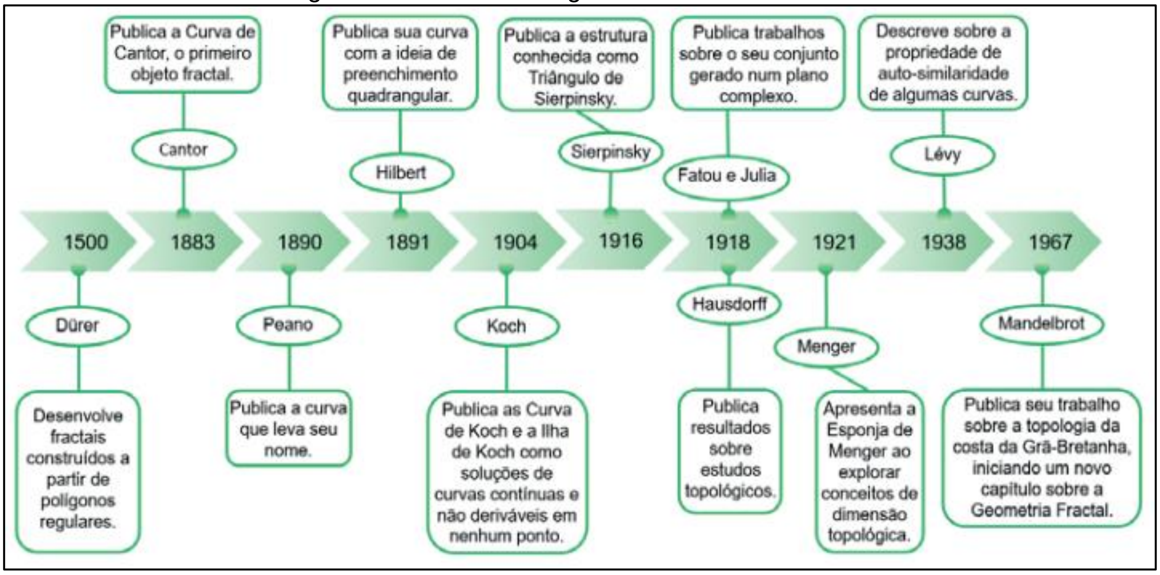
Assim, a partir de diferentes estudos nas áreas da saúde e na natureza, eram buscadas diversas ligações entre diferentes irregularidades, para a descoberta de surpreendentes ordens em meio ao caos, que dentro de sua complexidade infinita, garantindo a autossimilaridade, segundo Barbosa (2005) os Fractais revolucionaram a geração e reprodução de imagens, que dentre a vasta variedade de elementos da natureza que nos permeia, a Geometria Fractal proporciona aproximações de representação dessas formas, como por exemplo, continentes e ilhas, costas e montanhas, e etc.

E é a partir do seu deslumbrante senso estético e belo, que nas simetrias e regularidades da sua própria irregularidade que os Fractais contribuem para o processo de ensino e aprendizagem, que a partir da exploração das belezas da Geometria, possibilita o surgimento do prazer e gozo que merecem ser explorados na contemplação de aspectos harmoniosos ou de contrastes na arte, na pintura ou arquitetura, ou na própria natureza.

Diante disso, Barbosa (2005) traz um levantamento dos principais precursores da Geometria Fractal, visto que apesar desta se consolidar a partir dos estudos de Mandelbrot, houveram outros autores que precederam estudos da mesma linha, deixando objetos que hoje são considerados Fractais.

Para isso, apresenta-se na Figura 6 uma linha do tempo cronológica dessas criações, retirada do Caderno Didático de Dimensão Fractal, produzido por Lutz e Leivas (2021).

Figura 6 - Linha cronológica da Geometria Fractal



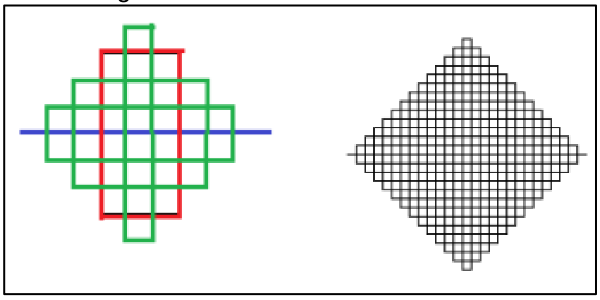
Fonte: Lutz e Leivas (2021, p. 2).

Sendo assim, apresenta-se a seguir alguns Fractais clássicos.

a) Curva de Peano

Que consiste em uma curva que preenche todo o plano (ou um pedaço dele). A partir de um processo iterativo, passa ao menos uma vez, por todos os pontos de um quadrado e esse processo se repete para todo o plano. O que curiosamente faz com que um objeto de dimensão 1 cubra um plano de dimensão 2 (Figura 7).

Figura 7 - Curva de Peano

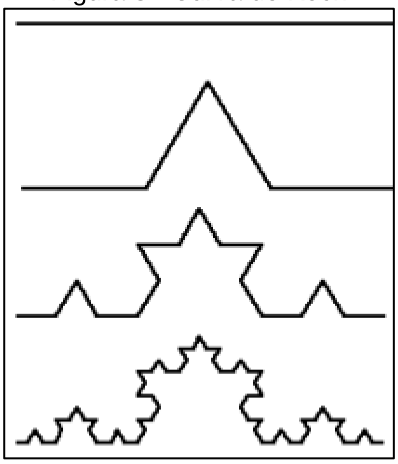


Fonte: Oliveira (2019, p. 17).

b) Curva de Koch

Esta recebe o nome do Matemático Helge Von Koch em 1904, e também é chamada de floco de neve de Koch, devido ao seu formato. O Fractal tem sua construção a partir de um segmento de reta que, em seguida, é dividido em três segmentos iguais. Depois disso, substitui-se o terço médio por um triângulo equilátero, retirando-lhe a base, sendo essa a sua iteração. Dessa forma, o processo deve ser repetido até a formação do Fractal (Figura 8). Miranda *et al.* (2008) ainda relata que a cada iteração substitui-se três segmentos por quatro de igual comprimento, ou seja, o comprimento total é multiplicado por 4/3.

Figura 8 - Curva de Koch

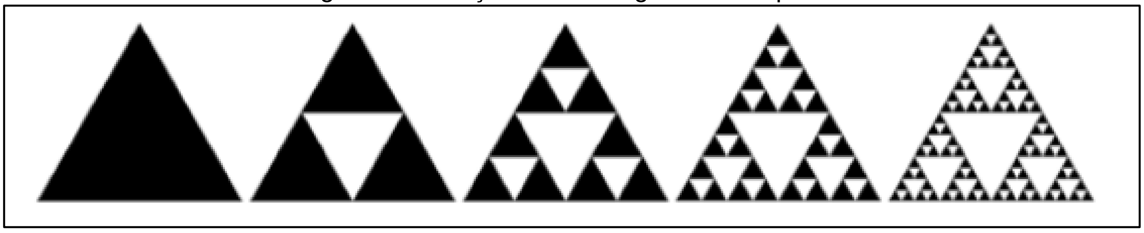


Fonte: Miranda *et al*. (2008, p. 5).

c) Triângulo Sierpinski

Apresentado por Waclaw Sierpinski em meados de 1915, consiste em um triângulo equilátero, que em sua primeira iteração a partir dos pontos médios de seus lados é dividido em outros quatro triângulos, que ao desconsiderar o triângulo central e repetir as iterações nos triângulos restantes, formará o Fractal. Já que a partir de um único triângulo, geram-se, sequencialmente, 3, 9, 27, 81, ... triângulos, a partir de cada iteração, o que deixa cada parte construída cópias perfeitas do triângulo inicial (Figura 9).

Figura 9 - Iterações do Triângulo de Sierpinski

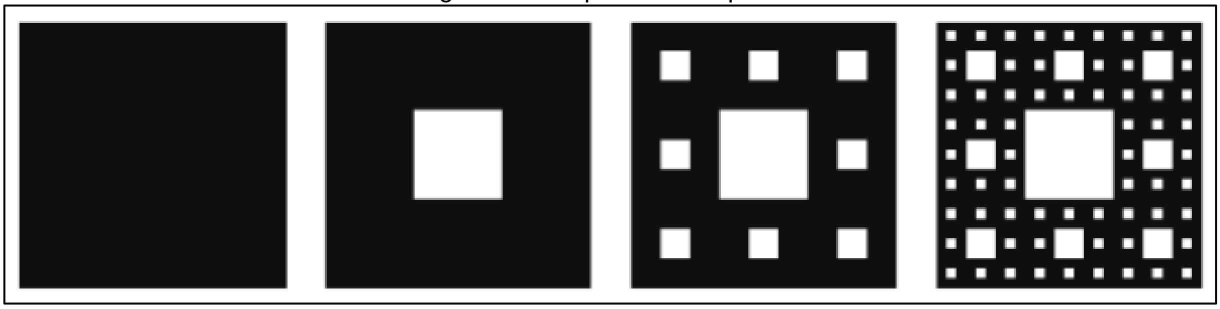


Fonte: Oliveira (2019, p. 21).

d) Tapete de Sierpinski

O Tapete de Sierpinski (Figura 10) é uma variação do Triângulo de Sierpinski, para a sua construção utiliza-se a mesma técnica, no entanto, a figura geométrica da sua formação é um quadrado.

Figura 10 - Tapete de Sierpinski



Fonte: Lutz e Leivas (2021, p. 2).

A sua construção a partir do quadrado principal, consiste em dividi-lo em nove outros quadrados, desconsiderando o central, em seguida repete-se o processo para cada um dos oito quadrados restantes, e assim sucessivamente vai se fazendo as iterações e obtém-se o Tapete de Sierpinski.

Assim, dando continuidade, vindo ao encontro da proposta deste trabalho de proporcionar um ambiente de aprendizagem colaborativa, tem-se a necessidade de explanar a respeito do assunto, sendo o assunto abordado no capítulo a seguir.

2.2 TRABALHO COLABORATIVO

Antes de falar sobre o tema trabalho colaborativo é importante diferenciar a colaboração da cooperação, o que Boavida e Ponte (2002) destacam a partir de Wagner (1997) e Day (1999) que a colaboração apresenta uma particularidade da cooperação, sendo que enquanto a cooperação não possui uma disputa de poderes e os papéis dos envolvidos não são discutíveis, a colaboração promove uma negociação cuidadosa e uma comunicação afetiva, em que as decisões são adotadas em comum acordo, proporcionando uma aprendizagem mútua dos envolvidos, que promove o diálogo profissional.

Destacam ainda, que apesar da cooperação e da colaboração serem muitas das vezes tratadas como sinônimos, até mesmo por trazerem o prefixo *co*, que significa uma ação conjunta, cabe analisar seus significados, *labore* que significa trabalhar e *operare* que significa operar, ou seja, operar vem da ideia de realizar uma operação, simples e definida, já trabalhar refere-se a algo mais complexo, a fim de que necessita-se pensar, refletir, preparar, formar e empenhar-se, o que pode não estar totalmente estabelecido já no início do trabalho, dessa forma trabalhar consiste em um conjunto de operações que podem ir surgindo ou modificando-se ao longo da execução do trabalho. Que nos remete a identificar a colaboração como algo mais complexo do que apenas a simples realização conjunta de diversas operações, a dita cooperação (BOAVIDA; PONTE, 2002).

Dessa forma, a colaboração, ênfase desta pesquisa, pode ser desenvolvida em pares, com equipes diversificadas, quanto maior for a equipe, pode se obter uma gama de resultados que poderão ser descobertos, assim como apesar das dificuldades que um trabalho colaborativo possa gerar, essa equipe ganha com a possibilidade de diferentes olhares, contribuindo para análises interpretativas de uma mesma realidade (BOAVIDA; PONTE, 2002).

A seguir, será apresentado aspectos relativos ao desenvolvimento de trabalhos colaborativos e também das dificuldades e desafios ao se trabalhar colaborativamente.

2.2.1 Desenvolvimento de Trabalhos Colaborativos

Para se trabalhar colaborativamente não basta reunir os interessados em uma mesma sala e esperar que o trabalho ocorra, é um processo que envolve muito mais particularidades. Primeiramente, é preciso que haja um tempo hábil de os envolvidos conhecerem-se, ou até mesmo se já se conhecem, precisam identificar-se com os papéis que estarão exercendo em determinado estudo.

Assim como diz Reason (1988, p. 19) uma investigação cooperativa “é um processo essencialmente emergente”, que surge da necessidade e interesse de duas ou mais pessoas e que vai moldando-se com os demais interessados, tendo em vista que dado participante deve ter um papel mútuo entre dar e receber conhecimento. Pois se este estiver participando de forma que não contribua ou apenas aceite tudo que é proposto, a colaboração de fato não estará ocorrendo. Para uma efetiva colaboração é necessário que todos os envolvidos trabalhem mutuamente, instigando, refletindo, contribuindo, todos precisam ter um interesse em comum, ou um interesse particular que possibilite participar do trabalho conjunto.

No entanto, é importante observar que apesar da necessidade de que todos os participantes trabalhem mutuamente contribuindo e recebendo, destaca-se que isso não deve ocorrer de forma absoluta, e igualitária, pois deve ocorrer de forma espontânea entre os integrantes, assim como as diferentes opiniões, visões, interações levam ao surgimento de outras ideias e que vão se desenvolvendo de acordo com o andamento do trabalho em grupo, assim como fica claro nas palavras de Boavida e Ponte (2002) em que cita Castle (1997) afirmando que a busca por resultados semelhantes em diferentes indivíduos não seja o foco, mas sim a interação entre eles, respondendo ao objetivo comum, e como respondem uns aos outros e aprendem um com os outros, valorizando o relacionamento entre os participantes desse grupo.

Assim como são destacados por diferentes autores, três aspectos fundamentais para o desenvolvimento de trabalhos colaborativos, sendo eles: a confiança, o diálogo e a negociação. A confiança é um dos pontos mais importantes, pois é nela que cada participante deve demonstrá-la tanto em si mesmo, como em seus colegas de grupo, para que se possa expor suas ideias, bem como questionar as dadas por outros colegas, assim deve-se ter uma confiança em que fazendo isso você está igualmente respeitando as ideias opostas bem como sendo respeitado, não tendo receio algum em expor o seu ponto de vista, por mais que este possa também ser confrontado com ideias posteriores e assim juntos cheguem no objetivo maior do grupo (BOAVIDA; PONTE, 2002).

E é nesse ponto que entra o diálogo, ou seja, deve existir essa confiança para que o diálogo se torne possível, já que “[...] à medida que uma voz se entrelaça com outras vozes, a compreensão enriquece-se e a conversação torna-se cada vez mais informada” (BOAVIDA; PONTE, 2002, p. 7) ou seja, é nesse momento que o diálogo se faz presente para que ideias sejam confrontadas, e se modificam para a obtenção de novas/diferentes opiniões.

Por fim temos a negociação, que nada mais é do que a confiança e o diálogo entrelaçados para a negociação, de ideias, métodos, objetivos, enfim que tudo possa ir se modificando conforme o necessário para se chegar no objetivo maior dessa colaboração.

O que fica explícito nas ideias trazidas por Boavida e Ponte (2002) baseados em Friesen (1997) que traz três metáforas para a compreensão do processo de colaboração, ou seja, primeiramente essa colaboração pode ser vista como um *jogo*, em que há um objetivo em comum, para a existência de regras com suas respectivas oportunidades de aprendizagem. Depois tem-se a ideia de *conversão*, onde sugere uma reciprocidade e diálogo entre os envolvidos, excluindo as ideias de hierarquia, mas sim todos como protagonistas. Por fim, a ideia de *luta*, demonstrando o caminho árduo que pode ser um trabalho colaborativo, envolvendo imprevistos e obstáculos, que não asseguram um sucesso, mas que garantem que esse depende dos seus envolvidos.

No entanto, como já dito anteriormente esse processo não é algo tão simples, uma simples reunião ou um simples grupo de estudos, é um processo que deve passar por diferentes fases de negociações e reflexões, sendo que desde o início deve-se ser apresentado o objetivo a se alcançar e assim discutir as potencialidades e tarefas dos diversos membros da equipe para alcançá-lo, destacando que não deve ser algo hierarquizado e imposto, todos os envolvidos devem trabalhar em conjunto com suas diferentes contribuições, sendo que as tomadas de decisões, devem ocorrer mutuamente partindo de todos os participantes, estabelecendo assim um plano geral de trabalho, visto que o trabalho de forma colaborativa não é algo fixo, mas sim modificável, conforme as necessidades que venham surgir ao decorrer das investigações.

Trazendo assim, segundo as experiências de Hookey, Neal e Donoahe (1997) cinco passos iniciais para a estruturação de um trabalho colaborativo:

1. Iniciar uma relação de trabalho, o que inclui a negociação de como, porque e quando trabalhar em conjunto;
2. Determinar propósitos vantajosos para o trabalho em comum;
3. Estabelecer contextos de apoio, que passa, nomeadamente, por negociar apoios junto das direções das escolas;
4. Manter uma relação de trabalho, o que requer enfrentar ambiguidades e negociar questões que surjam durante o trabalho conjunto;
5. Expandir os propósitos iniciais do trabalho, de modo a permitir diferentes possibilidades de desenvolvimento profissional individual.

Dessa forma, encaminha-se no subcapítulo a seguir as possíveis dificuldades que podem ocorrer no desenvolvimento de um trabalho colaborativo.

2.2.2 Dificuldades nos processos colaborativos

Como já mencionado na sessão anterior, trabalhar colaborativamente não visa apenas investigação a serem feitas em grupos, é algo bem mais complexo que por todas as suas características já apresentadas trazem riscos e dificuldades para que esse processo de fato ocorra.

Um dos primeiros pontos a gerar esses empasses é a imprevisibilidade, como já afirmado é um processo que pode e deve ser modificado conforme as necessidades que vão surgindo, justamente por essa imprevisibilidade do que se vai encontrar e de que rumo essas investigações vão tomar, assim, os processos colaborativos são vistos como:

> Um processo dinâmico, criativo, mutável, onde por diversas vezes é preciso parar para pensar e, se necessário, reajustar o rumo. Estes reajustamentos de rumo podem requerer modificações nos papéis dos participantes, que têm, muitas vezes, de ser re-negociados durante o desenvolvimento do projeto (BOAVIDA; PONTE, 2002).

Outro ponto trazido pelos autores é o saber gerir a diferença, pois é necessário que dentro do processo se saiba usufruir das necessidades de cada participante, o que dificulta principalmente em grupos formados por envolvidos de diferentes instituições, em que surge a necessidade de cada um saber se relacionar e muitas vezes abrir mão de costumes e crenças antigas. Para que, além de cumprir com as suas próprias necessidades, chegue-se ao objetivo maior do grupo.

Em terceiro lugar tem-se que saber gerir os custos e benefícios, salientando as particularidades e necessidades que surgem de cada indivíduo participante, nos remete a saber distinguir o que pode ser aproveitado e como aproveitar, para que as necessidades de todos estejam interligadas e visando o objetivo maior do grupo de pesquisa. Sabendo diferenciar o que realmente contribui para a investigação, mas que também não ocorra a exclusão de um determinado participante por suas observações não serem consideradas tão relevantes para dado momento da pesquisa.

Por fim, deve-se estar atento em relação à autossatisfação confortável e complacente e ao conformismo, já que cabe destacar que os processos colaborativos não precisam necessariamente emergir para o desenvolvimento de novos conceitos, mas também para refletir e reforçar pontos de vista e práticas já existentes.

Com isso, Boavida e Ponte (2002) nos faz refletir o desenvolvimento mútuo da colaboração e da negociação, destacando a iniciativa de um trabalho colaborativo, como uma estratégia real para a busca de novos conceitos gerados da incerteza, mudanças e complexidades do nosso mundo atual.

Dessa forma, aborda-se na sessão seguinte aspectos relacionados aos desafios da educação contemporânea, e o uso das tecnologias digitais relacionadas as metodologias ativas, como ferramenta potencializadora para o processo de ensino e aprendizagem.

2.3 DESAFIOS DA EDUCAÇÃO CONTEMPORÂNEA

A educação no século XXI encara muitos fatores que sugerem a necessidade de se repensar as práticas pedagógicas, sendo entre eles: a complexidade e a diversidade do mundo contemporâneo, transições aceleradas, rupturas digitais, avanços tecnológicos, aceleração do tempo, o grande volume de informações, e mudanças em níveis e campos diversos. O que segundo Margaret Mead (1968), citada por Petrillo, Melo e Pontes (2019, p. 30) diz que “[...] chegamos ao ponto em que temos de educar pessoas naquilo que ninguém sabia ontem, e prepará-las para aquilo que ninguém sabe ainda o que é, mas que alguns terão que saber amanhã". O que também vem de encontro com a fala de Perrenoud (1999) também citado pelos autores, a qual coloca a escola como uma promovedora de ferramentas para dominar a vida e compreender o mundo. Diante dessas colocações, nos faz refletir sobre uma necessidade de décadas atrás que hoje está ainda mais presente, diante das constantes mudanças desse mundo contemporâneo.

Assim, o processo de ensino e aprendizagem deve superar as barreiras da transmissão de conteúdos, em métodos em que o professor só fala, com aula explicitamente expositivas e transmissíveis, onde o aluno apenas recebe e reproduz, o que não possibilita o seu desenvolvimento intelectual de forma que construa de fato a sua aprendizagem e desenvolva o seu conhecimento. Dessa forma sugere-se um processo que possibilite a invenção e a descoberta, despertando no aluno a motivação para participar desse processo, para que haja interação, trocas de experiência, que desenvolva a capacidade de pensar, de aprender a aprender e também o pensamento crítico reflexivo.

O que Petrillo, Mello e Pontes (2019) deixa explícito o papel crucial do professor nesse processo de ensino e aprendizagem que está dentro de um contexto em que se modifica, evolui, retrocede, enfim, de uma constante mudança que ocorre a cada instante, sendo assim um grande desafio, tanto ao processo quanto aos docentes e discentes, visto que para todos o mundo e a vida fora da escola está em constante transformação, com muitas informações novas e meios diversificados de acessos a essas informações em praticamente todos os lugares, o que sugere mais uma atenção, já que o aluno tem acesso a essas informações por diferentes métodos, meios e a qualquer momento, portanto o ambiente da escola tem que ser algo convidativo e que possibilite também essas descobertas, pois não surge o interesse ao aluno buscar aquilo que ele já tem nas ruas ou até mesmo em casa.

Assim como, os autores ainda trazem que na última década o processo de ensino e aprendizagem brasileiro após sofrer diversas críticas pelo método transmissivo de conhecimentos, começa a impor novos paradigmas, como o surgimento das novas tecnologias e estratégias de ensino baseadas na colaboração. O que remete a um processo de ensino e aprendizagem interativo, onde também o docente deixa de ser o detentor do saber, mas sim um mediador desse processo.

No entanto, evidencia-se a necessidade de alguns métodos de ensino, o que não deve ocorrer é a detenção de apenas um método como verdade absoluta, o que fica claro nas palavras de Petrillo, Mello e Pontes (2019, p. 15):

> [...] Assim, por exemplo, existem momentos em que o processo de ensinar onde tudo que se requer é transmitir informações, e outros, em que certos automatismos devem ser fixados pelo aluno para a execução de sequências rígidas de operações. O que não se pode é perder de vista o objetivo fundamental da ação educativa, que consiste em desenvolver a personalidade integral do aluno, sua capacidade de pensar e raciocinar, assim como seus valores e hábitos de responsabilidade, cooperação, etc.

Portanto, para que esse processo de ensino e aprendizagem de fato ocorra necessita-se não apenas os conhecimentos específicos, mas também atualizações constantes das abordagens dos conteúdos e das novas maneiras didáticas de ensiná-los (ALMEIDA; PIMENTA, 2009). Sendo assim, deve-se adequar métodos que visem uma educação transformadora, ou seja, uma educação capaz de atender os desafios contemporâneos e, ao mesmo tempo, tratar alunos diferentes com suas diferentes formas de aprendizagem, já que as pessoas são distintas assim como suas competências.

O que sugere o uso de um modelo pedagógico que inclua o pluralismo metodológico, já que os processos de ensino-aprendizagem são altamente complexos e envolvem mudanças constantes, e múltiplos saberes. Assim, deve-se destacar as diferenças encontradas em sala de aula, seja em preferências e motivações dentro ou até mesmo fora de sala, o modo e estilo de aprendizagem, como também as habilidades mentais, nível e ritmo de aprendizagem de cada um, o que tornam o processo de aprendizagem um desafio para integrar e utilizar métodos que atinjam a todos os seus alunos e não apenas aqueles que têm sua aprendizagem designada pelo único método adotado, levando em consideração as diferenças cognitivas, emocionais e motivacionais de cada aluno. O que também sugere o uso de metodologias ativas nos processos de ensino e aprendizagem, as quais serão discutidas na sessão seguinte.

2.3.1 Metodologias Ativas

As Metodologias Ativas surgem na década de 80, quando a escola sentia a necessidade de formar um aluno com um papel mais ativo e proativo, comunicativo, investigador e responsável por seu processo de aprendizagem. Dessa forma, tais metodologias, consistem em práticas docentes em que os professores deixam de ser seres transmissores de aprendizagem para mediadores da aprendizagem, onde proporcionam aulas desafiadoras e significativas, em um processo mútuo de colaboração entre alunos e professores. Assim, como entende-se por Metodologias Ativas, aquelas que favoreçam em todos os sentidos, que seja possível observar, discutir, testar, experimentar, questionar, entre outros (BARBOSA; MOURA, 2013).

Sendo assim, alguns dos principais benefícios das metodologias ativas de ensino e aprendizagem são o desenvolvimento da autonomia do aluno, o rompimento com o modelo tradicional, o trabalho em equipe, a integração entre teoria e prática, o desenvolvimento de uma visão crítica da realidade e o favorecimento de uma avaliação formativa.

Contudo, vale ressaltar que há alguns desafios a serem enfrentados, sendo um dos principais, garantir a formação dos educadores que farão o uso dessas metodologias, assim como a articulação entre as diferentes áreas do conhecimento, e a mudança dos métodos tradicionais, destacando a resistência à mudanças, pela acomodação dos profissionais e até mesmo dos alunos por julgarem a falta de interesse do professor, quando estes propõem atividades tendo os alunos como protagonistas, os alunos ainda esperam que os educadores ditem as regras e conduzam o processo de ensino.

Nesse contexto, aparecem as Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) como suporte para introdução desses métodos no processo de ensino e aprendizagem. O que vale ressaltar é que não apenas devemos incluí-las nas aulas e esperar que os alunos saiam utilizando, apenas reproduzindo o que é proposto, mas sim que as tecnologias sejam inseridas de forma criativa e planejada de acordo a alcançar os objetivos esperados em determinadas atividades.

Contudo, se faz necessário sabermos do que se trata as TIC de fato, já que ao falarmos em tecnologias, logo vem em mente eletroeletrônicos de alto nível, os mais modernos encontrados no mercado, quando na verdade as tecnologias estão até mesmo no lápis em que os alunos utilizam para escrever num papel. Visto que, a tecnologia caracteriza-se como métodos, técnicas, algo que vem para facilitar processos e atividades cotidianas, das mais simples, até as mais complexas. Ressaltando a importância de se conhecer as tecnologias que serão empregadas para o desenvolvimento de cada atividade, a fim de que essa seja utilizada de maneira eficaz para o processo de ensino e aprendizagem.

O que vemos hoje são alunos conectados o tempo todo, seja para conversar, se relacionar, ler, estudar, jogar ou simplesmente navegar pelas redes sociais, então não é dentro de sala de aula que devemos inibir o uso dessas tecnologias, mas sim aliá-las ao nosso favor como educadores, inserindo-as no contexto educacional e aproximando o aluno das tecnologias, mas não perdendo o foco do ensino (GOUVEIA; MATOS, 2019). Aí entra o grande desafio, já que não devemos apenas focar nos conteúdos previstos nos documentos curriculares, não devemos também apenas focar no agora e no que vem surgindo, mas sim saber utilizar desses meios para que uma educação de qualidade, convidativa e participativa seja ofertada.

Dessa forma, identifica-se as TIC como: "um conjunto de tecnologias das telecomunicações, computacional e das mídias eletrônicas, utilizadas como instrumento na aplicação de diferentes metodologias, para resolução de problemas" (GOUVEIA; MATOS, 2019, p. 58). Sendo então um recurso facilitador e mediador dos nossos processos cotidianos. Já que, o foco dessa investigação é a educação, se traz também a definição das TIC pelo Ministério da Educação, por meio do Inep que diz:

> Recursos didáticos constituídos por diferentes mídias e tecnologias, síncronas e assíncronas, tais como: ambientes virtuais e suas ferramentas; redes sociais e suas ferramentas; fóruns eletrônicos; blogs; chats; tecnologias de telefonia; teleconferências; videoconferências; TV; rádio; programas específicos de computadores (softwares); objetos de aprendizagem; conteúdos disponibilizados em suportes tradicionais ou em suportes eletrônicos (BRASIL, 2018).

Ressalta-se as TIC não como um método de aprendizagem, mas sim como recursos pedagógicos de suporte aos métodos escolhidos. O que nos leva a repensar o ambiente de formação, promovendo um espaço de interação para explorar os recursos oferecidos (GOUVEIA; MATOS, 2019). E assim, felizmente podemos destacar que o Brasil, apesar de lentamente vem apresentando políticas públicas de inclusão das TIC nos métodos educacionais.

Diante disso, cabe falar da gamificação, que da mesma forma é considerada uma ferramenta potencializadora dos processos de ensino e aprendizagem.

O que cabe primeiramente, falar sobre os jogos, que segundo Tolomei (2017) são uma criação humana que envolve conceitos socioculturais, visto que apresentam características da época nos quais são criados e estão em constantes transformações, evoluindo de gerações em gerações.

Sendo assim, o autor ainda define o jogo como:

> [...] uma atividade ou ocupação voluntária, exercida dentro de certos e determinados limites de tempo e espaço, segundo regras livremente consentidas, mas absolutamente obrigatórias, dotado de um fim em si mesmo, acompanhado de um sentimento de tensão e alegria (TOLOMEI, 2017, p.4).

Já o jogo digital é definido por Prensky (2012), como um subconjunto de diversão e de brincadeiras, mas com uma estruturação que contém um ou mais elementos, tais como: regras, metas ou objetivos, resultado e feedback, conflito, competição, desafio, oposição, interação e representação.

Dessa forma, esses elementos foram ligados a gamificação que é considerada um processo emergente, que viabiliza ações e resoluções de problemas, bem como potencializa os processos de ensino e aprendizagem em diferentes áreas do conhecimento. Já que, a gamificação implica na utilização desses elementos, em atividades que não são diretamente ligadas aos games, promovendo a mesma interação e motivação do que quando se há um envolvimento com os jogos.

Destaca-se que um dos objetivos principais da gamificação é desenvolver essa resolução de problemas em games, não com o foco de apenas resolver ou jogar por jogar, mas que essa prática possibilite a descoberta de resoluções que possam ser adotadas ao resolver problemas da vida real.

Assim, Fardo (2013) classifica a gamificação como um processo emergente que viabiliza a sua aplicação em diversos campos da humanidade, ganhando um espaço entre as atuais gerações que cresceram interagido com esse tipo de entretenimento.

Destacando a área educacional como um propício ambiente para o seu desenvolvimento. Já que a partir da gamificação os envolvidos sentem-se mais facilmente engajados, sociabilizados, motivados e tornam-se mais abertos à aprendizagem de um modo mais eficiente. Indo de encontro com a necessidade dos sistemas educacionais, sejam por parte dos alunos ou de professores, que não se sustentam mais somente com métodos tradicionais (FARDO, 2013; TOLOMEI, 2017).

Assim, Silva *et al*. (2018) classifica a gamificação não como uma metodologia ativa, mas como uma estratégia de aprendizagem ativa nos processos de ensino e aprendizagem, assim como diz:

> A gamificação como estratégia de aprendizagem ativa consiste na utilização de elementos, não para jogar, mas para motivar, engajar, envolver, aumentar a atividade, promover a aprendizagem, resolver problemas, desenvolver habilidades e motivar a ação para alcançar objetivos específicos (SILVA *et al*., 2018, p. 783).

Logo, identifica-se ainda princípios de aprendizagem que segundo Giardinnetto e Mariani (2005) desenvolvem-se a partir da experimentação da gamificação, sendo eles:

1. Identidade: Aprender alguma coisa em qualquer campo requer que o indivíduo assuma uma identidade e compromisso de ver e valorizar o trabalho de tal campo.
2. Interação: Nos jogos nada acontece sem que o jogador tome decisões e aja. E o jogo, conforme as atitudes do jogador, oferece feedbacks e novos problemas. Em jogos online, os jogadores interagem entre si, planejando ações e estratégias, entre outras habilidades.
3. Produção: Nos jogos, os jogadores produzem ações e redesenham as histórias, individualmente ou em grupo.
4. Riscos: Os jogadores são encorajados a correr riscos, experimentar, explorar; se erram, podem voltar atrás e tentar novamente até acertar.
5. Problemas: Os jogadores estão sempre enfrentando novos problemas e precisam estar prontos para desenvolver soluções que os elevem de nível nos jogos.
6. Desafio e consolidação: Os jogos estimulam o desafio por meio de problematizações que “empurram” o jogador a aplicar o conhecimento atingido anteriormente.

No entanto, cabe ressaltar que as habilidades aprendidas e vivenciadas com os jogos ainda não são trabalhadas diretamente nas escolas, o que deixa o uso da gamificação nos processos de ensino e aprendizagem algo desafiador, já que a transmissão de conhecimentos nos métodos tradicionais de ensino, ainda são relutantes por professores que não compreendem o avanço tecnológico das atuais gerações, sendo que hoje esses métodos tradicionais são distantes da realidade dos alunos que tem acesso ao que querem a hora que querem, em diferentes meios.

Portanto, os games são ferramentas que podem se aliar a esse momento, já que o prazer e o engajamento andam lado a lado com a aprendizagem, visto que, Tolomei (2017) retrata que a diversão permite o aprender em um contexto que não há pressão ou imposição, levando aos alunos atingirem melhores resultados na construção do seu próprio conhecimento, de forma espontânea.

Destacando ainda, que o ato de jogar reflete não somente na aprendizagem, como em aspectos cognitivos, culturais, sociais e afetivos. Já que, por meio do jogo é possível trabalhar em equipe, ser colaborativo e tomar decisões convincentes. E nesse sentido, identifica o uso da gamificação pode ser utilizada na seleção de elementos agradáveis e divertidos dos jogos correlacionados com o ensino, de forma que seja articulado cuidadosamente, para que de fato contribua com os processos de ensino e aprendizagem.

Dessa forma, buscando utilizar a temática Fractais para abordar conceitos geométricos por meio de estratégias ativas e colaborativas, apresenta-se no capítulo a seguir a proposta de atividades didáticas para os anos finais do Ensino Fundamental.

3 ATIVIDADES DIDÁTICAS: FRACTAIS PARA O ENSINO FUNDAMENTAL

O presente capítulo apresenta a proposta de aplicação do tema Fractais no Ensino de Geometria com um grupo de alunos dos anos finais do Ensino Fundamental, os quais participaram das atividades no turno inverso da escola. Essas atividades foram desenvolvidas a partir de uma sequência didática elaborada pela pesquisadora. Entende-se por sequência didática “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos” (ZABALA, 1998, p.18).

Ainda para o autor, uma sequência didática é estruturada da seguinte forma: a **apresentação do problema** por parte do docente; a **busca de soluções**; a **generalização,** quando o professor auxilia os alunos a formalizar os conceitos encontrados; a **aplicação** referente ao desenvolvimento dos conceitos em diferentes atividades; a **exercitação** relativa à realização dos exercícios, utilizando os algoritmos; e a **avaliação** em que os alunos são avaliados e recebem o *feedback* de seus resultados.

Assim, seguindo a estruturação da sequência didática foram desenvolvidas diversas atividades que se distribuíram em 9 momentos. No entanto, antes de iniciar as atividades, foi proposto aos alunos que respondessem ao questionário inicial (Apêndice D) para que pudesse se compreender e caracterizar o grupo de alunos participantes. Logo, segue a descrição e organização da sequência didática, utilizada para o desenvolvimento dessa investigação.

3.1 PRIMEIRO MOMENTO - APRESENTAÇÃO DA TEMÁTICA FRACTAIS

A professora pesquisadora apresentou ao grupo de alunos, com o auxílio do Programa *PowerPoint*, o tema Geometria Fractal (Apêndice E), explorando sua origem e seus principais conceitos, ou seja, a autossimilaridade, sua complexidade infinita e a dimensão de um Fractal, os quais são definidos por Paraná (2011, p. 4), como:

> A autossemelhança é a simetria observada em diversas escalas. Caracteriza-se por cada pequena porção do fractal que pode ser vista como

> uma réplica de todo o fractal numa escala menor. A complexidade infinita está relacionada com o fato de o processo gerador dos fractais ser recursivo, tendo um número infinito de iterações. A dimensão dos fractais, ao contrário do que sucede na geometria euclidiana, não é necessariamente uma quantidade inteira. Com efeito, ela pode ser uma quantidade fracionária. A dimensão de um fractal representa o grau de ocupação deste no espaço, que tem a ver com o seu grau de irregularidade.

Além de apresentar alguns exemplos de Fractais, em seguida encaminhou a primeira atividade ao grupo, que visando uma aprendizagem desenvolvida em um ambiente colaborativo, os alunos foram instigados a pesquisarem e se aprofundarem a respeito da temática Fractal, pesquisando sobre os seus principais precursores, atividade que ocorreu da seguinte forma:

1. Dividiu-se os alunos em grupos de no máximo 3 estudantes;
2. No laboratório de informática da escola, pesquisaram utilizando a *internet* a biografia e o objeto de estudo apresentado pelos primeiros precursores dos Estudos de Fractais.
3. Elaboraram para entregar à professora um relatório da sua pesquisa, utilizando o *software Word*.
4. Organizaram uma apresentação para discutir o que foi encontrado com o grande grupo.

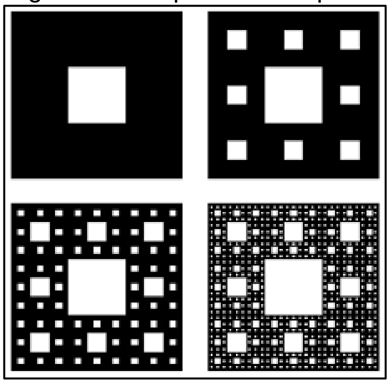
Assim, após o momento de pesquisa, foi mediado pela professora pesquisadora um debate sobre os aspectos pesquisados pelos alunos, cada grupo teve espaço para expor o que encontrou e juntos concordarem ou discordarem dos conceitos encontrados, a fim de identificarem com clareza o que são Fractais e a sua relação com a Geometria. Para esse momento os alunos utilizarão o aparelho televisor da sala de aula para apresentar imagens, vídeos e conceitos encontrados na sua pesquisa que queriam discutir ou demonstrar aos demais colegas.

Neste momento foram conhecidos diferentes exemplos de Fractais, visto que cada precursor apresenta o seu Fractal estudado, dessa forma foi proposto um momento em que os alunos pudessem compreender os diferentes Fractais apresentados e relacioná-los ao seu autor. E a partir dos exemplos apresentados pelos alunos a professora pesquisadora criou um *game* utilizando o *site Kahoot* para fixar os conhecimentos adquiridos pelos alunos até o momento.

Destaca-se ainda, que tendo em vista as atividades posteriores que trabalharão os Fractais de Sierpinski, a professora deu ênfase nesse autor, complementando o que os alunos apresentaram, de modo que se identifique tanto o

Tapete como o Triângulo de Sierpinski. Utilizando imagens de exemplo que apresentou a diferença entre suas iterações para a sua criação (Figura 11) e que os alunos pudessem compreender o passo a passo da sua construção.

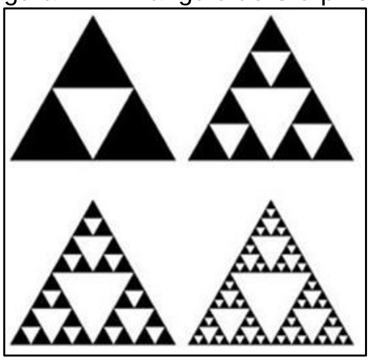
Figura 11 - Tapete de Sierpinski



Fonte: Bemfica e Alves (2011, p. 18).

Outro exemplo apresentado foi o Triângulo de Sierpinski, como o nome já diz, também apresentado por Sierpinski, o Fractal é formado a partir de triângulos equiláteros, sendo que a cada iteração surgem outros quatro triângulos, e assim a partir de cada um surgem mais quatro triângulos, o que continua sucessivamente em sua infinitude, caraterística dos Fractais. Na Figura 12 pode-se observar a sua evolução em quatro iterações.

Figura 12 - Triângulo de Sierpinski



Fonte: Bemfica e Alves (2011, p. 12).

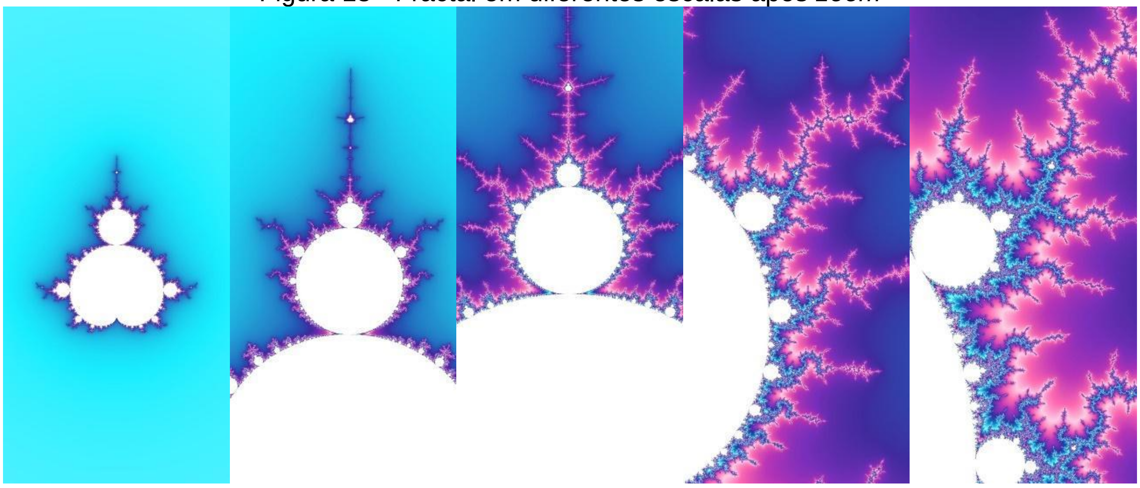
Sendo assim, a partir do primeiro momento o grupo sabia identificar Fractais entre figuras e diferenciar os Fractais criados pelos primeiros precursores dos estudos de Fractais.

3.2 SEGUNDO MOMENTO – EXPLORANDO FRACTAIS EM APLICATIVOS

Para este momento, a professora pesquisadora auxiliou aos alunos para baixarem em seus *smartphones* o aplicativo *Fractal Eye - Criação de Imagem Fractal,* disponível na *play store*, loja de aplicativos para android, o aplicativo permite a visualização de Fractais em seus aspectos de autossimilaridade, complexidade infinita e dimensão, já que o aluno pode intervir alterando as coordenadas e também dar zoom na tela, função que mostra a infinitude dos Fractais, pois o aluno pode passar minutos nessa função e sempre encontrará os Fractais (Figura 13). Acompanhe suas principais funções:

- Explorar Fractais populares como o Mandelbrot Set e o Burning Ship!
- Aumentar o zoom em um fator de 1.000.000.000.000 (1 trilhão) em vários Fractais!
- Criar imagens impressionantes com detalhes complexos!
- Fazer alterações precisas na forma Fractal, textura, cor, posição e muito mais!
- Salvar imagens diretamente em sua galeria para compartilhar ou usar como papel de parede!

Figura 13 - Fractal em diferentes escalas após *zoom*



Fonte: a pesquisa.

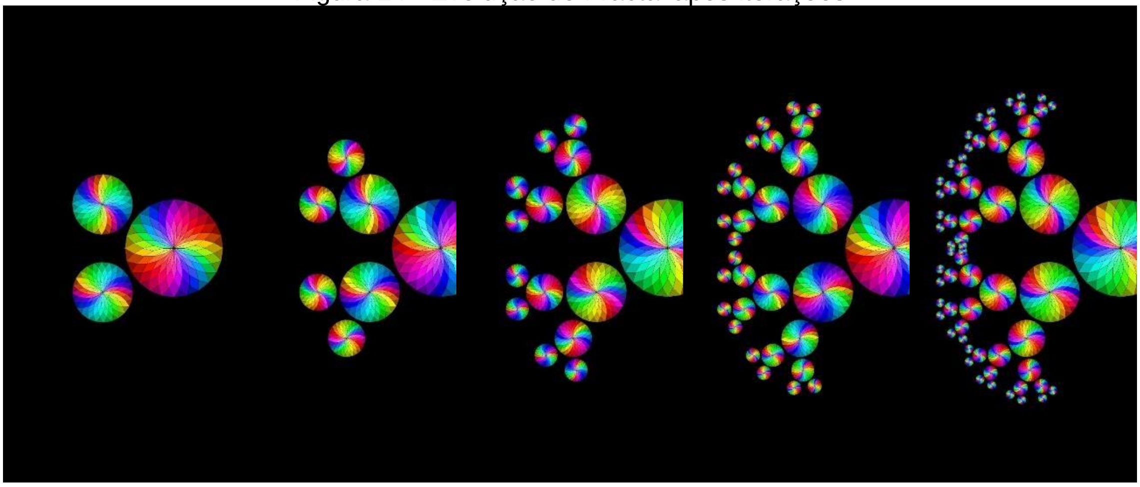
Veja, que como mencionado o aplicativo permite que o aluno dê zoom e perceba as características fundamentais dos Fractais, já que a cada zoom os Fractais vão aparecendo dentro de sua autossimilaridade e infinitude (Figura 13) assim como dita sua definição. Portanto esse aplicativo foi utilizado para visualização das representações de Fractais e consolidação dos conceitos abordados.

Outro aplicativo utilizado, foi o *Fractal Creator,* também disponível para android foi usado para a construção de Fractais, tendo que suas principais funções permitem:

- Criar Fractais com qualquer imagem da galeria.
- Colocando cópias menores de uma imagem em torno de si mesma e, em seguida, repetindo o mesmo processo em cada cópia pequena, surgem formas lindamente complexas.
- Gravar o movimento dos Fractais criados.
- Ajustar e animar os parâmetros para transformar seus designs.

Confira na Figura 14 um exemplo de criação de Fractal, utilizando o *app*.

Figura 14 - Evolução do Fractal após iterações



Fonte: a pesquisa.

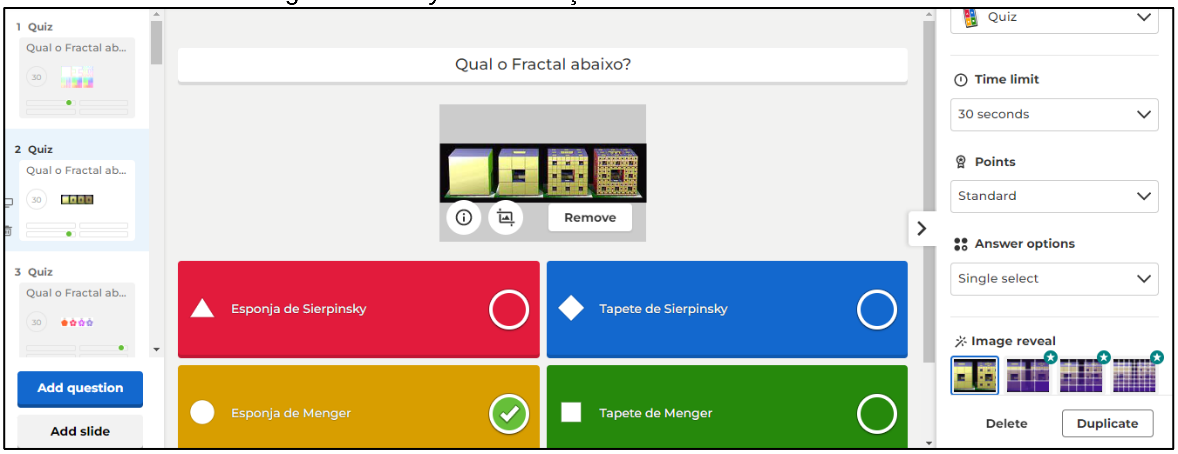
Tendo em vista, que para este momento a atividade visou explorar e fixar os conceitos referente aos Fractais abordados até o momento, de forma prática e visual, com a manipulação dos aplicativos. Foi proposto a partir do segundo aplicativo que os alunos criassem o seu próprio Fractal, explorando as possibilidades e recursos oferecidos pelo aplicativo e assim, salvassem a imagem do seu Fractal para arquivar junto das atividades produzidas durante a aplicação da sequência didática.

3.3 TERCEIRO MOMENTO – *GAME* SOBRE FRACTAIS

Para o segundo momento a professora pesquisadora utilizou os dados pesquisados pelos alunos na primeira atividade proposta, para a criação de um *game* que pudesse ser jogado de forma *online*, interativa e ao mesmo tempo fixasse o que já foi abordado até o momento.

Para tal atividade, foi selecionado o *site Kahoot*, de origem norueguesa, como ferramenta tecnológica de interação que aliada aos sistemas de ensino e uso em corporações pretende gerar maior engajamento na aprendizagem. A plataforma disponível em https://kahoot.com/schools-u/ permite a criação de *games* em diferentes formatos, sendo o escolhido para a atividade os *Quizzes* (questões de múltipla escolha), em que apresentou se figuras de Fractais e os alunos deveriam identificar o seu respectivo nome ou autor (Figura 15), bem como posteriormente apresentou-se uma série de *True* e *False* (Verdadeiro ou Falso) no qual os alunos deveriam analisar a imagem apresentada e julgá-la como fractal ou não, ou seja, deveriam marcar verdadeiro se acreditavam que a imagem correspondia a um Fractal e falso se a imagem não correspondesse ao Fractal.

Figura 15 - Layout de criação das atividades no *Kahoot*



Fonte: a pesquisa.

Como é visto na Figura 15, é possível organizar as questões com diferentes alternativas, escolher o tempo máximo para responder a cada questão, a quantidade de pontos e a forma como será apresentado em jogo. Logo, a atividade teve por objetivo fixar os conhecimentos já adquiridos até o momento, e verificar se houve a compreensão dos alunos em relação às características de um Fractal, visto que, todas as imagens apresentadas na atividade de verdadeiro ou falso possuíam alguma regularidade, mas nem todas em sua infinitude, não correspondendo as características de um Fractal.

Tendo visto, que a cada etapa do jogo foi gerando um *ranking* levando em consideração todos os meios atribuídos na construção da atividade (resposta correta, tempo, pontuação), vale ressaltar, o uso do *Kahoot* como um *game* que estimula a curiosidade e o entusiasmo em participar da atividade, que em forma de competição deixa o ambiente participativo e atrativo, espontaneamente criando um laço de aprendizagem e diversão.

3.4 QUARTO MOMENTO - CONSTRUÇÃO DO TAPETE DE SIERPINSKI

Nesse momento, foi proposto aos alunos a construção do Tapete de Sierpinski, Fractal já apresentado aos alunos no primeiro momento da sequência.

Essa atividade teve por objetivo explorar os conceitos geométricos, tais como: quadrados, congruência, retas paralelas e perpendiculares, perímetro e área de quadrados. Assim, foram exploradas as seguintes habilidades previstas pela BNCC para o 6º do Ensino Fundamental:

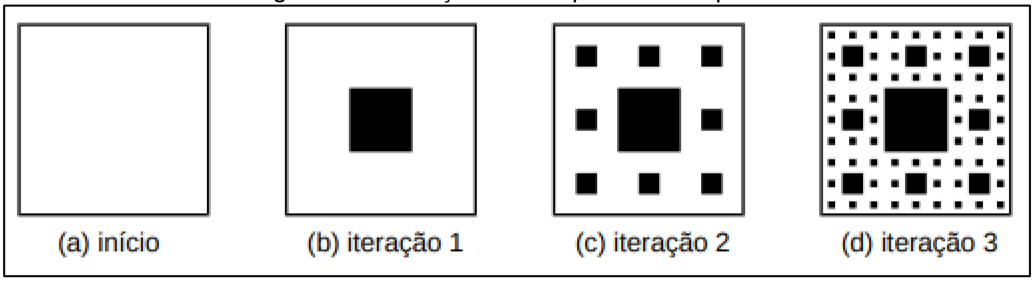
> **(EF06MA19)** Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos. **(EF06MA20)** Identificar características dos quadriláteros, classificá-los em relação a lados e a ângulos e reconhecer a inclusão e a intersecção de classes entre eles. **(EF06MA22)** Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou *softwares* para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros (BRASIL, 2018, p. 303).

Para sua realização utilizou-se: papel sulfite A4, lápis, borracha, lápis de cor, régua e esquadros.

Assim, visando a abordagem colaborativa adotada para o desenvolvimento das atividades, ao em vez de a professora apenas transmitir o que os alunos deveriam reproduzir para a construção do quadrado, foi proposto um momento de descobertas, no qual os alunos foram instigados a refletirem como deveriam agir para realizar as construções necessárias.

Destaca-se que a professora, ainda apresentou algumas alternativas, como o uso da régua e esquadros, de modo que utilizando essas ferramentas geométricas cada aluno conseguisse desenvolver a sua atividade. Para isso, inicialmente foi projetada a imagem do Tapete de Sierpinski (Figura 16), e em seguida utilizando *slides* (Apêndice E) foram abordadas as características dos quadrados, e também de retas paralelas e perpendiculares, itens de fundamental importância para a construção geométrica do Fractal.

Figura 16 - Iterações do Tapete de Sierpinski

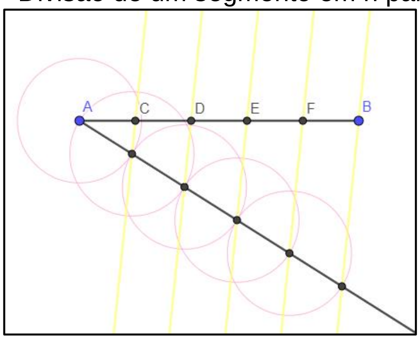


Fonte: Miranda *et al*. (2008, p. 3).

Na seguinte etapa, cada aluno recebeu uma folha em branco e foram instigados a utilizarem o que foi discutido sobre quadrados e os materiais disponíveis para construírem o quadrado inicial conforme iteração “a” da Figura 16. Assim, a professora seguiu mediando as atividades, para que os alunos pudessem desenvolver um trabalho colaborativo de modo que discutissem e tomassem as decisões necessárias para a construção do Fractal em cada passo, até perceberem qual a regularidade da sua criação. Enfatiza-se ainda, que foi solicitado aos alunos que anotassem passo a passo as medidas tomadas em cada etapa da atividade, tendo nesse critério o intuito de formalizar o que foi trabalhado, além de ser um registro importante para análise da atividade desenvolvida.

No entanto, cabe ressaltar a necessidade de abordar com os alunos a divisão de um segmento de reta em *n* partes iguais, tendo em vista que é um caminho viável para a construção do Tapete de Sierpinski. Dessa forma, entende-se por divisão de um segmento de reta em *n* partes iguais, os procedimentos que consistem em dividir uma reta qualquer na quantidade de partes que desejar e estas serem todas iguais (Figura 17).

Figura 17 - Divisão de um segmento em n partes iguais



Fonte: a pesquisa.

Para fazer a divisão de um segmento em n partes iguais como o exemplo da Figura 17 são apresentadas algumas etapas, como:

1. Traçar uma reta que passe por A, e que seja oblíqua em relação ao segmento inicial.
2. Nessa reta, a partir do ponto A, trace 5 partes iguais (as partes em que queres dividir o segmento). Para isso você pode utilizar a abertura de um compasso e a cada ponto marcado ir marcando os demais mantendo a mesma abertura.
3. Una depois o último ponto ao outro extremo do segmento de reta, e trace pelos outros pontos, retas paralelas em direção ao segmento inicial AB, utilizando régua e esquadro.

3.5 QUINTO MOMENTO - CONSTRUÇÃO DO TRIÂNGULO DE SIERPINSKI

Nessa etapa, foi proposto aos alunos a construção do Triângulo de Sierpinski, tal atividade teve por objetivo a exploração de conceitos geométricos, como: ponto médio, retas, triângulos equiláteros, congruência, perímetro e área de triângulos. Assim, foram exploradas as habilidades previstas pela BNCC para o 7º e 8º anos do Ensino Fundamental:

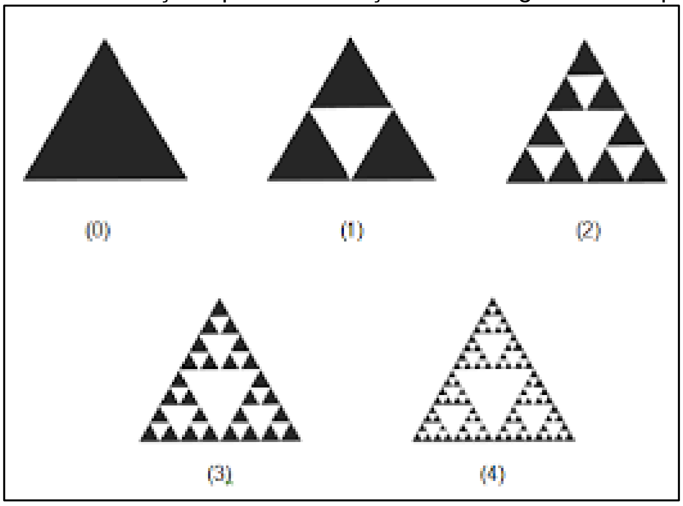
> **(EF07MA24)** Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180° (BRASIL, 2018, p. 309).
> **(EF08MA15)** Construir, utilizando instrumentos de desenho ou *softwares* de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares (BRASIL, 2018, p. 314).

Para sua elaboração foram necessários: papel sulfite A4, lápis, borracha, lápis de cor, régua, compasso e/ou transferidor.

Em um primeiro momento foi apresentado aos alunos os diferentes tipos de triângulos, tendo em vista que o triângulo utilizado para a construção de Sierpinski é um triângulo equilátero, coube à professora mediadora diferenciar os tipos de triângulos, para que ficasse claro aos alunos qual a importância e as características de cada um. Dessa forma, com uma apresentação de *powerpoint* (Apêndice E) foi apresentado imagens dos diferentes triângulos, sendo eles: Triângulos equiláteros, aqueles cujos seus três lados possuem a mesma medida e consequentemente possuem os seus três ângulos também congruentes, Triângulos isósceles, os quais possuem dois lados iguais e também os escalenos que não possuem nenhum lado igual. Ressalta-se aqui, a importância de se trabalhar o conceito congruência, ou seja, palavra técnica utilizada na Geometria para relatar igualdades e semelhanças e que aparece em diferentes contextos da Geometria.

Logo depois, foi apresentada aos alunos a imagem do Fractal (Figura 18) e novamente promovendo o trabalho colaborativo foi proposto que eles tomassem a iniciativa para a construção de um triângulo equilátero, sendo a fase inicial do Fractal, iteração “0” da Figura 18. Para isso, foi ofertado aos alunos as diferentes ferramentas geométricas de desenho, tanto a régua, esquadros, como compasso e transferidor, assim como a demonstração de como utilizá-las.

Figura 18 - Interações para construção do Triângulo de Sierpinski



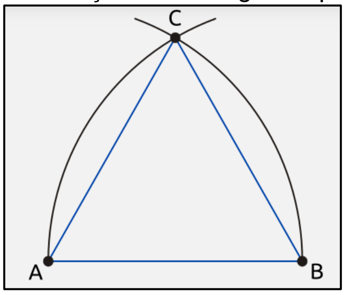
Fonte: Paixão *et al*. (2016, p. 7).

Após os debates, esperava-se que os alunos percebessem que poderiam utilizar os instrumentos oferecidos, como não ocorreu de forma natural, a professora demonstrou no quadro uma das possibilidades de construção (Figura 19), utilizando régua e compasso, conforme os passos:

1. Começa-se a construção com o segmento AB dado, um segmento de reta com uma medida qualquer, ou seja, com a medida que queira para os lados do triângulo.
2. Com a ponta seca do compasso no ponto A e uma abertura igual a AB, traça-se um arco cujo raio será igual à AB.

3. Em seguida, com a ponta seca em B e mesma abertura AB, repete-se o processo anterior, traçando um arco que irá intersectar o primeiro, formando o ponto C.
4. Unindo os pontos AB, BC e AC, obtém-se o triângulo equilátero desejado.

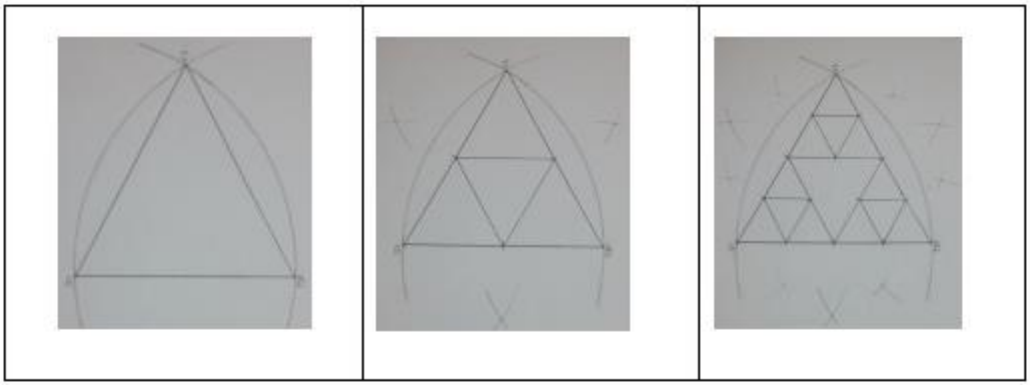
Figura 19 - Construção do Triângulo equilátero inicial



Fonte: a pesquisa.

Dando continuidade, foi questionado aos alunos como fazer a próxima iteração, “1” da Figura 18, destinou-se um tempo para que os alunos discutissem entre si e confiou-se que eles percebessem que precisavam desenhar outro triângulo dentro do obtido anteriormente. Para isso, a professora demonstrou no quadro o conceito de ponto médio, medida que demarca o meio, a metade de um segmento, sendo que a partir dos pontos médios de cada lado do triângulo principal é possível obter o central ligando os seus pontos médios (Figura 20).

Figura 20 - Iterações do Triângulo Sierpinski



Fonte: Paixão *et al.* (2016, p. 5).

Nota-se, que como na Figura 20 há os traços do compasso, que essa é uma possibilidade para o encontro dos pontos médios, basta o aluno repetir o processo inicial de traçar os arcos a partir de cada extremidade dos lados do triângulo, ou ainda os alunos podem utilizar a régua para identificar a medida da lateral e consequentemente utilizar a metade como o ponto médio.

Assim, após essas iterações os alunos já entendem que precisam seguir da mesma forma a cada etapa, para que o Fractal vá se formando dentro de suas características de regularidade e similaridade.

Aponta-se que, assim como na atividade anterior, também foi solicitado que os alunos relatassem o passo a passo adotado para a construção do seu Triângulo de Sierpinski, de forma que possam ser analisadas as diferentes opiniões e métodos utilizados na realização da atividade.

3.6 SEXTO MOMENTO – ANÁLISE DE ÁREAS E PERÍMETROS

Após realizar as atividades do quarto e quinto momento, esperando que os alunos já compreendessem os processos de construção das figuras geométricas estudadas, o quadrado e o triângulo, foi proposto um momento de análise de áreas e perímetros dessas figuras.

Para tal atividade, a professora apresentou aos alunos os conceitos de área e perímetro e especificamente como se calcula cada um para as figuras estudadas.

E assim, medindo o seu Fractal construído cada aluno devereria realizar os cálculos necessários e preencher a tabela de análise (Figura 21), tanto para o Tapete como para o Triângulo de Sierpinski.

Figura 21 - Análise das áreas e perímetros do Tapete de Sierpinski

Iteração	Nº de Quadrados	Medida do Lado	Perímetro do Quadrado	Perímetro Total	Área do Quadrado	Área Total
0						
1						
2						
3						
n						

Fonte: adaptação de Paixão *et al.* (2016).

E assim, foi utilizado o mesmo formato de tabela para o desenvolvimento da análise do triângulo de Sierpinski, bem como em seguida do preenchimento das tabelas foi proposto um momento de discussão a respeito dos valores encontrados e das regularidades que ocorrem com as medidas obtidas a cada iteração dos Fractais.

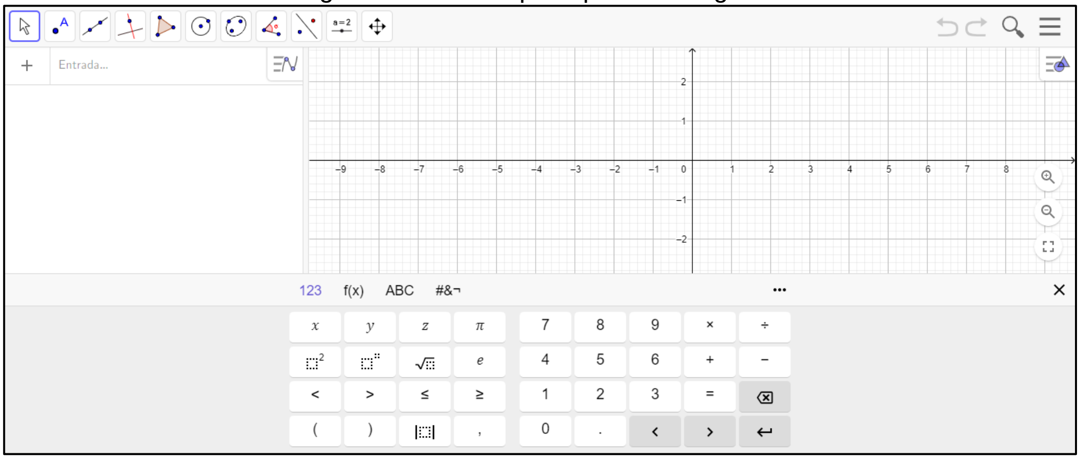
3.7 SÉTIMO MOMENTO – CONSTRUÇÃO DE FRACTAIS NO GEOGEBRA

Neste momento foi proposto aos alunos a construção do Triângulo de Sierpinski com o auxílio do *software* Geogebra, sendo que nesta fase os alunos já conheciam e identificavam as características deste Fractal. Para tal atividade adaptou-se as propostas desenvolvidas por Padilha *et al.* (2012), a qual se deu da seguinte forma:

Com o *software* já instalado previamente nos computadores do laboratório de informática da escola, solicitou-se que os alunos abrissem o programa e lhes foi apresentado as principais funções e janelas deste. Para isso, a professora utilizou o Datashow para que os alunos pudessem acompanhar o manuseio de cada ferramenta.

Assim, abrindo o programa, encontra-se a sua janela inicial (Figura 22), nela tem-se na barra superior a barra de ferramentas, no lado esquerdo o campo “entrada”, abaixo fica a janela de álgebra, no centro se estendendo para a lateral direita temos a janela de visualização, onde temos a malha quadriculada e também os eixos de coordenadas:

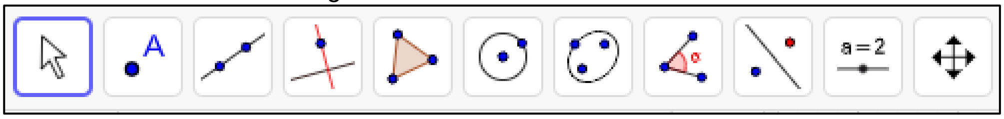
Figura 22 - Janela principal do Geogebra



Fonte: *software* Geogebra, 2022.

Na barra de ferramentas temos 12 janelas (Figura 23), as quais foram explorados pelos alunos, basta clicar com o botão esquerdo do *mouse* para acessar as suas funções, cada item possui um ícone e seu respectivo nome para identificar as suas funções, as quais permitem construir diversos objetos geométricos.

Figura 23 - Barra de Ferramentas



Fonte: *software* Geogebra, 2022.

O campo de entrada permite inserir objetos geométricos por meio de comandos escritos, o que facilita os processos quando se quer exatidão, como por exemplo um ponto em determinado lugar com suas coordenadas específicas.

Já a janela de álgebra serve para verificar os objetos que estão inseridos na janela de visualização, bem como suas informações, logo clicando neles pode-se ocultar ou clicando novamente deixá-los visíveis, como também editar algo que já está construído, para isso deve-se clicar com o botão direito do *mouse* e clicar em propriedades.

Dessa forma, a partir da apresentação do programa deixou-se que os alunos explorassem suas janelas e funções para familiarizar-se com as ferramentas disponíveis.

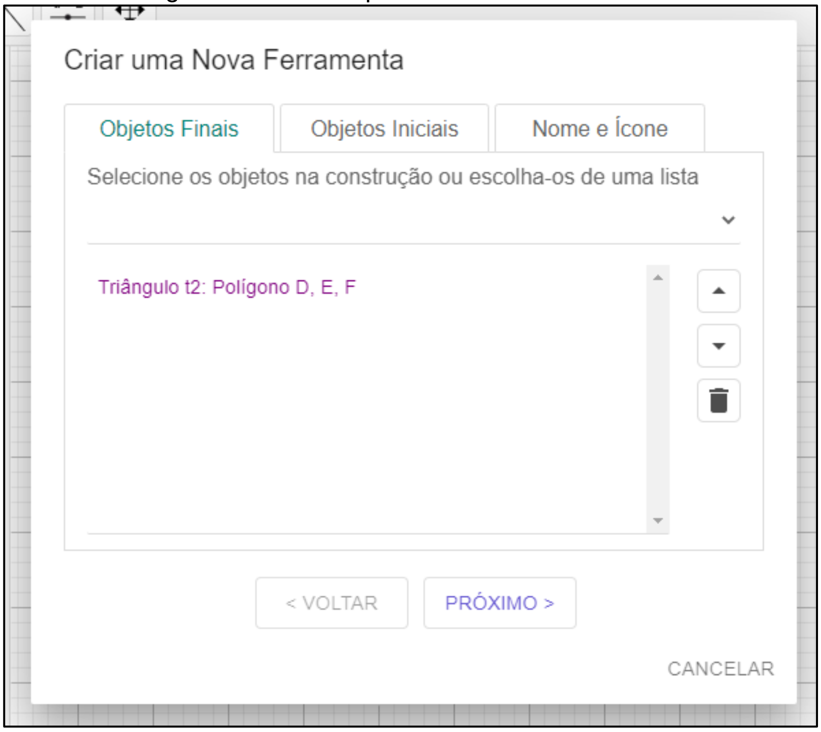
Após esse momento de familiarização com o programa, foi proposto que os alunos criassem o primeiro triângulo para a construção do Triângulo de Sierpinski. E como se trata de alunos do ensino fundamental e de uma ferramenta desconhecida para eles, a professora lhes auxiliou na construção, seguindo os seguintes passos:

1. Oculte as malhas e eixos da janela de visualização.
2. Insira um triângulo equilátero utilizando a quinta ferramenta da barra.
3. Utilizando a segunda ferramenta marque os pontos médios das laterais dos triângulos.
4. Em seguida construa um novo triângulo equilátero utilizando os pontos médios marcados como vértices, esse deve ser colorido com uma cor diferenciada, para ser desconsiderado.
5. Como foi visto na construção feita no papel, esse processo deve ser repetido sucessivamente para então obter-se a construção do Triângulo de Sierpinski.

Para isso, foi criado uma nova ferramenta que permitiu obter as novas iterações sem precisar repetir todo o processo passo a passo. Tal ferramenta foi construída utilizando os seguintes passos:

-Clique em *Ferramentas,* em seguida em *Criar nova ferramenta,* o que abrirá uma nova janela (Figura 24):

Figura 24 - Janela para criar nova ferramenta

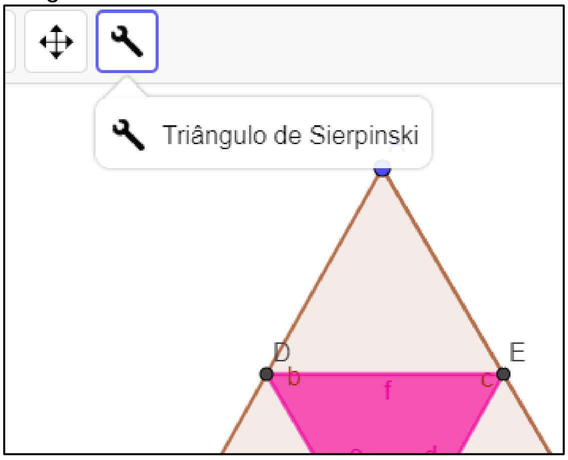


Fonte: a pesquisa.

Nesta janela tem-se:

- Objetos finais: são os objetos que serão reproduzidos e que dependem de outros. No nosso caso são os segmentos d, e, f.
- Objetos iniciais: são objetos que foram informados inicialmente dos quais depende toda a construção. No exemplo, correspondem aos pontos A e B. Esses objetos automaticamente aparecem em objetos iniciais.
- Nome e ícone: nome dado, conforme desejado, ao novo ícone para a ferramenta, os alunos podem denominar um nome para a ferramenta e até mesmo utilizar o nome do Fractal, o Triângulo de Sierpinski, pois ela será a responsável pela sua construção. Após clicar em concluído irá aparecer um novo ícone com a ferramenta construída (Figura 25).

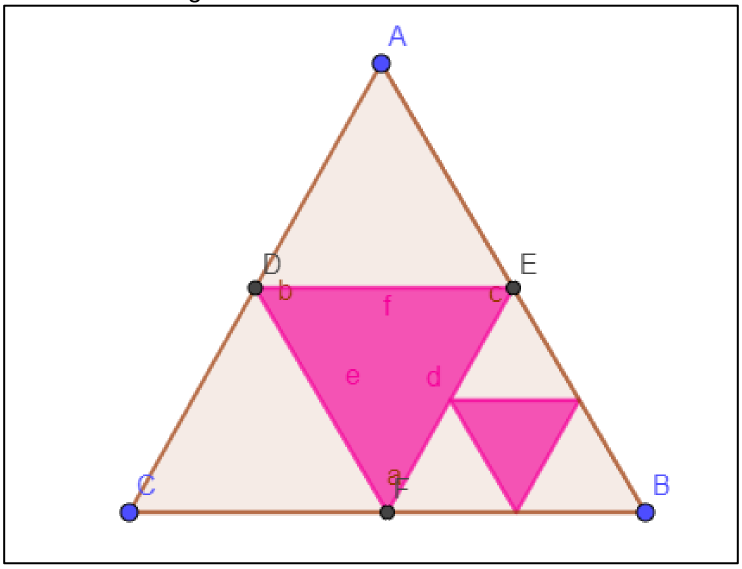
Figura 25 - Ícone da ferramenta nova criada



Fonte: a pesquisa.

- Para utilizá-la, basta clicar no ícone com o nome dado e clicando nos três vértices de cada triângulo não colorido ocorrerá a iteração (Figura 26).

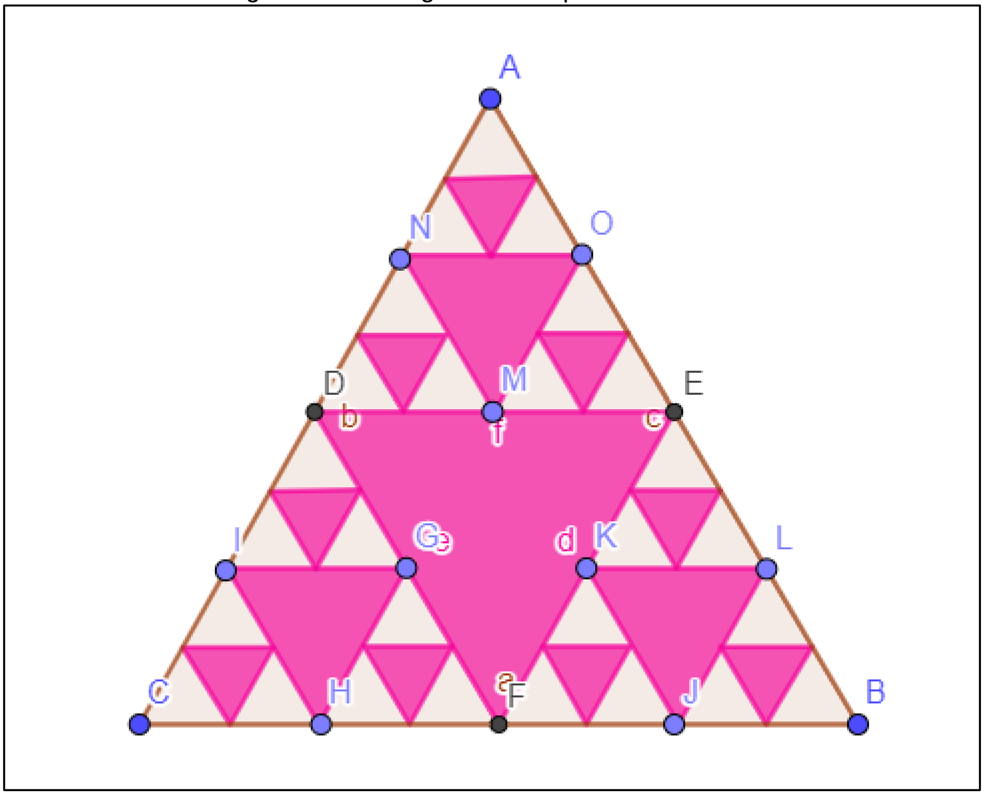
Figura 26 - Utilizando a ferramenta



Fonte: a pesquisa.

- E assim ao utilizar a ferramenta sucessivamente, os triângulos vão surgindo, formando o Triângulo de Sierpinski com infinitas iterações (Figura 27).

Figura 27 - Triângulo de Sierpinski construído



Fonte: a pesquisa.

Portanto, como apresentado na Figura 27, o Fractal é obtido e nesse momento ao manusear o programa fica perceptível a possibilidade de dar *zoom*, para ir aproximando cada triângulo, o que permite realizar mais iterações.

3.8 OITAVO MOMENTO - CONSTRUÇÃO DE FRACTAIS

Nesse momento após realizar diversas atividades envolvendo fractais, os alunos já compreendem todo o processo de formação e as características de um Fractal. Portanto, foi proposto que criassem de forma livre, no papel, ou mesmo utilizando o GeoGebra que já estavam familiarizados, um Fractal, respeitando as suas principais características, mantendo a autossimilaridade e os padrões.

E para finalizar, cada um apresentou o seu Fractal criado e também fez um relatório descrevendo o passo a passo para a sua construção.

3.9 NONO MOMENTO – ENCERRAMENTO DAS ATIVIDADES

Nessa última etapa foi proposto que os alunos respondessem ao questionário final (Apêndice F), instrumento que foi utilizado para análise das atividades desenvolvidas, com o intuito de identificar se os objetivos foram alcançados, se houve formalização por parte dos alunos, dos conceitos abordados e uma reflexão em torno da proposta aplicada como um todo.

4 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

No primeiro momento os alunos reuniram-se na sala de aula com a Professora, que apresentou a proposta didática envolvendo fractais e o objetivo da mesma. Em seguida, os alunos foram convidados a responder ao questionário inicial, durante esse período a professora pesquisadora ouviu os alunos comentando entre si: “O que seria Geometria?”, alguns até perguntaram, “Prof., se eu não sei o que é, o que escrevo?”. Então, a professora lhes orientou a serem honestos e colocarem que não sabiam. Logo depois, o grupo de alunos foi para o laboratório de informática e enquanto a professora instalava o *Datashow,* para apresentar a introdução aos Fractais, pediu que os alunos pesquisassem na *internet* o que era a Geometria. Neste momento, surgiram os comentários: “Ah, é isso!”, “Nós já vimos sim!” e “Viu! Eu falei que eram as figuras!”, visto que ao digitar Geometria no *Google*, as primeiras imagens e descrições que aparecem são de figuras geométricas.

Com isso, a professora aproveitou as pesquisas dos alunos e explanou um pouco mais sobre a Geometria Euclidiana e a diferença das representações em suas 3 dimensões, para então entrar de fato na temática Fractais, apresentando aos alunos seus principais aspectos, sua origem e exemplos com o auxílio de uma apresentação de *PowerPoint* (Apêndice E). Os alunos demonstraram-se entusiasmados e interessados em saber como os Fractais são formados, baseados na definição de Fractais, já que segundo Oliveira (2019) é considerado um Fractal, aquela estrutura que ao ser dividida em partes, obtêm-se partes idênticas à inicial, e ao se repetir o processo sucessivamente, o mesmo sempre ocorre.

Assim, dando continuidade a professora pediu que os alunos se dividissem em grupos de no máximo 3 alunos, os quais ficaram definidos da seguinte forma:

-Grupo A: formado por 1 aluno de 6º ano e 2 alunos de 7º ano.

-Grupo B: formado por 2 alunos do 8º ano.

-Grupo C: formado por 2 alunos de 6º ano e 1 aluno de 7º ano.

-Grupo D: formado por 2 alunas de 6º ano e 1 aluna de 8º ano.

-Grupo E: formado por 1 aluna de 7º ano e 1 aluna de 8º ano.

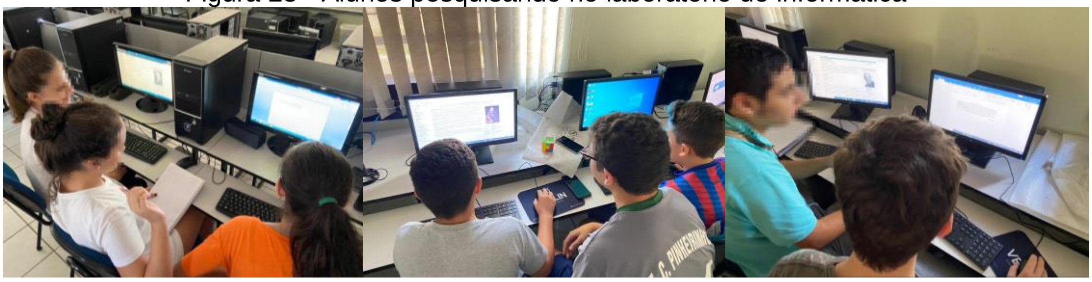
Com os grupos definidos, deu-se início a primeira atividade, na qual se propôs realizar uma pesquisa sobre os principais precursores da Geometria Fractal, ou seja, autores que segundo Barbosa (2005) foram pioneiros no estudo dos Fractais, antes dessa temática se consolidar com os estudos de Mandelbrot.

Assim, tal atividade teve por objetivo aprofundar os conhecimentos sobre Fractais, sua origem e definição, foi pedido aos alunos que realizassem a pesquisa e montassem um relatório, utilizando o *software Word* para cada autor, descrevendo sua biografia e objeto de estudo, ou seja, qual o Fractal descoberto por cada um.

Dessa forma, visando atingir os objetivos desta pesquisa, a atividade em questão foi desenvolvida sob os moldes colaborativos, tendo em vista que os alunos foram agentes ativos da construção do seu conhecimento, e a professora/pesquisadora mediou as investigações. Isso permitiu que os estudantes tivessem autonomia para estabelecer o seu plano de ação e conseguissem se organizar dentre os seus grupos, estabelecendo uma atuação coletiva efetiva. Nesse sentido, segundo Boavida e Ponte (2002) para que isso ocorra é necessário que todos os envolvidos trabalhem mutuamente, instigando, refletindo e contribuindo, ou seja, todos precisam ter um interesse em comum, ou um interesse particular que possibilite participar do trabalho conjunto, que nesta pesquisa foi o estudo da Geometria Fractal.

Essa atividade foi desenvolvida no laboratório de informática da escola, tendo em vista que na biblioteca não havia materiais disponíveis sobre o assunto (Figura 28). Ressalta-se que no laboratório havia computadores suficientes para que os estudantes realizassem a pesquisa, visto que a escola conta com 24 computadores em pleno funcionamento.

Figura 28 - Alunos pesquisando no laboratório de informática



Fonte: a pesquisa.

Com base nas pesquisas de Barbosa (2005) e Lutz e Leivas (2021) a professora organizou os 11 precursores da Geometria Fractal e distribuiu entre os grupos, ficando cada grupo responsável pela pesquisa de 2 precursores. O grupo A ficou responsável por pesquisar sobre Durer e Cantor (Figura 29).

Figura 29 - Pesquisa realizada sobre Durer

Fonte: material produzido pelo grupo A.

A pesquisa discorreu relativamente bem, no entanto é importante destacar uma preocupação, uma observação da professora/pesquisadora durante a realização da atividade: os alunos se detiveram em copiar e colar as informações do *Google*, de forma automática, sequer leram mais atentamente sobre o que se tratava, pois queriam acabar logo para utilizar a *internet* de forma livre[2]. Então, os alunos apresentaram informações que pudessem ser facilmente encontradas, por exemplo, dados de nascimento, nacionalidade e uma imagem do Fractal estudado pelo autor, porém fora uma pesquisa rasa, sem uma parte teórica a respeito do Fractal, não explorando as formas geométricas que o compõem. Ainda, analisando o relatório dos alunos percebe-se que eles trazem o Fractal Pentagonal de Durer, mas indicam ser um hexágono, demonstrando pouca atenção ao separar as informações e falta de conhecimento para diferenciar um pentágono de um hexágono.

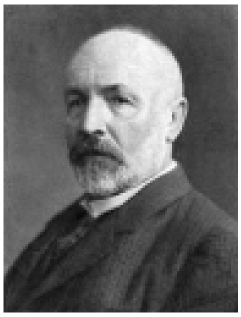
[2] Na escola, ao finalizar uma atividade didática realizada no laboratório de informática, os alunos são liberados para fazer uso da internet de forma livre, podendo utilizar para pesquisas de interesse e/ou jogos, desde que não acessem conteúdos proibidos, que já tem restrição nos computadores.

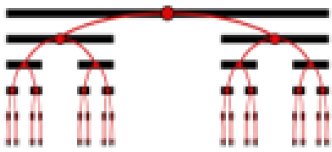
Ainda, na Figura 30, tem-se a pesquisa realizada pelo Grupo A sobre Cantor, na qual os alunos da mesma forma, consideraram as primeiras informações obtidas quando realizaram a pesquisa na *internet*, sem buscar aprofundar os conhecimentos referentes ao autor.

Figura 30 - Pesquisa sobre Cantor

CANTOR 1883

Conhecido(a) por	Conjunto de Cantor Poeira de Cantor Argumento de diagonalização de Cantor Teorema de Cantor-Bernstein-Schroeder Cubo de Cantor
Nascimento	3 de março de 1845 São Petersburgo, Império Russo
Morte	6 de janeiro de 1918 (72 anos) Halle an der Saale
Residência	Rússia (1845–1856), Alemanha (1856–1918)
Nacionalidade	Alemão
Alma mater	Instituto Federal de Tecnologia de Zurique, Universidade Humboldt de Berlim
Prêmios	Medalha Sylvester (1904)
Orientador(es)(as)	Ernst Kummer e Karl Weierstrass[1]
Orientado(a)(s)	Alfred Barneck
Instituições	Universidade de Halle-Wittenberg
Campo(s)	Matemática
Tese	1867: *De aequationibus secundi gradus indeterminatis*



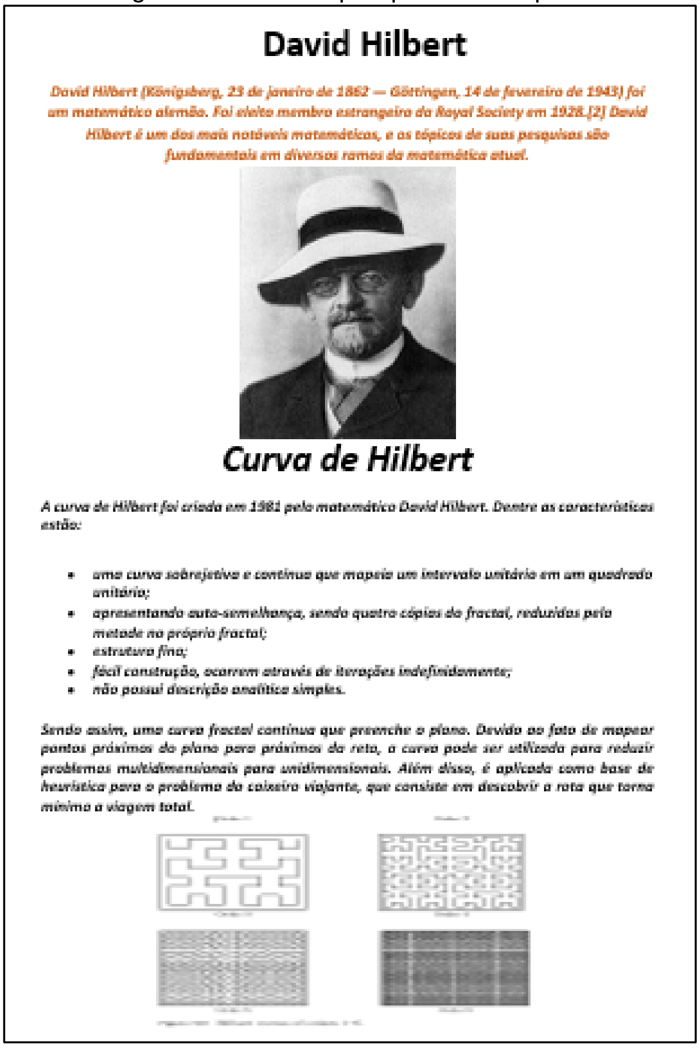


Fonte: material produzido pelo Grupo A.

Nota-se que apesar da professora instigá-los e orientá-los a pesquisar, ler sobre o autor e escrever com suas palavras sobre ele, os alunos mantiveram a sua postura de pegar apenas o resumo apresentado pelo *site* Wikipedia e fazer uma cópia para o seu trabalho.

Já em relação ao Grupo B, o qual pesquisou sobre Peano e Hilbert, pode-se destacar que os alunos tiveram autonomia e organização durante a realização da pesquisa, ou seja, realizaram a atividade a partir de meios colaborativos, que como indicam Boavida e Ponte (2002) ao mencionar que o foco não está na busca por resultados semelhantes, mas sim a interação entre eles, respondendo ao objetivo comum. Isto pode ser observado, nesse grupo, pois como estavam trabalhando em dupla, cada um pesquisou sobre um autor, sendo que ambos os alunos pesquisaram em diversos *sites*, leram os materiais pesquisados e apesar de copiar e colar algumas partes, organizaram o seu texto e ainda formataram o trabalho (Figura 31).

Figura 31 - Parte 1 pesquisa do Grupo A



David Hilbert

David Hilbert (Königsberg, 23 de janeiro de 1862 — Göttingen, 14 de fevereiro de 1943) foi um matemático alemão. Foi eleito membro estrangeiro da Royal Society em 1928.[2] David Hilbert é um dos mais notáveis matemáticos, e os tópicos de suas pesquisas são fundamentais em diversos ramos da matemática atual.

Curva de Hilbert

A curva de Hilbert foi criada em 1981 pelo matemático David Hilbert. Dentre as características estão:

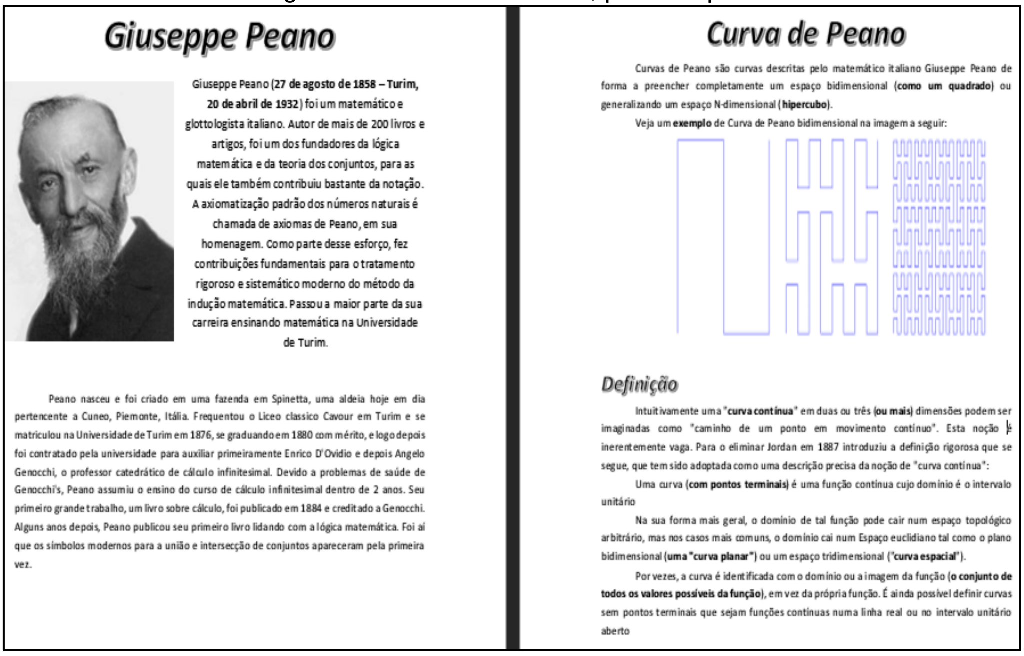
- *uma curva sobrejetiva e contínua que mapeia um intervalo unitário em um quadrado unitário;*
- *apresentando auto-semelhança, sendo quatro cópias do fractal, reduzidas pela metade no próprio fractal;*
- *estrutura fina;*
- *fácil construção, ocorrem através de iterações indefinidamente;*
- *não possui descrição analítica simples.*

Sendo assim, uma curva fractal contínua que preenche o plano. Devido ao fato de mapear pontos próximos do plano para próximos da reta, a curva pode ser utilizada para reduzir problemas multidimensionais para unidimensionais. Além disso, é aplicada como base de heurística para o problema do caixeiro viajante, que consiste em descobrir a rota que torna mínimo a viagem total.

Fonte: material produzido pelo grupo B.

Assim, da mesma forma o aluno T do grupo B também realizou a sua pesquisa com atenção e organizou os dados encontrados de forma adequada para compor o relatório (Figura 32).

Figura 32 - Curva de Peano, pelo Grupo B

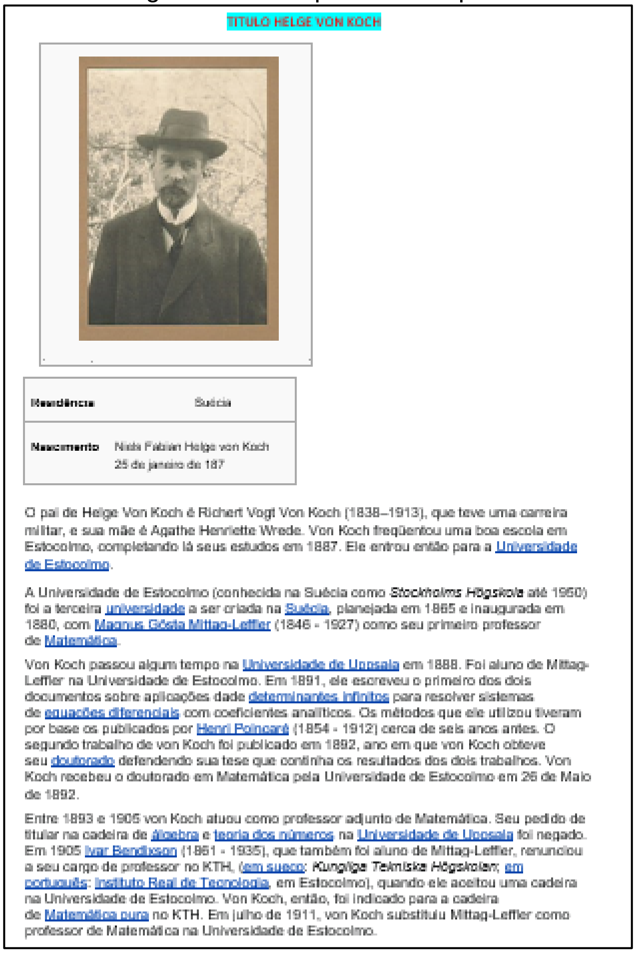


Fonte: material produzido pelo grupo B.

Destaca-se que o grupo pesquisou referente ao objeto de estudo apresentado por cada autor, não somente apresentando sua imagem, mas trazendo também a sua definição.

Em seguida, o grupo C, responsáveis por pesquisar sobre Koch, Fantou e Júlia, da mesma forma que o grupo A, não sabiam muito bem como realizar uma pesquisa, ou ao menos fazer o relatório, apenas copiaram e colaram da *internet*, portanto a professora buscou orientá-los como poderiam fazer e também explicou o que é plágio e suas implicações. Nesse momento, os alunos do 8º ano colaboraram, dizendo que já sabiam o que era e explicaram que deviam pesquisar, ler e escrever com suas palavras, que não poderiam somente copiar algo de outro autor sem dar créditos a ele, ou seja, referenciar e indicar de onde foram tiradas as informações. Assim, apresenta-se na Figura 33 a pesquisa realizada pelo grupo C.

Figura 33 - Pesquisa do Grupo C



TITULO HELGE VON KOCH

Residência	Suécia
Nascimento	Niels Fabian Helge von Koch 25 de janeiro de 187

O pai de Helge Von Koch é Richert Vogt Von Koch (1838–1913), que teve uma carreira militar, e sua mãe é Agathe Henriette Wrede. Von Koch freqüentou uma boa escola em Estocolmo, completando lá seus estudos em 1887. Ele entrou então para a Universidade de Estocolmo.

A Universidade de Estocolmo (conhecida na Suécia como *Stockholms Högskola* até 1960) foi a terceira universidade a ser criada na Suécia, planejada em 1865 e inaugurada em 1880, com Magnus Gösta Mittag-Leffler (1846 - 1927) como seu primeiro professor de Matemática.

Von Koch passou algum tempo na Universidade de Uppsala em 1888. Foi aluno de Mittag-Leffler na Universidade de Estocolmo. Em 1891, ele escreveu o primeiro dos dois documentos sobre aplicações dade determinantes infinitos para resolver sistemas de equações diferenciais com coeficientes analíticos. Os métodos que ele utilizou tiveram por base os publicados por Henri Poincaré (1854 - 1912) cerca de seis anos antes. O segundo trabalho de von Koch foi publicado em 1892, ano em que von Koch obteve seu doutorado defendendo sua tese que continha os resultados dos dois trabalhos. Von Koch recebeu o doutorado em Matemática pela Universidade de Estocolmo em 26 de Maio de 1892.

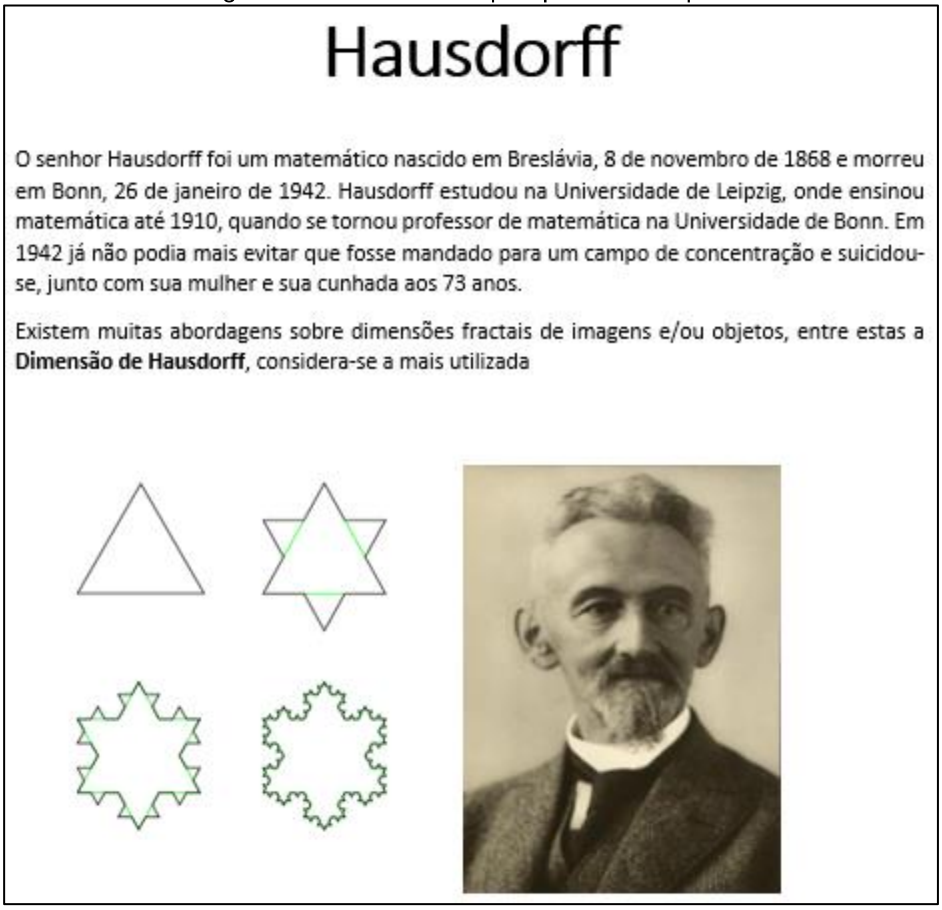
Entre 1893 e 1905 von Koch atuou como professor adjunto de Matemática. Seu pedido de titular na cadeira de álgebra e teoria dos números na Universidade de Uppsala foi negado. Em 1905 Ivar Bendixson (1861 - 1935), que também foi aluno de Mittag-Leffler, renunciou a seu cargo de professor no KTH, (em sueco: *Kungliga Tekniska Högskolan*; em português: Instituto Real de Tecnologia, em Estocolmo), quando ele aceitou uma cadeira na Universidade de Estocolmo. Von Koch, então, foi indicado para a cadeira de Matemática pura no KTH. Em julho de 1911, von Koch substituiu Mittag-Leffler como professor de Matemática na Universidade de Estocolmo.

Fonte: material produzido pelo grupo C.

Observando o material produzido pelo Grupo C pode-se perceber que os alunos realmente apenas copiaram o que estava no *site* da *internet*, e nem se preocuparam com a sua apresentação.

Já quando se observa o trabalho realizado pelo Grupo D, nota-se tamanha diferença em relação aos outros trabalhos, tendo em vista que os alunos, pesquisaram, leram e resumiram as informações, já pensando que precisavam apresentar aos colegas em seguida (Figura 34).

Figura 34 - Atividade de pesquisa do Grupo D



Fonte: material produzido pelo grupo D.

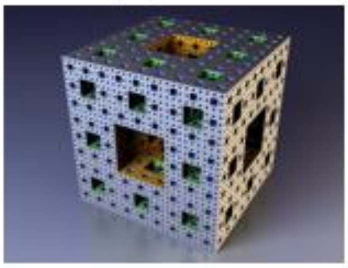
Como visto, as alunas pesquisaram sobre o Matemático Hausdorff, quem deu início aos estudos aprofundados sobre Fractais, assim encontraram não um exemplo em si, mas que Hausdorff foi o responsável por calcular as dimensões dos Fractais. As alunas ainda, pesquisaram sobre Sierpinski, um dos principais exemplos da Geometria Fractal, e da mesma forma apresentaram uma síntese sobre a sua vida e sobre um dos seus exemplos, o Triângulo de Sierpinski.

Por fim, os alunos do Grupo E, pesquisaram sobre 3 autores, já que receberam 2 e foram os primeiros a concluir a atividade. Dessa forma, foram convidados a pesquisar mais um para completar os 11 precursores que tinham sido separados para o estudo. Primeiramente, os alunos pesquisaram sobre Menger, falaram sobre sua vida e sobre o Fractal estudado, Esponja de Menger, souberam ser sucintos e objetivos, apresentando os aspectos que seriam relevantes, conforme a Figura 35.

Figura 35 - Pesquisa sobre Menger

Bibliografia de Carl Menger: foi um economista austríaco, fundador da escola austríaca. Desenvolveu uma teoria subjetiva do valor, a teoria da utilidade marginal, ligando-a à satisfação dos desejos humanos; teoria esta primeiramente desenvolvida por Pierre de Jean Olivi (1248-1298) e retomada por São Bernardino de Sena no século XIV.

Qual foi o fractal que ele estudou? Em matemática , a **esponja de Menger** (também conhecida como **cubo de Menger** , **curva universal de Menger** , **cubo de Sierpinski** ou **esponja de Sierpinski**) é uma curva fractal . É uma generalização tridimensional do conjunto Cantor unidimensional e do tapete Sierpinski bidimensional . Foi descrito pela primeira vez por Karl Menger em 1926, em seus estudos do conceito de dimensão topológica .



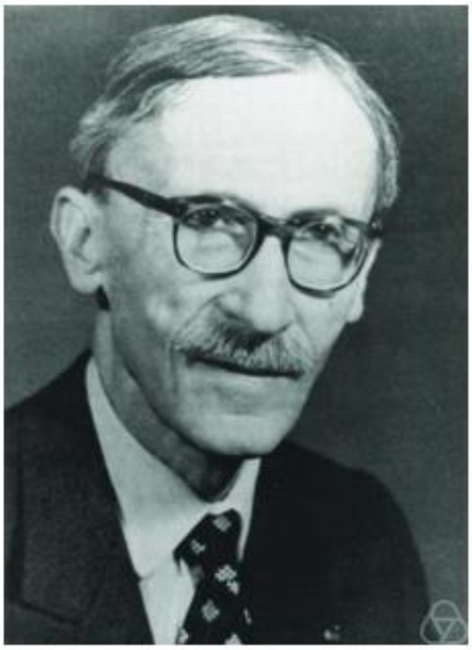
Fonte: material produzido pelo grupo E.

Os alunos pesquisaram também, sobre Levy (Figura 36). Esse grupo chamou a atenção, pois além de fazer o que havia sido combinado inicialmente, eles encontraram um vídeo no Youtube que demonstrava o Fractal da Curva de Levy em formação, e incluíram o *link* do vídeo para utilizar em sua apresentação posteriormente.

Figura 36 - Pesquisa sobre Levy

Bibliografia de Paul Pierre Levy: **Paul Pierre Lévy** (Paris, 15 de setembro de 1886 — Paris, 15 de dezembro de 1971) foi um matemático francês.

Trabalhou entre outros assuntos com a teoria das probabilidades, o processo estocástico de Martingale, a constante de Lévy e o fractal da Curva de Lévy.



Qual fractal ele estudou? Curva c (representada também como curva de Levy).

https://www.youtube.com/watch?v=iG17qOKlx14&t=24s

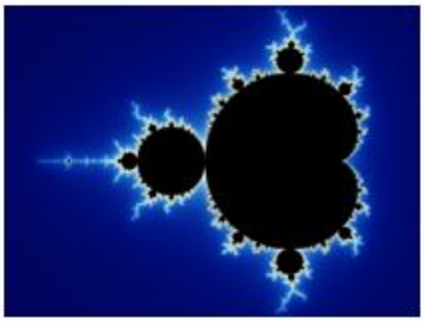
Fonte: material produzido pelo grupo E.

Assim, como mencionado, os alunos pesquisaram ainda sobre Mandelbrot e como nos demais autores, expuseram sucintamente os aspectos sobre a sua vida e também sobre os Fractais estudados, apresentando um exemplo com imagem (Figura 37).

Figura 37 - Pesquisa sobre Mandelbrot

Bibliografia: **Benoît B. Mandelbrot** (Varsóvia, 20 de novembro de 1924 — Cambridge, 14 de outubro de 2010) foi um matemático francês de origem judaico-polonesa. É conhecido principalmente por suas contribuições no campo da geometria fractal, tendo o termo "fractal" sido por ele cunhado em 1975. Foi aluno do matemático francês Paul Lévy.

Qual fractal ele estudou? Em matemática, **conjunto de Mandelbrot** é um fractal definido como o conjunto de pontos *c* no plano complexo para o qual a sucessão (sequência, no Brasil) definida recursivamente:



Fonte: material produzido pelo grupo E.

Dando continuidade, conforme os grupos iam concluindo a professora foi passando em cada grupo para conferir e salvar o trabalho em seu *drive* pessoal.

E então, enquanto alguns grupos iam concluindo a atividade de pesquisa, a professora passou a senha de *internet*[3] para os alunos conectarem seus celulares e baixar os dois aplicativos (*Eye Fractal* e *Fractal Creator*) que seriam utilizados na próxima atividade.

Voltando para a sala de aula teve-se um momento de reflexão e compartilhamento, no qual os grupos apresentaram as suas pesquisas (Figura 38), utilizando a televisão da sala para mostrar o seu relatório e também a imagem de exemplo do objeto Fractal estudado por cada autor. Nesse momento, percebe-se que os alunos não estão acostumados a falar em público, ou até mesmo fazer apresentações de trabalho, pois ficavam passando a palavra de um aluno para o outro “fala aí fulano”, “lê tu ciclano”, o que se percebe que a maioria dos grupos

[3] A escola disponibiliza rede *wifi* de *internet*, no entanto os alunos não possuem acesso livre, é disponibilizado *vouchers* de *internet* que devem ser solicitados pelo professor, assim essa senha da acesso e estipula o tempo que os alunos podem fazer o uso da *internet*.

apenas leu o que tinha escrito no seu trabalho, exceto o grupo D que conseguiu apresentar de forma reduzida o material pesquisado, sem precisar ler todo o texto. Destaca-se ainda nesse momento, que os alunos ficaram impressionados com a apresentação do grupo E que trouxe o vídeo da Curva de Levy, já que conseguiram visualizar as iterações acontecendo.

Figura 38 - Apresentações das pesquisas

Fonte: a pesquisa.

Ainda no primeiro dia, após concluir as apresentações foi proposto então as atividades com os aplicativos que eles haviam baixado, primeiramente a professora pediu para que os alunos abrissem o aplicativo *Eyes Fractal* (Figura 39), no qual os alunos puderam visualizar as características dos Fractais, principalmente a sua autossimilaridade, pois ao darem *zoom* na tela do celular percebiam que o Fractal continuava a se repetir. Como diz o aluno R: “Prof. meu celular travou e não terminou, Fractal é infinito mesmo!”.

Figura 39 - Atividade no aplicativo Eye Fractal

Fonte: a pesquisa.

Durante essa atividade de visualização, os alunos ficaram encantados com a Geometria Fractal, pois puderam perceber o quanto são perfeitos e sempre apresentam as mesmas características. O que assegura Barbosa (2005), que traz a ideia da revolução que os Fractais trazem para a geração e reprodução de imagens, já que dentre a vasta variedade de elementos da natureza, a Geometria Fractal traz aproximações das representações de diferentes formas. Então, a Professora solicitou que os alunos abrissem o outro aplicativo baixado, o *Fractal Creator*. Mostrou a eles que utilizando-o conseguiriam criar um Fractal. Nesse momento, propôs que fizessem e enviassem a imagem da atividade realizada ao arquivo do trabalho. Nessa tarefa, os alunos exploraram o aplicativo testando os diversos recursos oferecidos, como alterar as imagens, colocar som, deixar o Fractal rotacionando, alterar a posição e etc. (Figura 40). Os alunos se envolveram significativamente e se mostraram motivados, de modo que fizeram mais de uma criação em sala de aula e, mesmo em casa, continuaram criando e mandando para a professora suas novas produções. Percebeu-se que o interesse permaneceu no decorrer das atividades seguintes, pois quando sobrava um tempo livre, alguns alunos recorriam ao aplicativo para criar novos Fractais.

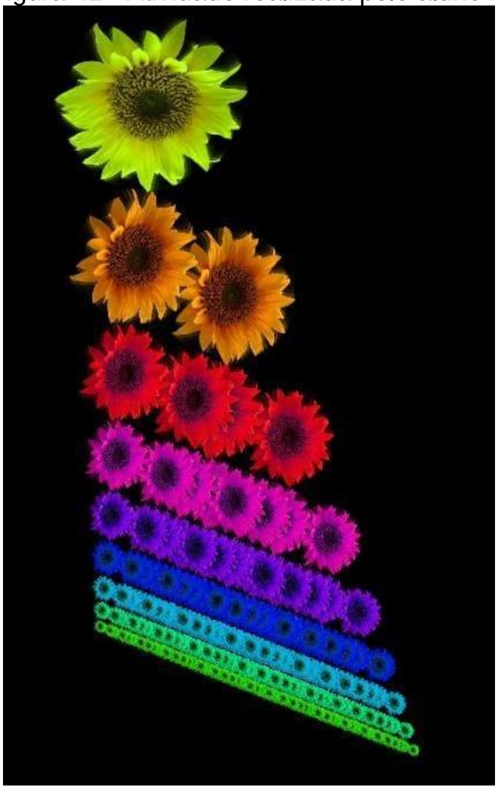
Figura 40 - Atividade no aplicativo Fractal Creator

Fonte: a pesquisa.

Ficando evidente, que o uso das tecnologias digitais é um recurso facilitador e mediador para os processos de ensino e aprendizagem, pois além de proporcionar a aprendizagem, faz com que esse processo ocorra de forma cativante e interativa (GOUVEIA; MATOS, 2019).

Diante disso, ao observar as criações realizadas pelos alunos destacou-se alguns casos, como por exemplo o aluno A, que analisando a sua produção (Figura 41), percebe-se que escolheu a flor como ícone para o seu Fractal. Depois de algumas iterações com o aplicativo encaminhou para a professora o seu Fractal finalizado, na qual percebeu que a cada fileira as flores aumentavam como diz: "Prof. na primeira tem 2, depois 4, depois 8, parece que sempre "tá" dobrando as flores!", então a professora interage, e juntamente com ele, analisa o Fractal criado. Como no aplicativo é possível rotacionar e dar *zoom*, foi possível compreender que isso estava mesmo acontecendo. Portanto, se pode perceber que os estudantes exploraram, no aplicativo, inúmeras iterações e perceberam a autossimilaridade das imagens, que são as características para a formação do Fractal, conforme Oliveira (2019).

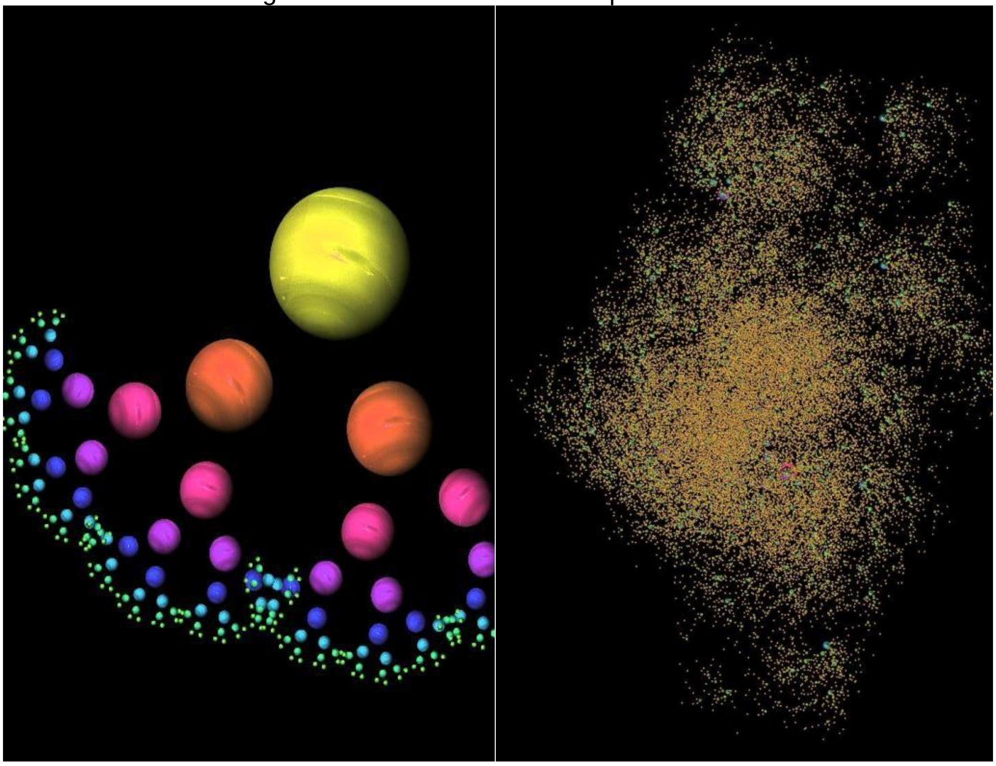
Figura 41 - Atividade realizada pelo aluno A



Fonte: material produzido pelo aluno A.

Assim, outro aluno, identificado como aluno F, já teve uma outra visão, ele mandou para a professora 2 *prints* da sua criação, um mais inicial, a esquerda da Figura 42 e outro a direita da figura, na qual é possível ver claramente o formato do seu Fractal. O que é possível visualizar que após várias iterações, os Fractais vão se repetindo e cobrem praticamente toda a tela.

Figura 42 - Atividade realizada pelo aluno F

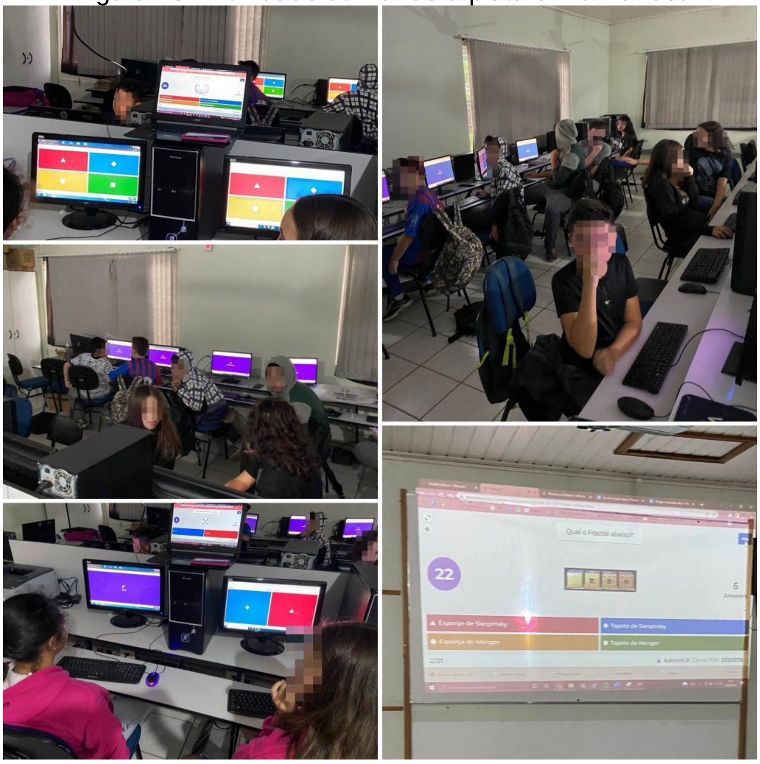


Fonte: material produzido pelo aluno F.

Tendo essas incumbências concluídas, ressalta-se que os alunos realizaram a atividade com muita atenção e envolvimento. Percebeu-se que compartilharam ideias entre eles, pois a cada descoberta, um dizia “Olha o que consegui, olha que “massa” isso!” e o outro já questionava “Como que tu “fez” isso? Me mostra!”. Neste momento nota-se que esta atividade aliada a anterior permitiu aos alunos ampliarem seus conhecimentos sobre Fractais de maneira lúdica e proativa.

Aproveitando o engajamento da turma a professora encaminhou a atividade seguinte, na qual foi proposto aos alunos um jogo no *Kahoot*, a proposição era que os alunos jogassem na sala de aula em seus smartphones, no entanto devido à instabilidade da *internet* isso não foi possível, então os alunos foram novamente para o laboratório de informática, e jogaram nos computadores (Figura 43).

Figura 43 - Atividade utilizando a plataforma *Kahoot*



Fonte: a pesquisa.

O jogo consistia em classificar cada Fractal de acordo com o seu nome e/ou autor, destaca-se que as imagens foram retiradas dos trabalhos realizados pelos alunos, então eram todos Fractais já conhecidos por eles.

Para jogar, aparecia na tela uma imagem de Fractal e quatro alternativas com as respostas, para que o aluno marcasse a que julgava ser correta, e assim a cada rodada o jogo ia estabelecendo um *ranking* de acordo com os acertos e tempo em que os alunos levavam para responder. A cada intervalo, entre uma imagem e outra, esse *ranking* era exposto. O que motivava eles! Num espírito de competitividade, se dedicavam ainda mais para responder rápido. Durante esse momento, pode-se perceber que os alunos estavam engajados, ávidos em suas ações e seus os conhecimentos, pois tentavam blefar, falar em voz alta outra resposta para enganar os demais colegas, ou então falavam “Ah, esse eu sei!”, “Esse é muito fácil!” ou então depois que aparecia a resposta “Viu, eu te falei que era aquele!”.

Assim, observou-se que a aprendizagem estava ocorrendo, pois a cada etapa do *game*, os alunos acertavam mais questões, ficando o *ranking* mais acirrado. Momento em que se pode evidenciar a ação do que sugere Tolomei (2017), pois a diversão permite o aprender em um contexto que não há pressão ou imposição, levando os alunos a construir o seu próprio conhecimento, de forma espontânea.

Seguindo no jogo, começavam a aparecer imagens com alguma similaridade para que os alunos marcassem verdadeiro ou falso, se aquela imagem representava um Fractal ou não, portanto pode-se afirmar que a atividade atingiu os objetivos propostos: revisar e fixar os conceitos já abordados até o momento, pois eles puderam perceber que não basta ter algo semelhante em uma figura para torná-la um Fractal, mas sim, que se deve haver um padrão em toda a sua construção.

Os alunos gostaram e interagiram em relação ao jogo, tanto que pediram para jogar novamente. Dessa vez colocaram apelidos no seu nome, para que o *ranking* não fosse descoberto no decorrer das rodadas, e juntos na expectativa de saber quem eram os que estavam no pódio, ou quem deveriam passar, foram se dedicando mais nas respostas e não só por que já haviam jogado, identificavam características dos Fractais e utilizavam os conhecimentos já adquiridos para responder corretamente. O que se nota é que o jogo foi utilizado para a fixação dos conhecimentos vistos sobre Fractais até o momento, o que permite identificar a gamificação como uma estratégia de aprendizagens ativas, a partir daquilo que o uso de *games* proporciona aos processos de ensino e aprendizagem, como diz Silva *et al.* (2018, p.728):

> Os *games* são uma forma de entretenimento bastante popular entre os vários públicos das mais diversas idades, principalmente pelo seu caráter hedônico e suas identidades lúdicas. As características incorporadas pelos games são capazes de potencializar sua influência na maneira de pensar e agir em todas as camadas sociais, por serem prazerosos e eficazes no processo de aprendizagem, mas não necessariamente por causa do que são, mas por causa do que eles incorporam.

Voltando para a sala de aula, foi proposta a próxima atividade que seria a construção do Tapete de Sierpinski. Antes de iniciar a professora apresentou aos alunos com o auxílio de uma apresentação de *powerpoint* (Apêndice E) aspectos e conceitos da Geometria que seriam abordados durante a construção do Fractal, dentre eles, retas paralelas e perpendiculares, e características específicas sobre quadrados, a questão de lados iguais, paralelos e ângulos.

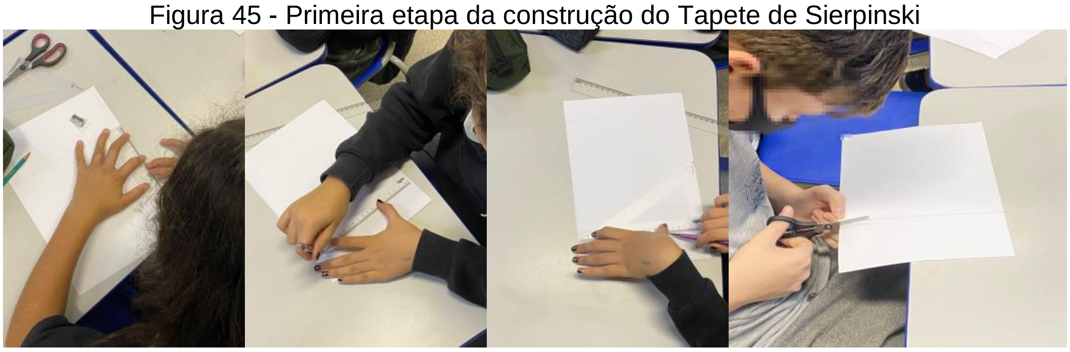
Dando continuidade a professora explicou que eles iriam desenhar (construir) o Tapete de Sierpinski e deveriam ir anotando o passo a passo adotado por cada um na construção. Observou-se que, embora os alunos tenham realizado a atividade individualmente, buscaram sentar-se em grupos (Figura 44) de modo que pudessem interagir e encontrar as soluções juntos. Boavida e Ponte (2002) relatam que o diálogo é um dos aspectos fundamentais para o desenvolvimento de trabalhos colaborativos, visto que à medida que uma voz se entrelaça com outras vozes, a compreensão enriquece e a conversação se torna cada vez mais informada.

Figura 44 - Alunos desenvolvendo a atividade de Sierpinski

Fonte: a pesquisa.

Para tal tarefa, cada aluno recebeu uma folha A4. Então, a professora pediu para que estes desenhassem o maior quadrado que eles conseguissem, a aluna D então sugeriu “vamos usar esse lado menor da folha e medir o mesmo tanto no outro” foi quando utilizando a régua os alunos mediram a folha e identificaram que a mesma possuía 21cm. Então, mediram 21cm no lado maior e traçaram uma reta formando o quadrado, depois recortaram o excesso da folha (Figura 45).

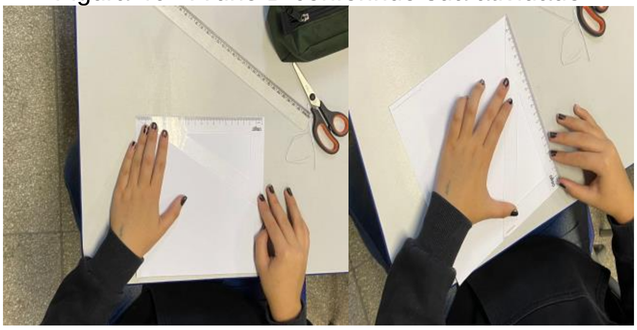
Figura 45 - Primeira etapa da construção do Tapete de Sierpinski



Fonte: a pesquisa.

Analisando o primeiro passo realizado pelo aluno D (Figura 46), observa-se que após obter o seu quadrado principal, ele ainda utilizou o esquadro para conferir se o seu quadrado estava certo, com as mesmas medidas e com os ângulos de 90º. O que vai ao encontro do que propõe a habilidade 22 do 6º ano do Ensino Fundamental, prevista pela BNCC, que trata das habilidades para a utilização de instrumentos, como réguas e esquadros, ou *softwares* para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros (BRASIL, 2018, p. 303).

Figura 46 - Aluno D conferindo sua atividade



Fonte: a pesquisa.

Em seguida, dando continuidade a professora os questionou como poderiam obter a primeira iteração, e analisando a imagem do Fractal de Sierpinski, emergiram possibilidades, como:

- Vamos desenhar um quadrado no meio;

- Vou medir na televisão o tamanho do quadrado do meio.

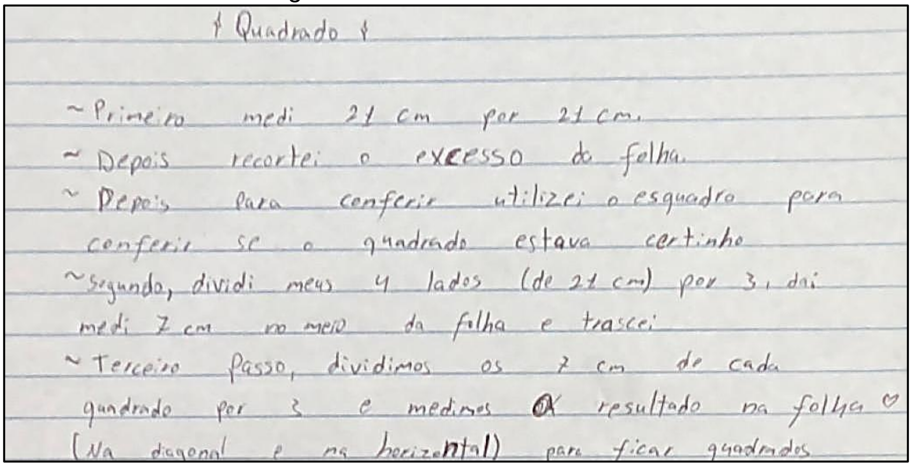
Percebendo a dificuldade dos estudantes para estabelecer relações, a professora questionou: - Mas será que fica do mesmo tamanho?

E o aluno ao colocar a régua na televisão observa que o tamanho obtido, irá implicar em um quadrado que tomaria a maior parte da folha, pois a imagem não era de mesma dimensão que a folha que estavam manipulando. Aí, surge a necessidade de buscar outras possibilidades. Nesse instante, o aluno EF, menciona o fato de o quadrado inicial ser dividido em 9 quadrados, sendo que o quadrado central foi pintado. Imediatamente, o aluno disse que cada quadrado teria que ter 7cm.

Passando à realização dessa construção, o aluno F tentou desenhar o quadrado central encontrando o meio da folha e utilizou instrumentos como a régua, o compasso e o esquadro. Devido à dificuldade, os alunos tiveram a ideia de dobrar a folha ao meio na horizontal e vertical para marcar o centro para desenhar o quadrado central, tomando esse centro como referência.

Já o aluno D, descreve como fez a primeira iteração, conforme a Figura 47.

Figura 47 - Relatório do aluno D



Quadrado

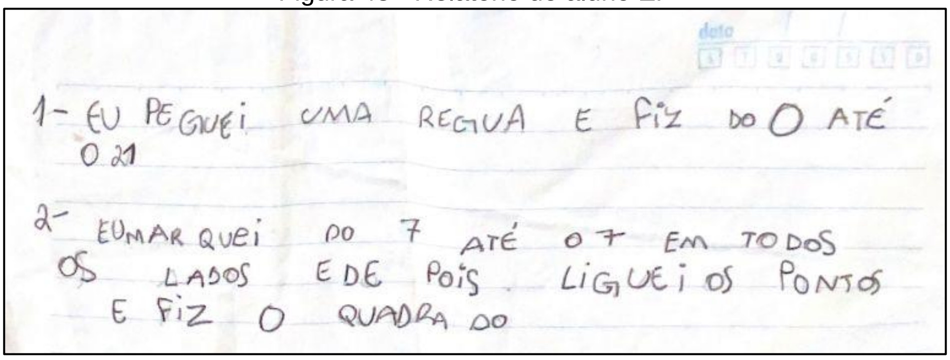
~ Primeiro medi 21 cm por 21 cm.
~ Depois recortei o excesso da folha.
~ Depois para conferir utilizei o esquadro para conferir se o quadrado estava certinho
~ Segundo, dividi meus 4 lados (de 21 cm) por 3, daí medi 7 cm no meio da folha e trascei
~ Terceiro passo, dividimos os 7 cm de cada quadrado por 3 e medimos o resultado na folha (Na diagonal e na horizontal) para ficar quadrados

Fonte: material produzido pelo aluno D.

Analisando o relatório do aluno D, pode-se identificar que este foi bem detalhista e descreveu suas ações corretamente, no entanto, utilizou a palavra diagonal quando estava se referindo a vertical, percebe-se que o aluno confundiu as duas direções, visto que, ao desenhar os quadrados, em nenhum momento foi necessário traçar as suas diagonais.

Já o aluno EF descreve que marcou pontos a cada 7 cm em torno de toda a borda da folha, para depois traçar as retas formando os 9 quadrados (Figura 48).

Figura 48 - Relatório do aluno EF

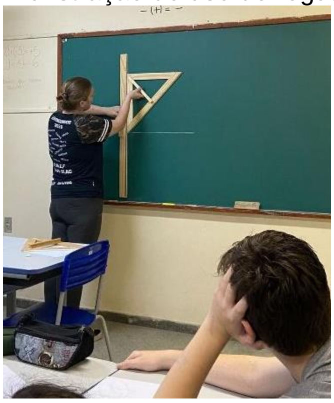


1- EU PEGUEI UMA REGUA E FIZ DO O ATÉ O 21
2- EU MARQUEI DO 7 ATÉ O 7 EM TODOS OS LADOS E DEPOIS LIGUEI OS PONTOS E FIZ O QUADRADO

Fonte: a pesquisa.

Após os alunos apresentarem suas diferentes estratégias para fazer a primeira iteração a professora demonstrou no quadro como fazer retas paralelas e perpendiculares utilizando régua e esquadros (Figura 49), para que os alunos que tinham dividido o quadrado em três partes pudessem traçar as retas e formar os outros quadrados.

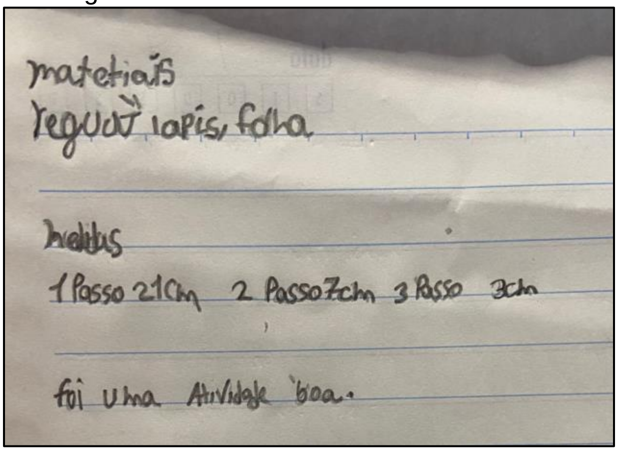
Figura 49 - Demonstração do uso de régua e esquadros



Fonte: a pesquisa.

Já observando outro relatório (Figura 50) percebe-se que o aluno EM não soube descrever o passo a passo realizado com detalhes mais específicos, apenas generalizou expondo em tópicos, mas percebe-se que, diferente dos demais alunos que apenas descreveram o seu passo a passo, o aluno indicou os materiais utilizados e ainda colocou sua opinião dizendo que foi uma atividade boa.

Figura 50 - Relatório do aluno EM



materiais
regua, lapis, folha

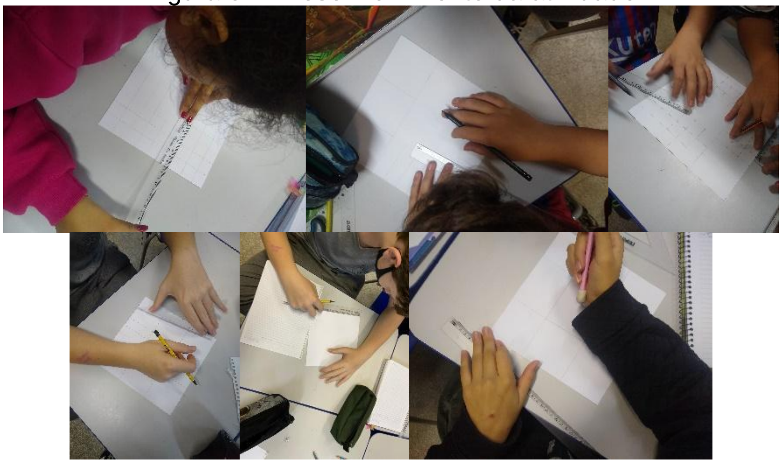
medidas
1 Passo 21Cm 2 Passo 7cm 3 Passo 3cm

foi uma Atividade boa.

Fonte: material produzido pelos alunos EM.

Na próxima iteração a professora questionou o que deveriam fazer para a realizar a tarefa, e o aluno EV falou que seria dividir novamente por 3 cada quadrado encontrado anteriormente, e assim fizeram (Figura 51).

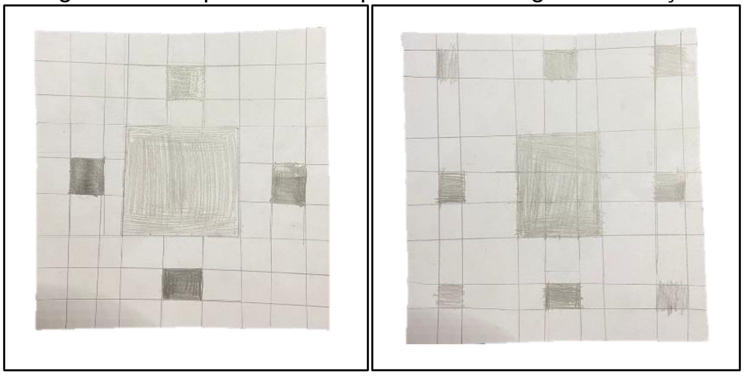
Figura 51 - Desenvolvimento da atividade



Fonte: a pesquisa.

Enquanto estavam realizando essa etapa, percebeu-se que os alunos mais novos de 6º ano desenharam de qualquer jeito (Figura 52), utilizaram a régua, mas sem medir exatamente e sem ter o cuidado para ficar reto, logo, não construíram exatamente quadrados, já que as linhas não ficaram retas paralelas, não se formou ângulos de 90º em todos os seus lados, bem como alguns ficaram maiores ou menores do que outros, dessa forma, a construção desses alunos não poderia ser classificada como um Fractal, visto que descumpre sua principal característica de manter a autossimilaridade em todas as suas iterações, destaca-se ainda que estes alunos realizaram somente até a segunda iteração.

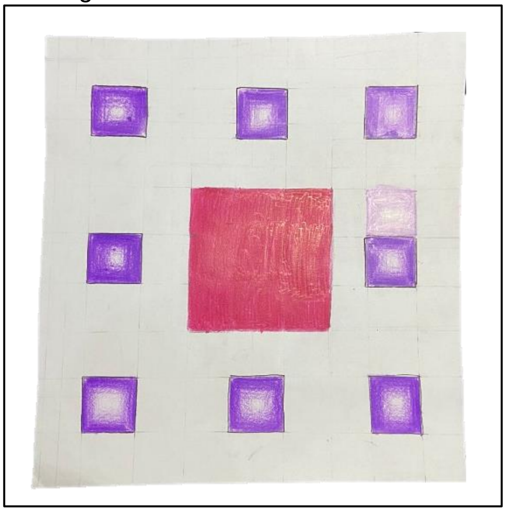
Figura 52 - Tapetes de Sierpinski até a segunda iteração



Fonte: material produzido pelos alunos.

Houve também, alguns alunos que por falta de atenção, erraram ao desenvolver a tarefa. Um exemplo é a atividade do aluno AJ, que errou ao pintar o seu Fractal (Figura 53), no entanto vale ressaltar que ele, possuindo o conhecimento de como deveria ficar, percebeu o erro e fez o possível para arrumar, porém, como havia pintado bem forte, pode-se notar que ele havia errado.

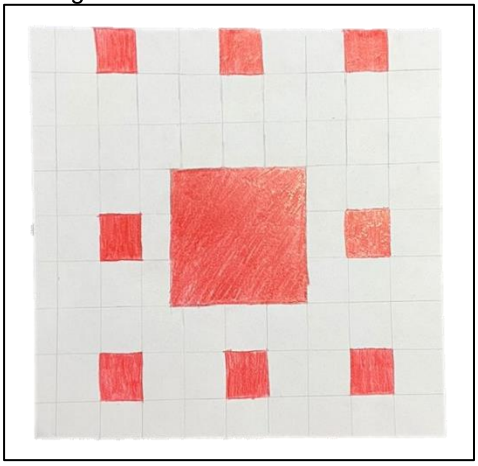
Figura 53 - Atividade do aluno AJ



Fonte: material produzido pelo aluno.

Outro caso que se pode observar é do aluno N, que errou ao realizar a segunda iteração. Analisando o lado esquerdo da sua atividade, percebe-se que o aluno fez uma marca de 2,7cm e em seguida fez marcas de 2,1cm, o que levou a obter uma coluna extra de quadradinhos, que resultaram em retângulos, pois não possuíam a mesma medida em todos os seus lados. O aluno N não percebeu e continuou o seu trabalho, demonstrando falta de atenção. Nota-se ainda, que na parte superior da sua construção em vez de pintar os quadrados centrais, pintou os de cima (Figura 54) e sequer percebeu o seu erro, entregando a atividade como estava.

Figura 54 - Atividade do aluno N



Fonte: material produzido pelo aluno N.

Aponta-se ainda, que durante a realização desta proposição, o aluno T questionou “E agora, é só fazer o mesmo sempre? Dá pra continuar né?”. A professora concordou, no entanto, o aluno começou a realizá-la e percebeu que seria mais trabalhoso visto que teriam nove vezes mais quadradinhos, fato que o levou a desistir na busca da terceira iteração. Destacando-se que, nessa incumbência, apenas 2 alunos continuaram a atividade até a próxima iteração (Figura 55).

Figura 55 - Atividades dos alunos D e EV

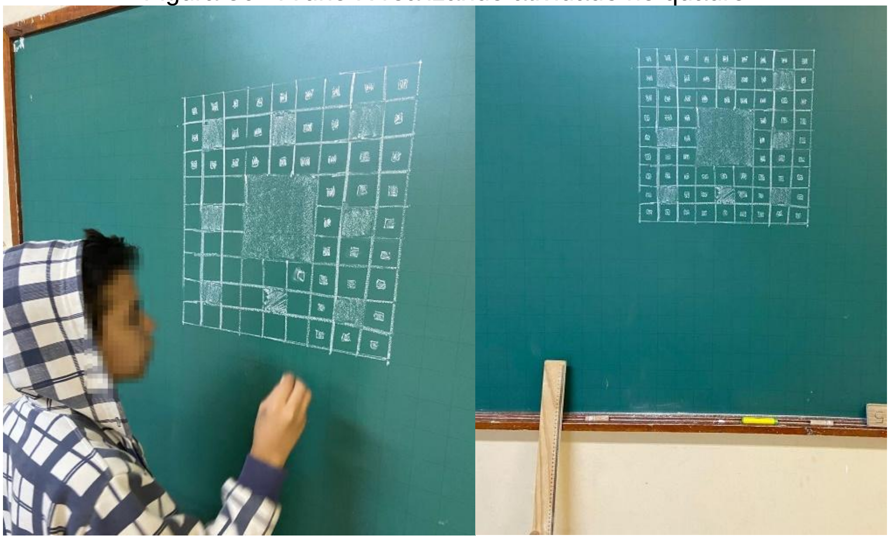
Fonte: materiais produzidos pelos alunos D e EV.

Outros aspectos que podem ser observados se devem aos relatórios da atividade. Quando o aluno EV apresentou dificuldades e disse não conseguir expor suas ações, descrevendo o que tinha feito, demonstrou que não compreendia que estava a cada etapa realizando os mesmos procedimentos, o que o impedia de formalizar os conceitos. Já o aluno D questionou “posso colocar que agora sempre faz a mesma coisa?” a professora concordou e explicou que sim, pois estavam falando de Fractais que de acordo com Miranda *et al*. (2008), os processos de construção dos Fractais seguem a propriedade da autossimilaridade, quando uma parte, de uma figura ou de um contorno, pode ser vista como uma réplica do todo, numa escala menor e a complexidade infinita é quando se executa um determinado procedimento, e no decorrer da mesma encontra-se como sub-procedimento o próprio procedimento anteriormente executado, destacando que na composição de um mesmo Fractal isso ocorre infinitamente, basta sempre repetir os procedimentos seguindo sempre o mesmo padrão de construção.

Destaca-se ainda a percepção do aluno R, que ao visualizar a imagem do Tapete de Sierpinski (Figura 16), a qual aparecem os quadrados centrais a cada iteração sem as linhas que formam as divisões dos demais quadrados, questionou a professora se poderia apagar as linhas que sobravam e deixar somente cada quadrado central, a professora concordou, mas ao realizar o aluno achou que daria muito trabalho então optou por pintar como os demais colegas.

O que aponta impaciência, por parte do aluno R, em dar continuidade na sua construção no papel, no entanto utilizando os instrumentos de desenho maiores que a professora havia demonstrado no quadro, R foi até o quadro e concluiu o desenho do Tapete de Sierpinski que a professora havia iniciado (Figura 56).

Figura 56 - Aluno R realizando atividade no quadro



Fonte: a pesquisa.

Formalizando o processo de construção do Tapete de Sierpiski, que segundo Lutz e Leivas (2021) se deve partir de um quadrado principal, e em seguida dividi-lo em nove outros quadrados, desconsiderando o central. Logo, repete-se o processo para cada um dos oito quadrados restantes, e assim sucessivamente vai se fazendo as iterações obtendo-se o mesmo.

Observa-se que os alunos compreenderam os processos realizados, e utilizaram instrumentos matemáticos como esquadro, e régua para se certificar de que estavam ficando retos e corretos os desenhos. Contudo, um aluno ao perceber que não obteve um quadrado ao traçar as retas, ponderou: “Prof. esses quadradinhos não estão ficando do mesmo tamanho que os outros” foi quando deu-se uma pausa na atividade para tentar compreender o que tinha ocorrido, então analisaram que: primeiro dividiram 21 por 3 e encontraram 7, aí marcaram utilizando os 7cm da régua para continuar, depois ao dividir o 7 por 3 encontraram 2,33, foi quando surgiu o questionamento pelo aluno EF: “Prof. como marco esse ,33 na folha”, os demais alunos ouvindo a interrogação responderam “usa o 2cm e 3 risquinhos!”.

Dessa forma eles realizaram mais uma iteração, até que ao precisar dividir mais uma vez para dar continuidade, realizando a divisão de 2,33 por 3 encontraram 0,77... e assim questionaram “e agora como vou marcar? É mais que 7, mas não é 8 risquinhos!”, e a aluna D completou: “Posso marcar entre 7 e 8 risquinhos?”, como a professora consentiu, dois alunos realizaram mais uma iteração. Assim, por não serem medidas exatas ao utilizar a régua, foi resultando pequenas diferenças nos tamanhos dos quadradinhos, como também se aponta que alguns alunos cometeram erros ao medir ou marcar, pois 1mm de diferença em um ponto, no final alteram as medidas, o que resultou em alguns quadradinhos maiores ou menores que outros.

Vimos que, segundo a definição da construção do Tapete de Sierpinski, indica-se que a cada iteração deve-se obter outros 9 quadrados no interior de cada quadrado vazio, e 1mm de diferença que seja, não corresponde a condição de existência do quadrado que é possuir os quatro lados com medidas congruentes.

No seguinte encontro, da mesma forma que foi proposto a construção do Tapete, foi a vez do próximo momento da proposta, a construção do Triângulo de Sierpinski, novamente utilizando o *powerpoint* (Apêndice E) a professora apresentou aos alunos aspectos referentes aos triângulos, destacando a diferença entre estes quanto a sua classificação por números de lados congruentes e especificamente sobre o triângulo equilátero, quanto à medida dos lados e também de seus ângulos, já que a construção do Triângulo de Sierpinski parte de um equilátero. Em seguida, apresentou também a imagem do Fractal para que esta fosse analisada pelos alunos, além de lançar o primeiro questionamento, que instigou ao diálogo:

> **Professora**: - Vamos construir o triângulo, como vocês fariam para desenhar um triângulo equilátero, lembrando que ele tem que ter os três lados e os três ângulos iguais.
> **Aluno A**: - Usando a régua.
> **Professora**: - Ok, mas começaria por onde?
> **Aluno EV**: - Marcaria a folha no meio, colocando a régua nessa marcação, mediria 15 pra baixo, depois com a régua desenha uma reta de base e liga da ponta da reta da vertical, com as pontas da reta da base.
> **Professora**: - E vocês acham que ficaria equilátero, o que nos garante isso?
> **Aluno EM**: - Não.
> **Aluno EV**: - Não sabemos, mas posso tentar?

Então a professora disponibiliza tempo para os alunos tentarem e eles percebem que com essa técnica não fica equilátero. E tentando de outras formas o aluno EV continua:

> - Eu faria um círculo com o compasso, e dividiria ele no meio com a régua, e traçava uma linha no meio embaixo e ligaria as pontas dos lados dessa linha até em cima.

No entanto, ao medir com a régua percebeu que ele também não ficaria exatamente igual, aí foi ajustando a abertura das laterais até conseguir obter um triângulo equilátero, mas sem um procedimento específico.

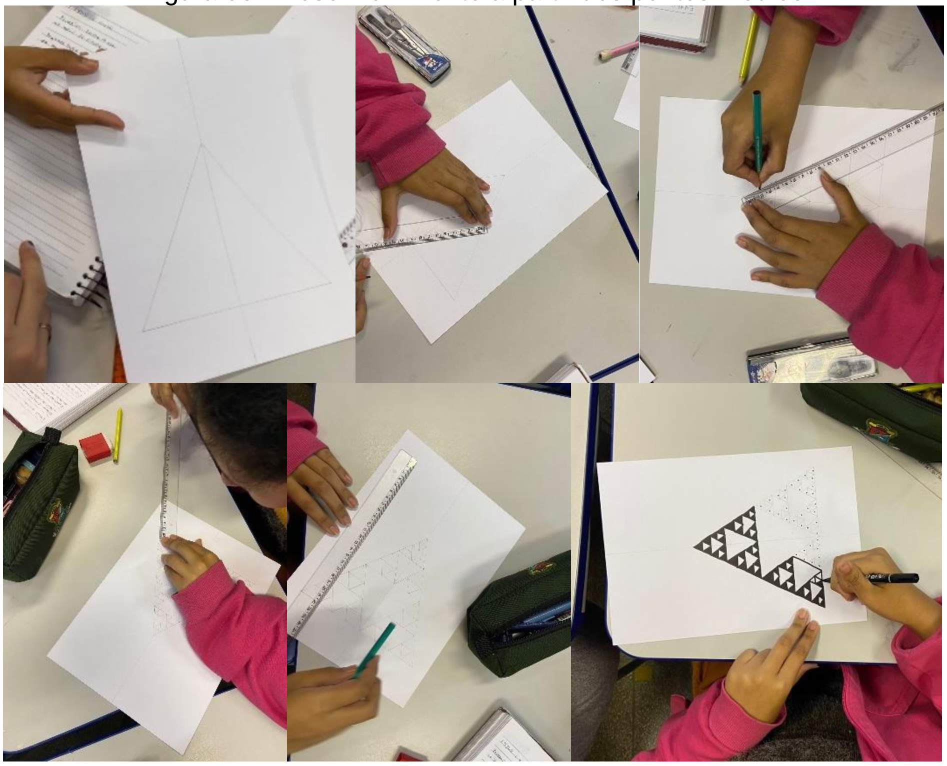
A professora então, ensinou os alunos a obterem ângulos a partir do transferidor e também a utilizar o compasso para desenhar arcos, além de demonstrar no quadro o processo de construção de um triângulo equilátero utilizando a régua e o compasso (Figura 57).

Figura 57 - Demonstração da construção de triângulo

Fonte: a pesquisa.

Assim, os alunos construíram o primeiro triângulo e foram desafiados a fazer a próxima iteração (Figura 58). Estes, analisando a imagem do Fractal sugeriram: "vamos ligar o meio da parte de baixo com o meio das laterais e vai formar os quatro triângulos." A professora concordou e aproveitou para explicar aos alunos que eles estavam utilizando o ponto médio de um segmento de reta, o qual determina o meio de um segmento de reta e assim concluiu que conforme Oliveira (2019) esse processo de marcar os pontos médios das laterais do triângulo inicial e traçar outros triângulos ligando os seus pontos médios, os alunos obteriam os outros 4 triângulos e se pintassem o central, estariam obtendo o Fractal de Sierpinski.

Figura 58 - Desenvolvimento a partir dos pontos médios



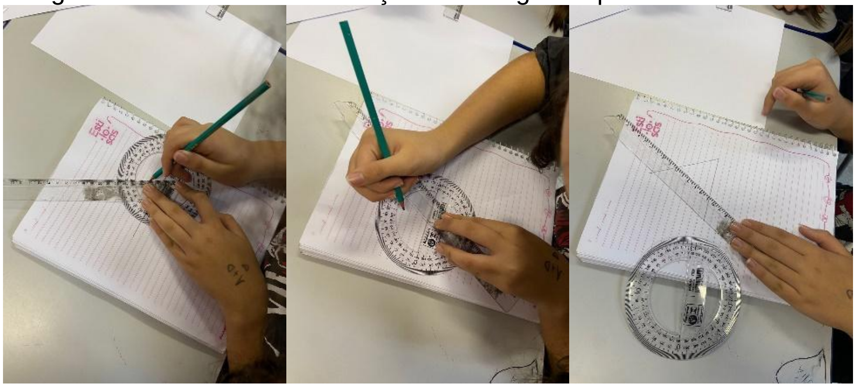
Fonte: a pesquisa.

Aproveitando o ensejo, a professora os questionou se poderiam continuar e como fariam isso? Ao que os alunos prontamente responderam “Sim, é só repetir a mesma coisa em cada triângulo vazio e ir pintando os do meio.”. Desta forma, os alunos continuaram a suas iterações e construíram o triângulo de Sierpinski (Figura 58). Logo, todos os alunos realizaram a atividade prontamente, no entanto, destaca-se que alguns alunos de 6º ano, não tinham ainda utilizado instrumentos geométricos de desenho, e sentiram maior dificuldade, o que os levou a não fazer tantas iterações como os alunos de 7º e 8º ano.

Nota-se ainda, que por necessitar de procedimentos geométricos específicos, demandou mais tempo de reflexão pelos alunos e foi necessário lhes instruir a utilizar as ferramentas geométricas para a construção dos triângulos, no entanto pode-se compreender que a atividade contribuiu para o desenvolvimento dos conceitos geométricos de congruência e semelhanças previstos pela BNCC (BRASIL, 2018).

Contudo, analisando a participação e também o relatório de execução da sua atividade observa-se o desempenho do aluno D, que diferente dos demais colegas optou em utilizar o transferidor para a construção, visto que chamou sua atenção o fato de os equiláteros possuírem os três ângulos iguais de 60º, dessa forma o aluno realizou primeiramente um teste em seu caderno para fazer o triângulo inicial (Figura 59).

Figura 59 - Testes de construção do triângulo equilátero do aluno D

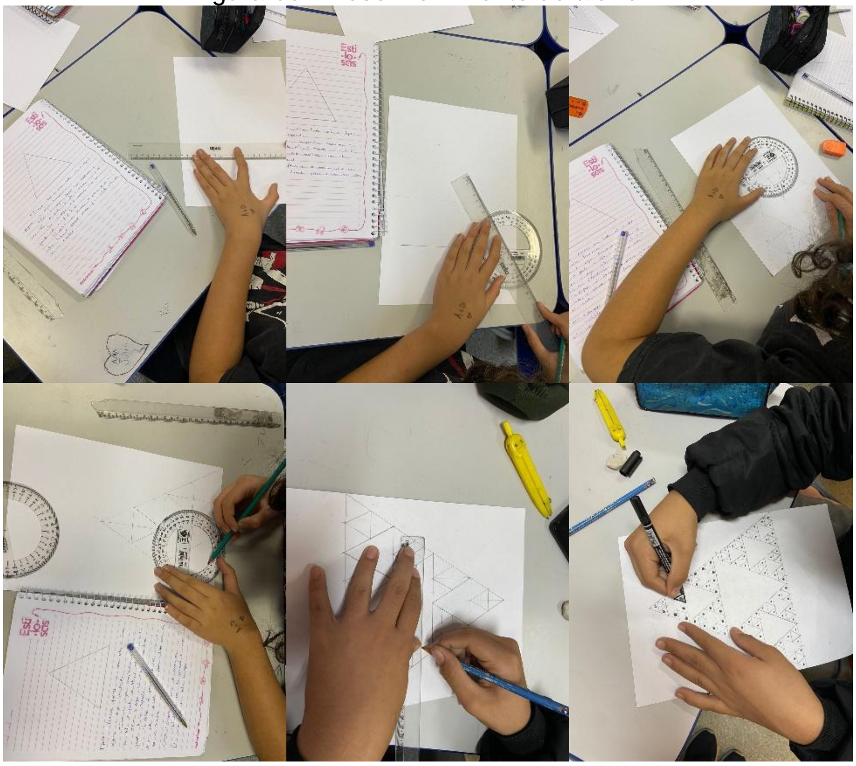


Fonte: a pesquisa.

Como verificou que ficava exatamente o triângulo equilátero, resolveu utilizar esse procedimento tanto no inicial como nas demais iterações, ele desenhou um segmento inicial, mediu os ângulos com o transferidor e traçou o seu triângulo (Figura 60) e apesar de perceber que apenas marcando os pontos médios ficava mais prático de fazer as demais iterações, ele continuou utilizando o mesmo procedimento do transferidor a cada iteração, afirmando ser a característica do Fractal, garantindo mais uma vez a complexidade infinita e a autossimilaridade.

O que indica o desenvolvimento da habilidade 24 do 7º ano do Ensino Fundamental prevista para a atividade, que consistia em construir triângulos fazendo uso de instrumentos de desenho como régua, compasso, esquadros e transferidor, bem como verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180° (BRASIL, 2018, p. 309).

Figura 60 - Desenvolvimento do aluno D



Fonte: a pesquisa.

Além disso o aluno, também descreve detalhadamente em seu relatório (Figura 61), observando-se que o mesmo compreendeu todo o processo de construção do Triângulo de Sierpinski.

Figura 61 - Relatório do aluno D

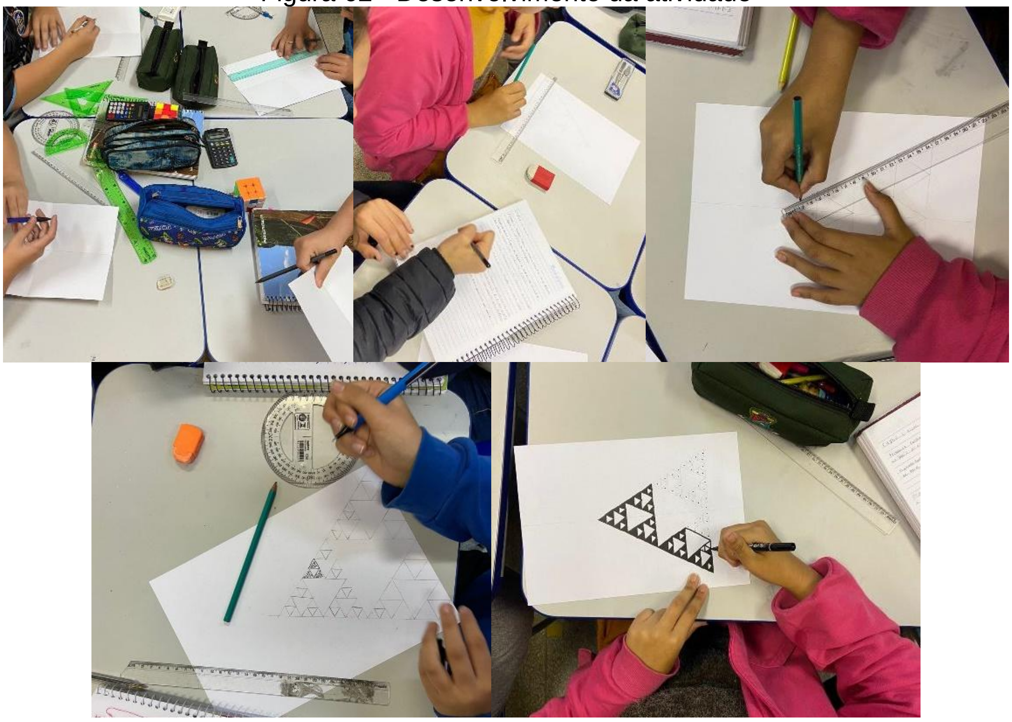
1º passo:
– Primeiro fazemos uma linha reta, e depois pegamos a régua transferidor.
– Com a régua transferidora, colocamos o zero (0°) na ponta da reta, e medimos até o 60°.
– Com a régua reta, medimos uma linha grande (de sua preferência).
– E depois só fazemos a mesma coisa no outro lado, e quando formos fazer a linha reta elas vão se encontrar.

2º passo: ~ Marquei o meio do triângulo,
~ Utilize a régua transferidora e marquei os 60° e assim fiz um outro triângulo.
~ e continue com o processo quantas vezes quiser.

Fonte: a pesquisa.

Por fim, os alunos foram construindo o seu Fractal, pintaram e também descreveram por escrito cada etapa, cada ação, adotadas por eles de modo a formalizar a atividade desenvolvida. (Figura 62).

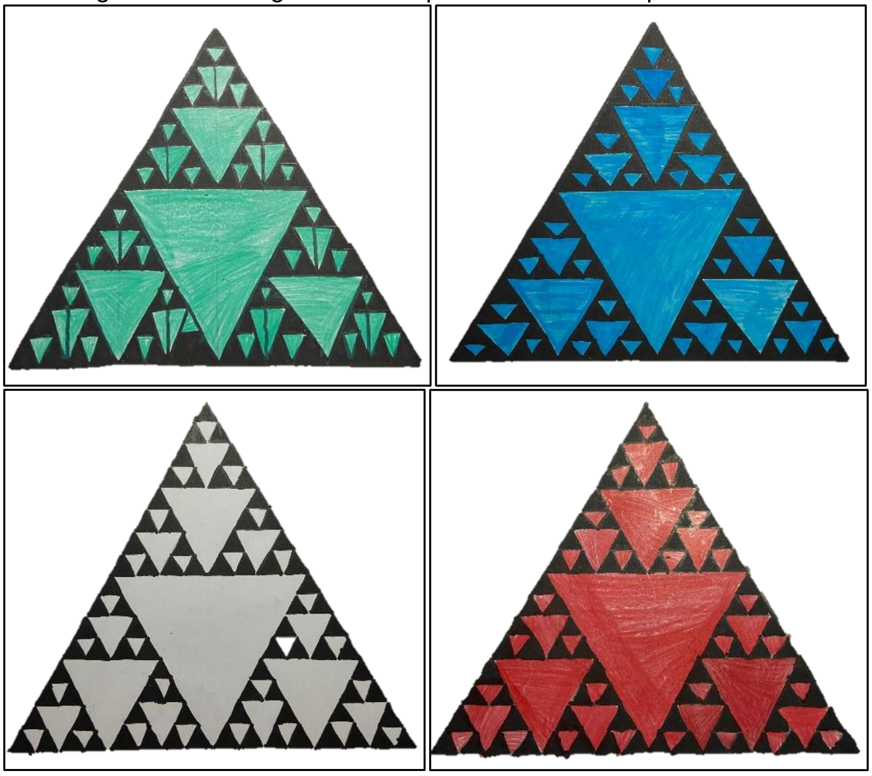
Figura 62 - Desenvolvimento da atividade



Fonte: a pesquisa.

Notou-se que na hora de relatar por escrito o passo a passo realizado em cada etapa da atividade, os alunos de forma geral apresentaram dificuldades em expressar por escrito àquilo que haviam realizado. Para eles foi extremamente difícil relatar, com suas palavras o que fizeram, preocupavam-se em utilizar termos matemáticos ou diziam “Eu desenhei assim, mas não sei como escrever”, mas apesar de ser uma atividade em que demandou mais tempo de aplicação devido aos procedimentos necessários para a construção dos triângulos, ressalta-se o bom desempenho dos alunos ao apresentar o seu Fractal final (Figura 63).

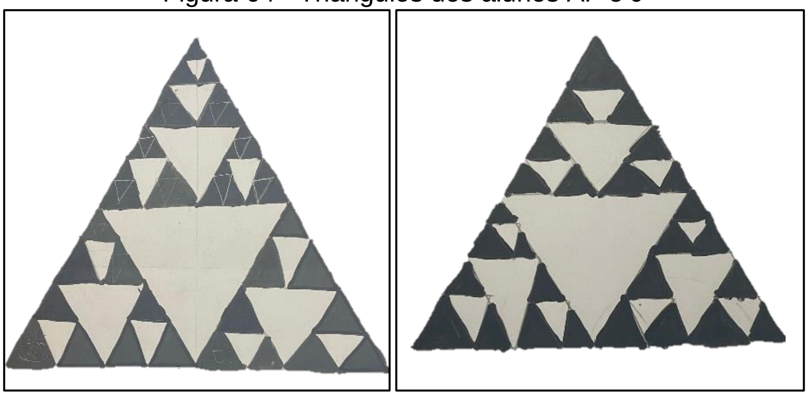
Figura 63 - Triângulos de Sierpinski construídos pelos alunos



Fonte: a pesquisa.

Todavia, é preciso também apontar o desempenho de dois alunos que não tiveram tanto cuidado nas suas construções (Figura 64), deixando em alguns traços bem nítidos os erros, já que não formam triângulos equiláteros, os quais pela definição do Triângulo de Sierpinski precisariam ser. Nota-se ainda, que o aluno AF, triângulo a esquerda, além de não ser preciso ao realizar as iterações, havia começado a realizar a próxima iteração e acabou desistindo, portanto ao pintar passou canetão por cima e mesmo assim continuou aparecendo os triângulos que havia desenhado, deixando o Fractal incorreto, visto que ficam pintados triângulos em volta do central, que não deveriam.

Figura 64 - Triângulos dos alunos AF e J

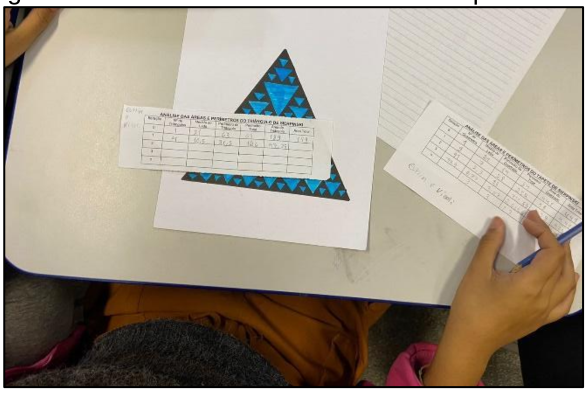


Fonte: a pesquisa.

Contudo, é importante ressaltar que a Geometria permite descobertas, construções e manipulações, o que evidentemente ocorreu durante a realização da atividade, atendendo ao que é proposto pela BNCC, no que se refere ao estudo da Geometria buscando instigar os alunos a analisar, comparar, contrapor, e até mesmo recriar, de acordo com diferentes contextos (BRASIL, 2018; FONSECA, 2009).

Já no terceiro dia de aplicação da proposta, iniciou-se a aplicação do sexto momento, no qual realizou-se a análise das áreas e perímetros dos fractais de Sierpinski construídos nas atividades anteriores. A professora distribuiu as tabelas para preenchimento e inicialmente abordou os conceitos de área e perímetro. Depois especificamente expos como se calculam áreas e perímetros de quadrados e triângulos. Assim, os alunos utilizaram a régua para medir os seus desenhos construídos e foram realizando os cálculos necessários a partir de cada iteração (Figura 65).

Figura 65 - Aluno EV analisando áreas e perímetros



Fonte: a pesquisa.

Em seguida, a professora instigou-os a refletir sobre o que ocorria com as quantidades de figuras e as medidas de área e perímetro após cada iteração. Então eles foram fazendo ligações, como por exemplo ao analisar o Tapete de Sierpinski, eles dividiam cada quadrado por 3, o que gerava outros quadrados, então concluíram que as quantidades aumentavam sempre multiplicando-se por 3, e assim como dividiam as medidas, as áreas diminuíam na mesma proporção, bem como o perímetro, o que novamente ficou mais uma vez explícita uma das principais características dos Fractais, que é a complexidade infinita das interações.

No entanto, identifica-se dificuldades por parte dos alunos, principalmente quando se observa o desempenho do 6º ano ao realizar os cálculos, sendo necessário retomar as fórmulas de área e perímetro, como também os cálculos. Tal fato pode ser percebido, observando a tabela preenchida pelo aluno R (Figura 66), que tem equívocos nas respostas apresentadas, uma vez que ao analisar a coluna das áreas totais, percebe-se que não está ocorrendo a regularidade, que por se tratar de um fractal e que as iterações são realizadas sempre internamente no mesmo fractal, no final a área total de uma iteração nunca será maior que a iteração anterior.

Figura 66 - Análise de Áreas e Perímetros do aluno R

ANÁLISE DAS ÁREAS E PERÍMETROS DO TRIÂNGULO DE SIERPINSKI

Iteração	Nº de Triângulos	Medida do Lado	Perímetro do Triângulo	Perímetro Total	Área do Triângulo	Área Total
0	1	21	63	63	189	189
1	4	10,5	31,5	94,5	47,25	141,75
2	9	5,25	15,75	141,75	11,81	106,31
3	27	2,625	7,875	212,62	2,91	79,73
n	81	1,31	3,93	318,37	0,73	59,42

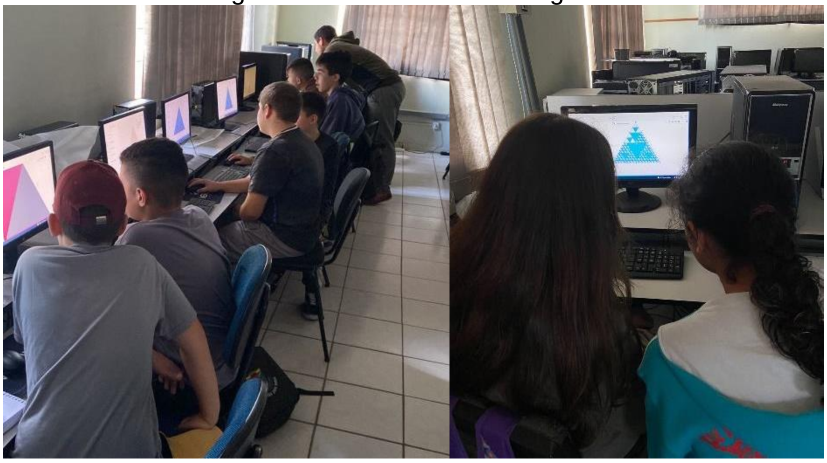
Fonte: a pesquisa.

Em compensação os alunos de 7º e 8º ano conseguiam identificar mais prontamente o que calcular e utilizavam a calculadora quando se tratava de números decimais, nesse momento também pode-se trabalhar a questão de arredondamento, pois na medida que eles iam arredondando os números decimais, alteravam os valores finais.

Cabe destacar que o momento dos cálculos de área e perímetro que exigiu o uso de procedimentos matemáticos de uma forma tradicional, exigindo dos alunos concentração ficando evidente para a professora, a falta de interesse dos estudantes. Como abordado no referencial teórico desta investigação, na qual autores como Tolomei (2017) e Almeida e Pimenta (2009) identificaram que o uso de atividades diferenciadas promove maior interesse pelos alunos, bem como os leva a refletir, sem nem perceber, facilitando o processo de aprendizagem e tornando-o convidativo.

Após concluir a tarefa, os alunos foram levados ao laboratório de informática para a atividade seguinte que seria a construção do Triângulo de Sierpinski com o uso do *Software* Geogebra (Figura 67). Inicialmente a professora com o auxílio do *Datashow* apresentou o programa para os alunos e mostrou algumas das suas funcionalidades, em seguida deixou um tempo para que eles utilizassem o programa de forma livre e pudessem compreender o funcionamento de suas ferramentas. Os alunos testaram os recursos disponíveis e demonstraram interesse, visto que ficaram silenciosos e concentrados dedicando-se a explorar o programa e tentar desenhar figuras.

Figura 67 - Atividade no Geogebra



Fonte: a pesquisa.

Então, iniciando a atividade a professora propôs que os alunos desenhassem um triângulo equilátero, eles então desenharam este a partir da ferramenta de figura regular de 3 lados, assim todos os lados tinham a mesma medida. No entanto, como para a construção do Triângulo de Sierpinski precisava dos pontos de construção do Triângulo, a professora orientou aos alunos que observassem o seu triângulo e com o auxílio da malha e dos eixos verificassem as medidas para construir um triângulo, utilizando a ferramenta de polígonos. Em seguida a professora os questionou: “Lembram como desenhamos os próximos triângulos no papel, o que fizemos?”, então o aluno EV respondeu: “Medimos a metade dos lados do triângulo e marcamos o meio, depois ligamos os pontos”. A professora concordou e então disse que deveriam fazer o mesmo ali no programa e que para isso poderiam utilizar a ferramenta do ponto médio, a qual consiste em clicar nas suas extremidades de um segmento para que o programa dê o seu ponto médio, em seguida com a ferramenta do polígono novamente, clicando nos pontos médios encontrados formarão o triângulo central.

Durante esse momento, a professora precisou auxiliar os alunos nas etapas desenvolvidas e relembrar o uso das ferramentas do programa. Alguns alunos apresentaram um pouco mais de dificuldade para completar a atividade, no entanto, de forma unânime os alunos demonstraram bastante interesse e interagiram proativos, iam questionando os colegas e trocando informações até que conseguissem completar o Fractal.

Diante disso, a professora deu continuidade, ensinou aos alunos como construir uma nova ferramenta no programa, que iria realizar as iterações sem precisar ficar desenhando triângulo por triângulo. Num primeiro momento a professora realizou em seu computador para que os alunos conseguissem visualizar e em seguida foi auxiliando os alunos a realizarem cada um o seu. Após a criação da ferramenta pode se perceber que os alunos tiveram ainda mais interesse, já que ficaram impressionados que o programa desenhava para eles de forma correta, assim exploraram o programa, e percebendo que conseguiam dar *zoom* nos triângulos que ainda estavam vazios, e utilizando a ferramenta conseguiam realizar mais iterações, foram as realizando e formaram o seu Fractal Triângulo de Sierpinski (Figura 68).

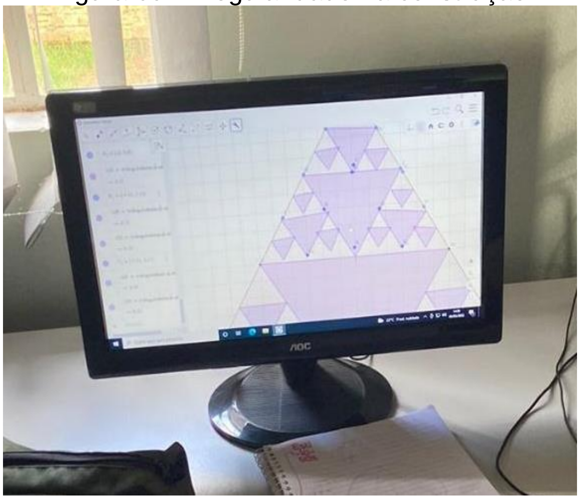
Figura 68 - Triângulo de Sierpinski no Geogebra

Fonte: a pesquisa.

Nesse momento surgiram alguns questionamentos, já que alguns triângulos não ficavam exatamente retos dentro dos outros (Figura 69), resultando no diálogo:

Aluno N: - Prof. não está ficando reto aqui.
Aluno D: - Cuida onde tu tá clicando os pontos.
Aluno N: - Mas estou colocando no lugar certo.
Aluno D: -Se der *zoom* dá para ver melhor onde clicar e fica mais reto.

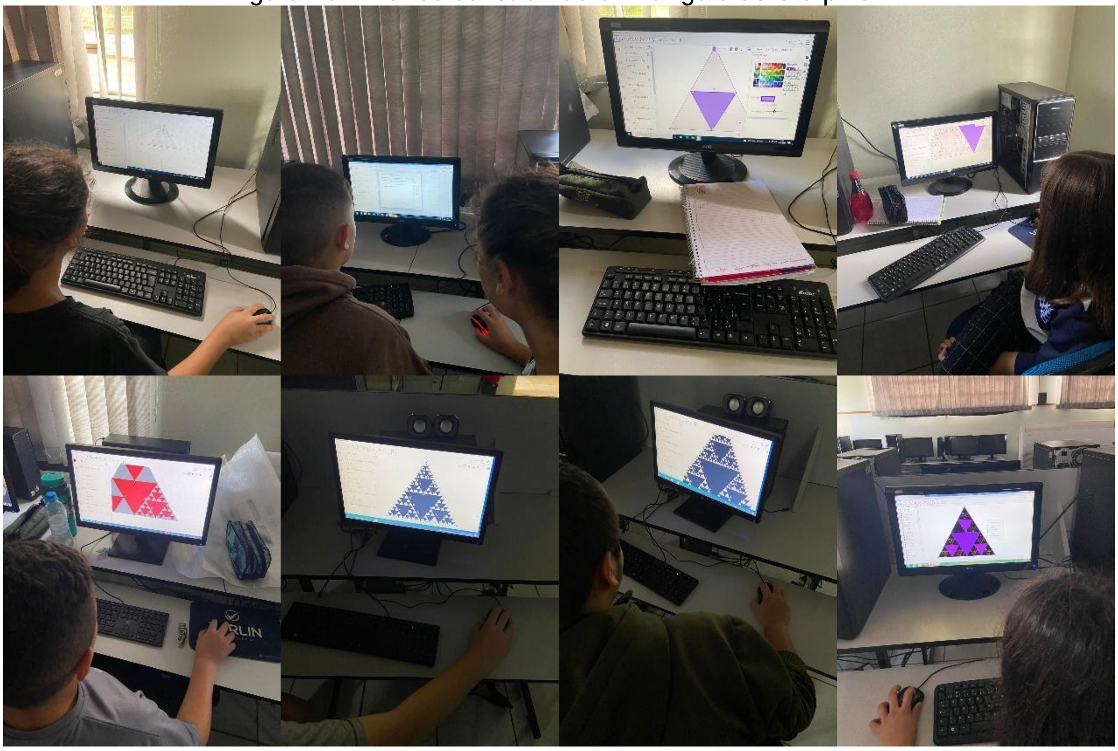
Figura 69 - Irregularidade na construção



Fonte: a pesquisa.

A professora aproveitou então o diálogo e conversou com os alunos a respeito das características do Fractal que - como tinham já discutido em sala de aula na construção em papel,- o triângulo deve ser equilátero, já no programa, alguns desenharam o triângulo sem ter a certeza de que este era equilátero, então quando faziam com a medida um pouco diferente, ele não ocuparia exatamente a parte central e começaria a dar mais diferenças, assim os alunos conseguiram compreender a importância de o triângulo ser o equilátero e responder a pergunta que a professora tinha feito em sala: “Se seria possível construir o Fractal com outro triângulo que não fosse equilátero?”. Alguns responderam que não era possível, porque se era assim, era assim. Já o aluno D, destacou que seria possível, mas as medidas seriam diferentes e assim no laboratório ele conclui: “Tá ficando torto por que o triângulo não era o equilátero né Prof.?”, e o aluno EV complementa: “Ficou o Fractal, mas um pouco tortinho, principalmente se olhar com o *zoom*”. Assim, destaca-se que essa atividade (Figura 70) foi de grande valia, pois demonstrou que eles não enxergavam apenas o Fractal, mas ao dar o *zoom* poderiam aprofundar a sua construção e ver inúmeras iterações, e à medida que iam fazendo se não cuidassem ao selecionar os pontos, o Fractal poderia perder a sua autossimilaridade, o que identifica-se mais uma vez o uso das tecnologias digitais como uma ferramenta de suporte ao processo de ensino e aprendizagem, por promover um espaço de interação e exploração dos recursos oferecidos (GOUVEIA; MATOS, 2019).

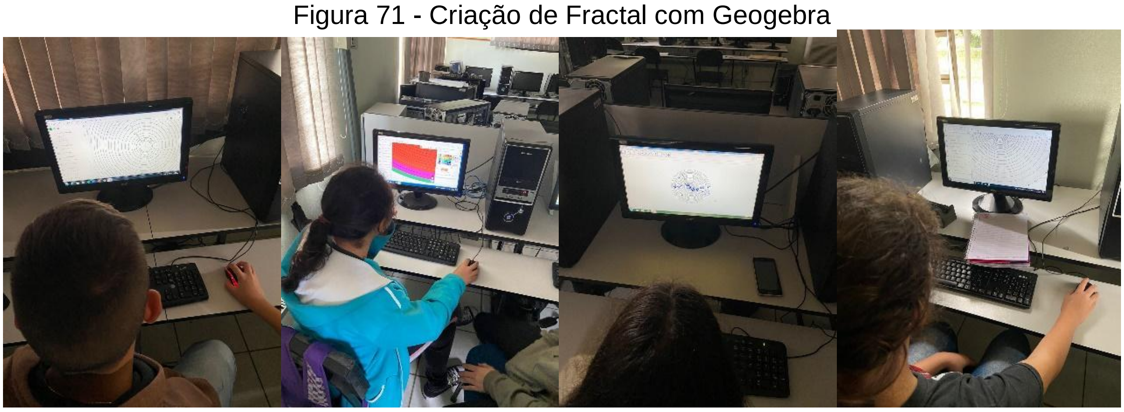
Figura 70 - Alunos construindo o Triângulo de Sierpinski



Fonte: a pesquisa.

Assim, aproveitando o engajamento do grupo de alunos, a professora lançou o último desafio que seria para eles criarem o seu próprio Fractal. Para isso, eles poderiam utilizar desenhos feitos a mão ou o programa, e todos os alunos optaram por construir o seu Fractal utilizando a tecnologia, destacando que o mais comum entre eles foi utilizar a circunferência, visto que eles já haviam construído o Tapete a partir de Quadrados e o Triângulo de Sierpinski, então com a ferramenta de desenhar circunferências, decidiram criar Fractais com esta figura (Figura 71).

Figura 71 - Criação de Fractal com Geogebra

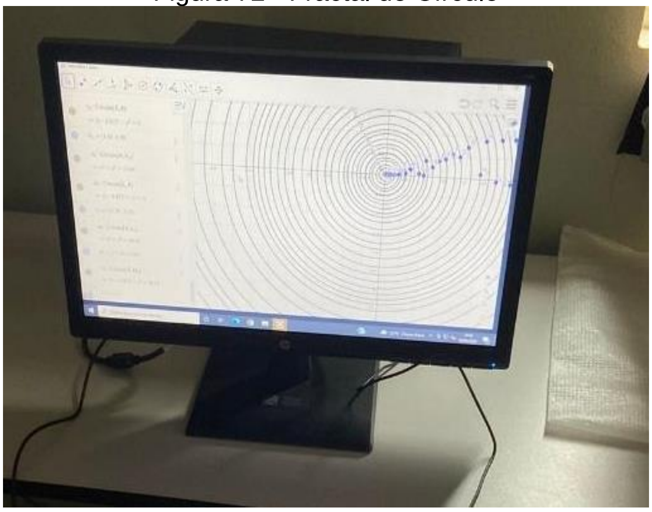


Fonte: a pesquisa.

Destaco dois casos, a dupla de alunos EV e N, resolveu desenhar um círculo, e por fora desse outro, e depois outro e assim por diante, no entanto perceberam que ele não conseguia mais visualizar espaço para desenhar outros círculos e falou “Prof., deveria ter feito ao contrário né”, a professora observou e a outra dupla de alunos D e AJ ouvindo a colocação dos colegas falaram: “É a mesma coisa, se tu aproximar o *zoom* vai dar espaço pra ir fazendo os círculos dentro e tu pode fazer vários”.

A professora então, conclui o pensamento dos alunos concordando e verificando o trabalho feito por eles, bem como o dos demais grupos que interagindo entre si foram desenhando na mesma linha de pensamento dos colegas. No entanto, percebe-se a partir da Figura 72 que teve alunos que apenas pensaram em repetir os círculos e não respeitaram a característica do Fractal de manter a mesma distância entre eles.

Figura 72 - Fractal do Círculo



Fonte: a pesquisa.

Diante das atividades realizadas a partir do *software* Geogebra, pode se compreender as potencialidades do uso das TIC nos processos de ensino e aprendizagem, visto que os alunos interagiram, colaboraram, construíram e fixaram o seu conhecimento, comprovando na prática o que sugere Almeida e Pimenta (2009), com relação ao fato dos alunos estarem conectados o tempo todo, seja para conversar, se relacionar, ler, estudar, jogar ou simplesmente navegar pelas redes sociais. Então, entende-se que não é dentro de sala de aula que se deve inibir o uso dessas tecnologias, mas sim aliá-las em favor da construção de conhecimentos, inserindo-as no contexto educacional e aproximando o aluno das tecnologias, sem perder o foco no ensino.

E assim, encerram-se as atividades sobre os Fractais, salientando que ao final das atividades os alunos sabiam responder prontamente o que são Fractais, quais as suas características e como construí-los. Assim como apresentam-se mais familiarizados com os conceitos geométricos abordados em sala de aula, no entanto, percebe-se que os alunos de 6º ano não conseguiram responder no questionário final o que eram os termos geométricos. Quanto aos alunos de 7º ano houve dois alunos que sabiam e outros 3 que responderam não lembrar dos conceitos vistos. Analisando os questionários do 8º ano percebe-se que estes tiveram uma abstração maior dos conteúdos matemáticos, pois responderam corretamente às questões propostas.

O que faz refletir a ideia já trazida em Kaleff (1998), indicando que apesar de os conceitos e elementos geométricos como ponto, reta, plano, etc. serem algo explícito para os matemáticos, estes elementos tiveram sua origem no mundo físico, mas necessitam da abstração para a sua compreensão, e para os alunos é algo mais difícil de abstrair, o que torna desafiador o processo de ensino e aprendizagem da Geometria.

Por fim, analisando a opinião dos alunos ao participarem das atividades propostas em relação ao desenvolvimento do seu processo de ensino e aprendizagem, de forma unânime pode se perceber o entusiasmo dos alunos, os quais gostaram de participar, assim como julgaram ter aprendido os conceitos abordados, já que a partir do questionário final, quando questionados a respeito dos encontros, obteve-se respostas como:

> **Aluno D**: - Tentei me esforçar para me dar bem, amei os encontros, achei todos incríveis.
> **Aluno AJ**: - Eu me diverti bastante e aprendi muito.
> **Aluno AF**: - Eu participei de todas as aulas e foi a melhor aula.
> **Aluno N**: - Eu gostei e aprendi bastante.

O que leva mais uma vez a reflexão das potencialidades do uso de atividades diferenciadas nos processos de ensino e aprendizagem, tendo em vista, como afirmam Petrillo, Melo e Pontes (2019) o mundo que nos rodeia está em constantes transformações e cabe aos sistemas de ensino, educadores e pesquisadores promoverem aprendizagens interativas que possam suprir as necessidades dos alunos, além de permitir o desenvolvimento dos conteúdos da Educação Básica, quebrando paradigmas do ensino tradicional.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Hoje, os alunos chegam à sala de aula com uma vasta bagagem de conhecimentos e sabem diferentes métodos que podem lhes ajudar a resolver problemas matemáticos. Então, entende-se que ficar apenas nos métodos técnicos, teóricos e tradicionais, já não tem o mesmo efeito para uma aprendizagem concreta e satisfatória.

Dessa forma, diante desta investigação pode-se destacar o uso de abordagens colaborativas, sendo que os alunos tiveram autonomia, e engajamento durante todas as atividades, em que a pesquisadora se posicionou como mediadora das ações e instigou os alunos a pensarem e resolverem os problemas propostos. Ficando diante disso, perceptível as contribuições de trabalhos colaborativos nos processos de ensino e aprendizagem dos conteúdos matemáticos explorados, já que a partir da interação foi evidente que os alunos pensaram, compartilharam ideias, discutiram possibilidades, tentaram, refletiram e mudaram de opinião, conseguindo tomar decisões convincentes e realizar as atividades, o que de fato fez com que a colaboração ocorresse.

Ainda, pode se observar que o uso de tecnologias digitais, por meio de jogos didáticos, contribui para a aprendizagem Matemática, pois a partir das experiências de forma espontânea, em meio aos desafios e diversão, os alunos compreenderam os conceitos abordados e construíram o seu próprio conhecimento. No entanto, cabe ressaltar as limitações que planejamentos voltados apenas ao uso das tecnologias, que dependem de redes de *internet,* ou outros materiais que fogem do controle direto do professor, visto que podem promover dificuldades no desenvolvimento das propostas didáticas. Bem como, vivenciou-se na aplicação desta investigação, salas de aula que apesar de serem equipadas com televisores e *notebooks*, possuem conexões *wifi* que não suportam toda a demanda da escola. Assim, com o sinal oscilando, não foi possível utilizar a plataforma *Kahoot* em sala de aula como planejado, sendo necessário repensar e adaptar a proposta para que fosse possível executá-la, o que acabou gerando mais tempo de aplicação das atividades. No entanto, ressalta-se que apesar das dificuldades, essas não foram empecilhos para as aplicações da proposta didática, visto que, como já vem da natureza do professor, este deve sempre buscar caminhos e alternativas, como diz o ditado popular: “deve ter uma carta na manga[4]”, para que seja possível desenvolver as atividades mesmo que não exatamente como haviam sido planejadas. Dessa forma, destaca-se que assim ocorreu, a pesquisadora adaptou as atividades e voltando a fazer o uso do laboratório de informática, conseguiu desenvolver a proposta.

Identificou-se, ainda, nas atividades de análise das áreas e perímetros dos quadrados e triângulos, uma maior dificuldade dos alunos, principalmente nos de 6º ano, na hora de compreender os conceitos matemáticos necessários para as resoluções delas. Observou-se que por envolver um momento de atividade tradicional, gerou pouco interesse nos alunos, que não conseguiram realizar corretamente as atividades, desistindo facilmente de tentar. Dessa forma, fica explicito a necessidade de reformular a atividade, para incorporar metodologias ativas de aprendizagem que possam cativar os alunos e os levem a compreender esses conceitos.

Assim, de forma geral, ao final da aplicação identifica-se que os alunos de 6º ao responderem o questionário final, responderam prontamente o que é a Geometria, o que são Fractais e suas principais características, no entanto apresentaram uma maior dificuldade em relacionar a temática aos conceitos matemáticos, ou seja, não ficou clara para este grupo de estudantes a conexão existente entre os cálculos de área e perímetro de um Fractal. O que nos faz refletir sobre os desafios dos processos de ensino em Geometria, referente a capacidade de abstração de conceitos matemáticos a partir de elementos visuais.

Ainda, cabe ressaltar que esta dificuldade, enfrentada pelos estudantes do 6° ano do Ensino Fundamental, pode ter ocorrido em virtude do momento pandêmico vivenciado no mundo, no qual estudantes de escolas públicas ficaram sem o contato direto com os professores, por um período de dois anos (2020-2021).

Já quando se observou as produções dos alunos de 7º e 8º ano, identificou-se que estes demonstraram ter construído conhecimentos, sabendo responder o que é a Geometria e o que são Fractais, como também diferenciar triângulos e identificar conceitos geométricos, como ponto médio e congruência. Perguntas e conceitos esses, que não faziam ideia de como responder ou de que se tratava no início da aplicação. Logo, entende-se que esta pesquisa contribuiu para o processo de ensino

[4] Ditado popular que indica possuir um plano B, para realizar o que propões caso algo não de certo ou exija outras formas.

e aprendizagem desses alunos e pode ser utilizado como material didático na abordagem de conceitos geométricos no Ensino Fundamental.

Dessa forma, esta pesquisa trouxe indícios sobre o uso da temática Fractais, quando desenvolvida por meio de uma sequência didática pode ser uma alternativa para envolver os alunos no processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos matemáticos, visto que a temática desperta o interesse no aluno, justamente por ser algo diferente, que vai além do ensino tradicional que faz parte do cotidiano da escola, a qual interliga os alunos à natureza e às belezas que os Fractais trazem em suas composições. Sendo possível utilizá-los como abordagens atrativas e incentivadoras da criatividade para trabalhar os conceitos matemáticos, especificamente, os geométricos, de forma a desenvolver o pensamento crítico e a construção de conhecimentos tanto matemáticos, como extramatemáticos.

Portanto, essa pesquisa abre caminhos para outras investigações que utilizem diferentes metodologias nos processos de ensino e aprendizagem, assim como distintos recursos que possam potencializar o ensino dos conteúdos matemáticos, por meio de temáticas que promovam um ensino contextualizado, viabilizando momentos em que os estudantes relacionam a teoria com a prática.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, M. I. de; PIMENTA, S. G. **Pedagogia Universitária: valorizando o ensino e a docência na Universidade de São Paulo**. (Orgs.). Pedagogia Universitária. São Paulo: EDUSP, 2009.

BARBOSA, E. F.; MOURA, D. G. **Metodologias ativas de aprendizagem na Educação Profissional e Tecnológica.** B. Tec. Senac, Rio de Janeiro, v. 39, n.2, p.48-67, maio/ago. 2013. Disponível em: https:// www. bts. senac. br/ bts/ article/ view/ 349/333 Acesso em: Mar, 2022.

BARBOSA, R. M. **Descobrindo a Geometria Fractal – para a sala de aula.** 3. ed. – Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2005.

BATTISTA, M. T. The development of geometric and spacial thinking. In: **Lester, Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**. Frank (Ed.), Charlote, EUA, Ed. NCTM, 2007.

BEMFICA, A.; ALVES, C. Fractais: progressão e série geométrica Uma metodologia de ensino. **Revista modelos.** v. 1, n. 1, p. 6-25, ago, 2011. Disponível em: http://facos.edu.br/publicacoes/revistas/ modelos/agosto_2011/ pdf/fractais_progressao_e_serie_geometrica.pdf Acesso em: Abr, 2022.

BOAVIDA, A M. & PONTE, J. P. Investigação colaborativa: Potencialidades e problemas. In: GTI (Org). **Refletir e investigar sobre a prática profissional.** Lisboa: APM, 2002, p.43-55.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília, 2018. Disponível em: http:// basenacionalcomum. mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf Acesso em: Mar, 2021.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília, MEC/SEC, 1998.

ELEUTÉRIO, A. P. **O Espaço de Hausdorff e a Dimensão Fractal: Estudo e Abordagens no Ensino Fundamental.** Orientadora: Profa. Dra. Ana Paula Tremura Galves. 2021. 115 f. Dissertação (mestrado) - Faculdade de Matemática, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2021. Disponível em: https://repositorio.ufu.br/ bitstream/123456789/ 33499/4/ EspacoHausdorffDimensao.pdf Acesso em: Mar, 2022.

EVES, H. História da Geometria. In: Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula. Vol. 3. São Paulo: Atual, 1992. Traduzido por Hygino H. Domingues.

FARDO, M. L. A gamificação aplicada em ambientes de aprendizagem. **Novas Tecnologias na Educação**, v. 11, n. 1, 1-9, 2013. Disponível em: https:// www. seer. ufrgs.br/index.php/renote/article/view/41629/26409 Acesso em: Jun, 2022.

FONSECA, M. da C. F. R., *et al*. **O ensino da Geometria na Escola Fundamental: três questões para a formação do professor dos ciclos iniciais.** Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

GIARDINNETTO; MARIANI (Org.). **Os jogos, brinquedo e brincadeiras: o processo de ensino-aprendizagem da Matemática na Educação Infantil.** In Matemática e educação infantil, Cecemca, Bauru, Ministério da Educação, São Paulo, 2005.

GORODSKI, C. **Alguns aspectos do desenvolvimento da geometria**. São Paulo: Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, 2002. Disponível em: https://repositorio.usp.br/item/001280117 Acesso em: Mar, 2022.

HOOKEY, M.; NEAL, S.; & DONOAHUE, Z. Negotiating collaboration for professional growth: A case of consultation. In: CHRISTIANSEN, H.; GOULET, L.; KRENTZ, C. & MACERS, M. (Orgs.). **Recreating relationships: Collaboration and educational reform**. p. 69-81. New York, NY: State University of New York Press, 1997.

KALEFF, A. M. **Vendo e entendendo poliedros**. EdUFF: Rio de Janeiro, 1998.

LOREZATO, S. **Educação Infantil e percepção matemática**. Campinas: Autores Associados, 2008.

LUTZ, M. R.; LEIVAS, J. C. P. **Caderno didático de Dimensão Fractal.** v. 2. Universidade Franciscana (UFN), Santa Maria, 2021. Disponível em: https://educapes.capes.gov.br/bitstream/capes/600194/2/Caderno%20did%C3%A1tico%202%20de%204%20-%20Dimens%C3%A3o%20Fractal.pdf Acesso em: Abr, 2022.

MATOS, T. A. de A.; GOUVEIA, C. A. A. **As tecnologias de informação e comunicação e as metodologias ativas**. In: MELLO, C. de M.; NETO, J. R. M. de A.

MENESES, R. S. de. **Uma história da Geometria escolar no Brasil: de disciplina a conteúdo de ensino.** Dissertação de Mestrado, São Paulo: PUC, 2007. Disponível em: https://tede2. pucsp.br/ bitstream/ handle/ 11203/1/Ricardo%20Soares% 20de% 20Meneses.pdf Acesso em: Mar, 2022.

MINAYO, M. C. S. **Ciência, técnica e arte: o desafio da pesquisa social.** In: MINAYO, Maria. C. S (Org.). Pesquisa social: teoria, método e criatividade. Petrópolis, RJ: Vozes, 2001.

MIRANDA, J. G. V. *et al.* Geometria fractal: propriedades e características de fractais ideais. **Revista Brasileira de Ensino de Física,** v. 30, n. 2, p. 2034-2044, jul, 2008. Disponível em: https:// www. scielo. br /j/rbef /a/ NkxTkgKJJdBX6Zy95zWHZkG/ ?lang=pt&format=pdf Acesso em: Jun, 2022.

MONTEIRO, I. A. **O desenvolvimento histórico do ensino de geometria no Brasil.** Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" - SP, 2015.

Disponível em: https:// www. ibilce. unesp. br/ Home/ Departamentos/ Matematica/ o-desenvolvimento-historico--ivan-alves-monteiro.pdf Acesso em: Mar, 2022.

OLIVEIRA, L. M. **Uma proposta de geometria de fractais para a sala de aula.** Orientador: Sérgio Guilherme de Assis Vasconcelos. 2019. 41 f. Dissertação (mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Matemática Universidade de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2019. Disponível em: https://repositorio.ufjf.br/ jspui/ bitstream/ ufjf/11291/1/lucasmaximianodeoliveira.pdf Acesso em: Mar, 2022.

PADILHA, T. A. F. *et al.* **Construção de fractais usando o *software* GeoGebra.** Produção técnica. Programa de Pós-Graduação da UNIVATES, Lajeado, 2012. Disponível em: https://www.univates.br/ppgece/media/pdf/Construcao-de-fractais-com-uso-do-software-geogebra.pdf Acesso em: Mar, 2022.

PAIXÃO, *et al*. **Aprendendo Matemática com o Triângulo De Sierpinski**. In: XII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, ISSN 2178-034X, 2016, SP.

PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes Curriculares de Matemática para Educação Básica.** Curitiba, 2008. Disponível em: Acesso em: Jun, 2022.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da Geometria no Brasil: causas e consequências. **Revista Zetetiké**, Campinas, SP. V. 01, p. 7-17, março, 1993.

PEREIRA, M. R. O. **A geometria escola: uma análise dos estudos sobre o abandono do seu ensino.** 2001. 84p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Programa de Pós-Graduação da Pontíficia Universidade Católica de São Paulo, 2001.

PEROVANO, D. G. **Manual de metodologia da pesquisa científica**. Curitiba: InterSaberes, 2016.

PETRILLO, R. P. (Org.) **Metodologias Ativas: desafios contemporâneos e aprendizagem transformadora**. Rio de Janeiro: Freitas Bastos, 2019, p. 27-48.

PETRILLO, R. P.; MELLO, C. de M.; PONTES, A. P. M. de. Os desafios da educação contemporânea: repensando o ensino-aprendizagem. In: MELLO, C. de M.; NETO, J. R. M. de A.; PETRILLO, R. P. (Org.) **Metodologias Ativas: desafios contemporâneos e aprendizagem transformadora**. Rio de Janeiro: Freitas Bastos, 2019, p. 1-26.

PIRES, C. M. C. Educação Matemática e sua influência no processo de organização e desenvolvimento curricular no Brasil. **Revista Bolema**, Rio Claro, SP. Ano 21. Nº 29, p. 13 – 42, 2008.

PIRES, C. C.; CURY E.; CAMPOS, T. M. M. **Espaço e forma: a construção de noções geométricas**. São Paulo: PROEM, 2000.

PRENSKY, M. **Aprendizagem baseada em jogos digitais.** São Paulo: SENAC São Paulo, 2012. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/ pluginfile.php/ 4583440/ mod_resource/content/2/Prensky_Aprendizagem_Baseada_em_Jogos_Digitais_OCR.pdf Acesso em: Jun, 2022.

REASON, P. The co-operative inquiry group. In: ____. **Human inquiry in action. Developments in new paradigm research.** p. 19-38. London: Sage, 1988.

RÊGO, R. G; RÊGO, R. M; VIEIRA, K. M. **Laboratório de Ensino de Geometria**. Campinas, SP: Autores Associados, 2012.

RODRIGUES, D. S. **Contribuições da utilização de uma Unidade de Ensino e Aprendizagem (UEA) para o ensino de Geometria Espacial.** Orientadora: Profª. Drª. Carmen Teresa Kaiber. 2018. 155 f. Dissertação (mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. Universidade Luterana do Brasil. Canoas, 2018. Disponível em: http://www.ppgecim. ulbra.br/ teses/ index.php/ ppgecim/article/view/314 Acesso em: Mar, 2022.

SILVA, J. B. *et al*. Tecnologias digitais e metodologias ativas na escola: o contributo do Kahoot para gamificar a sala de aula. **Revista Thema**, v. 15, n. 2, p. 780-791, 2018. Disponível em: https:// periodicos. ifsul.edu.br/ index.php/ thema/ article/ view/ 838/ 791 Acesso em: Jun, 2022.

SILVA, K. M. **Fractais e algumas aplicações ao ensino.** Orientador: Prof. Me. Luciano Aparecido Magrini. 2015. 81 f. Trabalho de Conclusão de Curso (monografia) – Curso de Licenciatura em Matemática. Instituto Federal de São Paulo (IFSP), São Paulo, 2015. Disponível em: http://eadcampus.spo.ifsp.edu.br/ pluginfile.php/ 86509/mod_resource/content/1/TCC%20Kau%C3%AA.pdf Acesso em: Mar, 2022.

TOLOMEI, B. V. A gamificação como estratégia de engajamento e motivação na educação. **Revista EaD em Foco**, v. 7, n. 2, p. 145-156, 2017. Disponível em: https://eademfoco.cecierj.edu.br/index.php/Revista/article/view/440/259 Acesso em: Jun, 2022.
YIN, R. K. **Pesquisa Qualitativa do início ao fim.** Tradução: Daniel Bueno; Revisão técnica: Dirceu da Silva. Porto Alegre: Penso, 2016.

ZABALA, A. **A prática educativa – como ensinar**. Porto Alegre: Artmed, 1998.

APÊNDICES

APÊNDICE A - Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

<table>
<tr><td colspan="11">1. IDENTIFICAÇÃO DO PROJETO DE PESQUISA</td></tr>
<tr><td colspan="11">Título do Projeto: Fractais: uma possibilidade didática para o desenvolvimento do conteúdo de geometria no Ensino Fundamental</td></tr>
<tr><td colspan="7">Área do Conhecimento: ENSINO</td><td colspan="4">Número de participantes: 13</td></tr>
<tr><td colspan="7">Curso: Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática</td><td colspan="4">Unidade: Canoas/RS</td></tr>
<tr><td>Projeto Multicêntrico</td><td></td><td>Sim</td><td></td><td>Não</td><td></td><td>Nacional</td><td></td><td>Internacional</td><td>Cooperação Estrangeira</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="11">Patrocinador da pesquisa:</td></tr>
<tr><td colspan="11">Instituição onde será realizado: Escola Municipal de Ensino Fundamental Olavo Bilac</td></tr>
<tr><td colspan="11">Nome dos pesquisadores e colaboradores: Bruna Marieli Reinheimer</td></tr>
</table>

Você está sendo convidado (a) para participar do projeto de pesquisa acima identificado. O documento abaixo contém todas as informações necessárias sobre a pesquisa que estamos fazendo. Sua colaboração neste estudo será de muita importância para nós, mas, se desistir, a qualquer momento, isso não causará nenhum prejuízo para você.

<table>
<tr><td colspan="5">2. IDENTIFICAÇÃO DO PARTICIPANTE DA PESQUISA</td></tr>
<tr><td colspan="3">Nome:</td><td>Data de Nasc.:</td><td>Sexo:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Nacionalidade:</td><td>Estado Civil:</td><td colspan="2">Profissão:</td></tr>
<tr><td>RG:</td><td>CPF/MF:</td><td>Telefone:</td><td colspan="2">E-mail:</td></tr>
<tr><td colspan="5">Endereço:</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="3">3. IDENTIFICAÇÃO DO PESQUISADOR RESPONSÁVEL</td></tr>
<tr><td colspan="2">Nome: Bruna Marieli Reinheimer</td><td>Telefone: (51) 9 95116038</td></tr>
<tr><td>Profissão: Professor de Matemática</td><td>Registro no Conselho Nº:</td><td>E-mail: marieli.bruna@rede.ulbra.br</td></tr>
<tr><td colspan="3">Endereço: Av. João Correa, nº 2001, ap 2, Vila Nova – Três Coroas/RS</td></tr>
</table>

Eu, participante da pesquisa, abaixo assinado(a), após receber informações e esclarecimento sobre o projeto de pesquisa, acima identificado, concordo de livre e espontânea vontade em participar como voluntário(a) e estou ciente:

1. Da justificativa e dos objetivos para realização desta pesquisa.

Essa pesquisa tem por objetivo investigar as contribuições da temática Fractal para o processo de ensino e aprendizagem da Geometria, com estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental, no município de Três Coroas/RS. Que justifica-se pela necessidade de se ter atividades diferenciadas e potencializadoras para os processos de ensino e aprendizagem da Geometria.

2. Do objetivo de minha participação.

A minha participação nessa pesquisa tem por objetivo possibilitar a troca de conhecimentos e ações pedagógicas entre docentes da área da Matemática, para o ensino da temática Geometria.

3. Do procedimento para coleta de dados.

Os dados serão coletados a partir das produções, debates e realização dos encontros presenciais, os quais serão realizados nas dependências da EMEF Olavo Bilac em Três Coroas/RS.

4. Da utilização, armazenamento e descarte das amostras.

Os dados coletados serão analisados dentro de suas peculiaridades e armazenados no *Google* Drive do pesquisador responsável, por 5 anos após a finalização da pesquisa. Esses serão utilizados para a apresentação dos resultados, sem a identificação dos participantes, a fim de preservar a sua identidade.

5. Dos desconfortos e dos riscos.

A participação na pesquisa pode gerar desconfortos pessoais, tais como constrangimento ao realizar os encontros presenciais, mas o participante pode solicitar a qualquer momento se desvincular da formação. Pode ocorrer o risco de quebra de confidencialidade das informações e opiniões, mas a pesquisadora terá muito cuidado para manter os dados em sigilo, armazenando os mesmos em seu *google drive*.

6.Dos benefícios.

A minha participação promoverá a construção de conhecimentos geométricos, contribuindo para a minha formação escolar.

7. Da isenção e ressarcimento de despesas.

A minha participação é isenta de despesas e não receberei ressarcimento porque não terei despesas na realização das atividades propostas, bem como se trata de uma participação voluntária.

8. Da forma de acompanhamento e assistência.

A pesquisadora estará presente nos encontros presenciais e auxiliará os participantes ao longo desse período.

9. Da liberdade de recusar, desistir ou retirar meu consentimento.

Tenho a liberdade de recusar, desistir ou de interromper a colaboração nesta pesquisa no momento em que desejar, sem necessidade de qualquer explicação. A minha desistência não causará nenhum prejuízo à minha saúde ou bem-estar físico. Por ser um convite ao participante da pesquisa o mesmo não terá prejuízo se vier a desistir em qualquer etapa do desenvolvimento das atividades.

10. Da garantia de sigilo e de privacidade.

Os resultados obtidos durante este estudo serão mantidos em sigilo, mas concordo que sejam divulgados em publicações científicas, desde que meus dados pessoais não sejam mencionados.

11. Da garantia de esclarecimento e informações a qualquer tempo.

Tenho a garantia de tomar conhecimento e obter informações, a qualquer tempo, dos procedimentos e métodos utilizados neste estudo, bem como dos resultados finais desta pesquisa. Para tanto, poderei consultar o **pesquisador responsável** Bruna Marieli Reinheimer. Em caso de dúvidas não esclarecidas de forma adequada pelo(s) pesquisador (es), de discordância com os procedimentos, ou de irregularidades de natureza ética, poderei ainda contatar o **Comitê de Ética em Pesquisa em Seres Humanos da Ulbra Canoas (RS),** com endereço na Rua Farroupilha, 8.001 – Prédio 14 – Sala 224, Bairro São José, CEP 92425-900 - telefone (51) 3477-9217, e-mail comitedeetica@ulbra.br.

Declaro que obtive todas as informações necessárias e esclarecimento quanto às dúvidas por mim apresentadas e, por estar de acordo, assino o presente documento em duas vias de igual conteúdo e forma, ficando uma em minha posse.

_____________( ), _____ de ____________ de ______.

___________________________________ ___________________________________

Pesquisador Responsável pelo Projeto **Participante da Pesquisa e/ou Responsável**

APÊNDICE B - Termo de Assentimento Livre e Esclarecido

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO
(PARA MENORES DE 12 a 18 ANOS - Resolução 466/12)

Convidamos você, após autorização dos seus pais [ou dos responsáveis legais], para participar como voluntário (a) da pesquisa: Fractais: uma possibilidade didática para o desenvolvimento do conteúdo de geometria no Ensino Fundamental Esta pesquisa é da responsabilidade do (a) pesquisador (a) Bruna Marieli Reinheimer, residente na Av João Correa, 2001, ap 2, bairro Vila Nova, Três Coroas/RS. Telefone: (51) 995116038. E-mail: marieli.bruna@rede.ulbra.br. Que está sob a orientação de: Clarissa de Assis Olgin Telefone: (51) 982014959, e-mail: clarissa.olgin@ulbra.br.

Este Termo de Consentimento pode conter informações que você não entenda. Caso haja alguma dúvida, pergunte à pessoa que está lhe entrevistando para que esteja bem esclarecido (a) sobre sua participação na pesquisa. Você não terá nenhum custo, nem receberá qualquer pagamento para participar. Você será esclarecido(a) sobre qualquer aspecto que desejar e estará livre para participar ou recusar-se. Após ler as informações a seguir, caso aceite participar do estudo, assine ao final deste documento, que está em duas vias. Uma delas é para ser entregue aos seus pais para guardar e a outra é do pesquisador responsável. Caso não aceite participar, não haverá nenhum problema se desistir, é um direito seu. Para participar deste estudo, o responsável por você deverá autorizar e assinar um Termo de Consentimento, podendo retirar esse consentimento ou interromper a sua participação a qualquer momento, sem nenhum prejuízo.

INFORMAÇÕES SOBRE A PESQUISA:

Está pesquisa tem por objetivo investigar as potencialidades de se trabalhar com a Temática Fractais no desenvolvimento de conceitos geométricos. Será desenvolvida na EMEF Olavo Bilac, no turno inverso as aulas, a qual terá 4 encontros das 13h às 17h, totalizando 16h de aplicação.

A participação na pesquisa pode gerar desconfortos pessoais, tais como constrangimento ao realizar os encontros presenciais, mas o participante pode solicitar a qualquer momento se desvincular da formação. Pode ocorrer o risco de quebra de confidencialidade das informações e opiniões, mas a pesquisadora terá muito cuidado para manter os dados em sigilo, armazenando os mesmos em seu G*oogle drive*. Assim como beneficiará o participante no seu desenvolvimento escolar e na construção de diferentes conhecimentos matemáticos.

As informações desta pesquisa serão confidenciais e serão divulgadas apenas em eventos ou publicações científicas, não havendo identificação dos voluntários, a não ser entre os responsáveis pelo estudo, sendo assegurado o sigilo sobre a sua participação. Os dados coletados nesta pesquisa (gravações, questionários, fotos, materiais produzidos, etc.) ficarão armazenados no *Google Drive* pessoal da pesquisadora Bruna Marieli Reinheimer, sob sua responsabilidade, pelo período de no mínimo 5 anos. Nem você e nem seus pais [ou responsáveis legais] pagarão nada para você participar desta pesquisa. Se houver necessidade, as despesas para a sua participação e de seus pais serão assumidas ou ressarcidas pelos pesquisadores. Fica também garantida indenização em casos de danos, comprovadamente decorrentes da sua participação na pesquisa, conforme decisão judicial ou extrajudicial.

Este documento passou pela aprovação do Comitê de Ética em Pesquisa Envolvendo Seres Humanos que está no endereço: **Av. Farroupilha, nº 8.001 – prédio 14, sala 224 – Bairro: São José – Canoas/RS, CEP: 92425-900, Tel.: (51) 3477-9217 – e-mail: comitedeetica@ulbra.br.**

____
Assinatura do pesquisador (a)

ASSENTIMENTO DO MENOR DE IDADE EM PARTICIPAR COMO VOLUNTÁRIO

Eu, _____________________________________, portador (a) do documento de Identidade ____________________ (se já tiver documento), abaixo assinado, concordo em participar do estudo FRACTAIS: UMA POSSIBILIDADE DIDÁTICA PARA O DESENVOLVIMENTO DO CONTEÚDO DE GEOMETRIA NO ENSINO FUNDAMENTAL, como voluntário (a). Fui informado (a) e esclarecido (a) pelo (a) pesquisador (a) sobre a pesquisa, o que vai ser feito, assim como os possíveis riscos e benefícios que podem acontecer com a minha participação. Foi-me garantido que posso desistir de participar a qualquer momento, sem que eu ou meus pais precisemos pagar nada.

Local e data __________________

Assinatura do (da) menor: __________________________

Presenciamos a solicitação de assentimento, esclarecimentos sobre a pesquisa e aceite do/a voluntário/a em participar. 2 testemunhas (não ligadas à equipe de pesquisadores):

Nome:	Nome:
Assinatura:	Assinatura:

APÊNDICE C - Autorização de uso de imagem

TERMO DE AUTORIZAÇÃO DE USO DE IMAGEM, NOME E VOZ

Pelo presente instrumento particular de licença de uso de imagem, nome e voz, ____ , portador(a) do CPF de nº ______________________, residente e domiciliado(a) na rua ____ , nº _________, na cidade de ____ / _, doravante denominado(a) Licenciante, autoriza a veiculação de sua imagem, nome e voz, gratuitamente por tempo indeterminado, por Bruna Marieli Reinheimer, portador(a) do CPF de nº 04220588078, doravante denominada Licenciada.

Mediante assinatura deste termo, fica a Licenciada autorizada a utilizar a imagem, nome e voz do Licenciante no projeto intitulado FRACTAIS: UMA POSSIBILIDADE DIDÁTICA PARA O DESENVOLVIMENTO DO CONTEÚDO DE GEOMETRIA NO ENSINO FUNDAMENTAL, para fins exclusivos de divulgação da Instituição e suas atividades, podendo, para tanto, reproduzi-la ou divulga-Ia junto à internet, ensino a distância, jornais e todos os demais meios de comunicação, público ou privado, sem qualquer contraprestação ou onerosidade, comprometendo-se a Licenciante a nada exigir da Licenciada em razão do ora autorizado.

Em nenhuma hipótese poderá a imagem, nome e voz do Licenciante ser utilizada de maneira contrária a moral, bons costumes e ordem pública.

E, por estarem de acordo, as partes assinam o presente instrumento em 02 (duas) vias, de igual teor e forma, para que produza entre si os efeitos legais.

____________________, ___ de, ___________ de ______.

____

Licenciante

No caso de menores de 18 (dezoito) anos, o documento obrigatoriamente devera ser assinado pelo Representante Legal.

____

Representante Legal

Nome: ____

RG: _______________________ CPF: _________________

APÊNDICE D - Questionário inicial

Questionário Inicial

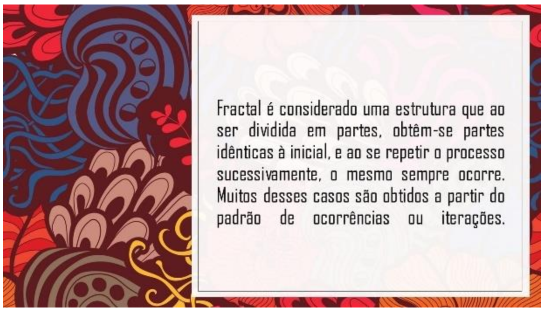
Nome:

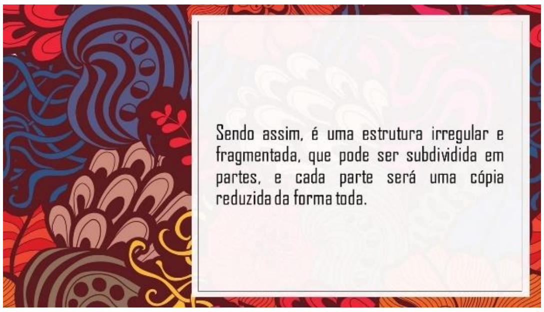
Idade:

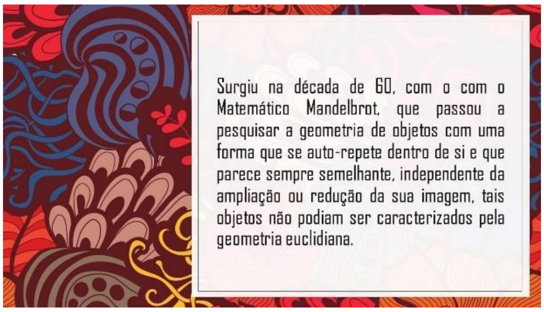
Turma:

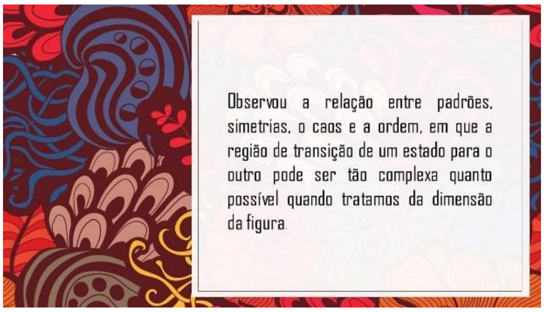
1. Qual ano você estuda?
2. Você já reprovou algum ano?
3. Você realiza alguma atividade fora da escola?
4. O que você acha da matemática? Tem dificuldades, facilidades? Comente.
5. O que você entende por Geometria?
6. Você já ouviu falar em Geometria Fractal? Em Fractais? Comente.
7. O que você tem a dizer das suas aulas de matemática e de como as atividades e conteúdos são abordados?
8. O professor aborda o conteúdo de Geometria? De que forma?
9. O que você espera dos nossos encontros do Grupo de Matemática?

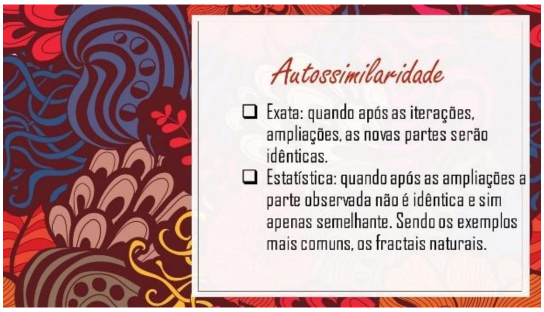
APÊNDICE E - *Slides* utilizados durante as aplicações

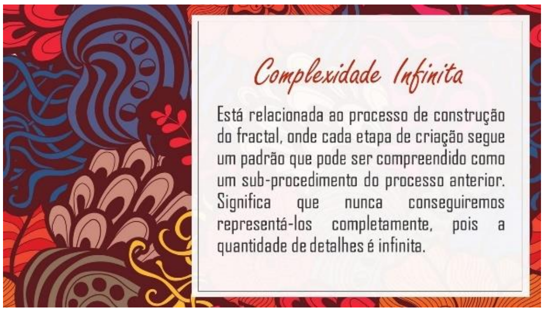






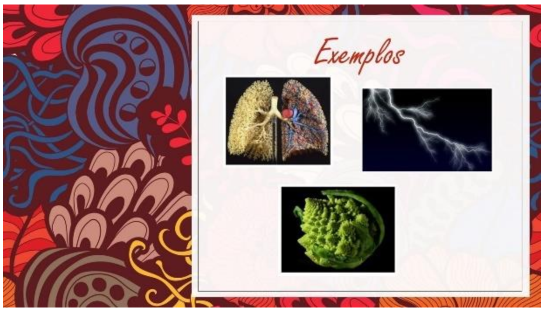


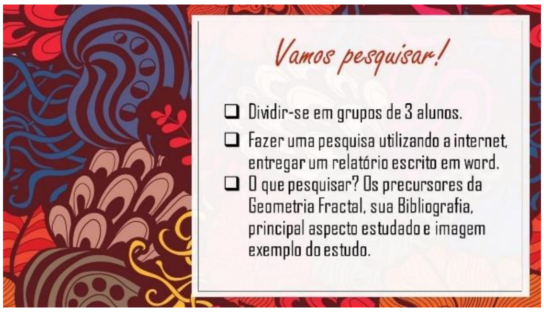





Exemplos


Exemplos


Exemplos

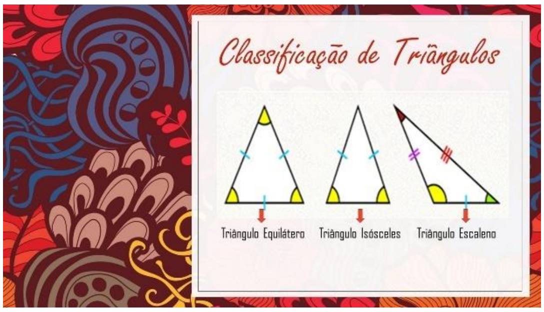

Vamos pesquisar!
Dividir-se em grupos de 3 alunos.
Fazer uma pesquisa utilizando a internet, entregar um relatório escrito em word.
O que pesquisar? Os precursores da Geometria Fractal, sua Bibliografia, principal aspecto estudado e imagem exemplo do estudo.


Tapete de Sierpinski


Triângulo de Sierpinski


Quadrado
L
L
L
L
Polígono de 4 lados congruentes.
Possuindo 4 ângulos de 90º.
Seus lados são paralelos entre si.


Retas
Paralelas: duas retas que não possuem nenhum ponto em comum.
Perpendiculares: duas retas que se interceptam formando 4 ângulos de 90º.


Classificação de Triângulos
Triângulo Equilátero
Triângulo Isósceles
Triângulo Escaleno


Triângulo Equilátero
Possui todos os lados com mesma medida.
Todos os seus ângulos são de 60º.


Triângulo Isósceles
Possui dois lados com a mesma medida e um lado distinto.
Automaticamente possui dois ângulos de mesma medida, que geralmente ficam sobre o lado que é diferente e chamado de base.


Triângulo Escaleno
Possui seus três lados distintos.
Consequentemente possui os três ângulos internos diferentes.

APÊNDICE F - Questionário final

Questionário Final

Nome:
Idade:
Turma:

1. E agora, o que você entende por Geometria?
2. O que são Fractais?
3. Quais as principais características dos Fractais?
4. O que é o perímetro de uma figura?
5. E a área?
6. Você sabe como se calcula a área e o perímetro de um quadrado? Como?
7. E de um triângulo?
8. O que significa os termos congruência e ponto médio?
9. Você conseguiu perceber a relação dos Fractais com os conteúdos da matemática, abordados em sala de aula?
10. Qual a sua opinião do uso de jogos como o kahoot para as aulas?
11. O que você tem a dizer da forma como as atividades do nosso grupo ocorreram?
12. Tem algo que você ache que dificultou ou atrapalhou o desenvolvimento das atividades?
13. Avalie a sua participação durante os encontros.
14. Avalie o professor durante os encontros.