

**UNIVERSIDADE LUTERANA DO BRASIL**  
**DIRETORIA ACADÊMICA**  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE  
CIÊNCIAS E MATEMÁTICA



O ENSINO DA MATEMÁTICA  
NA INSTRUÇÃO MILITAR BRASILEIRA OITOCENTISTA  
A PARTIR DA ANÁLISE DE OBRAS DIDÁTICAS

FERNANDO LUÍS DE ROSSO

Canoas

2022



**UNIVERSIDADE LUTERANA DO BRASIL**  
**DIRETORIA ACADÊMICA**  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE  
CIÊNCIAS E MATEMÁTICA



FERNANDO LUÍS DE ROSSO

O ENSINO DA MATEMÁTICA  
NA INSTRUÇÃO MILITAR BRASILEIRA OITOCENTISTA  
A PARTIR DA ANÁLISE DE OBRAS DIDÁTICAS

Tese apresentada no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil para obtenção do título de Doutor em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rossano André Dal-Farra

Canoas  
2022

R838e Rosso, Fernando Luís de.

O ensino de matemática na instrução militar brasileira oitocetista a partir da análise

de obras didáticas / Fernando Luís de Rosso. – 2022.

344 f. : il.

Tese (doutorado) – Universidade Luterana do Brasil, Programa de Pós-Graduação

FERNANDO LUÍS DE ROSSO

O ENSINO DA MATEMÁTICA  
NA INSTRUÇÃO MILITAR BRASILEIRA OITOCENTISTA  
A PARTIR DA ANÁLISE DE OBRAS DIDÁTICAS

Tese apresentada no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil para obtenção do título de Doutor em Ensino de Ciências e Matemática.

Data de Aprovação: 04 de maio de 2022

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Magnus Cesar Ody  
Faculdades Integradas de Taquara

---

Prof. Dr. Malcus Cassiano Kuhn  
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Sul-rio-grandense

---

Profa. Dra. Clarissa de Assis Olgin  
Universidade Luterana do Brasil

---

Profa. Dra. Carmen Teresa Kaiber  
Universidade Luterana do Brasil

---

Prof. Dr. Rossano André Dal-Farra (Orientador)  
Universidade Luterana do Brasil – ULBRA

*Eu vim de uma rua de terra,  
de uma esquina deserta  
onde deixei meu lugar.  
Lá onde o amanhã desespera,  
o tempo nunca espera  
e o longe vem te buscar.  
(Mauro Moraes)*

## **AGRADECIMENTOS**

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Agradeço, em primeiro lugar, ao Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECIM) da Universidade Luterana do Brasil (ULBRA) na pessoa de sua Coordenadora, a Professora Doutora Cláudia Lisete Oliveira Groenwald, pela oportunidade de desenvolvimento, crescimento e amadurecimento tanto pessoal, quanto profissional.

Igualmente agradeço aos Professores Doutores e Pós-Doutores, bem como às Professoras Doutoradas do referido Programa: Agostinho Serrano de Andrade Neto, Paulo Tadeu Campos Lopes, Renato Pires dos Santos e Marlise Geller, pela paciência, sabedoria e sentimentos bons que nos transmitiram durante esta caminhada. Mesmo quando tudo parecia intransponível deram o seu voto de confiança em nossa capacidade e souberam, de forma muito mais que brilhante, nos trazer até este momento.

Mais do que especial agradecimento aos Professores Doutores Arno Bayer e Rossano André Dal-Farra, grandes parceiros que me concederam a honra de ser seu orientando, que tiveram a calma, a paciência, a sabedoria e a compreensão para permitir que este trabalho acontecesse no seu tempo. Apesar de todos os obstáculos e percalços encontrados pelo caminho, conseguimos!

Aos membros da banca de qualificação e defesa: as Professoras Doutoradas Carmem Teresa Kaiber e Clarissa de Assis Olguin e, os Professores Doutores Magnus Cesar Ody e Malcus Cassiano Kuhn, pelas correções de rumo e observações que enriqueceram e colaboraram definitivamente para o fechamento deste trabalho.

À minha família, claro! Sem o apoio e a compreensão deles certamente esta conquista não seria viável. As ausências, os “sumiços”, a falta de notícias. Tenham a certeza, “Seu Jair”, “Dona Margarete” e Jaqueline de que valeu e seguirá valendo a pena.

Pedro Arthur meu filho, pelos eventuais sábados, domingos, férias e feriados sem futebol, sem vídeo-game e sob silêncio. Ao mesmo tempo em que ficava recluso, tenho certeza que iniciou o seu processo de compreensão das coisas como se apresentam.

Claudete, minha amada Companheira! Pelo apoio sem medidas em toda a trajetória. Inspiradora mulher que incentivou e a entrar, e permanecer, definitivamente no caminho da ciência e da pesquisa.

Colegas: todos e todas, com certeza! Alguns (mas) especiais, por afinidade, pelo tempo de estrada juntos e juntas; outros (as), pelas relações construídas; todos (as) pelos objetivos em comum.

Aos Comandos Militares do Sul e, do Leste especialmente aos oficiais 1º Sargento Ianko Bett e Capitão Mauro Pereira, pela dedicação em organizar e apontar os melhores caminhos de pesquisa, sobretudo no apontamento de melhores possibilidades.



## RESUMO

Ao longo da história o ensino de matemática sofreu inúmeras modificações de acordo com os contextos presentes em cada período. Diante de tal premissa, a presente pesquisa tem como objetivo investigar como se constituiu o ensino de matemática na instrução militar brasileira oitocentista a partir da análise de obras didáticas. A análise é subsidiada pelos estudos acerca do contexto político e social brasileiro no período, além dos Decretos Imperiais e das obras didáticas de Lacroix e Legendre, com o suporte teórico da História social das Ideias e da Hermenêutica de Profundidade. Os documentos, obras didáticas, revisão de literatura e demais materiais de apoio forneceram os elementos necessários à sustentação deste trabalho visto que o contexto histórico nacional e do sul do continente acabaram por influenciar nas transformações dos planos de estudo e dos objetivos da Real Academia Militar durante o recorte temporal da investigação. A delimitação do intervalo de tempo serviu para que, na posse de material de pesquisa, fosse possível proceder com a análise proposta revisitando pistas, rastros e demais aspectos que proporcionaram melhor entendimento, por meio da análise de obras didáticas, de qual era a matemática ensinada na instrução militar brasileira do período oitocentista. O conceito de Hermenêutica de Profundidade serviu de apoio, auxiliando na análise e, na compreensão da Matemática ensinada na instrução militar brasileira à época. Para o desenvolvimento do tema proposto, foram coletados materiais junto ao Arquivo Histórico do Exército e Acervo Digital da Biblioteca Nacional. Constatou-se por meio das análises que tanto os aspectos políticos quanto sociais influenciaram na escolha das obras didáticas para a Real Academia, assim como as mudanças ocorridas nos currículos e no arranjo dos cursos destinados à formação dos Oficiais do Exército Brasileiro, causando implicações e, em decorrência delas, mudanças no contexto escolar. Foi percebido, também, o papel estratégico da instrução militar brasileira dentro do planejamento da corte instalada em nosso território. Verificou-se, ainda, que o citado “rigor matemático” existente na Real Academia era oriundo do modelo francês e que as obras didáticas utilizadas eram aquelas que melhor representavam este modelo.

**Palavras-chave:** Ensino de Matemática; Real Academia Militar; instrução militar; pesquisa histórica; livros didáticos.

## ABSTRACT

Throughout history, mathematics teaching has undergone numerous changes, according to the contexts present in each period. Given this premise, the present research aims to investigate how mathematics teaching was constituted in 19th-century Brazilian military instruction from the analysis of didactic works. The analysis is supported by studies on the Brazilian political and social context in the period, the imperial decrees, and the didactic works of Lacroix and Legendre, with the theoretical support of the Social History of Ideas and Depth-Hermeneutics. The documents, didactic works, literature review, and other support materials provided the necessary elements to base this work, because the national and southern historical context of the continent eventually influenced the transformations of the study plans and objectives of the Royal Military Academy during the time frame of the investigation. The time interval delimited served so that, in possession of research material, we could proceed with the proposed analysis, revisiting clues, traces, and other aspects that provided a better understanding, through the analysis of didactic works, of what mathematics was taught in Brazilian military instruction in the 19th century. The concept of Depth-Hermeneutics served as a support, helping in the analysis and understanding of the Mathematics taught in Brazilian military instruction then. To develop the proposed theme, we collected materials from the Historical Archives of the Army and the Digital Collection of the National Library. The analysis showed that political and social aspects influenced the choice of didactic works for the Royal Academy, and the changes that took place in the curricula and in the arrangement of courses intended for the education of Brazilian Army Officers caused impacts in the regular school context. We also noticed the strategic role of Brazilian military instruction within the planning of the court installed in our territory. We also verified that the “mathematical rigor” existing in the Royal Academy came from the French model and the didactic works used were those that best represented this model.

**Keywords:** teaching mathematics; Royal Military Academy; military instruction; historical research; textbooks.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Formas de Investigação Hermenêutica .....	41
Figura 2 - Imagem da Real Academia Militar no Largo São Francisco .....	55
Figura 3 - Plano de Estudos de Matemática conforme a Carta-régia de 1810 .....	56
Figura 4 - Plano de Estudos do Curso Matemático – Decreto de 09 de março de 1832 .....	68
Figura 5 - Dos conhecimentos que deverão ter os Oficiais do Exército, Marinha, e Engenharia – Currículo de 1832 .....	71
Figura 6 - Plano de Estudos do Curso Matemático – Decreto de 22 de outubro de 1833 .....	73
Figura 7 - Plano de Estudos do Curso para Engenheiros – Decreto de 22 de outubro de 1833 .....	73
Figura 8 - Plano de Estudos (Conteúdos de Matemática) do Primeiro Curso – Regulamento 29 .....	76
Figura 9 - Plano de Estudos (Conteúdos de Matemática) do Segundo Curso – Regulamento 29 .....	77
Figura 10 - Plano de Estudos de Matemática – Decreto 140/42 .....	79
Figura 11 - Dos anos de formação necessários à cada uma das Carreiras – Currículo de 1842 .....	80
Figura 12 - Imagem da Escola Militar de Porto Alegre .....	83
Figura 13 - Imagem da Escola da Praia Vermelha .....	86
Figura 14 - Plano de Estudos do Curso Matemático – Decreto 2116/58 .....	86
Figura 15 - Dos anos de formação necessários à cada uma das Carreiras – Decreto 2116 .....	87
Figura 16 - Plano de Estudos do Curso Matemático – Decreto 2116/58 .....	89
Figura 17 - Currículo para a formação de Oficiais do Exército, conforme Decreto 2582 .....	90
Figura 18 - Plano de Estudos das Escolas Auxiliares – Decreto 2582/60 .....	91
Figura 19 - Plano de Estudos do Curso Normal - Decreto 3083/63 .....	94
Figura 20 - Plano de Estudos Comum às formações da Escola Central – Decreto 3083/68 .....	95
Figura 21 - Das carreiras Militares e de Engenharia, conforme o Decreto 3083 .....	96
Figura 22 - Plano de Estudos das Escolas Preparatórias – Decreto 5259/74 .....	98

Figura 23 - Plano de Estudos para Oficiais Engenheiros Militares – Decreto 5259/74 .....	99
Figura 24 - Das carreiras Militares conforme o Decreto 5259 .....	100
Figura 25 - Plano de Estudos do Curso Preparatório – Decreto 10203/89.....	105
Figura 26 - Plano de Estudos da Infantaria e Cavalaria – Decreto 10203/89.....	106
Figura 27 - Agrupamento das Seções dos Cursos Preparatórios e, de Infantaria e Cavalaria.....	107
Figura 28 - Plano de Estudos da ESG – Decreto 10203/89 .....	108
Figura 29 - Folha de rosto do Tratado de Elementar de Applicação de Álgebra à Geometria.....	117
Figura 30 - Folha de rosto da obra <i>Elementos D'Álgebra</i> .....	123
Figura 31 - Explicação da resolução para o problema proposto .....	124
Figura 32 - Proposição para resolução de equações .....	126
Figura 33 - Exemplo de uma equação do primeiro grau, com uma incógnita.....	127
Figura 34 - Exemplo de uma equação do primeiro grau, com termos compostos ..	129
Figura 35 - Primeira etapa da resolução do exemplo proposto.....	130
Figura 36 - Substituição dos termos no exemplo proposta.....	130
Figura 37 - Arranjo da equação após a eliminação dos denominadores .....	131
Figura 38 - Exemplo de uma equação que retorna quantidades negativas.....	132
Figura 39 - Novo enunciado para a questão anteriormente proposta .....	133
Figura 40 - Exemplo com três incógnitas e três equações .....	135
Figura 41 - Igualando todas as equações a uma única incógnita .....	135
Figura 42 - Equação 1 igualada às equações 2 e 3.....	136
Figura 43 - Tábua da segunda potência de algarismos com uma unidade .....	137
Figura 44 - Desenvolvimento da segunda potência de 47.....	138
Figura 45 - Esquema para verificação de uma raiz quadrada.....	139
Figura 46 - Exemplo de proposição de um problema de segundo grau .....	140
Figura 47 - Resolução do problema com base na regra geral proposta por Lacroix .....	141
Figura 48 - Proposição com duas equações e duas incógnitas .....	143
Figura 49 - Exemplo proposto que resulta em equações idênticas.....	144
Figura 50 - Método de teste pela fórmula geral .....	145
Figura 51 - Proposição algébrica para resolução de uma equação de grau 3 .....	148

Figura 52 - Parte I da resolução de equações com último termo de vários divisores .....	149
Figura 53 - Parte II da resolução de equações com último termo de vários divisores .....	149
Figura 54 - Exemplo de problema proposto nas páginas introdutórias.....	159
Figura 55 - Exemplo de problema envolvendo a Cadeira de Química.....	163
Figura 56 - Folha de rosto original traduzida da obra <i>Tratado de Trigonometria</i> .....	168
Figura 57 - Valores do seno e do cosseno na circunferência.....	172
Figura 58 - Fórmulas para determinar senos e cossenos da soma ou da diferença .....	173
Figura 59 - Método para o cálculo do seno e do cosseno .....	175
Figura 60 - Lista dos senos e cossenos de $10^\circ$ em $10^\circ$ .....	176
Figura 61 - Resolução do 1º Caso.....	179
Figura 62 - Resolução do 2º Caso do triângulo retângulo .....	179
Figura 63 - Resolução do 2º caso de um triângulo retilíneo em geral.....	181
Figura 64 - Exemplo de um problema proposto sobre triângulos retilíneos em geral .....	183
Figura 65 - O enunciado de um triângulo esférico hipotético .....	184
Figura 66 - Fórmula resolutive de um triângulo esférico a partir dos ângulos .....	187
Figura 67 - Fórmula para a resolução do 1º caso .....	188
Figura 68 - Fórmulas para o cálculo dos lados a e b, do 4º caso.....	190
Figura 69 - Fórmula utilizada para determinar um lado, a partir de três ângulos ....	191
Figura 70 - Notação para graus, minutos e segundos angulares.....	193
Figura 71 - Definições de tangente e secante do arco à partir da circunferência descrita .....	193
Figura 72 - Demonstração de algumas razões trigonométricas .....	194
Figura 73 - Tábua de senos a partir de uma PA .....	195
Figura 74 - Folha de rosto original traduzida da obra <i>Elementos de Geometria</i> .....	200
Figura 75 - Títulos e Conteúdos dos oitos livros da obra <i>Elementos de Geometria</i>	201
Figura 76 - Definição de linha, linha reta e linha curva .....	202
Figura 77 - Esboço de ângulo e vértice .....	203
Figura 78 - Utilizadas para as definições de ângulo reto, agudo e obtuso .....	203
Figura 79 - Representação de triângulos, quadriláteros e suas variações. ....	204

Figura 80 - Representação de uma diagonal por AC.....	204
Figura 81 - Algumas das definições de termos utilizados na Geometria .....	205
Figura 82 - Cinco axiomas iniciais de <i>Os Elementos de Geometria</i> .....	206
Figura 83 - Auxiliando na comprovação do Teorema da Proposição I.....	206
Figura 84 - Auxiliando na explicação da Proposição II .....	207
Figura 85 - Referente ao corolário II.....	207
Figura 86 - Auxiliando na dedução do Corolário III .....	208
Figura 87 - Reta AB com dois pontos em comum.....	208
Figura 88 - Auxiliando no entendimento da proposição IV .....	209
Figura 89 - Auxiliar na demonstração do teorema da Proposição V .....	209
Figura 90 - Triângulos considerados na Proposição VI .....	210
Figura 91 - Auxiliar na demonstração do teorema da Proposição IX.....	211
Figura 92 - Auxiliar na demonstração do teorema da Proposição X.....	212
Figura 93 - Auxiliar na Proposição XII, corolário e scholio .....	212
Figura 94 - Auxiliar na Proposição XIII .....	213
Figura 95 - Auxiliar no desenvolvimento do Teorema XIV.....	213
Figura 96 - Auxiliar no desenvolvimento do Teorema XV.....	214
Figura 97 - Auxiliar na comparação entre dois triângulos.....	215
Figura 98 - Auxiliar na demonstração da Proposição XIX .....	215
Figura 99 - Corolários I a VI – Proposição XX.....	217
Figura 100 - Utilizada como referência para demonstrar a Proposição XXII .....	218
Figura 101 - Referência para ilustrar o teorema da Proposição XXVI .....	218
Figura 102 - Auxiliar na demonstração do teorema da Proposição XXVII .....	219
Figura 103 - Auxiliar na demonstração do teorema da Proposição XXVIII .....	219
Figura 104 - Paralelogramo referente à Proposição XXIX.....	220
Figura 105 - Auxiliar da visualização dos dez conceitos relativos à circunferência.	221
Figura 106 - Definições de arco, corda e segmento .....	221
Figura 107 - Linha AB inserida no círculo .....	222
Figura 108 - Definições complementares à linha inserida .....	223
Figura 109 - Reta Secante AB .....	223
Figura 110 - Divisão do círculo e da circunferência pelo diâmetro AB.....	224
Figura 111 - Definição e comentário acerca da Proposição III.....	225
Figura 112 - Círculos iguais subentendendo arcos iguais .....	225

Figura 113 - Auxiliar na exemplificação da Proposição VI e seu teorema .....	226
Figura 114 - Auxiliar na interpretação da Proposição VIII .....	227
Figura 115 - Reta perpendicular BD ao extremo do raio CA .....	227
Figura 116 - Duas paralelas interceptando a circunferência .....	228
Figura 117 - Auxiliar na visualização dos casos II e III .....	229
Figura 118 - Auxiliar na interpretação da proposição XI .....	229
Figura 119 - Auxiliar na demonstração da proposição XIII .....	230
Figura 120 - Auxiliar na demonstração da proposição XIV.....	230
Figura 121 - Dois círculos iguais com ângulos de vértice ao centro .....	231
Figura 122 - Dois círculos diferentes com ângulos ao centro.....	231
Figura 123 - Ângulos ACB e ACD e os respectivos arcos AB e AD.....	232
Figura 124 - Scholio I e II, referentes à Proposição e teorema XVII .....	233
Figura 125 - Auxiliar na visualização do teorema da Proposição XVIII.....	234
Figura 126 - Auxiliar na interpretação do corolário I da Proposição XVIII.....	234
Figura 127 - Auxiliar na exemplificação do corolário II da proposição XVIII .....	234
Figura 128 - Auxiliar na exemplificação do corolário IV da proposição XVIII.....	235
Figura 129 - Auxiliar na exemplificação da proposição XIX.....	236
Figura 130 - Problema VII do Livro II.....	236
Figura 131 - Auxiliar na resolução do problema VII (Livro II).....	237
Figura 132 - Auxiliar na visualização da definição III .....	238
Figura 133 - Ilustrando, pela definição IV, a altura de um paralelogramo.....	239
Figura 134 - Exemplificando, pela definição V, a altura de um triângulo .....	239
Figura 135 - Ilustrando, pela definição VI, a altura de um trapézio .....	239
Figura 136 - Exemplificando, pela Proposição I, a equivalência entre paralelogramos .....	240
Figura 137 - Ilustrando o corolário da Proposição I .....	240
Figura 138 - Auxiliar na visualização do teorema da Proposição II.....	241
Figura 139 - Na demonstração do teorema da Proposição III.....	241
Figura 140 - Auxiliar na ilustração do teorema da Proposição VII.....	242
Figura 141 - Scholio resultante do teorema da Proposição VII .....	243
Figura 142 - Auxilia no entendimento ao teorema da Proposição IX .....	243
Figura 143 - Auxiliar no entendimento no teorema da Proposição X.....	244
Figura 144 - Auxiliar na compreensão do teorema da Proposição XII .....	245

Figura 145 - Primeiro caso – a perpendicular está dentro do triângulo .....	245
Figura 146 - Segundo caso – a perpendicular está fora do triângulo.....	245
Figura 147 - Auxiliar na compreensão do teorema da Proposição XIII .....	246
Figura 148 - Auxiliar na compreensão do teorema da Proposição XIV .....	247
Figura 149 - Auxiliar na compreensão do teorema da Proposição XV.....	247
Figura 150 - Auxiliar na compreensão do teorema da Proposição XVI .....	248
Figura 151 - Auxiliar na compreensão do teorema da Proposição XVII .....	249
Figura 152 - Auxiliar na compreensão do teorema da Proposição XXI .....	250
Figura 153 - Auxiliar na compreensão do Scholio da Proposição XXI .....	251
Figura 154 - Problema V do Livro III.....	251
Figura 155 - Auxiliar na compreensão do problema V do Livro III.....	252
Figura 156 - Resolução proposta pelo autor ao problema V do Livro III.....	252
Figura 157 - Dois polígonos regulares semelhantes.....	253
Figura 158 - Octógono inserido no círculo .....	254
Figura 159 - Problema da Proposição III .....	255
Figura 160 - Quadrado ABCD inscrito no círculo .....	255
Figura 161 - Auxiliar na interpretação da proposição XV .....	256
Figura 162 - Auxiliar na interpretação da proposição I do Apêndice ao Livro IV .....	258
Figura 163 - Auxiliar na interpretação da proposição II do Apêndice ao Livro IV .....	258
Figura 164 - Auxiliar na interpretação da proposição VI do Apêndice ao Livro IV.....	259
Figura 165 - Auxiliar na interpretação da proposição VIII do Apêndice ao Livro IV.....	260
Figura 166 - Auxiliar na interpretação da proposição X do Apêndice ao Livro IV.....	261
Figura 167 - Auxiliar na interpretação da proposição II do Livro V.....	264
Figura 168 - Auxiliar na interpretação da proposição II, Corolário II, do Livro V.....	264
Figura 169 - Auxiliar na interpretação da proposição V, do Livro V .....	265
Figura 170 - Auxiliar na interpretação da proposição X, do Livro V .....	266
Figura 171 - Auxiliar na interpretação da proposição XI, do Livro V .....	266
Figura 172 - Auxiliar na interpretação da proposição XIII, do Livro V .....	267
Figura 173 - Auxiliar na interpretação da proposição XV, do Livro V.....	268
Figura 174 - Auxiliar na interpretação da proposição XVI, do Livro V.....	269
Figura 175 - Demonstração da Proposição XVI, Livro V .....	270
Figura 176 - Auxiliar na interpretação da proposição XVIII, do Livro V.....	271
Figura 177 - Auxiliar na interpretação da proposição XXII, do Livro V.....	272



Figura 178 - Auxiliar na interpretação da proposição XIV, do Livro V.....	274
Figura 179 - Proposta de construção para a resolução da Proposição XXIV.....	275
Figura 180 - Definição de Poliedro regular.....	276
Figura 181 - Definição de Prisma.....	277
Figura 182 - Auxiliar na interpretação da definição V, do Livro VI.....	277
Figura 183 - Auxiliar na interpretação da definição IX, do Livro VI.....	278
Figura 184 - Auxiliar na interpretação da definição XI, do Livro VI.....	279
Figura 185 - Auxiliar na interpretação da Proposição I, do Livro VI.....	280
Figura 186 - Auxiliar na interpretação da Proposição II, do Livro VI.....	281
Figura 187 - Auxiliar na interpretação da Proposição IV, do Livro VI.....	282
Figura 188 - Auxiliar na interpretação da Proposição VI, do Livro VI.....	284
Figura 189 - Auxiliar na interpretação da Proposição VII, do Livro VI.....	284
Figura 190 - Auxiliar na interpretação da Proposição VIII, do Livro VI.....	285
Figura 191 - Auxiliar na interpretação da Proposição XXI, do Livro VI.....	286
Figura 192 - Corolários I, II, III e IV da Proposição XXI, Livro VI.....	287
Figura 193 - Auxiliar na interpretação da Proposição XXIV, do Livro VI.....	289
Figura 194 - Auxiliar na interpretação da Proposição XXV, do Livro VI.....	290
Figura 195 - Auxiliar na interpretação da Definição I, do Livro VII.....	291
Figura 196 - Definições III a X do Livro VII.....	292
Figura 197 - Definições XI a XIV do Livro VII.....	293
Figura 198 - Auxiliar na interpretação da Proposição II, do Livro VII.....	293
Figura 199 - Auxiliar na interpretação da Proposição IX, do Livro VII.....	294
Figura 200 - Auxiliar na interpretação da Proposição X, do Livro VII.....	295
Figura 201 - Auxiliar na interpretação da Proposição XIX, do Livro VII.....	297
Figura 202 - Corolários I e II, Proposição XIX, do Livro VII.....	297
Figura 203 - Auxiliar na interpretação dos Corolários da Proposição XIX, do Livro VII.....	298
Figura 204 - Corolários I e II, Proposição XX, Livro VII.....	299
Figura 205 - Scholio, Proposição XX, Livro VII.....	300
Figura 206 - Auxiliar na interpretação da Proposição XXI, do Livro VII.....	300
Figura 207 - Auxiliar na interpretação da Proposição XXII, do Livro VII.....	301
Figura 208 - Auxiliar na interpretação da Proposição XXIII, do Livro VII.....	301
Figura 209 - Corolários I e II, Proposição XXIII, Livro VII.....	302

Figura 210 - Auxiliar na interpretação da Proposição XXIV, do Livro VII.....	303
Figura 211 - Auxiliar na interpretação da Proposição XXVII, do Livro VII.....	304
Figura 212 - Desdobramentos a partir da afirmativa de CA.....	305
Figura 213 - Representação de um cilindro, Definição I, Livro VIII.....	307
Figura 214 - Representação de um cone, Definição II, Livro VIII.....	308
Figura 215 - Auxiliar na interpretação da Proposição I, do Livro VIII.....	309
Figura 216 - Corolários I, II e Scholio da Proposição II, Livro VIII.....	310
Figura 217 - Auxiliar na interpretação da Proposição II, do Livro VIII.....	311
Figura 218 - Auxiliar na interpretação da Proposição V, do Livro VIII.....	312
Figura 219 - Considerações acerca do Corolário da Proposição V, Livro VIII.....	312
Figura 220 - Auxiliar na interpretação da Proposição VIII, do Livro VIII.....	313
Figura 221 - Auxiliar na interpretação da Proposição X, do Livro VIII.....	313
Figura 222 - Auxiliar na interpretação da Proposição XII, do Livro VIII.....	314
Figura 223 - Auxiliar na proposição XIII.....	315
Figura 224 - Auxiliar na proposição XIII.....	316
Figura 225 - Auxiliar na resolução do problema da proposição XIV, Livro VIII.....	317
Figura 226 - Parte I da resolução do problema da proposição XIV.....	317
Figura 227 - Parte II da resolução do problema da proposição XIV.....	318
Figura 228 - Auxiliar no entendimento da proposição XV, Livro VIII.....	319
Figura 229 - Auxiliar no entendimento da proposição XIX, Livro VIII.....	320
Figura 230 - Considerações acerca do scholio da proposição XIX.....	321

## SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>21</b>
<b>A INVESTIGAÇÃO</b> .....	<b>26</b>
2.1 JUSTIFICATIVA E PROBLEMA DE PESQUISA .....	27
2.2 REFERENCIAL TEÓRICO.....	28
2.3 OBJETIVOS.....	29
<b>2.3.1 Objetivo Geral</b> .....	<b>29</b>
<b>2.3.2 Objetivos Específicos</b> .....	<b>29</b>
<b>REFERENCIAL TEÓRICO E METODOLÓGICO</b> .....	<b>31</b>
3.1 AS OBRAS DIDÁTICAS E A HISTÓRIA SOCIAL DAS IDEIAS .....	31
3.2 A HERMENÊUTICA E A HERMENÊUTICA DE PROFUNDIDADE COMO MARCO TEÓRICO PARA INVESTIGAÇÕES HISTORIOGRÁFICAS.....	34
<b>3.2.1 A Hermenêutica e suas origens como a arte de interpretar</b> .....	<b>34</b>
<b>3.2.2 Hermenêutica de Profundidade como Marco Teórico para investigações historiográficas</b> .....	<b>39</b>
3.3 PROCEDIMENTO METODOLÓGICO .....	46
<b>CONTEXTO HISTÓRICO BRASILEIRO E A CRIAÇÃO DA REAL ACADEMIA MILITAR</b> .....	<b>47</b>
4.1 AS NUANCES DA CHEGADA DA FAMÍLIA REAL AO BRASIL .....	48
4.2 A CRIAÇÃO DA REAL ACADEMIA MILITAR NO RIO DE JANEIRO.....	52
4.3 A REAL ACADEMIA MILITAR NO PERÍODO DO BRASIL COLÔNIA (1810- 1822) .....	56
4.4 A REAL ACADEMIA MILITAR NO PRIMEIRO REINADO E NO PERÍODO REGENCIAL (1822-1840).....	60
4.5 A REAL ACADEMIA MILITAR NO PERÍODO DA SEGUNDA REGÊNCIA (1840- 1889).....	79
<b>O ENSINO DA MATEMÁTICA NA INSTRUÇÃO MILITAR BRASILEIRA</b> .....	<b>114</b>
5.1 A MATEMÁTICA DA INSTRUÇÃO MILITAR BRASILEIRA .....	115
5.2 A ÁLGEBRA DE LACROIX NA INSTRUÇÃO MILITAR BRASILEIRA.....	121
<b>5.2.1 Noções preliminares sobre a passagem da Aritmética para Álgebra</b> .....	<b>124</b>
<b>5.2.2 Equações (resolução de equações do primeiro grau, métodos de efetuar operações, adição e subtração de quantidades algébricas, multiplicação, divisão e frações algébricas)</b> .....	<b>125</b>

5.2.3	Considerações acerca de quantidades positivas e, negativas.....	131
5.2.4	Das equações do primeiro grau com mais de uma incógnita .....	134
5.2.5	Extração de raiz quadrada das quantidades algébricas.....	137
5.2.6	Equações do segundo grau com uma incógnita .....	140
5.2.7	Equações de qualquer grau.....	142
5.2.8	A significação da divisão por zero na resolução de equações .....	143
5.2.9	Resolução numérica das equações de uma só incógnita.....	146
5.2.10	Das proporções e das progressões .....	153
5.2.11	Teoria das quantidades exponenciais e logaritmos .....	155
5.2.12	Questões relativas aos juros do dinheiro.....	157
5.2.13	Análises e reflexões acerca dos <i>Elementos D'Álgebra</i> .....	158
5.3	A TRIGONOMETRIA DE LEGENDRE NA INSTRUÇÃO MILITAR BRASILEIRA .....	166
5.3.1	Divisão da circunferência. ....	169
5.3.2	Noções gerais sobre os senos, cossenos, tangentes, etc;.....	170
5.3.3	Teoremas e fórmulas relativas aos senos, cossenos, tangentes; etc.....	172
5.3.4	Da construção da tábua dos senos .....	174
5.3.5	Princípios para a resolução dos triângulos retilíneos .....	176
5.3.6	Resolução dos triângulos retângulos .....	178
5.3.7	Resolução dos triângulos retilíneos em geral .....	180
5.3.8	Resolução dos triângulos esféricos retângulos .....	183
5.3.9	Princípios para a resolução dos triângulos esféricos em geral.....	186
5.3.10	Resolução dos triângulos esféricos em geral .....	188
5.3.11	Análises e reflexões acerca do <i>Tratado de Trigonometria</i> .....	191
5.4	A GEOMETRIA DE LEGENDRE NA INSTRUÇÃO MILITAR BRASILEIRA .....	198
5.4.1	O Livro I .....	202
5.4.2	O Livro II .....	220
5.4.3	O Livro III .....	237
5.4.4	O Livro IV.....	252
5.4.5	O Livro V .....	262
5.4.6	O Livro VI.....	276
5.4.7	O Livro VII.....	291
5.4.8	O Livro VIII.....	306

<b>5.4.9 Análises e reflexões acerca dos <i>Elementos de Trigonometria</i> .....</b>	<b>322</b>
5.5 ANÁLISES E REFLEXÕES DAS OBRAS <i>ELEMENTOS D'ALGEBRA</i> DE LACROIX, <i>TRATADO DE TRIGONOMETRIA</i> E <i>ELEMENTOS DE GEOMETRIA</i> DE LEGENDRE NA INSTRUÇÃO MILITAR BRASILEIRA.....	325
<b>5.5.1 Considerações acerca do contexto escolar .....</b>	<b>326</b>
5.6 CONSIDERAÇÕES ACERCA DESTE CAPÍTULO E OUTRAS REFLEXÕES .	329
<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>333</b>
<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>339</b>

## INTRODUÇÃO

A trajetória acadêmica na Universidade Luterana do Brasil inicia-se em 1999 ainda no Curso de Economia, o qual cursei três semestres e, por afinidade, acabei por efetuar a troca de curso para Licenciatura em Matemática, em 2001. A conclusão da graduação se deu em outra instituição no ano de 2010. Após isso, nos anos de 2013 e 2014 fiz o curso de Especialização em Estudos Culturais Contemporâneos, o qual contribuiu de forma decisiva para que o sonho de me tornar um pesquisador começasse a se tornar uma obsessão.

Nos primeiros dias do mês de dezembro de 2015, aquele dito popular que reza “o bom filho à casa torna” começou, mais uma vez, a tornar-se verdadeiro. Após realizar o processo seletivo para ingresso no Programa de Pós-graduação de Ensino de Ciências e Matemática da ULBRA Canoas fui selecionado como aluno de Mestrado da instituição em que há mais de dez anos eu havia iniciado a minha caminhada na Matemática.

Dessa forma, nos primeiros dias de 2018 defendi a Dissertação de Mestrado “Um Estudo a partir da disciplina de Matemática no Currículo de um Curso Técnico em Novo Hamburgo/RS: Relações de Contexto Histórico no Currículo Escolar”, sob a orientação do Prof. Dr. Arno Bayer.

Paralelamente, em 2018, iniciei a minha carreira docente de forma exclusiva na Educação Básica, quando também ingressei no Doutorado do mesmo Programa de Pós-graduação. Durante a escrita da dissertação de Mestrado, em alguns momentos me deparei com o ensino de ofício nos primórdios do Rio Grande do Sul, e o desejo de investigar o ensino de Matemática na Escola do Arsenal de Guerra de Porto Alegre me movia a seguir a minha trilha de pesquisador<sup>1</sup>.

Isto posto, a ideia de se estudar o Ensino da Matemática na instrução militar brasileira oitocentista a partir da análise de obras didáticas veio de forma natural, ao perceber que a ideia original deste projeto, que era o estudo da História do Ensino de Matemática na Escola do Arsenal de Guerra de Porto Alegre dispunha de fontes limitadas para consulta e, dentro do tempo disponível, talvez pouco fosse localizado, mesmo com a colaboração do Museu do

---

<sup>1</sup> A escrita em primeira pessoa segue até este parágrafo por se tratar de tema com cunho subjetivo. Deste ponto em diante, será trabalhado em terceira pessoa.

Comando Militar do Sul de Porto Alegre e seu responsável, o militar e Doutor em História Ianko Bett.

Porém, como na pesquisa as coisas não acontecem propriamente ao acaso, por indicação do referido militar chegamos ao Arquivo Histórico do Exército, na sede do Comando Militar do Leste, cidade do Rio de Janeiro. Chegando lá, quase na metade da nossa caminhada, por meio da excelente recepção que tivemos no estudo do tema pelo Chefe da Seção de Pesquisa Institucional da Divisão de Difusão e Acesso, o Capitão Mauro Pereira, obtive acesso aos documentos históricos que indicavam um novo rumo na pesquisa.

Desta forma, tendo uma primeira frustração com o já referido fato de que o nosso tema original não seria viável devido às nossas buscas serem infrutíferas, me deparei com uma nova possibilidade de tema para a nossa pesquisa histórica: o ensino de matemática na instrução militar brasileira desde a criação da instituição que deu à Matemática um novo patamar na educação brasileira.

Mesmo com as dificuldades e restrições de viagem impostas pela pandemia de covid-19, foi possível realizar as atividades de registro fotográfico das obras disponíveis no arquivo, e a cada descoberta, o entusiasmo tomava conta e nos deu a certeza de que aquele era o caminho certo e o lugar certo para prosseguir com o nosso trabalho.

Ali, com todos os documentos pacientemente disponibilizados, década a década, pelos integrantes do Arquivo Histórico do Exército Brasileiro, reuni o material que, posteriormente, foi complementado com as obras que se somaram, compondo os elementos necessários para que fosse montado o argumento de concepção desse trabalho.

Desta forma, e com esta breve explanação de como cheguei até este tema, é preciso dizer também por quais motivos se tem uma delimitação de tema e este espaço temporal. Assim, a pesquisa intitulada “O ensino da matemática na instrução militar brasileira oitocentista a partir da análise de obras didáticas” tem como objetivo a investigação de como o ensino da matemática se desenvolveu, as alterações curriculares, os conteúdos ensinados, as obras utilizadas e o contexto social do período histórico oitocentista brasileiro.

Desta maneira, durante o período de pouco mais de quatro anos, esta pesquisa sobre o ensino da matemática na instrução militar brasileira oitocentista

foi desenvolvida. Este tema, por sua vez, está inserido na História da Educação Matemática, contemplando um relevante período histórico brasileiro, com muitos acontecimentos no país e no continente americano.

Mas o que realmente a Matemática tem a ver com a instrução militar? De acordo com Mormêllo (2011), a franca evolução na tecnologia dos confrontos bélicos, especialmente no século XVII, e os confrontos armados na América do Sul, obrigaram a Corte Portuguesa a olhar com bastante critério para a sua colônia ultramarina. Dessa forma, o estudo da matemática começa a ganhar caráter primordial na formação dos artilheiros e dos engenheiros, contribuindo decisivamente para o ensino das disciplinas técnico-militares.

As origens do ensino da Matemática no Brasil, aponta Bruno Belhoste, na apresentação da obra de Valente (2017), remontam ao ano de 1738, quando houve a criação de uma aula ministrada aos alunos de Artilharia e Fortificação, onde permaneceu restrito à instrução militar até a Independência do Brasil. No entanto, observa o autor, que o Brasil foi mais um dos países onde um movimento internacional, particularmente com maior força na França, se mostra “notavelmente precoce”.

No contexto deste tema vale aqui destacar alguns dos trabalhos realizados dentro do tema do ensino de matemática na instrução militar brasileira, os quais foram obtidos por meio de buscas em repositórios de pós-graduação de instituições e anais de eventos da área:

A dissertação de mestrado de Ben-Hur Mormêllo, sob o título “O Ensino de Matemática na Academia Real Militar do Rio de Janeiro, de 1811 a 1874”, defendida no ano de 2010 na Universidade de Campinas, analisa como foi concebido o currículo de matemática da Academia Real Militar do Rio de Janeiro e suas modificações posteriores, decorrentes das reformas dos seus estatutos, desde 1811 até 1874.

O artigo de Circe Mary Silva da Silva e Lígia Arantes Sad, intitulado “Um lugar para educação matemática na Academia Militar do Rio de Janeiro oitocentista”, apresentado no I Congresso Iberoamericano de História de La Educación Matemática no ano de 2011 em Covilhã – Portugal, no qual as autoras abordam os aspectos da história da educação matemática na primeira metade do século XIX, destacando as características pedagógicas e os livros-texto utilizados.



Cita-se, ainda, o artigo de Fabrício Santos de Sousa e Maria Lúcia Pessoa Chaves Rocha, intitulado “Academia Real Militar: primeiros livros utilizados para o Ensino de Matemática Superior no Brasil”, publicado na Revista de Matemática, Ensino e Cultura - REMATEC; número 26, correspondente ao terceiro quadrimestre de 2017, ano 12 desta revista, nas páginas 144 – 161.

Diante deste cenário e, com o vislumbre de uma grande possibilidade de investigação acerca de como ocorreu o ensino de matemática, realizou-se este trabalho de pesquisa com o foco nas instituições militares, porém, não deixando de observar as relações de contexto histórico que ocorreram antes da criação da Real Academia Militar e durante o período em análise. Para isto, e com o objetivo de responder a estas questões, além das análises e reflexões, foram feitos apontamentos para prováveis trilhas de pesquisa que ainda podem ser seguidas, conforme será descrito a seguir:

O capítulo 1 apresenta a introdução do presente estudo. O capítulo 2 denominado “A Investigação” apresenta a justificativa, o objetivo geral e os objetivos específicos, uma breve apresentação do Referencial Teórico e o percurso metodológico da pesquisa.

O capítulo 3 traz consigo um estudo dos referenciais teóricos da Hermenêutica, desde os seus primórdios, na interpretação dos textos bíblicos, tema analisado por Strecker (1997), passando para a Hermenêutica historiográfica de Ricoeur (2007), chegando, enfim, à Hermenêutica de Profundidade de John Thompson (1990). É esta Hermenêutica de Profundidade que permitiu analisar o contexto histórico e seus acontecimentos ligados ao ensino de matemática na instrução militar brasileira.

O capítulo 4, por sua vez, retrata o contexto histórico brasileiro e a criação da Real Academia Militar. Ancorado nos autores Possamai (2010), Medeiros (1992) e Motta (2001), foram abordadas as nuances da chegada da família real ao Brasil, à época colônia de Portugal, como se encontrava o Exército Brasileiro naquele período e os fatores que levaram a corte portuguesa à criação da instituição de ensino. Após este primeiro momento, foram analisadas ao longo do período oitocentista, as mudanças curriculares através dos decretos imperiais do período, todas as estruturas curriculares adotadas, o contexto que levou a estas alterações e as repercussões destas no meio militar desde 1810 até os eventos que culminaram na Proclamação da República em 1889.

O capítulo 5 trata do Ensino de Matemática propriamente dito. Através do aporte teórico de Schubring (2003), Boyer (1989) e Valente (2020), realiza-se uma descrição de algumas das obras utilizadas no ensino da matemática na Real Academia Militar. Ainda no mesmo capítulo, utilizando como referência, Sousa e Rocha (2017), Mormêllo (2010), Sad e Silva (2011), Silva (2011) e Sad (2010) foram abordados, além de análises e reflexões acerca das obras e sua influência no ensino e no contexto escolar envolvido, relatos de aplicação prática dos conceitos trabalhados.

Nas considerações finais, constam as reflexões sobre o ensino da matemática na instrução militar brasileira oitocentista a partir da análise de obras didáticas, bem como, também, são apontados possíveis caminhos a serem trilhados no que diz respeito ao assunto investigado neste trabalho.

## A INVESTIGAÇÃO

A pesquisa denominada “O ensino da matemática na instrução militar brasileira oitocentista a partir da análise de obras didáticas” tem como objetivo investigar, a partir de obras didáticas, de que forma se ensinou a Matemática nos primórdios da instrução militar brasileira período oitocentista. O marco inicial desta investigação se dá com a chegada da família real ao Brasil e, a publicação da Carta-Régia em 04 de Dezembro de 1810, a qual decretava:

Faço saber a todos os que esta carta virem, que tendo consideração ao muito que interessa ao meu real serviço, ao bem público dos meus vassallos, e à defesa e segurança dos meus vastos domínios, que se estabeleça no Brazil e na minha actual Côrte o Cidade do Rio de Janeiro, um curso regular das Sciencias exactas e de observação, assim como de todas aquellas que são applicações das mesmas aos estudos militares e práticos que formam a sciencia militar em todos os seus diffíceis e interessantes ramos, de maneira que dos mesmos cursos ele estudos se formem habeis Officiaes de Artilharia, Engenharia, e ainda mesmo Officiaes da classe de Engenheiros geógraphos e topógraphos, que possam também ter o útil emprego de dirigir objetos administrativos de minas, de caminhos, portos, canaes, pontes, fontes, e calçadas: hei por bem que na minha actual Corte e Cidade do Rio de Janeiro se estabeleça uma Academia Real Militar para um curso completo de sciencias mathematicas, de sciencias de observações, quaes a physica, quimica, mineralogia, metallurgia e históri natural, que comprehenderá o reino vegetal e animal, e das sciencias militares em toda a sua extensão, tanto de tactica como de fortificação, e Artilharia, na fôrma que mais abaixo mando especificar: havendo uma inspecção Geral que pertencerá ao Ministro e Secretário de Estado da Guerra, e immediatamente abaixo das suas ordens à Junta Militar que mando crear para dirigir o mesmo estabelecimento, que sou servido ordenar na forma dos seguintes estatutos (BRASIL 1810, p. 2322-2323).

Com o auxílio do conceito *thompsiano* da Hermenêutica de Profundidade, a pesquisa está apoiada na compreensão das singularidades dos acontecimentos, além de revisitar o passado em seus pormenores, para então restituir de maneira visível os fatos e evidenciar que os objetos em estudo são construções simbólicas, passíveis, portanto, de interpretação e, as práticas, por sua vez, corroboram na interpretação desta narrativa do ensino da matemática na instrução militar brasileira oitocentista a partir da análise de obras didáticas.

Considera-se para este trabalho o fato de que as narrativas históricas possibilitam, ao trazerem para a análise no presente acontecimentos que contribuíram na construção de trajetórias, a elaboração de outras possibilidades de futuro. A partir disso, será buscada, também, a análise sócio-histórica, a qual

contribui para, conforme Thompson (1990, p. 368), “a contextualização social das ideias”.

É importante destacar que quando se utiliza os conceitos de Thompson para estudar a história, e partir do momento em que o pesquisador se propõe a pensar os contextos históricos, a narrativa é construída a partir do olhar de reconstrução dos cenários em que foram produzidos tais discursos e, a partir desse ponto, analisando as regras, convenções e instituições, chegar às conclusões interpretativas.

## 2.1 JUSTIFICATIVA E PROBLEMA DE PESQUISA

A escolha por um estudo historiográfico como o que está proposto neste momento vem da necessidade de se escrever hoje, através de uma análise minuciosa do passado, um estudo a partir da História do Ensino de Matemática na instrução militar brasileira e suas relações com o contexto histórico, político e social, não só nesta disciplina, mas também no currículo escolar. O avanço tecnológico e outras necessidades impostas às pessoas envolvidas com determinado setor demandante acabam por exigir um nível diferente de aprofundamento nos estudos de determinado conhecimento.

A Matemática, como um dos elementos centrais dessas transformações, sobretudo nessa pesquisa, exigia daqueles que pretendiam seguir uma carreira militar um alto nível de entendimento para o manuseio, sobretudo das armas de fogo que começavam a fazer parte das guerras naquele período. Aparentemente, temos aqui um motivo de análise: o que teria causado essa necessidade por outros conhecimentos diversos daqueles iniciais? Uma necessidade política pode ser uma boa resposta para esta pergunta. Mas a quem caberia investigar a proveniência desta transformação, seu contexto social, suas vertentes de mudança?

Também é importante dizer que entre dois períodos consecutivos de análise, não será mais importante (nem menos importante) aquele que está se sobrepondo, porém, nesta pesquisa entende-se os contextos históricos anteriores e os que se sucedem como necessários para a compreensão de seus desdobramentos na formação militar.

Também é relevante observar que “tudo é histórico e tudo depende de tudo; nada é inerte, nada é indeterminado e, [...] nada é inexplicável...” (VEYNE, 2014, p. 268). Assim, nessa pesquisa será buscada a interdependência, a conexão entre cada um dos elementos que compõem este enredo, sejam eles o contexto histórico, social e político do país.

A perspectiva neste estudo é de que tudo aquilo que ajudou na construção histórica presta uma assistência para as explicações sobre a contemporaneidade. Os fatos e os contextos que precedem o período de pesquisa têm tanta importância quanto o que ocorre neste espaço temporal em que é feita esta investigação.

Por último, destaca-se a reduzida produção acadêmica neste campo de estudos, os quais, em se tratando do ensino de matemática, não abordam na totalidade e abrangência proposta nesta pesquisa ou, em se tratando da instrução militar, abordam temas diversos que não estão relacionados propriamente à esta. Isto pôde ser verificado na etapa de revisão de literatura o que nos levou a entender a necessidade e importância deste estudo. Isto posto, chega-se ao seguinte problema de pesquisa: “como se constituiu, historicamente, o ensino da matemática na instrução militar brasileira oitocentista a partir da análise de obras didáticas?”

## 2.2 REFERENCIAL TEÓRICO

O tema deste trabalho teve como ancoragem metodológica a Hermenêutica de Profundidade que colaborou com os argumentos de pesquisa e evidenciou o fato de que os objetos em estudo são construções simbólicas, passíveis, portanto, de interpretação.

Acrescentou-se a isso os apontamentos de Kuhn e Bayer (2017, p.9) sobre a pesquisa histórica:

Os fatos históricos são constituídos a partir de traços deixados pelo passado. A ação do historiador consiste em efetuar um trabalho sobre esses traços para constituir os fatos. Desse modo, considera-se o trajeto da produção histórica como interesse de pesquisa [...].

Considera-se, para este trabalho, o fato de que as narrativas históricas possibilitam, ao trazerem à análise no presente os acontecimentos que

contribuíram na construção de trajetórias e o vislumbre de novas possibilidades de futuro. Igualmente, sobre pesquisar uma disciplina em específico, Chervel (1990), lembra que para adiante da descrição dos conteúdos, cabe ao pesquisador

Dar uma descrição mais detalhada do ensino em cada uma das etapas, descrever a evolução didática, pesquisar as razões da mudança, revelar a coerência interna dos diferentes procedimentos aos quais se apela, e estabelecer a ligação entre o ensino dispensado e as finalidades que presidem a seu exercício.

Assim, o referencial teórico desta pesquisa foi apoiado em autores e suas referidas obras que dissertam sobre a Intepretação na Pesquisa Histórica sob as lentes da Hermenêutica com Ricoeur (2007), e da Hermenêutica de Profundidade em Thompson (1990); sobre a Formação do Oficial do Exército com Motta (2001); sobre a História da Escola Militar de Porto Alegre com Medeiros (1992); sobre a Análise Histórica de Livros de Matemática com Schubring (2003); sobre o Ensino de Matemática na instrução militar com Biral (2011), Sousa e Rocha (2017), Sad (2011), Silva (2011), Silva e Sad (2011), Valente (2020) e, ainda, sobre a História da Matemática com Boyer (1989). Fundamentada nestes autores, esta pesquisa histórica foi conduzida.

Assim, realizou-se a coleta, a organização e a interpretação dos materiais recolhidos, tecendo contribuições e considerações ao final deste trabalho. Busca-se, com isso, escrever sobre o ensino da matemática na instrução militar brasileira oitocentista a partir da análise de obras didáticas.

## 2.3 OBJETIVOS

### 2.3.1 Objetivo Geral

Investigar como se constituiu, historicamente, o ensino da matemática na instrução militar brasileira oitocentista a partir da análise de obras didáticas.

### 2.3.2 Objetivos Específicos

São os objetivos específicos do presente estudo:

- Pesquisar a origem da necessidade de uma nova instrução militar no período oitocentista;
- Investigar a procedência da Matemática ensinada nas escolas destinadas à instrução militar;
- Relacionar os fatos históricos, políticos e sociais, precedentes e concomitantes, associados às mudanças de finalidade e, de currículos nas instituições envolvidas com a instrução militar brasileira;
- Investigar a importância da matemática na instrução militar brasileira no período oitocentista;
- Analisar, a partir de obras didáticas, a matemática ensinada durante o período oitocentista aos alunos das instituições envolvidas com a instrução militar.

A seguir, abordaremos o Referencial Teórico e Metodológico desta Investigação sob as lentes dos autores aqui já mencionados.

## REFERENCIAL TEÓRICO E METODOLÓGICO

Dentro deste capítulo são desenvolvidas questões de relevância acerca da fundamentação teórica e metodológica deste trabalho. Inicia-se com a questão da história social as ideias de Schubring (2003), a qual situa historicamente a análise de obras didáticas e, após, será abordado o tema da Hermenêutica, desde os seus primeiros registros históricos por meio dos estudos de Strecker (1997) até a Hermenêutica de Profundidade de Thompson (1990), a qual será utilizada para a interpretação e análise sócio-histórica.

### 3.1 AS OBRAS DIDÁTICAS E A HISTÓRIA SOCIAL DAS IDEIAS

Desde a ideia primitiva de escrita e o progresso alfabeto, passando pela invenção do número e os primeiros papiros que se tem registro, os quais no calendário cristão datam de alguns mil anos antes de Cristo, até a invenção da imprensa, no século XV depois de Cristo, a transmissão do saber matemático sempre seguiu por dois caminhos: “pela comunicação pessoal ou oral e por textos escritos” (SCHUBRING, 2003, p. 3).

Ao propor, nesta pesquisa, um estudo de obras didáticas destinadas ao ensino da matemática na instrução militar brasileira no período oitocentista, o pesquisador fica diante da missão de trazer à luz de um estudo na contemporaneidade, os saberes matemáticos que perpassam mais de duzentos anos desde a sua publicação.

As obras de Lacroix (*Elementos de Álgebra*) e Legendre (*Tratado de Trigonometria e Elementos de Geometria*) datam, em sua versão traduzida, do início dos anos 1800, e assim o foram feitas para atender a uma demanda específica da Real Academia Militar do Rio de Janeiro, pois naquele momento histórico não eram encontradas em terras brasileiras materiais que remetessem a uma “Matemática Superior”.

Desta forma, busca-se em Gert Schubring (2003) e sua obra “Análise Histórica de Livros de Matemática” os subsídios necessários para explicar qual o papel do “texto escrito” na instrução militar brasileira oitocentista. Também é importante destacar que, conforme Schubring (2003), “o papel incógnito dos



textos escritos durante a história é constituído pela relação entre o oral e os escritos, ou seja, entre o professor e o texto de ensino”.

O autor adverte, em parágrafo anterior, a uma questão dicotômica existente entre estes dois entes: o professor e o texto escrito. À primeira vista pode até parecer que a expressão “dicotômica” seja um tanto quanto demasiada para avaliar esta relação. No entanto, não pode ser desconsiderado que avaliar o ensino de matemática sob uma visão unilateral das obras didáticas escritas tem os seus riscos, os quais estão calculados e são sabidos.

O histórico da “chegada” em território brasileiro das obras didáticas escritas para uma matemática “superior” já era realidade através da criação, em 1767, de um Regimento de Artilharia o qual possuía aulas de Técnicas de Tiro e Matemática, ministrada conforme o “Novo Curso de Matemática” de Bélidor (MORMÉLLO, 2010).

Essa informação corrobora o que afirma Schubring (2013, p.4), dentro do estudo de obras didáticas, destacando que “a diferenciação começou por cima, no nível ‘superior’, e que os níveis ‘inferiores’ foram estabelecidos só muito mais tarde”, ou seja, começou-se estabelecendo critérios para os estudos de uma matemática mais próxima a dos “cientistas” ou, “mais pura” por assim dizer.

Para que isso se tornasse uma realidade, a idealização dos chamados “*éléments*” ou, em língua portuguesa, “livros elementares” de acordo com o modelo francês a partir da segunda metade do século XVIII, tinha por objetivo “tornar elementar o saber, de fazê-lo ensinável, sem privilegiar um determinado nível de ensino” (SCHUBRING, 2013, p. 4). A notória estabilidade do saber naquele momento histórico, aliada à invenção da imprensa, ocorrida aproximadamente trezentos anos antes, viabilizou a divulgação do saber através dos meios escritos. Faz-se válido destacar também a origem do termo “elementos”, fruto da reflexão acerca da função das obras didáticas escritas na difusão do conhecimento e do saber científico, o que é tratado por Schubring (2013, p. 4) como “elementarizações do saber científico, dos sábios (*savants*): seus elementos”.

Isto posto, avança-se à ideia de que o estudo de obras didáticas escritas não deve limitar-se a uma discussão que Shubring (2013) denomina de “interna”, ou seja, uma avaliação apenas de sua estrutura interna, de seus dados descritivos. Para se analisar historicamente uma obra didática escrita, destaca o

autor que se deve também “julgar essa estrutura e as conexões internas estabelecidas, e a situar o autor e sua obra no desenvolvimento da matemática” (SCHUBRING, 2013, p. 15).

Desta forma, prossegue o autor, o que deve ser adotado como referência na análise deve ser o “corpo da matemática escolar” e aquilo que ele desenvolve. Além disso, como *mea culpa*, Schubring (2013) conduz o pesquisador para uma reflexão acerca daquilo que ele conhece, ao estudar obras didáticas escritas, da matemática escolar ou seja, muito pouco. Prosseguindo no desenvolvimento de seu argumento, o autor frisa que:

Há não somente ausência de um padrão estabelecido em relação ao qual se poderia avaliar a matemática escolar, mas a tarefa torna-se ainda complexa se considerarmos a enorme variabilidade da matemática “ensinada” - [...] -, uma variabilidade causada, de fato, por incógnitas culturais e sociais (SCHUBRING, 2013, p. 16).

Prosseguindo, como não há um critério ou critérios estabelecidos para uma interpretação interna e iminente de uma obra didática escrita, é preciso que a análise tenha, como ponto de partida “um contexto social mais amplo, como o da produção de conhecimento pela comunidade científica em geral.” (SCHUBRING, 2013, p. 16). A partir disso, pode-se pensar que uma obra didática não possui “o” autor e sim, que é fruto de uma associação bem mais extensa do que somente aquela(s) pessoa(s) que consta(m) na primeira página, ou seja, ainda nas palavras de Schubring (2013), o autor é o representante de uma “coletividade” que colaborou na concepção da obra.

Esta coletividade, por sua vez, decorre de fatores distintos e vem sendo consequência da associação do expediente das obras didáticas escritas com fatores sociais e culturais distintos. Talvez, o principal deles possa ser facilmente apontado: as instituições. As instituições, por sua vez, vão, ao longo do tempo, quer por restrições, quer por demandas da sociedade ou delas próprias, formatando as obras didáticas e tornando-as um retrato do saber que pode, e deve ser multiplicado.

Por fim, o autor destaca, ainda, que a coletividade também pode ser evidenciada de outras formas, tais como: a concepção a partir da estrutura de livros já existentes, “empréstimos” ou cópias completas de obras anteriores ou, ainda, por solicitação expressa de alguma instituição (SCHUBRING, 2013).

Após o destaque inicial da teoria sobre análise das obras didáticas, prossegue este capítulo com o referencial teórico da Hermenêutica para pesquisas históricas, inicialmente baseadas nos estudos da exegese bíblica.

### 3.2 A HERMENÊUTICA E A HERMENÊUTICA DE PROFUNDIDADE COMO MARCO TEÓRICO PARA INVESTIGAÇÕES HISTORIOGRÁFICAS

A Hermenêutica vem, ao longo da história, sendo amplamente utilizada para aproximar, culturalmente falando, o intérprete que se propõe a realizar um estudo historiográfico e universo que é o seu objeto de estudo. Desta forma, o hermeneuta precisa estar apto a interpretar a linguagem, as condições de vida e a concepção de mundo do período que pretende analisar ou, ainda, e não menos importante, sentir-se interpelado com as perguntas do texto que se propõe a investigar. Qualquer enunciado relevante, que faça parte da história, deve ser trazido ao hoje de forma que possa ser compreendido à luz do nosso tempo.

Antes de tudo, porém, será definida de forma concreta a hermenêutica e as bases do pensamento hermenêutico, construindo conceitualmente e historicamente as suas bases filosóficas e, com esses argumentos, serão estabelecidos os entrelaçamentos necessários entre a hermenêutica, a historicidade e o ensino da matemática na Instrução Militar brasileira.

#### **3.2.1 A Hermenêutica e suas origens como a arte de interpretar**

As primeiras notícias que se tem registro dão conta dos estudos de Strecker (1997) que relata o surgimento da Hermenêutica a partir do século I antes de Cristo, onde são observados os primeiros esboços deste método. O autor atribui às primeiras tentativas de interpretação do Antigo Testamento, na Figura do Rabino Hillel, os fundamentos que ficaram conhecidos como “As Sete Regras de Hillel” que devido ao seu caráter de ineditismo espalharam-se rapidamente entre aqueles que buscavam uma interpretação para a linguagem alegórica dos textos.

Resumidamente, as Sete Regras de Hillel afirmavam que, para se realizar uma operação de interpretação dos textos bíblicos, deveriam ser observados os seguintes pressupostos:

*Ad minori ad maius* (do menos para o mais) ou, do mais fácil ao mais difícil (e também o contrário); *per analogiam* (por analogia, no que se refere a conclusão, onde deve-se procurar por palavras de mesmo significado; a reunião de passagens (do texto) semelhantes onde seja possível a construção de uma “família”; conclusão principal como resultado de citações do próprio texto; interpretação do geral para o particular (e também ao contrário); a explicação mais aproximada de uma frase usando-se outra como referência e, por fim, a dedução do contexto, onde se tem uma interpretação que parte do contexto de uma afirmação. (STRECKER 1997, p.171)

O autor também considera o método hermenêutico de Pablo, um antigo fariseu que dominava as técnicas de Hillel e, também, as técnicas helenistas. Assim, Pablo assimilou algumas possibilidades oferecidas por Hillel (principalmente a primeira, “*a minori ad maius*” e a segunda possibilidade) trazendo também, as interpretações de fatos futuros como, por exemplo, o Apocalipse.

Conforme Strecker (1997) o alexandrino Orígenes (185-253), um dos teólogos mais bem reconhecido pelos filósofos pagãos da época, escreveu comentários sobre os principais livros do Antigo Testamento e sua interpretação pelo método alegórico, onde, por sua influência, este tornou-se “o método eclesiástico de interpretação das Escrituras” através da antonomásia<sup>2</sup>.

Outro hermeneuta que trouxe importante contribuição com a sua “*Doctrina del cuádruple sentido de la Escritura*” foi Juan Casiano (360-435) onde propõe uma interpretação dividida primeiramente no sentido literal dos escritos, seguido de uma interpretação alegórica onde discorre sobre a verdade da fé em Jesus Cristo contida no texto. O terceiro passo seria uma interpretação moral dos escritos onde destaca as normas do comportamento Cristão contidas nos textos e, por último, através da escatologia (ou análise do fim do mundo), busca indícios da continuidade dos justos e perfeitos no Reino de Deus após o juízo final. Acerca disso, Strecker (1997, p. 175) conclui que:

El fundamento de la doctrina del sentido cuádruple de la Escritura fue la convicción de que, en la Biblia, no sólo las palabras, sino ella misma, su materialidade, rebosa significado. El objeto de este

<sup>2</sup> A antonomásia consiste, em retórica, na substituição de termos em textos por outros que muitas vezes nada tinham a ver, morficamente, com aqueles substituídos (STRECKER, 1997).

importante método interpretativo es relacionar lo más posible las afirmaciones de la Escritura con todos los campos de la vida.

Com isso, Strecker (1997, p.177) mostra que “*la Escritura es por sé misma lo más cierto, lo más facilmente accesible, lo que mejor se entiende, la que se interpreta a sí mesma, la que examina, juzga e ilumina todas las palabras*”.

Os significativos avanços propostos por Ricoeur (2007) mostram complementaridade e, no entendimento deste pesquisador, representam por meio de seus estudos o elo de fechamento entre a exegese e a hermenêutica moderna. Tanto reafirma-se essa ideia de que Paul Ricoeur<sup>3</sup> dá continuidade, ampliando a questão da interpretação em história, lançando à luz, na operação interpretativa, uma necessária reflexão acerca da complexidade dos atos de linguagem envolvidos e incorporados ao discurso histórico que se pretende analisar.

Sobre esse tema, Ricoeur (2007) levanta a possibilidade de admitir, dada a complexidade dos atos de linguagem (como citado acima), controvérsias a dada operação hermenêutica pelo fato de que além da subjetividade inerente ao ato da interpretação podem subsistir fatores não acessíveis ou não-perceptíveis (seja por questões pessoais, seja por questões culturais), que no complexo operatório poderão implicar em conflitos de interpretações.

Acerca desta inflexão, o filósofo francês nos conduz a uma renúncia desta possibilidade de ambiguidade quando somos remetidos à questão filosófica e correlata entre “interpretação e verdade” em todas as etapas das análises. Esse tema será tratado mais adiante. Antes disso, será situada a obra de Ricoeur dentro desse estudo.

Inicialmente, para introduzir a teoria de Paul Ricoeur dentro dos estudos hermenêuticos, inicia-se ponderando algumas noções trabalhadas em seus escritos, as quais servirão de sustentação no desenvolvimento dos argumentos necessários para esse estudo historiográfico.

Assim, como está se tratando de uma operação historiográfica, elementarmente aquele(a) que se propõe a realizar um estudo desta natureza deve considerar, inicialmente, as noções de quatro categorias de análise, a saber:

---

<sup>3</sup> Em sua obra: A Memória, A História, O Esquecimento (2007 – edição em Português).

- a) o acontecimento – por estar na esfera da visibilidade, é vista como a menos especulativa de todas. É o fato individualmente determinado. Pelo fato de estar ligado ao passado, pode estar envolto em um estado de invisibilidade, sendo que, nestas situações é objeto de pesquisa através de mediações, e não de percepções.
- b) as repetições – tratam especificamente da oposição entre um tempo estático e um tempo “não-repetível” (cíclico ou linear; progressivo ou regressivo). A partir dessas concepções, o tempo-presente ocupa o seu lugar na história. Deste modo, pode-se falar em períodos históricos determinados, como séculos, idades, períodos, épocas.
- c) épocas – a reflexão acerca desta categoria vem carregada de multiplicidades pois, cada cultura observará de modo diferente esta questão. Uma das formas de análise pode ser o marco zero para fins de cálculo do tempo histórico que, por exemplo, para o mundo ocidental cristão seria o nascimento de Jesus Cristo; para o islã seria a Hégira. Ao fim, o que está em jogo nessa categoria é a possibilidade de uma história “sem direção nem continuidade<sup>4</sup>”.
- d) as estruturas – trabalhando como uma espécie de continuidade da questão das épocas, as estruturas operam na questão da cumulatividade, ou seja, pela soma de resultados “de tempos em tempos” que é formada uma combinação favorável. Ainda acerca das estruturas, os estudos de Claude Lévi-Strauss (1987) nos permitem concluir que o “progresso” (ou “o curso da história”) “não é necessário, nem contínuo; ele se dá por saltos, ou por pulos”. Essa ideia parte do pressuposto de que a humanidade, e sua história em curso, não se movem como um personagem que sobe uma escada, degrau por degrau.

Sobre a questão da estrutura cabe, ainda, considerar que a sua emergência junto às ciências humanas e sociais se deu primeiramente por meio da biologia através da formulação da ideia de que as estruturas são partes demonstráveis ou partes dotadas de uma existência real.

---

<sup>4</sup> “O desenvolvimento dos conhecimentos pré-históricos e arqueológicos tende a *estender no espaço* formas de civilização que éramos levados a imaginar como *escalonados no tempo*.” (RICOEUR 2007, p.167)

No que se refere às estruturas na historiografia, deve-se observar que aqui, o principal objeto em voga é a linguística tendo sido a história, enquanto ciência, parte implicada na reinserção desta em seu espaço teórico e na recuperação desse mesmo espaço nos estudos das linguagens literária e poética.

A série de definições apontadas anteriormente, implicam o homem no tempo. Pode-se pressupor que através dos acontecimentos e dos sujeitos neles envolvidos, são gerados testemunhos, os quais geram rastros (os quais chamaremos de rastros documentais), o que “assegura o estatuto da história como ofício e do historiador como artesão” (RICOEUR, 2007, p. 181).

A partir do momento em que são trazidos ao texto ter como rastros ou rastros documentais, é necessário também que seja contextualizada a sua emergência dentro da obra do filósofo francês. Segundo os estudos de Ricoeur (2007), a historiografia pode, inicialmente, ser entendida como “memória arquivada”. Para além disso, a noção de arquivo deve também ser observada, pois a breve noção de historiografia, tratada no parágrafo anterior, pressupõe a existência de um arquivo.

Assim sendo, o arquivo trata, conforme Ricoeur (2007, p. 176) do “momento do ingresso na escrita da operação historiográfica. [...] O arquivo é escrito; lido, consultado”. Deste modo, podemos concluir que para os arquivos, o responsável pela operação historiográfica é um leitor, o qual possui um conhecimento indireto sobre o tema.

Nesse momento, dada a estruturação da ideia de Ricoeur, a noção de prova documental emerge, para responder à questão que todo estudo historiográfico pretende responder indiretamente: “o que é provar?” e “o que é provado”?

Primeiramente, a primeira pergunta é respondida com o entendimento de que “provar” é nada mais que responder à(s) pergunta(s) feita(s) anteriormente à consulta ao documento em questão. Trata-se também do encadeamento da leitura, compreensão e escrita das respostas que foram buscadas junto aos documentos, guardados em um arquivo. Com relação à pergunta que se quer responder, é nossa suposição que, quando se faz uma consulta a um arquivo, não há entre seus objetivos responder a algum problema ou, ainda, “é a pergunta que constrói o objeto histórico ao proceder um recorte original no universo [...]”

dos fatos e dos documentos possíveis”<sup>5</sup>. A pergunta formulada pelo operador historiográfico, afirma ainda Ricoeur (2007, p. 188), “é uma pergunta que carrega consigo certa ideia das fontes documentais e dos procedimentos de investigação possíveis”.

A partir disso, forma-se o tripé do conhecimento histórico: rastro, documento e pergunta. Essa é a base do conhecimento histórico, e lança os holofotes sobre a noção de documento, que pode ser entendido como “tudo o que pode ser interrogado por um historiador com a ideia de nele encontrar uma informação sobre o passado” (RICOEUR 2007, p. 189).

Com relação à segunda pergunta, o que pode ser provado é um (ou mais de um) fato(s)<sup>6</sup>, os quais seriam passíveis de serem sustentados em proposições singulares, as quais mencionam datas, lugares, nomes próprios, etc.

A natureza filosófica das ideias de Ricoeur (2007), possui absoluta riqueza em exemplos e, por vezes, torna-se complexa impondo uma cuidadosa seleção dos argumentos utilizados para o desenvolvimento de uma ancoragem metodológica que possibilite a interligação das inúmeras possibilidades de interpretação existentes. É na própria palavra “interpretação” que será feito o “movimento da gangorra” da Hermenêutica Filosófica para a Hermenêutica de Profundidade, a qual nos traz possibilidades significativas do ponto de vista da interpretação.

### **3.2.2 Hermenêutica de Profundidade como Marco Teórico para investigações historiográficas**

A perspectiva da HP<sup>7</sup> pretende ser um marco referencial metodológico onde John Thompson traz uma série de argumentos relativos à análise das formas simbólicas e, assim

Coloca em evidência o fato de que o objeto de análise é uma construção simbólica significativa e exige uma interpretação. Por isso, devemos conceder um papel central ao processo de interpretação [...]. Mas as formas simbólicas estão também inseridas em contextos

<sup>5</sup> Prost A. (Douze Leçons sur l’Histoire, p.79) 188, n57, 195, n5.

<sup>6</sup> A que se distinguir aqui a dicotomia entre “fato” e “acontecimento”. Para Ricoeur (2007, p.190), fato “[...] é o conteúdo de um enunciado que visa representa-lo.” e, acontecimento em seu sentido mais primitivo “[...] é aquilo sobre o que alguém dá testemunho” (RICOEUR 2007, p.191).

<sup>7</sup> Trataremos a Hermenêutica de Profundidade na forma abreviada “HP” no decorrer do texto.



sociais e históricos de diferentes tipos; e sendo construções simbólicas significativas, elas estão estruturadas internamente de várias maneiras (THOMPSON, 1990, p.355).

O entendimento de Thompson (1990) sobre as ciências, leva a compreensão de que todas as ciências, sejam elas sociais ou naturais, exigem, em algum momento, compreensão e/ou interpretação de algo. Essa certeza, porém, não pode ser encerrada em si, visto que nesse trabalho o horizonte e o objeto de pesquisa são por si um “território pré-interpretado”. Segundo o autor, o mundo sócio-histórico, o qual se propõe a investigar

Não é apenas um campo-objeto que está ali para ser observado; ele é também um *campo-sujeito* que é construído, em parte, por sujeitos que, no curso rotineiro de suas vidas quotidianas, estão constantemente preocupados em compreender a si mesmos e aos outros, e em interpretar ações, falas e acontecimentos que se dão ao seu redor (THOMPSON, 1990, p. 358).

À medida que o principal objetivo é avançar em relação ao método, Thompson (1990, p. 362) alerta para um fato que não pode ser ignorado, pois para ele, este processo interpretativo “pode ser, e de fato exige que seja mediado por uma gama de métodos explanatórios ou objetivantes”. Prossegue o autor, fazendo a seguinte ressalva:

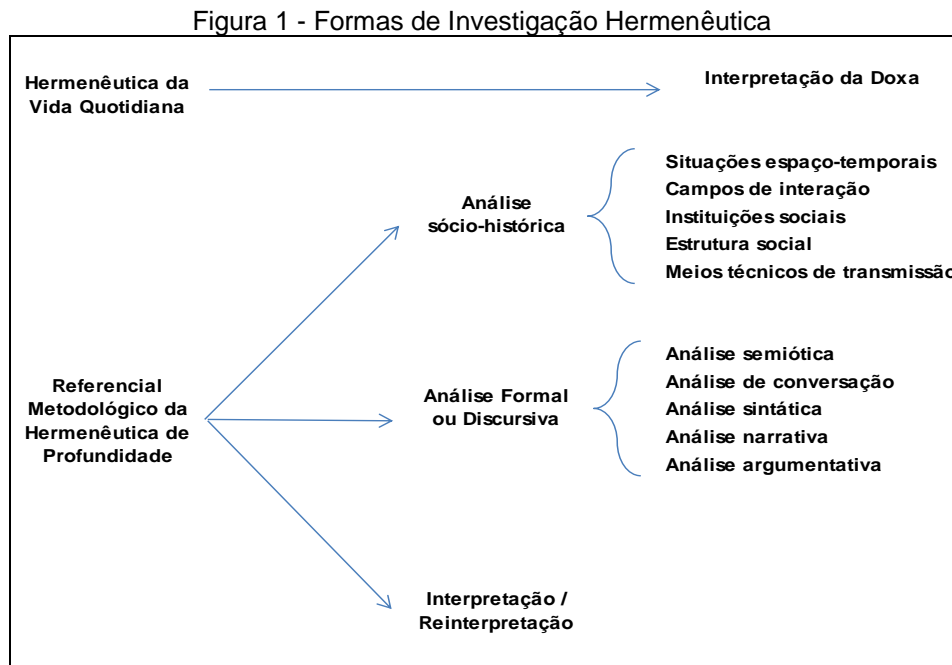
“Explanação” e “interpretação” não devem ser vistas, como o são muitas vezes, como termos mutuamente exclusivos [...]; antes, podem ser tratados como momentos complementares dentro de uma teoria compreensiva interpretativa, como passos que se apoiam mutuamente” (THOMPSON, 1990, p. 362).

Do ponto de vista da HP é fundamental a compreensão de que o objeto de investigação é um campo pré-interpretado e deve-se, portanto, levar em consideração os modos com os quais as formas simbólicas foram interpretadas pelos sujeitos que constituem assim o campo-sujeito-objeto. Com isso, é necessário, neste momento, empenhar-se no entendimento e apreensão das maneiras como as formas simbólicas em estudo foram interpretadas por aqueles que as produzem ou as recebem no decorrer do seu cotidiano. Thompson (1990, p. 363) trata este momento como “indispensável ao enfoque da HP” e, observa ainda que por meio de “entrevistas, observação participante e outros tipos de pesquisa etnográfica, podemos reconstruir as maneiras como as formas simbólicas são interpretadas e compreendidas nos vários contextos da vida social”.

Não menos importante que as afirmações anteriores é dizer que essa própria reconstrução já se constitui em um processo interpretativo, nada mais que uma interpretação do entendimento cotidiano ao qual Thompson (1990, p. 363) chamou de *interpretação da doxa*. Desconsiderar estes contextos cotidianos, conforme o autor, constitui uma falta grave na interpretação e investigação do campo-objeto de interesse da pesquisa.

Por outro lado, Thompson (1990, p. 364), afirma que também é importante destacar que a interpretação da doxa “não é o fim da investigação e sim seu ponto de partida, pois existem vários outros pontos que não devem ser desconsiderados”.

Seguindo o raciocínio do autor, para que ocorram avanços na investigação, é necessário compreender que dentro do enfoque da HP existem três procedimentos principais os quais se constituem em dimensões de análise distintas em um processo de interpretação complexo como a HP pretende apresentar-se. A Figura 1 traz as várias fases do enfoque da HP, conforme a ideia de Thompson.



Fonte: Thompson (1990, p. 365)

O esquema apresentado na Figura 1 é, conforme Thompson (2000), preliminarmente ilustrativo, sendo que a forma de como estas três fases serão aplicadas depende, sobretudo, da análise e entendimento do pesquisador.

Dentro de cada uma destas podem ocorrer alguns métodos mais eficazes que outros, onde tudo dependerá do objeto específico ou das circunstâncias da investigação.

As formas simbólicas são produzidas e comunicadas sob condições sócio-históricas específicas e, mesmo aquelas que por vezes representam certa atemporalidade, estão assim caracterizadas. Desta forma, Thompson (1990, p. 366) afirma que “o objetivo da análise sócio-histórica é, reconstruir as condições sociais e históricas de produção, circulação e recepção das formas simbólicas”.

Avançando no entendimento das ideias de Thompson referentes à análise sócio-histórica, chega-se às instituições sociais, as quais formam um conjunto de relativa estabilidade de regras, recursos e relações sociais estabelecidas pelos próprios através de posições e trajetórias. As instituições sociais estão situadas no interior dos campos de interação e interagem com eles, formando outros campos de interação e, com isso, fixando novas posições e trajetórias. Para Thompson (1990, p. 367), proceder com uma análise destas instituições, é “reconstruir os conjuntos de regras, recursos e relações que as constituem, é traçar o seu desenvolvimento através do tempo e examinar práticas e atitudes das pessoas que agem a seu favor e dentro delas”.

Quando, com base em Thompson (1990), compara-se a relativa estabilidade das diferenças existentes entre as instituições sociais e os campos de interação, analisa-se a “estrutura social”. Posto isso, pode-se afirmar que analisar a estrutura social é determinar diferenças coletivas em termos da distribuição e acesso a recursos e oportunidades de viabilização. Esta análise envolve ainda um ensaio de visualização de critérios, grupos e juízos que possam garantir um caráter sistematizado e perene, onde se deve destacar ainda o seu nível teórico de reflexão, com o objetivo de propor modelos que “ajudem a organizar e iluminar a evidência das assimetrias e diferenças sistemáticas da vida social” (THOMPSON, 1990, p. 367).

Existe, ainda, um conjunto de particular relevância para que se possa investigar as formas simbólicas que Thompson (1990, p. 368) designou de “meios técnicos de construção de mensagens e transmissão”. No entendimento de que as formas simbólicas são transmitidas entre os sujeitos, há o entendimento de que é utilizada alguma forma de troca destas que pode variar desde conversações face a face ou, até mesmo através de esquemas mais

complexos como em comunicadores instantâneos como os quais, nesta pesquisa, serão chamados de meios técnicos de transmissão.

Obviamente, assim como afirma Thompson (1990, p. 368), estes meios técnicos de transmissão não existem no vácuo, “eles estão sempre inseridos em contextos sócio-históricos particulares”, pressupondo, então, esquemas de codificação e decodificação destas mensagens que, por necessitarem de certos recursos, conhecimentos e/ou habilidades, não estão igualmente distribuídos entre os sujeitos, onde se pode afirmar que, por vezes, esta desigualdade pode estar relacionada com “a regulação, produção e circulação das formas simbólicas”.

Outrossim, Thompson (1990, p. 368), na sequência, chama a atenção para que

Os meios técnicos de construção e de transmissão de mensagens não pode se constituir apenas numa investigação técnica, mas deve procurar elucidar os contextos sociais em que estão inseridos e empregados.

A pesquisa sócio-histórica e suas variantes são tentativas diferentes utilizadas para contextualizar socialmente as formas simbólicas. Por sua vez, a produção, a circulação e até mesmo a recepção destas formas simbólicas estão associadas aos processos que ocorrem dentro de contextos sociais estruturados e historicamente específicos. A produção destas formas simbólicas ocorre mediante regras e recursos disponíveis ao autor, sendo orientada à circulação dentro, também, de um campo social. Esta orientação pode possuir uma estratégia clara ou implícita, dependendo sempre do contexto social por onde pretendam seus produtores, que ela circule.

Deste modo, Thompson (1990, p. 369) afirma que a função primeira da HP é

Reconstruir as condições e contextos sócio-históricos de produção, circulação e recepção das formas simbólicas, examinar as regras e convenções, as relações sociais e instituições, e a distribuição de poder, recursos e oportunidades em virtude das quais esses contextos constroem campos diferenciados e socialmente estruturados.

Cabe ainda observar que expressões e objetos que porventura orbitem o campo de estudo devem ser entendidos como formas simbólicas construídas e, assim, também passíveis de interpretação. Por apresentarem uma forma

articulada e complexa exigem, pois, outra forma de análise, pois estas são, por sua vez, produtos de ações ou discursos que se baseiam em uma série de esquemas disponíveis ao seu mentor. Assim, deve-se compreender estas formas simbólicas complexas como produtos que, em virtude deste esquema estruturado tem por capacidade e, por objetivo, versar sobre algo.

Em virtude deste esquema estruturado e de sua forma articulada complexa, estas formas simbólicas possuem uma propriedade de irredutibilidade, exigindo assim outro olhar sobre seus padrões. Aqui, entende-se necessária uma forma diferente de análise, a qual Thompson (1990, p. 369) chamou de “análise formal ou discursiva” que trata de estabelecer

As bases para um tipo de análise que está interessada primariamente com a organização interna das formas simbólicas, com suas características estruturais, seus padrões e relações. [...] é um empreendimento perfeitamente legítimo, na verdade, indispensável; ele é possível pela própria constituição do campo objetivo.

Considerando estas possibilidades descritas, cabe-nos observar que, diante da necessidade de analisar toda esta formulação, foi necessário lançar mão da técnica que Thompson define como semiótica. A análise semiótica trata das relações entre os elementos que compõem a forma simbólica, também chamados de signo, e de como estes elementos se relacionam entre si ou, como estes elementos se relacionam com os demais.

Através da análise semiótica de Thompson (1990) foi possível avançar, conforme a necessidade, na compreensão de constituição interna de determinada forma simbólica, não sendo assim prioridade desta a observação, a análise sistemática e seu aspecto referencial, ou seja, como ocorre a combinação de elementos para que se diga algo sobre alguma coisa. Estando ciente destas limitações impostas pela análise semiótica, é importante lembrar que este é um passo na caminhada para uma interpretação mais completa.

No entanto, Thompson (2009) destaca outras formas de interpretação são possíveis através da HP, as quais não podem ser desprezadas, pois representam importantes meios de interpretação das expressões linguísticas. Elas permitem, de certa forma, uma análise sobre a comunicação no cotidiano, como por exemplo, as interações em uma sala de aula, um programa de televisão.

A saber, o primeiro método de análise das expressões linguísticas descrito por Thompson (1990) foi a análise de conversação, onde deve-se estudar, principalmente, as situações concretas onde a interação linguística ocorre e, ainda, o mecanismo do processo em que os integrantes produzem uma certa ordem estrutural, a qual organiza esta interação e possibilita produzir um ordenamento por meio da aplicação de procedimentos rotineiros.

Outra maneira da qual se pode lançar mão quando se estuda as estruturas internas de um discurso é a análise argumentativa, a qual Thompson (1990, p. 374) define como “cadeias de raciocínio que podem ser reconstituídas de várias maneiras”. Estas cadeias de raciocínio, por sua vez, possibilitam ao analista organizar o discurso através de afirmativas e tópicos e após estabelecer relações entre estes.

A última fase do enfoque da HP ao qual Thompson (1990) chamou de interpretação/reinterpretação, que ora pode ser confundida com a análise, é apenas parte integrante deste aspecto. A interpretação é, e deve ser vista como um complemento necessário à análise formal ou discursiva, pois em sua essência, a análise apresenta um enfoque parcial do estudo das formas simbólicas ou discursivas.

Para além disso, e, ao passo que, mesmo rigorosos e sistemáticos, “ os métodos de análise formal e discursiva [...], eles não podem abolir a necessidade de uma construção criativa do significado, isto é, de uma explicação interpretativa do que está representado ou do que é dito” (THOMPSON, 1990, p. 375).

Assim a reinterpretação, e também a interpretação, são operações sempre arriscadas, pois é admissível a existência de conflitos e, um espaço para a discussão, pois segundo a ideia de Thompson (1990 p. 376): “A possibilidade de um conflito de interpretação é intrínseca ao próprio processo de interpretação.”. Este conflito pode surgir não apenas das interpretações distintas entre analistas que utilizam a HP, mas, também, entre sujeitos que se utilizam da HP e outros, que constituem o mundo sócio-histórico e a isto, Thompson (1990, p. 375) chama de “potencial crítico da interpretação”, onde as divergências se reúnem e se apresentam e se encontram entre suas pré-interpretação e reinterpretação.

Por fim, e ainda dentro da ideia do autor, cabe considerar que a HP oferece um esquema onde as formas simbólicas podem ser analisadas de uma maneira em que é evidenciado o seu caráter histórico e social e que, apresenta estruturas através das quais algo é representado ou dito. Thompson (1990) lembra ainda que a HP impede que o pesquisador caia em armadilhas de métodos particulares os quais levariam facilmente a falácias ou reducionismos, que negligenciariam as condições históricas e processos cotidianos de construção e recepção destas formas.

O referencial da HP não se limita apenas ao estudo das formas simbólicas, mas possibilita ainda o estudo de suas estruturas, bem como realizar análises de contexto, permitindo então o estudo da disciplina escolar, no nosso caso a Matemática. Deve contemplar também a interpretação histórica dos fatos que influenciaram o seu contexto, tendo como ponto de partida o ensino da matemática na instrução militar brasileira oitocentista a partir da análise de obras didáticas.

### 3.3 PROCEDIMENTO METODOLÓGICO

Como a pesquisa se desenvolveu através de dados coletados a partir de registros em documentos históricos, documentos oficiais, revisão bibliográfica em livros (inclusive didáticos), artigos e textos historiográficos, optou-se pelo trabalho metodológico baseado no conceito *thompiano* da Hermenêutica de Profundidade. Nesse contexto, por meio do procedimento eleito, o pesquisador pode, de posse de seus dados coletados, por meio da análise sócio-histórica “reconstruir as condições sociais e históricas de produção, circulação e recepção das formas simbólicas (THOMPSON, 1990, p. 366).

É importante salientar que quando trabalhamos com (re)construção histórica de um determinado conteúdo escolar, não podemos tratá-lo isoladamente, devendo avaliar, também, o contexto em que ele está inserido, os principais fatos e tendências que podem ter influenciado nas práticas de ensino, as metodologias e situações que ocorreram dentro e fora da escola. Assim, Thompson (1990, p. 366) afirma que

Esses esquemas não são regras muito explícitas e claramente formuladas, mas estratégias implícitas e tácitas. Eles existem na forma de conhecimento prático, [...] continuamente reproduzido nas atividades comuns da vida cotidiana.

A pesquisa contou com o apoio do Arquivo Histórico do Exército Brasileiro (AHEx), Divisão de Difusão e Acesso (DDA) e da Biblioteca Nacional, ambos situados na cidade do Rio de Janeiro. Os documentos da pesquisa utilizados foram decretos, planos de ensino, programas curriculares e livros didáticos.

Também foram analisados os acontecimentos históricos paralelos às principais alterações propostas pela Corte Imperial neste período, assim como as propostas de Ensino construídas a partir das tendências pedagógicas da instrução militar no Brasil.

Esta pesquisa teve como objetivo investigar como se constituiu historicamente o Ensino de Matemática na instrução militar brasileira. Para que se tornasse um documento que contribuirá com o conhecimento da realidade do ensino de matemática no período em análise, levou em consideração pontos e particularidades socioculturais e os discursos que implicaram na sua constituição.

## **CONTEXTO HISTÓRICO BRASILEIRO E A CRIAÇÃO DA REAL ACADEMIA MILITAR**

Como estamos nos propondo a realizar um estudo historiográfico, não seria de bom tom iniciar o tema que é objeto desta investigação, o ensino da matemática na instrução militar brasileira oitocentista a partir da análise de obras didáticas, sem antes contextualizar as condições históricas que antecederam até mesmo a fundação da Real Academia Militar do Rio de Janeiro, a qual foi a primeira Instituição de Instrução Militar no Brasil e que nos ofereceu, através do AHEx<sup>8</sup>, farto material para análise neste trabalho.

---

<sup>8</sup> AHEx é a abreviação para Arquivo Histórico do Exército, que no dia 7 de abril de 2021 completou 213 anos, remontando à chegada da Corte Portuguesa ao Brasil em 1808. Fundado inicialmente como Real Archivo Militar, por intermédio de um Decreto Real, e criado pelo Príncipe Regente Dom João, no Ministério do Estado, dos Negócios Estrangeiros e da Guerra, tinha, inicialmente, a função de reunir, produzir e conservar, em bom estado, todos os mapas topográficos e cartas marítimas do Brasil e dos domínios ultramarinos portugueses que fossem de interesse e uso dos ministérios e do Regente lusitano. (disponível em: <http://www.ahex.eb.mil.br/ultimas-noticias/137-arquivo-historico-do-exercito-completa-213-anos>).



Também se faz necessário observar que serão enfatizadas neste estudo as análises de contexto histórico e de condições históricas que, ao passar do tempo, foram culminando no surgimento (primeiramente) da Real Academia Militar e outras instituições associadas nas províncias do então Brasil império. No curso histórico, os desdobramentos, as mudanças curriculares nos cursos das instituições pesquisadas também serão objeto de análise e contextualização sem, no entanto, fazer uma emissão de juízo de valor no que se refere ao posicionamento ideológico das instituições analisadas.

Assim, essa narrativa histórica remonta a um período anterior à chegada do Príncipe Regente, D. João, ao Brasil. A região do Rio da Prata, objeto de intensas disputas armadas após a chegada dos representantes da Coroa Portuguesa ao Brasil, sempre foi alvo de cobiça por espanhóis, estabelecidos à margem esquerda e portugueses, estabelecidos na margem oposta.

#### 4.1 AS NUANCES DA CHEGADA DA FAMÍLIA REAL AO BRASIL

O estabelecimento da Colônia do Sacramento às margens do Rio da Prata atendia, ao mesmo tempo, as demandas comerciais do Rio de Janeiro, primeiro interessado no restabelecimento das relações comerciais com Buenos Aires, e da Coroa Portuguesa, que tinha como objetivo a expansão de seu território até aquele extremo do território.

Conforme os estudos de Possamai (2010), no ano de 1680, D. Manuel Lobo, governador do Rio de Janeiro, dá início a uma jornada com vistas ao estabelecimento de uma fortaleza lindera às margens do Rio da Prata, a qual seria denominada, em janeiro de 1680, fortaleza do Santíssimo Sacramento. No entanto, como a presença portuguesa na região era percebida como uma grande ameaça às tropas espanholas e indígenas, acabaram, em meio às batalhas, por destruir a edificação apenas oito meses após a sua fundação. Esse evento acabou por gerar um incidente diplomático que fez com que a Coroa Espanhola fosse obrigada a restituir ao príncipe regente do Brasil a posse do território, através do Tratado Provisional de 1681.

Segue o autor, observando que, cronologicamente se sucederam conflitos na Europa como, por exemplo, a Guerra da Sucessão Espanhola, que, entre

outros fatos, resultou na renúncia de Colônia aos espanhóis em 1705. O desfecho da guerra ocorreu com a assinatura do tratado de Utrecht, onde Felipe V em detrimento do reconhecimento das demais nações do continente europeu ao reinado dos Bourbons precisou lançar mão de determinadas concessões. Entre elas, foi firmado um tratado de paz com Portugal, onde era assegurada aos lusitanos a devolução do território da Colônia do Sacramento.

A datar de então, e estamos falando do ano de 1715, é iniciada uma política de povoamento na região, por meio de famílias portuguesas, com o objetivo de desenvolver a agricultura e criação de gado, bem como assegurar ainda a presença de uma guarnição militar de forma constante. A pesquisa de Possamai (2001), aponta para esta tomada de decisão, pelo Conselho de Territórios Ultramarinos de Portugal devido, sobretudo, ao elevado número de deserções dos soldados destacados para a região de Sacramento. No entendimento da Coroa, o envio de famílias<sup>9</sup> impediria a fuga de soldados, pois os homens não abandonariam suas esposas e filhos à própria sorte em território estranho, tampouco aceitariam por muito tempo viver, em uma terra distante sem a presença deles.

O período de ápice no desenvolvimento, durante a presença portuguesa na região, ocorreu entre os anos 1722 e 1749, sob o comando do então governador Antônio Pedro de Vasconcelos. Contudo, esse período pujante da Colônia do Sacramento e seus habitantes causava desconforto na Coroa Espanhola que, além de sentir-se lesada pelo contrabando na região, sofria com a concorrência dos portugueses na exploração do gado. A constante tensão na região chegaria ao auge mais precisamente em outubro de 1735, quando tropas espanholas sitiaram por cerca de dois anos a Colônia do Sacramento. Assim derrotados, os espanhóis desencadeiam um novo momento da história de Sacramento, marcado especialmente pela limitação do uso do espaço permitido para a produção agrícola e pecuária, o que levou os habitantes daquele local a buscar a reposição de alimentos em Buenos Aires (POSSAMAI, 2010).

Apesar do Tratado de Madri, em 1750, determinar que a Colônia do Sacramento fosse a moeda de troca dos espanhóis pelos Sete Povos das Missões, na prática isso jamais ocorreu. Possamai (2010), pondera que isso fica

---

<sup>9</sup> Entendem-se aqui por famílias, casais e seus filhos.

evidenciado no Tratado de El Pardo, de 1761, que tornava sem efeito o anterior. Como resultante da contenda europeia onde a maior parte das nações daquele continente, entre as quais Portugal, se opunha aos Bourbons<sup>10</sup>, ocorre a submissão da Colônia ao governo de Buenos Aires, em setembro do mesmo ano. Acontece que, naquele período histórico, França e Inglaterra eram as duas potências globais. Portugal, invariavelmente era pró Inglaterra e a Espanha, pró França. Assim, desta última celeuma, que teve como “vitoriosa” a Inglaterra e seus aliados contra a aliança franco-hispânica, a Coroa Espanhola novamente foi obrigada, pelo Tratado de Paris em 1763, a devolver Sacramento aos lusos.

Nesse interim, um novo confronto entre Espanha e Portugal, sob os olhares passivos de França e Inglaterra, fez com que Sacramento resultasse retomado pelos espanhóis em 1777. Como já citado, França e Inglaterra não tomaram partido desta vez e, sem apoio dos ingleses, os portugueses perderam definitivamente o controle sobre a Colônia, sendo que o Tratado de Santo Ildefonso (subscrito em outubro daquele ano) manteve a Colônia do Sacramento em poder da Espanha, situação que seria ratificada pelo Tratado de El Pardo, no ano seguinte.

Convém contextualizar aqui, que a Colônia do Sacramento foi objeto de disputa entre portugueses e espanhóis, pois, se de um lado defendia os interesses comerciais e territoriais da Coroa Portuguesa no Rio da Prata, por outro, como já mencionamos, prejudicava os negócios da Coroa Espanhola sendo, portanto, um ponto estratégico geograficamente e economicamente.

Retornando um pouco no tempo, mais precisamente em 1762, o então Governador de Buenos Aires, D. Pedro de Ceballos, avançou suas tropas sobre a Vila do Rio Grande (onde hoje situa-se a cidade homônima) e à margem norte da Lagoa dos Patos. Esse fato, somado a outros, alguns brevemente comentados em parágrafos anteriores, foram decisivos para que a Coroa Portuguesa decidisse por enviar tropas, fartos recursos financeiros, bem como orientações vigorosas, para a retomada do território. A partir desse contexto houve a formação de uma estrutura militar encorpada e que pôde, dessa forma,

---

<sup>10</sup>A dinastia Bourbon foi uma poderosa casa real de origem espanhola que surgiu no século XIII, durante a Baixa Idade Média, e reinaria no território espanhol entre os anos de 1700 e 1808, de 1813 e 1868, de 1875 e 1931 e de 1975 até os dias de hoje.

ser considerada como uma espécie de “célula embrionária” do Exército Brasileiro.

Devido a esta conjunção de fatos já relatados, entende-se apropriado contextualizar quem eram os militares que fizeram parte dessa guarnição, marcando posto em prol do imperialismo lusitano naquela porção de terras. Via de regra, o recrutamento dos oficiais destinados a Sacramento era realizado no Reino, enquanto para os postos menores os soldados eram oriundos do Rio de Janeiro ou da província a qual o governo Colônia estivesse anexado.

O recrutamento daqueles que formariam a guarnição da expedição destinada a estabelecer a Colônia do Sacramento fora feito de forma compulsória de quantos homens pudessem ser apresentados no Rio de Janeiro. Faziam parte deste grupo homens das mais diversas ocupações, tais como operários, aprendizes, comerciantes e também desafortunados, como mendigos e apenados, aos quais fora concedido o perdão em troca do alistamento.

Não tardou o fundador da Colônia, D. Manuel Lobo, a iniciar uma série de queixas com relação aos seus recrutas. Os soldados selecionados que, até aquele momento, apresentavam baixa capacidade militar, passaram a ser criticados também pelas baixas habilidades nas demais ações, o que a julgar pelo modo como foram “escolhidos” não deveria ser motivo de surpresa por parte de Lobo. Outro fato que incomodava o fundador era que, os brasileiros passaram a desrespeitar a hierarquia que deveriam prestar aos seus oficiais.

Deste modo, observa Possamai (2010), devido ao quadro encontrado pela Coroa Portuguesa em sua chegada ao Brasil, em 1808, por meio do Príncipe D. João, de uma força militar extremamente frágil, com guarnições parcas e mal instruídas, armamentos duvidosos e, principalmente, a inexistência de um mínimo sentido de organização tático-militar, coube ao então Ministro dos Negócios Estrangeiros e da Guerra, D. Rodrigo de Souza Coutinho, a missão de organizar um Exército.

Dessa maneira Coutinho, que já havia alertado ao Regente ainda em Portugal tanto da debilidade das tropas, quanto dos perigos de uma política militar omissa, entendia que a peça-chave para esta nova estratégia militar passava primeiramente por comandantes bem instruídos, e que a formação profissional destes homens era a peça principal nesta estrutura militar em curso. Para ele, a Real Academia Militar seria o fechamento destas medidas

necessárias para tornar o Exército uma instituição forte, disciplinada e bem instruída.

#### 4.2 A CRIAÇÃO DA REAL ACADEMIA MILITAR NO RIO DE JANEIRO

Assim, enfrentando diversos tipos de adversidades advindas das Terras Lusitanas, sobretudo dos Professores das escolas superiores que, conforme Cruz Costa (1967, p. 65), “não se mostravam muito favoráveis a estes novos empreendimentos”, D. Rodrigo Coutinho acabou por suplantar todos os obstáculos, e em 4 de dezembro de 1810 conseguiu a aprovação do primeiro estatuto da Real Academia Militar onde, em 04 de abril do ano seguinte já eram ministradas as primeiras aulas.

Entretanto, as dificuldades e/ou obstáculos impostos pelos portugueses para a criação da Real Academia Militar do Rio de Janeiro não se resumiam apenas ao corpo docente das escolas superiores. Além disso, outras questões preocupavam a Coroa Portuguesa. A chegada, já relatada aqui, às nossas terras de D. João e seus correligionários era presságio de instantes cruciais historicamente e politicamente falando. Os estudos de Motta (2001, p. 15) apontam para isso, principalmente quando detalham o entusiasmo propiciado pela abertura econômica proporcionada pelas ações do príncipe:

Nossos portos, interditos desde os tempos de Cabral, enfiam se abriam para os contatos estimuladores e enriquecedores da navegação ampla e indiscriminada. Contratavam-se técnicos estrangeiros para a montagem de usinas siderúrgicas. Abriam-se escolas, introduziam-se novos hábitos de vida.

É importante estabelecer o ponto de partida que, consoante aos estudos de Motta (2001), levou D. Rodrigo a vislumbrar não só a necessidade de criação da Real Academia Militar, como também currículos, programas e métodos de ensino. O autor observa ainda que a tradição portuguesa no que se tratava da formação de seu Exército possuía “valentes soldados”, no entanto, “chefes improvisados”. Isso fica ainda mais explícito quando, a partir do fim do século XVIII, ocorre um eloquente crescimento na utilização das armas de fogo pelas forças militares. Esse advento passa a requerer técnicas mais refinadas no manejo e conservação das mesmas.

Ao passo que outros países europeus optaram por, em meio a tempos de paz, organizarem-se e apropriarem-se desta nova tecnologia para “ensinar a guerra”, Portugal não o fez. Narra ainda Motta (2001, p.18) que

Não era infrequente o existirem sargentos e mesmo oficiais que nem o nome sabiam assinar, e era comum promover o capitão de infantaria, com exercício de engenheiro, a um soldado, somente porque servia nas obras de alguma suntuosa e régia catedral.

Convém relatar que não foi nem falta de tentativas, nem de empenho da coroa que o Exército Português se mostrava despreparado. Até o primeiro terço do século XVIII (mais precisamente em 1701 e 1732), quatro Academias Militares foram criadas naquele país. Essas instituições tinham por objetivo aplicar a “doutrina militar, tão importante para a defesa dos estados portugueses” (MOTTA 2001, p. 18). No entanto, esses esforços se mostraram insuficientes para romper com a cultura dominante à época e, ainda conforme o mesmo autor, além da precariedade, os cursos apresentavam intermitência e “sem a maior significação”.

Esse cenário do Exército Português, narrado nos três parágrafos anteriores, é de pleno conhecimento de D. Rodrigo Coutinho, pois “na meninice vira o doloroso que é uma nação entregar-se à orientação e à chefia de militares estrangeiros<sup>11</sup>” (MOTTA 2001, p. 20). Ao mesmo tempo, ao exercer cargos diplomáticos no continente europeu, teve contato com as experiências francesas e alemães, no que diz respeito à formação das forças militares.

Deste modo, a partir deste conjunto de experiências vividas, D. Rodrigo Coutinho pôde elaborar os fundamentos que viriam a se tornar o primeiro estatuto da Real Academia Militar, o qual, recordando, fora aprovado pela Carta de Lei de 4 de dezembro de 1810<sup>12</sup> a qual “crea uma Academia Real Militar na Corte e Cidade do Rio de Janeiro” (BRASIL, 1810, p. 232). Segue o documento versando sobre os cursos que seriam oferecidos onde D. João salienta o objetivo de reforçar a defesa e segurança do território brasileiro e destaca os primeiros cursos que seriam oferecidos:

---

<sup>11</sup> Esse fato refere-se à uma situação conflito com a Espanha em 1762, onde o então Ministro dos Negócios Estrangeiros e da Guerra português, D. Luís da Cunha, lançou mão da contratação do oficial alemão Lord James Tyrawby para a condução da campanha. (MOTTA 2001, p.19)

<sup>12</sup> Documento completo disponível em: <https://www2.camara.leg.br/legin/fed/carlei/anterioresa1824/cartadelei-40009-4-dezembro-1810-571420-publicacaooriginal-94538-pe.html>

Um curso regular das Sciencias exactas e de observação, assim como de todas aquellas que são applicações das mesmas aos estudos militares e praticos que formam a sciencia militar em todos os seus difficeis e interessantes ramos, de maneira que dos mesmos cursos de estudos se formem haveis officiaes de Artilharia, Engenharia, e ainda mesmo Officiaes da classe de Engenheiros geographos e topographos, que possam tambem ter o util emprego de dirigir objectos adminsitrativos de minas, de caminhos, portos, canaes, pontes, fontes, e calçadas: hei por bem que na minha actual Corte e Cidade do Rio de Janeiro se estaveleça uma Academia Real Militar para um curso completo de sciencias mathematicas, de sciencias de observações, quaes a physica, chimica, mineralogia, metallurgia e historia natural, que comprehenderá o reino vegetal e animal, e das sciencias militares em toda a sua extensão, tanto de tactica como de fortificação, e Artilharia (BRASIL, 1810, p.232)

Ao observar o estatuto de criação da Real Academia Militar, é possível perceber que D. Rodrigo Coutinho procurou conciliar ao mesmo tempo, os anseios militares, da formação de oficiais bem como os civis, que clamavam por serviços públicos, sobretudo aqueles de infraestrutura. No que diz respeito aos anseios militares, e para que não se tenha uma narrativa carente de detalhamento a respeito dos “anseios civis” em relação à Real Academia Militar destaca-se, entre outros, uma das finalidades definidas pelo Estatuto:

Formar officiaes de Artilharia, officiaes engenheiros, inclusive officiaes engenheiros geógrafos e topógrafos, aptos não só para os misteres militares, como para a direção de trabalhos civis, de minas, estradas, portos e canais (MOTTA 2001, p. 21).

O entendimento dos responsáveis pela concepção da instituição, leia-se aqui os já citados D. João e D. Rodrigo Coutinho, era de que, além das técnicas necessárias para as guerras militares, havia outra “guerra” a ser vencida evidenciada, sobretudo, pelas

Imensas distâncias brasileiras pedindo estradas, os largos rios exigindo pontes, o litoral reclamando portos. Esta colônia, este verdadeiro continente, ainda intocado, era um desafio às técnicas de engenharia. Importava, sem tardança, pensar nos engenheiros que haveriam de decifrar e dominar o gigante, numa espécie de guerra ao império e ao primitivismo da terra brasileira (MOTTA 2001, p. 21).

Esclarecidos os objetivos estabelecidos pelo estatuto da Real Academia Militar com relação aos anseios civis dos quais a instituição deveria se ater, será realizada uma análise inicial dos estatutos, dos currículos e suas relações de contexto histórico, sobretudo no que diz respeito à disciplina de Matemática na Instrução Militar brasileira. Sobre as instalações da Real Academia Militar

destaca-se a pintura de Newton Coutinho, na obra conjunta com Cláudio Moreira Bento na Figura 2, que segue:

Figura 2 - Imagem da Real Academia Militar no Largo São Francisco



Fonte: Bento e Coutinho (prancha 4).

É importante aqui destacar que, embora o objeto de estudo dessa investigação seja o período de 1810 a 1889, o presente estudo, como citado no parágrafo anterior, fará considerações iniciais sobre os anos que precedem o intervalo de análise. Isso será feito dessa forma, e não como o mesmo rigor dos anos que se sucedem, pois os documentos da época aos quais foi possível acessar no Arquivo Histórico do Exército acabaram por determinar o decurso do exame.

Ainda, esclarece-se que, para a realização destas análises iniciais dos documentos da Real Academia Militar no período precedente a 1809, levaremos em consideração a obra do historiador do Exército Brasileiro Jehovah Motta, *A Formação do Oficial do Exército* (2001), a qual nos possibilita a visualização de relevantes informações que, infelizmente, não puderam ser acessadas em um primeiro momento, pela indisponibilidade dos documentos originais pelo fato de não estarem disponíveis para consulta em decorrência da ação do tempo, ou outros fatores que o manuseio por vezes incorreto de documentos históricos pode vir a causar.



### 4.3 A REAL ACADEMIA MILITAR NO PERÍODO DO BRASIL COLÔNIA (1810-1822)

Como já comentado previamente, o Estatuto que definia as finalidades da Real Academia Militar trazia consigo a questão de dupla direção na formação de seus oficiais. Motta (2001, p. 22) comenta brevemente essa questão, observando que, muito longe do que se possa imaginar, “essa dualidade de funções seria motivo para críticas severas durante várias gerações, [...] sempre a reabrir-se”.

Feita esta observação, retorna-se ao estudo do primeiro currículo e suas concepções, sobretudo no que diz respeito à disciplina de Matemática e as suas finalidades na formação dos egressos da Real Academia.

Dessa forma, segundo o estatuto de 1810, o currículo da Academia estendia-se ao longo de sete anos<sup>13</sup>, através de um imbricado itinerário de formação onde estavam previstos dois níveis de estudos: o secundário e o superior. Assim, os conteúdos matemáticos eram divididos, durante os quatro primeiros anos da formação, conforme o Plano de Estudos na Figura 3.

Figura 3 - Plano de Estudos de Matemática conforme a Carta-régia de 1810

Plano de Estudos de Matemática - Carta Régia 1810 (parte I)			
1º Ano	2º Ano	3º Ano	4º Ano
Cadeira Única: Aritmética; Álgebra (até as Equações do terceiro e quarto grau); Trigonometria; a Geometria Plana (chamada à época de Retilínea) e as primeiras noções da Geometria Espacial (chamada à época de Geometria Esférica);	Métodos para a resolução de equações; Aplicações de álgebra à geometria das linhas e das curvas, do segundo grau e maiores; Cálculo Diferencial e Integral e as suas aplicações na Física, Astronomia e Probabilidade.	Princípios de Mecânica (tanto estática e dinâmica, quanto hidrostática e hidrodinâmica); Hidráulica; Máquinas e suas aplicações e modelos, sobretudo aquelas que são de uso da Academia	Trigonometria; Geometria Espacial; Princípios de Óptica; Noções de refração e reflexão; Mecânica; Métodos para a determinação das latitudes e longitudes no mar e na terra; Aplicações das Medidas Geodésicas, Noções de cartas geográficas, das diversas projeções e das suas aplicações às cartas geográficas, e às topográficas; os princípios das cartas marítimas reduzidas; Noções gerais sobre a Geografia Terrestre e as suas divisões.

<sup>13</sup> Admitia-se ainda, de acordo com os estudos de Motta (2001) um oitavo ano, onde era trabalhada a História Militar. O currículo deste oitavo ano trazia consigo o além do estudo sobre os vultos militares da história, a análise dos planos das maiores batalhas até então.

Fonte: Brasil (1810, p. 235-237)

Ao observar os conteúdos listados acima, é possível perceber, pelo conhecimento que temos hoje, que dentro desse mesmo plano de estudos não seria viável dois níveis de ensino cursarem exatamente as mesmas disciplinas (chamadas até então de cursos). Essa divisão existia e, distinguia de forma bem clara as carreiras militares. De acordo com Motta (2001, p.23),

Os alunos destinados à Infantaria e à Cavalaria apenas estudavam as matérias do primeiro ano (Matemática Elementar), e os assuntos militares do quinto. Só para artilheiros e engenheiros eram exigidos os estudos do curso completo.

O autor destaca também o motivo das formações distintas chamando a atenção ao fato de que as duas “armas” (no caso Artilharia e Engenharia) “requeriam desenvolvidos estudos teóricos de Matemática Superior, Balística e Fortificação” (MOTTA, 2001, p. 23). Por outro lado, as “armas” de cavalaria e infantaria eram passíveis de obterem a sua formação completa em dois anos, através dos cursos de “Matemática Elementar” (primeiro ano) e mais os cursos de Estratégia, Tática, Castrametação e Fortificação Passageira. Dada essa diferença na formação, estabelecia-se um nível hierárquico entre os alunos da Real Academia, sendo os artilheiros e engenheiros considerados como “cientistas” e “doutores” da instituição.

Ainda acerca do plano de estudos, Motta (2001) ainda disserta que o primeiro ano funcionava como se fosse um “curso preparatório”, e que se destinava a qualificar os alunos para os estudos subsequentes (Álgebra, Geometria; Cálculo Diferencial e Integral; Geometria Descritiva, Física e Mecânica). Ainda nessa lógica, os três anos que se seguiam ao primeiro, funcionavam como um curso de formação superior e preliminar aos estudos militares, que correspondiam aos três últimos anos.

Falando especificamente da disciplina de Matemática, o plano de estudos trazia sólidas referências e deliberações citando, inclusive, autores que serviam de referência na elaboração e organização do mesmo. Assim, no primeiro ano, escreve Motta (2001, p. 24):

O lente deveria organizar as suas lições baseado na Aritmética e na Álgebra de Lacroix<sup>14</sup> e na Geometria e Trigonometria de Legendre<sup>15</sup>. Da Álgebra ensinaria até as equações de terceiro e quarto grau e da Trigonometria até as primeiras noções de Trigonometria Esférica. O seu programa, no conjunto, significaria um princípio de curso matemático muito interessante, no qual procuraria fazer entender [...] toda a beleza e extensão do Cálculo algébrico nas potências, nas quantidades exponenciais, nos logaritmos e nos cálculos de anuidades.

O segundo ano de estudos, no que se refere especificamente à Matemática, trazia consigo as lições de Cálculo Diferencial e Integral de Lacroix e o essencial da obra de Monge<sup>16</sup> em Geometria Descritiva. Ainda como recomendação, sugeria-se ao Professor (lente) que tivesse cuidado ao avançar rumo às “novas descobertas” que ocorriam, a fim de oferecer aos alunos “o conhecimento íntimo dos princípios de cálculo e o modo de adivinhar luminosamente o que ele aponta” (MOTTA, 2001, p. 24).

Sobre as aulas, os estudos de Motta (2001) apontam para a duração de 90 minutos, divididos em duas partes iguais onde, no primeiro momento o professor apresentaria o conteúdo referente àquele dia e, no segundo momento, seria recapitulada a aula anterior. Esse momento auxiliava sobremaneira aqueles alunos que estavam a cursar um programa, na maioria das vezes, acima do seu nível de conhecimento.

Havia no estatuto um capítulo que versava sobre os “Exercícios Práticos”, o qual obrigava os Professores a “sair ao campo com os discípulos para exercitar, na prática, as operações que nas aulas lhe ensinam” (MOTTA, 2001, p. 29). Como principal exemplo, voltado à nossa área de interesse, podemos citar as ações recomendadas ao lente de Geometria, o qual deveria fazer “conhecer o uso dos instrumentos, medindo alturas e distâncias inacessíveis, nivelando terrenos e tirando planos” (MOTTA, 2001, p. 29).

Ainda dentro do estatuto, era previsto que cada professor seria responsável por elaborar um compêndio do seu curso (ou cadeira, termo também referido), sendo essa tarefa compulsória a cada titular sob pena de não obter recompensas ou até mesmo não ser promovido. Conforme a análise de Motta (2001) os compêndios eram o mais próximo que chegavam os alunos de um

---

<sup>14</sup> Sylvestre François Lacroix, matemático francês (1765-1843).

<sup>15</sup> Adrien-Marie Legendre, matemático francês (1752-1833).

<sup>16</sup> Gaspard Monge, matemático francês e Ministro da Marinha durante a Revolução Francesa (1746-1818).

“livro didático”, visto que a distribuição de toda e qualquer obra era raríssima naquele momento e, pelo fato de não existirem publicações nacionais disponíveis, os poucos exemplares que circulavam eram importados.

É necessário também dizer que um projeto audacioso e, como já comentado, de organização curricular complexa poderia levar algum tempo até que tudo funcionasse de forma minimamente razoável. Motta (2001) nos traz diversos relatos, extraídos das trocas de correspondências entre a Junta Diretora, a qual administrava a Real Academia, e a corte e, ainda, de opositores ferrenhos ao modelo da Real Academia.

O primeiro deles, nos traz o autor, refere-se ao distanciamento das relações entre a Real Academia e o Exército. Os conflitos ocorridos na Região da Cisplatina, por exemplo, não ecoaram na Academia, deixando-a alheia aos acontecimentos. É como se a Instrução Militar no período compreendido entre 1811 e 1850 tivesse duas linhas de paralelismo uma em relação à outra. Um modelo trabalhado e desenvolvido na Academia, que falava sobre os grandes conflitos que ocorreram na Europa, e o outro, que era a realidade das tropas que marchavam ao sul do país, utilizando o armamento disponível e, marchando sobre longas distâncias nas poucas estradas existentes à época.

Outro ponto, também discutido, era a questão dos lentes que, quando existiam, eram convocados a ministrar aulas de saberes diversos dos seus<sup>17</sup>. Um exemplo desse fato é a correspondência enviada, em 1816, pela Junta Diretora ao Ministro da Guerra, onde os administradores da Instituição relatam a dificuldade para suprir a falta de professores que se afastavam pelos mais diversos motivos. Nesse sentido, segue o trecho transcrito por Motta (2001, p. 39), em que a Junta Diretora relata que suspendeu “as lições de Física, por falta de lente”.

---

<sup>17</sup> “[...] vemos lentes utilizados em disciplinas inteiramente diversas da sua própria, como o de Geometria Descritiva ensinando Tática, o de Astronomia ensinando Fortificação.” (MOTTA 2001, p.39)

#### 4.4 A REAL ACADEMIA MILITAR NO PRIMEIRO REINADO E NO PERÍODO REGENCIAL (1822-1840)

Em 1824, a situação se agravou, e em correspondência ao Ministro da Guerra é feito um apelo para o preenchimento das vagas, “para preencher doze cadeiras – cinco de Matemática, três militares e quatro de ciências naturais” (MOTTA, 2001, p. 39). Quatro anos após, em situação ainda mais dramática, a Junta Diretora se pronuncia da seguinte forma:

Cumpra agora fazer ver claramente as dificuldades e talvez a impossibilidade de desempenhar o ensino dessas aulas, pois que, o lente do terceiro ano está na presidência do Mato Grosso, o de Física é deputado à Assembleia Geral, o do sétimo ano é Governador das Armas, no Pará, os do quinto e sexto empregaram-se em comissões, o de Desenho está na França (MOTTA, 2001, p. 39).

Ao final dos primeiros vinte anos de funcionamento da Real Academia, ou seja, em 1831, não havia mudança de cenário e as dificuldades com relação aos lentes ou permaneciam, ou se acumulavam. A fim de registro, o relatório da Junta Diretora assim resume a situação com relação a este assunto:

O desgraçado estado que se acha este Estabelecimento por falta de lentes, faz com que seja absolutamente impossível abrir todas as aulas, na conformidade da lei. O lente do primeiro ano é deputado, o do terceiro está vago, o do quarto está doente, o do quinto está doente, o do sexto está vago, o do sétimo está ausente. O de Geometria Descritiva está vago, o de Química está ausente, o de Física está vago. De treze cadeiras, só quatro possuem lentes prontos (MOTTA, 2001, p. 39).

Diante de todas estas situações e, imensas dificuldades, recrutaram-se sacerdotes<sup>18</sup>, conforme os registros de Motta (2001), com “frequência e bom proveito”.

Se, por um lado temos que destacar o empenho destes pioneiros professores da instituição<sup>19</sup> pelas condições que se tinha para ensinar, por outro

<sup>18</sup> Ao todo foram quatro a saber: José da Costa Azevedo, Pedro Fortunato dos Reis, Pedro de Santa Mariana e Custódio Alves Serrão.

<sup>19</sup> Os nomes desses Professores, conforme Motta (2001, p. 38) são os seguintes: 1º Ano – Antônio José do Amaral; 2º Ano – Vasco José de Paiva; 3º Ano – José Saturnino da Costa Pereira; 4º Ano – Manoel Ferreira de Araújo Guimarães; 5º Ano – João de Souza Pacheco Leitão; 6º Ano – Francisco Cordeiro da Silva Torres; 7º Ano – José da Costa Azevedo. Geometria Descritiva – José Victorino dos Santos e Souza; Mineralogia – Frei José da Costa Azevedo; Química – Daniel Gardnex; e Desenho – Arnan Julião Palliere. Além desses, até 1831 diversos outros nomes prestaram a sua contribuição, tais como: Luís Antônio Costa Barradas, Frei Pedro Fortunato dos Reis, Joaquim José de Souza e Roberto Ferreira da Silva (Desenho); João da Silva Feijó (Botânica); Frei Pedro de Santa Mariana (Matemática Superior); Manoel José de

é necessário comentar também que a contribuição deles para as questões didáticas foi aquém do esperado. Para Motta (2001), a questão das obrigações pedagógicas dos lentes, principalmente no que tange a elaboração dos compêndios, foi um problema ignorado ou tratado de forma alternativa.

É significativo também recordar que os compêndios deveriam conter tudo aquilo que o lente julgasse relevante a respeito do programa de sua disciplina, levando em consideração o perfil do aluno e os recursos disponíveis.

Como já citado, naquele momento histórico o Brasil ainda era desprovido de parque editorial que pudesse suprir uma demanda por “livros didáticos”, e isso, que por si só já seria um grande problema, era agravado pela necessidade que se criava a partir da crescente necessidade das primeiras instituições de ensino de nível superior criadas, como a Escola de Medicina e a de Direito além, é claro, da Real Academia.

A título de informação, Motta (2001) versa que, até aquele momento, haviam sido elaborados (e aprovados pelo Governo) os compêndios do quarto ano de Trigonometria Esférica, Geodésia e Astronomia. Também registra o autor que, embora a informação seja de certa forma controversa, ainda pode-se listar os compêndios das seguintes aulas: Elementos de Mineralogia, *Syllabus* ou compêndio de lições de Química, e Elementos de Desenho e Pintura<sup>20</sup>.

Percebe-se, pelos registros do autor, que nem todas as aulas possuíam o seu próprio compêndio, o que por si só já contrariava o estatuto da Real Academia. Uma das alternativas encontradas para suprir essa falta foi a tradução de obras, sobretudo francesas, para serem utilizadas nas salas de aula. Dessa forma, destaca Motta (2001, p. 41), “não se tendo formado o compêndio de Álgebra, traduziu-se o primeiro volume de Euler, para o primeiro ano, e o de Lacroix, para o segundo”. Aqui, registra ainda o mesmo autor, destaca-se uma certa debilidade do corpo docente em criação de seu próprio conhecimento e, em virtude dessa debilidade tentou lançar mão de fontes primárias que,

---

Oliveira (Astronomia e Geologia); João Paulo dos Santos Barreto e Eustáquio Adolfo de Melo Matos, José Pedro Nolasco Pereira da Cunha e Antônio Francisco de Paula Holanda Cavalcanti (Física).

<sup>20</sup> Respecitivamente elaborados pelos seguintes lentes (a partir de Elementos de Geodésia): Manoel Ferreira de Araújo Gomes – 1814 (2); Frei José da Costa Azevedo – 1816; Daniel Gardnex – 1810; Roberto Ferreira da Silva – 1826.

originariamente indicadas aos professores, acabaram no manuseio dos próprios alunos.

Até aqui discutiu-se as questões de plano de estudos, currículo, condições históricas para a emergência da Real Academia Militar, seus Professores, sua Junta Diretiva, as aulas, “livros didáticos”, mas não há uma linha sequer que cite a palavra “aluno”. Pois bem, sabedores de que não se pode ficar alheio ou, ao menos realizar uma breve análise de quem foram os primeiros alunos da Real Academia, nos parágrafos seguintes serão realizadas algumas considerações.

Ainda referenciando o Estatuto de 1810, Motta (2001), chama a atenção para as duas possibilidades de frequentadores da Real Academia: o “obrigado” e o “voluntário”. Os requisitos mínimos para ingresso eram quinze anos de idade e “dar conta das quatro primeiras operações”. Passado este primeiro período, de aproximadamente doze anos, em 1823, o Governo, através de ato político, permitiu a matrícula de alunos civis sem o compromisso de seguir nas carreiras militares, criando uma nova categorização de alunos, os “paisanos”, que ao final do curso recebiam o título de “Engenheiro Civil”.

Conforme registros do autor, em 1811 encontravam-se matriculados na Real Academia Militar setenta e três alunos, sendo trinta e um oficiais; dezessete cadetes; quatorze praças simples; sete civis e quatro não especificados. Outro detalhe interessante se refere à heterogeneidade do corpo discente quanto à idade, nacionalidade e graduação militar. Segundo o relato de Motta (2001, p. 43):

Entre os oficiais havia tenentes, capitães e até dois majores. Apenas 23 eram menores de vinte anos, muitos eram maiores de trinta, sendo que um deles já alcançara os seus 43 anos bem vividos. Quanto à nacionalidade, 36 eram brasileiros, 16 portugueses, 1 era italiano e os demais, de procedência não registrada.

Pois alguns problemas enfrentados na educação contemporânea como, por exemplo, a evasão escolar não é exclusiva dos “nossos tempos”. A Real Academia também enfrentava exatamente o mesmo problema<sup>21</sup>. As causas talvez sejam um pouco distintas, porém, o problema já era percebido nos

---

<sup>21</sup> Sobre esse assunto, na sessão da Constituinte de 27 de outubro de 1823, o deputado Arouche Rondon chamou a atenção para os relatos recebidos por um dos lentes da Real Academia que informava que “dos muitos alunos no 1º ano, chegavam ao 7º (ano) um, dois, três e algumas vezes nenhum” (ANAIS DA CONSTITUINTE, 1823, p. 163)

primeiros anos de funcionamento da instituição, sobretudo devido ao período conturbado politicamente falando. Como exemplo, temos a Revolução Pernambucana de 1817, que fez com que o Governo dispendesse de muitos esforços para debelar o conflito, entre eles, o recrutamento de alunos e docentes para que a situação se resolvesse.

As notas da Junta Diretora, novamente citadas por Motta (2001, p. 44) descreviam a seguinte situação:

Vê-se que havendo-se matriculado noventa e três discípulos nas diferentes aulas, somente fizeram exame e foram aprovados dezoito, tendo todos os demais deixado de frequentar por motivos que infelizmente ocorreram, e pela persuasão, em que se acham os militares, da inutilidade dos estudos para os seus acessos.

Outro fator, que levava à evasão (e também baixa procura) é citado acima: “a inutilidade dos estudos”. O termo, por óbvio usado entre aspas, vinha de uma ala da própria Junta Diretora, que não via como profícua a despesa com o funcionamento daquela instituição. Essa afirmação, observa o autor, é oriunda do próprio relatório das atividades escolares do ano de 1817, o qual Motta (2001, p. 43-44) cita

É do nosso dever representar a V. Excia. Que um semelhante abandono em que se acha a Academia Real Militar, exige as mais eficazes providências, a fim de se poderem obter as grandes vantagens a que se propôs el Rei nosso Senhor na Carta de Lei da criação da mesma Academia, e para não ser inútil, como atualmente é, a despesa que se faz com este estabelecimento.

Esse cenário, onde a Junta Diretora e o deputado Arouche Rondon tentavam desacreditar o trabalho da Real Academia, foi, no mesmo tom, rechaçado pelo então deputado Manoel Ferreira de Araújo Guimarães<sup>22</sup> o qual, primeiramente, reconhece a necessidade de correções em alguns dos rumos da Real Academia e, credita muitas das carências existentes à perda de D. Rodrigo Coutinho.

Além disso, destacam também os estudos de Motta (2001), o deputado Manoel Ferreira chama a atenção às situações de amplo conhecimento com relação à falta de laboratórios para algumas das cadeiras, atribuindo o pequeno número de formandos aos “áridos e espinhosos” estudos. Sobre a inutilidade da

---

<sup>22</sup> O então deputado também era lente, como já referido anteriormente, das cadeiras de Astronomia e Geodésia.



Instituição, lembrou ainda o deputado da formação por esta de diversos lentes para as aulas de Artilharia nas mais diversas províncias, tendo fornecido ao Exército oficiais e, enriquecido as ciências com os seus escritos.

O mesmo autor destaca ainda que o primeiro Estatuto vigorou até 1832, entretanto, sugestões e propostas vão sendo enviadas para a Corte a partir de 1823. A primeira delas partiu dos próprios Professores. Após isso, em 1828, o deputado Francisco de Paula Holanda (que teve passagem pela Real Academia como lente de Física), apresentou à Câmara dos Deputados um projeto de Estatuto. Todas as proposições resultaram fulminadas pela Comissão de Marinha e Guerra.

Em outro momento, mais especificamente em 1830, fora apresentado o projeto para a dissolução da Junta Diretora e, assim, a Real Academia fosse dirigida por um comandante. Essa proposição, realizada pelos dois deputados que haviam sido lentes da Real Academia, gerou muita controvérsia e debates acalorados com muitas manifestações fortes de lado a lado. Ao fim, resulta o que estava em discussão naquele momento não era apenas a questão do Estatuto da Real Academia. Motta (2001, p. 47) observa que

O que estava no fim, agonizava, era o próprio regime de Pedro I. Naquele junho de 1830 já se podia perceber os sinais da crise que se resolveria na chamada revolução de 07 de abril de 1831, e que nos conduziria a regência.

Com um governo claudicante, já não se poderia esperar por reformas com a profundidade esperada e que enfrentassem os problemas do país, dentre eles os do Exército e da Real Academia. As tão debatidas e sugeridas reorganizações destas Instituições teriam que aguardar outro momento histórico para acontecer.

Acerca da já comentada “falta de alinhamento” entre as ações da Real Academia e do Exército, comentamos ainda sobre esta questão, aquilo que Motta (2001, p.35) ressalta a respeito:

As guerras se sucediam e a elas a Academia era imune, como se aquela casa do Largo de São Francisco fora torre de marfim onde não penetrassem os ecos do Rio da Prata, nem quaisquer preocupações com o destino da Cisplatina.[...] A Academia funcionava como centro de estudos parado no tempo, isolado das instituições militares vigentes, nada tinha a ver com os bons ou maus sucessos do Marquês de Barbacena em Passo do Rosário.

Conforme o autor comenta, esse distanciamento era mal visto por algumas correntes de Conselheiros do Império, sobretudo no que diz respeito aos militares que haviam cruzado o Atlântico junto a D. João, os quais não eram providos, nem da consciência, nem do senso de necessidade do preparo necessário a um exército de ponta e preparado para lidar com as tecnologias já emergentes na Europa.

Acrescenta, ainda, o entendimento de Motta (2001) que, em um período aproximado de quarenta anos desde a sua fundação, esse distanciamento ou divisão entre duas linhas antagônicas entre as aulas ministradas na Academia e as Campanhas que se sucediam ao Sul do Brasil era fruto além da visão trazida pelos lusitanos (já comentada anteriormente) de que os estudos da Academia eram dispensáveis para o “mundo da guerra”, também do “desenraizamento” daquela “elite cultural” cujas pessoas eram “voltadas para o exterior, enamoradas do mundo europeu” (MOTTA, 2001, p. 36).

Para que esse fato não fique restrito ao campo das ideias e das narrativas, exemplifica-se com os conteúdos de “Teoria da Guerra”, os quais eram elaborados à luz dos ensinamentos de Napoleão<sup>23</sup>, Frederico<sup>24</sup> e Vaubam<sup>25</sup>, as campanhas militares no Rio Grande do Sul aconteciam sob a realidade no armamento disponível, da paisagem e do clima característicos da região e, ainda, sob a realidade de um soldado com uma preparação diferente daquele da Europa. Os especialistas de nosso Exército, à época, eram Joaquim Xavier Curado<sup>26</sup>, José de Abreu<sup>27</sup>, Marques de Souza<sup>28</sup> e Osório<sup>29</sup>.

Se é verdade que os fatos militares não exerciam fascínio, tampouco tinham adesão dos integrantes da Academia, o mesmo não pode ser afirmado com relação aos acontecimentos políticos. Os estudos de Motta (2001) relatam

---

<sup>23</sup> Estadista e líder militar francês. Napoleão Bonaparte (1769-1821).

<sup>24</sup> Estrategista alemão. Também conhecido como “Frederico o Grande” ou Frederico II (1712-1786). Foi Rei da Prússia de 1740 a 1786.

<sup>25</sup> Arquiteto militar francês. Sébastien Le Prestre, ou Marquês de Vauban (1633-1707).

<sup>26</sup> Militar e Político brasileiro. Também conhecido como Conde de São João das Duas Barras (1746-1830). É considerado uma Figura central na política expansionista portuguesa nas regiões platinas

<sup>27</sup> Militar brasileiro. Também conhecido como Barão de Cerro Largo (1770-1827).

<sup>28</sup> Militar e político brasileiro. Manuel Marques de Souza, também conhecido como Conde de Porto Alegre (1804-1875).

<sup>29</sup> Militar e político brasileiro. Manuel Luis Osório, também conhecido com Marquês do Herval (1808-1879).

que os sucedidos daquele período histórico<sup>30</sup> chegaram, em algum momento, a gerar o abandono das aulas por parte de alunos e professores para combater a revolta. Acrescenta-se ainda:

Com efeito, alguns lentes participaram desses fatos de modo ativo, escrevendo em jornais de combate, aliciando grupos de resistência ou integrando, a partir de 1824, o Parlamento. Assim foi com Manuel Ferreira de Araújo Guimarães, brigadeiro, lente de Trigonometria Esférica, Geodésia e Astronomia, [...] que teve intensa atuação na imprensa, através dos Jornais *O Patriota*, 1813 a 1814, *Gazeta do Rio*, 1813 a 1830, e *O Espelho* em 1822 e 1823, e foi deputado À Assembleia Constituinte. Assim foi com Antônio José do Amaral, lente de Matemática Elementar, que tomou parte ativa nas agitações político-militares de 1821 e 1822 e foi deputado à Assembleia Geral, em 1830. E, também, assim, com José Saturnino da Costa Pereira, lente de Mecânica, [...], que mais tarde chegaria a ser senador do Império (MOTTA, 2001, p. 37).

Os alunos, por sua vez, também não se furtariam de tomar partido nas questões políticas do país naquela altura. Os delineamentos de Motta (2021, p.37) apontam para indícios, embora não se tenha registros, de que “pelos salas de aula e pelos corredores do Largo de São Francisco” o descontentamento com a política colonialista da Coroa Portuguesa não tenha motivado indignação e oposição.

Os questionamentos a respeito desse envolvimento, supostamente contumaz, dos alunos da Academia com assuntos políticos são decifrados através de uma análise sócio-histórica da época através da narrativa do autor e, com o auxílio da HP compreender o contexto das instituições, de produção das suas estruturas e, em virtude disso, vislumbrar as possibilidades. Senão vejamos:

A trezentos metros do Largo de São Francisco ficava o Rocio, palco, em 1821, de comícios políticos-militares, onde por duas vezes no período de quatro meses, a 26 de fevereiro e a 05 de junho, a tropa se reuniu para exigir, do Rei e do Príncipe, submissão aos princípios democráticos (MOTTA, 2001, p. 37).

Ao analisar especificamente este período e os acontecimentos e rumores de “corpos brasileiros” que estariam dispostos, em 17 de junho de 1821, a tomar a divisão da Artilharia Portuguesa<sup>31</sup> é difícil imaginar que a estes fatos a

<sup>30</sup> Como, por exemplo, a Revolução de 1817, em Pernambuco.

<sup>31</sup> Este fato levou teve como desdobramento a prisão, em 04 de outubro de 1821, de três oficiais brasileiros que distribuíam panfletos com propaganda insuflando outros brasileiros a resistirem contra Portugal.

Academia tenha ficado indiferente. Como fecharia os olhos a Instituição à prisão de oficiais brasileiros? De tudo isso, não é absurdo depreender que os acontecimentos da Independência do Brasil reverberaram na Academia e, talvez, dela tenham ecoado de maneira consistente para tornar o seu papel, enquanto Instituição, singular à vida neste novo Brasil que estava a emergir.

Com esse cenário, destaca Motta (2001, p. 38): “o Estatuto de D. Rodrigo Coutinho vai sendo limado pelo tempo e conformando-se ao jogo de fatores os mais diversos” O “cenário” destacado anteriormente traz como acontecimentos derradeiros a expulsão das tropas portuguesas, a criação de assembleias nos Estados e, por fim, ao forçar a abdicação de D. Pedro I, é proclamada a Independência do Brasil, a 7 de setembro de 1822.

Os anos que se seguiram, e precisamente, as duas décadas compreendidas entre os anos de 1830 e 1850, foram tempos agitados na história brasileira. Um resumo do que acontecera neste período, pelo país afora, está muito bem retratado por Capistrano de Abreu (*Fases do Segundo Império*) *apud* Motta (2001, p. 48):

De repente o Brasil inteiro estrebuchou as convulsões de um delírio muscular. De Marajó ao Chuí rugiu a onda da anarquia que tudo alagou, manifestações políticas no governicho do Rio Grande do Sul, na “sabinada” da Bahia, nas correias de Pinto Madeira, no Ceará, manifestações incorporando agravos seculares de classes oprimidas, como a “cabanagem” do Pará, a “balaiada” do Maranhão, a “cabanada” de Pernambuco. Sobressaía a Corte, onde se escarniçavam soldados dissolutos, capoeiras desaçaimados, sicários, caramurus partidários da volta do ex-Imperador, nativistas, xenófobos, federalistas, republicanos, um verdadeiro pandemônio.

Pois esse período de extrema conturbação da ordem social, conchavos, divergências e guerra civil tem, na sua sequência, um tempo de calma e ajustes internos. Os atores políticos e sociais, desgastados pelos anos de discórdias, harmonizam-se e promovem modificações na Constituição, ocorrem experiências do que, mais tarde, viria a se tornar a República e, o período pós-independência, em um primeiro momento marcado por distúrbios, torna-se um tempo de quietude.

No que diz respeito à Real Academia, todo esse contexto acabou por interferir diretamente em seu currículo e regime escolar. Em um período, de 1832 até 1845, foram contabilizadas nada mais nada menos que cinco decretos Imperiais que mudavam os rumos da Real Academia. Seja na tentativa de querer

dar novos rumos ao ensino da Instituição, seja por bel prazer dos governantes da época, essas alterações em sequência causavam desconforto em alguns atores da sociedade como, por exemplo, no Deputado Ângelo Ferraz, que em 1843 chegou a proferir em seu discurso as seguintes palavras: “a mania de todos os dias de reformar a escola Militar, como se esta fora boneca que vai recebendo vestidos segundo os caprichos da moda”.

No que se refere aos decretos, inicialmente trata-se da ordenação (sem número) de 9 de março de 1832, que fez com que a Real Academia Militar da Corte fosse incorporada a dos Guardas-Marinha, tornando uma só Instituição denominada Academia Militar e de Marinha. Essa incorporação teve por objetivo proporcionar aos quadros do Exército e da Armada Nacional, além de uma formação única, um grau de instrução que os habilitasse para bem desempenhar as suas funções, fossem elas Militares Terrestres ou Navais para as quais fossem designados.

Além disso, a incorporação<sup>32</sup> proposta no decreto tinha por objetivo, como será abordado na sequência, a formação de um corpo de especialistas que adquirissem no menor tempo possível “as ciências reconhecidas como indispensáveis para o Corpo de Engenheiros”. Isso pode ser verificado no Plano de Estudos do Curso Matemático exposto na Figura 4:

Figura 4 - Plano de Estudos do Curso Matemático – Decreto de 09 de março de 1832

---

<sup>32</sup> Em algumas literaturas pode ser verificado o termo “fusão” para esta passagem, o que, não entendemos completamente incorreto devido, sobretudo, à forma como foi organizado o plano de estudos. Trabalharemos nós com o termo incorporação, pois é este, e suas variações, que conta(m) no Decreto supracitado.

Plano de Estudos do Curso Matemático - Decreto de 09 de março de 1832			
1º Ano	2º Ano	3º Ano	4º Ano
<p><b>Cadeira Única:</b> Aritmética; Álgebra até Composição de Equações; Geometria e Trigonometria(não compreendida a composição das Tábuas das linhas Trigonométricas).</p> <p>Haverá ainda, neste ano, uma aula diária de Desenho de Paisagens.</p>	<p><b>Primeira Cadeira:</b> continuação da Álgebra; Aplicação da Álgebra a Geometria; Cálculo Diferencial e Integral; Construção de Tábuas Trigonométricas; Método das Variações, e das Interpolações.</p> <p><b>Segunda Cadeira:</b> Geometria Descritiva com aplicação do Cálculo Algábrico <b>em três dias da semana</b>, Nos outros <b>dois dias</b>, haverá Desenho de Paisagens.</p>	<p><b>Primeira Cadeira:</b> Mecânica em suas quatro partes a saber: Estática; Dinâmica; Hidrostática; Hidrodinâmica; Teoria da Construção; resistência das Abóbadas.</p> <p><b>Segunda Cadeira:</b> Princípios gerais da Física; Teoria dos campos Elétrico e Magnético; Teoria do Vapor considerado como propulsor de Máquinas. Química e Mineralogia aplicadas às substâncias que se empregam na Construção das Obras de Arquitetura Civil, Militar, Hidráulica e Naval; Pirotecnia. Os conteúdos serão explicadas em todos os dias letivos da semana.</p>	<p><b>Primeira Cadeira:</b> Trigonometria Esférica; Ótica; Astronomia; As aplicações destas ciências à Geodésia, Topografia, Navegação.</p> <p><b>Segunda Cadeira:</b> Tática; Manobra Naval; Aplicação da Artilharia à Marinha; Organização de uma Derrota pela Estima; Aplicação da Mecânica ao Aparelho; Arqueação. Essas aulas eram ministradas em três dias letivos de cada semana. <b>Estas Cadeiras eram obrigatórias para os que se destinarem à Marinha.</b> Alunos deste Ano tem prática compulsória de Observatório, sob a determinação do Professor da primeira Cadeira.</p>

Fonte: Brasil (1832, p.3-4)

Como pode-se observar, os quatro primeiros anos da recém-criada Academia Militar e de Marinha passaram a chamar-se Curso Matemático e funcionavam, conforme a carreira desejada, como se fosse um pré-requisito<sup>33</sup> para a Formação Militar que viria na sequência e estavam divididas, conforme o já citado decreto, em outros três cursos a saber:

- Curso Militar;
- Curso de Pontes e Calçadas;
- Curso de Construção Naval.

Importante destacar que, de acordo com o posto a ser ocupado na Carreira Militar, não se fazia necessário frequentar todos os anos de determinado curso para completar a sua formação. Os Planos de Estudos propostos para

<sup>33</sup> Maiores explicações sobre os itinerários de formação serão vistas na sequência deste mesmo capítulo.

estes Cursos podem ser visualizados, respectivamente, conforme tópicos que seguem abaixo:

O Curso Militar é de dois anos e tem por objetivo fornecer ao participante, fosse ele da Infantaria e Cavalaria, ou Engenheiro Militar, ou da Artilharia (na sequência será explicado o percurso formativo para cada uma dessas armas), além dos conhecimentos teóricos, oferecer conhecimentos práticos relativos à construção de qualquer fortificação passageira, o seu delineamento a frente de bandeira, as linhas de barracas em um acampamento, a prática da Topografia Militar, o traçado do polígono que deseja fortificar, as obras interiores e exteriores conforme o sistema de fortificação estabelecido, abertura de trincheiras e a sua ocupação estratégica para avanço de linhas.

O Curso de Pontes e Calçadas tinha por objetivo fornecer ao participante, Engenheiro de Pontes e Calçadas, além dos conhecimentos teóricos, a prática completa do nivelamento, e os meios de se servir da sonda, tanto no reconhecimento sobre os quais se deverão construir estradas, pontes, etc., como na abertura de poços artesianos. Ainda se espera deste Engenheiro o conhecimento para escolher as direções e o traçado de estradas bem como o delineamento de curvas de borneio na mudança de direção das pistas (BRASIL, 1832).

Por fim, o Curso de Construção Naval tinha por objetivo fornecer aos participantes, ao final de dois anos, além dos conhecimentos teóricos, os ensinamentos práticos sobre as regras gerais de construção das embarcações (vasos), e suas aplicações, àqueles que estiverem em construção nos estaleiros da Marinha.

Ainda conforme o decreto de 9 de março de 1832 (artigos 18 a 23), “dos conhecimentos que deverão ter os Oficiais do Exército, Marinha, e Engenharia”, percebe-se que os itinerários formativos permitiam, dependendo da carreira militar escolhida, que alguns dos alunos cursassem apenas um ano do Curso Matemático e pudessem migrar para a formação específica. Nota-se que a maior parte das Formações exigia, ao menos, os três primeiros anos do Curso Matemático e mais dois de formação específica. A outra exceção em relação ao Curso Matemático, além da já citada, era a Formação para os Oficiais da Marinha e Engenheiros Geógrafos, os quais eram os únicos que se exigia a integralidade

do referido Curso. A Figura 5 mostra como funcionava o percurso formativo para cada uma das carreiras da época:

Figura 5 - Dos conhecimentos que deverão ter os Oficiais do Exército, Marinha, e Engenharia – Currículo de 1832

Carreira ↓	Curso →	Curso Matemático				Curso Militar		Curso de Pontes e Calçadas		Curso de Construção	
		1º ano	2º ano	3º ano	4º ano	1º Ano	2º Ano	1º ano	2º ano	1º ano	2º ano
Oficiais de Infantaria e Cavalaria		x	-	-	-	x	-	-	-	-	-
Oficiais de Artilharia		x	x	x	-	x	-	-	-	-	-
Engenheiros Militares e Oficiais do Estado Maior		x	x	x	-	x	x	-	-	-	-
Oficiais de Marinha e Engenheiros Geógrafos*		x	x	x	x	-	-	-	-	-	-
Engenheiros de Pontes e Calçadas		x	x	x	-	-	-	x	x	-	-
Engenheiros de Construções Navais		x	x	x	-	-	-	-	-	x	x

**Obs.:** todas as carreiras supunham ainda o conhecimento prático de cada uma delas, conforme respectivo Plano de Estudos e de execução obrigatória. \*Inclui-se ainda para estas formações as aulas de Prática de Observatório.

Fonte: Brasil (1832, p. 75)

Embora a suposta boa intenção e, até certo ponto, a novidade da incorporação das duas Academias, e um único currículo para os Oficiais do Exército e da Marinha, os apontamentos de Campos e Santos (2020) nos levam ao entendimento de que este processo de incorporação teve vida curta, levando o então Ministro da Guerra, Antero José Ferreira de Brito, o Barão de Tramandaí, a apresentar uma proposta de desincorporação da Academia dos Guardas-Marinhas, voltando, portanto, as duas instituições a seguirem os seus destinos, assim como eram nos dois anos antecessores.

Embora os autores não apontem um motivo específico para o fim da experiência, pode-se verificar nas observações de Motta (2001, p. 60) que a dita “novidade” anteriormente citada, tratava-se apenas de “ato de supremo irrealismo” e que a desincorporação “[...] foi motivada por delicados pontilhos entre ministro e lentes”.

Desta forma, o decreto de 22 de outubro de 1833, além de reinstaurar a Academia dos Guardas-Marinhas, proveu o Estatuto da “Academia Militar Imperial do Brasil<sup>34</sup>”. A título de observação, assinalam Campos e Santos (2020),

<sup>34</sup> Grafia utilizada à época, conforme pode ser verificado no Decreto.



e uma demanda antiga de alguns quadros do Exército<sup>35</sup>, o decreto aprovara a ideia de que a recém-renomeada instituição seria estabelecimento exclusivamente militar. Para tanto, foi estabelecido um comando militar em sua direção, em substituição à congregação de professores<sup>36</sup>.

Assim, por meio do Decreto, e com o novo Estatuto em Vigência, a partir do ano letivo de 1834, a Academia Militar Imperial passaria a ofertar dois cursos distintos: o Militar, para oficiais das três armas do Exército; e o de Oficiais Engenheiros de todas as classes. O Curso Militar, destinado aos oficiais das três armas, era composto pelos três primeiros anos de estudo e era comum aos engenheiros de todas as classes que, após os três anos, cumpriam mais três específicos. Os planos de estudos, com os conteúdos de Matemática, para o Curso Militar podem ser observados na Figura 6:

---

<sup>35</sup> Este detalhe é trazido por Motta (2001, p. 59): “Embora no período anterior a direção da Academia clamasse por um regime disciplinar capaz de garantir, perante os alunos, a autoridade da Junta e dos lentes, a reforma de 1832 continuou mantendo **idêntica a situação**(grifo nosso), nada fazendo para acabar com o esdrúxulo de uma escola militar sem militância, onde não se viam os uniformes, as formaturas, as normas próprias de um quartel.”

<sup>36</sup> A congregação de Professores (Lentes) foi instituída pelo Decreto de 09 de março de 1832, era formada pelos Lentes de todos os anos letivos; os das aulas secundárias; pelo Professor de desenho, ou na falta de cada um o seu Substituto ou Ajudante, porém, mostrou-se inviável do ponto de vista de gestão, conforme observa Motta (2001, p. 60): “Se na vigência do Estatuto de 1810 já eram apontados os inconvenientes de uma direção colegiada, [...], imagine-se o que seria agora, com essa Junta ampliada [...]”.

Figura 6 - Plano de Estudos do Curso Matemático – Decreto de 22 de outubro de 1833

<b>Planos de Estudo do Curso Militar - Decreto de 22 de outubro de 1833</b>		
<b>1º Ano</b>	<b>2º Ano</b>	<b>3º Ano</b>
<p>Aritmética; Geometria; Álgebra até Composição de Equações; Geometria e Trigonometria Plana com a composição das Tábuas Logarítmicas as linhas Trigonométricas*.</p> <p>Haverá, no segundo tempo, uma aula de Desenho de Paisagens, a qual precederá o Desenho Geométrico (onde o lente de Geometria poderá dar problemas gráficos aos alunos).</p>	<p>No primeiro tempo, durante este ano letivo, se ensinará: continuação da Álgebra; Aplicação da Álgebra a Geometria; Cálculo Diferencial e Integral; Elementos de Estática e Dinâmica.</p> <p>No segundo tempo, deverá er ensinada a Geometria Descritiva (até duas vezes na semana) e, Desenho de representações de representação do terreno, segundo as convenções militares (uma vez na semana).</p>	<p>No primeiro tempo, durante este ano letivo, haverá uma aula de tática de todas as armas; estratégia, castrametação, fortificação de campanha e artilharia.</p> <p>No segundo tempo haverão duas aulas, uma duas vezes na semana, em que se ensinarão os princípios gerais de Física, de Química, e Mineralogia; e outra de desenho, em que os alunos resolverão problemas sobre fortificação de campanha, que lhes tiver dado o Lente do ano e representarão algumas evoluções das três armas e, as máquinas de artilharia.</p>
<p><b>Observação:</b> * Nesta aula serão fornecidos corpos esféricos e poliédros que representem as figuras das estampas e seus cortes. Semelhantemente todas as outras aulas serão fornecidos os modelos de mesma aparência, que se julgarem convenientes.</p>		

Fonte: Brasil (1833, p.134)

O Plano de Estudo com os conteúdos de matemática para o Curso de Complementação de Estudos para os Cursos de Engenharia de todas as classes, segue abaixo na Figura 7:

Figura 7 - Plano de Estudos do Curso para Engenheiros – Decreto de 22 de outubro de 1833

<b>Complementação de Estudos para os Cursos de Engenharia - Decreto de 22 de outubro de 1833</b>
<b>4º Ano</b>
<p>No primeiro tempo, Trigonometria esférica; Óptica; Astronomia com aplicação à construção de cartas geográficas, e geodésia. Ao mesmo tempo, os alunos deverão matricular-se no Observatório, que deverá ser frequentado em três dias útei da semana, à escolha do Diretor deste estabelccimento e ali se lhes ensinará, primeiramente a prática de todos os instrumentos matemáticos, e das observações astronômicas; e após os cálculos de longitude e latitude geográficos, e dos azimuths; uso e construção das tábuas astronômicas. Nos dias restantes os discípulos irão á aula de desenho, aonde se ensinará a construção e desenho das cartas geográficas. Se um Observatório não estiver estabelecido a tempo, o Comandante da Academia exigirá que seja feito um eirado no mesmo edificio desta, para servir como tal.</p>

Fonte: Brasil (1833, p.135)

Com este decreto, em 1833, puderam ser colocadas em prática determinações que já existiam, mas não eram cumpridas nas mais de duas décadas anteriores: a dos exercícios práticos militares. Foi assim que, conforme Motta (2001, p. 62),

Em janeiro de 1835, aquartelada na Praia Vermelha, a Academia realizou trabalhos geodésicos, levantamentos topográficos, montagem e utilização do armamento (nomenclatura e aplicação de canhões, obuses, morteiros e pedreiros de que nos servimos), exercícios de tiro (fizeram-se muito bons tiros para a Ilha da Catacumba e outros lugares), prática de acampamento (o lente explicou a nomenclatura de todas as partes de que se compõe as tendas de campanha, que se fizeram levantar e abater pelos alunos).

Esse fato, se incipiente, deveria ser comemorado, pois nas palavras do Brigadeiro Cunha Matos, Comandante da Academia, citadas por Motta (2001, p. 63), “os alunos viram coisas novas, e adquiriram condições para entrarem em melhores e mais extensos trabalhos”. Todavia, devido ao ato de levar a Academia para o campo de instrução, a passagem do Comandante dura apenas um ano. As palavras de Motta (2001) apontam que o ato de Cunha Matos foi o mesmo que mexer “em casa de marimbondos”. As despesas realizadas nas aulas práticas foram reprovadas e o Brigadeiro deixa o comando da Academia Militar em março de 1835.

O autor ainda observa que, pelos indícios verificados, a sua saída se deu devido a uma conjuração dos lentes, que ganhavam representatividade política no Império, visto que um deles<sup>37</sup> seria escolhido para o Ministério da Guerra. Assim, o decreto de 23 de fevereiro de 1835 tornou sem efeito o estatuto anterior, devendo ser observado aquele de 9 de março de 1832 com algumas alterações como, por exemplo, a criação do cargo de diretor da academia, que serviria pelo prazo de um ano, devendo ser eleito pela congregação de lentes e indicado ao governo em lista tríplice e, na falta desse, assumiria então, aquele lente mais antigo.

Ainda, observa-se que, apesar do Decreto, alguns “avanços” que haviam sido propostos pelo Estatuto de 1832 não foram completamente descartados como, por exemplo, os exercícios práticos gerais. Em 1836, salvo pequenas

---

<sup>37</sup> João Paulo dos Santos Barreto, Brigadeiro e lente de Artilharia foi nomeado Ministro em 16 de janeiro de 1835.

alterações nos anos seguintes, o programa de exercícios práticos, proposto para o Curso Matemático, foi, conforme Motta (2001, p.63-64), o seguinte:

1º ano: resolução prática dos problemas de Geometria e Trigonometria Plana; local: Passei Público e Campo da Honra; dias: 3<sup>as</sup>, 5<sup>as</sup>, e sábados; 2) 3º ano: explicação das máquinas à vista dos modelos existentes; local: uma sala da Academia; dias: 2<sup>as</sup> e 4<sup>as</sup>; 3) 4º ano: Geodésia e Astronomia: cálculos e observações; local: na Academia e no Castelo; dias: todos os dias; 4) Química: demonstrações mineralógicas e experiências; local: no Museu e na Academia; dias: 3<sup>as</sup> e 5<sup>as</sup>; 5) Desenho: paisagem; local: Morro de Santa Tereza; dias 6<sup>as</sup> e sábados.

Faz-se necessário ainda observar que, como já citado anteriormente, o currículo que voltou a vigorar fora aquele de 1832. Assim, dada a sua divisão, após o Curso Matemático (com duração de quatro anos) seguiam-se: Curso Militar, Curso de Calçadas e Pontes, e Curso de Construção (com duração de dois anos cada). É relevante evidenciar que destes, apenas os dois primeiros tem suas atividades de cunho prático nos registros de Motta (2001, p. 64), conforme citado a seguir:

B – Curso Militar : 1) 1º ano: Castrametação e Topografia Militar; local: Praia Vermelha; dias 6<sup>as</sup> e sábados; 2) 2º ano: exame nas fortificações e análise da sua construção; local: fortalezas da barra; dias: um dia na semana..

C – Curso de Pontes e Calçadas: prática do nivelamento; local: desde a Praça do Passeio, pela continuação do Aqueduto da Carioca; dias: 2<sup>as</sup>, 4<sup>as</sup> e 6<sup>as</sup>.

Ao passo que se sucediam as diversas mudanças de currículo da Real Academia em um curto período, também era inegável que, ao mesmo tempo, a influência do sistema francês de formação militar ganhava terreno por estas terras. Principalmente no que tange ao modelo de “Cursos Preliminares” de Matemática e Ciências e, após, viriam os “Cursos de Aplicação”. Sobre este assunto, Motta (2001, p. 65) observa que

Nas suas grandes linhas o sistema francês consistia, portanto, em desdobrar a formação do oficial em duas escolas: a Politécnica<sup>38</sup>, encarregada dos conhecimentos científicos, e as escolas de aplicação e de especialização, que tomavam a si os conhecimentos de caráter profissional<sup>39</sup>.

<sup>38</sup> A Escola Politécnica, na França, foi criada em 1794 [...], destinada a recrutar, para os serviços do Estado, civis ou militares (MOTTA, 2001, p. 65).

<sup>39</sup> No caso da França, “Metz para a Artilharia e a engenharia, Saint-Cyr para a Infantaria e a Cavalaria” (MOTTA, 2001, p. 65).

Assim, em 1839 foram ajustados em um regime escolar único os currículos de formação “Politécnico” e “Específico”. Sob esta visão, através de uma comissão, o currículo e os respectivos planos de estudos foram organizados, tendo como inspiração “aqueles que se acham presentemente em vigor na Escola Politécnica e na de Aplicação de Metz, em tudo que for adaptável” (MOTTA, 2001, p. 64).

Essa organização dos currículos e plano de estudos não deve ser considerada uma simples tradução daquilo que se fazia na França, tanto que na tentativa de tomar-se por referência

Os programas da Escola Politécnica e da Escola de Metz, como nos foi recomendado; mas apenas podemos imitá-los quanto ao espírito que neles domina, pela razão de que, podendo considerar-se a escola brasileira como uma fusão de ambas aquelas, era seu mister modificá-las quase na totalidade das suas disposições (ARQUIVO NACIONAL, 1849, cx. 694 apud MOTTA, 2001, p. 65).

A partir dessa interação nasce o Regulamento nº 29, de 14 de fevereiro de 1839, o qual, além da inspiração já citada, trazia dois pontos de destaque: a valorização do ensino técnico-profissional e a sua repercussão ao longo dos demais cinco anos da formação. O exemplo segue abaixo, onde trataremos do ano letivo de 1839 e as divisões.

Assim, esse “primeiro nível” de formação cumpriria o papel do curso “politécnico”, de dois anos. A seguir, na Figura 8 é descrito o Plano de Estudos com os conteúdos de Matemática, referentes ao primeiro ano de estudos, para o 1º Curso:

Figura 8 - Plano de Estudos (Conteúdos de Matemática) do Primeiro Curso – Regulamento 29

<b>Plano de Estudos (conteúdos de Matemática) Primeiro ano do Primeiro Curso - Regulamento 29 de 14 de fevereiro de 1839</b>
<p>Geometria Elementar, onde eram tratados os conteúdos de Matemática elementar pura e Operações topográficas.</p> <p>Para completar esse ano, a cadeira de Desenho topográfico, e instrução prática das armas de Infantaria e Cavalaria.</p>

Fonte: Brasil (1839, p. 17)

Quando se aborda o “segundo nível” ou, por que não, “segunda etapa” de formação dos Oficiais, dentro desta concepção *metziana*, não se pode perder de

vista que aqui está se falando de futuros Oficiais Engenheiros e Oficiais da Artilharia, que assim estariam aptos após mais três anos de formação, conforme plano de estudos para os conteúdos de Matemática, ilustrado na Figura 9.

Figura 9 - Plano de Estudos (Conteúdos de Matemática) do Segundo Curso – Regulamento 29

<b>Plano de Estudos (conteúdos de Matemática) Terceiro ano do Segundo Curso - Regulamento 29 de 14 de fevereiro de 1839</b>
Análise finita e infinitesimal.
Geometria Descritiva e, Analítica.

Fonte: Brasil (1839, p.17)

Aqui, destaca-se artigos trechos do Regulamento 29 como, por exemplo, o seu artigo 33, que delibera: “Os Alumnos da Escola deverão ser distribuidos em duas Companhias, [...] as quaes serão commandadas por dois Officiaes instructores nomeados pelo Commandante [...]”<sup>40</sup>. Os apontamentos de Motta (2001) chamam a atenção em especial para este artigo, sobretudo a intenção de enquadrar os alunos “[...] num Corpo militar, sob disciplina de fileira, tal como já quisera o fugaz Estatuto de 1833” (MOTTA, 2001, p. 66).

O autor segue seus comentários sobre o referido decreto, apontando, ainda, a questão da tentativa de se prover uma maior capacidade às ideias de militarização da Escola, mormente ao que tange à peculiaridade da “Figura do “oficial-instrutor”, encarregado pelo comando das companhias de alunos e da “instrução prática das armas” (MOTTA, 2001, p. 66). Dessa forma, a ideia era de, ao lado dos Professores das Ciências, alinhavam-se Oficiais, com o intuito de atender aos preceitos da “instrução militar”.

Outro destaque a ser feito a respeito desta questão é o artigo 35, o qual determina:

Haverá formatura diaria, e geral dos Alumnos da Escola meia hora antes da abertura das Aulas do primeiro tempo; outra no intervallo destas ás do segundo tempo; e terceira, finalmente, depois destas. Por occasião das ditas formaturas , se farão al .. gns exercidos militares detalhados pelo Inspector , excepto , porêm , na primeira , em que somente terá lugar a chamada, e revista” (BRASIL, 1839).

<sup>40</sup> Utilizaremos nas citações de textos da época a grafia original dos Decretos.

Isso quer dizer que deveria ser dado um direcionamento à questão disciplinar, pois algumas das críticas que eram feitas à Academia era a sua falta de “militarismo”, ou então, o seu pouco, ou nenhum, envolvimento com o Exército. Outro apontamento que fazemos é o artigo 40, o qual prevê, aos alunos que cometessem atos de transgressão disciplinar algumas punições conforme abaixo:

As faltas cometidas pelos Alumnos, em contração dos Estatutos, Regulamento, ou de quaesquer ordens em vigor na Escola, ou seja negligenciando o cumprimento dos seus deveres, ou cometendo algum acto de insubordinação para com os seus superiores, ou de desconsideração aos seus Lentes, e Mestres, serão punidas, segundo a gravidade do delicto , com as seguintes penas:

1. Admoestação privada feita pelo Commandante da Escola.
2. Reprehensão dada pelo Commandante, ou por ordem sua, em formatura geral.
3. Prisão na Escola até hum mez por ordem do Commandante, e destituição do commando de divisão, se o tiver.
4. Exclusão perpetua da Escola.” (BRASIL, 1839)

Todos esses aspectos, senão eram exatamente uma novidade (principalmente os disciplinares, os quais já haviam sido apontados em outros Estatutos), traziam em seu conjunto mais robusto a ideia da militarização da Academia. Neste aspecto, as observações de Motta (2001, p. 66) mostram que

Eram aspectos novos na vida da Academia, refletindo anseios e necessidades do Exército, ou pelo menos da sua parte mais sensível aos progressos técnicos dos organismos militares evoluídos.

Se por um lado setores do Exército viam os seus anseios serem atendidos, por outro lado fatores internos e externos, sobretudo políticos<sup>41</sup>, levariam a uma nova reforma no estatuto da Academia. Sobre esta nova reforma o autor ainda aponta como fatores internos, a insatisfação em relação a: i) redução do número de anos de curso; ii) estudos concomitantes das Ciências e Matemática com aqueles denominados de Técnicos (no que se referem à Arte Militar)<sup>42</sup>.

Isso culminou com um novo Decreto, de 9 de março de 1942, em que, retornariam os sete anos de estudos e, também, não haveria mais os estudos concomitantes tendo como decorrência, além de um retorno às origens

<sup>41</sup> “[...] a ida de José Clemente Pereira para o Ministério da Guerra, [...] determinando a quarta reforma do período” (MOTTA 2001, p.66)

<sup>42</sup> Conforme relatório do Ministro da Guerra de 14 de janeiro de 1843.

“predominantemente civis” como em seu início. Não bastasse isso, para total descontentamento daqueles que defendiam a militarização da Academia, naquele mesmo ano, fora ordenado que “fossem recolhidos ao Arsenal de Guerra os fuzis e petrechos antes distribuídos à Escola” (MOTTA, 2001, p. 68).

#### 4.5 A REAL ACADEMIA MILITAR NO PERÍODO DA SEGUNDA REGÊNCIA (1840-1889)

Assim, conforme reza de forma literal o artigo primeiro do decreto em Brasil (1842, p. 191), “o Curso completo da Escola Militar constará de sete annos de estudos [...]” e, principalmente os conteúdos matemáticos (concentrados nos primeiros quatro annos) estão relacionados na Figura 10:

Figura 10 - Plano de Estudos de Matemática – Decreto 140/42

Plano de Estudos de Matemática - Decreto 140 de 09 de março de 1842			
1º Ano	2º Ano	3º Ano	4º Ano
Aritmética; Álgebra Elementar, Geometria e Trigonometria plana.  Desenho.	Álgebra Superior, Geometria plana, Cálculo diferencial e integral.  Desenho.	Mecânica racional , e aplicada às maquinas;  Física experimental;  Desenho	Trigonometria Esférica, Astronomia e Geodésia.  Química e Mineralogia.  Desenho.

Fonte: Brasil (1842, p. 191)

Ainda conforme o decreto de 9 de março de 1842 (artigo 3º), o qual possibilitava dentro do currículo apresentado acima três possibilidades de formação: Cavalaria e Infantaria, Artilharia e Engenharia. Os itinerários formativos permitiam, dependendo da opção da carreira, formações com três, cinco ou sete annos, respectivamente. É considerável se observar que, a maior destas três estruturações de cursos diferentes, todas elas exigiam os conhecimentos matemáticos como base. A Figura 11 mostra o percurso formativo para cada uma das carreiras possíveis neste decreto:



Figura 11 - Dos anos de formação necessários à cada uma das Carreiras – Currículo de 1842

Carreira ↓ Curso →	Anos de Formação conforme Decreto de 09 de março de 1842						
	1º ano	2º ano	3º ano	4º ano	5º ano	6º ano	7º ano
<b>Oficiais de Infantaria e Cavalaria</b>	x	x	-	-	x	-	-
<b>Oficiais de Artilharia*</b>	x	x	x	-	x	x	-
<b>Curso para Engenheiros**</b>	x	x	x	x	x	x	x

**Obs.:** \* Para esta formação, substitui-se a segunda aula do sexto (Botânica e Zoologia) ano pela segunda aula do quarto (Química e Mineralogia).  
\*\*Inclui-se ainda para esta formação as aulas de Prática de Observatório.

Fonte: Brasil (1842, p.192)

Uma peculiaridade pode ser verificada neste decreto: o artigo 19 mencionava uma possível titulação até então não verificada em documentos anteriores:

Os Alumnos que se mostrarem aprovados plenamente em todos os sete annos do Curso completo da Escola Militar, e se habilitarem pela fórma que for determinada nas Instrucções, ou no regulamento do Governo, receberão o Grão de Doutor em Sciencias Mathematicas (BRASIL 1842, p 195-196).

As análises de Motta (2001) consideram que através desse trecho, criava-se um “tipo híbrido do militar-bacharel ou militar-doutor”, ou seja, um oficial que estaria, ao menos em sua titulação, em consonância com o movimento que se verificava também no Império, o de valorizar questões de títulos acadêmicos. Indo além, o autor destaca que

Todo mundo queria ser doutor. O título abria caminho para os empregos, para o bom casamento, para o prestígio social e político. Todos a ele, ao seu culto se renderam, até os militares. [...] Na Academia, os lentes, de um momento para outro, deixaram de ser capitães, majores ou coronéis, para se intitulem doutores. (MOTTA, 2001, p. 69)

Contudo, para além desses motivos havia outros interesses que permeavam estas questões de titulações e mudanças de currículos da Academia. Tanto em 1843, quanto em 1844 (aqui já como Ministro da Guerra), o General Jerônimo Francisco Coelho observara que se faziam necessárias adequações curriculares, o que Motta (2001) observa que seria uma nova reforma para que o Coelho pudesse chamar de “sua”.

Assim, em 1º de março de 1845, por meio do Decreto 404, “com a Rubrica de sua Majestade, o Imperador” sob a alegação de que as Reformas anteriores

(1832, 1833, 1835 e 1842) não haviam “produzido os bons resultados que delas se esperavam”, o General define que

Os Estatutos da mesma Escola Militar, que com este baixão, assignados por Jeronimo Francisco Coelho, do Meu Conselho, Ministro e Secretario d'Estado dos negocios da Guerra, sejam desde já executados provisoriamente na parte doutrinal, e por fôrma que na relativa á despeza não exceda esta aos fundos decretados [...] (BRASIL, 1845, p. 5).

Isto posto, observa-se neste novo Decreto a consolidação da questão das titulações militares, sobretudo no artigo 17, onde define que aqueles alunos que concluírem os sete anos de estudo receberão o título de Bacharéis e que

Os que se mostrarem aprovados plenamente em todos os referidos annos, e se habilitarem pela fôrma que for determinada. nas Instrucções, ou Regulamentos do Governo, receberao o Gráo de Doutor em Sciencias Mathematicas (BRASIL, 1845, p. 10)

Ora, se o texto não trazia novidade alguma em relação àquele de 1842, o currículo tampouco apresentava mudanças na organização de seus Planos de Estudo no que se refere à organização dos conteúdos de Matemática. Posto isso, não vemos necessidade de apresentação do mesmo.

Ainda se observa que sobre este novo arranjo, o artigo terceiro do Decreto 404, previa que o curso seria dividido em três. Em relação às especializações previstas, o arranjo era exatamente o apresentado referente ao decreto de 1842, ou seja: Oficiais da Cavalaria e Infantaria cursariam o primeiro, segundo e quinto anos; Oficiais de Artilharia e Estado Maior cursariam o primeiro, segundo, terceiro, quinto e sexto anos; já o terceiro curso, de Engenharia, abrangeria os sete anos de estudo.

Ao mesmo tempo em que as sucessivas mudanças (maiores ou menores) ocorriam nos estatutos da Academia, o tabuleiro das relações diplomáticas e de política interna se movimentava de forma muito contumaz. As investigações de Motta (2001) apontam para um tensionamento nas relações diplomáticas entre Brasil e Argentina. Mais precisamente em 1843, o governo argentino negou-se a legitimar um tratado por ele mesmo proposto. Logo, prosseguem as reflexões do autor, o Brasil entraria em um período conturbado com antagonismos e conflitos militares.

Desta forma, Motta (2001) segue dissertando sobre os novos acontecimentos que estavam a ebulir no território brasileiro, sobretudo nas

fronteiras de nosso território, as quais, devido ao crescimento de sua população e, sobretudo, à relevância econômica que ganhavam, devido à criação de gado, tornavam relevantes as pautas desses setores da sociedade. Se em determinado momento histórico acreditou-se que os recursos naturais, como a selva, os rios e as matas fossem servir de proteção ao nosso território, na prática, com o desenvolvimento dessas regiões, percebeu-se que isso já não bastaria para garantir a soberania de nossos territórios. Mas, prossegue a reflexão do autor, o que isso teria a ver com a Academia? E mais, indaga o próprio: “até que ponto tais fatos se refletiram no pensamento dos que se interessavam pela Academia?” (MOTTA, 2001, p. 70).

A política externa do País não passava pelos seus melhores dias, principalmente no que diz respeito às relações com a Argentina e, internamente, havia a insatisfação, notadamente, da Província do Rio Grande do Sul, pressionando o Governo Central a uma mudança de atitude com relação às suas estratégias militares. A respeito da indagação de Motta, no parágrafo anterior, o próprio admite que é difícil apontar de maneira concreta alguma influência deste cenário na Academia, no entanto, prossegue ele, “a partir de 1847 começaram a aparecer apreciações e críticas visando a uma reformulação de todo o sistema de ensino” (MOTTA, 2001, p. 70).

Sobre estas questões, quatro anos mais tarde, ou seja, em 1851, por meio do Decreto 634, de 20 de setembro, algumas resoluções são adotadas, como, por exemplo, em seu artigo primeiro que cria “na Provincia de S. Pedro do Rio Grande do Sul hum curso de Infantaria e Cavallaria” (BRASIL, 1851). Este curso era composto das matérias do 1º ano (Aritmética; Álgebra Elementar, Geometria e Trigonometria plana) e 5º ano (Topografia, Tática, Fortificação passageira, Estratégia e História Militar, Princípios de Direito Natural e das Gentes aplicáveis aos usos da guerra e às Capitulações) da Escola Militar, bem como dos conhecimentos de Desenho correspondentes a estes anos.

Desta forma, afirma Motta (2001, p. 105) “estacionando no Rio Grande do Sul” parte significativa dos Regimentos de Cavalaria e de Infantaria, seria significativo que, também a título de redução de despesas para a Corte, não afastasse os oficiais de suas tropas por longos espaços de tempo. É claro, obviamente, que com os já conhecidos conflitos na região da Cisplatina, somado

às reivindicações de setores da sociedade, era também uma resposta e consequente tentativa de atendimento às demandas.

Igualmente, o artigo terceiro em seu parágrafo segundo, do mesmo decreto, orientava ainda que “as aulas das Sciencias Physicas e Mathematicas serão distribuídas dentro da Escola pelos annos 1º, 2º, 3º, 4º e 7º” (BRASIL, 1851). Fato também relevante ocorre no município da Corte, onde é desdobrada em duas a mesma Escola, tendo sido oficialmente efetivado em 1855. Dito isso, é importante ainda destacar que as sedes permaneceram, uma no Largo de São Francisco, e outra na Fortaleza São João (1855-1856), sendo substituídas, em período posterior na Praia Vermelha (1857 em diante) funcionando, ao menos até 1874, de acordo com os apontamentos de Motta (2001) como pequeno “galho complementar” daquela localizada no Largo de São Francisco que, segundo o mesmo autor seria o “velho tronco” onde surgiram todos os preceitos militares. A seguir, temos a imagem da Escola de Porto Alegre representada na pintura de Newton Coutinho, na obra conjunta com Cláudio Moreira Bento na Figura 12:

Figura 12 - Imagem da Escola Militar de Porto Alegre



Fonte: Bento e Coutinho (prancha 6)

Acerca da Escola da Fortaleza São João, foi criada pelo Decreto 1536, de 23 de janeiro de 1855 como “Escola de Aplicação”, onde foram ministrados cursos que tinham como objetivo unir a teoria e a prática dos exercícios militares onde, ao mesmo tempo, nesta Instituição, observa Motta (2001, p. 113) se teria “o regime militar rigoroso, a ordem unida, o acampamento, o manéja das armas e a prática de tiro”, bem como as atividades teóricas de Topografia, Tática, Castrametação, entre outras.

As duas Escolas operavam de forma independente, não havendo, portanto, submissão ou dependência de uma em relação à outra. Sobre o plano de estudos da Escola de Aplicação destaca-se a distinção das atividades teóricas e das práticas: Aula Provisória: esse primeiro ano, que pode ser comparado ao ano de preparação (que apareceria na sequência) tinha por objetivo uma espécie de nivelamento dos conhecimentos matemáticos de aritmética; Álgebra elementar; Geometria elementar; Metrologia; Princípios de Geometria Analítica a duas dimensões, compreendendo a trigonometria plana; Explicação e uso das tábuas de logaritmos.

No entanto, sobre a Aula Provisória, é importante destacar, conforme rezava o artigo segundo da já referida Lei:

Somente para os alumnos militares, huma aula provisoria para o ensino das mathematicas [...]. Para os alunos civis, indicava o artigo terceiro. Haverá no mesmo estabelecimento huma aula preparatoria de leitura, escripta, grammatica portugueza, arithmetica até complexos inclusive, opções elementares de Geometria pratica e lições sobre os deveres rios Officiaes inferiores (BRASIL, 1855, p. 40).

Seguiam-se os anos e a expansão da rede de Ensino Militar não ficaria restrita mais a esse pequeno número de escolas. Se, por um lado elas eram em número de quatro e o tempo se encarregaria de um aumento no número de instituições, por outro, os currículos destas instituições passaram a abarcar “inclusão dos ‘preparatórios’ [...], isso valendo atribuir ao Exército, como uma de suas tarefas normais, ministrar o Ensino Secundário” (MOTTA, 2001, p. 106).

Essas mudanças nos rumos da formação dos oficiais são amparadas pelo Decreto 2116, de 1º de março de 1858, o qual “reformava as escolas militares existentes”. Mas do que tratavam, exatamente, estas reformas?

E um primeiro momento, em seu capítulo I, o referido decreto tratava da reorganização delas, de acordo com o disposto em seu parágrafo primeiro:

As actuaes escolas, militar da Corte c de applicação do Exercito, e o Curso de Infantaria cavallaria da Província de S. Pedro do Rio Grande do Sul passarão a denominar--se, a primeira escola central, a segunda escola militar e de applicação, e a terceira escola militar preparatoria da Província de S. Pedro do Rio Grande do Sul. (BRASIL, 1858, p. 108).

Além da reorganização, os objetivos de cada uma das Escolas foram redefinidos, e a então Real Academia, no Largo de São Francisco, passaria a promover o ensino de Matemática e Ciências Físicas e Naturais, em como as cadeiras pertinentes à Engenharia Civil. A Escola de Aplicação, localizada na Praia Vermelha, ficou encarregada de ministrar o ensino teórico e prático das doutrinas militares aos Oficiais e aos Soldados do Exército. Já a Escola da Província de São Pedro do Rio Grande do Sul, passou a denominar-se Escola Militar Preparatória da Província de São Pedro do Rio Grande do Sul e seria dedicada ao ensino das cadeiras preparatórias de artilharia, infantaria e cavalaria<sup>43</sup>. Sobre as instalações da Escola da Praia Vermelha, destaca-se a pintura de Newton Coutinho, na obra conjunta com Cláudio Moreira Bento na Figura 13:

---

<sup>43</sup> Conforme artigo 162 em Brasil (1858, p.135) “[...] compreenderá, além de huma aula de desenho linear e de paisagem, as mesmas doutrinas preparatórias, distribuidas pelo mesmo número de aulas, e pela mesma ordem em que o são as aulas preparatorias da Escola Central.”

Figura 13 - Imagem da Escola da Praia Vermelha



Fonte: Bento e Coutinho (prancha nº 6)

Na mesma esteira do caminho da reorganização curricular são instituídas “aulas preparatórias”, que seriam compostas da seguinte forma: na primeira aula, línguas estrangeiras – francês e latim (gramática, tradução e leitura); na segunda aula, elementos de Álgebra até as funções do 1º grau – incluindo Geometria e na terceira aula, história, geografia e cronologia; e a terceira, aritmética e metrologia.

Este curso preparatório era pré-requisito para o acesso às aulas do Curso Matemático e, conseqüentemente, do Curso Suplementar de Engenharia Civil. O plano de estudos, com esta reorganização, ficou distribuído conforme mostra a Figura 14.

Figura 14 - Plano de Estudos do Curso Matemático – Decreto 2116/58

Plano de Estudos do Curso Matemático - Decreto 2116 de 1º de Março de 1858			
1º Ano	2º Ano	3º Ano	4º Ano
<p>Álgebra (continuação do curso preparatório, incluindo Álgebra Superior), Trigonometria plana e Geometria Analítica.</p> <p>Física Experimental, Meteorologia e Desenho.</p>	<p>Geometria descritiva, Cálculo Diferencial, Cálculo Integral, das Probabilidades, das Variações e Diferenças Finitas;</p> <p>Química e Desenho;</p>	<p>Mecânica racional, e aplicada às máquinas em geral, máquinas de vapor e suas aplicações;</p> <p>Mineralogia, Geologia e Desenho de Máquinas.</p>	<p>Trigonometria Esférica, Óptica, Astronomia e Geodésia.</p> <p>Botânica, Zoologia e Desenho geográfico.</p>

Fonte: Brasil (1858, p.109 – 10)

No que tange à questão da formação dos oficiais, existiam algumas carreiras que tinham uma formação “híbrida”, ou seja, parte na primeira escola, parte na segunda. A Figura 15, a seguir, mostra como funcionava esse arranjo:

Figura 15 - Dos anos de formação necessários à cada uma das Carreiras – Decreto 2116

Carreira ↓	Currículo dos Cursos de Formação - Decreto 2116 de 01 de março de 1858							
	Escola de Aplicação*		Escola do Largo São Francisco (Central)**					
	1º ano	2º ano	1º ano	2º ano	3º ano	4º ano	5º ano	6º ano
Oficiais de Infantaria e Cavalaria <sup>1</sup>	x	-	x	-	-	-	-	-
Oficiais de Artilharia <sup>2</sup>	x	x	x	x	x	-	-	-
Oficiais de Engenharia Militar <sup>3</sup>	x	x	x	x	x	x	-	-
Oficiais Engenheiros Civis <sup>4</sup>	x	x	x	x	x	x	x	x

Obs.: \* A Escola de Aplicação foi criada pelo Decreto 1536 de 23 de janeiro de 1855; <sup>1</sup> Currículo estabelecido pelo Decreto 2116 - art. 18; <sup>2</sup> Também chamados de Cursos Científicos, tiveram o seu currículo estabelecido pelo Decreto 2116 - art. 19 e § 1º; <sup>3</sup> Currículo estabelecido pelo Decreto 2116 - art. 19 e § 2º; <sup>4</sup> Currículo estabelecido pelo Decreto 2116 - art. 5 e § 3º.

Fonte: Brasil (1858, p.110-113)

O advento da criação da Escola de Aplicação e a aplicação desse currículo, em tese, serviriam para resolver um dos maiores imbróglios desde a criação da Real Academia: o Ensino da Arte Militar, conforme observa Motta (2001, p.116):

Até então, desde 1811, não eram esses assuntos objetos de referência especial, e o muito pouco que deles era ministrado, vinha no bojo do que se denominava Arte Militar (Estratégia, Tática, Castrametação). Agora, porque se lhes quer dar importância e se procura realizar ensino “aplicativo” amarrado às tarefas da profissão militar, ei-los explicitados no currículo, a fim de que os que planejam e os que executam o ensino lhes dêem relevo nos programas e nos quadros de distribuição do tempo.

Contudo, o que parecia ser, finalmente, o fechamento da história não era mais que um sonho de verão. Os fortes debates e a resistência formada, principalmente na Câmara dos Deputados e no Senado Federal<sup>44</sup>, sobre as aulas preparatórias onde, em determinado momento, houve declarações de políticos da época de que não haveria essa necessidade, pois havia educação pública na época que deveria dar conta dos assuntos ensinados naquelas aulas.

Essa discussão, a qual não se encerraria em uma ou duas sessões do parlamento e do senado, prosseguiu (inclusive com um aumento na profundidade) por um período de alguns anos adiante. Mesmo com o advento do

<sup>44</sup> Para maiores informações, consultar os Anais do Senado, sessão de 10 de agosto de 1858 (p. 74 e 83).



Decreto de 1860 e a retirada das aulas preparatórias, o currículo seguia sendo objeto de discussão. Um embate entre dois lentes da Escola, os também deputados, Gomes de Souza e Silva Paranhos deu a esse debate contornos de polêmica até então não vistos na Casa Legislativa. Acontece que ambos, em posição de discordância, procuravam, cada um defender o seu ponto de vista o que, naturalmente, poderia se esperar.

As discussões giravam, principalmente, em torno dois assuntos: o ensino do latim, que para Gomes de Souza tratava-se à época de uma “língua morta”, e Silva Paranhos defendia o ensino de Cálculo e Mecânica em uma única cadeira de Cálculo e Mecânica, que para o primeiro deputado seria uma posição didática invejável conseguir mostrar ao aluno a aplicação e “utilidade” do Cálculo em situações da prática humana. Por outro lado, apontam as ponderações de Motta (2001), o segundo deputado, contrário a essa ideia, tecia críticas a este modelo e não reconhecia superioridade alguma do Currículo de 1860 sobre aquele de 1858. O certo é que em 21 de abril de 1860, sob o Decreto 2582, é dada uma nova organização ao Ensino Militar, conforme veremos a seguir.

É válido dizer que, entre as discussões sobre currículo, disciplina militar, aulas práticas e hierarquia (entre outras mais), o referido decreto estabeleceu quatro diferentes níveis de Escolas e uma hierarquia a qual, cada uma delas, de acordo com a sua especificidade, estaria subordinada. Dessa maneira, a rede de ensino militar foi assim organizada, conforme o Decreto 2582 (BRASIL, 1860, p. 165):

- a) Escola Central - subordinada imediatamente ao Ministro e Secretário de Estado dos Negócios da Guerra.
- b) Escola Militar - subordinada imediatamente ao Ministro e Secretário de Estado dos Negócios da Guerra.
- c) Escolas Auxiliares da Militar – subordinada ao Comandante da Escola Militar;
- d) Escolas Regimentais – subordinada aos Comandantes das Armas, ou a autoridade que suas vezes fizer.

Com esse novo arranjo, a Academia Real Militar passaria a ser conhecida como Escola Central e, assumiria de vez a sua vocação às Ciências Matemáticas e às Engenharias, conforme referido no artigo terceiro do Decreto 2582: “A Escola Central compreenderá o curso normal de sciencias mathematicas e

physicas e o de engenharia civil” (BRASIL, 1860, p. 166). No artigo seguinte, esse caráter formativo fica ainda mais evidenciado, mostrando que, de fato, o compromisso, ao menos dali em diante, da Escola Central seria o de formar Engenheiros e Doutores nas Ciências, conforme cita o artigo quarto:

O curso normal se compõe de quatro annos, e he destinado a formar especialmente engenheiros geographos e em geral homens habilitados para qualquer applicação scientifica” (BRASIL, 1860, p. 166).

Ao todo, a Escola Central passaria então a oferecer dois cursos: o Curso Normal (ou de Ciências Matemáticas e Físicas), que habilitaria os Engenheiros Geógrafos, e o Curso de Engenharia Civil. O Curso Normal era composto por quatro anos e, o de Engenharia Civil por cinco. O arranjo de cada um dos anos do Curso Normal segue abaixo, na Figura 16:

Figura 16 - Plano de Estudos do Curso Matemático – Decreto 2116/58

Plano de Estudos do Curso Normal - Decreto 2582 de 21 de Abril de 1860			
1º Ano	2º Ano	3º Ano	4º Ano
<p>Álgebra com aplicação às operações numéricas, Geometria, Trigonometria plana, e topografia.</p> <p>Física experimental, e telegrafia elétrica.</p> <p>Desenho topográfico e de paisagem.</p>	<p>Composição geral de Equações, princípios fundamentais de Geometria Descritiva, Geometria analítica, Cálculo infinitesimal, Mecânica e Máquinas, necessários ao Oficial de Artilharia.</p> <p>Química Elementar ou Inorgânica.</p> <p>Desenho de máquinas.</p>	<p>: Continuação do Cálculo infinitesimal, e da Mecânica.</p> <p>Botânica e Zoologia.</p> <p>Desenho de Arquitetura e de Máquinas.</p>	<p>A primeira cadeira occupava-se de Trigonometria esférica, Astronomia, e Geodésia.</p> <p>Mineralogia e Geologia.</p> <p>Desenho Geográfico e, Hidrográfico.</p>

Fonte: Brasil (1860, p.166)

Diante desse novo panorama, viabilizado pelo currículo de 1860, Motta (2001) observa em sua investigação que a Escola Central estava enfim no patamar que, embora não fosse o seu primeiro objetivo quando de sua criação, passou, com o tempo, a almejar. Pelo movimento, principalmente de seus lentes, a escola passa a ser admirada por um pequeno grupo da elite daquela época, acima de tudo, pelos conhecimentos matemáticos que ali eram desenvolvidos. Essa afirmação da Matemática ter sido priorizada na Escola Central, é corroborada pelo próprio autor quando se refere aos métodos didáticos da Escola:

E o que se pode dizer é que, ao longo desse período, no que tange a métodos didáticos, a Escola Central não faz mais do que acentuar

tendências antigas e cristalizar-se numa rotina em que predominava o aspecto teorizante e livresco do ensino. Se pusermos de lado o esforço de alguns lentes [...], tudo o mais se foi reduzindo a preleções e exposições, com vistas a demonstrar sapiências matemáticas, diante de alunos basbaques. (MOTTA 2001, p.135)

A Escola Militar (anteriormente chamada de Escola de Aplicação), que tinha como missão dar aos alunos militares Oficiais de Infantaria, Cavalaria, Artilharia, e aos corpos de Engenheiros Militares e de Estado Maior, egressos da Escola Central, uma instrução especial às armas da sua carreira dentro do Exército. Para isso, e de acordo com a especialidade ou formação, oferecia um ou dois anos de formação a ser cursado, de acordo com a carreira a que se propunha cada Oficial.

Assim sendo, os militares que se candidatassem ao primeiro ano da Escola Militar deveriam ter cursado, com aprovação, o primeiro ano da Escola Central. Para a matrícula no segundo ano da Escola Militar, oportunizada aos aprovados no primeiro ano, era necessário aos Oficiais de Artilharia que tivessem cursado, também com aprovação, os dois primeiros anos da Escola Central. Já os Oficiais do Estado-maior e os de Primeira Classe, deveriam ter cursado, com aproveitamento, os três primeiros anos da Escola Central. Por fim, para os Oficiais do Corpo de Engenheiros Militares, era requerido o Curso Normal completo, conforme mostra a Figura 17:

Figura 17 - Currículo para a formação de Oficiais do Exército, conforme Decreto 2582

Carreira <sup>1</sup>	Currículo dos Cursos de Formação - Decreto 2582 de 21 de abril de 1860					
	Escola Central				Escola Militar	
	1º ano	2º ano	3º ano	4º ano	1º ano	2º ano
Oficiais de Infantaria e Cavalaria	x	-	-	-	x	-
Oficiais de Artilharia	x	x	-	-	x	x
Oficiais do Estado Maior e de Primeira Classe	x	x	x	-	x	x
Oficiais Engenheiros Militares	x	x	x	x	x	x
Engenheiros Geógrafos <sup>2</sup>	x	x	x	x	-	-

Obs.: <sup>1</sup> Currículo estabelecido pelo Decreto 2582 - art. 65; <sup>2</sup> Currículo estabelecido pelo Decreto 2582 - art 109.

Fonte: Brasil (1860, p. 175)

Desse modo, as matérias ensinadas na Escola Militar eram voltadas exclusivamente para a formação prática dos oficiais. Em seus dois anos de estudo, cada um com duas cadeiras e uma aula de desenho militar específico.

Seguindo a nossa análise do Decreto 2582, chegou o momento de realizar alguns apontamentos a respeito das Escolas Auxiliares da Escola Militar<sup>45</sup>. Essas escolas poderiam, a critério do Governo, ser criadas nas províncias que o mesmo julgasse ter essa necessidade. O curso das Escolas Auxiliares será de dois anos e os seus conteúdos estão expostos na Figura 18:

Figura 18 - Plano de Estudos das Escolas Auxiliares – Decreto 2582/60

<b>Plano de Estudos Escolas Auxiliares- Decreto 2582 de 21 de Abril de 1860</b>	
<b>1º Ano</b>	<b>2º Ano</b>
Álgebra com aplicação às operações numéricas, Geometria, Trigonometria plana, e topografia.	Topografia, Tática, Estratégia, Castrametação, Fortificação passageira, Noções elementares de balística. A Segunda Cadeira era composta das seguintes temáticas: Legislação, Administração e História militar, Princípios de direito humanos (à época chamado de direito das gentes) aplicados aos usos da guerra e, por fim, a Aula de desenho militar

Fonte: Brasil (1860, p. 177-178)

Por último, na análise do já referido decreto, iremos agora realizar alguns comentários a respeito das Escolas Regimentais, que tinham por objetivo, conforme o artigo 89, “formar inferiores para os corpos, com a necessária instrução”. Nessas Escolas, seriam ministrados os conhecimentos necessários de Leitura, Caligrafia, Aritmética, Geometria Espacial (com duas dimensões) e desenho linear.

O funcionamento das Escolas Auxiliares e Regimentais ganhou maiores definições a partir do Decreto 3083, de 28 de abril de 1863, onde fica estabelecido, em seu artigo terceiro, que “nos lugares em que houver escola preparatoria, o governo poderá annexar-lhe uma escola regimental com a instrução pratica relativa ás tres armas de linha” (BRASIL, 1863, p. 119).

Este mesmo Decreto, além de definir melhor a questão das Escolas Regimentais, dava providências sobre todo o sistema de Ensino Militar. Embora não traga profundas modificações, sob a ótica buscada nesse trabalho, em

<sup>45</sup> Artigos 79 a 88 do Decreto 2582 de 21 de abril de 1860 (p. 177-8).

relação ao Decreto anterior (1860), serão feitas seguir, algumas considerações sobre o mesmo.

Para iniciar as apreciações sobre o documento citado no parágrafo anterior empreende-se uma pequena citação do artigo primeiro, que fala dos objetivos do mesmo: “A instrução militar theorica e pratica será dada nos seguintes estabelecimentos: 1º Escolas regimentaes. 2º Escolas preparatórias. 3º Escola militar. 4º Escola central” (BRASIL, 1863, p. 119).

As Escolas Regimentais funcionariam, sob este Decreto, como se fossem uma espécie de “base da pirâmide”, ou seja, na formação de Oficiais Inferiores<sup>46</sup>. Porém, mesmo sendo de quadros hierarquicamente inferiores, havia conhecimentos indispensáveis aos mesmos, e que deveriam ser ensinados em dois anos de curso:

Para todas as armas: leitura, calligraphia, doutrina christã, as quatro operações sobre numeros inteiros e fracções, tanto ordinarias como decimaes, metrologia, desenho linear, as principaes disposições da legislação penal militar (BRASIL, 1863, p. 119).

De forma a estabelecer, mesmo que superficialmente, uma pequena comparação entre os decretos de 1860 e, de 1863, pode-se observar a inserção de conteúdos de doutrina cristã e legislação militar a estes oficiais que anteriormente não estavam contemplados. Além disso, estavam contempladas ainda as instruções práticas aos alunos<sup>47</sup> matriculados nestes cursos.

Nas Escolas Preparatórias, no que lhes dizia respeito, ao final de dois anos de estudos os alunos, destaca Medeiros (1992, p.18):

Se aprovados nas respectivas disciplinas, e com a instrução prática conveniente, os alunos estavam habilitados a exercer funções de oficial subalterno (posto inferior a capitão), nas armas de infantaria e cavalaria. Se concluíssem os estudos [...] com aprovação plena, pelo menos em matemáticas, poderiam prosseguir na Corte os estudos na Escola Militar.

Conforme destacado por Medeiros (1992) em citação anterior, as Escolas Preparatórias, e isso já foi aqui referenciado, tinham por objetivo o ensino das

---

<sup>46</sup> O Decreto de 1860 não deixava claro quais seriam esses “Oficiais Inferiores”. Entretanto, esse ato fora corrigido, conforme nossos levantamentos, pelo artigo 5º, § 1 do Decreto de 1863 onde são citados os deveres: “[...] do soldado, cabo de esquadra, forriel e sargento, em todas as circumstancias do serviço de paz e de guerra.” (BRASIL 1863, p.120)

<sup>47</sup> “Os voluntarios sempre serão preferidos; e entre todas as praças do mesmo corpo, sê-lo-hão as que, a juizo do respectivo commandante, se achem nas melhores condições moraes, intellectuaes e physicas.” (BRASIL 1863, p.120)

doutrinas preparatórias exigidas para os cursos militares e a instrução prática elementar das diferentes armas. A criação destas Escolas era atribuição exclusiva da Corte, a qual poderia criá-las nas Províncias que julgasse necessárias<sup>48</sup>.

O Programa de Ensino, bem como a divisão do Curso em suas respectivas cadeiras, era atribuição do Governo (art. 17<sup>o</sup>). Os únicos requisitos mínimos eram a quantidade de dois anos de estudos e os conteúdos mínimos a serem trabalhados, os quais seriam: gramática da língua portuguesa e francesa (tradução e exercícios desta língua); história e geografia (especialmente as que se referem ao Brasil); Aritmética, Álgebra Elementar, Geometria, trigonometria plana, desenho linear e Geometria prática; administração de companhia e dos corpos. Como opcional (e esta opção ficava a cargo do governo), poderia ser introduzido o ensino da língua inglesa. A instrução prática deveria ser distribuída de modo que, ao final dos dois anos do curso, os alunos estivessem habilitados a exercer nos corpos das respectivas armas as funções de oficial inferior, e nos de infantaria ou cavalaria as de subalterno.

Anda sob a luz do Decreto 3083, a Escola Militar, por sua parte, ficava assim destinada à instrução prática e teórica, não apenas dos alunos militares oriundos das Escolas Preparatórias, mas, também, daqueles que se destinarem aos estudos próprios dos corpos do Estado Maior e Engenharia Militar. O artigo 39, do mesmo decreto, estabelecia as “doutrinas” que constituiriam o ensino teórico da escola militar e as distribuía ao longo dos três anos de estudos e sob as seguintes cadeiras na Figura 19:

---

<sup>48</sup> A Província de São Pedro do Rio Grande do Sul foi, em virtude da grande atividade militar na Região, a primeira província fora da Corte a receber, em 1853, uma Escola Militar. Ao longo de seus primeiros anos ocorreram diversas mudanças nas suas atribuições que, primeiramente era a de formar Oficiais de Carreiras superiores e, a partir de 1860, ficou subordinada a Escola da Corte, funcionando somente como Escola Preparatória ou Auxiliar.

Figura 19 - Plano de Estudos do Curso Normal - Decreto 3083/63

Plano de Estudos do Curso Normal - Decreto 3083 de 28 de Abril de 1863		
1º Ano	2º Ano	3º Ano
<p>Álgebra superior (inclusive a Teoria das Séries), Geometria Analítica de duas e três dimensões;</p> <p>Física experimental, Fundamentos Elementares de Mecânica, Química Inorgânica e suas aplicações a Pirotecnia militar.</p> <p>Aula de Desenho Topográfico, Topografia e reconhecimento do terreno.</p>	<p>Tática, Estratégia;</p> <p>Noções elementares de Direito Natural e Direito Público;</p> <p>Projeções, Geometria Descritiva.</p>	<p>Cálculo Diferencial e Integral, Mecânica, Balística (teórica e aplicada).</p> <p>Técnicas Militares;</p> <p>Desenho.</p>

Fonte: Brasil (1863, p. 24-25)

Nesse novo esboço curricular, com a inserção de um terceiro ano na Escola Militar, houve uma mudança também na formação dos oficiais. O artigo 42 do Decreto previa que os Oficiais de Infantaria e Cavalaria cursariam os dois primeiros anos, e os de Artilharia os três anos. Oficiais de Estado Maior e de Engenharia Militar igualmente cursariam os três anos, mas necessitariam de formação complementar na Escola Central.

Uma novidade, por assim dizer, pode ser percebida no artigo 43 do mesmo Decreto, onde fora aberta a possibilidade aos alunos concluintes do Curso de Infantaria e Cavalaria, a critério do Conselho de Instrução da Escola, matricularem-se, no ano seguinte o Curso de Artilharia. Aos alunos concluintes do Curso de Artilharia, também a critério do Conselho de Instrução<sup>49</sup>, haveria a possibilidade de frequentar os Cursos de Estado Maior de primeira classe ou Engenharia Militar. Embora a indicação do Conselho, não havia a garantia da matrícula em outro curso (de patente mais elevada), pois, em última instância, deveria haver a aprovação do Governo.

<sup>49</sup> De acordo com o Artigo 127 do já referido Decreto, o Conselho de Instrução será assim composto: “[...] 1º Do commandante da escola, como presidente. 2º Do 2º commandante; 3º Do commandante do batalhão de engenheiros; 4º Dos lentes e professores; 5º Dos instructores de 1ª classe” (BRASIL, 1863, p. 144).

Sobre a Escola Central, cada vez mais ficaria claro o seu papel de formação de especialistas nas Ciências Matemáticas e de Engenheiros, conforme o artigo 174 do Decreto 3083:

A escola central é destinada principalmente ao ensino das mathematicas, sciencias physicas e naturaes e a completar a instrucção theorica e pratica dos alumnos que, depois de concluírem os tres annos do curso da escola militar, obtiverem permissão para frequentar os estudos complementares dos cursos do estado-maior e engenheiros (BRASIL, 1863, p.151-152).

Dessa forma, o currículo da Escola Central sofreu novas alterações e passou a ser composto, conforme o Curso, de seis anos de estudos, conforme o artigo 175 do mesmo Decreto. Abaixo, na Figura 20, temos o Plano de Estudos para a formação comum dos Engenheiros e Oficiais de Estado Maior, bom como para os Bacharéis e Doutores:

Figura 20 - Plano de Estudos Comum às formações da Escola Central – Decreto 3083/68

Plano de Estudos Comum para Engenheiro e Oficiais do Estado Maior - Decreto 3083 de 28 de Abril de 1863			
1º Ano	2º Ano	3º Ano	4º Ano
<p>Álgebra Elementar e Superior; Geometria; Trigonometria Plana e Esférica;</p> <p>Desenho linear e topográfico e Noções de Topografia.</p>	<p>Geometria Analítica, Teoria Geral das Projeções, Elementos do Cálculo Diferencial e Integral, Mecânica aplicada ao Cálculo;</p> <p>Física experimental, Noções Elementares de Mecânica;</p> <p>Desenho,</p>	<p>Continuação do Cálculo Diferencial e Integral, e da Mecânica;</p> <p>Química Inorgânica;</p> <p>Desenho de máquinas.</p>	<p>Astronomia, Topografia e Geodésia;</p> <p>Botânica e Zoologia, Noções Elementares de Química Orgânica;</p> <p>Desenho Geográfico.</p>

Fonte: Brasil (1863, p. 132)

Ainda acerca desse novo currículo, novos itinerários formativos foram elaborados. Foi elaborada, segundo a Figura 21, com base nos artigos 177 a 182, um resumo dos anos de estudo necessários para cada uma das titulações. Junto ao mesmo quadro, agregamos o artigo 42 que trata dos Oficiais que cursaram a Escola Militar:



Figura 21 - Das carreiras Militares e de Engenharia, conforme o Decreto 3083

Carreira	Currículo dos Cursos de Formação - Decreto 3083 de 28 de abril de 1863								
	Escola Central						Escola Militar		
	1º ano	2º ano	3º ano	4º ano	5º ano	6º ano	1º ano	2º ano	3º ano
Oficiais de Infantaria e Cavalaria <sup>1</sup>	-	-	-	-	-	-	x	x	-
Oficiais de Artilharia <sup>1</sup>	-	-	-	-	-	-	x	x	x
Engenheiros Geógrafos <sup>2</sup>	x	x	x	x	-	-	-	-	-
Oficiais do Estado Maior e de Primeira Classe <sup>3</sup>	x	x	x	x	-	-	x	x	x
Engenheiros Civis <sup>4</sup>	x	x	x	x	x	x			
Oficiais Engenheiros Militares <sup>5</sup>	x	x	x	x	x	-	-	-	-
Bacharel em Ciências Físicas e Matemáticas <sup>6</sup>	x	x	x	x	x	x	x*	x*	x*
Doutor <sup>7</sup>	x	x	x	x	x	x	x*	x*	x*

**Obs.:** <sup>1</sup> Currículo estabelecido pelo Decreto 3083 - art 42; <sup>2</sup> Currículo estabelecido pelo Decreto 3083 - art 177; <sup>3</sup> Currículo estabelecido pelo Decreto 3083 - art 178; <sup>4</sup> Currículo estabelecido pelo Decreto 3083 - art 179; <sup>5</sup> Currículo estabelecido pelo Decreto 3083 - art 180; <sup>6</sup> Para a obtenção deste título, além de cursar os seis anos da Escola Central, o aluno deveria obter Aprovação Plena em todas as Cadeiras dos três primeiros anos da Escola Militar ou Central, além de a mesma aprovação no quarto ano e, na Segunda Cadeira do quinto ano, também na Escola Central (Art. 181); <sup>7</sup> Além do cumprimento dos requisitos da etapa anterior, eram necessários os títulos de Bacharel em Belas Letras ou, se mostrarem habilitados para tal.

Fonte: Brasil (1863, p.125 e 154)

Os relatos de Motta (2001) apontam para um esvaziamento quantitativo de alunos militares na Escola Central. Esse fato deve-se ao advento da Guerra do Paraguai (1865-1870). Isso fez com que os Ministros da Guerra da época, Ângelo Moniz da Silva Ferraz (novembro/1865 - outubro/1866) e seu sucessor, João Lustosa da Cunha Paranaguá (outubro/1866 - julho/1868) tomassem a decisão de, dadas as circunstâncias, repassar a Escola Central para outro ministério que não aquele sob seu comando, visto ainda que, formou-se o entendimento de que os Engenheiros Civis ali formados poderiam prescindir da disciplina militar.

Seguindo na mesma ideia, após o final do confronto com o Paraguai, José Maria da Silva Paranhos, Ministro da Guerra pelo curto período de pouco mais de dois meses (março/1871-maio/1871), defendia a ideia de que os estudos de formação militar deveriam todos eles, concentrar-se em uma única Escola. Motta (2001) ainda destaca que a situação verificada de, em certo momento da formação, a passagem dos Engenheiros Militares e dos Oficiais de Estado-Maior antes de não acrescentar, prejudicava a estes, visto que, a vocação da Escola Central naquele instante era a de formar Engenheiros Civis e Geógrafos.

A grande preocupação, prossegue o autor, deve-se principalmente à convivência desses Oficiais com hábitos não militares (chamado nos Decretos de “paisanos”) o que poderia levar a algum tipo de hiato, ou até mesmo em situações extremas, alguma ruptura na formação militar desses futuros oficiais.

A ideia dominante entre os Ministros que se sucederam e, também, o Imperador D. Pedro II, era de que se deveria “liberar a escola de qualquer servidão militar para que ela pudesse entregar-se, por inteiro, à tarefa de ampliar os estudos de engenharia civil, tão exigidos pela crescente modernização da vida brasileira” (MOTTA, 2001, p. 138).

Desta forma, em 17 de janeiro de 1874, pelo Decreto 5259, o ensino militar tem novas orientações e organização. A principal de todas as alterações veio através do artigo 263 que determinava que

A escola central passa a ficar sob a jurisdição do ministério do império; devendo os alumnos militares que ainda lá houver reverter á escola militar a fim de completarem os cursos para que obtiveram licença (BRASIL, 1874, p. 80).

Para além disso, a nova organização do ensino militar reforçava a condição dos Depósitos Especiais de Instrução e Disciplina<sup>50</sup> que se destinavam à formação de recrutas das armas, sendo que, para a arma de Artilharia havia ainda os “Depósitos de Aprendizes Artilheiros”.

Feita a contextualização dos Depósitos de Instrução, retorna-se à organização do Ensino Militar disposta no Decreto 5259, que passava a contar então com a seguinte estrutura: depósitos de instrução, Escolas Regimentais, Escola Preparatória e Escola Militar. Todas as instituições citadas estavam sob as ordens do Ministro e Secretário da Guerra e, portanto, sujeitas à disciplina militar.

As Escolas Regimentais, conforme o já citado decreto (BRASIL, 1863), eram especialmente destinadas a preparar oficiais inferiores com a indispensável instrução para o serviço dos corpos do Exército. A Instrução correspondia às seguintes aulas: leitura, caligrafia, doutrina cristã, as quatro operações matemáticas com números inteiros e frações (tanto ordinárias como decimais), metrologia, desenho linear, as principais disposições da legislação penal militar e os deveres do soldado, cabo de esquadra e sargento, em todas as circunstâncias de paz e de guerra.

---

<sup>50</sup> Já previstos no Decreto 3555: “Art. 3º Haverá, nos lugares em que forem convenientes, depositos especiaes de instrucção e de disciplina, para as diferentes armas do Exercito” (BRASIL 1866, p. 388).

Já nas Escolas Preparatórias, os estudos eram destinados ao ensino dos conhecimentos elementares, necessários para os Cursos Militares, bem como a instrução prática elementar às diferentes armas. O Curso Preparatório para a Escola Militar era composto então de três anos e a sua estrutura está posta na Figura 22:

Figura 22 - Plano de Estudos das Escolas Preparatórias – Decreto 5259/74

Plano de Estudos das Escolas Preparatórias - Decreto 5259 de 17 de Janeiro de 1874		
1º Ano	2º Ano	3º Ano
Gramática nacional, Geografia, Língua Francesa (gramática, leitura e tradução), Aritmética e Desenho linear.	Língua Vernácula; Língua Francesa (versão, temas e conversação), Língua Inglesa (gramática, leitura e tradução), História Antiga, Álgebra e Desenho Linear.	Estudos complementares da Língua Vernácula e da Língua Inglesa, História (do Brasil, da Idade Média, Moderna e Contemporânea), Geometria e Trigonometria Plana, Desenho Linear e Geometria Prática

Fonte: Brasil (1863, p. 37)

Sobre este programa, algumas observações no que se refere ao campo pedagógico das aulas são feitas nos artigos 17, 19 e 20 do já referido Decreto. Como exemplo, citamos a questão do método de ensino “simultâneo e individual” (BRASIL, 1874), onde o professor realizava um teste oral com questionamentos a respeito de diferentes pontos do assunto tratado e, assim, pudesse emitir um juízo de valor quanto ao comprometimento e, ao aproveitamento do aluno. Os artigos 19 e 20 (BRASIL, 1874, p. 37), tratavam das exceções em relação à Matemática, onde definiam que:

Art. 19. Em todas as aulas, excepto na de mathematicas, poderão os alumnos ser divididos em classes nunca menores de seis, nem maiores de doze, segundo os diversos grãos de instrução. [...]

Art. 20. O tempo para as aulas em geral será de duas a quatro horas. A última hora será sempre destinada aos exercícios e themes. § 1.º O tempo para as lições de mathematicas e de desenho linear não excederá de três horas.

À Escola Militar, por sua vez, era atribuída a instrução teórica e prática, necessária aos oficiais e praças do Exército que, depois de habilitados na Escola

Preparatória, se propuserem a adquirir os conhecimentos relativos às três armas do Exército e aos Corpos do Estado-Maior de primeira classe e de engenheiros.

O plano de estudos sugerido pelo Decreto 5259, a formação dos oficiais na Escola Militar compreenderia um programa de cinco anos, dependendo da Arma de cada um dos oficiais<sup>51</sup>. A organização dos planos de estudo, especialmente aqueles que compreendiam a matemática é mostrada na Figura 23.

Figura 23 - Plano de Estudos para Oficiais Engenheiros Militares – Decreto 5259/74

Plano de Estudos para Oficiais Engenheiros Militares - Decreto 5259 de 17 de janeiro de 1874				
1º Ano	2º Ano	3º Ano	4º Ano	5º Ano
<p>Álgebra Superior, Geometria Analítica, Cálculo Diferencial e Integral.</p> <p>Física experimental (envolvendo Elementos de Telegrafia e Eletricidade) e Química inorgânica.</p> <p>Elementos de Topografia e Reconhecimento de terrenos.</p>	<p>Tática e Estratégia;</p> <p>Direito e Análise da Constituição do Império.</p> <p>Desenho e Geometria Descritiva.</p>	<p>Conceitos de Mecânica e Balística.</p> <p>Tecnologia Militar, Noções elementares de Mineralogia, Geologia e Botânica, Artilharia, Minas Militares.</p> <p>Desenho de Fortificações, e máquinas e guerra</p>	<p>Trigonometria esférica, Óptica, Astronomia e Geodésia;</p> <p>Administração Militar, Noções de Economia Política e Direito Administrativo;</p> <p>Desenho Geográfico e Redução Em Escala.</p>	<p>Construções Cíveis e Militares, Hidráulica, Estradas Ordinárias e Vias Férreas.</p> <p>Mineralogia, Geologia, Botânica, e Noções Fundamentais de Química Orgânica.</p> <p>Noções de Arquitetura Civil e Militar, Execução de Projetos.</p>

Fonte: Brasil (1874, p. 40)

O ensino teórico, organizado pela Congregação da Escola, compreendia quatro diferentes possibilidades de formação: Infantaria e Cavalaria, Artilharia, Estado-Maior de 1ª Classe e Engenharia Militar. A Figura 24 mostra os programas de formação e itinerários de cada um dos desses Cursos:

<sup>51</sup> Um maior detalhamento sobre este assunto poderá ser observado mais adiante neste trabalho.

Figura 24 - Das carreiras Militares conforme o Decreto 5259

Carreira ↓	Currículo dos Cursos de Formação - Decreto 5259 de 17 de janeiro de 1874				
	Escola Militar				
	1º ano	2º ano	3º ano	4º ano	5º ano
Oficiais de Infantaria e Cavalaria <sup>1</sup>	x	x	-	-	-
Oficiais de Artilharia <sup>2</sup>	x	x	x	-	-
Oficiais do Estado Maior e de Primeira Classe <sup>3</sup>	x	x	x	x	-
Oficiais Engenheiros Militares <sup>4</sup>	x	x	x	x	x

**Obs.:** <sup>1</sup> Currículo estabelecido pelo Decreto 5259 - art 36 - § 1º; <sup>2</sup> Currículo estabelecido pelo Decreto 5259 - art 36 - § 2º; <sup>3</sup> Currículo estabelecido pelo Decreto 5259 - art 36 - § 3º; <sup>4</sup> Currículo estabelecido pelo Decreto 5259 - art 36 - § 4º;

Fonte: Brasil (1874, p. 41)

O artigo 37 do Decreto 5259 previa, ainda, situações especiais para aproveitamento dos alunos. Dentre os concluintes do Curso de Infantaria e Cavalaria, aqueles indicados pela Congregação da Escola, poderiam matricular-se no Curso de Artilharia. Da mesma forma, aqueles concluintes do Curso de Artilharia que demonstrassem habilidades e desempenho escolar poderiam matricular-se no Curso de Oficial do Estado-Maior de primeira classe e, por fim, destes, os que fossem designados pelo mesmo Conselho poderiam tornar-se Engenheiros Militares.

As decisões percebidas no Decreto 5259 vêm de encontro, basicamente, ao pensamento corrente na época, sobretudo aos Ministros da Guerra que se sucederam. Ainda sobre este assunto, os estudos de Motta (2001, p. 138) relatam que

Àquela altura todos podiam sentir que a ideia de entregar ao Exército os estudos de engenharia já dera os frutos que podia dar, e persistir nela seria um erro imperdoável. Ideia que se impusera ante às condições do País ao tempo de D. João VI, agora não mais atendia às exigências do progresso cultural e técnico.

Dessa forma, fecha-se o ciclo da subordinação ao Ministério da Guerra na Escola Central que, a partir de então, passa a se chamar Escola Politécnica e seria especialista nas questões da Engenharia Civil. Por outro lado, a Escola da Praia Vermelha seria a responsável pelos estudos relativos à Engenharia Militar. O encerramento desta etapa de vida da Escola Central foi referendado, como já citado, pelo artigo 23 do Decreto 5259 e, através do Relatório do Ministro da Guerra de 1874, pelas seguintes palavras:

O artigo 263 do regulamento aprovado pelo Decreto 5259, de 17 de janeiro deste ano, transferiu para o Ministério do Império a Escola Central, na conformidade da autorização contida na Lei 2261, de 24 de maio de 1873. Comunicou-se ao referido Ministério, em 3 do mesmo mês, que passava a ficar sob sua jurisdição a dita escola, cujo estado, quer em relação a pessoal docente e administrativo, quer no que respeita ao seu material, era o mais lisonjeiro, achando-se bem montados e na melhor ordem os gabinetes de Física, Química, Mineralogia e Geologia, bem provida a Biblioteca dos mais importantes e recentes livros, e o edifício em excelentes condições de solidez e asseio.

Assim, a instituição que foi berço de nomes como o Duque de Caxias, Jerônimo Coelho, André Rebouças, Benjamin Constant, Floriano Peixoto, entre outros, encerrava as suas mais de seis décadas de trabalho educacional sob o controle do Ministério da Guerra e que, entre erros e acertos, colaborou decisivamente na formação de engenheiros e oficiais que foram protagonistas na história que naquele momento era escrita.

Após a Guerra do Paraguai, aponta Motta (2001), um Exército diferente começava a se moldar. Vitoriosos da campanha e elevados a condição de personagens de relevância nacional, os oficiais começavam a envolver-se com questões sociais e políticas. Ao retornarem dos campos de batalhas conscientes de sua força e confrontar-se com os padeceres do Brasil à época, a inconformidade tomou conta e acabou por tornar-se fator importante na estrutura que mais tarde viria a culminar com a Proclamação da República.

Desse inconformismo nos campos técnico profissional e filosófico-político, sucederam-se frustrações como, por exemplo, no que se refere ao primeiro, a falta de efetivos e de medidas que pudessem atualizá-los. Afora ações isoladas, indica Motta (2001), tais como a reforma na Lei do Recrutamento (que encerrava o recrutamento forçado) e a Lei do Ensino de 1874. Ao passo que o descontentamento aumentava nos quartéis, outras ações eram tomadas, como se pode ver, a Revista do Exército Brasileiro, que teve o seu primeiro número em 1882, trazendo em seu editorial de apresentação temas como “a organização e a administração militares, [...] a tática e a estratégia, [...] a Artilharia e o armamento [...]” (MOTTA, 2001, p. 148).

Ainda dentro deste pensamento de que “os rumos do Exército deveriam ser revistos” a investigação de Motta (2001), aponta para a criação de um periódico técnico chamado “Revista do Exército Brasileiro” (1882), no qual “jovens oficiais” estudiosos e preocupados com as questões militares

começavam a dar um tom acadêmico/científico para as suas ideias, trazendo à discussão possíveis soluções para os problemas da época, ou então, difundindo experiências de corporações existentes em outros países. Para a edição de estreia deste periódico, destaca o autor, os assuntos que seriam tratados dali em diante seriam: “1) a organização e a administração militares; 2) a tática e a estratégia; 3) a ciência e o engenheiro militar; 4) a Artilharia e o armamento; 5) a História Militar; 6) a Geografia e a Estatística” (MOTTA, 2001, p. 148).

Pouco antes desse movimento, em 1881, houve uma pequena alteração no regulamento dos Cursos das Armas Infantaria e Cavalaria e Artilharia. O Decreto 8205, de 30 de julho de 1881, era uma tentativa de serenar as críticas que sofria a reforma de 1874. O referido Decreto, além de mudar a designação da Escola de Infantaria e Cavalaria da Província do Rio Grande do Sul, que passou a denominar-se Escola Militar da Província do Rio Grande do Sul, em seu artigo 5º adicionava, de maneira provisória, mais um ano de estudo resultando em um novo desenho curricular para o seu terceiro ano.

Assim, o terceiro ano de estudo das Escolas Militares constava de duas cadeiras mais uma aula de desenho. Desta forma, a primeira cadeira tratava dos seguintes assuntos: conceitos de mecânica racional (e suas aplicações às máquinas) e balística. A segunda cadeira abrangia os conhecimentos de tecnologia militar (desenvolvimento de telegrafia e iluminação elétrica na defesa das praças), noções elementares de mineralogia, geologia e botânica, Artilharia e minas militares. Por fim, a aula de desenho envolvia fortificações, e máquinas de guerra.

É importante destacar que, embora o referido Decreto não deixe claro, as observações de Motta (2001) acerca das críticas em relação ao arranjo de estudos de 1874 deixam pistas a respeito do que poderia ser a formatação deste. Destaca o autor que

A Álgebra Superior deveria sair da primeira cadeira do primeiro ano, para melhor desenvolvimento da Analítica e do Cálculo; a química Inorgânica deveria constituir cadeira à parte, não jungida à Física; a Mineralogia e a Geologia precisavam separar-se da Botânica e da Zoologia (MOTTA, 2001, p. 168).

Esses apontamentos citados pelo autor eram oriundos de “ambos os lados”, ou seja, tanto daqueles que ansiavam um ensino teórico ampliado e aprofundado, quanto daqueles que percebiam nesse um aprofundamento

demasiado. Ora, seja pela visão de um lado ou de outro, é fato que este decreto tinha também a intenção de devolver ao Rio Grande do Sul a condição de formar os seus corpos de Artilharia, e aos aprovados plenamente neste curso, que corresponderia à conclusão do terceiro ano de estudos, seria ofertada a possibilidade de, ao migrar para a Escola Militar da Corte, concluir os seus estudos para o grau de Oficial de Estado Maior de 1ª Classe<sup>52</sup>.

Ainda a observar que nesta nova organização, conforme os artigos 12 e 13 do já referido decreto, a formação de Infantaria e Cavalaria corresponderia ao primeiro ano de estudos, e aos concluintes dos três anos de formação seria concedido o título de Oficial de Artilharia.

No entanto, mesmo após essa pequena reforma, o ensino nas Escolas Militares continuava gerando críticas e acalorados debates (se é que algum dia agradou) daqueles envolvidos com a arte militar. Nos anos que se seguiram, seja nos relatórios oficiais, seja na Revista do Exército Brasileiro, eram expressas as preocupações em relação a este assunto. Em 1883, por meio do periódico supracitado, observa o artigo do Capitão A. Corrêa:

Relativamente pequeno como é o nosso exército, precisa de uma educação Militar perfeita e solida para que possa corresponder proficuamente ao almejado desideractum. O oficial deveria sahir da escola prompto a entrar em campanha sabendo tudo quanto diz respeito aos complexos problemas da guerra, familiarizado com essas pequeninas cousas de detalhe, que parecendo insignificantes sam de grande alcance moral e material, nada devia ignorar e no emtanto assim não é (CORRÊA, 1883, p. 33).

Corroborando com as ideias de Correa (1883), em 1886, o então Ministro da Guerra João José de Oliveira Junqueira Júnior, observando que “a não ser alguns privilegiados, poucos são os que em um só ano conseguem ser aprovados em todas as matérias” (MOTTA, 2001, p.168). No mesmo sentido, em 1887, Joaquim Delfino Ribeiro da Luz, também Ministro da Guerra, segundo sucessor de Junqueira Júnior, relata que

Em quase todos os relatórios [...], nas últimas legislaturas, o Governo tem ponderado a conveniência de ser reformado o regulamento de 1874, cujas disposições, na maior parte, carecem modificações, sobretudo na parte técnica do ensino. A reforma das escolas militares

---

<sup>52</sup> Artigo 14 do Decreto 8205;



é medida que não pode ser por mais tempo adiada (MOTTA, 2001, p. 168).

Assim, em 09 de março de 1889, é publicado o Decreto 10203, que reorganiza o ensino militar em todas as suas instâncias, estabelecendo as instituições e seus níveis de instrução, bem como os seus programas de estudos. Primeiramente, o Decreto 10203 apontava para a seguinte organização em seu artigo 1º:

A instrucção militar theorica e pratica será prestada aos officiaes e praças do Exército nos seguintes estabelecimentos: 1.º Depositos de instrucção; 2.º Escolas regirntaes; 3.º Escolas militares, compehendendo cada uma dellas curso preparatorio; 4.º Escola superior de guerra, com os cursos de Artilharia, estado-maior e engenharia militar; 5.º Escolas tacticas de tiro, para a pratica do tiro e da tactica das tres armas, com regulamentos especiaes (BRASIL, 1889, p. 259).

Além dessa nova organização, que incluiria na hierarquia as Escolas de Tiro e previa a instrução dos menores militares nas companhias de aprendizes militares e companhias dos arsenais de guerra, o Decreto 10203 ordenava sobre os planos de estudos de cada uma das instituições citadas anteriormente. Dessa forma, as escolas regimentais seguiam ofertando a instrução primária básica, acrescentando-se ao texto a instrução elementar de soldado e a especial a cada uma das armas correspondente às diferentes graduações, até a de oficiais inferiores. O artigo 3º do referido Decreto determinava quais os estudos deveriam ser compreendidos

Para todas as armas: leitura, calligraphia, doutrina christã, as quatro operações sobre números inteiros e fracções; tanto ordinárias como decimaes, metrologia, abnegação desenho linear; noções muito elementares dos phenomenos phsicos e chimicos mais comuns, composição da polvora de guerra, explicação elementar de seus efeitos e do movimento dos projectis; ligeiras noções sobre hygiene militar, fastos das nossa história militar, exemplos notáveis de disciplina, valor, abnegação e patriotismo; deveres do soldado, do cabo de esquadra, do forriell e do sargento, em todas as circumstancias do serviço de paz e guerra (BRASIL, 1889, p. 260).

Dentro dessa nova organização, as Escolas Militares, em número de três<sup>53</sup>, se dedicavam aos cursos preparatórios e de Infantaria e Cavalaria, que neste arranjo possuíam, respectivamente, uma duração de dois e de três anos.

---

<sup>53</sup> Localizadas no Rio de Janeiro, Porto Alegre e Fortaleza (BRASIL 1889, p.262)

A divisão do plano de estudos no Curso Preparatório (BRASIL, 1889) está posta na Figura 25:

Figura 25 - Plano de Estudos do Curso Preparatório – Decreto 10203/89

<b>Plano de Estudos do Curso Preparatório - Decreto 10203 de 09 de março de 1889</b>		
<b>1º Ano</b>	<b>2º Ano</b>	<b>3º Ano</b>
<p>Aritmética (estudo completo), Álgebra (noções preliminares); Operações algébricas; Resolução das equações do 1º e 2º graus; Análise indeterminada do 1º grau;</p> <p>Gramática da Língua Portuguesa;</p> <p>Gramática: leitura e versão da Língua Francesa;</p> <p>Língua Inglesa: gramática, leitura e tradução;</p> <p>Desenho linear e geometria prática.</p>	<p>Fundamentos de Geometria e trigonometria retilínea; Primeiras noções sobre as seções cônicas, a conchóide, a espiral, a cissóide, a cicloide, a hélice e o caracol de Pascal;</p> <p>2ª aula – Estudo completo da Língua Portuguesa e noções de Literatura;</p> <p>3ª aula – versão, temas e conversação em Língua Francesa.</p> <p>4ª aula – História Antiga e, da Idade Média;</p> <p>5ª aula – Geografia.</p>	<p>Resolução das equações do 3º e 4º graus e equações binomiais; resolução numérica das equações; séries (noções gerais); progressões (continuação). Geometria descritiva (noções elementares); problemas sobre a reta e o plano; classificação das superfícies; noções sobre tangente e plano tangente;</p> <p>História Moderna, Contemporânea e Pátria;</p> <p>Geografia;</p> <p>Noções de Ciências Físicas e Naturais;</p> <p>Topografia;.</p>

Fonte: Brasil (1889, p. 262-263)

O Curso de Infantaria e Cavalaria, em seus dois anos de duração era igualmente dividido em duas cadeiras e uma aula. Para ingressar nessa formação, o Curso Preparatório não se configurava como pré-requisito, podendo ser admitidos, conforme o artigo 48 do Decreto 10203:

Si, porém, apresentarem a carta de bacharel pelo collegio de Pedro II, ou certificados authenticos de approvações obtidas em qualquer das faculdades ou escolas superiores do Imperio, na Inspectoria Geral da instrucção publica ou nas comissões provinciaes de que trata o Decreto 5429 de 2 de outubro de 1873, serão dispensados de fazer novos exames (BRASIL, 1889, p. 268).

Desta forma, o currículo do Curso de Infantaria e Cavalaria, com suas duas cadeiras e uma aula em cada ano, possuía a distribuição exposta na Figura 26:

Figura 26 - Plano de Estudos da Infantaria e Cavalaria – Decreto 10203/89

<b>Plano de Estudos da Infantaria e Cavalaria - Decreto 10203 de 09 de março de 1889</b>	
<b>1º Ano</b>	<b>2º Ano</b>
Geometria Geral; Noções de Mecânica; Balística Elementar;  Curso completo de Física; Meteorologia. Aula de Geometria Descritiva.	Tática, Estratégia e Análise Militar;  Direito, Hipologia e Higiene alimentar.

Fonte: Brasil (1889, p. 263)

Outra das inovações advindas do Decreto 10203 era a formação do agrimensor (previsto no artigo 25) destinada aos alunos que obtivessem aprovação em todas as aulas do Curso Preparatório, sendo plena em pelo menos na 1ª e na 5ª aulas dos primeiro e segundo anos e, também, na 1ª, 3ª e 5ª aulas do terceiro ano, bem como nos exercícios práticos de Topografia. Para o ingresso no Curso de Artilharia, na Escola Superior de Guerra, era exigido que os alunos, além do já necessário ao agrimensor, tivessem ainda aprovação plena durante todo o Curso de Infantaria e Cavalaria, além de boa conduta civil e militar.

Ainda, referencia-se que é percebida neste documento a divisão das aulas e/ou cadeiras do Curso Preparatório e, do Curso de Infantaria e Cavalaria em seções. Estas seções foram uma forma utilizada para agrupar as aulas de assuntos afins em um mesmo grupo ou “área do conhecimento”. A Figura 27, a seguir, mostra essa divisão:

Figura 27 - Agrupamento das Seções dos Cursos Preparatórios e, de Infantaria e Cavalaria

Curso ↓	Seção →	Aulas e/ou Cadeiras e suas respectivas Seções - Decreto 10203		
		1ª Seção	2ª Seção	3ª Seção
<b>Curso Preparatório<sup>1</sup></b>		<b>Ciências:</b> 1ª Aula do 1º ano; 1ª, 4ª e 5ª Aulas do 2º ano; 1ª, 2ª, 3ª e 4ª Aulas do 3º ano.	<b>Línguas:</b> 2ª, 3ª e 4ª Aulas do 1º ano; 2ª e 3ª Aulas do 2º ano.	<b>Trabalhos Gráficos:</b> 5ª Aula do 1º e, do 3º ano.
<b>Oficiais de Infantaria e Cavalaria<sup>1</sup></b>		<b>Matemática e Ciências:</b> 1ª Cadeira do 1º ano e, do 2º ano.	<b>Ciências Físicas:</b> 2ª Cadeira do 1º ano.	<b>Ciências Sociais:</b> 2ª Cadeira do 2º ano.
<b>Obs.:</b> 1 Seções estabelecidas pelo art. 27; 2 Seções estabelecidas pelo art. 28;				

Fonte: Brasil (1889, p. 264)

A Escola Superior de Guerra (ESG), instituição que surgiu nesta reforma, tinha a responsabilidade de ofertar a instrução teórica e prática aos oficiais que, “por se haverem mais distinguido nas Escolas Militares, tiverem sido propostos [...], para estudar os cursos superiores” (BRASIL, 1889, p. 296). Dessa forma, as vagas eram preenchidas pelos “melhores alunos” das Escolas Militares, conforme já referido anteriormente.

Na ESG eram ministrados dois Cursos: o Curso de Artilharia e o Curso de Estado-Maior e Engenharia Militar. Quanto aos itinerários formativos, estes eram assim formatados: o 1º e 2º anos da Escola Superior de Guerra constituíam o curso de Artilharia; este curso, mais o 3º e o 4º anos constituíam o de Curso de Oficiais do Estado-Maior e Engenharia Militar. Além disso, cada um desses cursos se somava ao de Infantaria e Cavalaria, anteriormente estudado pelos alunos nas Escolas Militares. Em relação ao plano de estudos, a Figura 28 mostra a divisão:

Figura 28 - Plano de Estudos da ESG – Decreto 10203/89

Plano de Estudos da Escola Superior de Guerra - Decreto 10203 de 09 de março de 1889			
1º Ano	2º Ano	3º Ano	4º Ano
<p>Cálculo Diferencial e Integral. Noções gerais sobre o Cálculo das diferenças finitas e das variações;</p> <p>Química Geral, Orgânica e Inorgânica. Metalurgia;</p> <p>Desenho.</p>	<p>Mecânica Geral e suas aplicações às Máquinas e à Balística.</p> <p>Artilharia (envolvendo o estudo e o processo de fabricação) e Tecnologias Militares;</p> <p>Desenho.</p>	<p>Astronomia (precedida da trigonometria esférica);</p> <p>Mineralogia e Geologia.</p> <p>Desenho.</p>	<p>Construções civis e militares; Hidráulica; Estradas e Vias Férreas; Biologia; Botânica e Zoologia;</p> <p>Direito Administrativo, Economia Política;</p> <p>Desenho.</p>

Fonte: Brasil (1889, p. 296-297)

Da mesma forma que o Curso Preparatório e de Infantaria e Cavalaria, aqueles ministrados na ESG também foram divididos em Seções<sup>54</sup>. Assim, distribuídas em um total de cinco, a Primeira Seção, de Matemática, era formada pela 1ª cadeira do 1º, do 2º e do 3º anos; a Segunda Seção, de Ciências Militares, era formada pela 2ª cadeira do 2º ano e, pela 1ª cadeira do 4º ano; a Terceira Seção, de Ciências Naturais, era formada pela 2ª Cadeira do 1º ano, pela 2ª Cadeira do 3º ano e, ainda pela 2ª Cadeira do 4º ano; a Quarta Seção, das Ciências Sociais, era formada pela 3ª Cadeira do 4º ano; e, por fim, a Quinta seção, de Trabalhos Gráficos, era formada pelas aulas de Desenho dos quatro anos do Curso.

Por fim, sobre o referido Decreto, ainda se refere o retorno, via artigo 288 do mesmo, da possibilidade de nomearem-se ao final do Curso da ESG os Bacharéis em Matemáticas e Ciências Físicas:

Si tiverem aprovação em latim, philosophia e rhetorica, pela instrução publica da Córte, ou apresentarem carta de bacharel em lettras pelo Collegio de Pedro II ou mostrarem-se habilitados de conformidade com o Decreto n.5429 de 2 de Outubro de 1873 (BRASIL, 1889, p. 305).

A parte prática dos cursos, embora não esmiuçada aqui, por não ser o objetivo maior deste trabalho, aparece citada minuciosamente no Decreto 10203, sobretudo em seus artigos 3 - § 2º, 3 e 235, respectivamente, para cada uma

<sup>54</sup> Artigo 233 do Decreto 10203, de 09 de março de 1889.

das Instituições e formações aqui já mencionadas. Embora sempre houvesse nos decretos anteriores a mesma menção, sabia-se aqui das divergências existentes em torno dessa questão tanto dentro dos quartéis quanto nos gabinetes governamentais.

No entanto, embora se tenha buscado contemplar todos os anseios das instituições militares, após o evento da Guerra do Paraguai, como já citado, um novo Exército surgiu. Os oficiais estavam dispostos a buscar e exercer o seu protagonismo no cenário sociopolítico, dadas as condições que, segundo os mesmos, eram de “esquecimento e abandono” por parte do Governo, o qual já não reunia mais as condições necessárias de representatividade perante os quartéis que, naquele momento histórico, faziam parte de uma “classe média, ardendo por participar nas tarefas e lutas que abrissem caminho para o progresso do país” (MOTTA, 2001, p. 199).

Pois bem, esse quadro não ocorre, conforme os estudos de Motta (2001), ao acaso. O autor chama a atenção para a atuação de alguns dos alunos, lentes e instrutores na questão abolicionista, na questão militar e, ao fim, na Proclamação da República. Dessa forma, prossegue o autor, um trabalho histórico sobre a instrução militar e suas Instituições “não seria concebível passar ao largo dos fatos político-militares de que ela foi parte” (2001, p. 199).

No entanto, é mister observar que a presença de ideias políticas nas instituições militares no período em estudo não floresce de repente. Medeiros (1992) chama a atenção para o caso do (no evento da Proclamação da República) Major Solon<sup>55</sup>, o qual estudou, em 1857, na Escola Militar de Porto Alegre, sendo transferido em 1859 para a Escola Central e, em 1860 é desligado desta e enviado de volta ao Rio Grande do Sul por assumir-se “francamente republicano”. O autor ainda destaca o papel do professor Joaquim Salles Torres Homem, reconhecido no papel de “fervoroso abolicionista”.

Ao mesmo tempo em que as ideias republicanas fervilhavam, as ideias positivistas ganhavam espaço e, sobretudo no “campo filosófico vários professores se tornaram adeptos já em 1880” (MEDEIROS, 1992, p. 54). Deste modo, a influência das ideias *Comteanas* ganhava adeptos entre os militares e

---

<sup>55</sup> Frederico Solon de Sampaio Ribeiro.

entre estes, “a ideia republicana nascia principalmente do positivismo” (MEDEIROS, 1992, p. 54).

A primeira grande questão de ordem dentro da Escola Militar, sobretudo a da Praia Vermelha, foi a “Campanha Abolicionista”, que segundo Motta (2001, p. 200) foi um movimento “organizado e desenvolveu-se no País entre 1880 e 1888”, saindo do parlamento e tomando conta de amplas esferas da população, ganhando ampla repercussão na imprensa e resultando em comícios e passeatas.

Também, nesse mesmo espectro, Motta (2001) destaca a criação de “sociedades” que lutaram pela causa abolicionista, como por exemplo, a Sociedade Brasileira contra a Escravidão, fundada em 1880 por Joaquim Nabuco e, após, em 1883, a Confederação Abolicionista<sup>56</sup>, a qual abarcaria diversas dessas “sociedades”, incluindo a “Libertadora da Escola Militar<sup>57</sup>”, o propósito destas sociedades era “manter vivo o movimento, aliciando ativistas, organizando a participação do povo nas conferências, comícios e passeatas” (MOTTA, 2001, p. 200).

A função da Libertadora da Escola Militar era, além dessas tarefas, de acordo com Motta (2001, p. 201) proteger nos comícios “os oradores contra a sanha dos senhores de escravos” e dar vitalidade às inúmeras manifestações que ocorriam através dos mais diversos meios: passeatas, escritos em livros, jornais e panfletos. Observa o autor que atos semelhantes eram percebidos no Rio Grande do Sul, gerando repercussão no centro do País a prisão de algumas dezenas de alunos da Escola Militar de Porto Alegre por supostamente terem enviado um telegrama a Joaquim Nabuco.

Como já comentado, não é o nosso objetivo uma reflexão aprofundada sobre estes temas, no entanto, não se pode deixar que eles aparecessem à margem de algum relato, em virtude da relevância que os mesmos possuem no fechamento da periodização deste trabalho. Assim, outro ponto nevrálgico que veio a culminar com o dia 15 de novembro de 1889, foi a “questão militar”.

Os fatos listados, sobretudo o “esquecimento e o abandono” por parte do Império, foram fatores preponderantes na organização e na articulação de movimentos dentro das Escolas Militares da Praia Vermelha e de Porto Alegre

---

<sup>56</sup> Criada sob a inspiração de Joaquim Nabuco (MOTTA, 2001, p. 200)

<sup>57</sup> Sob a direção do aluno-Tenente Manuel Joaquim Pedro (MOTTA, 2001, p. 200).

pela defesa dos interesses dos militares. Motta (2001) e Medeiros (1992) atribuem à esta inquietação uma “modalidade” daquilo que viria a ser a Proclamação da República.

É fato que os personagens envolvidos neste movimento (principalmente Deodoro da Fonseca e o Visconde de Pelotas) vieram, mais tarde, a se tornar os nomes mais comentados na Proclamação da República e, obviamente, esse conhecido desfecho não ocorreu por obra do acaso, tampouco por uma ação isolada dos personagens citados.

Conforme nos relata Motta (2001), é mister observar que, essa mobilização já era vista pelo menos 10 anos antes em registros da época, os quais apontavam para a existência do “Clube Republicano da Escola Militar” no qual supostamente havia reuniões secretas para difundir as ideias republicanas. Embora um dos conhecidos professores da escola, Alfredo Moreira Pinto<sup>58</sup>, tenha sido um dos subscritores do “Manifesto Republicano”<sup>59</sup> a maior inspiração aos alunos da Praia Vermelha foi Benjamin Constant, pois ele foi o professor que

A partir de 1872, semeou sem alaridos e sem pressas, sem talvez mesmo imaginar quanto a sua palavra iria repercutir no ânimo dos discípulos, dando-lhes, mais tarde, a envergadura de propagandistas e de organizadores da ação republicana (MOTTA, 2001, p. 204).

Ao mesmo tempo, descreve Medeiros (1992), em Porto Alegre um clima de entrecchoque de ideias tomava conta da esfera social e, não raro, provocavam acaloradas discussões. Reuniões, manifestos e outros meios disponíveis eram utilizados para a campanha republicana. Entre estes processos, surge um manifesto de adesão aos republicanos da Província do Rio Grande do Sul, assinado por Benjamin Constant e Deodoro da Fonseca. Neste documento, eram manifestados os pontos de vista do oficialato quanto às normas vigentes e em defesa dos seus direitos.

Ainda argumenta Medeiros (1992) que, embora a escassa informação sobre o ativismo de outros professores no movimento republicano, pode-se destacar, ainda, o Comandante da Escola Tenente-coronel José Simeão de Oliveira, recolhido à Corte em companhia de Deodoro da Fonseca, fazendo parte do grupo que participou das reuniões dos Oficiais.

---

<sup>58</sup> Professor de História do Curso Preparatório (MOTTA, 2001, p. 203).

<sup>59</sup> Documento divulgado em 1870 (MOTTA, 2001, p. 203).



Dessa forma, descreve Motta (2001), ocorre a 23 de outubro um dos fatos relevantes pré-proclamação: o discurso de Benjamin Constant na Escola da Praia Vermelha, na presença de militares chilenos e, pasmem, do Ministro da Guerra! Prossegue o autor, afirmando que

Nesse discurso, ao lado de considerações largas sobre o papel dos Exércitos sul-americanos, Benjamin Constant ousou referências à Questão Militar e críticas ao governo. Foi um desafio. E, para maior repercussão daquelas palavras insólitas, os aplausos dos alunos subliminaram-nas estrepitosamente (MOTTA, 2001, p. 204).

Este discurso serviu, aponta Motta (2001), como o estopim para uma série de apoios recebidos em sequência dados pelos alunos da ESG, Oficiais de Artilharia e Cavalaria e, por fim, o pacto da Praia Vermelha que oferece a Benjamin Constant, apoio incondicional. Neste interim, até o dia 15 de novembro, diversos desdobramentos vão ocorrendo, tais como a conquista de Deodoro para a chefia do movimento, as reuniões com oficiais, a articulação com os civis, a sessão do Clube Militar, e, por fim, o 15 de novembro (MOTTA 2001, p. 205).

Logicamente, ao concluir esta etapa do presente trabalho, merece destaque a ideia de que não se busca em momento algum a exaltação de algum personagem ou instituição, tampouco de algum fato histórico. A intenção primeira, e diria única da narrativa, é mostrar o entrelaçamento da cena política do período com as mudanças ocorridas na(s) Escola(s) Militar(es) ao longo do período em análise o que, segundo Motta (2001, p.199) “não seria concebível passar ao largo dos fatos político-militares de que ela foi parte<sup>60</sup>”.

O argumento que nos oferece o autor, de compreender e estabelecer o fluxo histórico em que estas instituições estavam situadas e como as mesmas contribuíram para os acontecimentos aqui narrados, nos remete a observar um aspecto mais amplo no que diz respeito apenas às mudanças curriculares ocorridas no âmbito da Matemática. Foi possível observar muitas outras nuances por trás das alterações promovidas uma após a outra, e em determinado momento, pode-se perceber, inclusive, o ensino da Matemática como centro das discussões.

---

<sup>60</sup> Aqui o autor refere-se exclusivamente à Escola da Praia Vermelha. De acordo com as nossas pesquisas, utilizamos o termo Escolas (no plural), pois é nítido o envolvimento da Escola de Porto Alegre no movimento.

Como já referido, o propósito desta investigação é o ensino da matemática na instrução militar brasileira oitocentista a partir da análise de obras didáticas o que agora, fundamentado pelo fluxo histórico, suas implicações e deliberações diretas e indiretas nos planos de estudo ao longo dos períodos analisados, será desenvolvido na sequência deste trabalho.

## O ENSINO DA MATEMÁTICA NA INSTRUÇÃO MILITAR BRASILEIRA

Ao criar, via Carta-Régia, em 4 de dezembro de 1810 a Academia Militar na Corte e Cidade do Rio de Janeiro, Dom João VI, Príncipe Regente, dava início a uma nova era na instrução militar brasileira e, sobretudo, no Ensino da Matemática. Esse novo momento foi de tal forma constituído que no documento citado eram citadas, além da ordem dos conteúdos (com citação anterior neste trabalho), as obras de referência de cada uma das cadeiras a ser ministradas conforme trecho a seguir:

O Lente do primeiro anno ensinará Arithmetica e Algebra até equações do terceiro e quarto gráo, a Geometria, a Trigonometria Rectilínea, dando também as primeiras noções de Espherica. E como os estudantes serão admitidos sem saber as quatro primeiras operações de Arithmetica, o Lente ensinará logo a Algebra, cingindo-se quanto poder, ao methodo do celebre Euler<sup>61</sup> nos seus excellentes elementos da mesma sciencia, debaixo de cujos principios e da arithmetica e Álgebra de La Croix, formará o compendio para o seu \*curso, e depois explicará a excellente Geometria e trigonometria rectilínea de Le Gendre, dando tambem as primeiras noções da sua trigonometria espherica ; abrangendo assim um principio de curso mathematico muito interessamte, no qual procurará fazer entender aos seus alumnos toda a belleza e extensão do calculo algebrico nas potencias, nas quantidades exponentivas, nos logarithmos e calculos de annuidades, assim como familiarisal-os com as formulas de trigonometria, de que lhes mostrará as suas vastas applicações (BRASIL, 1810, p. 234-235).

Nesse capítulo será analisado o desenrolar do ensino da matemática na instrução militar brasileira oitocentista a partir da análise de obras didáticas, o qual é objeto de nossa pesquisa. Ao mesmo tempo em que são realizadas as análises, também se busca a problematização do assunto, sobretudo no que se refere às cadeiras de Álgebra, Trigonometria e Geometria. Para isso foram analisados os respectivos Tratados Elementares: *Elementos D'Algebra* (LACROIX, 1811), *Tratado de Trigonometria* (LEGENDRE, 1809a) e os *Elementos de Geometria* (LEGENDRE, 1809a) que à época eram utilizados como “livros didáticos”. As obras referidas, obtidas do acervo da Biblioteca Nacional, são, por óbvio, as versões traduzidas para o tratado da Língua Portuguesa vigente à época. Destaca-se esse ponto devido, principalmente, às

---

<sup>61</sup> Leonhard Euler (1707 – 1783), nascido na Basileia, Suíça, publicou mais de 500 obras, as quais reverberaram nas publicações da Academia de São Peterburgo, onde foi docente, por mais de 50 anos após a sua morte (BOYER, 1989)

eventuais comparações de grafia de algumas palavras que poderão ser visualizadas ora em citações, ora em imagens ou quadros.

Como suporte teórico para as análises e reflexões serão utilizadas por sustentação as obras de Schubring (2003) - *Análise Histórica de Livros de Matemática*, Boyer (1989) - *A História da Matemática* e, Valente (2020) - *Uma História da Matemática Escolar no Brasil (1730-1930)*. É necessário destacar que a nossa pesquisa não observou mudanças nos conteúdos ao longo do período estudado, o que implica apenas nas alterações advindas dos planos de estudos, onde ora uma das cadeiras aparece em um dos anos da formação dos oficiais, ora em outro, sem, no entanto, e como já citado implicar em alterações naquilo que era ensinado.

## 5.1 A MATEMÁTICA DA INSTRUÇÃO MILITAR BRASILEIRA

Pensando em uma melhor formação para o oficialato brasileiro, as obras utilizadas e citadas na Carta Lei de 1810 não foram escolhidas a esmo por quem elaborou o documento, Rodrigo de Souza Coutinho. O cenário do conhecimento científico do Brasil colônia era descrito como quase nulo, tendo a sua população composta basicamente por “escravos divididos entre índios e negros analfabetos, segmentos sociais que nunca haviam ido a uma escola para aprender os conceitos básicos da ciência da época” (SOUSA; ROCHA, 2017, p. 145).

Os autores seguem refletindo acerca do quadro de insegurança que isso trazia à recém-chegada Coroa Portuguesa ao Brasil, pois entre aqueles brasileiros que possuíam alguma formação escolar, parcela significativa havia buscado essa formação em Portugal, o que pintava um quadro de urgência absoluta na tomada de providências em relação a essa questão.

Além dos conhecimentos militares, os estudos de Souza e Rocha (2017) observam que os quadros dos Oficiais do Exército Brasileiro necessitariam de noções das ciências, como Matemática, Física, Química, Topografia, Mecânica e Desenho. Em virtude do panorama colonial instalado no Brasil, não havia, sob a ótica de D. João VI, instituições de ensino capazes de suprir essa necessidade, pois as obras de referência eram todas francesas. Naquele início de século XIX,

a França era a nação europeia mais avançada nos estudos matemáticos e nos assuntos de guerra. Neste mesmo sentido, Silva (2011, p.12), relata que

Os primeiros livros de Matemática, com conteúdos de cálculo e Geometria Analítica, escritos na França visavam à formação de uma nova elite constituída por militares, engenheiros e industriais. [...] Esses manuais franceses desempenharam um papel fundamental, porque de certa forma, uniformizaram o ensino da Matemática.

Os apontamentos de Silva (2011) chamam a atenção para a questão da publicação desses primeiros “livros didáticos”, os quais eram feitos pela Imprensa Régia, que era a gráfica oficial brasileira, fundada em 1809 pelo Príncipe Regente. Dessa forma, como é possível observar na Figura 29, temos a folha de rosto do *Tratado de Elementar de Aplicação de Álgebra à Geometria* (LACROIX, 1812), que em suas 361 páginas tratam de assuntos como as noções preliminares de Aritmética e Álgebra (e como ocorre a transposição com o uso de símbolos algébricos), equações com as quatro operações, e o tratamento do cálculo dos fracionários, noções de questões com duas incógnitas, divisões impossíveis ou indeterminadas, equações de segundo grau, extração de raízes, aproximação de raízes não exatas, etc.

Figura 29 - Folha de rosto do Tratado de Elementar de Aplicação de Álgebra à Geometria



Fonte: Lacroix (1812)

Ao mesmo tempo em que se busca situar toda essa conjuntura política, social e educacional brasileira no início do século XIX, aborda-se o usufruto da pergunta que consta na abertura, e não é por coincidência que ela aqui está também, de um dos capítulos do livro *Análise Histórica dos Livros de Matemática*, do Professor Gert Schubring (2003, p. 7): “Por que estudar livros históricos destinados ao uso no ensino?”.

Embora o autor nos responda de forma indireta à sua própria pergunta, os seus escritos nos trazem uma valiosa pista disto, sobretudo quando este se refere aos livros destinados ao ensino que comumente

Foram tratados mais ou menos com desdém, sendo considerados desinteressantes ou até mesmo entediantes. O interesse historiográfico tendia a focalizar as realizações dos cientistas mais notáveis. Razões sociológicas podem ser responsáveis por tais preferências: parte da fama costumava passar para o historiador que estudava um pesquisador ou intelectual muito importante, e não havia recompensas comparáveis para quem estudasse livros didáticos e seus autores (SCHUBRING, 2003, p. 7-8).

O autor em questão atribui uma mudança acentuada neste panorama aos estudos de Kuhn (1962) que, embora não tenha trabalhado pelo estudo do “livro didático<sup>62</sup>”, colocou, com a sua investigação<sup>63</sup>, o dito “pesquisador médio” em voga. Pois bem, e o que exatamente Kuhn quis dizer com isso? Essencialmente, o que este autor introduziu de novidade através das suas ponderações foi que “em vez de ver a evolução da ciência como um processo cumulativo, que progride tanto pelo esforço contínuo como saltos por saltos consecutivos” (SCHUBRING, 2003, p. 8). Para, além disso, prossegue Schubring (2003, p. 8), Kuhn “foi o primeiro a distinguir entre períodos de ciência normal, ‘banal’ e períodos revolucionários”.

Ao fim, para o autor, as consequências dessa nova forma de observar o percurso evolutivo da ciência acabaram por modificar o *status* da “ciência normal” dentro da historiografia. Embora, prossegue Schubring (2003), as considerações de Kuhn em relação aos “livros didáticos” não foram muito profícuas. Este entende que a historiografia acerca do assunto ganhou relevância ainda não percebida e, complementando, o “seu trabalho abriu o caminho para aceitá-los como um tema de estudo compensador na ciência.” (SCHUBRING, 2003, p.10).

Eis que se chega até aqui para, enfim, estabelecer o ponto de intersecção deste trabalho com o marco teórico apresentado no capítulo inicial. Contudo, ainda há perguntas a responder, como por exemplo, onde é que a hermenêutica

---

<sup>62</sup> Embora Schubring (2003) estabeleça uma diferença entre livro-didático (utilizado na educação básica) e livro-texto (utilizado em nível superior e, de pós-graduação), e, em sua obra adote o termo em Língua Inglesa *textbook* (que não distinguiria níveis) adotaremos, nesta pesquisa, a expressão “livro-didático”.

<sup>63</sup> A investigação citada refere-se ao livro: A Estrutura das revoluções científicas.

converge com a história do ensino da matemática, e mais, com a proposição da análise dos “livros didáticos”?

Mais uma vez, as reflexões do Professor Schubring (2003) auxiliam neste entendimento com uma resposta que, ao mesmo tempo, parece simples e concisa, partindo do pressuposto que, após visualizar o material em análise, podemos considerar que estamos tratando de textos. Os textos, por sua vez, são passíveis de interpretação e, se são passíveis de interpretação, podemos lançar mão da metodologia hermenêutica. Dentro dessa ideia, podemos avançar em comunhão com as ideias de Schubring (2003), que propõe uma investigação da “história social” bem como “o contexto inteiro de sua produção”, propondo então a consideração da “História Social das ideias”. Nos próximos parágrafos, há a abordagem de contextualizar a teoria da história social das ideias e mostrar como ela se entrelaça a este trabalho.

A teoria de Schubring (2003) fala, em especial, de uma análise a partir de um contexto social mais amplo, do qual o “livro didático” e seu(s) autor(es) faz(em) parte. O autor continua, de forma afirmativa, atentando para o fato de que por trás de uma obra há uma “coletividade”, e esta, por sua vez, é consequência do elo que une os livros a um conceito institucional e, dessa forma, afirma o autor:

Foram moldados pelas restrições e demandas sociais das instituições em questão: por seus programas, suas tipologias de conhecimento e por suas tradições. Dessa forma, as instituições deveriam ser consideradas um fato determinante para a coletividade de autores (SCHUBRING, 2003, p. 16-17).

De maneira análoga, as teorias de base comum contemplam os pontos mencionados através da análise sócio histórica e seus desdobramentos possíveis, sobretudo, as situações espaço-temporais e as instituições sociais. A análise sócio histórica tratará de reconstruir as condições sociais e históricas de produção, circulação e recepção das formas simbólicas e, as instituições sociais, que formam um conjunto estável de regras, recursos e relações sociais estabelecidas por elas próprias através de posições e trajetórias. Dessa forma, podemos inferir que, ao mesmo tempo em que Schubring chama a sua teoria de História das Ideias, Thompson e sua HP convergem no princípio interpretativo, cada qual com um “rótulo” diferente, mas comparando a um medicamento, de mesmo princípio ativo.



Contextualizada a questão interpretativa, passa-se a envolver nesta as obras que são o pano de fundo para as análises e reflexões que vêm a seguir. No entanto, previamente, é necessária uma contextualização do período em que as obras foram concebidas e, sobretudo, dos responsáveis pela criação destas, os autores, pois, como discorre Thompson (1990, p. 368):

A análise sócio-histórica dos meios técnicos de construção e de transmissão de mensagens não pode se constituir apenas de uma investigação técnica, mas deve procurar elucidar os contextos sociais mais amplos em que esses meios estão inseridos e empregados.

Assim, seguindo os apontamentos de Thompson (1990), a tarefa agora é a de encadear o contexto dos autores citados, Legendre e Lacroix, com o contexto histórico no qual as suas obras foram produzidas, analisando, essencialmente, as regras e convenções, bem como as relações sociais e instituições que formavam a estrutura social da época. Para estas breves explanações, lança-se mão do auxílio dos escritos de Carl Benjamin Boyer em sua obra *História da Matemática*, versão em língua portuguesa lançada originalmente em 1974 e reimpressa em 1989 (versão a qual utilizamos).

Na França do final do século XVIII, a revolução não ficou reservada apenas ao campo político. Os matemáticos franceses que estão citados por meio de suas obras prestaram efetivas contribuições e que, conforme palavras de Boyer (1989, p. 344), “estavam no meio do torvelinho” das rápidas mudanças que ocorreriam à época. Ainda na França, o autor destaca que as universidades da época não possuíam centros de excelência em Matemática, essencialmente, por movimentos de oposição às novas proposições<sup>64</sup> principalmente no campo científico. Dessa forma, prossegue observando o autor, não encontrando terreno fértil no mundo acadêmico, grande parte dos matemáticos daquele século estava na igreja ou na classe militar. Para essa pequena ideia da contribuição, sobretudo dos anteriormente citados será empregada, nos parágrafos subsequentes, a investigação de Boyer (1989).

Adrien-Marie Legendre (1752-1833), por sua vez, era oriundo de família rica e não teve as mesmas dificuldades de seu contemporâneo Monge.

---

<sup>64</sup> Por exemplo, destaca Boyer (1989, p. 345): “quando a Europa se voltou ao cartesianismo, Paris se conservou presa aos escolasticismo peripatético; e quando a maior parte do mundo se voltou para o newtonianismo, Paris manteve uma luta de retaguarda pelo cartesianismo.”

Legendre, lecionou durante cinco anos na *École Militaire de Paris* tendo o “Tratado sobre projéteis em meios viscosos”.

Sylvestre François Lacroix (1765-1843) não foi exatamente contemporâneo de Monge (do qual atuou como assistente em 1795) e Legendre, mas, sobre as obras destes dois fez importantes proposições, como a ideia de tratar separadamente a Álgebra e a Geometria para que ambas pudessem, através de seus resultados, servir de “iluminação mútua”. Lacroix foi Professor da *École Polytechnique* e, mais tarde da Universidade de Paris e do *Collège de France*. Lacroix evitou o termo Geometria Analítica em suas obras, utilizando edição após edição o título “*Traité élémentaire de trigonométrie rectiligne et sphérique et application de l’algèbre à la géométrie*”.

As contribuições que cada um destes autores deixou em termos de obras utilizadas na instrução militar brasileira serão analisadas a seguir, quando também faremos as observações e reflexões matemáticas pertinentes a cada uma das obras e sua utilização no contexto pertinente a este trabalho.

Conforme já mencionado no início deste capítulo, tanto Lacroix como Legendre (Euler também, porém não será analisada a sua obra) são os autores das obras de referência para o Ensino de Matemática no primeiro ano da Academia Real Militar, o que se pode afirmar, acabava “fazendo as vezes de um curso de matemática que seria dado num ensino secundário até então inexistente na Colônia” (VALENTE, 2020, p. 73).

## 5.2 A ÁLGEBRA DE LACROIX NA INSTRUÇÃO MILITAR BRASILEIRA

Os estudos de Valente (2020) apontam que Lacroix foi a maior indicação preambular para o ensino de Álgebra na Real Academia Militar<sup>65</sup>. Conforme já mencionado neste trabalho, nos planos de estudo, o ensino de Álgebra era dividido em dois anos, e a obra de Lacroix, igualmente também o foi. A primeira parte, traduzida e impressa em 1811, ficou conhecida como “Álgebra Elementar<sup>66</sup>”, e a segunda, denominada “Complemento”. Dessa forma, a obra em análise, possui 351 páginas, das quais o “Alfabeto”, para facilitar a leitura

<sup>65</sup> A obra de Euler, segundo Valente (2020, p. 82), deveria realizar esse papel, não teve nem o segundo tomo de sua obra traduzida”.

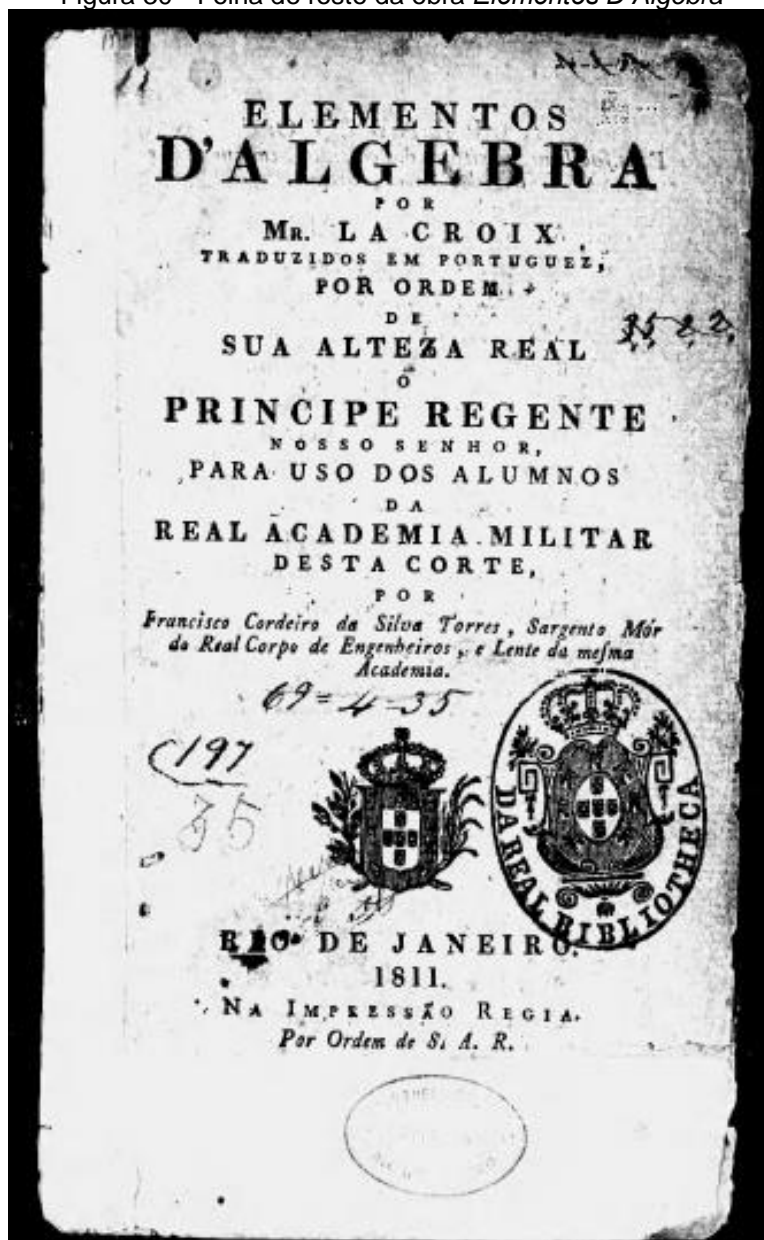
<sup>66</sup> “[...] que iria futuramente ser ensinada na educação secundária” (VALENTE, 2020, p. 82).

dos cálculos em que se faz uso das letras gregas é apresentado inicialmente. Logo após, inicia-se a apresentação da obra com as “Noções Preliminares”, que se estendem das páginas 1 até 8. Imediatamente após, e dividindo ainda a página 8, o autor inicia o estudo das equações sendo apresentadas possíveis variações que envolvem aquelas de primeiro grau e uma incógnita (página 10 até 31); na sequência, o autor apresenta as suas considerações acerca das quantidades positivas e negativas nas páginas 31 até 36. Nas páginas que se sucedem, especificamente 36 até 69, são apresentadas as operações fundamentais (soma, subtração, multiplicação e divisão) e suas propriedades, sendo que, em cada uma delas, estão adicionados exemplos. O máximo divisor comum, página 69 a 75, precede o estudo das frações e operações fundamentais com frações (página 75 a 83). Logo em seguida, é trabalhada a resolução de equações do primeiro grau com mais de uma incógnita acompanhadas de exemplos e, pelo menos, dois problemas resolvidos; este estudo compreende o intervalo das páginas 83 até 110.

Após, é visto o estudo da resolução das equações de segundo grau e uma só incógnita página 110a 140 e, ao final, até a página 155 são apresentadas, demonstradas e resolvidas quatro questões sobre o assunto. A extração da raiz quadrada de um número é abordada nas 12 páginas seguintes (até 167), sendo seguida pelo estudo das potências e extração de suas raízes, que se estendem ao longo de 52 páginas onde estão inclusas as propriedades e exemplos tanto no que se refere às quantidades monomiais (um só algarismo), quanto nas quantidades complexas (dois ou mais algarismos). As equações com dois termos são o assunto das seis páginas seguintes e, a resolução de equações de graus maiores que 2 ocupa as páginas 225 a 229. Por sua vez, a teoria geral das equações é abordada 20 páginas dissertando, sobretudo, a respeito dos métodos de Euler e Bezout em seus exemplos. Até aqui, o enfoque de resolução de equações de qualquer grau é a resolução algébrica. Ao final da página 248, seguindo até a página 291 a resolução numérica de equações até o quarto grau. As 17 páginas seguintes, até a 308 portanto, tratam da teoria das progressões e proporções; as quais contemporaneamente chamamos de progressões aritméticas e progressões geométricas. As quantidades exponenciais e os logaritmos são os assuntos tratados das páginas 308 até 323, onde são abordadas, por exemplo, a construção das tábuas logarítmicas. Por fim, as

questões relativas ao “juro do dinheiro” são o foco das páginas 324 a 330, conforme estaremos apresentando a obra em seus pormenores, iniciando com a folha de rosto da mesma na Figura 30. As páginas finais da obra são dedicadas ao Index 331 a 349 e, as duas últimas, 350 e 351, à errata.

Figura 30 - Folha de rosto da obra *Elementos D'Álgebra*



Fonte: Lacroix (1811)

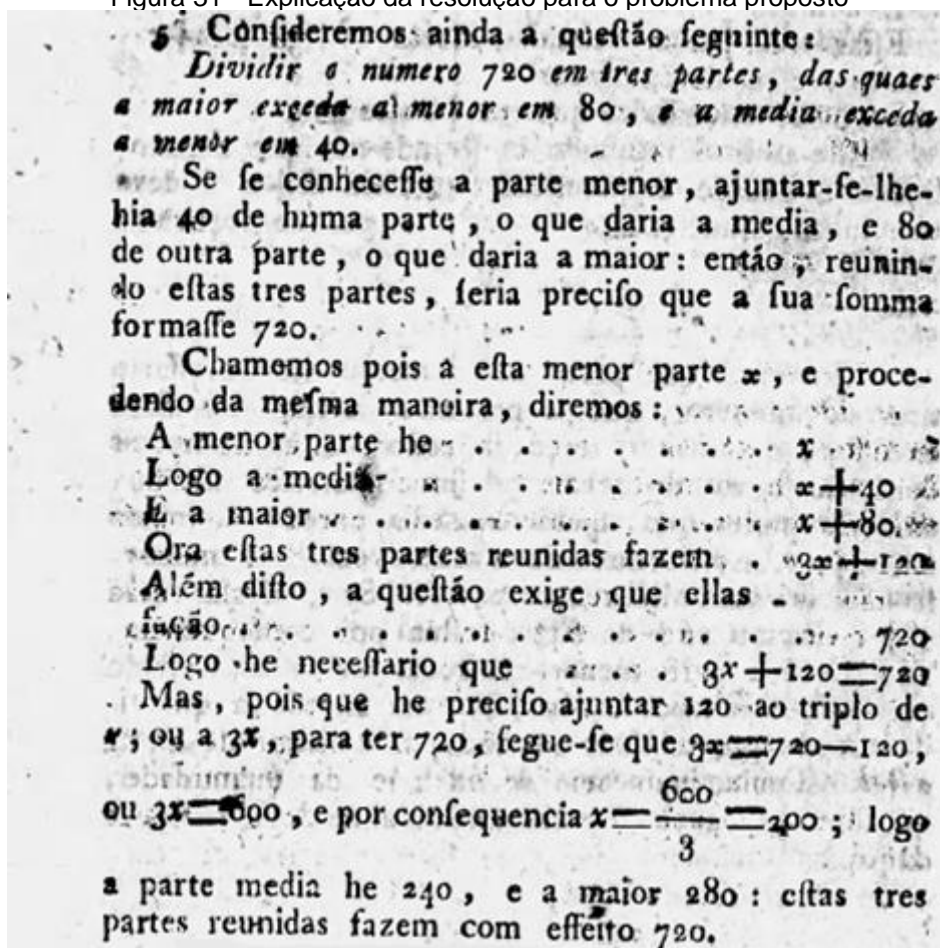
Os conteúdos abordados nos *Elementos D'Álgebra* são citados por Valente (2020, p. 82) e são analisados a seguir, com passagens do livro e respectivos comentários e reflexões.

### 5.2.1 Noções preliminares sobre a passagem da Aritmética para Álgebra

Nessa parte da passagem da aritmética para a Álgebra, apontam Sousa e Rocha (2017), o autor procura explicar como devem ser usados os símbolos algébricos e interpretados problemas de ordem prática para, por fim, se chegar a uma fórmula resolutive: “dividir um número conhecido, e representado por a, em duas partes, das quaes huma seja menor que a outra, a quantidade b, porque o numero a he evidentemente a somma das duas partes, que o compõe” (LACROIX 1811, p. 7).

Abaixo, na Figura 31, é possível ver a interpretação e a proposta resolutive para o seguinte problema:

Figura 31 - Explicação da resolução para o problema proposto



Fonte: Lacroix (1811, p. 8)

Como é possível observar, Lacroix parte de um problema dito “simples” de aritmética e, com sua descrição de resolução, oferece uma passagem, através do uso correto dos símbolos para, passo a passo nas quantidades

intermediárias solicitadas, chegar a uma fórmula, que irá determinar o valor da incógnita (símbolo) e, na sequência, determinar a resposta à proposição.

### **5.2.2 Equações (resolução de equações do primeiro grau, métodos de efetuar operações, adição e subtração de quantidades algébricas, multiplicação, divisão e frações algébricas)**

Neste ponto do livro, que se estende desde o capítulo 2 até o capítulo 9, Lacroix se propõe a desvendar as equações e suas partes, formas e fórmulas de solução em suas operações básicas e operações com frações (SOUSA; ROCHA, 2017).

Ao iniciar o capítulo 2<sup>67</sup>, o autor define o que seria uma equação e seus respectivos membros:

As condições das questões, que acabamos de resolver, tem-nos conduzido a igualar entre si duas quantidades; succede o mesmo em quasi todas aquellas que são do alcance da Algebra: assim, considerão-se em particular as propriedades da união de muitas quantidades separadas pelo sinal =, união, que, que se chama *equação* (LACROIX, 1811, p. 8-9).

Uma observação pertinente do autor sobre a questão da representação por símbolos é explicitada entre o passo a passo para a resolução, o qual citamos antes:

Geralmente se tem convencionado representar as quantidades incognitas pelas ultimas letras x, y, z do alfabeto , e as quantidades conhecidas , pelas primeiras , todavia muitas vezes se prescinde deste uso, porque por outra parte, sempre se especificação no enunciado da questão as quantidades , que são dadas e as que he preciso achar (LACROIX, 1811, p. 9).

A Figura 32 retoma a questão da proposição de resolução comentada acima. Na sequência, o mesmo propõe uma forma de resolução das equações em três passos. Veja que, nessa proposição, o autor orienta, primeiramente, a análise das quantidades desconhecidas e incógnitas:

---

<sup>67</sup> O capítulo 2 da obra em estudo denomina-se “Das equações” (LACROIX, 1811, p. 8).

Figura 32 - Proposição para resolução de equações

Primeiro. Compreender pelo enunciado, ou natureza da questão as relações, que há entre as quantidades conhecidas, e as quantidades incognitas. He esta huma faculdade, que o espirito adquire, como muitas outras, pelo uso, mas não ha regras geraes para dar a este respeito.

Segundo. Expressar cada huma destas relações por huma equação. Esta condição pôde ser reduzida a huma só regra, que exporemos para o diante, mas a sua applicação he mais, ou menos facil, segundo a natureza das questões, a capacidade, e o exercicio, que comprehende resolve-las.

Terceiro. Resolver esta equação, ou estas equações; isto he, deduzir dellas o valor das quantidades incognitas. Este ultimo ponto he susceptivel de hum numero determinado de regras, que vamos expôr successivamente.

Fonte: Lacroix (1811, p. 9)

Percebe-se que há uma espécie de roteiro sugerido pelo autor, o qual trabalha com situações genéricas acerca da interpretação e possibilidades de resolução das equações.

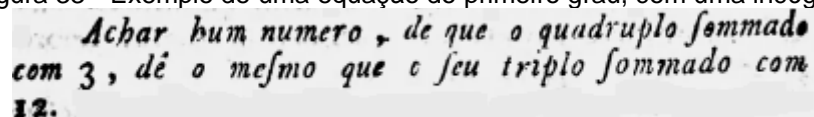
No próximo ponto de análise, Lacroix (1811), começa a tratar cada um dos assuntos envolvendo situações particulares das equações. Serão abordadas, primeiramente, as situações que envolvem as equações de primeiro grau e uma incógnita. Neste tópico, antes de qualquer coisa, o autor chama a atenção ao que seria resolver uma equação de primeiro grau com uma incógnita, conforme segue:

Resolver huma equação he reduzi-la a outra, na qual a incognita, ou a letra, que a representa, se acha só em hum membro, e as quantidades conhecidas no outro, pois que então tudo o que forma o segundo membro he o valor desta incognita (LACROIX, 1811, p. 10).

Em outras palavras, o autor traz a ideia de que ao fim, a incógnita e o valor numérico formam uma nova equação, onde em um dos membros encontra-se a incógnita, representado por uma letra e, no outro membro, o valor numérico que corresponde à incógnita.

Em seguida a este desenvolvimento, o autor traz um exemplo, conforme a Figura 33, que segue:

Figura 33 - Exemplo de uma equação do primeiro grau, com uma incógnita



*Achar um numero, de que o quadruplo somado com 3, dá o mesmo que o seu triplo somado com 12.*

Fonte: Lacroix (1811, p. 10)

Na sequência, o autor sugere uma resolução em que, antes de tudo, são identificados os elementos da equação, onde o número que se quer saber terá a si associada a incógnita “x” e, o seu quádruplo será representado por “4x” e o seu triplo será representado por “3x”. Ao compor a equação, conforme o enunciado proposto, teremos a seguinte estrutura:

$$4x + 3 = 3x + 12$$

Lacroix (1811) segue com o seu método de resolução sugerindo que, se as duas quantidades são iguais, também o serão se de cada uma for subtraído “3x”. Assim, na primeira linha mostramos a subtração de “3x” de ambos os lados da equação e, na segunda, como ficou a equação após esta operação:

$$\begin{aligned} 4x + 3 - 3x &= 3x + 12 - 3x \\ x + 3 &= 12 \end{aligned}$$

Após esta etapa, observa o autor, teremos enfim a última igualdade se, de cada lado, extrairmos 3 unidades, conforme mostrado na primeira linha. Na segunda linha, por sua vez, teremos a equação resolvida.

$$\begin{aligned} x + 3 - 3 &= 12 - 3 \\ x &= 9 \end{aligned}$$

Por fim, conclui o autor, esse método de resolução com a redução a um membro com um único valor numérico e o outro, com apenas uma incógnita, pode ser aplicado em situações com uma única operação, ou em situações onde estas aparecem “misturadas” e com as quantidades conhecidas como, por exemplo,

1.º pela adição, ou subtração, como na equação  $x + 3 = 5 - x$ ; 2.º pela adição, subtração, e multiplicação, como na equação  $4x - 6 = 2x + 16$ ; 3.º enfim pela adição, subtração, multiplicação, e divisão, como na equação  $\frac{9}{5}x - 4 = \frac{2}{3}x + 17$ , ou por estas duas últimas operações somente, ou só pela última (LACROIX, 1811, p. 12).

Dessa forma, Lacroix (1811), nos oferece a descrição de uma regra geral, a qual pode ser aplicada a todos os casos. Esta regra diz que



Para fazer passar hum termo qualquer de huma equação de hum membro desta equação para o outro, he necessario apaga-lo no membro, em que elle se acha e escreve-lo no outro com hum final contrario ao que elle tinha primeiro; observando que os termos , que não tem final, devem ser considerados como sendo precedidos do final +, como se vio a respeito do termo  $3x$ , na equação  $4x+3 = 3x+12$  (LACROIX, 1811, p. 12).

De forma coexistente, o autor admite a possibilidade da não utilização desta regra geral, e sim algo próximo àquela mais usual contemporaneamente falando. A descrição desta outra possibilidade foi assim feita por Lacroix (1811, p.15):

Quando se tem passado para um membro todos os termos **ilegível** da incognita, e todas as quantidades conhecidas para outro membro, senão ha fracções na equação não se trata mais que de desembaraçar a incógnita das quantidades conhecidas, que a multiplicação, o que se executa pela regra seguinte: Para ter o valor da incógnita, escreva-se só esta em hum membro, e dê-se para divisor ao segundo membro a quantidade, que multiplicava esta incógnita no primeiro.

Avança o autor com o exemplo da equação  $7x - 8 = 14 - 4x$ , na qual, por redução e transposição, chega-se em  $11x = 22$  e, para se chegar ao valor de  $x$ , não há mais nada a fazer senão escrever  $x = \frac{22}{11}$  o que, finalmente, pode ser reduzido à equação  $x = 2$ , ou seja,

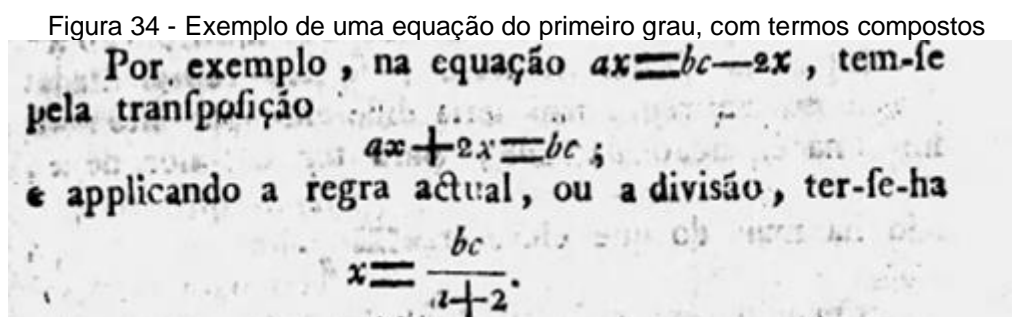
Escrever  $x$  só no primeiro (membro), e fazer servir e fazer servir o seu multiplicador (para este caso) 11 de divisor ao segundo membro 22. Com efeito, quando em lugar de  $11x$ , se põe somente  $x$ , não se escreve senão a undécima parte do primeiro membro. Logo, para conservar a igualdade he necessário não escrever senão a undécima parte do segundo membro, isto he, dividir o segundo membro por 11 (LACROIX, 1811, p.14-15).

Lacroix (1811) faz, ainda, considerações a respeito de situações em que, mesmo após a realização do método da redução e transposição houver, ainda assim, muitos termos em torno de  $x$ :

Deve-se para ter o valor de  $x$ , dividir o segundo membro pela totalidade das quantidades, que affectão  $x$  no primeiro, tomando estas quantidades com os seus sinaes taes quaes eles (LACROIX, 1822, p. 16).

Para estas situações, o autor dá o exemplo da Figura 34, onde este nos dá uma noção do que é conhecido como redução por termo em evidência,

observando que o multiplicador de  $x$ , no primeiro termo, é 1. Assim, em  $x + ax$ ,  $x$  é multiplicado por  $1+a$ . Com isso, em  $x + ax$ ,  $x$  está uma vez a mais que em  $ax$ .



Fonte: Lacroix (1811, p. 17)

Logicamente, acima temos um exemplo genérico de resolução. Se fosse realizar o passo a passo da questão em específico, teríamos o seguinte desenvolvimento (de acordo com o enunciado de Lacroix):

$$i) ax + 2x = bc$$

$$ii) x(a + 2) = bc$$

$$iii) \frac{x(a + 2)}{(a + 2)} = \frac{bc}{a + 2}$$

$$iv) x = \frac{bc}{a + 2}$$

Seguindo as diretrizes do autor, na primeira linha (i) há a equação em transposição e, reduzida para a situação. Na linha ii,  $x$  é multiplicado por  $(a+2)$ ; na terceira linha, temos em ambos os lados é realizada a operação de divisão pelas totalidades e, ao fim, na linha iv, o resultado final, onde há a incógnita “ $x$ ” de um único lado e, no lado oposto ao sinal de igual, as letras  $a$ ,  $b$  e  $c$ , representando um número qualquer (desde que  $a \neq -2$ ).

Sobre as operações envolvendo frações, Lacroix (1811) também nos apresenta uma proposta de método resolutivo. Ao partir de uma equação com números fracionários e inteiros (exemplo abaixo), o mesmo propõe a redução ao mesmo denominador e a conversão dos números inteiros em frações para que, ao fim, a equação possa ser resolvida. Abaixo, temos o exemplo referenciado acima de acordo com Lacroix (1811, p. 18):

$$\frac{2x}{3} + 4 = \frac{4x}{5} + 12 - \frac{5x}{7}$$

Observemos agora, que o método de redução dos denominadores a um, comum, conta com duas etapas: primeiro Lacroix opera com as frações e após, com os inteiros. O desenvolvimento para este exemplo proposto pelo pode ser observado na Figura 35:

Figura 35 - Primeira etapa da resolução do exemplo proposto

**Começando primeiro pelas fracções, que são**

$$\frac{2x}{3}, \frac{4x}{5}, \frac{5x}{7},$$

**muda-las-hia, pela primeira das regras citadas, em**

$$\frac{5 \times 7 \times 2x}{3 \times 5 \times 7}, \frac{3 \times 7 \times 4x}{3 \times 5 \times 7}, \frac{3 \times 5 \times 5x}{3 \times 5 \times 7};$$

**e para converter os inteiros 4, e 12 em fracções, não haveria mais que multiplica-los pelo denominador comum das fracções, a saber por  $3 \times 5 \times 7$ , e teria**

$$3 \times 5 \times 7 \times 4, 3 \times 5 \times 7 \times 12;$$

Fonte: Lacroix (1811, p. 19)

Na segunda etapa da resolução, é feita a substituição dos termos na equação do exemplo, o que resultaria no modelo da Figura 36.

Figura 36 - Substituição dos termos no exemplo proposta

$$\frac{5 \times 7 \times 2x}{3 \times 5 \times 7} + \frac{3 \times 5 \times 7 \times 4}{3 \times 5 \times 7}$$

$$= \frac{3 \times 7 \times 4x}{3 \times 5 \times 7} + \frac{3 \times 5 \times 7 \times 12}{3 \times 5 \times 7} - \frac{3 \times 5 \times 5x}{3 \times 5 \times 7}$$

Fonte: Lacroix (1811, p. 19)

Por último, finalizando as etapas de arranjo, o autor sugestiona a supressão dos denominadores, pois este ato não iria “perturbar a igualdade”, visto que, esta ação “não faria mais que multiplicar todas as duas partes pelo denominador” (LACROIX, 1811, p. 19). Desse modo, após eliminar os denominadores, a equação ficaria expressa da seguinte forma:

Figura 37 - Arranjo da equação após a eliminação dos denominadores

$$\begin{aligned}
 & 5 \times 7 \times 2x + 3 \times 5 \times 7 \times 4 \\
 = & 3 \times 7 \times 4x + 3 \times 5 \times 7 \times 12 - 3 \times 5 \times 5x, \\
 \text{ou} \\
 & 70x + 420 = 84x + 1260 - 75x,
 \end{aligned}$$

Fonte: Lacroix (1811, p.19)

A Figura 37 mostra como ficou a equação do exemplo sem os denominadores e, em condições de pelas regras já apresentadas, ser resolvida (leia-se, encontrar o valor da incógnita “x”). Por fim, a regra geral para esta operação é dada por Lacroix (1811, p.19-20):

Os numeradores de cada fracção devem ser multiplicados pelo producto dos denominadores de todas as outras, e os inteiros, pelo producto de todos os denominadores e não he preciso ter em conta o denominador comum das fracções resultantes.

Prossegue o autor com o complemento de suas ideias e aponta que, através das regras dadas, é possível resolver qualquer equação de primeiro grau. Em síntese, ainda aponta que quando se deseja transformar uma questão em equação deve-se primeiramente optar por significar

A quantidade, ou as quantidades pedidas, cada huma por huma letra; e tendo examinado com attenção o estado da questão, fação-se com o socorro dos sinaes algébricos, sobre as quantidades conhecidas, as mesmas operações, e os mesmos raciocínios, que se farião conhecendo o valor das incognitas, se quisesse verifica-las (LACROIX, 1811, p. 21).

Fazendo o fechamento deste raciocínio sobre a forma resolutiva para equações do primeiro grau, ainda se observa que as regras apresentadas são de cunho geral, e conduzirão sempre ao caminho de se encontrar as equações que a questão em resolução pode fornecer (LACROIX, 1811).

### 5.2.3 Considerações acerca de quantidades positivas e, negativas

No que diz respeito às quantidades negativas, Lacroix (1811) dedicou algumas páginas a respeito e, na tentativa de fazer-se entender, utilizou-se de comparações no quesito de valores monetários. Antes disso, observou que na condução de sua obra de Elementos de Álgebra, até então, os sinais “+” e “-” referiam-se apenas às operações matemáticas de adição e subtração. Assim, ao introduzir a questão das quantidades, contemplou a seguinte observação sobre

os “sinais”: “elles podem também representar, em muitos casos, a maneira de existir das quantidades humas a respeito das outras” (LACROIX 1811, p. 33).

Para clarificar esse enunciado, o autor nos dá a seguinte sentença:

No estado de hum homem, que tem tantos bens , como dividas , o mesmo numero póde servir , para exprimir a quantidade numérica de huns, e outras; mas este numero, tal qual seja , não fará conhecer a differença de huns ás outras. O meio mais natural de fazer sentir esta differença, he designa-los por sinaes, que indicão o effeito, que as quantidades respectivas a estes números, podem ter humas sobre outras: ora, o effeito , das dividas he diminuir as possessões, he pois natural designa-las applicando-lhe o final “—” . Estas ultimas quantidades, que se chamão negativas tem pois huma existencia tão real, como as primeiras, que se distinguem pela denominação de positivas , e não differem destas senão em ter huma accepção toda contraria no calculo (LACROIX, 1811, p. 33).

Por fim, acrescenta Lacroix (1811), um exemplo com números onde possam ser percebidas as “propriedades contrárias”, que o autor utiliza como expressão para colocar em oposição uma questão qualquer que ofereça uma quantidade negativa como resposta, ilustra a proposição anterior. Desta maneira observa-se o problema que segue, na Figura 38:

Figura 38 - Exemplo de uma equação que retorna quantidades negativas

Por exemplo, se se propuzesse esta questão, evidentemente impossível: Achar hum numero, que sendo sommado com 15, dê 10; representando o numero pedido por  $x$ , ter-se-hia a equação:  
 $x + 15 = 10$ ,  
 e por conseguinte, em virtude das regras acima,  
 $x = 10 - 15$ , ou  $x = -5$

Fonte: Lacroix (1811, p. 34)

A resolução desta equação nos mostra que, para este caso, a incógnita “ $x$ ”, a qual foi considerada de acordo com o enunciado do problema, como devendo ser somada a 15 para formar o total 10 deveria, pelo contrário, ser diminuída de 10. Assim sendo, por transposição, teríamos a seguinte situação:

$$15 = 10 - x$$

A partir da nova situação proposta, Lacroix (1811), sugere um novo enunciado, que seria como o expresso na Figura 39:

Figura 39 - Novo enunciado para a questão anteriormente proposta

*Achar hum numero , que , tirado de 10 , deixe para resto 15.*

Fonte: Lacroix (1811, p. 34)

Partindo dessa reinterpretação da primeira situação proposta (Figura 11), e se utilizando das “propriedades contrárias”, se chega ao mesmo resultado (-5), porém, partindo-se de outra premissa onde, ao invés de diminuir uma quantidade maior (15), de uma menor (10) e, com isso, causar uma situação de “falta de quantidade”, pela segunda situação proposta (Figura 12), chega-se ao mesmo resultado com uma soma, pois conforme Lacroix (1811, p. 35),

Seremos perfeitamente convencidos disto, considerando que se na equação  $15+x=10$ , se põe  $-5$  em lugar de  $x$ , e passa 5 para o segundo membro em lugar de  $x$ , ter-se-ha  $15=10+ 5$  em lugar  $15=10-x$ , donde se vê que  $+5$  corresponde a  $-x$ , ao mesmo tempo que  $-5$  corresponde a  $+x$ .

O autor conclui mais adiante, no estudo *Das operações fundamentaes sobre as quantidades consideradas geralmente*<sup>68</sup> em nota de rodapé das páginas 42, 43 e 44 que se pode partir de exemplos mais simples no cálculo das quantidades negativas. Como exemplo para essa formulação, propõe a uma questão onde um determinado sujeito possui entre suas reservas e dívidas, uma quantidade de 7.000 francos<sup>69</sup> livres e uma dívida que soma, ao total, 2.000 francos. Informadas, essas quantidades apresentam evidências de que, ao total, esse sujeito possui em suas economias 9.000 francos, visto que:

$$9000 = 7000 + 2000$$

Por outro lado, e observando as “propriedades contrárias”, pode-se inferir que os 2.000 francos se referem a uma quantidade negativa, que será utilizada para amortizar a dívida do sujeito. Dessa forma:

$$9000 - 2000 = 7000$$

Removendo-se assim dos fundos totais desse sujeito a quantidade de 2.000 francos, teremos os 7.000 francos livres do enunciado. Logicamente, conclui Lacroix (1811, p. 44):

As quantidades negativas tem, abstracção feita do seu sinal, huma grandeza absoluta, que as faz comparaveis ás quantidades positivas; mas o sinal indica a ordem, que ellas tem em huma serie, ou

<sup>68</sup> Lacroix (1811, p. 35)

<sup>69</sup> O Franco foi a moeda francesa de 1795 até 2002, quando foi substituída pelo Euro.

progressão, que começa por quantidades positivas, e esta ordem seria inversa se se começasse por quantidades negativas; de sorte que os estados de positivo, e de negativo são puramente relativos entre si, e não tem cousa alguma de absoluto.

Essa consideração mais extensa acerca das quantidades negativas se dá em função da importância dada na obra ao assunto. Essa noção, embora elementar, é tratada dessa forma devido ao pré-requisito dos alunos ao ingressar na Real Academia Militar: as quatro operações aritméticas e a idade de quinze anos (BRASIL, 1810).

#### 5.2.4 Das equações do primeiro grau com mais de uma incógnita

Tendo como ponto de partida os estudos de Sousa e Rocha (2017), observamos que, ao chegar no capítulo 10 da obra de Lacroix (1811), haverá uma análise com série de questões resolvidas relativas ao tema das equações do primeiro grau com mais de uma incógnita.

Para a resolução das equações com mais de uma incógnita, Lacroix (1811) nos passa a ideia, já trabalhada, da transposição dos termos de um membro para o outro a fim de, caso existam, primeiramente eliminar os denominadores. Depois de cumprida essa primeira etapa, se houver, deve-se suprimir de forma sucessiva as incógnitas até que reste apenas uma, que passa a ser determinada por uma quantidade, conforme já visto.

O primeiro exemplo dado pelo autor é de quando temos duas incógnitas e duas equações, conforme abaixo:

$$2x + y = 24 \quad \& \quad 5x + 3y = 65$$

Seguindo as etapas sugeridas por Lacroix (1811), primeiro propondo a transposição dos valores:

$$\begin{array}{l} 2x = 24 - y \\ x = \frac{24 - y}{2} \end{array} \quad \& \quad \begin{array}{l} 5x + 3y = 65 \\ 5x = 65 - 3y \\ x = \frac{65 - 3y}{5} \end{array}$$

Após este passo, orienta o autor, iguala-se os dois valores de x e obtém-se:

$$\frac{24 - y}{2} = \frac{65 - 3y}{5}$$

Por último, ao eliminar os denominadores e, realizando nova transposição e posteriores operações algébricas, obtém-se a quantidade relativa à incógnita “y” conforme segue:

$$5 * (24 - y) = 2 * (65 - 3y)$$

$$120 - 5y = 130 - 6y$$

$$6y - 5y = 130 - 120$$

$$y = 10$$

Para a determinação da quantidade referente à incógnita “x”, usa-se valor encontrado para a incógnita “y” em qualquer uma das duas equações acima:

$$x = \frac{24 - 10}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

No caso adotado, para descobrir a quantidade da incógnita “x”, a primeira equação e o valor verificado foi 7. Caso a segunda equação fosse a escolhida, igualmente teríamos o mesmo valor. Partindo-se dessa ideia, é apresentada a regra geral para a resolução de equações com duas incógnitas por Lacroix (1811, p. 86):

Tome-se em cada equação, o valor de huma mesma incognita, procedendo como se todo o resto fosse conhecido; igualm-se estes dous valores, e virá huma equação, que não conterà mais que a segunda incognita, que se determinará pelas regras precedentes: sendo achada esta segunda incognita, substitua-se o seu valor em qualquer dos dous valores, que se tomarão pela primeira operação, e ter-se-ha a primeira incógnita.

Outro exemplo trabalhado pelo autor traz a possibilidade de trabalho com três incógnitas e três equações, conforme mostra a Figura 40 abaixo:

Figura 40 - Exemplo com três incógnitas e três equações

$$\begin{array}{l} 3x + 5y + 7z = 179 \\ 8x + 3y - 2z = 64 \\ 5x - y + 3z = 75 \end{array}$$

Fonte: Lacroix (1811, p. 91)

O passo-a-passo para a resolução, ou seja, a verificação das quantidades referentes a cada incógnita é desta forma descrita pelo autor na Figura 41:

Figura 41 - Igualando todas as equações a uma única incógnita



Da primeira tiro, por transposição,

$$3x = 179 - 5y - 7z,$$

e por divisão,

$$x = \frac{179 - 5y - 7z}{3}.$$

Da segunda tiro, por transposição,

$$8x = 64 - 3y + 2z,$$

e por divisão,

$$x = \frac{64 - 3y + 2z}{8}.$$

Na terceira, tenho, por transposição

$$5x = 75 + y - 3z,$$

e por divisão

$$x = \frac{75 + y - 3z}{5}.$$

Fonte: Lacroix (1811, p. 92)

Após igualar todas as três equações a uma única incógnita (Figura acima), o autor propõe igualar o primeiro valor de  $x$  ao segundo e, o primeiro ao terceiro, conforme a Figura 42:

Figura 42 - Equação 1 igualada às equações 2 e 3

Igualando o primeiro valor de  $x$  ao segundo, tenho

$$\frac{179 - 5y - 7z}{3} = \frac{64 - 3y + 2z}{8}.$$

Igualando da mesma sorte o primeiro ao terceiro, tenho

$$\frac{179 - 5y - 7z}{3} = \frac{75 + y - 3z}{5}.$$

Fonte: Lacroix (1811, p.92)

Após igualar as equações na forma descrita acima, obtém-se o mesmo princípio anterior, com duas incógnitas e segue a resolução da mesma forma até a obtenção do resultado final para cada uma delas, ( $x$ ,  $y$  e  $z$ ) que são, respectivamente, 8, 10 e 15.

Por fim, o autor descreve uma nova regra geral, desta vez para a resolução de um número qualquer de equações:

Tome-se em cada equação, o valor de huma mesma incognita, iguale-se hum destes valores a cada bum dos oturos, e ter-se-ha huma equação, e huma incognita de menos. Tratem-se estas novas equações como as primeiras, e ter-se-ha também huma equação, e huma incognita de menos. Continue-se assim ate que afinal se chegue a não ter mais que huma incognita (LACROIX, 1811, p. 94).

Nos demais exemplos expressos em *Elementos D'Algebra*, o autor vai alternando problemas com situações com mais elementos e/ou denominadores com quantidades diferentes, o que sempre remete aos passos citados nas regras gerais acima descritas.

### 5.2.5 Extração de raiz quadrada das quantidades algébricas

Ao retratar a extração da raiz quadrada, o material de Lacroix apresenta interessantes contribuições, a base da Álgebra, para a resolução de questões que pudessem envolver a radiciação e a potenciação. Com o advento da calculadora ainda de uso restrito na época, o autor nos mostra uma forma, baseada em um produto notável, como acompanharemos o raciocínio a seguir. Ao se deparar com questões onde a resposta não é tão evidente, Lacroix se vê levado a uma nova questão: “achar hum numero, que multiplicado por ele mesmo dê hum produto igual a hum numero proposto” (LACROIX, 1811, p. 114).

Primeiramente, é proposto que sejam conhecidas as segundas potências dos algarismos que são compostos por uma única unidade, conforme mostra a Figura 43.

Figura 43 - Tábua da segunda potência de algarismos com uma unidade

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4	9	16	25	36	49	64	81

Fonte: Lacroix (1811, p. 112)

De posse deste conhecimento, é possível verificar que, dos números com 1 algarismo, a segunda potência não possui mais que 2; situação esta que começa a mudar quando avançamos para o número 10, primeiro da sequência com dois algarismos que retorna uma segunda potência com 3 algarismos (100).

Com o nível de complexidade aumentando quando temos dois ou mais algarismos naquele número que se deseja saber a raiz quadrada, Lacroix (1811)

propõe, antes de tudo, estudar a composição do número em questão, para após, realizar a operação de extração de raiz quadrada.

No seu exemplo, o autor levou em consideração o número 47, que foi decomposto em duas partes a saber: 40+7, onde a irá corresponder à parcela das dezenas e b, à parcela das unidades. Deste modo, a segunda potência pode ser expressa da seguinte maneira, conforme nos mostra Lacroix (1811, p. 113):

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

O que esse produto notável tem a ver com a segunda potência de 47? Partindo-se do pressuposto anterior, onde “a” representa a dezena e “b”, as unidades, temos que essa potência é formada pelo “quadrado das dezenas, duas vezes o producto das dezenas pelas unidades, e o quadrado das unidades” (LACROIX, 1811, p. 113).

Do desenvolvimento deste exemplo, partindo-se do princípio que  $a = 40$  e  $b = 7$ , teremos o exposto na Figura 44.

Figura 44 - Desenvolvimento da segunda potência de 47

$$\begin{array}{r}
 a^2 = 1600 \\
 2ab = 560 \\
 b^2 = 49 \\
 \hline
 \text{Total } a^2 + 2ab + b^2 = 2209 = 47 \times 47
 \end{array}$$

Fonte: Lacroix (1811, p. 113)

A “volta” ao número 47, no entanto, é um pouco mais trabalhosa por essa proposição, como será visto na sequência. Tomando por referência a explicação de Lacroix (1811) que se estende ao longo das páginas 113 e 114, dos *Elementos D’Algebra*, explana-se da seguinte forma:

O quadrado das dezenas 1600, não tem algarismo significativo de ordem interior as centenas, e que he o maior quadrado, que podem conter as 22 centenas de 2200; porque 22 cabe entre 16, e 25, entre o quadrado de 4, e o de 5, como 47 cabe entre quatro dezenas, ou 40, e 5 dezenas, ou 50. Se pois se busca o maior quadrado incluído em 22, achar-se-ha 16, de que a raiz 4 exprimirá as dezenas da raiz de 2209; subtrahindo depois disto 16 centenas, ou 1600 de 2209; o resto 609 conterà ainda o dobro do producto das dezenas pelas unidades, 560; e o quadrado das unidades, 49; mas o dobro do producto das dezenas pelas unidades, não tendo algarismos de ordem inferior ás

dezenas , deve achar-se nos dous primeiros, 60, do resto 609, que incluirão além disto as dezenas provenientes do quadrado das unidades. Dividindo pois 60 pelo dobro das dezenas, 8, ter-se-ha desprezando o resto, hum quociente 7 igual ás unidades buscadas. Multiplicando depois 80 por 7, forma-se-há de novo o dobro do produto das dezenas pelas unidades, 560, e abatendo do resto total 609, ficará huma diferença 49, que dever ser, e effectivamente he o quadrado das unidades.

Logo, o esquema dessa operação descrita acima ficará conforme a Figura 45 na sequência. Destaca-se, ainda, que o esquema exposto se trata de uma divisão um pouco diferente daquela como conhecemos e está contextualizado após a Figura.

Figura 45 - Esquema para verificação de uma raiz quadrada

$$\begin{array}{r}
 22,09 \mid 47 \\
 \hline
 16 \quad \mid 87 \\
 \hline
 60,9 \\
 609 \\
 \hline
 000
 \end{array}$$

Fonte: Lacroix (1811, p. 114)

O esquema representado acima consiste em uma operação de divisão, com algumas regras próprias, a saber: no caso, o número em questão é 2.209. Após isso, separam-se, através de uma vírgula, as unidades e as dezenas, para que sejam considerados os primeiros números localizados à esquerda, que devem conter o quadrado das dezenas da raiz. Feito isto, verifica-se o maior quadrado possível de dois algarismos, escrevendo-se a sua raiz (4) no local do divisor. Depois, ao resto da operação, 6, acrescentam-se os outros dois números restantes, deslocando-se a vírgula uma casa para a direita, formando com isso o número inteiro 60 e divide-se o mesmo pelo dobro das unidades 8, o que resulta em 7 e comporá o segundo dígito do divisor. Por fim, com o resto 49, faz-se a divisão pelo algarismo das unidades do “divisor” e temos como resposta 7, que irá para o quociente e resta zero. E o 87? Bem, este é o dobro das dezenas somado às unidades, ou,  $2a + b$  e que, multiplicado por  $b$  nos retornará  $609$  ou  $2ab + b^2$ . Dessa forma, Lacroix (1811), prova que 47 é a raiz quadrada de 2.209.

Concluindo o assunto da extração da raiz quadrada, o autor nos apresenta a possibilidade de números que não apresentam a característica de serem quadrados perfeitos, ou seja, não apresentarem como resultado uma raiz exata. Dessa forma, observa ele, há “huma nova espécie de números da mesma maneira que a divisão gera as fracções” (LACROIX 1811, p. 124). Assim, representa-se através do símbolo “ $\sqrt[n]{x}$ ”, que normalmente é utilizado para indicar a extração de uma raiz ordem “n” de um número qualquer “x”, esta espécie de números que são chamados de irracionais ou incomensuráveis<sup>70</sup>, sendo  $\sqrt{2}$  um exemplo desse conjunto.

### 5.2.6 Equações do segundo grau com uma incógnita

Antes de introduzir o assunto equações do segundo grau, Lacroix (1811) aborda assuntos de correlação, como as raízes de números fracionários, (quadrados perfeitos ou não) e suas decorrências como, por exemplo, a questão e utilização do símbolo “ $\pm$ ” (mais ou menos); e todas as outras situações algébricas já previstas nos itens anteriores a este. Desta forma, o autor começa objetivamente a percorrer o caminho da resolução das equações do segundo grau a regra geral para a resolução:

Tome-se a metade da quantidade conhecida, que multiplica a incognita no segundo termo; eleve-se esta metade ao quadrado, e ajunte-se este quadrado a cada membro da equação, o que não alterará a igualdade. O primeiro membro será então hum quadrado perfeito. Tire-se a raiz quadrada de cada membro, e faça-se preceder a do segundo membro do duplo final  $\pm$ , a equação será reduzida ao primeiro gráo. A raiz quadrada do primeiro membro he sempre composta da incógnita, e da metade da quantidade conhecida, que a multiplica no segundo termo, tomada com o final deste termo (LACROIX, 1822, p.137-138).

Para melhor ilustrar a regra acima, o autor dá seguimento ao tema com alguns exemplos práticos, dos quais também se lança mão a seguir. Começa-se com o problema proposto, o qual é exibido na Figura 46.

Figura 46 - Exemplo de proposição de um problema de segundo grau

---

<sup>70</sup>A raiz quadrada de hum numero, que não he hum quadrado perfeito, não he commensuravel, porque não podendo ser representada por fracção alguma, segue-se que qualquer que seja o numero de partes, em que se supponha dividida a unidade, nenhuma serã assaz pequenas para medir ao mesmo tempo de huma maneira exata esta raiz, e a unidade. (LACROIX 1811, p.125)

Questão primeira. Achar hum numero tal, que ajuntando ao seu quadrado 8 vezes este mesmo numero, o todo faça 33?

Fonte: Lacroix (1811, p. 140)

Ora, através da análise do enunciado proposto, se chega à conclusão de que a equação que o representa é dada por  $x^2 + 8x = 33$  e, a partir dessa formulação, é necessária a aplicação da regra geral proposta para que se chegue a uma solução. A Figura 47, apoiada na referida regra nos mostra a solução para este problema:

Figura 47 - Resolução do problema com base na regra geral proposta por Lacroix

Para resolver esta equação, ajunto a cada membro o numero 16, que he o quadrado da ametade de 8, que multiplica  $x$  no segundo termo, e tenho

$$x^2 + 8x + 16 = 49,$$

equação, de que o primeiro membro he hum quadrado perfeito. Tiro a raiz quadrada de cada membro, praticando a regra dada (109), e tenho

$$x + 4 = \pm 7;$$

por consequencia  $x = \pm 7 - 4$ , o que dá estes valores de  $x$ , e  $x = +7 - 4 = 3$ , e  $x = -7 - 4 = -11$ .

Fonte: Lacroix (1811, p. 140-141)

Após a aplicação da regra como última etapa, e para certificar-se da exatidão do cálculo, faz-se o teste para verificar se ambos os valores atendem ao solicitado substituindo, um de cada vez, os valores encontrados na equação primária. Desta forma, temos:

$$\begin{array}{ll} x^2 + 8x = 33 & x^2 + 8x = 33 \\ 3^2 + 8 \cdot 3 = 33 & \& (-11)^2 + 8 \cdot (-11) = 33 \\ 9 + 24 = 33(V) & 121 - 88 = 33(V) \end{array}$$

Seguindo a análise da obra de Lacroix (1811), há nas páginas seguintes o desenvolvimento de atividades envolvendo a resolução de questões

semelhantes a disposta acima. Todas elas contando com o mesmo grau de detalhamento que o autor emprega naqueles exemplos aqui expostos.

### 5.2.7 Equações de qualquer grau

A partir da página 219, a obra trata de forma preponderante da “Teoria Geral das Equações de qualquer grau”. Estas, por sua vez, incluem todas as potências da incógnita desde a primeira até aquela cujo expoente é o mesmo que o do seu grau, ou seja, se falar de um expoente igual a 4, a equação será de quarto grau, ao passo que, se o expoente for 5, a equação será de quinto grau e assim, sucessivamente.

Após dissertar longamente acerca dos regramentos para as equações de graus superiores a dois, Lacroix (1811, p. 226-227) nos mostra o seguinte exemplo:

Na equação  $x^3 + 2x^2 - 23x - 60 = 0$ ; a soma de suas raízes he  $-2$ ; a soma de seus productos, duas a duas he  $-23$  e o producto das três raízes he  $+60$ . Com efeito, as três raízes são  $+5, -4, -3$  como se pode ver pondo cada um destes números em lugar de  $x$  na equação, porque cada hum reduz o primeiro membro a cifra. Ora, he evidente que a soma destes três números, isto he:  $+5 -4 -3$ , he  $-2$ ; que a soma de seus productos dous a dous,  $-20 -15 +12$  he  $-23$ , e que o produto das três he  $5 \times -4 \times -3$ , isto he,  $+60$ .

O autor acrescenta em uma nota de rodapé, que “huma equação de qualquer grão he o produto de tantos fatores simples” (LACROIX, 1811, p. 226-227), sendo assim, um raciocínio vicioso. A sua proposição de resolução para equações de qualquer grau é concluída no “segundo volume” de sua obra sobre Álgebra, denominado “Complemento” e, finaliza ele afirmando que:

Nós não concluimos esta proposição senão condicionalmente no número 185<sup>71</sup>, porque para se afirmar positivamente, seria preciso demonstrar que huma equação de qualquer grao te uma raiz, seja real, seja imaginaria, o que não parecer fácil de executar em Elementos, e o que, felizmente não é necessário então (LACROIX, 1811, p. 227).

Nas páginas seguintes, (228-245), o autor se propõe a demonstrar o “método de Euler” que envolve a multiplicação de cada uma das equações por um fator comum, em que os coeficientes sejam indeterminados, igualando assim

<sup>71</sup> Demonstração 185 (LACROIX, 1822, p.222-224).

os produtos e, após, dispendo os coeficientes de maneira que os termos semelhantes da incógnita “x” sejam eliminados. Este método, também aponta Lacroix (1811), apresentado por Leonhard Euler em sua obra denominada *Introdução a análise dos infinitos* trazia significativa semelhança ao princípio desenvolvido por Bezout<sup>72</sup> em sua publicação *Theoria das Equações*.

### 5.2.8 A significação da divisão por zero na resolução de equações

A divisão por zero sempre trouxe preocupação na matemática, seja em casos de impossibilidade, seja em casos de indeterminação. Lacroix (1811) dedicou um capítulo da sua obra *Elementos d’Algebra* para tratar desse assunto. Na sequência estaremos trazendo a repercussão deste assunto na obra do autor.

Começaremos com o proposto na Figura 48, onde é apresentada uma equação com duas incógnitas para que seus valores sejam encontrados:

Figura 48 - Proposição com duas equações e duas incógnitas

Se tivésemos as duas equações do primeiro grau

$$2x + 3y = 7, \quad 10x + 15y = 22,$$

por meio da primeira, acharíamos

$$x = \frac{7 - 3y}{2},$$

e pela segunda

$$y = \frac{22 - 15y}{10};$$

Fonte: Lacroix (1811, p. 247)

Ao seguir com o desenvolvimento da mesma, chega-se ao seguinte resultado:

$$35 - 15y = 22 - 15y$$

ou

$$35 = 22$$

<sup>72</sup> O matemático francês Etienne Bezout (1730-1783). Embora não tenha sido um mero compilador, foi o autor de publicações de grande reconhecimento no ramo dos livros-texto (largamente produzidos, e de grande sucesso, naquele período histórico francês), sobretudo, em seus “Cours”, as quais eram obras que abrangiam desde o nível mais elementar até o mais elevado de conhecimento (BOYER, 1989).

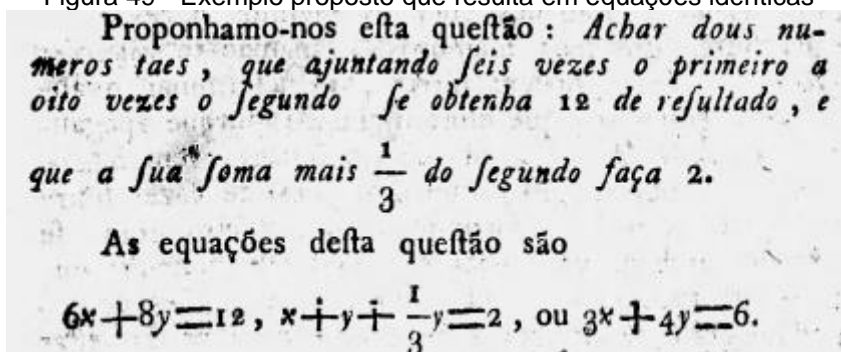


Obviamente, percebe-se um resultado absurdo nesta questão, pois as quantidades 35 e 22 não são iguais, o que torna falsa a afirmação acima. Desta maneira, fica provado que, pelo absurdo do resultado, a questão é impossível de ser resolvida. Com isso, o autor mostra a importância da verificação das equações a resolver. Mas o que seria esta verificação? Lacroix (1811, p.247) afirma que

He fácil de perceber que o primeiro membro, da segunda he igual a cinco vezes o primeiro membro da primeira, e que os segundos membros destas equações, que são determinados, não têm entre si a mesma relação.

Outro caso proposto pelo autor é quando temos uma igualdade, porém, inconclusiva, a qual, não permite calcular o valor das incógnitas. A Figura 49 mostra uma questão proposta que terá como resultado equações idênticas:

Figura 49 - Exemplo proposto que resulta em equações idênticas



Fonte: Lacroix (1811, p. 245)

Ao desenvolver as equações propostas, e tomando os valores de y na primeira equação, e na segunda para após, propor a igualar entre si, conforme método já visto anteriormente, chegaremos na seguinte situação:

$$\frac{12 - 6x}{8} = \frac{6 - 3x}{4}$$

$$2 - x = 2 - x$$

Isso prova que a igualdade é verdadeira, e não absurda, porém, não nos conduz ao conhecimento no que diz respeito à incógnita x, a decifrar o seu valor, pois ela não seria eliminada, independentemente do valor que se atribua a ela. Assim, as equações propostas na Figura 22, e todas as que, igualmente, possuem os mesmos termos, tomados com os mesmos sinais e em cada um dos seus membros, não podem servir para determinar quantidade alguma daquelas

que nelas estão contidas, porque as equiparando em cada um dos membros da equação, haverá como resposta sempre 0-0.

E como nos precaver, e até mesmo nos desvencilhar, destas situações? Lacroix (1811) nos sugere o teste, através das “fórmulas gerais”, para verificar se as equações do primeiro grau propostas não estão em um dos casos vistos. O teste de verificação, descrito na Figura 50, consiste em:

Figura 50 - Método de teste pela fórmula geral

Comparando as duas equações  $6x + 8y = 12$  :  
 $3x + 4y = 6$  (199) com as fórmulas geraes  $ax + by = c$ ,  
 $a'x + b'y = c'$ , acha-se  
 $a = 6$ ,  $b = 8$ ,  $c = 12$  :  $a' = 3$ ,  $b' = 4$ ,  $c' = 6$ ,  
 e vem  

$$x = \frac{12 \times 4 - 8 \times 6}{6 \times 4 - 8 \times 3} = \frac{0}{0}, y = \frac{6 \times 6 - 12 \times 3}{6 \times 4 - 8 \times 3} = \frac{0}{0}.$$

Fonte: Lacroix (1811, p. 248)

Para melhor convencer-se que sua significação vem a ser, de fato, indeterminada, observa o autor, que a questão proposta estando reduzida a uma única equação  $3x + 4y = 6$ , não se pode determinar uma das incógnitas, “x” por exemplo, senão depois de ser atribuído um valor a y; e como para este valor se pode atribuir qualquer número (seja inteiro, seja fracionário, positivo ou negativo), vemos então que x e y poderão assumir uma infinidade de valores.

Por fim, para o assunto indeterminação, os escritos de Lacroix (1811) chamam a atenção, ainda, para o caso de que, quando há expressões que nos retornam 0/0, devemos antes de qualquer coisa verificar se o numerador e o denominador não possuem algum fator em comum que, tornando-se nulo, faça estes dois termos iguais, ou então, suprimindo-o se encontrar o valor da questão proposta.

Ao final, Lacroix (1811, p. 249), alerta para os limites de sua obra e, situações em que este método possa não denotar além do fato analítico de situações específicas. Continua ele sua exposição afirmando que sobre estas situações, é no Cálculo Diferencial “que se dão os processos geraes para achar o verdadeiro valor das quantidades que se tornão 0/0” (LACROIX, 1811, p. 249).

Quando se trata do tema “divisão por zero”, é preciso ainda considerar a hipótese de uma divisão impossível. Para este tema, o autor também faz as suas considerações, conforme observado na sequência:

Resta-nos ainda mostrar como os valores gerais de  $x$ , e de  $y$ , nas equações do primeiro grau, fazem conhecer o absurdo destas equações: para isto, comparemos as fórmulas gerais:  $ax + by = c$ ,  $a'x + b'y = c'$ , as equações  $2x + 3y = 7$ ,  $10x + 15y = 22$  e acharemos:

$$x = \frac{7 \cdot 15 - 3 \cdot 22}{2 \cdot 15 - 3 \cdot 10} = + \frac{39}{0}$$

$$y = \frac{2 \cdot 22 - 7 \cdot 10}{2 \cdot 15 - 3 \cdot 10} = - \frac{26}{0}$$

O denominador, como se vê, desvanesce-se, e não pode, por conseguinte assignar valor algum para o quociente (LACROIX, 1811, p. 250).

Sobre as duas possibilidades expostas (tendo o zero como denominador), o autor considera que, ao chegar em uma situação de aparente impossibilidade de resolução, e/ou a quantidade de incógnitas supera o número de equações, sobressaem-se condições restritivas, como por exemplo, admitir que as incógnitas devem ser números inteiros e positivos para as equações de primeiro grau. Já quando são abordadas as equações do segundo grau, observa-se uma nova área de estudos, chamada de *Análise Indeterminada* a qual, segundo Lacroix (1811, p. 251), “que trataremos sucintamente no fim do *Complemento* desta obra<sup>73</sup>”.

### 5.2.9 Resolução numérica das equações de uma só incógnita

Neste momento dos *Elementos D'Álgebra*, Lacroix (1811), passa a realizar as suas observações acerca da resolução de equações com uma incógnita e grau superior a 2, mais precisamente, graus 3 e 4<sup>74</sup>.

<sup>73</sup>A obra a qual o autor se refere é “Complementos”

<sup>74</sup>Não se tem, para os graus superiores ao quarto, resolução geral, nem mesmo ha, rigorosamente falando, senão a resolução das equações do segundo grau, que se possa olhar como completa. As expressões das raízes do terceiro, e do quarto grau são muito complicadas, sujeitas a excepções, e muito menos commodas na prática que aquelas, que vamos dar achar-se-hão além disto no *Complemento*. (LACROIX 1811, p.252)

As proposições feitas pelo autor objetivavam desenvolver os conceitos algébricos superiores naqueles dispostos a estudar a sua obra. Com raciocínios abstratos, seguidos de exemplos numéricos, Lacroix (1811), buscava assim demonstrar o apresentado nos parágrafos antecedentes. Como exemplo, temos a proposição para a resolução de equações de grau 3, conforme mostra a Figura 51:

Figura 51 - Proposição algébrica para resolução de uma equação de grau 3

Se tenho, por exemplo,

$$x^3 + \frac{ax^2}{m} + \frac{cx}{n} + \frac{d}{p} = 0, \text{ farei } x = \frac{y}{mnp}, \text{ e substituindo na equação, terei}$$

$$\frac{y^3}{m^3 n^3 p^3} + \frac{ay^2}{m^3 n^2 p^2} + \frac{cy}{mn^2 p} + \frac{d}{p} = 0,$$

multiplicando por  $m^3 n^3 p^3$ , tenho

$$y^3 + \frac{am^3 n^3 p^3}{m^3 n^2 p^2} y^2 + \frac{m^3 n^3 p^3}{mn^2 p} y + \frac{m^3 n^3 p^3 d}{p} = 0, \text{ e fazendo as divisões indicadas}$$

$$y^3 + anpy^2 + m^2 np^2 cy + m^3 n^3 p^2 d = 0.$$

Se  $m, n$ , e  $p$  fossem iguaes, bastaria fazer  $x = \frac{y}{m}$ ; donde se segue, que para mudar huma equação, de que todos os coefficients são números inteiros, mas de que o primeiro termo tem hum coefficiente, em outra, na qual este primeiro termo tenha por coefficiente somente a unidade, e os outros tenham com tudo inteiros por coefficientes, he preciso fazer  $x = \frac{y}{m}$ , designando  $m$  o coefficiente do primeiro termo.

Com effeito, se tenho a equação  $mx^3 + ax^2 + bx + c = 0$ ; dividindo por  $m$ , terei

$$x^3 + \frac{a}{m} x^2 + \frac{b}{m} x + \frac{c}{m} = 0,$$

na qual todos os denominadores são iguaes.

Esta operação reduz-se evidentemente a multiplicar todas as raizes da proposta pelo numero  $m$ , pois que  $x = \frac{y}{m}$  dá  $y = mx$ .

204 Agora pois que  $a$  sendo a raiz da equação

$$x^n + Px^{n-1} + Qx^{n-2} + \dots + Tx + U = 0,$$

se tem

$$U = -a^n - Pa^{n-1} - Qa^{n-2} - \dots - Ta \quad (183),$$

segue-se que  $a$  he necessariamente hum dos divizores do numero inteiro  $U$ , e que por conseguinte quando este numero tem poucos divizores, bastará substitui-los successivamente em lugar de  $x$  na equação proposta, para reconhecer se ella tem huma raiz em números inteiros, ou não.

Fonte: Lacroix (1811, p. 250-251)

Dessa forma, como citado anteriormente, na sequência o autor apresenta um exemplo com números para ilustrar aquilo que discorreu algebricamente.

Então, a partir da equação  $x^3 - 6x^2 + 27x - 38 = 0$ , Lacroix (1811, p. 252), afirma que:

O numero 38 nao tendo por divisores senão os números:

$$1, 2, 19, 38$$

Tentar-se-hão , tanto positiva , como negativamente, e se achará que se o numero inteiro + 2 satisfaz a equação proposta, ou que  $x = 2$ . Dividir-se-ha depois disto a equação proposta por  $x-2$ , igualando a cifra o quociente, formar-se-ha a equação:

$$x^2 + 4x + 19 = 0$$

de que as raízes são imaginarias; e resolvendo—as, se achará que  $x^3 - 6x^2 + 27x - 38 = 0$  , admite três valores,

$$x = 2, x = 2 + \sqrt{-15}, x = 2 - \sqrt{-15}.$$

No entanto, como foi possível perceber no exemplo anterior, o último número da equação, 38, possui apenas quatro divisores fato este que, ao utilizar o método proposto pelo autor, torna o trabalho menos penoso. Todavia, quando o último termo de uma equação apresenta uma quantidade maior de divisores, o que tornaria o método até aqui proposto impraticável, Lacroix (1811), propõe outra forma de resolução, conforme mostra inicialmente a Figura 52.

Figura 52 - Parte I da resolução de equações com último termo de vários divisores

$$U = -a^n - Pa^{n-1} - Qa^{n-2} \dots - Ta$$
 fornece novas condições, que abbreviãõ muito o calculo. A fim de fazer o methodo mais claro, tomaremos hum exemplo, a saber : a equação

$$x^4 + Px^3 + Qx^2 + Rx + S = 0.$$
 a designando sempre a raiz, ter-se-ha

$$a^4 + Pa^3 + Qa^2 + Ra + S = 0,$$
 ou

$$S = -Ra - Qa^2 - Pa^3 - a^4,$$

Fonte: Lacroix (1811, p. 252)

A parte I do método resolutivo proposto pelo autor, apresentado acima, é complementado na sequência, na parte II, através da Figura 53.

Figura 53 - Parte II da resolução de equações com último termo de vários divisores

$\frac{S}{a} + R = -Qa - Pa^2 - a^3$   
 Vê-se logo por esta ultima equação, que  $\frac{S}{a}$  deve

fer hum numero inteiro.

Passando depois d'isto R' para primeiro membro, virá

$$\frac{S}{a} + R = -Qa - Pa^2 - a^3,$$

fazendo, por abbreviar  $\frac{S}{a} + R = R'$ , e dividindo os dous membros da equação

$$R' = -Qa - Pa^2 - a^3$$

por  $a$ , ter-se-ha

$$\frac{R'}{a} = -Q - Pa - a^2,$$

donde se concluirá que  $\frac{R'}{a}$  deve ainda fer hum numero inteiro.

Passando Q para o primeiro membro; fazendo  $\frac{R'}{a} + Q = Q'$ , depois dividindo os dous membros por  $a$ , se obterá

$$\frac{Q'}{a} = -P - a,$$

donde se concluirá que  $\frac{Q'}{a}$  deve fer hum numero inteiro.

Passando finalmente P para o primeiro mem-

fazendo  $\frac{Q'}{a} + P = P'$ , e dividindo por  $a$ , ter-se-ha  
 $\frac{P'}{a} = -1$ .

Reunindo as condições, que acabamos de annunciar, ver-se-ha que o numero  $a$  será a raiz da equação proposta, se satisfizer ás equações

$$\frac{S}{a} + R = R'$$

$$\frac{R'}{a} + Q = Q'$$

$$\frac{Q'}{a} + P = P'$$

$$\frac{P'}{a} + 1 = 0.$$

de maneira que  $R'$ ,  $Q'$ , e  $P'$  sejam numeros inteiros.

Na continuação de sua demonstração, para que seja verificado, se de fato, um dos divisores do último termo “S” pode ser a raiz da equação proposta, Lacroix (1811, p.254) propõe, como parte III de seu raciocínio:

- 1.º Dividir o último termo pelo divisor a, e ajuntar ao quociente o coeficiente do termo affecto de x;
- 2.º Dividir esta soma pelo divisor a, e ajuntar ao quociente o coeficiente do termo affecto de x<sup>2</sup>;
- 3.º Dividir esta soma pelo divisor a, e ajuntar ao quociente o coeficiente do termo affecto de x<sup>3</sup>;
- 4.º Dividir esta soma pelo divisor a, e ajuntar o quociente a unidade, ou o coeficiente do termo affecto de x<sup>4</sup>; o resultado deverá ser igual a cifra, se a he, com effeito a raiz.

A última regra (partes I, II e III) apresentada por Lacroix (1811), atende a equações de qualquer grau, desde que seja observado o princípio de que os valores de resultado podem ser buscados apenas quando se tiver chegado ao primeiro termo da equação proposta, pois do contrário, a tentativa resultará somente em fracasso.

Com a ideia de mostrar que a sua forma de buscar a(s) raiz(es) da equação poderia(m) ser validada(s), na sequência, Lacroix (1811), nos apresenta um exemplo com valores numéricos, percorrendo longamente e explicando minuciosamente cada um dos passos, conforme mostraremos a seguir.

Inicia-se esta validação pela seguinte equação:

$$x^4 - 9x^3 + 23x^2 - 20x + 15 = 0$$

Na sequência, será apresentado o demonstrativo do cálculo onde, na linha i, todos os divisores do último termo, 15, encontram-se arranjados por ordem decrescente, na primeira linha, conforme visto abaixo:

$$i) + 15, +5, +3, +1, -1, -3. - 5, -15$$

$$ii) + 1, +3, +5, +15, -15, -5, -3, -1$$

$$iii) - 19, -17, -15, -5, -35, -25, -23, -21$$

$$iv) - 5, -5, +35$$

$$v) + 18, +18, +58$$

$$vi) + 6, +18, -58$$



$$vii) - 3, +9, -67$$

$$viii) - 1, +9, +67$$

Com relação aos valores apresentados nas linhas subsequentes a i, os mesmos representam, respectivamente, os seguintes atributos: os quocientes do número 15 divididos, de forma sucessiva, por todos os seus divisores (a linha ii representa, portanto, os valores correspondentes a  $S/a$ ); na sequência, na linha iii, temos o valor correspondente ao coeficiente -20, que multiplica  $x$ , somado a cada valor encontrado na linha anterior ( $R' = S/a + R$ ); a próxima sequência de valores, termos da linha iv, é formada pelos quocientes da operação  $R'/a$ , onde são desconsiderados os valores não-inteiros; a linha v, por sua vez, é composta pela expressão de resultados expressos na linha iv, acrescidos de 23, que é o termo que multiplica  $x^2$  (os resultados aqui encontrados equivalem a  $Q'$ ); a linha vi, é a expressão dos resultados de  $Q'/a$ ; na sequência, a linha vii, abarca os valores encontrados na linha anterior, somados de -9, valor que acompanha  $x^3$  ( $Q'/a + P$ ); por fim, a última linha, de número viii, é obtida através da divisão daquela que a antecede, pelo coeficiente corresponde "a", da primeira linha.

Feito isso, percebe-se que o valor -1 não é encontrado na coluna correspondente. Assim, é correto afirmar que a equação  $x^4 - 9x^3 + 23x^2 - 20x + 15 = 0$  possui uma, e pelo menos uma, raiz mensurável (que é +3) e que é divisível por  $x - 3$ .

No decorrer de mais exemplos, Lacroix enumera ainda mais algumas regras para a resolução das equações, tais como:

Se se faz desaparecer o segundo termo de huma equação, substituindo a incógnita desta equação por huma nova incógnita, a qual se ajunta o Coeficiente do segundo termo, tomado com final contrário ao de que está affecto, e dividido pelo expoente do primeiro termo (LACROIX 1811, p. 267).

Quando se tem achado duas quantidades, que substituídas em huma equação no lugar da incógnita, dão dous resultados de final contrário, pode concluir-se que huma das raízes da equação proposta he comprehendida entre estas duas quantidades e, por conseguinte he real (LACROIX, 1811, p. 270).

Toda a equação de grao impar tem, necessariamente uma raiz real de sinal contrário ao do seu último termo (LACROIX 1811, p.274-275).

Toda equação de grao par, cujo último termo for negativo, terá ao mesmo duas raízes reaes, huma positiva, e a outra negativa (LACROIX, 1811, p. 275).

Outra observação digna de nota, referente à obra do autor em análise é sobre o “Método das substituições sucessivas”, o qual Lagrange acurou em suas *Memórias da Academia de Berlin*, desenvolvidas entre os anos de 1767 e 1768. Neste estudo, notadamente, o que ele descobriu foi que substituindo apenas números inteiros, em algumas ocasiões, não eram percebidas algumas das raízes destas equações. Ainda sobre o método das substituições, Lacroix (1811, p. 285), observa que os números inteiros, compreendidos entre zero e três, “offerecem muitas vezes indícios suficientes para fazer suspeitar a existência de raízes cuja diferença he menor que a unidade”.

Por fim, neste tópico, Lacroix (1811) recomenda que aqueles que desejarem aprofundar os seus conhecimentos acerca dos divisores comensuráveis das equações, devem fazê-lo na terceira parte dos *Elementos d'Algebra* de Clairaut<sup>75</sup> e adverte que ele, Lacroix, manteve as suas atenções voltadas para as equações literais e equações numéricas.

### 5.2.10 Das proporções e das progressões

Ao discorrer sobre este assunto, proporções e progressões, o autor sugere adicionar a Álgebra a cada um dos conceitos já apresentados, sejam estas as proporções aritmética e geométrica. A partir deste ponto, Lacroix (1811), sugere então que, a estas noções, sejam aplicados os conceitos algébricos para que se obtenham alguns resultados de uso recorrente na Geometria.

Assim, iniciam-se as discussões deste tópico por meio dos conceitos de equi-diferença e proporção onde, a equi-diferença é tratada em Lacroix (1811, p. 292) como uma sequência onde, “a soma dos termos extremos he igual a soma dos termos médios” ao passo que, a proporção é “o producto dos termos extremos igual ao producto dos termos médios”.

Quando, em uma equi-diferença, temos elementos denominados A, B, C e D, tais que B seja igual a C, dizemos que esta equi-diferença é contínua, o mesmo valendo para uma proporção de termos a, b, c e d. Portanto, pode-se

---

<sup>75</sup> Alexis Claude Clairaut (1713-1765) foi considerado um dos matemáticos mais precoces da história, ao ser admitido aos dezoito anos na Académie des Sciences de Paris. Uma, entre tantas, de suas mais valiosas contribuições para a matemática foi o tratado (que leva o seu nome) onde ele propunha um método para a projeção no espaço, e em dois planos coordenados, das curvas (BOYER, 1989).

concluir que  $A + D = 2B$  e, em consequência,  $ad = b^2$ . Destas afirmativas, podemos deduzir que

$$B = \frac{A + D}{2} \quad \text{e} \quad b = \sqrt{ad},$$

onde, a quantidade B é o meio entre A e D (ou o que costumamos chamar de média aritmética), e a quantidade “b” é a média proporcional (ou média geométrica) entre “a” e “d” (LACROIX, 1811).

Na sequência a esta apresentação, o autor mostra algumas das principais propriedades da “teoria das proporções”, quais sejam:

O primeiro antecedente mais ou menos hum certo número de vezes o seu conseqüente, está para o segundo antecedente mais ou menos o mesmo numero de vezes o seu conseqüente, como o segundo termo está para o quarto, ou como o primeiro para o terceiro [...]. A soma dos antecedentes está para a sua diferença, como a soma dos conseqüentes está para a sua diferença (LACROIX, 1811, p. 294).

A soma ou a diferença dos antecedentes está para a soma, ou a diferença dos conseqüentes, como qualquer antecedente está para o seu conseqüente e que a soma dos antecedentes para a sua diferença, como a soma dos conseqüentes está para a sua diferença (LACROIX, 1811, p. 295).

A soma de qualquer número de antecedentes está para a forma de hum igual número de conseqüentes, como qualquer antecedente está para o seu, conseqüente. (LACROIX, 1811, p. 296).

Estas propriedades apresentadas acima, sem os seus exemplos numéricos<sup>76</sup>, trazem alguns dos princípios utilizados para se descobrir quantidades, através da comparação com outras. Ao nos trazer esses pontos da teoria das proporções, o autor não fazia nada mais do que preparar os leitores e os que estudam esta obra para, na sequência, trabalhar o conceito de Progressão Aritmética<sup>77</sup> que para Lacroix (1811, p. 297) é observado tendo concebido:

Na equi-diferença continua três quantidades, das quaes a última exceda à segunda, quanto esta à primeira, se pode logo considerar um número indefinido de quantidades, a, b, c, d, e, &c, taes que cada uma delas exceda a que precede a huma mesma quantidade  $\beta$ <sup>78</sup>, de sorte que  $b = a + \beta$ ,  $c = b + \beta$ ,  $d = c + \beta$ ,  $e = d + \beta$ , &c.

<sup>76</sup>Entende-se por bem apenas citá-las para dar uma ideia geral dos assuntos tratados e, pelo fato de, nesta altura da obra consultada, o desenvolvimento ficar restrito ao campo algébrico.

<sup>77</sup> O uso do termo “progressão aritmética” traz uma ressalva onde, entende o autor ser mais apropriado o termo “progressão por diferenças”. No entanto, como contemporaneamente o termo utilizado é o primeiro, deixaremos a sugestão do autor em segundo plano. (LACROIX, 1811, p. 298)

<sup>78</sup> Este símbolo, utilizado nesta citação, não representa o original da obra, pois não o mesmo não fora localizado nas configurações deste editor de texto.

Da mesma forma que nos traz os pontos da teoria das proporções, para chegar ao conceito de progressão aritmética, o autor também prepara o mesmo público para, na sequência, expor o conceito de Progressão Geométrica<sup>79</sup> que para Lacroix (1811, p. 297) consiste “em uma série de termos taes que o quociente de hum termo dividido pelo seu precedente, he sempre o mesmo, em qualquer lugar que seião tomados estes dous termos”.

Acerca do assunto progressões, são tratados, ainda, a soma e o termo geral em cada uma destas e, ainda no caso das séries, a questão da convergência e divergência. Serão realizados maiores comentários sobre estes, pois, a obra carece de maiores exemplos numéricos, ficando restrito aos casos algébricos nestas situações, o que entende-se tornar restrito qualquer tecimento de comentários a ser feito.

### 5.2.11 Teoria das quantidades exponenciais e logaritmos

Neste capítulo, o penúltimo da obra, Lacroix (1811), trata da questão exponencial. Nas lições anteriores, o autor contemplou todos os conhecimentos que antecedem o estudo de uma incógnita quando esta se localiza no expoente.

De tal sorte que, caso se tivesse uma situação como  $a^b = c$ , por exemplo, os métodos expostos até este momento não seriam suficientes para que fosse encontrado o valor correspondente à incógnita “x”. O objetivo exposto pelo autor é o de, neste capítulo, mostrar ao seu público “a ligação, que existe entre as diversas operações da Álgebra, e como cada huma delas dá nascimento a huma nova espécie de quantidades” (LACROIX, 1811, p. 309).

Observando o exemplo dado,  $a^b = c$ , pode-se de antemão tirar algumas conclusões que formam as primeiras propriedades das equações exponenciais. Resumidamente, Lacroix (1811, p. 310) afirma que:

He fácil de ver que conservando o mesmo valor para a letra a que suppremos acima da unidade, e variando convenientemente o valor de b, se poderão obter para c, todos os números possíveis. Com effeito, fazendo b=0, vem c=1; e quando b crescer, os valores

---

<sup>79</sup> O uso do termo “progressão geométrica”, também traz uma ressalva onde, entende o autor ser mais apropriado o termo “progressão por quocientes”. Da mesma forma, e pelos mesmos motivos, deixaremos a sugestão do autor em segundo plano (LACROIX, 1811, p. 299).

correspondentes de “c” excederão cada vez mais a unidade, e poderão aumentar tanto, quanto se queira.

Seguindo com este raciocínio, em relação a  $a^b = c$ , Lacroix (1811), reescreve a proposição da seguinte forma:  $a^x = y$ . Após a reescrita, pode-se verificar que, ao mesmo tempo em que “a” não sofreu alteração, as outras duas quantidades foram alteradas simultaneamente para “x” e “y”. Isso feito, tem o objetivo de mostrar de uma maneira mais clarificada que as incógnitas são dependentes uma da outra e, ainda, o valor de uma incógnita determina a outra e o contrário também é verdade.

Ao falar da questão dos exponenciais e avançar, chega-se ao tema dos logaritmos. Lacroix (1811) também abordou este assunto, principalmente no que diz respeito ao uso dos logaritmos nos cálculos numéricos, por sua possibilidade de torná-los mais simples. Infere-se que, naquele momento histórico, as calculadoras não possuíam nem o alcance, nem as possibilidades que dispõem contemporaneamente e, dessa forma, para que os logaritmos pudessem ser estudados, era necessário o apoio de uma “tábua de logaritmos”, onde:

Os valores de x são designados nestas taboas debaixo do nome da logarithmos e, por conseguinte os logarithmos são os expoentes das potências as quaes he preciso elevar um número inincógnita, para delle deduzir sucessivamente todos os números possíveis (LACROIX, 1811, p. 319).

Além de enumerar as propriedades dos logaritmos, o autor faz considerações relevantes quanto ao cálculo dos logaritmos quando estes não estão expressos nas tábuas para consulta:

Multiplicando sucessivamente por 2, 3, 4, &c. o logarithmo de 2, se obtém os logarithmos dos números 4, 8, 16, &c. que são as segundas, terceiras, e quartas, &c. potências de 2.  
Ajuntando ao logarithmo de 2, os logarithmos de 10, 100, 1000, &c. se deduzem os de 20, 200, 2000; e &c.; e he evidente que basta ter os logarithmos dos números primos, para achar os logarithmos de todos os números compostos, os quaes não podem ser senão potencias, ou productos, dos números primos (LACROIX, 1811, p. 321).

Uma forma de ilustrar as considerações acima é o exemplo dado por Lacroix (1811, p. 321), onde este propõe o cálculo do logaritmo do número 210, onde sabendo-se que, decompondo a quantidade 210 em fatores primos, teremos  $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$  ou, a fim de cálculo do logaritmo propriamente dito teríamos, aplicando as propriedades:  $\log 210 = \log 2 + \log 3 + \log 5 + \log 7$ .

Por fim, neste estudo sobre logaritmos, o autor desenvolve algumas notações e exemplos para o cálculo dos logaritmos fracionários e uma noção da resolução de sistemas logarítmicos. Ainda, antes do fechamento desta parte, o autor faz algumas considerações a propósito das “taboas de logarithmos”,

Que são quase todas precedidas de huma instrucção relativa à sua disposição particular, e à maneira de usar dellas, e para a qual remetemos os leitores. Inculcar-lhes-hemos com tudo as taboas de Callet (edição Stereotypa), como sendo as mais extensas, e as mais commodas (LACROIX, 1811, p. 319).

Na sequência, e para encerramento da análise desta obra, será realizada uma revisão no que diz respeito ao conteúdo de matemática financeira que, na obra em estudo, foi chamado de “Questões relativas aos juros do dinheiro”.

#### **5.2.12 Questões relativas aos juros do dinheiro**

A teoria das progressões geométricas e a dos logaritmos tem implicação direta no desenvolvimento dos problemas relativos ao dinheiro. Para que se veja de forma mais clarificada, antes, é necessário estabelecer que, aquele que disponibiliza uma quantia em dinheiro receberá uma compensação por isso e, quem a busca, deverá indenizar o seu financiador. As instituições financeiras operam com esta lógica de sustentação de seu negócio e, o planejado é que, aquele que tomou um numerário o devolva, com as devidas compensações em um determinado intervalo de tempo (LACROIX, 1811).

Ao abordar o conceito de juro simples, o autor utiliza como exemplo uma situação hipotética, em que ao longo de um ano, tenha sido acordado com o financiador de um empréstimo, no valor de 100 (unidades monetárias), uma remuneração de “ $r$ ”, tendo assim, ao final do período, um valor a receber de 100 acrescidos do juro “ $r$ ”. Dessa forma, sabendo o prazo para a devolução do empréstimo de um valor determinado, acrescido do juro, temos a situação em que se souber o valor total dos juros durante o período, será conhecido também o valor da soma durante um dado período. A essa operação, denomina-se cálculo de juros simples.

Por outro lado, destaca Lacroix (1811), caso o nosso financiador resolva, ao invés de recolher ao final de um dado período os juros de seu fomento, deixar na mão do tomador do empréstimo por mais um ano o capital solicitado, haverá

uma forma diferente de cálculo, o que tornará o primeiro raciocínio inválido. Para esta nova proposição, uma nova forma de calcular, onde há o juro do segundo ano, acrescido sobre o juro do primeiro. A fórmula abaixo contempla essa questão como dissertado na sequência:

$$A = a * (1 + r)^n ,$$

onde, A é o valor total a ser recebido pelo financiador, a é o valor solicitado pelo tomador do empréstimo, r é a fração referente a taxa de correção que o financiador cobra como compensação (juros) e, n será o tempo em que o valor permanecerá emprestado. A essa operação descrita acima, denomina-se juros compostos.

A obra apresenta alguns exemplos algébricos e algumas variações de cálculos possíveis dentro da lógica dos juros compostos. Na sequência, será analisado o que, de fato esta obra representa dentro do contexto da instrução militar brasileira no período oitocentista brasileiro e, mais, quais são os pontos estudados pelos alunos da Real Academia Militar e que atendiam aos anseios e necessidades da corporação.

### 5.2.13 Análises e reflexões acerca dos *Elementos D'Álgebra*

A obra analisada, composta de 351 páginas, traduzida para a língua portuguesa por ordem de “Sua Alteza Real”, o Príncipe Regente, para uso dos alunos da Real Academia Militar, foi impressa em 1811, pela Imprensa Régia, a qual foi fundada por D. João para servir como uma espécie de gráfica imperial.

Ao examinar a obra, que foi dividida em doze tópicos, os *Elementos D'Álgebra* de Lacroix (1811), é possível perceber uma introdução àquilo que se deseja construir, seja bem didática e elementar para aqueles alunos que, de fato, soubessem somente as quatro operações se familiarizar com a obra. Tal era essa elementaridade que, ao longo das páginas 1, 2 e 3, o autor se reserva à apresentação dos sinais envolvidos em uma operação matemática, conforme podemos verificar em Lacroix (1811, p. 3):

Para indicar a adição, usa-se do sinal +, que significa *mais*; para a subtração, usa-se o sinal -, que significa *menos*; para a multiplicação usa-se o sinal x, que significa *vezes*; [...]; em fim, para para marcar que

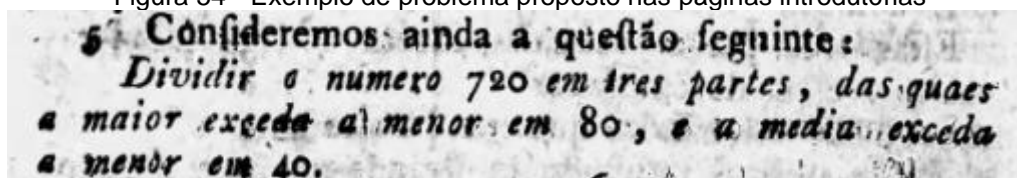
duas quantidades são iguaes, põe-se entre as duas expressões o sinal =, que significa *igual*.

Não menos importante é tratar da questão da divisão, a qual era explicada e representada em forma de fração que, desta forma era assim explanada:

Para explicar que duas quantidades devem ser divididas huma pela outra, põe-se a segunda debaixo da primeira separando-a por um traço:  $\frac{3}{4}$ , significa 3 dividido por 4 (LACROIX, 1811, p. 3).

Na sequência, da página 4 até a página 8, o autor apresenta exemplos de questões de fácil entendimento e resolução, como por exemplo, a Figura 54 nos mostra:

Figura 54 - Exemplo de problema proposto nas páginas introdutórias



Fonte: Lacroix (1811, p. 7)

Na parte seguinte, o autor inicia o estudo das equações, dando uma breve definição do que estas representam e de como elas se constituem. A que se destacar dentro das “três cousas” necessárias para o entendimento da Álgebra, destacamos a primeira delas, onde Lacroix (1811) destaca fundamentalmente que para compreender a natureza das relações que estão intrínsecas a cada enunciado proposto, é algo que pode ser adquirido pelo espírito “pelo uso” e que, para isto, não existem regras.

Neste ponto, somos levados a perceber que Lacroix (1811) aposta na repetição como método de aprendizado, não havendo outra possibilidade que não essa, embora o regramento para que isso ocorra não exista.

A segunda das “cousas”, fala sobre a capacidade de expressar as relações da “cousa anterior” por meio de uma equação. Aqui, o autor dá a entender que há vários níveis de dificuldade a serem observados para que se atinja o objetivo, especialmente quando afirma que a aplicação “he mais, ou menos fácil, segundo a natureza das questões, a capacidade e o exercício, que comprehende resolve-las” (LACROIX, 1811, p. 9).



Ao chegar à terceira “cousa”, chega-se a parte final das equações, que é a resolução propriamente dita. Aqui, o autor faz a ressalva no que diz respeito aos regramentos que podem surgir, de acordo com a particularidade de cada questão. Em resumo, o que se quer dizer é que “este último ponto he susceptível de hum numero determinado de regras, que vamos expor sucessivamente” (LACROI,X 1811, p.9). Nas páginas 10 até 34 são apresentadas as variações possíveis para o desenvolvimento das equações e suas diferentes possibilidades de apresentação.

Quando fala da possibilidade das quantidades positivas e negativas, o autor chama atenção para a representação absoluta que é dada quando se utilizam letras para representar uma determinada quantidade. Ora, aqui o que se quer é reafirmar que a notação dos sinais “+” ou “-“, é quem vai determinar se a quantidade em questão será somada ou diminuída de outra e, ao final, se teremos sobra ou escassez de quantidade.

Aqui, sobre esta última ideia proposta, entende-se como positiva para este público, em tese não conhecedor da proposição do autor, visto que, no nosso entendimento, a questão de números positivos ou negativos torna-se mais amigável a quem está tentando apreender o conceito quando, sobretudo, no que se refere aos números negativos, se aborda a questão da falta.

Passando da questão da “sobra” ou da “falta” de quantidades para as operações matemáticas em geral, onde são apresentados os mínimos regramentos para a adição, subtração e multiplicação algébricas. Deste modo, o autor discorre que, por exemplo, na adição de termos semelhantes e sinais iguais, como por exemplo, um determinado dado por “a” e outro, igualmente por “a”, não se tem maiores complicações a não ser realizar a operação a qual retornará como resultado “2a”. Já, quando temos uma operação de termos semelhantes com sinais diferentes, Lacroix (1811, p. 38) observa que

A addição das quantidades algébricas faz-se, escrevendo suas partes humas após das outras, com os seus sinaes taes quaes elles são: reduzem-se depois a huma só as quantidades semelhantes, ajuntando de huma parte todas as que tem o sinal +, e de outra parte todas as que tem o sinal -. Em fim subtrahe-se o menor resultado do maior, e da-se ao resto o final, que tinha o maior.

Ainda falando em adição, Lacroix (1811, p. 38), alerta para o caso dos termos em questão não apresentarem semelhança. Dados dois termos, “a” e “b”, por exemplo, o resultado esperado não pode ser diferente de a “a + b”.

No que diz respeito à operação de subtração, o autor observa uma regra semelhante àquela que ouvimos nas salas de aula e que, por vezes relembra os nossos alunos:

Mudem-se os sinais dos termos da quantidade, que se deve subtrahir, isto he, mude-fe + em -, e - em +, somme-se depois esta quantidade, assim mudada, com aquella, da qual se pretende subtrahir, e reduza-se (LACROIX, 1811, p. 39).

Em suma, isso quer dizer que na subtração, quando temos o sinal de “-“ na frente de algum termo, é alterado se o sinal do termo em questão, ou seja, o que era “-“ muda para “+” e, o que era “+” muda para “-“. É claro, e sempre é considerável a lembrança, que esses regramentos são observáveis para operações algébricas, pois quando são tratadas situações que envolvam apenas números, as operações são mais simplificadas e não requerem tantos cuidados.

De forma análoga à adição, quando se busca fazer a subtração de termos diferentes, Lacroix (1811, p. 39), exemplifica com a operação de dois termos, “a” e “b”, não é esperado um resultado diferente de “a - b”.

Quando chega o momento da multiplicação, o autor adota duas abordagens diferentes, a primeira quando temos termos distintos, ex.: a, b, c, d, etc e, a segunda, quando temos termos semelhantes, como por exemplo a e a.

No primeiro caso, repete-se as letras, tantas quantas forem: abcd, indicando que uma está multiplicando a outra. No segundo caso, ao invés de repeti-las, quantas vezes estiverem sendo multiplicadas como, por exemplo, aa convencionou-se escrever  $a^2$ . Ainda a respeito da multiplicação, observa-se a famosa e temida pelos alunos “regra dos sinais na multiplicação”, onde Lacroix (1811, p. 50), define-a assim:

Se os dous termos, que se devem multiplicar hum pelo outro, tem ambos o mesmo sinal, isto he, ou ambos +, ou ambos —, o seu producto terá sempre o final +. Se, ao contrário, elles tem sinais diferentes, isto he, hum + e a outro -, ou hum - e o outro +, o seu producto terá sempre o final —.

Por fim, quando o autor discorre sobre a divisão algébrica, constata-se uma situação ímpar no que se refere a termos semelhantes, pois, por exemplo,

quando o dividendo e o divisor são monômios, se todas as incógnitas, que estão no divisor, estiverem também no dividendo, a operação de divisão pode fazer-se de forma exata e será executada conforme a seguinte regra:

Suprimão-se no dividendo todas as letras que lhe são comuns com o divisor; as letras que restarem comporão o quociente. Assim, para dividir  $ab$  por  $a$ , suprimo  $a$  no dividendo  $ab$ , e tenho  $b$  para quociente. Para dividir  $abe$  por  $ab$ , suprimo  $ab$  no dividendo, e tenho  $e$  para quociente (LACROIX, 1811, p. 56).

Quando tratamos de divisões onde há expoentes, o autor ainda chama a atenção para a seguinte regra:

Subtrahir o expoente de cada letra do divisor do expoente da mesma letra. no dividendo. Assim para dividir  $a$  por  $a^2$ , abato 2 de 3, resta-me 1, e por consequencia tenho  $a^1$  para o quociente (LACROIX, 1811, p. 56).

Por outro lado, em uma situação inversa, observa o autor, onde o valor do expoente no dividendo é maior que a do divisor, escreve a unidade no lugar daquele em que houve “falta de quantidade”. Assim, por exemplo, uma divisão onde se tenha  $a^2$  dividido por  $a^3$ , ao executar a divisão, igualmente subtrai-se o expoente; no numerador teremos a unidade e, no denominador a incógnita  $a$ , permanecerá com o expoente 1. A notação para essa resposta será  $1/a$ . Por fim, com expoentes iguais, a resposta será sempre a unidade, pois trata-se de uma divisão de quantidades iguais.

Este percurso das quatro operações básicas que Lacroix (1811) tem o objetivo, em sua obra, de se chegar na operação das frações algébricas ou, “frações literais”, como o próprio menciona. Aqui são apresentados os diversos regramentos das diversas operações, todos eles repetindo o que já fora mencionado nos parágrafos acima que tratam das operações algébricas. O destaque é para a quantidade de exemplos dados, em número de 6, que trazem um bom horizonte para os alunos que estão em busca do aprendizado. Isso claro, tomando-se como referência conteúdos anteriores, alguns sem exemplo algum.

No que tange às equações do primeiro grau com mais de uma incógnita, Lacroix (1811, p. 89) nos apresenta o modelo conhecido, com a transposição e posterior substituição de incógnitas. Chega-se em algum momento, sem fazer uso do termo, a ser utilizado como exemplo a resolução de um sistema linear

com três incógnitas e três equações, o que para o exemplo dado, trata-se de um Sistema Possível e Indeterminado. Por óbvio que não há esse objetivo de definir o modelo dado como um sistema linear e, nem é empregado neste momento o termo matriz.

Outro exemplo utilizado pelo autor, mostra uma tentativa de associar os conhecimentos de Álgebra às outras Cadeiras, que faz referência a um composto químico envolvendo ouro e prata conforme mostra a Figura 55.

Figura 55 - Exemplo de problema envolvendo a Cadeira de Química

85 Problema 2º. Fez-se hum misto de ouro, e prata, cujo volume total he de 25 centimetros cubicos, e o pezo 355 grammas hum centimetro cubico de ouro peza 19 grammas, e hum centimetro cubico de prata peza 11 grammas: Pergunta-se que quantidades de ouro, e prata entrarão nesta liga.

Fonte: Lacroix (1811, p. 94)

Acerca do método de extração das raízes quadradas, nas quantidades algébricas, o autor segue os caminhos conhecidos de memorização através de uma “tábua de potências” de grau 2, na tentativa de demonstrar que para se extrair essas raízes, faz-se a operação inversa da potenciação. O exemplo de extração de raízes para um dado número composto, ora apresentado que estende a sua explanação da página 112 até 114 (já exposta neste trabalho), mostra o quão delicada pode se tornar esta operação, onde se tem diversas etapas e raciocínios a serem cumpridos como, por exemplo, na etapa inicial onde Lacroix (1811, p. 114) sugere escrever “o número proposto como se se tratasse de o dividir por outro, e destina-se para a raiz, o lugar de deveria ocupar o divisor”.

Encerrando este conteúdo, o autor propõe aos seus leitores que, “aquelles que quiserem exercitar-se” poderão extrair as raízes de 2 e 3, com a precisão de sete casas decimais, tratando, portanto, da extração de raízes de números que não possuem raízes exatas, indo além dos ditos incomensuráveis, os quais chamamos contemporaneamente de irracionais.

Ao adentrar no conteúdo das equações do segundo grau, embora já conhecido à época, não visualizamos a proposição do método resolutivo para

equações do segundo grau, também conhecido como “fórmula de Bhaskara”<sup>80</sup>. O método sugerido pelo autor é o da redução dos membros a produtos notáveis e, a partir daí, se verificar a existência de raízes reais ou imaginárias. Para exemplificar o método apresentado, Lacroix (1811) oferece cinco exemplos, entre as páginas 140 e 153 o que demonstra que, a sua teoria proposta, embora também seja válida, tem um grau de dificuldade maior que a popular fórmula de Bhaskara.

Ao abordar a resolução das equações de qualquer grau, dentro da Teoria geral das equações, Lacroix (1811) traz à discussão diversas regras e situações em que podem vir a ocorrer, mas dá maior atenção à regra da eliminação como desenvolvido em exemplo nesta investigação. Há diversos exemplos desenvolvidos no decorrer das páginas da obra, 219 à 298, os quais apresentam as mais diversas variações tanto quanto ao grau, que em um exemplo é 6, quanto à natureza das raízes, em um dos casos coexistindo reais e imaginárias.

No caso das raízes imaginárias, o autor observa que estas não serão tratadas neste volume com a profundidade requerida, pois estas requerem o estudo aprofundado sobre temas cuja exposição demandaria um longo e extensivo tempo, o que poderá ser feito em sua obra *Complemento*.

No momento em que chega-se ao capítulo que trata das proporções e, das progressões, Lacroix (1811), faz uma breve introdução ao que vem a ser proporção entre dois ou mais termos para, em seguida, proceder com o estudo das proporções aritméticas (que hoje conhecemos por progressões aritméticas) e das proporções geométricas (que hoje conhecemos por progressões geométricas).

Entre as definições propostas, há ainda, o conceito de média aritmética e média geométrica, bem como as suas fórmulas para obtenção em uma série numérica. Por fim, dentro do mesmo estudo, ainda são consideradas as definições das séries convergentes e divergentes, bem como as particularidades de cada uma delas.

Dentro ainda da obra de Lacroix (1811), restam a tratar dois temas, sendo o primeiro deles as quantidades exponenciais e logaritmos. Neste conteúdo, o autor versa sobre o cálculo da incógnita quando esta se encontra no expoente

---

<sup>80</sup> Bhaskara (1114-1185) é o principal matemático indiano do século XII e tem a si atribuída a “fórmula” bastante conhecida para a resolução de equações quadráticas (BOYER, 1989).

em uma equação qualquer. Também é elucidado o modo de obtenção dos logaritmos de base 10, ou logaritmos naturais. As operações entre logaritmos e o uso das “tábuas logarítmicas” para, através das propriedades, chegar-se ao valor daquelas quantidades não enumeradas nas mesmas.

Por último, são abordadas as questões relativas aos juros do dinheiro, onde Lacroix (1811) apresenta brevemente e com exemplos práticos, essencialmente voltados à questão do empréstimo de valores, a questão dos juros simples e juros compostos. Obviamente, e sabe-se que por conta desde sempre de sua mais larga utilização pelas instituições, os juros compostos ganharam um destaque especial em uma descrição mais apurada das etapas do cálculo. Resta importante dizer sobre isso que, os logaritmos, vistos na questão anterior, são pré-requisitos para este estudo, principalmente nas questões onde o prazo é a incógnita que deve ser encontrada.

É necessário observar que o prazo, ou período, nesta pequena explanação é tratado por anuidade, ou seja, era considerado o período de um ano para os cálculos de juros, ao contrário do que, via de regra, é utilizado com maior frequência contemporaneamente, meses.

Feitas as observações a respeito de cada um dos assuntos desenvolvidos dos *Elementos D'Algebra*, segue-se algumas reflexões acerca do que esta obra representava no contexto do Ensino de Matemática, as dificuldades encontradas que, embora não haja relatos testemunhais de alunos ou de algum lente sobre a obra específica, nos levam as fontes consultadas a inferir que os relatos em seu estado geral referem-se às dificuldades enfrentadas pelos alunos nas aulas de matemática, sejam elas de Álgebra, Aritmética, Trigonometria, Geometria, etc.

Após esta análise da obra *Elementos D'Algebra*, de Lacroix (1811), na sequência, serão analisadas e realizadas as considerações acerca de outra obra utilizada no ensino de matemática da instrução militar brasileira no período oitocentista: *O Tratado de Trigonometria* (LEGENDRE, 1809a).

### 5.3 A TRIGONOMETRIA DE LEGENDRE NA INSTRUÇÃO MILITAR BRASILEIRA

A análise descritiva de cada uma das obras possíveis de localização, requer algumas considerações anteriores a este procedimento. De acordo com Schubring (2003), Adrién-Marie Legendre caracterizou as suas obras “elementares” do método sintético para desenvolver as suas demonstrações, muito embora, no final do século XVIII, o método de ensino predominante nos livros didáticos produzidos fosse o analítico. Legendre foi um dos autores de livros didáticos mais atuantes no início do século seguinte, e o seu sucesso além-fronteiras foi um dos fatores predominantes para a indicação e o uso de sua Geometria e Trigonometria pela Academia Real Militar (BIRAL, 2011).

Ao fazer essa pequena introdução ao *Tratado de Trigonometria*, cabe destacar, ainda, algumas notas introdutórias do tradutor Manuel Ferreira de Araújo Guimarães, o qual reconhece a responsabilidade que tem consigo para a tradução da obra e discorre longo trecho sobre a questão da escala em graus utilizada na França<sup>81</sup>:

Ao traduzir as primeiras páginas senti a dificuldade que terão os Discípulos em abraçar hum systema inteiramente estranho, e do qual, já pela construcção das Táboas mais vulgares, já por ser aquella innovação particular aos Francezes, devião abrir mão, e darem-se à applicação de outros exemplos análogos ao systema ordinário. Para cortar este embaraço, lembrou o fácil expediente de ajuntar ao Texto escrupulosamente conservado (como he dever de hum Traductor) a redução dos grãos e minutos, referidos ao ângulo recto ou ao quadrante, dividido em 90 partes ou grãos, e fechar entre parenthesis esta redução: assim,  $50^{\circ}$  ( a  $45^{\circ}$ ) quer dizer que o arco ou o ângulo de que se trata contém  $50^{\circ}$  da nova divisão ou 45 da antiga (LEGENDRE, 1811, prefácio).

Feita esta observação, o tradutor destaca que em outra obra traduzida, O *Tratado de Geometria*, havia deixado pistas de que no prefácio do *Tratado de Trigonometria* reservaria este lugar (o prefácio) para dar conta das mudanças que se viu obrigado a fazer neste trabalho. Desta forma, a obra em análise possui 125 páginas, das quais a introdução do tradutor ocupa as 6 primeiras páginas e a ERRATA, a página 7; sendo estas citadas não-numeradas.

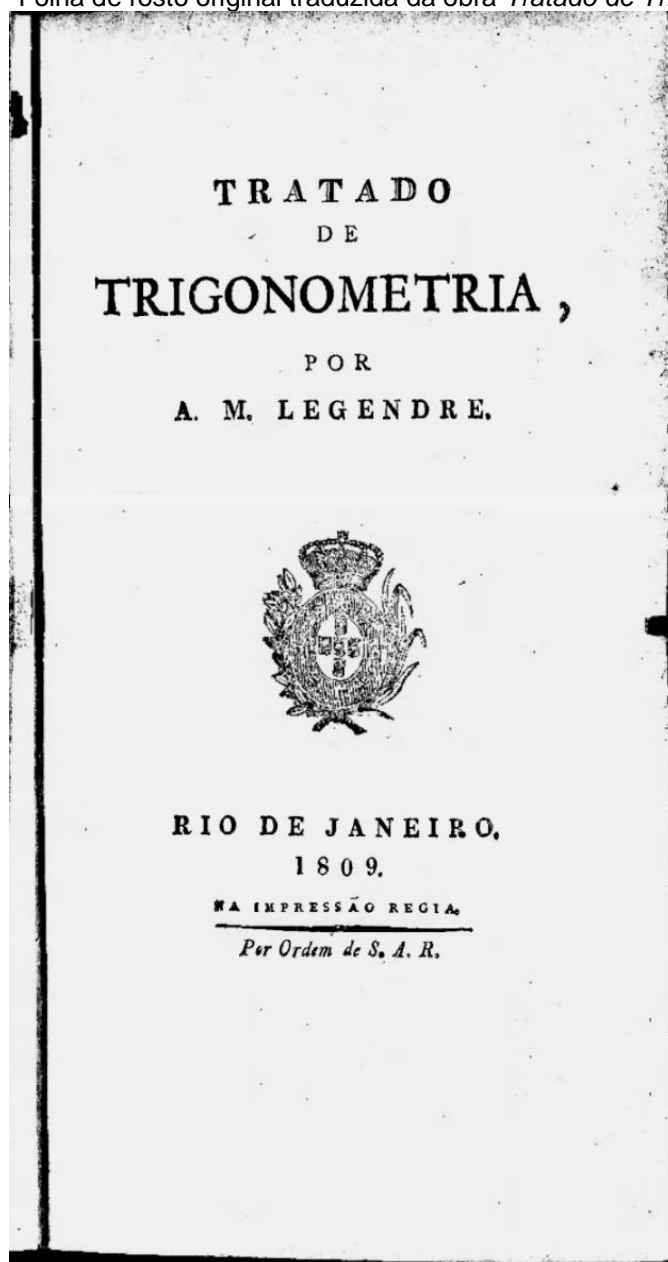
---

<sup>81</sup> No período pós-revolução francesa, fora solicitado à Academia de Ciências para elaborar escalas baseadas no sistema métrico decimal (BOYER, 1989)

Sobre os assuntos tratados na obra, esta inicia-se com os objetivos da Trigonometria na página 1; divisão da circunferência (graus, minutos e segundos) nas páginas 2 até a 4; noções gerais sobre seno, cosseno, tangente, entre outras temáticas das páginas 4 até 11; Teoremas e fórmulas dos senos, cossenos e tangente das páginas 11 a 37; construção das tábuas dos senos, páginas 37 até 43.

A respeito dos triângulos, desde a página 43 estendendo-se até a 47 são expostos os princípios para a resolução dos triângulos retilíneos; como caso particular, os triângulos retângulos são estudados da página 47 a 49 em quatro casos. A resolução dos triângulos em geral pode ser consultada nesta obra entre as páginas 49 e 63 os seus quatro casos e, igual número de exemplos. Os princípios para a resolução dos triângulos esféricos e a resolução destes com 6 casos gerais são observados entre as páginas 71 e 88; as páginas 88 até 94 apresentam exemplos de resolução dos triângulos esféricos e, por fim, o Apêndice da obra, com 6 casos particulares da Trigonometria é apresentado da página 95 até o final. Essa breve descrição será pormenorizada nas páginas seguintes, iniciando com a folha de rosto da obra em análise na Figura 56.



Figura 56 - Folha de rosto original traduzida da obra *Tratado de Trigonometria*

Fonte: Legendre (1809a)

Com relação aos conteúdos dispostos, há doze destaques a fazer referentes a esta obra, principalmente na questão dos triângulos retângulos ou quaisquer noções gerais de seno, cosseno e tangente. Ao fim da obra, são apresentadas em apêndice dezoito páginas com exercícios resolvidos. Faz-se agora a análise descritiva de cada um dos tópicos do livro.

Inicialmente, Legendre (1809a, p. 1), já destaca o problema geral da Trigonometria, “sendo dadas três das seis partes<sup>82</sup> de hum triângulo, determinar as outras três”.

Para que se tenham respostas concisas para cada uma das possibilidades que se abrem em torno deste “problema geral”, Legendre (1809a) argumenta que a utilização de meios construtivos através de instrumentos é um método impreciso dado à baixa precisão destes. Ao contrário, o método trigonométrico é capaz de oferecer soluções com alto grau de exatidão através das propriedades das linhas chamadas senos, cossenos, tangentes, etc. Por este meio, se exprimem de um modo muito simples as relações existentes entre os lados e os ângulos dos triângulos. Desta forma, na sequência, serão desenvolvidas as propriedades e as principais fórmulas que delas resultam.

### 5.3.1 Divisão da circunferência.

A Trigonometria, assim como outras áreas de estudo da Matemática, não é resultado de uma única pessoa ou civilização. Os estudos de Boyer (1989) dão conta de que os egípcios e babilônios já tinham conhecimento sobre Teoremas que envolviam a semelhança de triângulos a partir dos lados. Através dos gregos, é obtido um estudo sistemático e estruturado entre os ângulos num círculo e os comprimentos das cordas subentendidas.

A divisão de uma circunferência em 360 graus prossegue o autor, ao que se sabe, é devida a Hiparco<sup>83</sup> e a sua tabela de cordas que, por sua vez, pode ter sido influenciada por Hipsicles<sup>84</sup>, que havia dividido o dia em 360 partes, e esta subdivisão pode ter sido sugerida pela astronomia babilônica que utilizava como referência a base sexagesimal.

Dessa forma, os especialistas da Academia de Ciências da França foram provocados à criação do novo sistema dos pesos e medidas, o qual imaginavam que seria muito vantajoso introduzir a divisão decimal na medida dos ângulos. Assim, consideraram como unidade principal o quarto da circunferência ou o

---

<sup>82</sup> “Chamão-se partes de hum: triângulo, os seus três ângulos e os seus três lados” (LEGENDRE 1809a, p. 1).

<sup>83</sup> Hiparco (190 a.C.-120 a.C.) astrônomo e matemático grego (BOYER, 1989).

<sup>84</sup> Hipsicles (190 a.C.-120 a.C.) astrônomo e matemático grego (BOYER, 1989).

quadrante, medida do ângulo reto, e dividiram esta fração em 100 partes iguais, chamadas grados, o grado em 100 minutos, e o minuto, em 100 segundos. (BOYER, 1989)

Inicialmente, Legendre (1809, p. 3) reforça a questão da circunferência com  $400^\circ$ , denotando um breve exemplo, conforme segue:

Os grãos, minutos, e segundos se notão, respectivamente, pelos caracteres  $^\circ$ ,  $'$ ,  $''$ : assim, a expressão  $16^\circ 6' 75''$  representa hum arco ou hum ângulo de 16 grãos, 6 minutos e 75 segundos. Se referísse-mos este mesmo arco ao quadrante, tomado por unidade, exprimi-lo-hiamos por 0,160675. Vê-se ao mesmo tempo que o ângulo medido por este arco, está para o ângulo recto  $160675 : 1000000$ , relação que não sededuziria tão facilmente das expressões conformes à antiga divisão da circumferência.

Na sequência da defesa que faz ao uso do sistema decimal para o trabalho com a circunferência, o autor revisou os conceitos de quadrante, complemento e suplemento, todos estes transformados para este sistema de divisões com  $400^\circ$ , sendo, respectivamente, uma divisão formando um ângulo reto de  $100^\circ$ , a diferença entre um ângulo e  $100^\circ$ , e a diferença entre um ângulo e  $180^\circ$ . Relativamente a este assunto, ainda afirma Legendre (1809, p. 4):

Os dois ângulos de hum triângulo retângulo valem em somma hum angulo recto: logo são complementos hum do outro. [...] Em todo o triangulo, hum angulo he o suplemento da somma dos outros dois, porque os três ângulos juntos fazem a semi-circumferência. Os ângulos dos triângulos, tanto rectilíneos como esféricos, e os lados destes, sempre tem supplementos positivos, porque sempre são menores que a semi-circumferência.

Após esta apresentação inicial, seguiremos com a análise descritiva dos demais conceitos apresentados na obra *Tratado de Trigonometria* de Legendre (1809).

### 5.3.2 Noções gerais sobre os senos, cossenos, tangentes, etc;

Por estar sendo abordada uma obra com natureza essencialmente conceitual, ou seja, abstrata, procura-se por meio das ilustrações e teorizações a respeito dos conceitos, tecer algumas observações a respeito dos mesmos. Dessa forma, inicia-se apresentando as definições sobre seno, cosseno, tangente e secante. Porém, é necessário imaginar uma circunferência de diâmetros DE e AB, centro C, raio CM, e, reta tangente TV com ponto médio em

A e, ainda, uma reta interna (a qual forma um arco) MN (com ponto médio em P).

Inicialmente, seguindo a sequência proposta por Legendre (1809), o conceito de seno (do arco AM, ou do ângulo ACM) é abordado, como sendo “a perpendicular: MP abaixada de hum extremo do arco sobre o diâmetro que passa pelo outro extremo” (LEGENDRE 1809, p. 4). Logo na sequência, o autor já conceitua tangente e secante, conforme segue: “se ao extremo do raio CA tirarmos a perpendicular AT até o encontro de CM prolongado, a linha AT, assim terminada, se chama *tangente*, e CT *secante* do arco AM ou do ângulo ACM (LEGENDRE, 1809, p. 4).

Ao fim, o autor conclui esta proposição afirmando que:

Estas três linhas MP, AT, CT, dependentes, do arco AM, e sempre determinadas pelo arco AM e o raio, se notão assim: MP — sen AM, ou sen ACM, AT — tang AM, ou tang ACM, CT — sec AM, ou sec ACM (LEGENDRE, 1809, p.4).

Por outro lado, o ainda não citado cosseno aparece logo na sequência das afirmativas acima, apresentadas da seguinte forma:

Se chamão coseno, cotangente, e cosecante do arco AM, e se notão assim: MQ = cos AM, ou cot ACM, DS = cot AM, ou cot ACM, CS = cosec AM, ou cosec ACM” (LEGENDRE, 1809, p. 5).

Nas páginas que seguem (5 a 11), Legendre (1809) segue fazendo as suas considerações e deduções, apontando assim considerações a respeito dos valores das razões trigonométricas em relação a um determinado ângulo. Por exemplo, quando falamos do ângulo  $0^\circ$ , o autor considera que

Supponhamos que hum extremo do arco esteja fixo em A e que o outro extremo, marcado, em M percorra, successivamente toda a extensão da semi-circumferência desde A até B. Quando o ponto M está em A, ou quando o arco AM he zero, os três pontos T, M, P se confundem com o ponto A; donde se vê que o seno e a tangente de hum arco zero são zero, e que o coseno deste mesmo arco he igual ao raio, assim como a sua secante. Logo designando R o raio, do círculo, teremossen  $0 = 0$ ,  $\text{tang } 0 = 0$ ,  $\text{cos } 0 = R$ ,  $\text{sec } 0 = R$  (LEGENDRE, 1809, p. 5).

Um destaque a ser considerado, também, na página 11, Legendre (1809) chama atenção para a inter-relação do seno e do cosseno. Os senos e cossenos são ligados um ao outro, tanto que, através da fórmula  $\cos A = \sin (90^\circ - A)$  podemos descobrir as suas interdependências. Deste modo, ao avaliar os senos em todos em seus casos possíveis, analogamente, pode-se avaliar os cossenos.

Resumindo, pode-se verificar isso na Figura 57, onde os cossenos negativos são separados dos cossenos positivos pelo diâmetro DE, de tal forma que todos os arcos de extremidades à esquerda de DE terão o seu cosseno positivo, e aqueles cujas extremidades estão à direita, tem cosseno negativo.

Assim pode-se concluir que, de  $0^\circ$  até  $q^{85}$  os cossenos são positivos, de  $q$  até  $3q$  são negativos e, de  $3q$  até  $4q$  novamente são positivos. Após uma volta inteira na circunferência, os mesmos valores se repetem na mesma configuração da volta anterior. Após o desenvolvimento das explanações, pode-se propor uma tabela com os valores dos senos e dos cossenos, conforme a Figura 57.

Figura 57 - Valores do seno e do cosseno na circunferência

fen $0^\circ = 0$	fen $q = R$	cos $0^\circ = R$	cos $q = 0$
fen $2q = 0$	fen $3q = -R$	cos $2q = -R$	cos $3q = 0$
fen $4q = 0$	fen $5q = R$	cos $4q = R$	cos $5q = 0$
fen $6q = 0$	fen $7q = -R$	cos $6q = -R$	cos $7q = 0$
fen $8q = 0$	fen $9q = R$	cos $8q = R$	cos $9q = 0$
&c.	&c.	&c.	&c.

Fonte: Legendre (1809, p. 10)

Ainda a considerar a questão das outras relações não citadas, tangente, secante, entre outras, o autor trabalha com a perspectiva de que, com o suporte do desenvolvimento dos conhecimentos nos senos e cossenos, estas relações estão dispensadas de maiores comentários, pois “os valores destas quantidades sempre se deduzem facilmente dos valores dos senos e cossenos, dos mesmos arcos” (LEGENDRE, 1809, p. 11).

Nas páginas que seguem do *Tratado de Trigonometria*, 11 a 37, o autor apresenta vinte e dois Teoremas e fórmulas sobre as relações trigonométricas, as quais serão algumas delas mostradas na sequência.

### 5.3.3 Teoremas e fórmulas relativas aos senos, cossenos, tangentes; etc.

Ao realizar a análise deste item, não serão enfatizados todos os Teoremas nem todas as fórmulas presentes no *Tratado de Trigonometria* de Legendre (1809). Assim, alguns deles serão citados, outros não, pois entende-se que a

<sup>85</sup> Atribui-se a “q” o valor de um quadrante, ou seja, 100 graus.

ideia desta investigação não é reproduzir nela toda a obra dos autores em análise, e sim os aspectos principais e, ao fim de cada livro analisado, proceder com nossas considerações e reflexões a respeito da influência destas no ensino da matemática na instrução militar brasileira.

Deste modo, será citado um exemplo da obra, segundo nosso critério de relevância dos Teoremas e fórmulas. Começa-se destacando o teorema XVIII de Legendre (1809, p. 14): “dados os senos e cossenos de dois arcos  $a$  e  $b$ , se podem determinar os senos e os cossenos da somma ou da diferença destes arcos”, por intermédio das seguintes fórmulas, mostradas na Figura 58.

Figura 58 - Fórmulas para determinar senos e cossenos da soma ou da diferença

$$\begin{aligned} \text{sen}(a + b) &= \frac{\text{sen } a \cos b + \text{sen } b \cos a}{R} \\ \text{sen}(a - b) &= \frac{\text{sen } a \cos b - \text{sen } b \cos a}{R} \\ \cos(a + b) &= \frac{\cos a \cos b - \text{sen } a \text{sen } b}{R} \\ \cos(a - b) &= \frac{\cos a \cos b + \text{sen } a \text{sen } b}{R} \end{aligned}$$

Fonte: Lacroix (1809, p. 14)

Há uma preocupação do autor com as fórmulas acima, pois, palavras dele:

Poder-se ia reçar que a demonstração precedente não fosse muito geral, porque a construcção sobre a qual ella se funda, suppõe os arcos  $a$  e  $b$  e até  $a + b$  menores do que hum quadrante (LEGENDRE, 1809, p. 16).

No entanto, o próprio autor trata de dirimir esta questão, em parágrafo seguinte, afirmando que se pode entender a demonstração que o mesmo desenvolveu na sequência das fórmulas apresentadas de maneira simples a demonstração das fórmulas do cosseno do arco  $a+b$ , onde o arco citado poderia estar entre  $q+2q$ .

Por fim, sobre a mesma proposição, Legendre (1809) ainda argumenta que, caso a dúvida persista, o mesmo recomenda que se atente para essa explanação:

Para todos os valores de  $a$  e  $b$ , menores que os limites  $A$  e  $B$ , digo que elles terão igualmente lugar quando sendo ainda  $b < B$ , tivermos  $a < q + A$ . Com effeito, temos pelas propriedades demonstradas  $(\sin q + m + b) = \sin (q - m - b) = \cos (m + b) \cos (q + m + b) = - \cos (q - m - b) = - \sin (m + b)$ ; mas suppondo  $m < A$  e  $b < B$ , se conhecem os valores de  $\sin (m + b)$  e de  $\cos (m + b)$ , logo por estes valores teremos:  $R \sin (q + m + b) = \cos m \cos b - \sin m \sin b$   
 $R \cos (q + m + b) = \sin m \cos b - \sin b \cos m$ .  
 Seja  $q + m = a$ , ou  $m = a - q$ , teremos  $\cos m = \sin (q - m) = \cos (2q - a) = - \cos a$ , logo  $R \sin (a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$   
 $R \cos (q + m + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ .  
 Donde se vê que estas fórmulas, que havíamos demonstrado somente dentro dos limites  $a < A$ ,  $b < B$ . Mas, pela mesma razão, ficão demonstradas agora em limites mais extensos,  $a < q + A$ ,  $b < B$  (LEGENDRE, 1809, p. 16-17).

As demonstrações do autor, nesta obra resumidas, evidenciam a predileção deste por um método sintético de demonstrar os princípios trigonométricos. Esse fato também é destacado na investigação de Biral (2011).

### 5.3.4 Da construção da tábua dos senos

A história da construção da primeira tábua dos senos teve como base cálculos sobre métodos de grande inventividade, porém, trabalhosos na aplicação. Tempos mais tarde foram elaborados métodos mais simples para satisfazer esta necessidade, porém, como os cálculos estavam já feitos, estes métodos ficariam sem aplicação, se o estabelecimento do sistema métrico não tivesse demandado a construção de outras de acordo com a divisão decimal da circunferência (LEGENDRE, 1809)

Embora se tenham empregado muitos esforços para aumentar a precisão do cálculo dos senos, chegando-se em alguns casos a 22 casas decimais o que, segundo palavras de Legendre (1809, p. 38), “são um dos mais belos monumentos levantados às ciências”, estes não se mostraram com aplicabilidade prática, justamente devido a esta precisão que, ao invés de auxiliar, muitas vezes acabava por atrapalhar, pela grande quantidade de elementos.

Desta forma, segue o autor, a tábua proposta por Borda<sup>86</sup> se mostrou prática o suficiente para substituir aquela elaborada por William Gardiner e

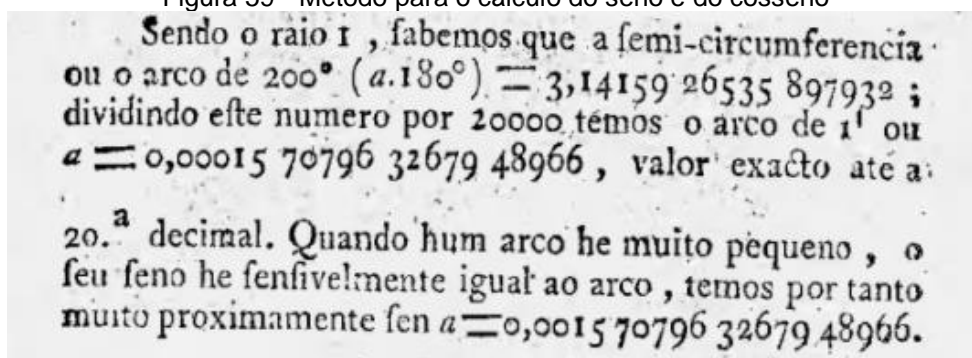
---

<sup>86</sup> Jean-Charles de Borda (1733-1799) foi um engenheiro militar e matemático.

reproduzida por Callet<sup>87</sup>, na qual se encontram os logaritmos dos senos e tangentes, calculados de com a precisão de um minuto e 7 casas decimais.

Na sequência, Legendre (1809) apresenta um exemplo de como se pode proceder na construção de uma tábua, partindo-se do princípio de que se trata do cálculo dos senos de todos os arcos, de minuto a minuto, a partir do primeiro até 10000 (ou 100°). Desta forma, partindo-se da premissa de que o raio = 1, o autor apresenta, na Figura 59, duas formas distintas de cálculo:

Figura 59 - Método para o cálculo do seno e do cosseno



Fonte: Legendre (1809, p. 39)

No entanto, observa o autor, há um erro perceptível no décimo algarismo significativo, e para corrigir esse erro, o mesmo sugere que se lance mão das fórmulas expostas na proposição XXXVI, a qual possui o seguinte enunciado:

Para aplicar as fórmulas precedentes á determinação do seno e do coseno de hum arco dado em grãos e partes de grãos, he necessario ter o comprimento deste arco expresso em partes do raio, ou , que vem a dar no mesmo, he necessário dar a razão deste arco para o raio. Ora, sendo, o raio 1a semi-circunferência = 3 , 14159 26535 897932 (LEGENDRE, 1809, p. 35).

A partir deste enunciado, o autor deduz então, para um cálculo mais aproximado dos senos e cossenos, as seguintes fórmulas:

$$\text{sen } \frac{m}{n} q = \quad \& \quad \text{cos } \frac{m}{n} q = , \text{ onde } \frac{m}{n} \text{ é o comprimento do arco.}$$

Nas páginas que seguem (36 e 37) Legendre (1809) exhibe, além de um formulário com as dicas para o cálculo de senos e cossenos com base nas

<sup>87</sup> Jean-François Callet (1744-1799) foi um matemático francês. Em 1783 publicou a tabela de logaritmos de William Gardiner acrescentando, em 1795, os logaritmos das funções trigonométricas para a nova escala trigonométrica (400°) (BOYER, 1989).



fórmulas acima, uma pequena lista mostrando a complementaridade dessas duas razões, de 10 em 10 graus, conforme mostra a Figura60:

Figura 60 - Lista dos senos e cossenos de 10° em 10°

sen 0,1q = cos 0,9q =	0,15643	44650	40231
sen 0,2q = cos 0,8q =	0,30901	69943	74947
sen 0,3q = cos 0,7q =	0,45399	04997	39547
sen 0,4q = cos 0,6q =	0,58778	52522	92473
sen 0,5q = cos 0,5q =	0,70710	67811	86548
sen 0,6q = cos 0,4q =	0,80901	69943	74947
sen 0,7q = cos 0,3q =	0,89100	65241	88368
sen 0,8q = cos 0,2q =	0,95105	65162	95154
sen 0,9q = cos 0,1q =	0,98768	83405	95138
sen q = cos 0	1,00000	00000	00000

Fonte: Legendre (1809, p. 37)

A partir das possibilidades surgidas por meio dessas demonstrações, o autor observa que se tornou possível calcular, com valores exatos, até a 20ª casa decimal do seno e até a 24ª casa decimal do cosseno.

Isso posto, e já com as informações necessárias para o cálculo de senos e cossenos, a partir de agora estaremos partindo para a exposição e análise do que Legendre (1809) contemplou em seu *Tratado de Trigonometria* sobre a resolução de triângulos retilíneos.

### 5.3.5 Princípios para a resolução dos triângulos retilíneos

Neste tópico, novamente o autor inicia demonstrando o teorema XLII, com base em um triângulo retângulo ABC, e outro, inscrito e semelhante, CEF, onde afirma que “em todo o triângulo rectângulo o raio está para o seno de hum dos ângulos agudos, como a hypotenusa está para o lado opposto a este ângulo” (LEGENDRE, 1809, p. 43).

Assim, o autor sugere que

O triângulo proposto rectângulo em A; do ponto C, como centro F e com o raio CD, igual ao raio das taboas, descreve-se o arco DE que será a medida do ângulo C. Os triângulos CBA, CEF são semelhantes e dão a proporção CE : EF :: CB : BA; logo, R : sen C : : BC : BA (LEGENDRE, 1809, p. 43).

Na sequência, e ainda se referindo ao triângulo ABC, o teorema XLIII sugere que “Em todo o triângulo retângulo o raio está para a tangente de hum

dos ângulos agudos, como o lado adjacente a este ângulo está para o lado oposto” (LEGENDRE, 1809, p. 44).

Deste modo, segue o autor descrevendo as relações do triângulo retângulo da figura anterior:

Havendo descrito o arco DE, como no artigo precedente, levante se sobre CD a perpendicular DG que será a tangente do ângulo C. Os triângulos semelhantes CDG : CAB dão a proporção  $CD : DG :: CA : AR$ , logo  $R : \text{tang } C :: CA : AB$  (LEGENDRE, 1809, p. 44).

Os Teoremas XLIV até XLVII apresentam os enunciados referentes a um triângulo equilátero ABC, dividido em dois triângulos retângulos, a saber, ADB e ADC. Será utilizado o método de citação direta para os Teoremas e, ao final, faremos as nossas considerações.

Deste modo, o teorema XLIV afirma que “em hum triângulo rectilíneo qualquer os senos dos ângulos estão como os lados opostos” (LEGENDRE, 1809, p. 44).

Considerando o que está posto no teorema, o autor segue com a explicação:

Seja ABC [...] o triângulo proposto AD a perpendicular abaixada do Vértice A, sobre o lado oposto BC, podem acontecer dois casos :  
 1º Se a perpendicular çahir. dentro do triângulo ABC os triângulos rectângulos ABD, ACD darão, segundo o art. XLI I,  
 $R : \text{sen } C :: AC : AD$   
 $R : \text{sem } B :: AB : AD$   
 [...]  
 2º Se a perpendicular cahir fora do triângulo ABC (fig.5) os triângulos rectângulos ABC, ACD darão também as proporções  
 $R : \text{sem } C :: AC : AD$   
 $R : \text{sen } ABD :: AB : AD$   
 [...] (LEGENDRE, 1809, p. 44).

O teorema XLV do *Tratado de Trigonometria* traz o enunciado que se refere ao caso do cosseno de um ângulo em relação ao raio, conforme segue:

Em todo o triângulo rectângulo rectilíneo o coseno de hum ângulo etá para o raio, como a soma dos quadrados dos lados que compreendem este ângulo menos o quadrado do terceiro lado, está para o dobro do rectângulo dos dois primeiros lados, quer dizer que temos  $B : R :: AB^2 + BC^2 - AC^2 : 2AB * BC$ . (LEGENDRE, 1809, p. 45).

No teorema XLVI, o autor destaca os três anteriores, afirmando que com as três fórmulas anteriores são suficientes para resolver todos os problemas da trigonometria retilínea, pois “sendo dadas três das seis quantidades A, B, C, a,

b, c, estas fórmulas oferecem as equações necessárias para determinar as outras três”(LEGENDRE, 1809, p. 46). O matemático francês conclui ainda o seu raciocínio ratificando que os Teoremas já revelados, e tantos outros que ainda podemos citar são nada mais que uma consequência das três fórmulas anteriormente demonstradas.

Por fim, o teorema XLVII, que trata da relação dos lados com a tangente:

Em todo o triângulo retilíneo a somma está dos dois lados está para a sua diferença, como a tangente da semi-somma dos ângulos opostos a este lado está para a tangente da sem-diferença destes mesmos ângulos (LEGENDRE, 1809, p. 47).

Por fim, conclui o autor que com os Teoremas acima são possíveis de resolução todos os casos previstos na trigonometria retilínea. No tópico a seguir, será observado como Legendre (1809) tratou a resolução dos casos particulares dos triângulos, iniciando pelo triângulo retângulo.

### 5.3.6 Resolução dos triângulos retângulos

As proposições que seguem dizem respeito à resolução de problemas que envolvam o caso particular do triângulo retângulo. Desta forma, são citados quatro problemas possíveis, partindo-se da seguinte premissa:

Seja A o ângulo recto de hum triângulo rectângulo proposto, B e C os outros dois ângulos; seja a hypotenusa, b o lado opposto ao ângulo B , e c o lado opposto ao angulo C. Convém trazer á lembrança que os dois ângulos B e C são complementos hum do outro , e por tanto , segundo os diferentes casos, podemos tomar  $\sin C = \cos B$ ;  $\sin B = \cos C$ , e igualmente  $\tan B = \cot C$ ,  $\tan C = \cot B$  (LEGENDRE, 1809, p. 48).

Assim sendo, os quatro casos particulares são:

#### 1º Caso:

Sendo dada a hipotenusa a e um lado b, devem ser encontrados o terceiro lado e os dois ângulos agudos. A resolução desta proposição é dada conforme a Figura 61.

Figura 61 - Resolução do 1º Caso

Para determinar o angulo B, temos a proporção (XLII)  $a : b :: R : \text{sen } B$ . Conhecendo o angulo B, conhecer-se-ha ao mesmo tempo o seu complemento  $q - B = C$ ; tambem poderiamos ter C directamente pela proporção  $a : b :: R : \text{cos } C$ .

Quanto ao terceiro lado  $c$ , elle se pôde achar de duas maneiras. Depois de haver achado o angulo B, se pôde fazer a proporção (XLIII)  $R : \text{cot } B :: b : c$ , que dará o valor de  $c$ ; ou tambem se pôde tirar directamente o valor de  $c$ , da equação  $c^2 = a^2 - b^2$

que dá  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ , e por consequencia

$$\log c = \frac{1}{2} \log (a + b) + \frac{1}{2} \log (a - b).$$

Fonte: Legendre (1809, p. 48)

### 2º Caso:

Sendo dados os dois lados  $b$  e  $c$ , do triângulo, devem ser encontrados a hipotenusa e os ângulos. A resolução desta proposição é apresentada na Figura 62.

Figura 62 - Resolução do 2º Caso do triângulo retângulo

Teremos o angulo B pela proporção (XLIII)  $c : b :: R : \text{tang } B$ . Depois teremos  $C = q - B$ . Achariamos tambem C directamente pela proporção  $b : c :: R : \text{tang } C$ .

Conhecendo o angulo B, acharemos a hypotenusa pela proporção  $\text{sen } B : R :: b : a$ , ou tambem podemos ter  $a$  directamente pela equação

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}; \text{ mas esta expressão, na qual}$$

$b^2 + c^2$  não se pôde decompôr em factores, não he cômoda para o calculo logarithmico.

Fonte: Legendre 1849 (p. 48)

### 3º Caso:

Sendo dada a hipotenusa  $a$  e um ângulo  $B$ , devem ser encontrados os outros dois lados  $b$  e  $c$ . Para este caso, Legendre (1809, p. 48) recomenda que sejam observadas “as proporções  $R : \text{sen } B :: a : b$ ,  $R : \cos B :: a : c$ , as quaes darão os valores de  $b$  e  $c$ . Quanto ao ângulo  $C$ , he igual ao complemento de  $B$ ”.

#### **4º Caso:**

Sendo dado um lado  $b$  do ângulo reto, com um dos ângulos agudos, devem ser encontrados a hipotenusa e o outro lado. Nesta situação, Legendre (1809, p. 48) pondera que

Conhecendo hum dos ângulos agudos se conhecerá o outro, por tanto podemos suppor conhecidos o lado  $b$  e o ângulo opposto  $B$ . Depois para determinar  $a$  e  $c$ , teremos as proporções  $\text{sen } B : R :: b : a$ ,  $R : \cot B :: b : c$ .

Desta forma, foram apresentados no texto precedente os quatro casos possíveis e as suas respectivas resoluções no caso particular do triângulo retângulo. Prossegue-se estudando a trigonometria do triângulo, porém, agora com os quatro casos dos triângulos retilíneos em geral.

### **5.3.7 Resolução dos triângulos retilíneos em geral**

As proposições que seguem dizem respeito a resolução de problemas que envolvam um triângulo qualquer. Desta maneira, são citados quatro problemas possíveis, partindo-se da seguinte ideia:

Sejão  $A, B, C$ , os três ângulos de hum triângulo rectilíneo proposto, e sejão  $a, b, c$  os lados que são respectivamente oppostos: os diferentes problemas que podem ter lugar parrs determinar três destas quantidades por meio das outras três se reduzirão sempre aos quatro casos seguintes (LEGENDRE, 1809, p. 49).

#### **1º Caso:**

Sendo dados: o lado  $a$  e dois dos ângulos de um triângulo, devem ser encontrados os outros dois lados  $b$  e  $c$ . Nesta solução, o autor propõe a resolução pelo teorema XLIV:

Os dois ângulos conhecidos farão conhecer o terceiro, depois acharemos os dois lados  $b$  e  $c$  pelas proporções:  $\text{sen } A : \text{sen } B :: a : b$ ;  $\text{sen } A : \text{sen } C :: a : c$  (LEGENDRE, 1809, p. 49).

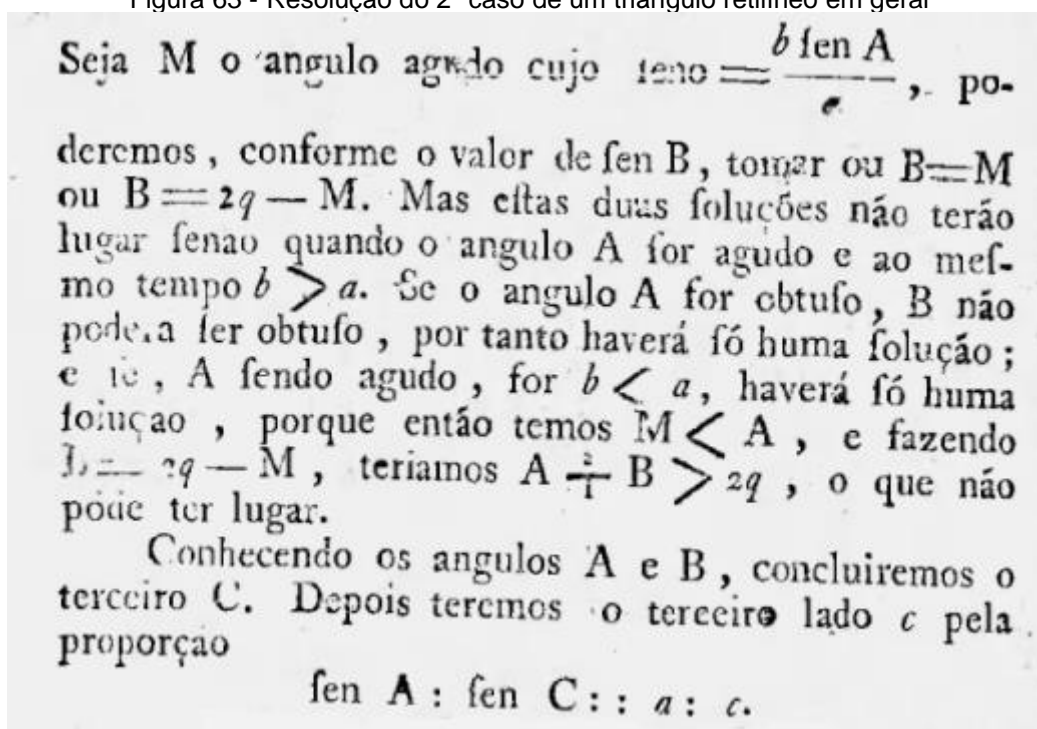
**2º Caso:**

Sendo dados: os lados  $a$  e  $b$ , com ângulo  $A$ , oposto a um destes lados, encontre o terceiro lado,  $c$ , e os outros dois ângulos  $B$  e  $C$ . Para este caso, o autor propõe, primeiramente, que seja encontrado o ângulo  $B$ , através da seguinte proporção:

$$a : b :: \text{sen } A : \text{sen } B.$$

E prossegue o autor com a explicação conforme a Figura 63.

Figura 63 - Resolução do 2º caso de um triângulo retilíneo em geral



Fonte: Legendre (1809, p. 50)

O autor ainda apresenta a possibilidade, para este caso, de se deduzir os ângulos diretamente da seguinte equação:

$$c = \frac{b \cos A}{R} \pm \sqrt{n^2 - \frac{b^2 \text{sen}^2 A}{R}},$$

No entanto, o mesmo alerta para o fato de que não é possível o cálculo por logaritmos “senão por meio de hum ângulo auxiliar  $M$  ou  $B$ , o que entra na solução precedente” (LEGENDRE, 1809, p. 50).

**3º Caso:**

Sendo dados dois lados:  $a$  e  $b$ , bem com o ângulo  $C$ , encontre os outros dois ângulos  $A$  e  $B$  e o terceiro lado  $c$ . A demonstração da resolução deste caso, com exemplos, se prolonga pelas páginas 51, 52 e 53. Expõe-se a sequência proposta por Legendre (1809) para a solução genérica.

Antes de tudo, propõe o autor, deve-se observar que se existe um ângulo conhecido, podem-se determinar os outros dois, através da seguinte fórmula:

$$A + B = 2q - C$$

Também é possível o cálculo da semi-soma, por meio da fórmula abaixo:

$$\frac{1}{2}(A + B) = q - \frac{1}{2}C,$$

Após pelo teorema XLVII, pode ser calculada a semi-diferença dos ângulos acima:

$$a + b : a - b :: \tan \frac{1}{2}(A + B) \text{ OU } \cot \frac{1}{2}C : \tan \frac{1}{2}(A - B)$$

Na sequência, adicionando-se o valor da semi-soma àquele encontrado na semi-diferença, obtemos o maior ângulo  $A$  possível. Por outro lado, subtraindo a semi-diferença, da semi-soma, teremos o menor ângulo  $B$  possível, conforme segue:

$$A = \frac{1}{2}(A + B) + \frac{1}{2}(A - B)$$

$$B = \frac{1}{2}(A + B) - \frac{1}{2}(A - B)$$

Após os três ângulos se tornarem conhecidos, pode-se calcular o terceiro lado:

$$\text{sen } A : \text{sen } C :: a : c.$$

#### 4º Caso:

Sendo dados os três lados de um triângulo:  $a$ ,  $b$  e  $c$ , devem ser encontrados os três ângulos  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Na resolução proposta, Legendre (1809), demonstra como se chegar aos valores dos ângulos utilizando-se, sobretudo, de fórmulas já trabalhadas no *Tratado de Trigonometria*. Por exemplo, para o cálculo do ângulo  $A$ , oposto ao lado  $a$ , o autor sugere a seguinte fórmula a partir da qual podem ser encontrados os outros dois ângulos (LEGENDRE, 1809).

$$A = R * \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

Nas páginas seguintes, o autor apresenta quatro exemplos práticos de aplicação da trigonometria nas atividades militares como, por exemplo, no exemplo IV, mostrado na Figura 64.

Figura 64 - Exemplo de um problema proposto sobre triângulos retilíneos em geral

*LXI. Exemplo IV.* Sendo dados na Carta de hum paiz tres pontos A, B, C; (fig. 9), quer-se determinar a posição do quarto ponto, do qual se medirão os ângulos AMB, AMC; suppondo-se os quatro pontos no mesmo plano.

Fonte: Legendre (1809, p. 61)

Neste tópico, Legendre (1908) tratou das possibilidades de resolução dos triângulos retilíneos retângulo. A seguir, no tópico de número 8, será observado como o autor tratou a resolução dos triângulos esféricos retângulos.

### 5.3.8 Resolução dos triângulos esféricos retângulos

Um triângulo esférico, para Legendre (1809), pode apresentar uma das três características abaixo:

- a) três ângulos retos, e então os seus três lados são retos;
- b) dois ângulos retos, e então os lados opostos são ambos retos, e fica um ângulo e o lado oposto que são medidos ambos pelo mesmo número de graus;
- c) um ângulo reto e dois oblíquos.

Partindo desta premissa, o autor apresenta cinco casos para a resolução, partindo de um triângulo hipotético conforme destaca a Figura 65:



Figura 65 - O enunciado de um triângulo esférico hipotético

Seja  $A$  o angulo recto,  $B$  e  $C$  os outros dois angulos que chamamos obliquos, seja  $a$  a hypotenusa opposta ao angulo  $A$ ,  $b$  e  $c$  os lados oppostos aos angulos  $B$  e  $C$ . Sendo dadas duas das cinco quantidades  $B, C, a, b, c$ , a resolução dos triangulos se reduzirá sempre a hum dos seis casos seguintes.

Fonte: Legendre (1809, p. 68)

### 1º Caso:

Indicados a hipotenusa  $a$  e um lado  $b$ , devem ser encontrados os dois ângulos  $B$  e  $C$  e o terceiro lado  $c$  pelas seguintes equações:

$$\operatorname{sen}(B) = \frac{R * \operatorname{sen}(b)}{\operatorname{sen}(a)}, \quad \cos(C) = \frac{\tan(b) * \cot(a)}{R}, \quad \cos(c) = \frac{R * \cos(a)}{\cos(b)}$$

Ao concluir a apresentação deste 1º caso, Legendre (1809), ainda observa que “o angulo  $C$  não pôde deixar alguma incerteza, não mais do que o lado  $c$ ; quanto ao angulo  $B$ , elle deve ser da mesma espécie que o lado, dado  $b$ ” (LEGENDRE, 1809, p. 68).

### 2º Caso:

Sendo indicados dois lados do ângulo reto  $b$  e  $c$ , deve ser encontrada a hipotenusa  $a$  e, os ângulos  $B$  e  $C$  pelas equações abaixo:

$$\cos(a) = \frac{\cos(b) * \cos(c)}{R}, \quad \tan g(B) = \frac{R * \tan(b)}{\operatorname{sen}(c)}, \quad \tan g(C) = \frac{R * \tan(c)}{\operatorname{sen}(b)}$$

Ao deduzir esse apontamento das relações, Legendre (1908), não indica nenhuma exceção para esta situação.

### 3º Caso:

Sendo conhecidos a hipotenusa  $a$  e um ângulo  $B$ , devem ser encontrados os dois lados  $b$  e  $c$  e, o ângulo  $C$ , com a ajuda das equações que seguem:

$$\operatorname{sen}(b) = \frac{\operatorname{sen}(a) * \operatorname{sen}(B)}{R}, \quad \tan g(c) = \frac{\tan(a) * \cos(B)}{R}, \quad \cot(C) = \frac{\cos(a) * \tan(B)}{R}$$

Para esta situação em particular, observa Legendre (1809, p. 69): “os elementos  $c$  e  $C$  são determinados sem ambiguidade por estas fórmulas; quanto ao lado  $b$ , será da mesma espécie que  $B$ ”.

**4º Caso:**

Sendo indicado um lado do ângulo reto  $b$  com o ângulo oposto  $B$ , devem ser encontrados  $a$ ,  $c$  e  $C$  pelas fórmulas a seguir:

$$\operatorname{sen}(a) = \frac{R * \operatorname{sen}(b)}{\operatorname{sen}(B)}, \operatorname{sen}(c) = \frac{\tan(b) * \cot(B)}{R}, \operatorname{sen}(C) = \frac{R * \cos(B)}{\cos(b)}$$

Os estudos de Legendre (1809) para fechar o 4º caso, nos mostram que os três elementos desconhecidos (dois lados e um ângulo) são determinados por senos, assim, a questão abre a possibilidade de formas diferente se der resolvida. Dessa forma, parte-se da ideia de que um triângulo  $ABC$ , e um outro,  $AB'C$  são ambos retângulos em  $A$ , possuem o mesmo lado  $AC = b$  e o mesmo ângulo oposto  $B = B'$ . Assim sendo, os valores duplos devem combinar-se de maneira que  $c$  e  $C$  sejam do mesmo tipo e, e consequência, os tipos de  $c$  e  $b$  determinariam o tipo de  $a$ .

**5º Caso**

Dados o lado do ângulo reto com o ângulo adjacente  $C$ , devem ser encontrados os outros três elementos  $a$ ,  $c$  e  $B$ , pelas fórmulas que seguem:

$$\cot(a) = \frac{\cot(b) * \cot(C)}{R}, \tan(c) = \frac{\operatorname{sen}(b) * \tan(C)}{R}, \cos(B) = \frac{\cos(b) * \operatorname{sen}(C)}{R}$$

Ao apontar estas equações, Legendre (1908), não aponta nenhuma exceção para o 5º Caso.

**6º Caso**

Sendo dados os ângulos oblíquos  $B$  e  $C$ , devem ser encontrados os três lados  $a$ ,  $b$  e  $C$  pelas seguintes fórmulas:

$$\cos(a) = \frac{\cot(B) * \cot(C)}{R}, \cos(b) = \frac{R * \cos(B)}{\operatorname{sen}(C)}, \cos(c) = \frac{R * \cos(C)}{\operatorname{sen}(B)}$$

Ao apontar estas equações, Legendre (1908) e exemplo do caso anterior não aponta nenhuma exceção.

No tópico 8, Legendre (1908) tratou das possibilidades de resolução dos triângulos esféricos retângulo. No próximo tópico, de número 9, será observado como o autor tratou dos princípios para a resolução dos triângulos esféricos em geral.

### 5.3.9 Princípios para a resolução dos triângulos esféricos em geral

A Trigonometria esférica, destaca Legendre (1809), tem os seus estudos concentrados em determinar três quantidades (A, B, C, a, b, c) através do conhecimento prévio de outras três. Para isto, por meio de quatro equações com combinações únicas, se pode resolver qualquer problema proposto para este tema. Deste modo, temos as quatro possibilidades que seguem:

- a) a combinação abcA, que compreende três lados e um ângulo e, pela permutação das letras, poderá ser abcA, abcB e abcC;
- b) a combinação abAB, que compreende dois lados e dois ângulos, de onde podem ainda resultar, além de abAB, bcBC, acAC;
- c) a combinação abAC, que igualmente é composta de dois lados e dois ângulos e, de onde podem surgir ainda, além da própria abAC, abBC, acAB, acBC, bcAB e bcAC;
- d) por fim, a combinação aABC com um lado e três ângulos, da qual podem derivar ainda bABC e cABC.

Desta forma, ao expor cada uma das combinações possíveis, e a partir da ideia de Legendre (1809), chegaremos às quatro fórmulas correspondentes a cada uma dessas possibilidades. As demonstrações em detalhes podem ser observadas na obra original. Assim, a primeira fórmula em destaque, corresponde à primeira combinação e suas derivações:

$$\cos(A) = \frac{R^2 * \cos(a) - R * \cos(b) * \cos(c)}{\text{sen}(b) * \text{sen}(c)}$$

Através desta fórmula, é possível a determinação de um ângulo, através das informações dos três lados.

A segunda fórmula, que corresponde à segunda combinação apresentada acima, é válida para a, A, b e B. Quando se quer calcular c ou C, basta substituir pelo lado/ângulo que não se possui:

$$\frac{\text{sen}(A)}{\text{sen}(a)} = \frac{\text{sen}(B)}{\text{sen}(b)}$$

A terceira combinação, que corresponde a combinação abAC é dada pela fórmula:

$$\text{sen}(c) = \frac{\text{sen}(a) * \text{sen}(C)}{\text{sen}(A)}$$

Por fim, a quarta combinação, que é a relação necessária para a resolução de triângulos esféricos com três ângulos e um lado:

$$\cos(a) = \frac{R^2 * \cos(A) + R * \cos(B) * \cos(C)}{\text{sen}(B) * \text{sen}(C)}$$

No decorrer das páginas subseqüentes, Legendre (1809), propõe a resolução dos triângulos esféricos por fórmulas utilizando os logaritmos, conforme vemos o exemplo na Figura 66, onde o autor sugere resolver uma situação idêntica a esta acima e determinar um lado por meio dos ângulos da seguinte forma:

Figura 66 - Fórmula resolutive de um triângulo esférico a partir dos ângulos

$$\text{sen} \frac{a}{2} = R \sqrt{\frac{\cos \frac{A+B+C}{2} \cdot \cos \frac{B+C-A}{2}}{\text{sen } B \text{ sen } C}}$$

Fonte: Legendre (1809, p. 70)

A partir dessa possibilidade, o autor desenvolve a ideia de que os resultados serão sempre positivos, pois os valores encontrados estarão sempre no intervalo positivo dos quadrantes (2q e 6q), e também a utilização dos logaritmos se dá por meio de uma “fórmula mais cômoda” (LEGENDRE, 1809).

Antes de encerrar o tópico sobre os princípios dos triângulos esféricos em geral, o autor traz mais um princípio. Este diz respeito à dedução, a partir das fórmulas gerais, aquelas que pertencem aos triângulos retângulos esféricos, que são em número de 6, o que será apresenta logo abaixo:

$$i) R * \cos(a) = \cos(b) * \cos(c)$$

$$ii) \frac{R}{\text{sen}(a)} = \frac{\text{sen}(B)}{\text{sen}(b)}$$

$$iii) \cos(C) * \tan(A) = R * \tan(B)$$

$$iv) R * \tan(c) = \text{sen}(b) * \tan(C)$$

$$v) \cot(B) * \cot(V) = R * \cos(a)$$

$$vi) \text{sen}(C) * \cos(b) = R * \cos(B)$$

Ao concluir a demonstração destas seis fórmulas, Legendre (1809, p. 80), afirma que “nestas seis equações se funda a resolução dos triângulos rectângulos esféricos”. No próximo tópico, de número 10, observaremos como o autor tratou da resolução dos triângulos esféricos em geral.

### 5.3.10 Resolução dos triângulos esféricos em geral

Para o caso da resolução dos triângulos esféricos em geral, Legendre (1809) destaca seis casos gerais, os quais são listados na sequência com as respectivas fórmulas que atendem a cada um deles.

#### 1º Caso

Em um triângulo esférico qualquer, são dados três lados: a, b e c. Deve ser encontrado o ângulo A oposto ao lado a. Para a solução deste 1º caso, nos utilizaremos da fórmula exposta na Figura 67.

Figura 67 - Fórmula para a resolução do 1º caso

$$\operatorname{sen} \frac{A}{2} = R \sqrt{\frac{\operatorname{sen} \frac{a+b-c}{2} \operatorname{sen} \frac{a+c-b}{2}}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}}$$

Fonte: Legendre (1809, p. 82)

#### 2º Caso

Em um triângulo esférico qualquer, são dados dois lados a e b e um ângulo A, oposto a um destes lados. Deve ser encontrado o terceiro lado, c, e os outros dois ângulos: B e C. Para a resolução deste 2º caso serão utilizadas as fórmulas abaixo:

a) Para encontrar o lado c:

$$\operatorname{sen}(c) = \frac{\operatorname{sen}(a) * \operatorname{sen}(C)}{\operatorname{sen}(A)}$$

b) Para encontrar o ângulo B:

$$\operatorname{sen}(B) = \frac{\operatorname{sen}(A) * \operatorname{sen}(b)}{\operatorname{sen}(a)}$$

c) Para encontrar o ângulo C:

$$\operatorname{sen}(C + \Phi) = \frac{\tan(b) * \operatorname{sen}(\Phi)}{\tan(a)}$$

Para a resolução desta equação, Legendre (1809) sugere a tomada de um ângulo auxiliar  $\Phi$ , o qual é dado a partir de  $\operatorname{cot}(\Phi) = \frac{\cos(b) * \tan(A)}{R}$ .

### 3º Caso

Em um triângulo esférico qualquer, são dados dois lados  $a$  e  $b$ , e o ângulo  $C$ . Devem ser encontrados os ângulos  $A$  e  $B$  e, o terceiro lado,  $c$ . Para a resolução deste 3º caso, serão utilizadas as fórmulas abaixo:

a) Para encontrar o ângulo  $A$ :

$$\operatorname{cot}(A) = \frac{\operatorname{cot}(a) * \operatorname{sen}(b) - \cos(C) * \cos(b)}{\operatorname{sen}(C)},$$

b) Para encontrar o ângulo  $B$ :

$$\operatorname{cot}(B) = \frac{\operatorname{cot}(b) * \operatorname{sen}(a) - \cos(C) * \cos(a)}{\operatorname{sen}(C)}$$

c) Para encontrar o lado  $c$ :

$$\operatorname{sen}(c) = \operatorname{sen}(a) * \left( \frac{\operatorname{sen}(C)}{\operatorname{sen}(A)} \right)$$

### 4º Caso:

Em um triângulo esférico qualquer, são dados dois ângulos  $A$  e  $B$ , e um lado adjacente,  $c$ . Devem ser encontrados os lados  $a$  e  $b$ , e o terceiro ângulo,  $C$ . Para a resolução deste 4º caso, serão utilizadas as fórmulas abaixo:

a) Para os lados  $a$  e  $b$ , respectivamente, devem ser empregadas as fórmulas exibidas na Figura 68:

Figura 68 - Fórmulas para o cálculo dos lados a e b, do 4º caso

$$\cot a = \frac{\cot A \operatorname{sen} B + \cos B \cos c}{\operatorname{sen} c}$$

$$\cot b = \frac{\cot B \operatorname{sen} A + \cos A \cos c}{\operatorname{sen} c}$$

Fonte: Legendre (1809, p. 85)

- b) Sabendo-se os valores dos lados a e b, o cálculo de C será feito através da seguinte fórmula:

$$\operatorname{sen}(C) = \frac{\operatorname{sen}(c) * \operatorname{sen}(A)}{\operatorname{sen}(a)}$$

### 5º Caso

Em um triângulo esférico qualquer, são dados dois ângulos A e B com o lado a, oposto a um destes ângulos. Devem ser encontrados os dois lados b e c, e o terceiro ângulo, C.

- a) O lado b, será descoberto pela seguinte equação:

$$\operatorname{sen}(b) = \operatorname{sen}(a) * \left( \frac{\operatorname{sen}(B)}{\operatorname{sen}(A)} \right)$$

- b) O lado c, será determinado tomando-se ângulo complementar  $\Phi$ , de onde temos:

$$\operatorname{sen}(c - \Phi) = \frac{\tan(B) * \operatorname{sen}(\Phi)}{\tan(A)}$$

- c) O ângulo C, será determinado a partir da seguinte fórmula:

$$\operatorname{sen}(C - \Phi) = \frac{\cos(A) * \operatorname{sen}(\Phi)}{\cos(B)}$$

### 6º Caso

Em um triângulo esférico qualquer, são dados os três ângulos A, B e C. Devem ser encontrados um lado qualquer, como por exemplo, o lado oposto ao ângulo A. Para que este lado seja determinado, será utilizada a fórmula que está contemplada na Figura 69.

Figura 69 - Fórmula utilizada para determinar um lado, a partir de três ângulos

$$\operatorname{sen} \frac{a}{2} = R \sqrt{\left( \frac{-\cos \frac{1}{2}(A+B+C) \cos \frac{1}{2}(B+C-A)}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C} \right)}$$

Fonte: Legendre (1809, p. 87)

Por fim, Legendre (1809) conclui este tópico fazendo algumas considerações sobre estes seis casos gerais, onde observa que:

Os três últimos poderiam deduzir-se dos três primeiros, pela propriedade dos triângulos polares; de sorte que, propriamente falando, há só três casos diferentes na resolução geral dos triângulos esféricos (LEGENDRE, 1809, p. 87).

A obra apresenta, na sequência, três exemplos de resoluções de triângulos esféricos (páginas 88 a 93). Por último, na seção “Apêndice” do *Tratado de Trigonometria* de Legendre (1809), faz algumas considerações finais sobre a resolução de casos particulares da trigonometria. Ao todo, o autor faz as considerações a respeito de sete casos, entre elas, “dos triângulos rectilíneos que tem dois ângulos muito pequenos”; “resolução de hum triângulo esférico que tem dois lados pouco diferentes de hum quadrante”; “resolução dos triângulos esféricos que tem os lados muito pequenos relativamente ao raio da esfera”, etc.

Na sequência, analisaremos o que a obra *Elementos de Trigonometria*, de Legendre (1809), representa dentro do contexto da instrução militar brasileira no período oitocentista brasileiro e mais, entre os pontos estudados pelos alunos da Real Academia Militar.

### 5.3.11 Análises e reflexões acerca do *Tratado de Trigonometria*

A obra analisada, composta de 126 páginas, traduzida para a língua portuguesa por ordem de “Sua Alteza Real”, o Príncipe Regente, para uso dos alunos da Real Academia Militar, foi impressa em 1809, pela Imprensa Régia, a qual foi fundada por D. João para servir como uma espécie de gráfica imperial.

Assim, ao proceder com o exame da obra, que foi dividida em treze subdivisões (sendo dois apenas com exemplos resolvidos), o *Tratado de Trigonometria* de Legendre (1809), observa-se na página de número 1, tópico do objetivo fundamental, com a definição do que seriam as partes de um triângulo, conceito necessário ao entendimento das demonstrações e dos exemplos



propostos. Desta maneira, Legendre (1809, p. 1), afirma que “chamão-se partes de hum triangulo, os seus tres ângulos e os seus três lados. Basta conhecer três destas quantidades para determinar as outras três”.

No que diz respeito a essa questão o autor ainda destaca que, para a regra acima, há uma única exceção, quando tratamos de triângulos retilíneos onde conhecidos os três ângulos, “somente se poderia deduzir a razão dos lados” (1809, p. 1).

Outra observação que Legendre (1809) faz logo na primeira página do *Tratado de Trigonometria* diz respeito à questão da precisão das construções trigonométricas, as quais:

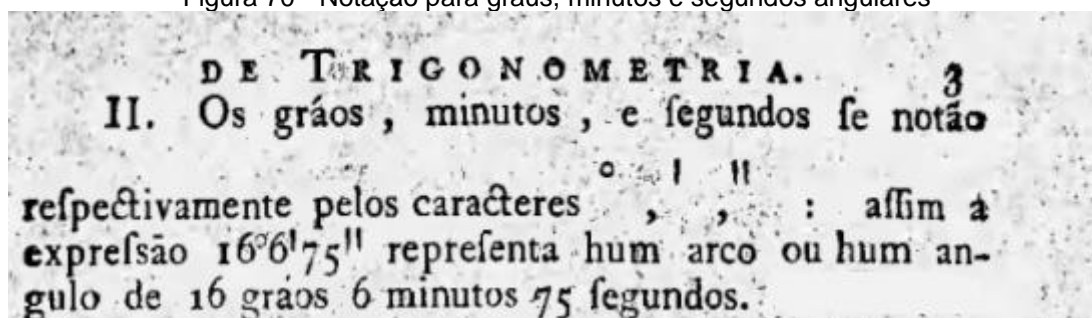
Cumpre distinguir a Figura que serve só para dirigir o discurso na demonstração de hum theorema, ou na solução de hum problema, da Figura que se constroe para conhecer algumas das suas dimensões. A primeira sempre se suppõe exacta; a segunda, se não for traçada exactamente, dará resultados defeituosos (1809, p. 1).

Acerca disso, pode-se chamar a atenção daquilo que o autor chamou de “imperfeição dos instrumentos” empregados quando se pretende transpor um objeto que na teoria é exato, porém, na prática, apresenta “medíocre aproximação”. Para que estas imperfeições não atrapalhem os cálculos, Legendre (1809, p. 2) recomenda o uso dos métodos trigonométricos, pois estes, independentemente “de toda a Operação mecânica, dão as soluções com todo o grao de exactidão que se pode desejar” (LEGENDRE, 1809, p. 2).

Avançando para o segundo tópico de análise, aborda-se a divisão da circunferência, onde cabe ressaltar a questão da escala desta que, na obra de Legendre (1809), é feita com  $400^\circ$  e não com  $360^\circ$  (conforme contemporaneamente). Aqui, como já citado anteriormente, o autor faz uma observação a respeito do sistema de divisão do círculo trigonométrico em relação ao ângulo reto, que nesta obra possui  $100^\circ$  e não  $90^\circ$  (conforme já discutido), para dizer que esta é escala “que convém melhor a natureza da nossa arithmetica, e a mais própria para abreviar os cálculos” (LEGENDRE, 1809, p. 2).

Na sequência, páginas 3 e 4, o autor se propõe a abordar os principais conceitos que envolvem a trigonometria que será estudada em sua obra, tais como: quadrante, complemento e suplemento, bem como, a notação utilizada para se determinar os ângulos, conforme mostra a Figura 70.

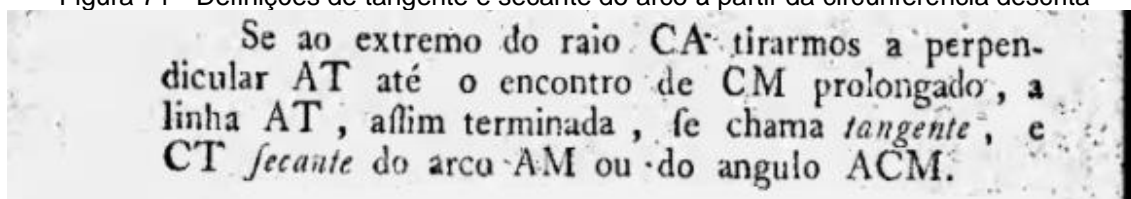
Figura 70 - Notação para graus, minutos e segundos angulares



Fonte: Legendre (1809, p. 3)

Na parte a seguir, detalhando as noções e definições sobre os senos, cossenos, tangentes, o autor entra nas demonstrações de cada um deles, com extensas dissertações e deduções em alguns casos. Iniciando o tópico, o mesmo argumenta a respeito da circunferência de diâmetros AB e DE; raios M e N (que dividem o ângulo reto ao meio a partir do centro da circunferência); e centro C, igualmente já citada, e suas possibilidades como, por exemplo, as definições de secante e de tangente do arco, mostradas pela Figura 71.

Figura 71 - Definições de tangente e secante do arco à partir da circunferência descrita



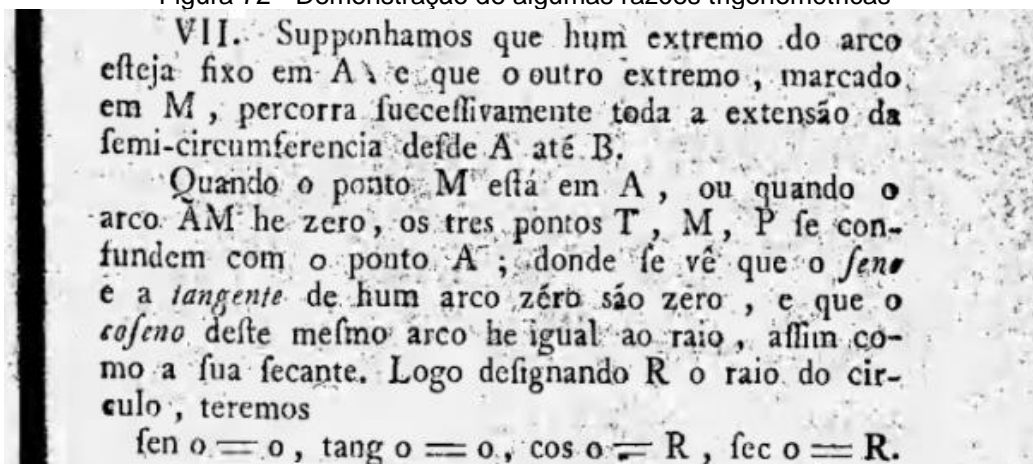
Fonte: Legendre (1809, p. 4)

O autor segue a sua explicação mediante o uso da circunferência e de alguns pontos associados, como por exemplo, a linha MP, que une o raio M ao ponto P, que é originário de uma linha perpendicular a este, e ao raio A intrínseco à circunferência. Também o ponto T, que se origina do segmento CS, que é uma extensão do raio M, externo à circunferência e a tangencia no ponto A. Deste modo, explica Legendre (1809, p. 4):

Estas três linhas MP, AT, CT, dependentes do arco AM, e sempre determinadas pelo arco AM e o raio, se notão assim: MP — sen AM, ou fen ACM, AT — tang AM, ou tang ACM, CT — sec AM, ou sec ACM.

Ainda sobre o mesmo tópico, o autor demonstra os valores de algumas das relações trigonométricas em relação ao ângulo  $0^\circ$ , conforme mostra a Figura 72:

Figura 72 - Demonstração de algumas razões trigonométricas



Fonte: Legendre (1809, p. 4)

Outras observações pertinentes ainda são feitas no desenrolar deste tópico tal como a questão dos valores de seno negativos, explicada da seguinte forma por Legendre (1809, p. 7) “como o complemento, de hum arco maior do que o quadrante he negativo [...], não admira que o seno deste complemento seja negativo”. Apesar da explicação, o autor conclui observando que dentro da trigonometria:

Não há occasião de considerar os senos, cosenos, &c de arcos ou de ângulos maiores que a semi-circumferência; porque os angulos dos triângulos, tanto rectilíneos, como esféricos, e os lados destes, sempre se achão entre 0 e  $2q$  (LEGENDRE, 1809, p. 8).

No entanto, para complementar essa ideia, o autor chama a atenção para outros problemas geométricos que podem conter arcos maiores que o semicírculo ou, até mesmo, situações que envolvam “n” circunferências. Deste modo, conclui Legendre (1809, p. 8) que “he necessário achar a expressão dos senos e cosenos destes arcos, qualquer que seja a sua grandeza”.

Acerca dos Teoremas e fórmulas relativas às relações trigonométricas, entende-se que já puderam ser dissecadas durante o capítulo anterior. Serão enfatizadas algumas considerações a respeito do entendimento percebido como passível de análise tal como os Teoremas XV a XVIII, em que Legendre (1809) baseia-se em uma Figura (aqui já descrita), para fazer as suas demonstrações e deduções. Este método, pondera Biral (2011), “revela uma característica do uso do método sintético nessa obra”.

Ao exemplificar outros destes casos passíveis de análise na obra de Legendre (1809), diz respeito à página 27, onde o autor menciona a importância das fórmulas trigonométricas e sugere:

Consultar a excelente obra de Euler, intitulada *Introdução à análise dos infinitos*, traduzida e enriquecida de notas por João Labey. Entretanto julgamos dever ainda demonstrar as fórmulas que servem para exprimir o seno e o cosseno em funções do arco, fórmulas que supozemos sabidas 11a nota I V, e que são também necessárias para a construção das táboas (LEGENDRE, 1809, p. 27).

Destacamos ainda que, a cada enunciado, teorema ou proposição, Legendre (1809) segue com exemplos. Entende-se que, novamente debatendo este tema, sejam conteúdos para alunos dos quais se era exigido às primeiras operações, o que tornaria árdua a tarefa de aprender esses conceitos matemáticos.

A construção da tábua dos senos do *Tratado de Trigonometria* é o capítulo onde Legendre (1809) expõe o seu método de construção de uma tabela dos senos de acordo com a divisão decimal da circunferência. Com precisão de um minuto, o autor explora ao longo deste tópico as relações possíveis para a obtenção das fórmulas que irão resultar nos valores correspondentes a cada ângulo requerido.

Assim, o método de cálculo sugerido por Legendre (1809) é uma progressão aritmética, de razão “ $2\cos(a) - 1$ ” e resulta na relação mostrada na Figura 73.

Figura 73 - Tábua de senos a partir de uma PA

$\text{sen } 0 = 0$	$\text{cos } 0 = 1$
$\text{sen } a = \text{sen } a$	$\text{cos } a = \text{cos } a$
$\text{sen } 2a = 2 \text{cos } a \text{sen } a$	$\text{cos } 2a = 2 \text{cos } a \text{cos } a - 1$
$\text{sen } 3a = 2 \text{cos } a \text{sen } 2a - \text{sen } a$	$\text{cos } 3a = 2 \text{cos } a \text{cos } 2a - \text{cos } a$
$\text{sen } 4a = 2 \text{cos } a \text{sen } 3a - \text{sen } 2a$	$\text{cos } 4a = 2 \text{cos } a \text{cos } 3a - \text{cos } 2a$
$\text{sen } 5a = 2 \text{cos } a \text{sen } 4a - \text{sen } 3a$	$\text{cos } 5a = 2 \text{cos } a \text{cos } 4a - \text{cos } 3a$
&c.	&c.

Fonte: Legendre (1809, p. 40)

O autor ainda observa que embora seja nomeada tábua dos senos, o seu método de cálculo, por meio de seus postulados, permite que sejam calculados

também os cossenos, (Figura 49), as tangentes e as secantes, conforme destaca Legendre (1809, p. 43):

Achados os logarithmos dos senos, deles se deduzem muito facilmente os logarithmos das tangentes por meio de simples subtracções; porque, como temos  $\tan gx = \frac{R \operatorname{sen} x}{\cos x}$ , segue-se  $\log \tan gx = 10 + \log \operatorname{sen} x - \log \cos x$ . Quanto aos logarithmos das secantes, elles fe acharião de hum modo ainda .mais simples, pela equação  $\sec x = \frac{R^2}{\cos x}$ .

É importante ainda destacar que o método inicialmente sugerido pelo autor para a confecção da tábua é para a obtenção dos senos naturais, conforme observou Legendre (1809, p. 42):

Os senos, quaes resultarão dos cálculos que havemos indicado, são expressos em partes do raio, e se chamão senos naturaes; mas na prática se tem reconhecido que he muito vantajoso se utilizar os logarithmos dos senos, em vez dos mesmos senos; por consequência a maior parte das taboas não contém senos naturaes, mas somente os seus logarithmos.

A partir daqui, a obra em análise está centrada na resolução de triângulos. O autor apresenta, ainda, os enunciados possíveis de resolução (do XLII ao XLVII) em cada uma de suas particularidades, conforme já realizado neste trabalho e não será enfatizada a sua descrição, apenas observa-se que, ao fim, são demonstradas três fórmulas, as quais, conforme já citado, se mostram suficientes para resolver todos os problemas referentes aos triângulos planos. Estas mesmas fórmulas são aquelas que equivalem atualmente, conforme bem observa Biral, (2011, p. 7): “ao que chamamos de relações métricas no triângulo retângulo para o seno e a tangente, à lei dos senos e também dos cossenos”.

Os casos de resolução dos triângulos retângulos, são trabalhados, no *Tratado de Trigonometria* em 4 casos diferentes e resolvidos de forma genérica, e mais adiante no apêndice da obra, para os exemplos numéricos. A resolução dos triângulos retilíneos em geral é dividida em 6 casos, igualmente já abordados neste trabalho e na sequência temos 3 exemplos de resolução numérica dos casos.

No que diz respeito aos triângulos esféricos, casos retângulo e geral, também são divididos em 6 casos cada, os quais, do mesmo modo já abordados,

e que são abordados analogamente em um primeiro momento de forma genérica e, após, com exemplos numéricos.

A respeito da aplicabilidade desses conceitos trigonométricos que constam na obra analisada, nos cabe lembrar que o Curso Matemático e seus conteúdos serviriam para, nos anos finais da Real Academia “relacionar os assuntos já apresentados [...] (de ciências exatas e de ciências da terra) aos temas da Engenharia, da Arquitetura e das ciências militares” (SOUSA; ROCHA, 2017, p. 148).

Apesar deste objetivo principal, sempre houve a preocupação no que diz respeito aos exercícios práticos, tendo este tema, inclusive, citação na cartarégia da Real Academia em seu título oitavo: “os Lentes serão obrigados a sahir ao campo com os seus discípulos, para os exercitar na prática das operações que nas aulas lhes ensinam” (BRASIL, 1810, p. 242).

A respeito desse assunto, observamos que, apesar de todas as dificuldades anteriormente descritas, houve tentativas de que isso ocorresse. Um exemplo é dado por Motta (2011) quando cita uma passagem do relatório anual de 1846 acerca de atividades realizadas por alunos do primeiro ano que praticaram “exercícios trigonométricos para a determinação de pontos inacessíveis, [...] e fizeram a planta do Passeio Público” mediante a aplicação dos conhecimentos obtidos em aula e a utilização de instrumentos apropriados.

Como percebido, os registros que fundamentam a utilização da trigonometria nas atividades práticas corroboram para o seu caráter primordial na formação dos oficiais do Exército Brasileiro, sobretudo, naqueles que optavam pelas carreiras de Engenharia ou Topografia, pois, para estas, os conhecimentos sólidos dessa arte e a sua correta utilização poderiam significar até mesmo um sucesso ou insucesso em batalhas e guerras naquele período de turbulência política e insurgências internas e belicosidade militar no cenário externo, mais precisamente na América do Sul.

Após esta análise da obra *Tratado de Trigonometria*, de Legendre (1809), trataremos a seguir, da análise, e considerações acerca dos *Elementos de Geometria*, do mesmo autor e que foi obra de referência para o estudo da Geometria na instrução militar brasileira oitocentista.

#### 5.4 A GEOMETRIA DE LEGENDRE NA INSTRUÇÃO MILITAR BRASILEIRA

A obra de Legendre foi a principal referência da Real Academia Militar para o ensino Geometria pois, de acordo com os estudos de Valente (2020) o autor está inscrito dentro da matemática francesa como alguém motivado a escrever sobre a Geometria, sobretudo, por duas razões:

Uma delas é o movimento, contemporâneo a ele, que estava acontecendo na Inglaterra, de retorno às origens euclidianas no modo de tratar a Geometria elementar, [...]. Do outro lado, Legendre insurgiu-se contra a tradição francesa de ensino da Geometria elementar por meio dos manuais de Bézout: uma Geometria considerada francamente intuitiva e sem rigor matemático (VALENTE 2020, p. 79).

Logo, esta “falta de rigor” é, parece sem dúvidas, o motivo que levou a Real Academia e seus idealizadores a adotar a obra de Legendre, mesmo quando, destacam os estudos de Souza e Rocha (2017), à época, as demais universidades ainda baseavam suas instruções na obra de Bézout<sup>88</sup>.

Ao mesmo tempo, Boyer (1989) destaca em seus escritos que Legendre em sua Geometria não se preocupou com a praticidade ao imprimir, com sua escrita axiomática, um texto bem-sucedido e de influência persistente, o que levou a sua obra sobre a Geometria a mais de vinte edições, ainda em vida. Sobre a indagação do caráter prático de sua obra Legendre parecia, definitivamente, pouco se importar ou não dar importância nenhuma pois, como ele mesmo afirma no prefácio, o objetivo maior desta obra (mesmo que reconhecidamente não fosse um geômetra) era o de apresentar uma Geometria para o “espírito”.

A análise descritiva a qual nos propomos em algumas das obras de Adrién-Marie Legendre, sobretudo aquelas localizadas e que foram citadas como de utilização na instrução militar do início do século XIX, caracterizou as suas obras “elementares” pelo método sintético para desenvolver as suas demonstrações muito embora, naquele período, o método de ensino predominante nas obras didáticas não fosse este.

Desta forma, a obra em análise, possui 398 páginas das quais, a dedicatória está nas páginas 6 a 9; o prólogo do tradutor abrange outras 6; a ERRATA, nas páginas 17 e 18; os Princípios de Geometria (ou Livro I), e suas

---

<sup>88</sup> Étienne Bézout, matemático francês (1730 – 1783).

32 proposições, se estendem da página 19 até a página 50; O Círculo e as Medidas do Ângulo (ou Livro II), e suas 19 proposições seguidas de 18 problemas (referentes aos livros I e II), se estendem da página 51 até 79; as Proporções das Figuras (ou Livro III), além das definições iniciais, possui 34 proposições (sendo parte delas ilegíveis) e 19 problemas (também com partes ilegíveis), sendo que esta parte da obra abrange 49 páginas (páginas 80 a 129); os Polígonos Regulares e as Medidas do Círculo (Livro IV), com 17 proposições (até a página 153, considerável parte ilegível) e um apêndice com outras 10 proposições em 9 páginas (até a página 162); os Planos e Ângulos Sólidos (Livro V), envolvem as páginas 163 até 188 e 25 proposições; Os Poliedros (ou Livro VI) possuem 25 proposições em suas 38 páginas; o estudo da Esfera (Livro VII), apresenta 27 proposições em 37 páginas, seguidas de um apêndice aos livros VI e VII o qual, em suas 7 páginas (p. 267-274) mais quatro proposições; por fim, os Três Corpos Redondos (esfera, cone e cilindro) são tratados em 34 páginas (p. 275-309) em 29 proposições. Ainda a acrescentar as 12 Notas que ocupam 42 páginas da obra e, a lista das Figuras, que ocupam as últimas 12 páginas. Curiosamente na edição consultada, não há sumário e, como destacado acima, não há uma divisão por capítulos e sim, por livros. Esse motivo nos levou então a dividir estudo desta obra de acordo com a numeração dos Livros, conforme será apresentado na obra em seus pormenores, iniciando com a folha de rosto da mesma na Figura 74.



Figura 74 - Folha de rosto original traduzida da obra *Elementos de Geometria*

No que diz respeito aos conteúdos presentes nesta obra, observa-se a divisão da mesma em oito partes chamadas, cada uma delas, de Livros em seu Prólogo pelo tradutor<sup>89</sup>. Sendo assim, cada um desses Livros trata de algum conhecimento específico conforme listaremos a seguir na Figura 75.

Figura 75 - Títulos e Conteúdos dos oitos livros da obra *Elementos de Geometria*

Livro nº:	Título:	Conteúdos:
I	<b>Princípios</b>	- propriedades das retas que se encontram e das retas perpendiculares; - teorema sobre a soma dos ângulos de um triângulo; - teoria das paralelas.
II	<b>Círculo</b>	- propriedades elementares do círculo, das cordas , dos tangentes , e da medida dos ângulos por arcos de círculo.
III	<b>Proporções das Figuras</b>	- a medida das superfícies e sua comparação; , - as propriedades do triângulo retângulo e dos triangulos equiângulos; - as propriedades das figuras semelhantes.
IV	<b>Polígonos regulares e a medida do círculo</b>	- dois temas servem de base para a demonstração baseada em Arquimedes; - dois métodos de aproximação como, por exemplo, o de Jacob Grégory.
V	<b>Estudo dos planos e dos ângulos sólidos</b>	- propriedades dos planos e dos ângulos sólidos.
VI	<b>Poliedros</b>	- propriedades;
VII	<b>Esfera e triângulos esféricos</b>	- propriedades;
VIII	<b>Esfera, cone e cilindro</b>	- medição das superfícies e, da solidez destes corpos, por um método similar ao de Archimedes.

Fonte: Legendre (1809b)

Ainda no que tange ao prólogo do tradutor, são destacadas as notas divididas, basicamente, em três classes, a saber: a primeira com indagações

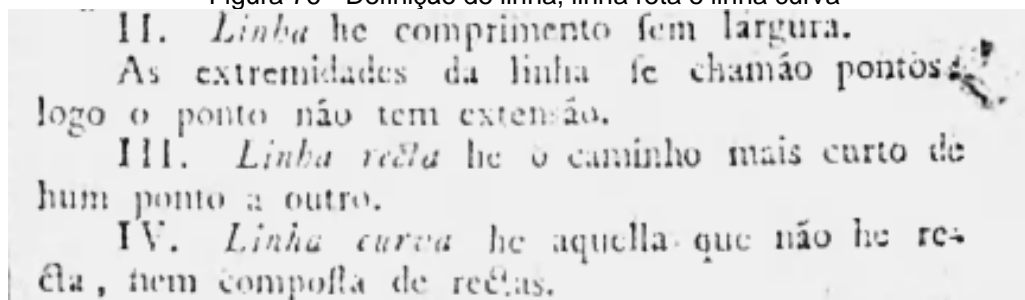
<sup>89</sup> Manoel Ferreira de Araújo Guimarães

relativas à perfeição dos elementos; a segunda, com “demonstrações mais rigorosas” que substituem outras, de menor complexidade ou “menos exatas”, que substituem aquelas existentes na primeira parte dos Elementos o que, segundo Legendre (1809b, p.13) tornaria “[...] demasiadamente difícil a primeira leitura dos Elementos.”; por fim, a terceira parte das notas contém soluções Analíticas de problemas de Geometria úteis ou, que podem despertar a curiosidade. Após o destaque do prólogo do tradutor, será realizado o estudo dos oito Livros que compõe o Tratado de Geometria de Legendre (1809b).

#### 5.4.1 O Livro I

Esta divisão dos *Elementos de Geometria* inicia com 20 definições (expressas na obra em numerais romanos) que iniciam conceituando a Geometria como sendo “[...] uma ciência, que tem por objetivo a medida da extensão.” (LEGENDRE 1809b, p. 1). Na sequência, o autor delimitou e definiu quais seriam estas extensões (em número de três): comprimento, largura e altura. Nas três definições seguintes, Legendre (1809b), traz as definições de linha, linha reta e linha curva, conforme mostra a Figura 76.

Figura 76 - Definição de linha, linha reta e linha curva

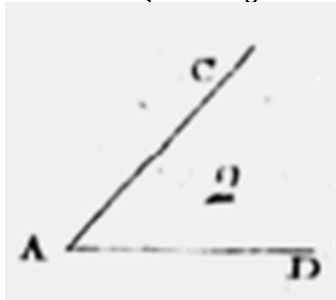


Fonte: Legendre (1809b, p.1)

Na continuidade, a obra nos traz as definições de superfície “[...] he o que tem comprimento e largura sem grossura ou altura.” (LEGENDRE (1809b, p.2); e plano “[...] huma superfície, na qual tomando dois pontos á vontade, e ajuntando-os por huma recta, esta fica toda dentro da superfície.” (idem). O autor trabalha ainda a questão da superfície curva, com sendo aquela que “[...] nem he plana, nem composta de superficies planas.” (ibidem).

No seguimento, apresentam-se as definições de corpo ou sólido, como sendo “o que reúne as três dimensões da extensão.” (LEGENDRE 1809b, p.2). Observamos também a definição de ângulo, como o encontro de duas retas onde “[...] a quantidade maior ou menor que elas se affastão huma da outra [...]” (*idem*), e vértice como sendo o ponto de intersecção dessas duas retas. A Figura 77 (na obra original, Figura 2<sup>90</sup>), nos ajuda a observar estas definições onde “A” é o vértice e AC e AB são as retas que compõem os lados<sup>91</sup>.

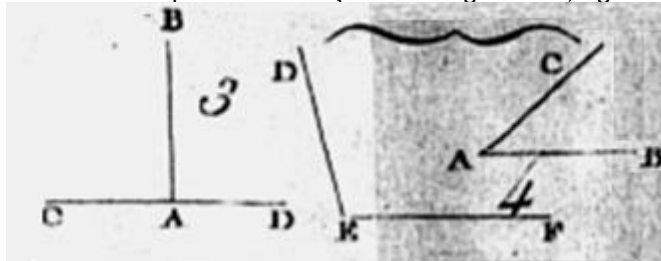
Figura 77 - Esboço de ângulo e vértice



Fonte: Legendre (1809b, est.1)

As definições de ângulo reto<sup>92</sup> (ou igual a  $90^\circ$ ), de ângulo agudo<sup>93</sup> (menor que  $90^\circ$ ) e obtuso<sup>94</sup> (maior que  $90^\circ$ ) são dadas com o auxílio da Figura 78 (3e 4 o.o.), conforme mostramos na sequência:

Figura 78 - Utilizadas para as definições de ângulo reto, agudo e obtuso



Fonte: Legendre (1809b, est. 1)

No que se refere às retas paralelas, Legendre (1809b, p.2), define-as como “[...] duas linhas, que, estando situadas no mesmo plano, não se podem

<sup>90</sup> Nas demais referências às Figuras da obra de Legendre (1809b) utilizaremos, entre parênteses, o número da Figura na obra original acompanhado da letra “o.o.”, numa referência à “Figura na obra original”.

<sup>91</sup> O “B” encontra-se cortado inclusive na obra original.

<sup>92</sup> BAD ou BAC na Figura 3 da obra original.

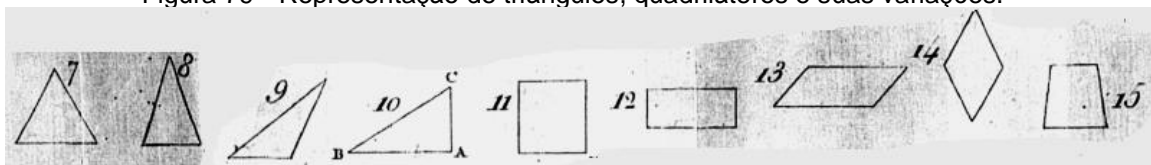
<sup>93</sup> BAC na Figura 4 da obra original.

<sup>94</sup> DEF na Figura 4 da obra original.

encontrar, a qualquer distância que se imaginem prolongadas.” Do mesmo modo, prossegue o autor, uma Figura plana é “[...] hum plano terminado de todas as partes por linhas” Legendre (1809b, p.2); e, se essas linhas são retas, o espaço que elas formam em seu fechamento é chamado de “Figura plana” ou “polígono”. Analogamente, estas mesmas linhas “[...] formão o contorno ou perímetro do polygono.” Legendre (1809b, p.3).

No seguimento das definições, o autor apresenta, de acordo com o número de lados, os polígonos mais simples: o triângulo e suas variações de acordo com as medidas dos lados (equilátero, isóscele e escaleno) e, também, o caso particular do triângulo retângulo; o quadrilátero e seus casos particulares em relação aos lados e ângulos (quadrado, retângulo, paralelogramo, losango e trapézio); pentágono; hexágono, etc. Abaixo, na Figura 79, mostramos a representação das Figuras citadas acima<sup>95</sup>(7 a 15 o.o.):

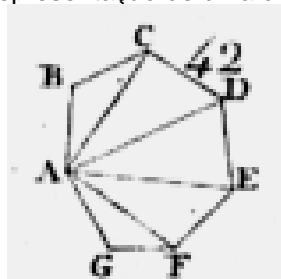
Figura 79 - Representação de triângulos, quadriláteros e suas variações.



Fonte: Legendre (1809b, est.2)

As diagonais, também são definidas na parte inicial dos *Elementos de Geometria*. Legendre (*idem*) definiu uma diagonal como “[...] a linha que une os vértices de dois ângulos não adjacentes.”. Deste modo, mostra-se a seguir a Figura 80 (42 o. o.) onde, por exemplo, AC representa a diagonal:

Figura 80 - Representação de uma diagonal por AC



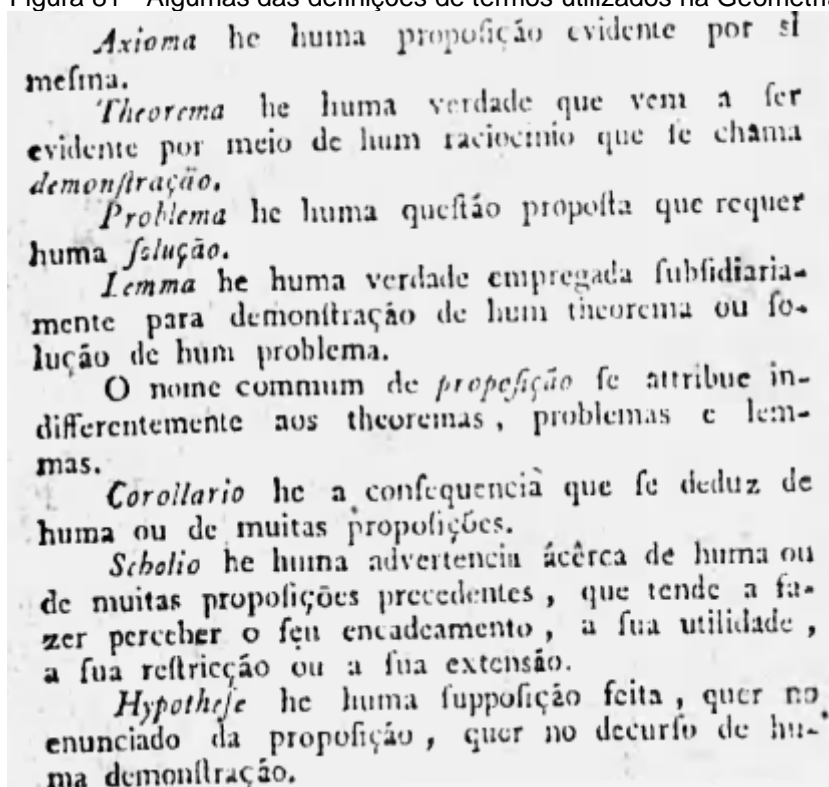
Fonte: Legendre (1809b, est. 2)

<sup>95</sup> Triângulo equilátero (7); triângulo isóscele (8); triângulo escaleno (9); triângulo retângulo (10); quadrado (11); retângulo (12); paralelogramo (13); losango (14) e trapézio (15).

Por fim, nesta primeira parte referente às definições, o autor estabelece os conceitos de polígonos equiláteros (com todos os lados iguais) e polígono equiângulos (com todos os ângulos iguais).

Na sequência de termos e definições, Legendre (1809b), nos traz as definições de alguns termos, tais como as que mostram a Figura 81:

Figura 81 - Algumas das definições de termos utilizados na Geometria



Fonte: Legendre (1809b, p.4)

No restante da página 4, bem como em toda a página 5, o autor se dispõe a tratar dos sinais de adição, subtração, igual, maior, menor, potenciação, radiciação, divisão e multiplicação, dando a ideia de que porrepresentarem quantidades, lados, diagonais e ângulos são passíveis de operações matemáticas.

No início da página 6, o autor apresenta cinco axiomas iniciais para o estudo da Geometria, conforme apresentado na sequência por meio da Figura 82.

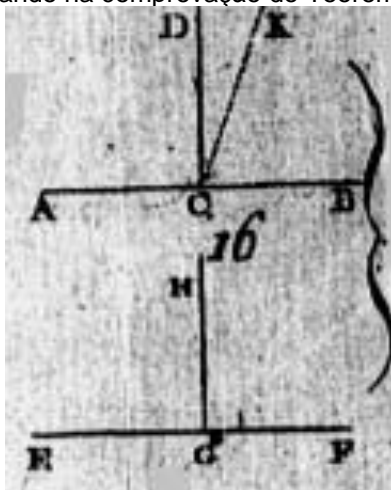
Figura 82 - Cinco axiomas iniciais de *Os Elementos de Geometria*

1. Duas quantidades iguaes a huma terceira são iguaes entre si.
2. O todo he maior que a sua parte.
3. O todo he igual a somma das partes em que elle está dividido.
4. De hum ponto a outro não se pôde tirar mais de huma linha recta.
5. Duas grandezas, linha, superficie ou sólido, são iguaes, quando postas huma sobre a outra, coincidem em toda a sua extensão.

Fonte: Legendre (1809b, p.6)

Após a apresentação dos axiomas acima, a proposição de número I em seu Teorema diz que: “Os ângulos rectos são todos iguaes entre si” (LEGENDRE 1809b, p. 6). Isso pode ser verificado através da Figura 83 (16 o.o.), e comprovado na demonstração:

Figura 83 - Auxiliando na comprovação do Teorema da Proposição I



Fonte: Legendre (1809b, est.1)

A demonstração para esse teorema segue abaixo:

Seja a linha recta CD perpendicular a AB, e GH a EF ( fig. 16.); digo que os angulos ACD, EGH serão iguaes entre si. Somem-se as quatro distâncias iguaes CA, CB, GE, GF, a distância AB será igual a distância EF, e poder-se-ha pôr a linha EF sobre AB, de maneira que o ponto E caia em A, e o ponto F em B. Estas duas linhas postas desta maneira coincidirão inteiramente huma com a outra; porque, a não ser assim, haveria duas linhas rectas de A para B, o que he impossível (axio. 4); logo o ponto G, meio de EF, cahirá sobre o ponto C, meio de AB. Applicando-se desta sorte o lado GE sobre CA, digo que o lado GH cahirá sobre CD; porque, supponhamos, se he possível, que cahe sobre huma linha CK, diferente de CD; como, por hypothese (def. 10.), o angulo EGH = HGF, deveria ser ACK = KCB. Mas o angulo ACK he

maior que ACD, o angulo KCB he menor que BCD; demais, por hypothese,  $ACD = BCD$ ; logo ACK he maior que KCB, logo a linha GH não pode cahir sobre huma linha CK diferente de CD; logo ella cabe sobre CD, e o angulo EGH sobre ACD; logo todos os angulos rectos são iguaes entre si. (LEGENDRE 1809b, p. 6-7)

Na Proposição de número II, Legendre (1809b, p.7) apresenta o seguinte teorema: “Toda a linha recta CD (fig. 17.), que encontra outra AB, faz com haja dois ângulos adjacentes ACD e BCD, cuja somma he igual a dois ângulos rectos.”. O teorema é seguido de dois corolários, sendo o primeiro, ainda com referência à mesma Figura da obra original (17) e exibido na seguinte ordem – Figura 84 e corolário:

Figura 84 - Auxiliando na explicação da Proposição II



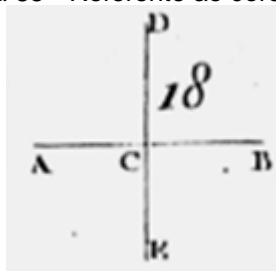
Fonte: Legendre (1809b, est. 1)

Na sequência, o corolário número I: “Se hum dos ângulos ACD, BCD, for recto, o outro o será igualmente.” (idem), onde o autor nos explica que:

No ponto C, levante-se sobre AB a perpendicular CE. O ângulo ACD he a somma dos ângulos ACE, ECD; logo  $ACD + BCD$  será somma dos trez ACE, DCE, BCD. O primeiro he recto, os outros dois juntos fazem o ângulo recto BCE; logo a somma dos dois ângulos ACD, BCD he igual a dois ângulos rectos. (*ibidem*)

O corolário número II, refere-se à perpendicularidade entre si de duas linhas, conforme exibimos na Figura 85 (18 o.o.) que segue:

Figura 85 - Referente ao corolário II



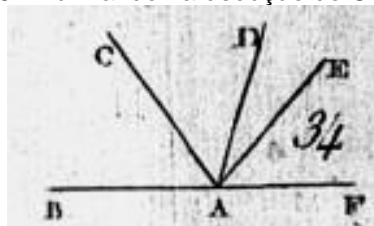
Fonte: Legendre (1809b, est. 1)



A Figura anterior, como já enunciado, fala da perpendicularidade entre si de duas linhas e o corolário, por consequência, nos leva a deduzir que se “[...] a linha DE (fig, 18) for perpendicular a AB, reciprocamente AB será perpendicular a DE.”. (LEGENDRE 1809b, p. 7).

Ainda sobre a questão da perpendicularidade, observa-se a Figura 86 (34 o. o.):

Figura 86 - Auxiliando na dedução do Corolário III



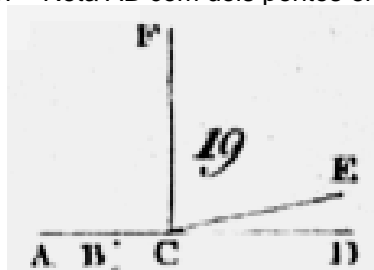
Fonte: Legendre (1809b, est. 1)

Ao observarmos a Figura acima, teremos condições de citar o corolário III, o qual diz que:

Os ângulos consecutivos BAC, CAD, DAE, EAF ( fig. 34 ) formados do mesmo lado da recta BF, valem em somma dois ângulos reftos; porque a somma delles he igual a dos dois ângulos BAC, CAF. (*idem*).

A Proposição de número III apresenta o seguinte teorema em Legendre (1809b, p.8): “Duas linhas rectas que em dois pontos communs coincidem em toda a sua extensão, e formão huma,sãoa mesma recta.”. Esse teorema pode se evidenciado através de dois pontos comuns (A e B) à mesma reta que são mostrados na Figura 87 (19 o. o.) abaixo:

Figura 87 - Reta AB com dois pontos em comum



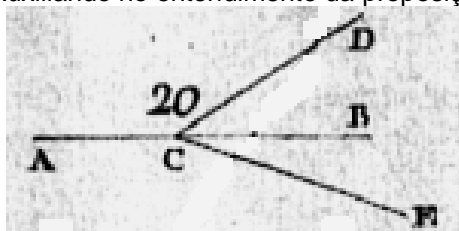
Fonte: Legendre (1809b, est.1)

Acrescenta-se ainda a este teorema o que Legendre, observa:

As linhas rectas que tem dois pontos A e B communs, não podem separar-se em ponto algum do seu prolongamento; logo ellas formão huma só e a mesma recta.(LEGENDRE 1809b, p.8)

A proposição IV apresenta o teorema a seguir: “Se dois ângulos adjacentes ACD, DCB (fig. 20) valerem em somma dois ângulos rectos, os dois lados exteriores AC, CB, estarão em linha recta.” (LEGENDRE 1809b, p. 8).

Figura 88 - Auxiliando no entendimento da proposição IV

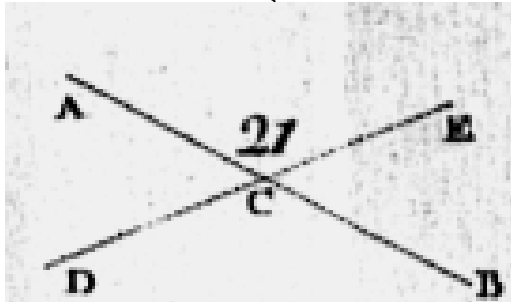


Fonte: Legendre (1809b, est. 1)

Desta forma, segue o autor, a soma de dois ângulos ACD, DCB, é igual a dois ângulos retos. Assim,  $ACD + DCB$  é igual  $ACD + DCE$ ; tirando de uma das partes ACD, ficaria a parte DCB igual ao todo DCE, o que seria absurdo. Logo CB é o prolongamento de AC.

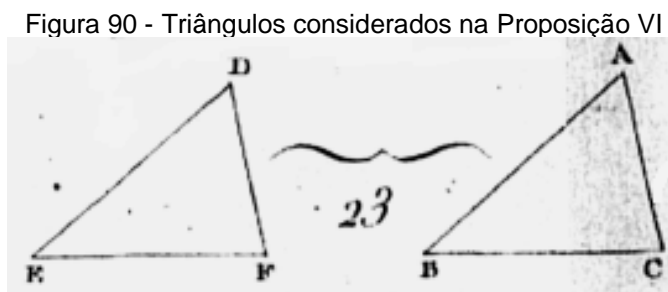
A Proposição V, em seu teorema, trata de retas que se cruzam e formam ângulos opostos verticalmente iguais. A Figura 87 (21 o. o.), nos mostra as retas AB e DE com um ponto de intersecção, C. Como a soma dos ângulos ACD e ACE é igual a dois ângulos retos e, a soma dos ângulos ACE e BCE também equivale a dois ângulos retos, pode-se afirmar que a soma  $ACE + ACD$  é igual à soma  $ACE + BCE$ . Assim, diminuindo-se ACE de ambas as somas, pode-se concluir que ACD é igual ao seu oposto BCE como mostramos na Figura 89, a seguir:

Figura 89 - Auxiliar na demonstração do teorema da Proposição V



Fonte: Legendre (1809b, est. 1)

Na sequência, temos a Proposição VI, a qual versa da igualdade de dois triângulos que são iguais quando tem um ângulo igual compreendido em lados iguais, um a um, ou seja, caso sejam sobrepostos estes triângulos, coincidirão perfeitamente. A Figura 90 (23 o. o.), mostra os triângulos em questão:



Fonte: Legendre (1809b, est.1)

Ainda, acerca desse teorema temos o seguinte corolário:

Havendo três cousas iguaes em dois triângulos, a saber, o ângulo A = D, o lado AB = DE, e o lacto AC = DF, se pode concluir que as outras três também são iguaes; a saber, o ângulo B = E, o angulo C = F, e o lado BC = EF. (LEGENDRE, 1809b, p.10)

A Proposição VII, que também trata da igualdade de triângulos, aponta para a questão de um dos lados idêntico adjacente a dois ângulos iguais. Nesse caso, os triângulos são iguais. A mesma Figura 57 auxilia na explicação desse teorema, onde o lado BC, que é igual ao lado EF; o ângulo B igual ao angulo E, e o ângulo C é igual ao ângulo F; assim, podemos afirmar que o triângulo DEF é igual ao triângulo ABC. Para complementar a ideia, cita-se o seguinte corolário de Legendre (1809b, p.11): “Havendo três cousas iguaes em dois triângulos, a saber, BC = EB, B = E, C = B, se pode concluir que as outras três também são iguaes, a saber, AB = DE, AC = DF, A = D.

A Proposição VIII destaca o comprimento dos lados, onde qualquer lado que seja será menor que o comprimento dos outros dois. A Figura 57, novamente é destacada com o exemplo de Legendre (1809b), onde este afirma que, por exemplo, a reta BC é menor que a soma dos lados BA+AC.

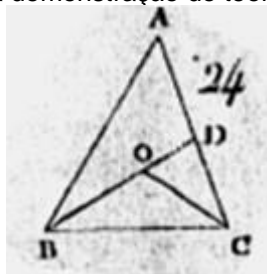
A Proposição IX, por sua vez, traz a questão do um ponto O, no centro do triângulo, onde em seu teorema afirma que:

Se de hum ponto O (fig. 24.) tomado dentro do triangulo ABC, tiramos as extremidades de hum lado BC as linhas OB, OC, a somma destas

linhas será menor que a somma dos outros dois lados AB, AC.”  
(LEGENDRE 1809b, p.11)

Assim, com o auxílio da Figura 91, inicia-se a demonstração do teorema acima:

Figura 91 - Auxiliar na demonstração do teorema da Proposição IX



Fonte: Legendre (1809b, est. 1)

Dessa forma, segue a demonstração Legendre (1809b, p.12):

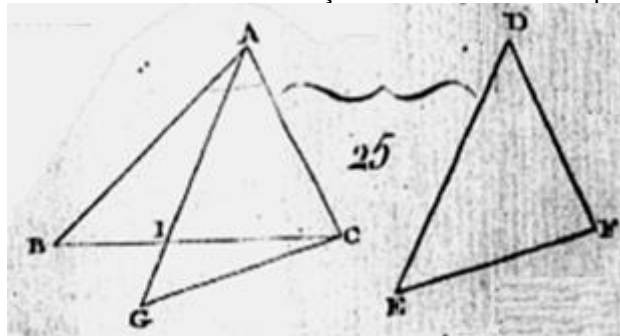
Prolonguemos BO até o encontro do lado AC em D; a linha recta OC he mais curta que OD + DC (prop. ant.); ajuntando a cada parte BO, teremos  $BO + OC < BO + OD + DC$ , ou  $BO + OC < BD + DC$ . Temos igualmente  $BD < BA + AD$ , ajuntando DC a cada parte, teremos  $BD + DC < BA + AC$ ; logo, com mais forte razão,  $BO + OC < BA + AC$ .

Na sequência, será analisada a Proposição X e o seu respectivo teorema, que trata da comparação entre lados e ângulos de triângulos e, conforme Legendre (1809b, p.12):

Se os dois lados AB, AC (fig. 25), do triângulo ABC, forem iguaes aos dois lados do triângulo DEF, cada hum a cada hum; se ao mesmo tempo o Ângulo BAC compreendido pelos primeiros, for maior que o ângulo EDF compreendido pelos segundo; digo que o terceiro BC, do primeiro triângulo será maior que o terceiro EF do segundo.

Fazendo-se o ângulo  $CAG = D$  e tomando-se  $AG = DE$ , os triângulos GAC e DEF serão idênticos porque possuem um ângulo igual compreendido entre lados iguais, que será  $CG = EF$ , conforme exibido na Figura 92 (25 o. o.).

Figura 92 - Auxiliar na demonstração do teorema da Proposição X

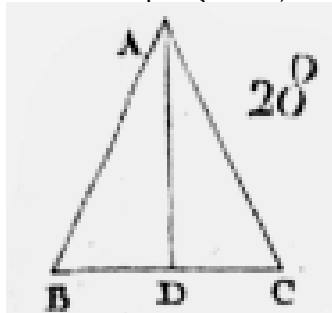


Fonte: Legendre (1809b, est. 1)

O Teorema da Proposição XI fala da igualdade entre dois triângulos que possuem os seus três lados iguais. Como referência, será utilizada novamente a Figura 88 (23 o. o.). Desta maneira, de acordo com os estudos de Legendre (1809b), se o lado  $AB = DE$ ,  $AC = DF$ ,  $BC = EF$ , pode-se afirmar que o ângulo  $A = D$ ,  $B = E$ ,  $C = F$ . Concluindo, o autor lança mão de um Scholio, onde observa que: “Pode-se notar que os ângulos iguaes são oppostos a lados iguaes. Assim, os ângulos iguaes A e D são oppostos aos lados iguaes BC, EF.” (LEGENDRE 1809b, p.13).

A Proposição XII por sua vez traz, além do teorema, um corolário e um scholio. O teorema, em Legendre (1809b, p.14), afirma que “Em hum triângulo isósceles os ângulos oppostos aos lados iguaes são iguaes.”. Já o corolário refere-se aos triângulos equiláteros e afirma que, além de ser equilátero, “[...] he ao mesmo tempo equiângulo, isto he, tem os seus ângulos iguaes.” (*idem*). Por fim, o scholio, onde expressa-se que “A igualdade dos triângulos ABD, ACD, prova ao mesmo tempo que o ângulo  $BAD = DAC$ , e que o ângulo  $BDA = ADC$ , logo estes últimos são rectos.” (*ibidem*)

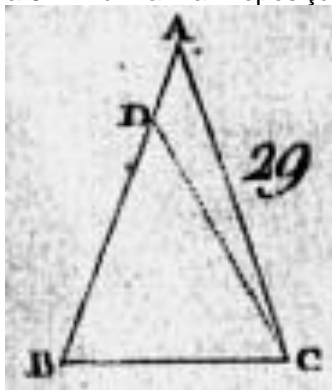
Figura 93 - Auxiliar na Proposição XII, corolário e scholio



Fonte: Legendre (1809b, est.1)

A Proposição XIII (Legendre 1809b) trata na reciprocidade entre dois ângulos iguais em um mesmo triângulo onde, os lados opostos também serão iguais e, em consequência, teremos um triângulo isóscele. A Figura 94 (29 o. o.) mostra o triângulo ABC, onde  $\angle B = \angle C$  e, o lado  $AB = AC$ .

Figura 94 - Auxiliar na Proposição XIII



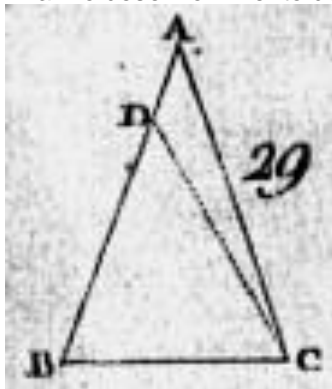
Fonte: Legendre (1809b, est. 1)

A Proposição XIV e seu teorema, por sua vez, versam que:

De dois lados de hum triângulo he maior aquelle que he opposto ao maior ângulo, e reciprocamente, de dois ângulos de hum triângulo he maior aquelle que he opposto ao maior lado. (LEGENDRE 1809b, p.15)

O exemplo para o entendimento deste teorema vem por meio da Figura 95 (29 o.o.), onde o ângulo  $C > B$  e podemos afirmar que o lado AB, oposto ao ângulo C, é maior que o lado AC oposto ao ângulo B.

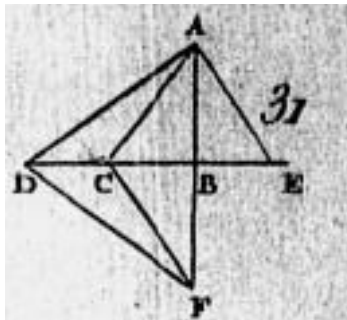
Figura 95 - Auxiliar no desenvolvimento do Teorema XIV



Fonte: Legendre (1809b, est.1)

A Proposição XV fala da perpendicularidade entre retas. O seu teorema diz que, dado um ponto qualquer, fora de uma reta dada, não poderá haver mais de uma perpendicular a esta reta. A Figura 96 (31 o. o) ilustra o teorema acima:

Figura 96 - Auxiliar no desenvolvimento do Teorema XV



Fonte: Legendre (1809b, est.1)

No que diz respeito a Proposição XVI, e fazendo referência à Figura 63 (31 o.o.), Legendre (1809b, p.17) observa que se de hum ponto A qualquer:

Situado fora de huma recta DE, tirarmos a perpendicular AB sobre esta recta, e diferentes obliquas AL, AC, AD, &c. a diferentes pontos da mejma recta,

- 1.º A perpendicular AB será mais curta que qualquer obliqua;
- 2.º As duas obliquas AC, AE, tiradas de huma e outra parte da perpendicular, em distâncias iguaes, BC, BE, serão iguaes;
- 3.º De duas obliquas AC e AD, ou AE e AD, tiradas corno se quiser, a que se afastar mais da perpendicular, será a mais comprida.

Desta mesma proposição (e teorema), surge também os corolários número I, em que o autor descreve a perpendicular da seguinte forma: “A perpendicular mede a verdadeira distancia de hum ponto a huma linha, porque he mais curta que qualquer obliqua.” (LEGENDRE 1809b, p.18); e, também o corolário número II:

De hum mesmo ponto não se podem tirar a huma mesma linha trez restas iguaes. Porque, se assim fôra, haveria do mesmo lado da perpendicular duas obliquas iguaes, o que he impossivel. (*idem*)

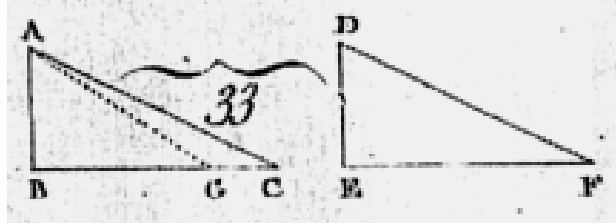
Assim, o autor nos traz ao entendimento a definição de reta perpendicular e, na sequência a Proposição XVII traz o que seria a complementação da ideia sobre as retas perpendiculares<sup>96</sup>. No entanto, por motivo de uma legibilidade incompleta da obra original, não foi citada essa parte.

A Proposição XVIII apresenta o seguinte teorema “Dois triângulos rectângulos são iguaes quando tem a hypotenusa igual, e hum lado igual.” (LEGENDRE 1809b, p. 19). Para fins de apresentação gráfica deste teorema,

<sup>96</sup> Nos trechos legíveis é possível perceber a referência.

apresentamos a Figura 97 (33 o. o.), onde é possível visualizar as seguintes relações: hipotenusa  $AC = DF$  e, lados  $AB = DE$ . Com base neste teorema é possível então, afirmar que o triângulo  $ABC$  é igual ao triângulo  $DEF$ , ou,  $ABC = DEF$ .

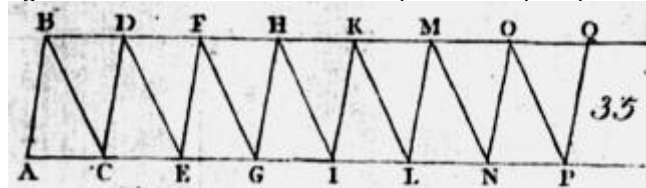
Figura 97 - Auxiliar na comparação entre dois triângulos



Fonte: Legendre (1809b, est. 1)

A Proposição XIX, por sua vez, é dedicada à questão da soma dos três ângulos de um triângulo. Para ilustrar esta questão, o autor propõe a observação da Figura 98 (35 o.o.), conforme abaixo:

Figura 98 - Auxiliar na demonstração da Proposição XIX



Fonte: Legendre (1809b, est. 2)

Na Figura 98 vemos  $AC$  e tomamos  $CE = AC$ , o ângulo  $ECD = CAB$  e, o lado  $CD = AB$ ; aproximamos  $DE$  e  $BD$ . Com estas premissas, “O triângulo  $CDE$  será igual ao triângulo  $BAC$ , porque tem um hum ângulo igual compreendido entre lados iguaes cada hum a cada um.” (LEGENDRE 1809b, p.19-20). Esta afirmação do autor, é a mesma que está descrita na Proposição VI, vista anteriormente.

Prossegue o Legendre (1809b), observando que linha reta  $ACE$ , a soma de todos os ângulos  $ACB, BCD, DCE$  é igual a soma de dois ângulos retos. Feito isso, supõe-se que a soma dos ângulos de  $ABC$  seja maior que a soma de dois ângulos retos, o que nos levaria a suposição que  $CAB + ABC + ACB > ACB + BCD + CDE$ ; desse modo, tira-se  $ACB$  de ambas os lados e, como  $CAB = ECD$ , restaria  $ABC > BCD$ . Prolongando-se indefinidamente a reta  $AC$ , bem como os



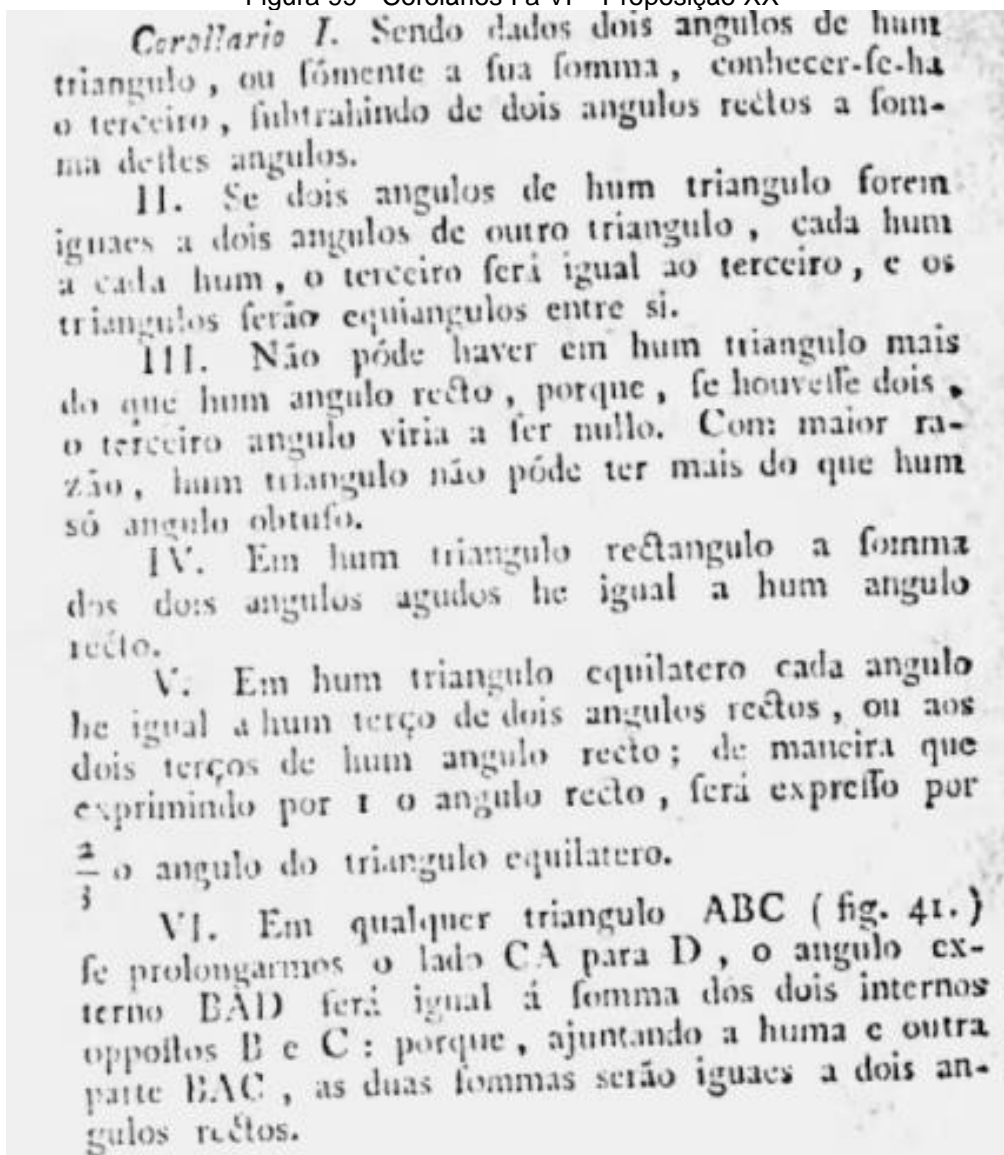
triângulos ABC, CDE, EFG, GHI, etc, destaca-se os vértices formados pelas retas BD, DF, FH, HK, etc o que formaria uma série de triângulos intermediários, os quais serão iguais entre si pois terão um ângulo em comum.

Isto, posto, segue o autor, teremos que  $AC > BD$  e, a diferença  $AC - BD = D$ . Assim, prossegue Legendre (1809b, p. 20-1):

He claro que  $2D$  será a diferença entre a linha recta ACE igual a  $2AC$ , e a linha recta ou quebrada BDF igual a  $2BD$ , de sorte que teremos  $AE - BF = 2D$ . Do mesmo modo teremos  $AG - BH = 3D$ ,  $AI - BK = 4D$ , e assim em diante. Ora, por menor que seja essa diferença  $D$ , he evidente que esta diferença, repetido hum número de vezes suficiente, virá a ser maior que hum comprimento dado. Logo, poderemos supor a série dos triângulos prolongada tão longe que seja  $AP - BQ > 2AB$ , e assim teríamos  $AP > PQ + 2AB$ . Ora, pelo contrário, AP he menor que a linha angulosa ABQP, que ajunta os mesmos extremos A e P, de maneira que teremos sempre  $AP < AB + BQ + QP$  ou,  $AP < BQ + 2AB$ . Logo a hypothese, de que partimos, he absurda; logo a somma dos três ângulos do triângulo ABC não pode exceder a dois ângulos rectos.

A Proposição XX, por sua vez, é mais específica, versando sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo, a qual não poderá exceder dois ângulos retos. Na proposição anterior, o autor mostra que a soma dos ângulos não pode exceder dois ângulos retos, o propósito desta Proposição é mostrar que a soma dos ângulos internos não pode ser inferior a dois ângulos retos. A Figura 65 (35 o.o.), novamente é referida através do triângulo ABC são enunciados cinco Corolários, a saber, conforme mostra a Figura 99.

Figura 99 - Corolários I a VI – Proposição XX



Fonte: Legendre (1809b, p.23)

A Proposição XXI, apresenta o seguinte enunciado:

A somma de todos os ângulos internos de hum polygono, he igual a tantas vezes dois ângulos rectos quantas unidades houver no número dos lados menos dois. (LEGENDRE 1809b, p.24).

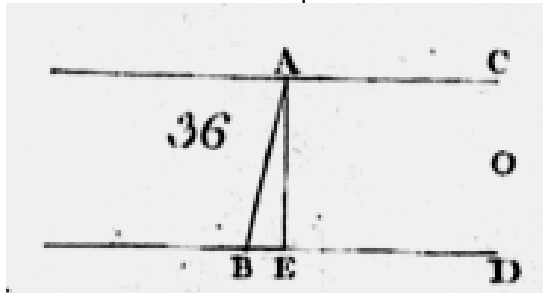
O desenvolvimento desta Proposição e seus desdobramentos, três Corolários e um Scholio, encontram-se com a leitura prejudicada na fonte consultada. Dessa forma nesta proposição serão resumidos ao enunciado acima.

Na proposição XXII Legendre (1809b, p. 25), estabelece que:

Se duas linhas rectas, AC, ED (fig. 36) forem perpendiculares a huma terceira AE, estas duas linhas serão paralelas, quer dizer, que se não poderão encontrar a qualquer distância que se prolonguem.

Isto é verdadeiro, pois conforme a Proposição XV, não pode haver duas perpendiculares no mesmo ponto de origem sobre uma mesma linha. A Figura 100 (36 o.o.), que segue, demonstra isso:

Figura 100 - Utilizada como referência para demonstrar a Proposição XXII

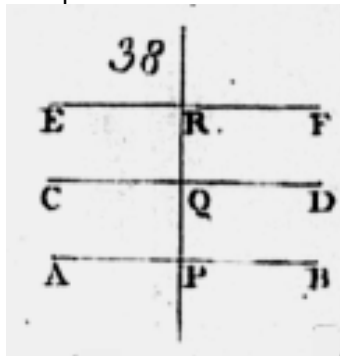


Fonte: Legendre (1809b, est.2)

As Proposições XXIV e XXV encontram-se com a leitura prejudicada, deste modo, não teceremos comentários a respeito destas para não comprometer a interpretação dos enunciados.

Por outro lado, a Proposição XXVI, com seu teorema, trata do paralelismo entre retas distintas. Logo, Legendre (1809b, p.29) descreve o teorema da seguinte forma “Duas linhas AB, CD (fig. 38.); paralelas a huma terceira EF, são paralllelas entre si,” A Figura 101 (38 o.o.) ilustra o teorema acima:

Figura 101 - Referência para ilustrar o teorema da Proposição XXVI



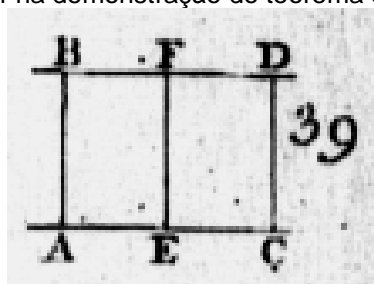
Fonte: Legendre (1809b, est.2)

Traça-se uma secante, PQR, perpendicular a EF. Como AB e EF são paralelas entre si, PR é perpendicular a AB (Proposição XXV); da mesma maneira, CD e EF também se encontram em situação de paralelismo; assim, a

secante PR é perpendicular a CD; concluímos então que AB e CD são perpendiculares a mesmalinha PQ, logo são paralelas (Proposição XX).

Ao analisara Proposição XXVII, observa-se que Legendre (1809b, p.29), afirma que as “[...] duas retas paralelas são, em toda a sua extensão igualmente distantes.”. Ou seja, se tomarmos duas retas paralelas AC e BD, onde quer que sejam traçadas duas perpendiculares AB, CD (Figura 69), pode-se afirmar que suas duas perpendiculares são iguais. A Figura 102 mostra os detalhes deste teorema:

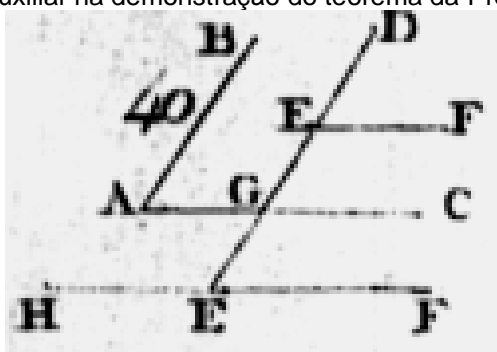
Figura 102 - Auxiliar na demonstração do teorema da Proposição XXVII



Fonte: Legendre (1809b, est. 2)

A Proposição XXVIII, por sua vez, propõe que tomados dois ângulos BAC, DEF e, se os seus lados forem paralelos “[...] cada hum a cada hum, dirigidos no mesmo sentido, estes dois ângulos serão iguaes.” (LEGENDRE 1809b, p.30). A Figura 103 (40 o.o.), abaixo, ilustra o teorema da Proposição XVIII:

Figura 103 - Auxiliar na demonstração do teorema da Proposição XXVIII



Fonte: Legendre (1809b, est.2)

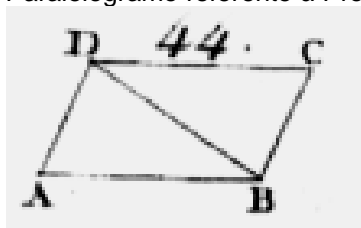
A proposição XXIX trata dos lados e ângulos opostos de um paralelogramo, os quais, afirma o seu teorema, são iguais. Dessa forma, o autor observa que se tomando uma diagonal BD e dois triângulos ADB, DBC, temos o lado em comum BD. Em virtude das paralelas AB, CD  $\angle ABD = \angle DBC$  e, em

consequência ambos os triângulos são idênticos. Desta forma, o lado AB, oposto ao ângulo ADB é igual ao lado DC, oposto ao ângulo igual DBC e, analogamente, o lado AD é igual ao lado BC. Desta maneira, pode-se concluir que os lados opostos de um paralelogramo são iguais. (LEGENDRE 1809b).

Ao mesmo tempo, voltando à igualdade dos triângulos ADB e DBC, temos que os ângulos A e C são iguais. E, ainda, o ângulo ADC, composto por ADB e DBC é idêntico ao ângulo ABC que, por sua vez, é composto por DBC e ADB. Assim, podemos concluir que os ângulos de um paralelogramo são iguais. (*idem*)

Para melhor ilustrar os dois parágrafos acima, a Figura 104 (44 o.o.) logo abaixo, apresenta os ângulos e lados propostos:

Figura 104 - Paralelogramo referente à Proposição XXIX



Fonte: Legendre (1809b, est. 2)

Para finalizar esta proposição, cita-se o Corolário I desta: “Logo duas paralelas AB, CD, compreendida entre outras duas paralelas AD,BC são iguaes.” (LEGENDRE 1809b, p. 31).

A Proposição XXX refere-se a um dado quadrilátero ABCD em que “[...] se os lados opostos são iguaes, de maneira que seja  $AB = CD$ , e  $AD = BC$ , os lados iguaes serão paralelos e a Figura será um paralelogramo.” (LEGENDRE 1809b, p.31). Para ilustrar melhor este teorema o autor se utiliza da mesma Figura 71, acima, a qual apresenta os quatro lados referenciados em seu enunciado.

Finalizando o Livro I dos *Elementos de Geometria* de Legendre (1809b), infelizmente as condições de leitura da obra consultada não permitem uma melhor descrição das Proposições XXXI e XXXII, as quais não serão objeto de uma maior avaliação. Na sequência, apresenta-se o estudo do Livro II.

#### 5.4.2 O Livro II

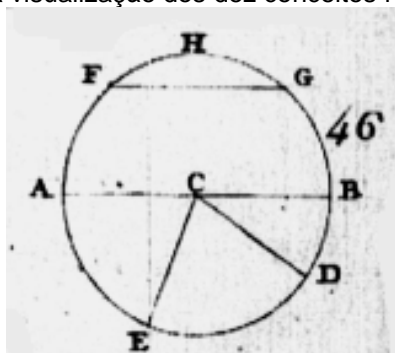
Esta divisão dos *Elementos de Geometria* de Legendre (1809b) inicia com 10 definições<sup>97</sup> (expressas na obra em numerais romanos) que conceituam o Círculo suas medidas e seus ângulos. Na sequência, o autor expressa em XIX Proposições os temas de estudo desta divisão de sua obra. Ao fim do Livro II, dezoito problemas de Geometria pura, com a respectiva solução, para que os leitores possam se aprofundar nos conhecimentos que pretensamente se adquiriu nas Proposições.

Desta forma, inicialmente, trataremos dos 10 Conceitos do Livro II, conforme Legendre (1809b, p.33):

Circunferência de círculo he huma linha curva ( fig. 46.) que tem todos os seus pontos igualmente distantes de hum ponto interior que se chama centro. Círculo he o espaço fechado por esta curva.

Para ilustrar os conceitos de circunferência e de círculo, é apresentada abaixo a Figura 105 (46 o.o.), a qual servirá também como referência para o estudo das demais definições I a V, apresentadas na sequência:

Figura 105 - Auxiliar da visualização dos dez conceitos relativos à circunferência



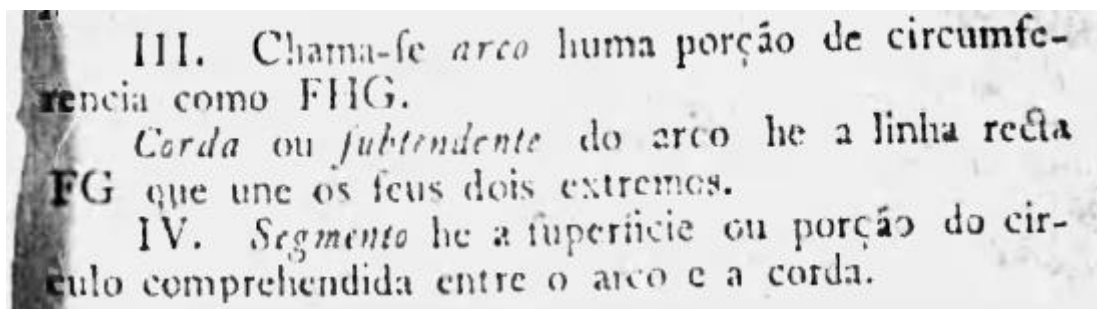
Fonte: Legendre (1809b, est. 2)

O segundo conceito trabalhado é o de raio e diâmetro, sendo o raio “Toda a linha recta CA, CE, CD &c. tirada do centro à circumferência [...]” e diâmetro “Toda a linha, como AB, que passapelo centro, e termina de ambas as partes na circumferência [...]” (*idem*).

Na sequência, a Figura 106 apresenta os conceitos III e IV, arco, corda e segmento:

Figura 106 - Definições de arco, corda e segmento

<sup>97</sup> Aquelas com legibilidade aceitável são colocadas em forma de Figura. Por outro lado, as que não apresentam condições claras de leitura são inseridas em forma de citação direta.

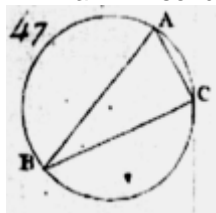


Fonte: Legendre (1909b, p.33)

É necessário observar ainda que, a esta mesma corda FG correspondem sempre dois arcos FHG, FEG, e por consequência também dois segmentos.

A definição V corresponde ao setor que Legendre (1809b, p.34) descreve como sendo “[...] a parte do círculo comprehendida entre um arco DE, e os dois raios, CD, CE, tirados aos extremos desse arco.” Da mesma forma, e na definição VI, a linha inserida no círculo, é “[...] aquella que tem os extremos na circumferência, como AB (fig. 47).” (LEGENDRE 1809b, p.34). A Figura 107 (47 o.o.) mostra a linha inserida no círculo:

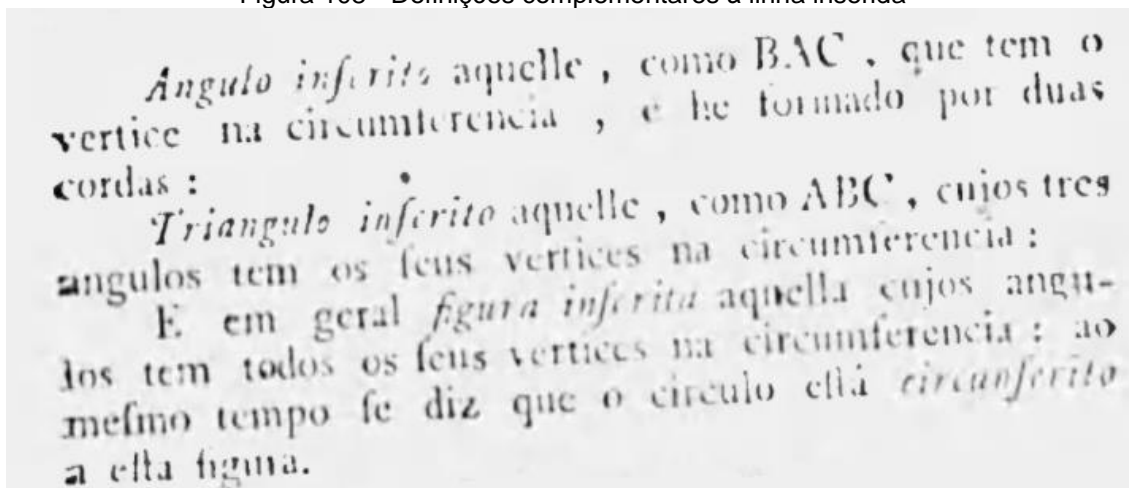
Figura 107 - Linha AB inserida no círculo



Fonte: Legendre (1809b, est.2)

Ainda tendo como referência a Figura 105, o autor define o que vem a ser um ângulo inscrito, um triângulo inscrito e uma Figura inserida, conforme podemos observar na Figura 108.

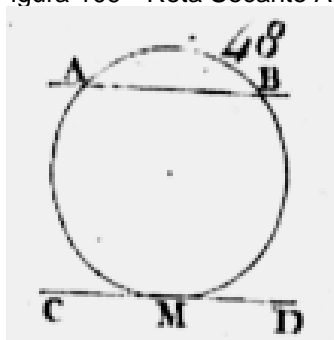
Figura 108 - Definições complementares à linha inserida



Fonte: Legendre (1809b, p.34)

A Proposição VII, sobre a secante, é presente por Legendre (*idem*) como “[...] huma linha que encontra a circumferência em dois pontos, como  $AB$  (fig. 48)”. Na sequência apresentamos a Figura 109 (48 o.o.), e a representação da reta secante:

Figura 109 - Reta Secante AB



Fonte: Legendre (1809b, est. 2)

A tangente, ou reta tangente, conforme Legendre (*ibidem*) “[...] he huma linha que só tem hum ponto comum com a circumferência [...]”. No caso da Figura 76, acima, percebemos a reta  $CD$  e o “ponto comum”  $M$ , definido pelo autor como “ponto de contacto”.

Analogamente, a definição IX aponta que duas circumferências serão tangentes entre si quando possuírem um, e apenas um ponto de contato.

Por último, a definição X, fala da circunscricção de um polígono, o qual será assim considerado quando “[...] todos os seus lados forem tangentes à

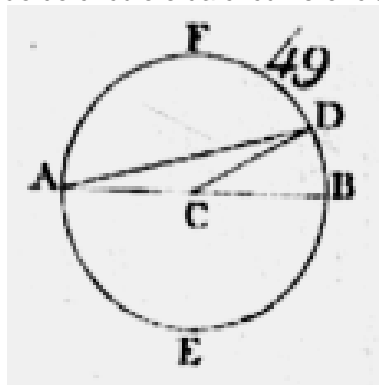


circunferência. Do mesmo modo, se diz que o círculo está inscrito no polygono.” (LEGENDRE 1809b, p. 34).

Apresentados os dez conceitos iniciais sobre o círculo e a medida dos ângulos iremos trabalhar, a partir de agora, com as XIX Proposições acerca do Livro II.

A Proposição I do Livro II versa sobre a divisão em duas partes iguais que todo e qualquer diâmetro AB ocasiona no círculo e na circunferência. A Figura 110 (49 o.o.) ilustra esta proposição, conforme observa-se abaixo:

Figura 110 - Divisão do círculo e da circunferência pelo diâmetro AB



Fonte: Legendre (1809b, est.2)

A proposta da divisão em partes iguais no círculo e na circunferência pode ser verificada tomando-se a Figura AEB e sobrepondo-a a AFB. A linha curva AEB deverá sobrepor exatamente a linha AFB, tendo-se como base comum a linha AB. Caso isso não ocorra é pois que em uma das Figuras, algum ponto que não é equidistante do centro, o que contraria a definição do círculo. (LEGENDRE 1809b)

A Proposição II, trata da questão das cordas e afirma que “Toda corda he menor que o diâmetro.” (LEGENDRE 1809b, p.35). Ao mesmo tempo, o seu corolário dispõe que “[...] a maior linha recta que se pode inscrever em hum circulo he igual ao seu diâmetro.” (*idem*)

A Proposição III, seu teorema e seus comentários a respeito da singularidade das intersecções de uma linha reta na circunferência, seguem abaixo da Figura 111.

Figura 111 - Definição e comentário acerca da Proposição III

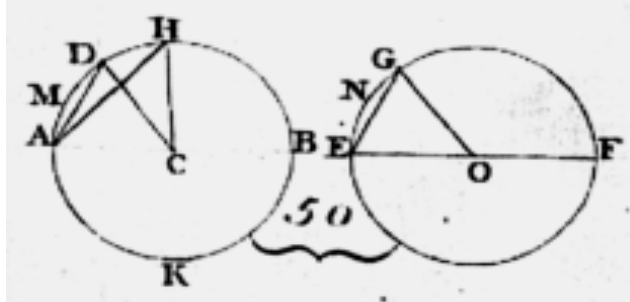
*Uma linha recta não pôde encontrar huma circumferencia em mais de dois pontos.*

Porque, se a encontrasse em tres, estes tres pontos estarião igualmente distantes do centro; logo haveria tres rectas iguaes tiradas de hum mesmo ponto sobre a mesma linha recta, o que he impossivel (pr. 16. liv. 1).

Fonte: Legendre (1809b, p.35)

A Proposição IV e seu respectivo teorema tratam da igualdade entre arcos e cordas em círculos iguais. Assim, Legendre (*idem*) afirma que “[...] arcos iguaes são subtendidos por cordas iguaes, e reciprocamente cordas iguaes subtendem arcos iguaes.” Isso é melhor observado na Figura 112 (50 o.o.) abaixo:

Figura 112 - Círculos iguais subtendendo arcos iguais



Fonte: Legendre (1809b, est.2)

Prosseguindo em suas considerações, o autor observa ainda que: “Sendo o raio AC (fig. 50) igual ao raio EO, e o arco AMD igual ao arco ENG, digo que a corda AD será igual a corda EG.” LEGENDRE (*ibidem*).

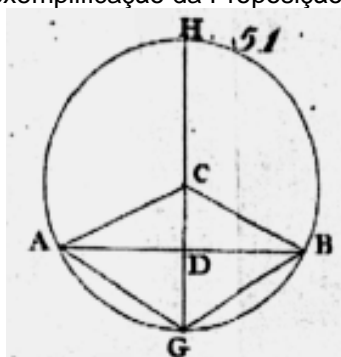
A Proposição V, por sua vez, aborda a questão da reciprocidade entre arcos e cordas, sendo descrita por Legendre (1809b, p.36) da seguinte forma:

No mesmo círculo ou em círculos iguaes, o maior arco he subtendido pela maior corda, e reciprocamente.” No entanto, observa ainda o autor, que o teorema é válido apenas para arcos menores que o semicírculo pois [...] Se fossem maiores, teria lugar a propriedade contrária: augmentando o arco, diminuiria a corda, e reciprocamente. (LEGENDRE 1809b, p.37).

Seguindo adiante, no estudo do Livro II, temos a Proposição VI, a qual destaca um determinado raio “[...] CG, perpendicular a huma corda AB, divide esta corda, e o arco subtendido AGB, cada hum em duas partes iguaes.”

(LEGENDRE 1809b, p. 37). Para exemplificar esse teorema, o autor lança mão da Figura 113 (51 o.o.):

Figura 113 - Auxiliar na exemplificação da Proposição VI e seu teorema



Fonte: Legendre (1809b, est.2)

Ao mesmo tempo, esse teorema traz consigo o seguinte Scholio:

O centro C, o meio D da corda AB, o meio G do arco subtendido por esta corda, são três pontos situados na mesma linha perpendicular a corda. Ora bastão dois pontos para determinar a posição de huma linha; logo toda a linha que passar por dois dos pontos mencionados, passará necessariamente pelo terceiro, e será perpendicular a corda. Também se segue que a perpendicular levantada a meio da corda passa pelo centro, e pelo meio do arco subtendido por esta corda. (*idem*)

A Proposição VII encontra-se ilegível na obra original. Assim sendo, passaremos imediatamente para a próxima, de número VIII.

O teorema da Proposição VIII, disserta sobre a questão da distância dos arcos e cordas em relação ao centro da circunferência. Deste modo, Legendre (1809b, p.39) assim escreveu: “Duas cordas iguaes são igualmente distantes do centro, e de duas cordas desiguaes, a menor he amais distante do centro.”

As considerações a respeito deste teorema se dão acerca da demonstração, em duas etapas, e da Figura 81 que seguem abaixo. Primeiramente, a demonstração:

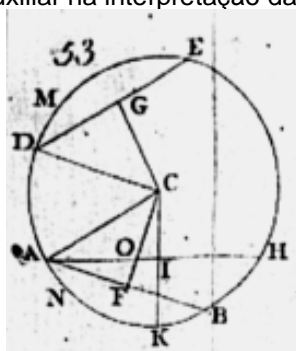
I. Seja a corda  $AB = DE$  (fig. 53); dividão-fe estas cordas em duas igualmente pelas perpendiculares  $CF, CG$ , e tirem-se os raios  $CA, CD$ . Os triângulos rectângulos  $CAF, DCG$ , tem as hypotenusas  $CA, CD$  iguaes; de mais o lado  $AF$ , metade de  $AB$ , he igual ao lado  $DG$ , metade de  $DE$ ; logo estes triângulos são iguaes (18. 1.), e o terceiro lado  $CF$  he igual ao terceiro  $CG$ ; logo 1.º as duas cordas iguaes  $AB, DE$ , estão igualmente distantes do centro. (LEGENDRE 1809b, p.39).

Ao mesmo tempo em que se prova “a ida”, é necessário provar “a volta”.  
E é isso que Legendre faz na segunda parte da demonstração:

II. Seja a corda AH maior que DE, o arco AKH será maior que o arco DME (pr. 5); sobre o arco AKH tome-se a parte ANB = DME, tire-sea corda AB, e abaixe-se CF, perpendicular sobre esta corda, e CI perpendicular sobre AH; he claro que CF he maior que CO, e CO maior que CI (16.1); logo com mais forte razão  $CF > CI$ . Mas  $CF = CG$ , porque as cordas AB, DE são iguaes; logo temos  $CG > CI$ ; logo de duas cordas desiguaes a menor he a mais distante do centro.

Por fim, na sequênciã, acrescentamos a Figura 114 (53 o.o.), que ilustra o teorema e as duas partes da demonstração do mesmo:

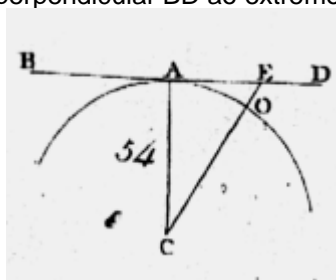
Figura 114 - Auxiliar na interpretação da Proposição VIII



Fonte: Legendre (1809b, est.2)

A Proposição IX versa sobre uma dada reta “[...] perpendicular BD , tirada ao extremo do raio CA (fig. 54) tangente a circumferência.” (LEGENDRE 1809b, p.40). A Figura 115 (54 o.o.) exemplifica o teorema:

Figura 115 - Reta perpendicular BD ao extremo do raio CA



Fonte: Legendre (1809b, est. 2)

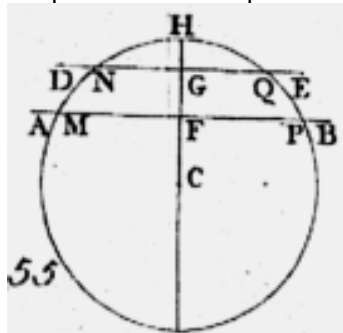
No Scholio associado ao teorema, Legendre (*idem*) ainda observa que:

Não se pode tirar por hum pontodado A mais de huma tangente ADA circumferência; porque, se se pode tirar outra, esta não está perpendicular ao raio CA; logo acerca desta (ilégível) tangente, o raio

CA seria huma oblíqua, e perpendicular, abaixada do centro sobre esta tangente, seria mais curta que CA; logo esta perpendiculara tangente entraria no círculo, e seria huma secante.

A Proposição X apresenta o seguinte teorema “Duas paralelas AB, DE (fig. 55) intercepta sobre a circumferência arcos iguaes.” (LEGENDRE 1809b, p.40). Acerca dessa proposição, podem acontecer três casos. Porém, antes de apresentá-los, ilustraremos este teorema com a Figura 116 (55 o.o.):

Figura 116 - Duas paralelas interceptando a circumferência



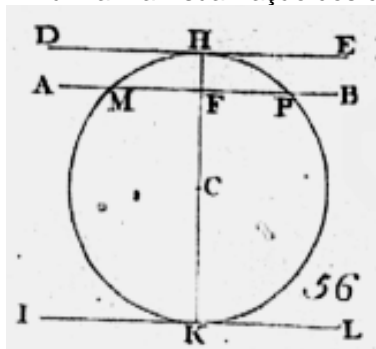
Fonte: Legendre (1809b, est.2)

No que diz respeito aos três casos, cita-se a seguir, na íntegra, conforme Legendre (1809b, p. 40-1):

- I. Se as duas paralelas forem secantes, tira-se o raio CH perpendicular a corda MP, elle será ao mesmo tempo perpendicular à sua paralela NQ (25.I); logo o ponto H será ao mesmo tempo meio do arco MHP, e do arco NHQ (6); logo teremos o arco MH = HP, e o arco NH = HQ; daqui resulta MH - NH = HP - HQ, quer dizer MN = PQ.
- II. Se das duas paralelas AB, DE (fig. 56) huma for secante, e outra tangente, tira-se ao ponto de contacto H o raio CH, este raio será perpendicular à tangente DE, e também à sua paralela MP. Mas como CH he perpendicular à corda MP, o ponto H he meio do arco MHP; logo os arcos MH, HP, comprehendidos entre as paralelas AB, DE, são iguaes.
- III. Finalmente, se as duas paralelas DE, IL, forem tangentes, huma em H, outra em K, tira-se a secante paralela AB, teremos pelo que fica demonstrado, MH = HP e MK = KP; logo o arco inteiro HMK = HPK, e de mais he claro que cada hum destes arcos he huma semi-circunferência.

Para fins de complementação dos três casos das retas paralelas interceptando a circumferência, apresentamos a Figura 115 (56 o.o.), a qual é citada e usada como referência nos casos II e III deste teorema:

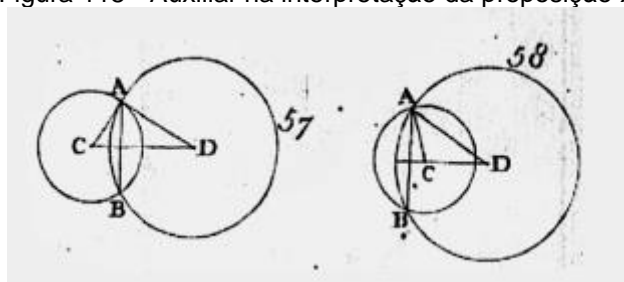
Figura 117 - Auxiliar na visualização dos casos II e III



Fonte: Legendre (1809b, est.2)

A Proposição XI, ilustrada pela Figura 85 (57 e 58 o.o.), trata do caso de duas circunferências que se cortam em dois pontos e, especificamente da linha que passa pelo centro da região comum entre ambas, a qual “[...] será perpendicular à corda que une os pontos da intersecção, e a dividirá em duas partes iguaes.” (LEGENDRE 1809b, p.41). Na sequência, a Figura 118 supracitada:

Figura 118 - Auxiliar na interpretação da proposição XI



Fonte: Legendre (1809b, est.2)

Ainda, conforme o autor, o teorema justifica-se pelo fato de que “[...] a linha AB, que ajunta os pontos de intersecção, he huma corda commum aos dois círculos.” (*idem*)

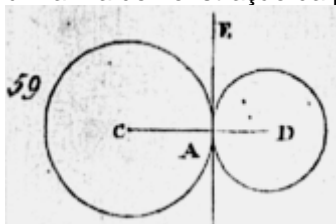
A proposição XII, também exemplificada pela Figura 85, trata da distância entre dois centros das circunferências que se:

For mais curta que a somma dos raios, e se ao mesmo tempo o raio maior for menor que a somma do menor e da distância dos centros, os dois círculos se cortarão. (*ibidem*)

A Proposição XIII, e o seu teorema, versam sobre a distância dos centros de dois círculos e afirma que se esta “[...] for igual a somma dos seus raios CA ,

AD, estes dois círculos se tocarão exteriormente.” (LEGENDRE 1809b, p.42). A Figura 119 (59 o.o.) permite a visualização da mesma:

Figura 119 - Auxiliar na demonstração da proposição XIII

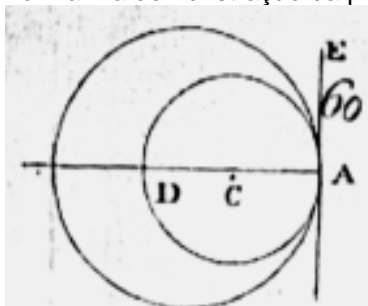


Fonte: Legendre (1809b, est.3)

O autor ainda afirma que, caso o ponto A não seja o único em comum, a distância entre centros deve ser menor que a soma dos raios. (LEGENDRE, 1809b)

A Proposição XIV traz, além do seu teorema, um Corolário e um Scholio. Todos serão apresentados de forma respectiva e, após a Figura 120 (60 o.o.), conforme abaixo:

Figura 120 - Auxiliar na demonstração da proposição XIV



Fonte: Legendre (1809b, est.3)

Primeiramente, apresenta-se o teorema da Proposição XIV, no qual, Legendre (1809b, p.42) observa que: “Se a distância CD (fig. 60) dos centros de dois círculos for igual à diferença dos seus raios CA, AD, estes círculos se tocarão exteriormente.”

O Corolário desta proposição aponta que: “[...] se dois círculos se tocão, quer interiormente, quer exteriormente, os centros e o ponto de contato ficão na mesma recta.” (*idem*)

Por fim, o scholio registra que todos os círculos que possuem o centro sobre uma dada reta (CD no exemplo):

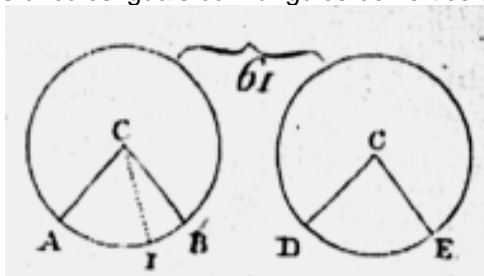
E que passam pelo ponto A, são tangentes huns aos outros; só tem em commum entre si o ponto A. E se pelo ponto A tirarmos AE perpendicular a CD, a recta AE será huma tangente commum a todos estes círculos.

A Proposição XV, por sua vez, traz em seu teorema a questão dos ângulos iguais, de vértice no centro, conforme descreve Legendre (1809b, p.43):

No mesmo círculo ou em círculos iguaes, os ângulos iguaes ACB, DCE (fig. 61), que tem o vértice no centro, interceptão sobre a circunferência arcos iguaes AB, DE. Reciprocamente, se os arcos AB, DE forem iguaes, os ângulos ABC, DCE serão também iguaes.

A Figura 121 (61 o.o.), que segue, auxilia na visualização do teorema:

Figura 121 - Dois círculos iguais com ângulos de vértice ao centro



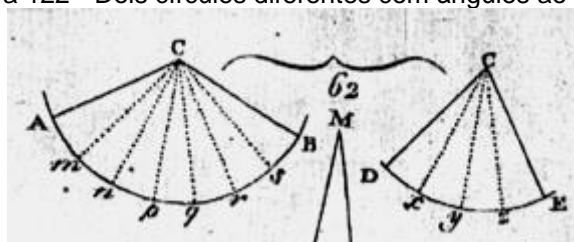
Fonte: Legendre (1809b, est.3)

A Proposição XVI, seguida de um Scholio, é orientada pela Figura 89 (62 o.o.) e trata da proporcionalidade entre ângulos. Desta forma, o autor descreve o teorema desta maneira:

No mesmo círculo ou em círculos iguaes, se dois ângulos no centro ACB, DCE (fig. 61) forem entre si como dois números inteiros, os arcos interceptos AB, DE, estarão entre si como dois números inteiros, e teremos esta proporção:  
 ângulo ACB: ângulo DCE: : arco AB : arco DE (LEGENDRE 1809b, p. 43-4)

A Figura 122, na sequência, auxilia na visualização da Proposição XVI:

Figura 122 - Dois círculos diferentes com ângulos ao centro



Fonte: Legendre (1809b, est.3)



Analogamente, o Scholio desta proposição, atenta para a reciprocidade entre dois arcos:

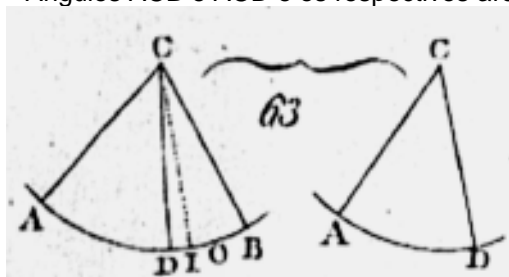
AB, DE, estiverem entre si como dois números inteiros, os ângulos ACB, DCE, estarão entre si como os mesmos números, e teríamos sempre  $ACB : DCE :: AB : DE$ . Porque, sendo iguaes os arcos parciais Am, mn, &c. Dx, xy, &c. os ângulos parciais ACm, mCn, &c., DCx, aCy, &c. são também iguaes. (LEGENDRE 1809b, p.44)

A proposição XVII, traz consigo o teorema, um Corolário e dois Scholio, conforme veremos a seguir. Inicialmente, Legendre (*idem*) nos traz o teorema, o qual propõe que:

Qualquer que seja a razão dos dois ângulos ACB, ACD (fig. 63), estes dois ângulos estarão sempre entre si, como os arcos AB, AD, interceptos entre os seus lados e deferidos dos seus vértices com centros com raios iguaes.

Para ilustrar o teorema acima, apresentamos a Figura 123 (63 o.o.) que segue, onde visualizaremos os ângulos e arcos propostos:

Figura 123 - Ângulos ACB e ACD e os respectivos arcos AB e AD



Fonte: Legendre (1809b, est.3)

O Corolário, analogamente, aponta para a ligação quanto a proporcionalidade sempre que ocorre a variação na medida ângulo/arco. Dessa forma:

Como o ângulo no centro do círculo, e o arco intercepto entre os seus lados tem huma tal ligação que, quando hum augmenta ou diminue em qualquer razão, o outro augmenta ou diminue na mesma razão, podemos estabelecer huma destas grandezas para medida da outra. Assim, daqui em diante tomaremos o arco AB por medida do ângulo ACB. Cumpre somente observar, na comparação dos ângulos entre si, que os arcos que lhes servem de medida, devem ser descritos com raios iguaes, porque isto suppoem todas as proporções precedentes. (LEGENDRE 1809b, p.45-6)

Sucedendo ao corolário, temos os dois Scholios que complementam a demonstração da Proposição XVII os quais são apresentados a seguir pela Figura 124.

Figura 124 - Scholio I e II, referentes à Proposição e teorema XVII

*Scholium I.* Parece mais natural medir huma quantidade por outra quantidade da mesma especie, e sobre este principio conviria referir todos os angulos ao angulo recto. Assim, sendo o angulo recto a unidade de medida, hum angulo agudo seria expresso por hum numero comprehendido entre 0 e 1, e hum angulo obtuso por hum numero entre 1 e 2. Mas esta maneira de exprimir os angulos não seria a mais commoda no uso; achou-se muito mais simples medillos por arcos de circulo, pela facilidade de fazer arcos iguaes a arcos dados, e por muitas outras razões. Em fim, se a medida dos angulos pelos arcos de circulo he de alguma sorte indirecta, nem por isso he menos facil alcançar por meio della a medida directa e absoluta. Porque, se compararmos o arco que serve de medida a hum angulo com o quarto da circumferencia, teremos a razão do angulo dado para o angulo recto, que he a medida absoluta.

*Scholium II.* Tudo que se demõstrou nas tres proposições precedentes, para comparação dos angulos com os arcos, tem lugar igualmente para comparar sectores com arcos; porque os sectores são iguaes quando os angulos o são, e em geral são proporcionaes aos angulos, logo *dois sectores ACB, ACD, tomados no mesmo circulo ou em circulos iguaes, estão entre si, como os arcos AB, AD, bases destes mesmos sectores.*

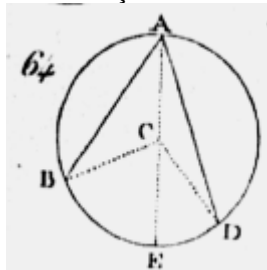
Fonte: Legendre (1809b, p.46)

O autor complementa as ideias acima o afirmando que os arcos dos círculos “[...] que servem de medida aos ângulos podem também servir de medida aos diferentes sectores do mesmo círculo ou de círculos iguaes.” (LEGENDRE 1809b, p.46).

Na sequência, a Proposição XVIII apresenta, além de seu teorema, quatro corolários que apresentaremos junto às suas Figuras de referência. Assim, no

teorema Legendre (1809b, p.47) afirma que “Oângulo inscrito BAD, (fig. 64.) tempor medida a metade do arco BD compreendido entre os seus lados.”. Para ilustrar o teorema, apresentamos a Figura 125 (64 o.o.), que segue:

Figura 125 - Auxiliar na visualização do teorema da Proposição XVIII

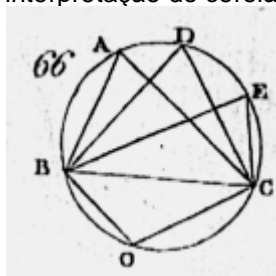


Fonte: (Legendre 1809b, est.3)

Desta forma, e antes de apresentar os corolários, o autor ainda afirma que “[...] todo o ângulo inscrito tem por medida a metade do arco compreendido entre seus lados.” (*idem*)

No corolário I Legendre (*ibidem*) nos apresenta a ideia de que “Todos os ângulos BAC, BDC, (fig. 66) inscritos no mesmo segmento são iguaes; porque tem por medida a metade do arco BOC.” Para exemplificar esta afirmação, a Figura 126 (66 o.o.) segue abaixo:

Figura 126 - Auxiliar na interpretação do corolário I da Proposição XVIII

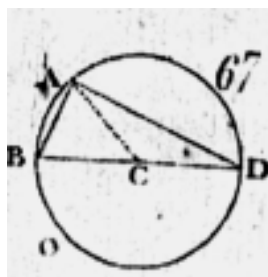


Fonte: (Legendre 1809b, est. 3)

No Corolário II, o autor nos afirma que todo e qualquer “[...] ângulo BAD (fig. 67) inscrito no semi-círculo he recto, porque tem por medida metade da semi-circumferência BOD, ou o quarto dacircumferência” (LEGENDRE 1809b, p. 47)

A Figura 127 (67 o.o.), na sequência, auxilia na exemplificação do corolário II desta proposição:

Figura 127 - Auxiliar na exemplificação do corolário II da proposição XVIII



Fonte: Legendre (1809b, est.3)

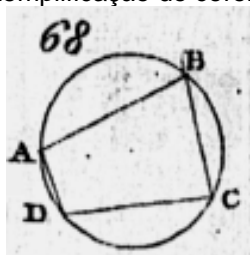
O corolário III, tendo como referência a Figura 93 (66 o.o.), traz a indicação sobre os ângulos agudos inscritos na semicircunferência e aponta quetodo e qualquer ângulo BAC “[...] inscrito em hum segmento maior que o semi-círculo he agudo; porque tem por medida a metade do arco BOC menor que a semi-circumferencia.”(LEGENDRE 1809b, p. 48)

Por fim, no corolário IV, Legendre (*idem*), afirma que:

Os ângulos oppostos A e C, de hum quadrilátero inferido ABCD (fig. 68) valem dois ângulos rectos; porque o ângulo BAD tem por medida a metade do arco BCD, o ângulo BCD tem por medida a metade do arco BAD; logo os dois ângulos BAD, BCD em somma, tem por medida a metade da circumferência; logo a sua somma equivale a dois ângulos rectos.

Para o entendimento do corolário IV apresentamos, a seguir, a Figura 128 (68 o.o.):

Figura 128 - Auxiliar na exemplificação do corolário IV da proposição XVIII

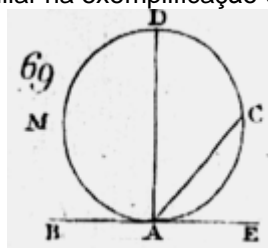


Fonte: Legendre (1809b, est.3)

Em conclusão às Proposições apresentadas no Livro II dos *Elementos de Geometria* de Legendre (1809b), apresentamos a seguir a de número XIX que com o auxílio da Figura 96 (69 o.o.) pode ser melhor compreendida.

Deste modo, a Proposição XIX disserta sobre “[...] o ângulo BAC (fig. 69) formado porhuma tangente ehuma corda, tem por medida a metade do arco ADC compreendido entre os seus lados.” (LEGENDRE 1809b, p. 48). Na sequência a Figura 129 auxiliar na visualização da Proposição XIX:

Figura 129 - Auxiliar na exemplificação da proposição XIX

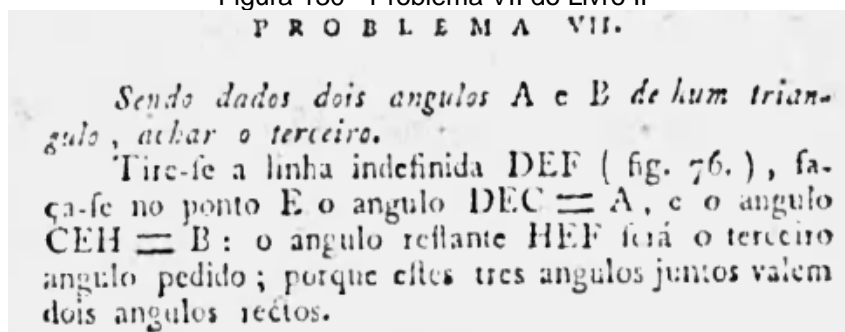


Fonte: Legendre (1809b, est.3)

Após a apresentação das XIX Proposições do Livro II, procederemos com alguns comentários a respeito dos problemas propostos (relativos aos Livros I e II) no final deste capítulo da obra consultada.

Ao longo de dez páginas, e dezoito problemas, a ideia do autor é praticar, ou aprofundar os conhecimentos trazidos nas Proposições, Corolários e Scholios das Livros I e II. As questões, todas elas direcionadas ao conhecimento abstrato da Matemática, são expressas e, logo em seguida, é apresentada uma forma de resolução da mesma. Nestas mesmas questões, algumas Figuras são tomadas como referência na tentativa de ilustrar o desafio. Como exemplo trazemos, na Figura 130, o problema VII e sua solução:

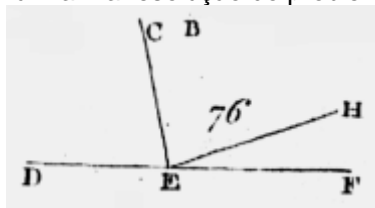
Figura 130 - Problema VII do Livro II



Fonte: Legendre (1809b, p.52)

Para ilustrar o problema acima e sua solução, exibiremos também a Figura 131 (76 o.o.), a qual é citada:

Figura 131 - Auxiliar na resolução do problema VII (Livro II)



Fonte: Legendre (1809b, est.3)

Após a apresentação dos estudos e comentários sobre os problemas, finalizamos a avaliação do Livro II dos *Elementos de Geometria* de Legendre (1809b) para, na sequência, apresentarmos o nosso estudo do Livro III.

### 5.4.3 O Livro III

A terceira, das oito divisões, dos *Elementos de Geometria* de Legendre (1809b) inicia com 7 definições acerca das proporções das figuras, define figuras equivalentes, arcos semelhantes, altura e área do paralelogramo, triângulo e trapézio. Na sequência, o autor expressa em XXXIV Proposições os temas de estudo desta divisão de sua obra. Ao fim do Livro III, dezenove problemas de Geometria pura, com a respectiva solução, para que os leitores possam se aprofundar nos conhecimentos que pretensamente se adquiriu nas Proposições.

Antes de apresentar as Proposições e problemas do Livro III, é relevante destacar que assim como nas divisões anteriores, esta apresenta algumas partes com visibilidade prejudicada e não serão objeto de estudo e/ou comentários.

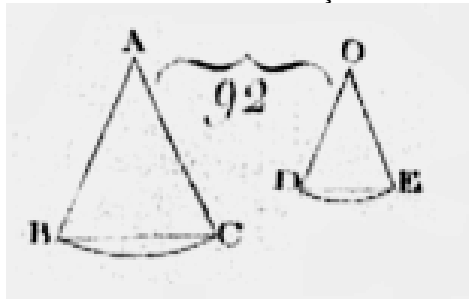
Dessa forma, inicia-se o estudo do Livro III com as Definições a respeito das Figuras geométricas e suas relações de proporcionalidade. Desta forma, as definições iniciam então descrevendo o que, Legendre (1809b, p. 60), entende por Figuras equivalentes “[...] aquellas cujas superficies são iguaes.”.

O autor ainda complementa esta definição, observando que, mesmo que sua forma não seja semelhante, duas figuras podem ser equivalentes, como por exemplo, um círculo pode ser equivalente a um triângulo, etc. Por último mas, também, importante é a observação de Legendre (*idem*) no que diz respeito às figuras iguais que são aquelas que “[...] aplicadas huma sobre a outra, coincidem em todos os seus pontos.”.

A definição II versa sobre figuras semelhantes, as quais são aquelas que apresentam “[...] os ângulos iguaes cada hum a cada hum, e os lados homólogos proporcionais.”<sup>98</sup> (LEGENDRE 1809b, p.60) Ainda no que diz respeito a esta definição, Legendre (*idem*) observa que: “Duas Figuras iguaes sempre são semelhantes; mas duas Figuras semelhantes podem ser muito deliguaes.”

A definição III, ancorada pela Figura 99 (92 o.o.), estabelece que quando tomamos dois círculos diferentes: “[...] chamão-se arcos semelhantes, sectores semelhantes, segmentos semelhantes, aquelles que correspondem a ângulos centraes iguaes.” (*ibidem*). Na sequência, para ilustrar a definição, exibimos a Figura 132.

Figura 132 - Auxiliar na visualização da definição III



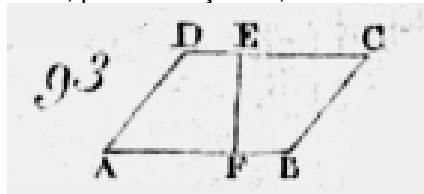
Fonte: Legendre (1809b, est. 4)

Pode-se observar na figura acima que, havendo a igualdade entre os ângulos A e O, o arco BC será semelhante ao arco DE; analogamente, os setores ABC e ODE também o serão, etc. (LEGENDRE 1809b)

As definições IV, V e VI, dissertam sobre a altura em diferentes Figuras geométricas. Desta forma, inicia-se pela altura do paralelogramo, que Legendre (1809b, p.61), define como: “[...] a perpendicular EF (fig. 93) que mede a distância dos dois lados ou bases opostas AB, CD.”. Como o autor sugere, exhibe-se abaixo a Figura 133 (93 o.o.) para ilustrar a definição IV:

<sup>98</sup>“Entendo por lados homólogos aquelles que tem a mesma posição nas duas Figuras, ou que são adjacentes a ângulos iguaes. Estes mesmos ângulos se charmão ângulos homólogos.” (LEGENDRE 1809b, p.60)

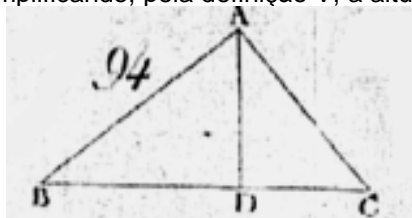
Figura 133 - Ilustrando, pela definição IV, a altura de um paralelogramo



Fonte: Legendre (1809b, est.4)

A definição V trata da altura do triângulo que, conforme Legendre (1809b, p.61) trata-se da “[...] perpendicular AD (fig. 94) abaixada do vértice de hum ângulo A sobre o lado opposto BC, que se chama base.” Conforme recomendado pelo autor, exhibe-se abaixo a Figura 134 (94 o.o.) para exemplificar a definição V:

Figura 134 - Exemplificando, pela definição V, a altura de um triângulo



Fonte: Legendre (1809b, est.4)

A definição VI traz o que estabeleceu Legendre (*idem*) para a altura do trapézio que vem a ser “[...] a perpendicular EF (fig. 95) tirada entre as duas bases paralelas AB, CD.” Na sequência está a Figura 135 (95 o.o.), a qual auxilia na elucidação da definição VI:

Figura 135 - Ilustrando, pela definição VI, a altura de um trapézio



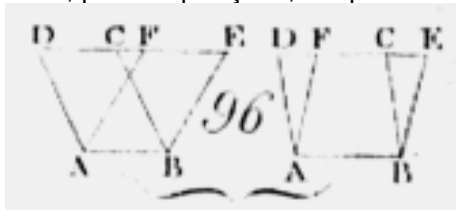
Fonte: Legendre (1809b, est.4)

Por fim, a Definição VII, que discorre sobre o conceito de área (ou superfície) das Figuras, onde Legendre (*ibidem*) a explicita como sendo “[...] a quantidade superficial da Figura, em quanto ela é medida ou comparada com outras superfícies.”



Na sequência, apresenta-se as Proposições (possíveis e legíveis) do Livro III. Começa-se então, pela primeira que diz respeito à equivalência de paralelogramos. Neste teorema, o autor estabelece que “[...] parallelogrammos que tem bases iguaes e alturas iguaes, são equivalentes.” (LEGENDRE 1809b, p.63). Esta definição pode ser visualizada com o auxílio da Figura 136 (96 o.o.), que segue:

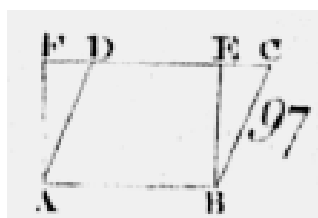
Figura 136 - Exemplificando, pela Proposição I, a equivalência entre paralelogramos



Fonte: Legendre (1809b, est.4)

Deste mesmo teorema, ainda temos o Corolário I, o qual define que: “Todo o parallelogrammo ABCD (fig. 97) he equivalente ao rectângulo ABEF da mesmabase e da mesma altura.” (LEGENDRE 1809b, p.63). Desta forma, apresenta-se ainda a Figura 137 (97 o.o.), para exemplificar este corolário:

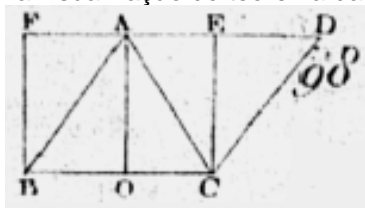
Figura 137 - Ilustrando o corolário da Proposição I



Fonte: Legendre (1809b, est.4)

A Proposição II, e seus dois corolários, versam sobre a proporcionalidade dos triângulos em relação aos paralelogramos e, é definida desta forma por Legendre (*idem*): “Todo o triângulo ABC (fig. 98) he metade do paralelogramo da mesma base e da mesma altura.”. Assim, apresenta-se a Figura 138 para auxiliar na visualização deste teorema:

Figura 138 - Auxiliar na visualização do teorema da Proposição II



Fonte: Legendre (1809b, est.4)

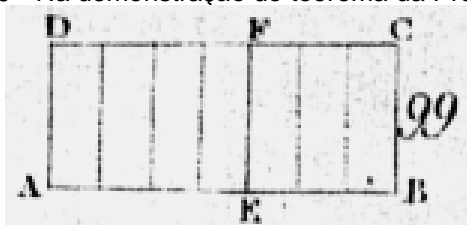
O Corolário I, por sua vez, estabelece, ainda com referência à Figura 136 que:

Hum triângulo ABC he metade do rectângulo BCEF que tem a mesma base BC ea mesma altura AO; porque o rectângulo BCEF he equivalente ao parallelogmo ABCD. (LEGENDRE 1809b, p.64)

Já o Corolário número II traz a afirmação de que “Todos os triângulos que tem bases iguaes e alturas iguaes, são equivalentes.” (LEGENDRE 1809b, p. 64).

A Proposição III, afirma que “Dois rectângulos da mesma altura estão entresicomoas suas bases.” (*idem*). Auxiliando na demonstração deste teorema, a Figura 139 (99 o.o.) que segue abaixo apresenta:

Figura 139 - Na demonstração do teorema da Proposição III



Fonte: Legendre (1809b, est.4)

Desta forma, para melhor esclarecer o teorema acima, observamos que ABCD, AEFD, dois retângulos com altura AD, dizemos que eles estão entre si como as suas bases AB, BE.

A Proposição IV, não apresenta possibilidade de interpretação por ilegitimidade.

Assim, na Proposição V, Legendre (1809b, p.67), nos afirma que “A área de um parallelogmo qualquer he igual ao producto da sua base pela sua altura.”. Trazemos novamente a Figura 104 para análise e apresentação do Corolário I:

Os parallelogrammos da mesma base estão entre si como as suas alturas, e os parallelogrammos da mesma altura estão entre si como as suas bases: porque sendo A, B, C três grandezas quaesquer, temos geralmente  $A \times C : B \times C :: A : B$ .

A Proposição VI, trata da questão da razão da área do triângulo, como nos apresenta Legendre (1809b, p.68),: “A área de hum triângulo he igual ao producto dasua base pela metade da sua altura.”. Prosseguindo com o Corolário I, que segue abaixo:“Dois triângulos da mesma altura estãoentre si como as suas bases, e dois triângulos da mesma base estão entre si como as suas alturas.” (1809b, p.68).

A Proposição VII disserta sobre a área do trapézio, a qual, segundo Legendre (1809b, p.68): “[...] he iguala sua altura EF, multiplicada peta semi-somma das suas paralelas AB, CD.”. Para ilustrar o entendimento deste teorema, o autor cita a Figura 140 (105 o.o.) a qual, apresentamos abaixo:

Figura 140 - Auxiliar na ilustração do teorema da Proposição VII



Fonte: Legendre (1809b, est.4)

Ainda com base na Figura 140, algumas considerações a respeito da área do trapézio podem ser feitas, como por exemplo, o Scholio, resultante do teorema, e representado na Figura 141:

Figura 141 - Scholio resultante do teorema da Proposição VII

*Scholis.* Se pelo ponto I, meio de BC, tirarmos III paralela á base AB, o ponto H ferá tambem o meio de AD; porque a figura AHIL he hum parallelogramo, bem como DHIK, porque os lados oppollos são paralelos; logo temos  $AH = IL$  e  $DH = IK$ ; ora  $IL = IK$ , porque os triangulos EIL, CIK são iguaes; logo  $AH = DH$ .

Póde-se notar que a linha  $HI = AL = \frac{AB + CD}{2}$ ;

Fonte: Legendre (1809b, p. 69)

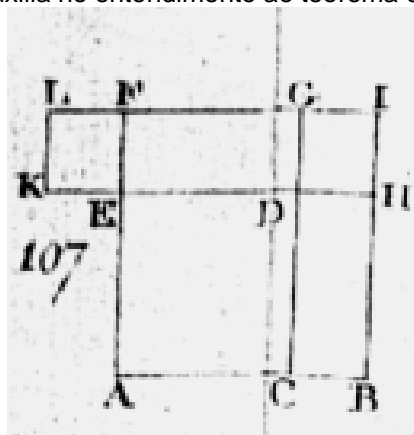
A Proposição VIII, não apresenta possibilidade de interpretação por ilegibilidade.

Desta forma, a Proposição IX ao referenciar a Figura 109 (107 o.o.), torna possível observar através desta o que diz o teorema descrito por Legendre (1809b, p.70):

Se a linha AC (fig. 107) for a diferença deduas linhas AB, BC, o quadrado feito sobre AC conterà o quadrado de AB maiso quadrado de BC, menos duas vezes o rectângulo feito sobre AB e BC, quer dizer que teremos  $\overline{AC}^2$  ou  $(AB - BC)^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2AB \times BC$ .

Assim, para ilustrar o teorema da Proposição IX, apresenta-se a Figura 142 que segue:

Figura 142 - Auxilia no entendimento ao teorema da Proposição IX



Fonte: Legendre (1809b, est.4)

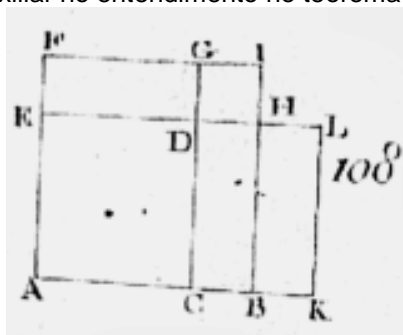
O autor ainda observa no Scholio que: “Esta proposição vem a ser a fórmula de Álgebra  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ .” (LEGENDRE 1809b, p.70). Seguindo

no estudo das Proposições, apresentamos a seguir, a de número X, a qual Legendre (1809b, p.71) assim descreve:

O rectângulo feito sobre a somma e a diferença de duas linhas, he igual a diferença dos quadrados destas linhas: assim temos  $(AB + BC) \times (AB - BC) = \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2$ .

A Figura 143 (108 o.o.), abaixo, serve como auxiliar no entendimento deste teorema:

Figura 143 - Auxiliar no entendimento no teorema da Proposição X



Fonte: Legendre (1809b, est.4)

A acrescentar ainda sobre a proposição X, o Scholio, onde o autor salienta que: “Esta proposição e reduz à fórmula de Álgebra  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ .” (LEGENDRE 1809b, p.71).

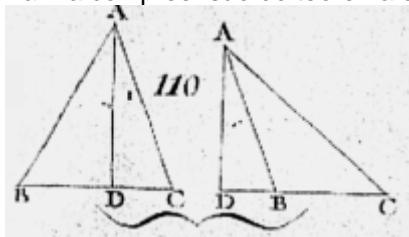
A Proposição XI é legível, porém, os quatro corolários que complementam o seu teorema, infelizmente, não o são. Desta maneira, optou-se por não trazê-la para este trabalho.

A vista disso, passaremos então para a Proposição XII, a qual se refere à Figura 142 (110 o.o.), e que está inserida logo após o teorema:

Em hum triangulo ABC (fig. 110), se o ângulo C for agudo, o quadrado do lado opposto será menor que a somma dos quadrados dos lados que comprehendem o angulo C; e se abaixarmos AD perpendicular sobre BC, a diferença será igual ao duplo do rectângulo BC X CD; de sorte que teremos:  $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC \times CD$  (LEGENDRE, 1809b, p.74)

Agora, apresentamos a Figura 144, citada no respectivo teorema para ilustrar a Proposição acima:

Figura 144 - Auxiliar na compreensão do teorema da Proposição XII



Fonte: Legendre (1809b, est.4)

É necessário observar, ainda, que a condição exposta na Figura 145 pode apresentar dois casos distintos, a saber:

Figura 145 - Primeiro caso – a perpendicular está dentro do triângulo

1.<sup>o</sup> Se a perpendicular cair dentro do triângulo ABC, teremos  $BD = BC - CD$ , e por consequência (9.)  $\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 - 2BC \times CD$ .  
Ajuntando a huma e outra parte  $\overline{AD}^2$ , e reparando que os triângulos rectangulos  $A3D$ ,  $ADC$ , dão  $\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2$ , e  $\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 = \overline{AC}^2$ , teremos  $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2BC \times CD$ .

Fonte: Legendre (1809b, p.74)

E, o segundo caso, se a perpendicular estiver fora do triângulo ABC. Esta possibilidade é explanada na Figura 146.

Figura 146 - Segundo caso – a perpendicular está fora do triângulo

2.<sup>o</sup> Se a perpendicular AD cair fóra do triângulo ABC, teremos  $BD = CD - BC$ , e por consequência (9.)  $\overline{BD}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{CB}^2 - 2CD \times BC$ .  
Ajuntando a huma e outra parte  $\overline{AD}^2$ , concluiremos da mesma maneira,  
 $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2BC \times CD$ .

Fonte: Legendre (1809b, p.74)

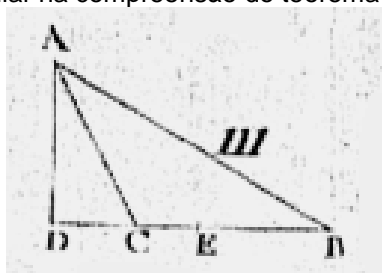
A Proposição XIII, que apresenta além do seu teorema um Scholio, é ilustrada pela Figura 114 (111 o.o.). Na sequência apresenta-se, respectivamente, o teorema, a Figura 114 e o Scholio.

Deste modo, ao abordar a questão de um dado ângulo obtuso C, em um triângulo ABC, Legendre (1809b, p. 75) disserta que:

Se o ângulo C for obtuso, o quadrado do lado oposto AB será maior que a soma dos quadrados dos lados que compreendem o ângulo C, e se abaixarmos AD perpendicular sobre BC a, diferença será igual ao duplo do rectângulo BC x CD; de sorte que teremos:  $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 + 2BC \times CD$ .

Na sequência a Figura 147 ilustra o teorema acima auxiliar na visualização do teorema acima:

Figura 147 - Auxiliar na compreensão do teorema da Proposição XIII



Fonte: Legendre (1809b, est.4)

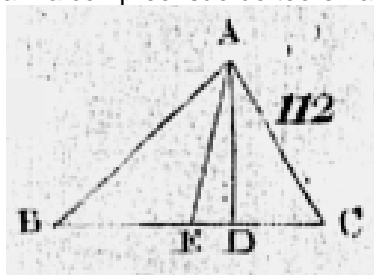
Por fim, o Scholio traz a observação sobre a questão da soma dos quadrados dos lados e um triângulo, a qual Legendre (1809b, p.75) assim descreve:

O triângulo rectângulo he o único em que a dos quadrados dos dois lados he igual ao quadrado do terceiro; porque, se o ângulo comprehendido por estes lados for agudo, a somma de seus quadrados será maior que o quadrado do lado opposto; se for obtuso, será menor.

A Proposição XIV versa sobre um triângulo qualquer ABC onde “[...] se tirarmos do vértice do meio da base a linha AE, digo que teremos  $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{AE}^2 + 2\overline{BE}^2$ .” (LEGENDRE 1809b, p.76)

Para melhor visualizar da proposição XIV, o autor nos traz a Figura 148 (112 o.o.), a qual é auxiliar na compreensão deste teorema:

Figura 148 - Auxiliar na compreensão do teorema da Proposição XIV



Fonte: Legendre (1809b, est.4)

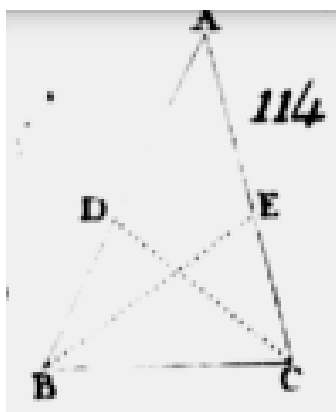
O autor segue com alguns comentários a respeito do teorema e, ao citar a Figura 112 (o.o.) chama a atenção para:

Abaixa-se a perpendicular AD sobre a base BC, o triângulo AEC dará pelo theorema XIII:  $\overline{AC}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EC}^2 + 2EC \times ED$ . O triângulo ABE dará pelo theorema XIII:  $\overline{AB}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EB}^2 + 2EB \times ED$ . Logo, somnando, e advertindo que EB = EC, teremos:  $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2 \overline{AE}^2 + 2 \overline{EB}^2$ . (LEGENDRE 1809b, p. 76).

A proposição XV aborda a questão da divisão proporcional de dois lados de um triângulo ABC por uma linha paralela à sua base. Para tanto, Legendre (1809b, p.77) argumenta que: “A linha DE (fig. 114)[...], divide os lados AB, AC proporcionalmente, de modo que temos AD : DB :: AE : EC.”

Assim, ilustramos o exposto no teorema acima através da Figura 148 (114 o.o.), a qual segue abaixo:

Figura 149 - Auxiliar na compreensão do teorema da Proposição XV



Fonte: Legendre (1809b, est.5)

O autor segue com alguns comentários acerca desta proposição e também acerca das Figuras obtidas a partir da Figura acima. Para tanto, observa-se o que diz Legendre (1809b, p.77) sobre as linhas BE e DC:



Ajuntem-se BE e DC; os dois triângulos BDE, DEC, tem a mesma base BC e a mesma altura, porque os vértices B e C estão situados sobre uma paralela à base. Logo esses triângulos são equivalentes.

Seguindo em suas análises acerca da referida proposição, o autor alude à questão dos triângulos ADE, BDE, com um vértice em comum E “[...] tem a mesma altura e estão entre si como as suas bases. AD, DB, assim temos: temos  $ADE : DBE :: AD : DB.$ ” (*idem*)

Ainda, a respeito das possibilidades observáveis na Figura e, na proposição, observemos o que propõe Legendre (1809b) no que diz respeito à igualdade dos triângulos BDE e DEC: “[...] por causa da razão comum nestas duas proporções, concluiremos:  $AD : DB :: AE : EC.$ ” (*ibidem*)

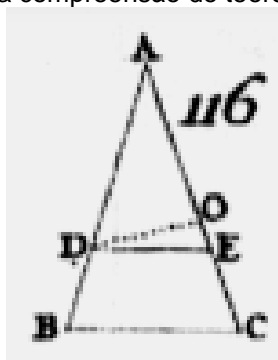
A Proposição XVI trata sobre as condições necessárias para o paralelismo, em um triângulo, de uma linha DE à sua base BC, conforme demonstrado a seguir por meio do teorema e da Figura 117 (116 o.o.).

Desta forma, no teorema da proposição XVI, Legendre (1809b, p.78) afirma que:

Reciprocamente, se os lados AB, AC, (fig. 116) forem cortados proporcionalmente pela linha DE, de sorte que seja  $AD : DB :: AE : EC$ , digo que a linha DE será paralela à base BC.

De maneira a auxiliar no entendimento do teorema, o autor se ampara na Figura 150, a qual é exibida na sequência:

Figura 150 - Auxiliar na compreensão do teorema da Proposição XVI



Fonte: Legendre (1809b, est.5)

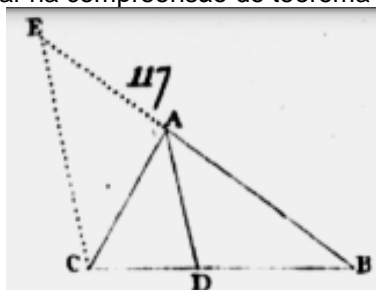
De maneira complementar, o autor descreve no Scholio desta proposição que poderíamos de maneira análoga, chegar à mesma conclusão “[...] se supozéssemos a proporção  $AB : AD :: AC : AE.$  Porque esta proporção daria

$AB : AD : AD :: AC : AE$ , ou  $BD : AD :: CE : AE$ .” (LEGENDRE 1809b, p. 78).

A Proposição XVII versa sobre uma linha AD, que divide ao meio um dado ângulo BAC em um triângulo. A partir dessa ideia, Legendre (1809b, p.79), afirma que essa mesma linha “[...] dividirá a base BC em dois segmentos BD, DC, proporcionaes aos lados adjacentes AB, AC; de sorte que teremos  $BD : DC :: AB : AC$ ”

De maneira a exemplificar de maneira mais clara o teorema acima, faz-se uso da Figura 151 (117 o.o.), exibida na sequência:

Figura 151 - Auxiliar na compreensão do teorema da Proposição XVII



Fonte: Legendre (1809b, est.5)

Observando, ainda, o que diz o autor a respeito das relações de proporcionalidades descritas no teorema:

Pelo ponto C tire-se CE paralela a AD até encontrar BA prolongado. No triângulo BCE, a linha AD he paralela, à base CE, o dá esta proporção:  $BD : DC :: AB : AE$ . (LEGENDRE 1809b, p.79)

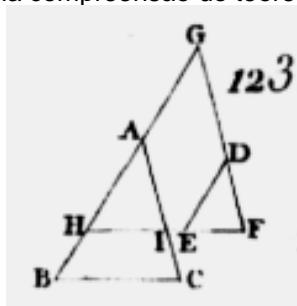
A Proposição XVIII traz a afirmação de que “Dois triângulos equiângulos tem os lados homólogos proporcionaes, e são semelhantes.” (LEGENDRE 1809b, p.80).

Desta forma, segue o autor, pegam-se dois triângulos ABC, CDE com os seus ângulos iguais, um a um, a saber: “[...]  $BAC = CDE$ ,  $ABC = CDE$ ,  $ACB = DEC$ ; digo que os lados homólogos ou adjacentes aos ângulos iguaes serão proporcionaes [...]”. (LEGENDRE 1809b, p. 79). Esta proporcionalidade, por sua vez, nos traz como resultado as seguintes relações:  $BC : CE :: AB : CD :: AC : DE$ .

AS Proposições XIX e XX apresentam sério comprometimento na leitura o que, nos fez optar em não reproduzi-las, devido ao risco de não haver uma interpretação correta dos escritos de Legendre (1809b).

A Proposição XXI trata da semelhança entre triângulos. Em especial, aqueles que possuem “[...] os lados homólogos paralelos, ou perpendiculares, cada hum a cada hum, são semelhantes.” (LEGENDRE 1809b, p. 83). Para melhor ilustrar este teorema nos utilizaremos, assim como o autor, de uma Figura. Deste modo, segue abaixo a Figura 152 (123 o.o.):

Figura 152 - Auxiliar na compreensão do teorema da Proposição XXI



Fonte: Legendre (1809b, est.5)

Esta proposição apresenta ainda um Scholio que amplifica o descrito no teorema. Deste modo, é necessário observar o que está nele descrito, que faremos a seguir:

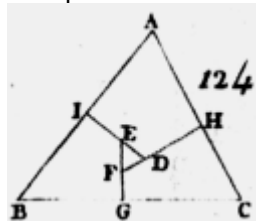
No caso dos lados paralelos, os lados homólogos são os lados paralelos, e no caso dos lados perpendiculares, são os perpendiculares. Assim, neste caso DE é homólogo a AB, DF a AC, e EF a BC. (LEGENDRE 1809b, p.83)

Dando continuidade ao que é desenvolvido no Scholio, Legendre (1809b, p.83-4) detalha, ainda, o caso dos lados perpendiculares, onde:

Poderia oferecer uma situação relativa dos dois triângulos, diferente daquela proposta na fig. 124; mas a igualdade dos ângulos respectivos se mostraria sempre, quer por quadriláteros, taes como AIDH, que tem dois ângulos rectos, quer pela comparação dos dois triângulos que, com ângulos verticalmente oppostos terão cada hum a hum ângulo recto..

No caso do parágrafo, em citação acima, a Figura 153 (124 o.o.), auxilia na demonstração do desenvolvimento:

Figura 153 - Auxiliar na compreensão do Scholio da Proposição XXI

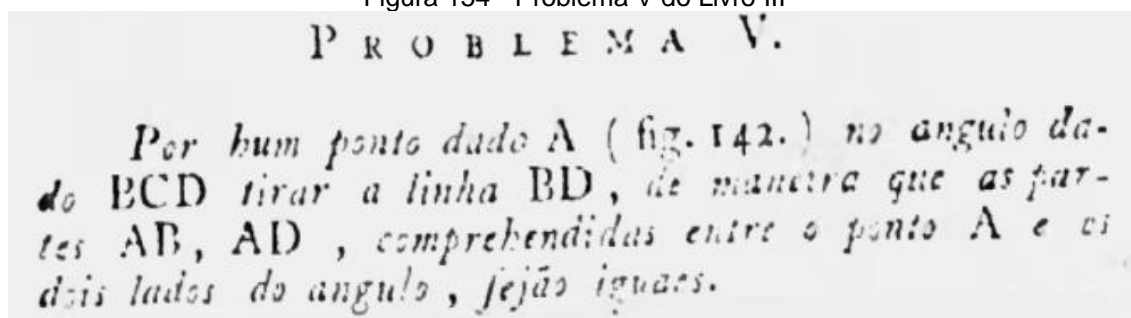


Fonte: Legendre (1809b, est.5)

Por fim, o autor ainda destaca que podemos supor que pode ser construído “[...] dentro do triângulo ABC hum triângulo DEF, que tivesse os lados paralelos aos do triângulo comparado com ABC [...]” (LEGENDRE 1809b, p.84), o que demonstraria então, o caso da Figura acima.

Infelizmente, as demais Proposições do Livro III, de XXII até XXXIV (p. 84 – 96) não apresentam as condições ideais de legibilidade e compreensão que este trabalho requer. Igualmente a parte inicial da seção de Problemas deste Livro (p. 97 – 9) está com as páginas comprometidas em relação a leitura e interpretação. Dessa forma, os breves comentários a respeito desta seção, serão feitos à partir do problema IV. O que é possível perceber na leitura dos problemas IV até XII é que os mesmos são direcionados a um conceito do conhecimento abstrato da Geometria, os “desafios” são expressos e, logo em seguida, é apresentada uma forma de resolução dos mesmos. A exemplo das atividades propostas no Livro II, estas mesmas, tomam como referência na resolução algumas figuras, como no exemplo que segue:

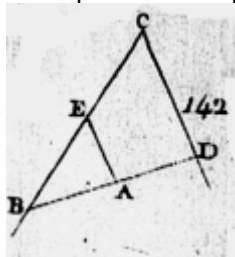
Figura 154 - Problema V do Livro III



Fonte: Legendre (1809b, p.99)

Para a resolução do mesmo, o enunciado requer a consulta à Figura 142 (o.o.) a qual reproduzimos neste trabalho sob o número 155, conforme segue.

Figura 155 - Auxiliar na compreensão do problema V do Livro III



Fonte: Legendre (1809b, est.5)

Por fim, apresentamos na Figura 156, abaixo, a resolução proposta pelo autor para o problema V:

Figura 156 - Resolução proposta pelo autor ao problema V do Livro III

Pelo ponto A tire-se AE paralela a CD, tome-se  $BE = CE$ , e pelos pontos B e A tire-se EAD, que fará a linha pedida.  
 Porque, sendo AE paralela a CD, temos  $BE : EC :: BA : AD$ . Ora  $BE = EC$ , logo  $BA = AD$ .

Fonte: Legendre (809b, p.99)

Os demais problemas propostos no Livro III, XIII a XIX, apresentam algum comprometimento na legibilidade e não serão objeto de estudo nessa investigação. Desta forma, finalizamos a avaliação do Livro III dos *Elementos de Geometria* de Legendre (1809b) e, na sequência, será apresentado estudo do Livro IV.

#### 5.4.4 O Livro IV

A quarta das oito divisões dos *Elementos de Geometria* de Legendre (1809b) inicia com a definição de polígono regular. Na sequência, páginas 110 a 134, o autor expressa em XVI Proposições os temas de estudo desta divisão de sua obra. Necessário observar que, nem todas as proposições estão associadas a Teoremas como no capítulo anterior. Do total, sete delas associam-se a problemas geométricos, três a lemmas e, as demais aos respectivos Teoremas. Ao fim deste Livro, em um Apêndice (p. 135 a 142), temos dez Proposições

associadas a Teoremas, para que os leitores possam se aprofundar nos conhecimentos de Geometria.

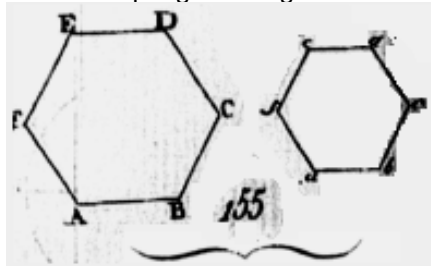
Antes de destacar as Proposições e problemas do Livro IV, é relevante destacar que assim como nas divisões anteriores, esta apresenta algumas partes com visibilidade prejudicada e não serão objeto de estudo e/ou comentários.

Dessa forma, iniciaremos o estudo desta parte da obra de Legendre (1809b) com as Definições a respeito de polígono regular que, segundo o autor é “[...] aquelle que he ao mesmo tempo equiângulo e equilátero.” (LEGENDRE 1809b, p.110). Observa ainda Legendre (*idem*) que os polígonos regulares podem ter “[...] de todo o número de lados. O triângulo equilátero he o de três lados, e o quadrado o de quatro.”

A Proposição I e o seu teorema trazem a ideia de que comparados, “Dois polygonos regulares do mesmo número de lados são Figuras semelhantes.” (*ibidem*).

Para ilustrar o teorema acima, o autor se utilizou da Figura 157 (155 o.o.), a qual mostra dois hexágonos onde a soma dos ângulos internos é a mesma em ambos:

Figura 157 - Dois polígonos regulares semelhantes



Fonte: Legendre (1809b, est.6)

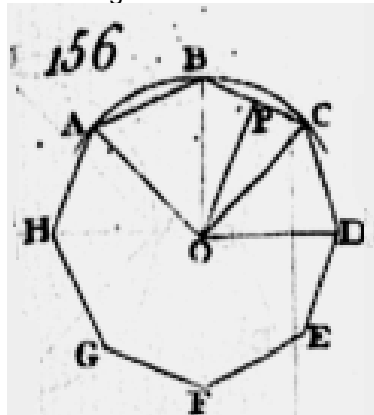
Como comentários complementares, acrescenta-se, ainda, o que o autor desenvolveu acerca deste teorema. Aqui, Legendre (1809b), faz menção aos dois hexágonos da Figura 124 (ABCDEF e abcdef) e cita que: “[...] a somma dos ângulos he a mesma em huma e outra Figura; ella he igual a oito ângulos rectos.” (LEGENDRE 1809b, p.110). Prossegue o autor, afirmando que “[...] os dois ângulos A e a são iguaes; por consequência o mesmo acontece nos ângulos B e b, C e c, &c.” (*idem*).

Concluindo o estudo desta Proposição, ainda se pode afirmar, conforme os estudos de Legendre (1809b) que, por sua natureza os lados AB, BC, CD, etc são idênticos, bem como os seus homólogos ab, bc, cd, etc. Desta forma “[...] as duas Figuras de que se trata tem os ângulos iguaes e os lados homólogos proporcioaes, logo são semelhantes [...]” (LEGENDRE 1809b, p.111).

Conclui-se a proposição sem mencionar o Scholio e o Corolário que fazem parte da obra original devido ao estado de baixíssima legibilidade da mesma.

A Proposição II em seu teorema afirma que “Todo o polygono regular pode ser inserido no círculo, e pode ser circunscrito no mesmo círculo.” (*idem*). Logo, o octógono ABCDEFGH da Figura 158 (156 o.o.), abaixo, é o polígono do qual tratamos; traça-se uma circunferência sobre os pontos A, B e C; o ponto O é o centro da ambas, e OP é uma perpendicular que divide ao meio o lado BC. Acrescenta-se ainda AO e OD. (LEGENDRE 1809b)

Figura 158 - Octógono inserido no círculo



Fonte: Legendre (1809b, est.6)

Seguindo a mesma linha de raciocínio do autor, teremos os quadriláteros OPCDe OPBA que podem ser sobrepostos. Isso torna o lado OP comum a ambos; por consequência, o ângulo OPC = OPB; logo o lado PC se aplica sobre PB, e o ponto C sobrepõe B. Ademais, o ângulo PCD = PBA e CD tomará a direção BA. Como CD= BA, o ponto D sobrepõe A, e os dois quadriláteros coincidirão integralmente um com outro. (LEGENDRE 1809b)

Por fim, define Legendre (1809b, p. 111-2):

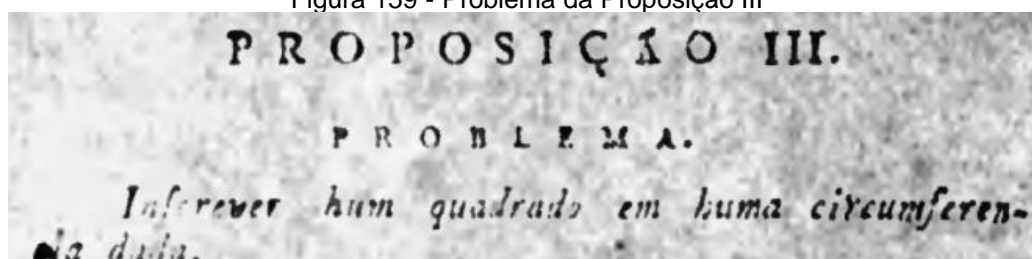
A distância OD he igual a AO, e por consequência a circunferência que passa pelos três pontos A, B, C, passará também pelo ponto D. Mas, por hum raciocínio semelhante, se provará que a circunferência que

passa pelos três pontos B, C, D, passará pelo vértice seguinte E, e assim em diante; logo a mesma circunferência que passa pelos pontos A, B, C, passa por todos os vértices dos ângulos do polígono, e o polígono está inscrito nesta circunferência.

A acrescentar sobre a Proposição II, os Scholios I e II não apresentam condições de legibilidade para serem analisados e, por isso, não serão trabalhados nesta investigação.

As Proposições III, IV, V e VI, conforme já mencionado, vem acompanhadas de problemas. Assim, dentre estas quatro acima, aquela que apresenta melhores condições de clareza para leitura e análise, a Proposição III, segue abaixo na Figura 159.

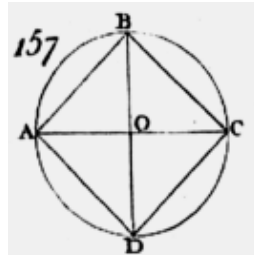
Figura 159 - Problema da Proposição III



Fonte: Legendre (1809b, p. 113)

Para a resolução do problema acima, o autor propõe como recurso auxiliar a Figura 158 (157 o.o.), na qual, após traçarem-se dois diâmetros AC e BD, os quais são perpendiculares entre si, “[...] ajuntem-se os extremos A, B, C, D, e a Figura ABCD será o quadrado inscrito.” (LEGENDRE (1809b, p.113) Isso pode ser comprovado pois, “[...] sendo iguaes os ângulos ACB, BOC, &c as cordas AB, BC, &c. são iguaes” (*idem*). Na sequência, apresenta-se a Figura 160, que exhibe a solução do problema proposto:

Figura 160 - Quadrado ABCD inscrito no círculo



Fonte: Fonte: Legendre (1809b, est.6)



Para finalizar esta proposição, Legendre (1809b, p.113) acrescenta ainda o seguinte Scholio:

Como o triângulo BDC he rectângulo e isósceles, temos (II. 3.)  $BC : BO :: \sqrt{2} : 1$ ; logo o lado do quadrado inscrito está para o raio assim como a raiz quadrada de 2 está para a unidade.

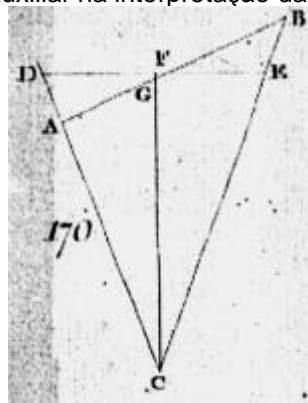
As Proposições VII, VIII, XI e XII que são acompanhadas de seus respectivos Teoremas também não poderão ser fruto de análise neste trabalho devido às condições de legibilidade. Analogamente, as de número IX e X, e seus respectivos Lemmas, encontram-se em precárias condições para leitura e interpretação. Do mesmo modo, as Proposições XIII e XIV e seus respectivos problemas não serão objeto de análise.

Através da Proposição XV, e seu Lemma, Legendre (1809b, p.130) apresenta o seguinte enunciado:

O triângulo CAB (fig. 170) he equivalente ao triângulo isósceles DCE, que tem o mesmo ângulo C, e cujo lado CE ou CD he meio proporcional entre CA e CB. De mais, se for o ângulo CAB recto, a perpendicular CF, abaixada sobre a base do triângulo isósceles, será meia proporcional entre o lado CA e a semi-somma dos lados CA, CB.

Na sequência, apresentamos a Figura 161 (170 o.o.), a qual auxilia na interpretação e visualização da proposição XV e seu lemma:

Figura 161 - Auxiliar na interpretação da proposição XV



Fonte: Legendre (1809b, est.7)

Ainda, a respeito da Proposição XV, o autor apresenta dois casos possíveis para a equivalência dos dois triângulos. No 1º caso, Legendre aponta as razões  $AC \times CB$ , que está para  $DC \times CE$  ou  $\overline{DC}^2$ . De tal sorte, se  $\overline{CD}^2 = AC \times CB$  ou, se DC for meio proporcional entre AC e CB. (LEGENDRE 1809b).

Com relação ao 2º caso, temos a perpendicular CGF, a qual divide em duas partes iguais o ângulo ACB. Deste modo,  $AG : GB :: AC : CB$ . Desta relação resulta  $AG : AG + GB$ , ou então  $AB :: AC + CB$ . Deste modo, AG está para AB como o triângulo ACG está para ACB ou 2CDF. Para, além disso, se o ângulo A for reto, os triângulos retângulos ACG, CDF são semelhantes e, portanto  $ACG : CDF :: \overline{AC}^2 : \overline{CF}^2$  são semelhantes e, com isso:  $\overline{AC}^2 : 2\overline{CF}^2 :: AC : AC + CB$ . (LEGENDRE 1809b)

A Proposição XVI, a exemplo das anteriores não apresenta as melhores condições de legibilidade, portanto, igualmente não será fruto de análise.

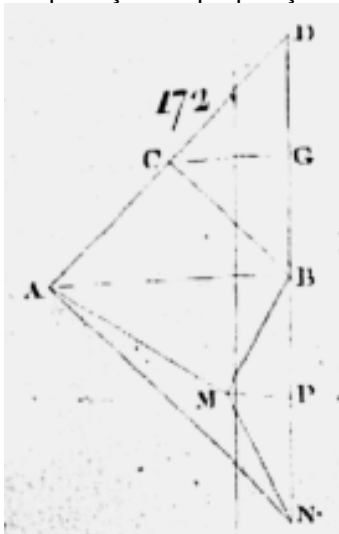
A respeito do Anexo do Livro IV o autor apresenta, de forma inicial, duas definições: maximum e minimum. Desta forma, o chamaremos de *maximum* “[...] a quantidade maior entre todas as da mesma espécie; e *minimum* a menor.” (LEGENDRE 1809b, p.134)

Estas, por sua vez são utilizadas na descrição do contexto do diâmetro, onde o *maximum* é o diâmetro, pois representa, conforme Legendre (1809b, p. 134) “[...] todas as linhas que ajuntão dois pontos na circunferência [...]” e “[...] perpendicular entre todas as linhas tiradas de um ponto dado e uma linha dada” (*idem*) é o *minimum*. Outro conceito trazido pelo autor é o de Figuras isoperímetras que vem a ser aquelas que “[...] tem perímetros iguaes.” (*ibidem*)

Desta forma, seguimos então para a Proposição I do Apêndice ao Livro IV na qual, Legendre (1809b, p. 134) afirma que: “Entre todos os triângulos da mesma base e, do mesmo perímetro, o triângulo maximum he aquelle no qual os dois lados não determinados são iguaes.”

Para a demonstração desse teorema, o autor sugere como auxílio a Figura 162 (172 o.o.), a qual é exibido abaixo:

Figura 162 - Auxiliar na interpretação da proposição I do Apêndice ao Livro IV



Fonte: Legendre (1809b, est.7)

Prossegue o autor com a demonstração do teorema, afirmando que sendo  $AC = CB$  e  $AM + MB = AC + CB$ , é possível afirmar que os triângulos isósceles  $ACB$  é maior que o triângulo  $AMB$  que tem a mesma base e o mesmo perímetro. (LEGENDRE, 1809b)

A Proposição II, por sua vez, traz o seguinte teorema em Legendre (1809b, p. 135): “Entre todos os polygonos isoperímetros, e do mesmo número de lados, o polygono maximum é o que tem os lados iguaes.”. Para melhor ilustrar o teorema citado, é mostrada abaixo a Figura 163 (173 o.o.).

Figura 163 - Auxiliar na interpretação da proposição II do Apêndice ao Livro IV



Fonte: Legendre (1809b, est.7)

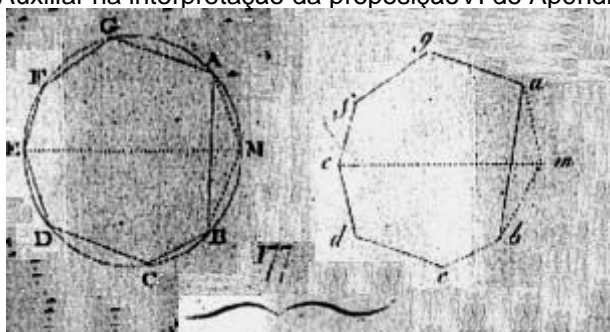
Para esta demonstração, o autor lança mão do seguinte argumento:

Seja  $ABCDEF$  [...] o polygono maximum; se o lado  $BC$  não for igual a  $DC$  faça-se sobre a base  $BD$  hum triângulo isósceles  $BOD$  que seja isoperimetro a  $BCD$ , o triangulo  $BOD$  será maior que  $BCD$  (pr. 1. ), e por consequência o polygono  $ABODEF$  será maior que o  $ABCDEF$ ; logo este não será o maximum entre todos aqueles que tem o mesmo

perímetro e o mesmo numero de lados, o que he contra a suposição; logo deve ser  $BC = DC$ . Teremos pelamesma razão  $CD = DE$ ,  $DE = EF$ , &c.; logo todos os lados do polygono maximum são iguaes entra si. (LEGENDRE 1809b, p.135)

As Proposições III, IV e V, não foram analisadas devido ao estado degradado da obra consultada. A Proposição VI, e seu respectivo teorema, descrevem que “De todos os polygonos formados com lados dados, o maximum he aquelle que se pode inscrever em hum circulo.” (LEGENDRE 1809b, p.139). Para demonstrar esta proposição, o autor lança mão de uma demonstração teórica, acompanhada da Figura 164 (177 o.o.) a qual apresenta-se abaixo:

Figura 164 - Auxiliar na interpretação da proposição VI do Apêndice ao Livro IV



Fonte: Legendre (1809b, est.7)

Deste modo, através da Figura, o autor propõe os polígonos ABCDEFG, inscrito, e abcdefg (não inscrito), formado com lados iguais, “[...] de sorte que seja  $AB = ab$ ,  $BC = bc$ , &c; Digo que o polygono inscrito he maior que o outro.” (LEGENDRE 1809b, p. 138). No entanto, ainda não está claro o que se quer provar o que acontece na sequência:

Tire-se o diâmetro EM; ajunte-se AM, MB; sobre  $ab = AB$  faça-se o triângulo abm igual a ABM, e una-secm. Em virtude da proposição IV, o polygono EFGAM he maior que efgam, salvo se este poder igualmente ser inserido em huma semi-circumferência da qual seja diâmetro o lado cm caso em que os dois polygonos serão iguaes em virtude da proposição V. (*idem*)

Prosseguindo com a demonstração, Legendre (*ibidem*) aponta, através do Scholio deste teorema, o fechamento para esta demonstração, afirmando que:

Demonstrar-se-ha, como na proposição V, que so ha hum circulo, e por consequencia hum só polygono maximum, que satisfaça à questão, e este polygono sera sempre da mesma superficie, de qualquer maneira que se mudasse a ordem de seus lados.

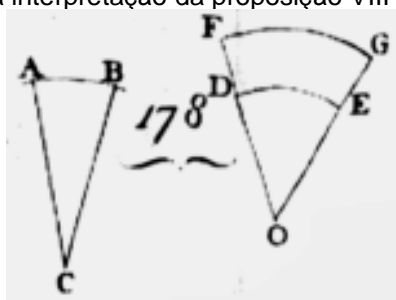
A Proposição VII apresenta sucintamente a ideia de que o polígono regular é um *maximum* “[...] entre todos os polygonos isoperimetros e do mesmo número de lados.” (LEGENDRE 1809b, p.139)

Os estudos do autor seguem esta linha de raciocínio ao justificar, por meio do teorema II, que o polígono *maximum* tem todos os lados iguais e, por seu teorema anterior, que está inscrito no círculo, afirmando ao fim que o polígono é, portanto, regular (LEGENDRE, 1809b).

A Proposição VIII, por sua vez, apresenta em seu lemma que, os ângulos centrais, “[...] medidos em dois círculos diferentes, estão entre si, com os arcos compreendidos divididos pelos raios.” (*idem*).

Na sequência deste lemma, o autor propõe a análise do mesmo, tendo por referência a Figura 165 (178 o.o.), a qual apresenta os dois ângulos e as demais características citadas na proposição:

Figura 165 - Auxiliar na interpretação da proposição VIII do Apêndice ao Livro IV



Fonte: Legendre (1809b, est.8)

Junto à análise por meio da figura, o autor prossegue com a sua argumentação, onde afirma que o ângulo C, está para o ângulo O, assim como a razão  $\frac{AB}{AC}$  está para a razão  $\frac{DE}{DO}$ . Se o raio OF é igual ao arco AC, podemos descrever o arco FG, compreendido entre OD e OE (em seus prolongamentos). Desta maneira, destaca Legendre (1809b, p. 139):

Por causa dos raios iguaes AC, OF, teremos primeiro C : O :: AB : FG,  
 ou : :  $\frac{AB}{AC} : \frac{FG}{FO}$ . Mas os arcos semelhantes FG, DE, são FG : DE ::  
 FO : DO; logo a razão  $\frac{FG}{FO}$  he igual à razão  $\frac{DE}{DO}$ .

Por fim, é possível, com base em Legendre (1809b), deduzir desta proposição as seguintes relações:

$$C : O :: \frac{AB}{AC} : \frac{DE}{DO}$$

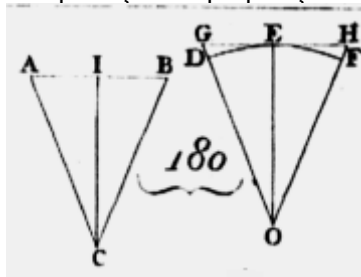
A proposição de número IX, a exemplo de algumas das anteriores não apresenta legibilidade suficiente para que possamos realizar o seu estudo. Deste modo, e para encerrar o estudo do Apêndice do Livro IV, é trabalhada a Proposição X.

Desta forma, na última Proposição do Apêndice ao Livro IV Legendre (1809b, p.141) nos traz o seguinte teorema: “O círculo he maior que todosos polygono isoperimetros”.

Continuando dentro desta proposta, a ideia do autor nos traz aasserção de que se já está provado que dentro todos os polígonos isoperímetros,e de um mesmo número de lados, o regular será sempre o maior,faltaria comparar ocírculo com um polígono regular qualquer (LEGENDRE 1809b).

Por consequência, nos utilizaremos do mesmo recurso que em outros Teoremas já foi igualmente aplicado, o de uma Figura. Para esta situação, em específico, a Figura 166 (180 o.o.) será recurso importante na comprovação do teorema.

Figura 166 - Auxiliar na interpretação da proposição X do Apêndice ao Livro IV



Fonte: Fonte: Legendre (1809b, est.8)

Prosseguindo na demonstração deste teorema e com base nos escritos Legendre (1809b), analisa-se a seguinte afirmação: “Seja AI uma semi-lado deste polígono que tem por centro o ponto C.Seja no círculo isoperímetro os ângulos DOE = ACB e, também, o arcoDE = AI.”

Em seguida, o autor dá continuidade a esta comprovação com as seguintes afirmações:

O polygono P está para o círculo C como o triângulo ACI está para o sector ODE; assim teremos  $P : C :: AI \times CI : DE \times OE :: CI : OE$ . Tire-se ao ponto E a tangente EG que encontre OD prolongado em G; os triângulos semelhantes ACI, GOE, darão a proporção  $CI : OE :: AI$  ou

DE : GE; logo, P : C : : DE : GE, ou como DE X OE, que he medida do triângulo DOE: ora, o sector he menor que o triângulo; logo P he menor que C; logo o círculo he maior que todo o polygono isoperimetro.(LEGENDRE 1809b, p.141-2)

Após a apresentação dos estudos sobre o Livro IV, finalizamos a avaliação deste capítulo dos *Elementos de Geometria* de Legendre (1809b) para, na sequência, apresentarmos o nosso estudo do Livro V.

#### 5.4.5 O Livro V

A quinta, das oito divisões, dos *Elementos de Geometria* de Legendre (1809b) – Plano, e Ângulos Sólidos, inicia com seis definições sobre o plano e os ângulos formados por retas e, por outros planos. Na sequência, páginas 144 a 166, o autor expressa em XXV Proposições os temas de estudo deste capítulo.

Antes de destacar as Proposições e seus respectivos Teoremas, destaca-se que este Livro apresenta igualmente aos anteriores algumas de suas partes com visibilidade prejudicada, as quais não serão objeto de estudo e/ou comentários.

Desta forma, a primeira definição encontrada é aquela que delimita o que é uma reta perpendicular ao plano, que segundo Legendre (1809b, p.143) deve ser também “[...] perpendicular a todas as rectas que passam pelo seu pé no mesmo plano [...]. Reciprocamente o plano he perpendicular à linha.”. Ao mesmo tempo, o autor define o pé da perpendicular como “[...] o ponto em que esta linha encontra o plano.” (*idem*).

A definição II delimita que uma linha é paralela a um plano “[...] quando não pode encontra-lo a qualquer distancia que se prolonguem a linha e o plano. Reciprocamente o plano he paralelo à linha”. (*ibidem*)

Segue a Definição III, versando sobre o paralelismo entre dois planos, que ocorre quando “[...] não podem encontrar-se a qualquer distância que ambos se prolonguem.” (LEGENDRE, 1809b, p.143)

A Definição IV, por sua vez, afirma que a “[...] intersecção commum de dois planos que se encontrão he huma linha recta” (*idem*). Na sequência, o autor faz algumas conjecturações a respeito desta intersecção; sobre estas conjecturações, observa Legendre (*ibidem*), deve ser observada “[...] a quantidade maior ou menor que eles podem estar afastados hum do outro [...]”.

Esta quantidade é medida pelo ângulo entre si e, de acordo com o seu valor, que podem vir a formar um ângulo agudo, reto ou obtuso.

A Definição V, complementando a conjecturação acima, diz que se o ângulo formado entre os dois planos “[...] he recto, os dois planos são perpendiculares entresi.” (LEGENDRE 1809b, p.144)

Por fim, a Definição VI, aponta para o conceito de ângulo sólido, que “[...] he formado pela união [...] deao menos três planos para formar hum angulo sólido.” (*idem*)

A seguir, apresenta-se as Proposições e seus respectivos Teoremas. De antemão, atentamos para o fato de que aquelas que não forem encontradas mais adiante não foram estudadas por motivos já expostos de legibilidade prejudicada.

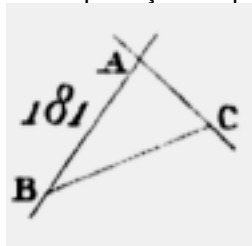
Assim, a Proposição I e o seu teorema trazem a ideia de que “Huma linha recta não pode estar, parte em hum plano, parte em outro.” (*ibidem*). Isso acontece porque, em um plano, quando uma linha reta tem dois pontos comuns com este mesmo plano, ela está totalmente nesteno plano em questão. O Scholio a seguir, complementa a explicação que se deseja dar à Proposição:

Scholio - Para reconhecer se huma superfície he plana, se deve applicar huma linha recta sobre esta superfície em differentes sentidos, e ver se ella toca a superfície em toda a sua extensão.(LEGENDRE 1809b, p.144)

A Proposição II versa sobre a determinação da posição no por duas linhas retas que se cortam e estão no mesmo plano. A Figura 167 (181 o.o.), que segue, auxilia na visualização desta ideia:



Figura 167 - Auxiliar na interpretação da proposição II do Livro V

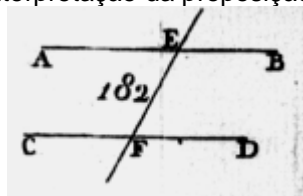


Fonte: Legendre (1809b, est.8)

Para melhor entendimento do que o enunciado e a figura querem nos dizer, o autor nos oferece mais alguns comentários e, ao final, há os corolários I e II. Acerca da Figura, Legendre (1809b), observa que se AB, AC são linhas retas que se cruzam em A, pode-se imaginar um plano em que esteja a linha AB; se, após isso, fizermos o giro deste plano em torno de AB, até que ele cruze pelo ponto C, a linha AC que tom dois dos seus pontos A e C neste plano, ficará toda nele. Logo a posição do plano será determinada somente pela condição de abranger as duas retas AB e AC. Em apoio a isso, o Corolário I aponta que: “[...] um triângulo ABC, ou três pontos A, B, C, não em linha recta, determinão a posição de hum plano.” (LEGENDRE 1809b, p.144-5)

No mesmo sentido, o Corolário II apoiado na Figura 135 (182 o.o.) indica que não é somente da forma que assinala o Corolário I que se pode determinar a posição de um plano. Antes do Corolário II, apresentamos a Figura 168 citada acima.

Figura 168 - Auxiliar na interpretação da proposição II, Corolário II, do Livro V



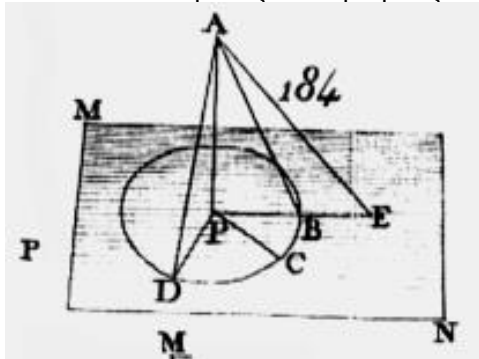
Fonte: Legendre (1809b, est.8)

Por fim, no Corolário II, o autor sugere que, também, duas retas paralelas poderão determinar a posição de um plano, [...] porque se tirarmos a secante EF, o plano das duas retas AE, EF, será o das paralelas AB, CD” (LEGENDRE 1809b, p.145)

A Proposição V nos traz observações a respeito das retas oblíquas, as quais se estão em condição de “[...] igualmente distantes da perpendicular são

iguais; e, de duas oblíquas desigualmente distantes da perpendicular, a que se afasta mais, he a mais comprida.” (LEGENDRE 1809b, p.147). Para este teorema, o autor se apoia, além da Figura 169 (184 o.o.) que segue abaixo, em algumas outras ideias, as quais estão descritas após a Figura.

Figura 169 - Auxiliar na interpretação da proposição V, do Livro V



Fonte: Legendre (1809b, est.8)

Ainda acerca do teorema, e da Figura 167, o autor atenta para a questão de que, se os ângulos APB, APC, APD, são retos, e assumirmos que as distâncias PB, PC, PD, são iguais entre si, os triângulos APB, APC, APD, terão um ângulo igual compreendido entre os lados iguais; podendo ser considerados, portanto, iguais. Analogamente as hipotenusas AB, AC, AD, serão iguais entre si. Da mesma forma, se a distância PE for maior que PD ou a sua igual PB, é claro que a oblíqua AE será maior que AB ou a sua igual AD. (LEGENDRE, 1809b)

O Corolário da proposição V, que afirma a igualdade de todas as oblíquas (sempre com referência à Figura 136) AB, AC, AD, etc., também atenta para o ponto P (pé da perpendicular), como o centro da circunferência BCD. Além disso, destaca Legendre (1809b, p. 147):

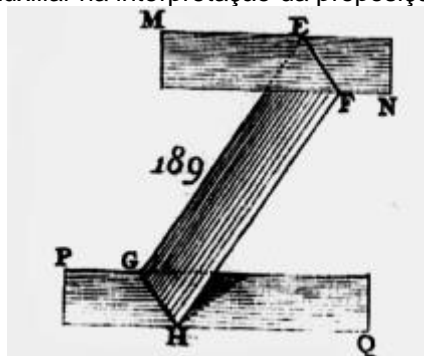
Sendo dado hum ponto A fora de hum plano, se quisermos achar sobre este plano o ponto P no qual cahiria a perpendicular abaixada de A, marcaremos neste plano três pontos B, C, D, igualmente distantes do ponto A, e depois procuraremos o centro do círculo que passa por dois pontos; este centro será o ponto procurado P.

Por fim, ainda sobre a proposição V, o Scholio chama a atenção para a igualdade na inclinação das oblíquas AB, AC, AD, etc... sobre o plano MN e afirma que estas “[...]se afastão igualmente da perpendicular porque todos os triangulos ABP, AGP, ADP, &c., são iguaes entre si.” (*idem*)

Em sua Proposição X, Legendre (1809b, p.150) afirma que “As intersecções EF, GH (fig. 189) de dois planos paralelos MN, PQ, por hum terceiro plano FG, são paralelas.”

Para a comprovação deste teorema, trazemos abaixo a Figura 170 (189 o.o.), a qual apresenta os três planos e as suas respectivas intersecções:

Figura 170 - Auxiliar na interpretação da proposição X, do Livro V

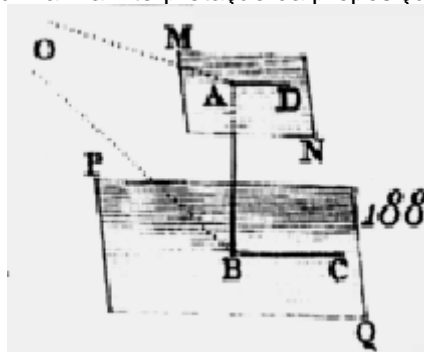


Fonte: Legendre (1809b, est.8)

Como complemento ao teorema, Legendre (1809b), ainda considera que se as linhas EF, GH, situadas no mesmo plano não são paralelas, se prolongadas haverão de encontrar-se; logo os planos MN, PQ nos quais elas se encontram também se encontrarão; logo não seriam paralelos.

A Proposição XI trata de uma determinada linha AB, “[...] perpendicular no plano MN (fig.188), he perpendicular no plano PQ paralelo a MN.” (Legendre 1809b, p.151). Para melhor entender este teorema, como mencionado, buscamos apoio na Figura 171 (188 o.o.) e, nos demais argumentos a seguir:

Figura 171 - Auxiliar na interpretação da proposição XI, do Livro V



Fonte: Legendre (1809b, est.8)

A partir da figura acima, e do teorema, pode-se compreender de forma mais assertiva a ideia do autor no que se refere à análise da perpendicularidade da linha AB em relação ao plano. Visto que,

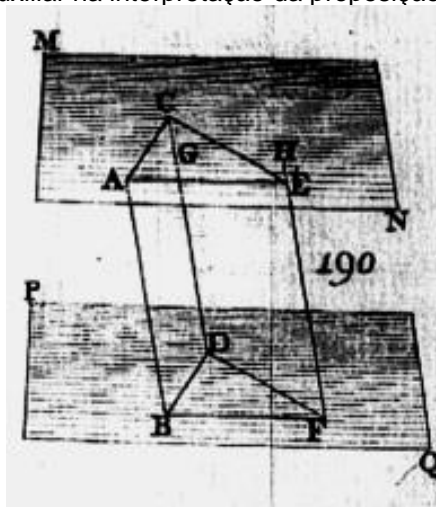
A linha AB, perpendicular ao plano MN, he perpendicular à recta AD; logo ella será também perpendicular à sua paralela BC; e como a linha AB he perpendicular a toda a linha BC tirada pelo seu pé no plano PQ, segue-se que ella he perpendicular ao plano PQ. (LEGENDRE 1809b, p.151)

Desta forma, comprova-se que a linha reta AB e suas paralelas são perpendiculares ao plano PQ.

Na Proposição XII, o autor revisita a Figura 137 para, em seu teorema, afirmar que as retas “[...] paralelas EG, FH [...], compreendidas entre dois planos paralelos MN, PQ, são iguaes.” (*idem*). Logo, por seu Corolário, podemos ampliar a compreensão da proposição, visto que, o autor, além de reafirmar o teorema, amplia a sua abrangência, sobretudo quando afirma que planos paralelos “[...]estão por toda a parte em igual distância; porque se EG e FH são perpendiculares aos dois planos MN, PQ, são paralelas entre si, logo são iguaes.” (*ibidem*)

A proposição XIII Legendre (1809b, p.152) trata de dois ângulos, especificamente CAE e DBF, os quais não estão no mesmo plano mas, se tiverem “[...] os seus lados paralelos e drigidos no mesmo sentido, estes ângulos serão iguaes, e os planos serão paralelos.” Para auxílio na interpretação deste teorema, lançaremos mão da Figura 172 (190 o.o.).

Figura 172 - Auxiliar na interpretação da proposição XIII, do Livro V



Fonte: Legendre (1809b, est.8)

Para além deste entendimento, o autor chama a atenção para o Corolário seguinte:

Se dois planos paralelos MN, PQ forem encontrados por outros dois planos CABD, EABF, os ângulos CAE, DBF, formados pelas intersecções dos planos paralelos, serão iguaes; porque a intersecção AC he paralela a BD, e AE a BF; Logo o ângulo CAE = DBF. (LEGENDRE 1809b, p.152)

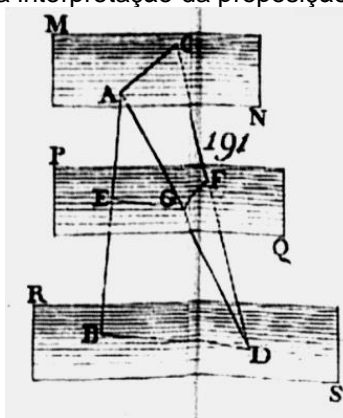
A Proposição XIV nos traz ainda referenciando a Figura 172, a ideia de que se determinadas três retas, a saber:

AB, CD, EF [...] situão-se no mesmo plano, forem iguaese paralelas, os triângulos ACB, BDF, formados de huma e outrasorte pelos extremos destas rectas, serão iguaes, e os seus planos paralelos.” (LEGENDRE 1809b, p.153)

Segue o autor, com sua conjectura a respeito do teorema acima, argumentando que, como há uma igualdade entre AB e CD, além do paralelismo entre si, ABDC formará um paralelogramo; desta forma  $AC = BD$  e, além disso, são paralelos e, o mesmo vale para os lados AE, BE, CE, DF. Logo os dois triângulos CAE, BDF são iguais e, como se quis demonstrar, seus planos são paralelos (LEGENDRE, 1809b).

Na proposição XV Legendre (1809b, p. 153) apresenta em seu teorema a condição de que “Duas rectas, comprehendidas entre planos paralelos, são cortadas em partes proporcionaes.”. Para que isso seja provado, primeiramente, é sugerida a observação da Figura 173 (191 o.o.) que segue abaixo.

Figura 173 - Auxiliar na interpretação da proposição XV, do Livro V

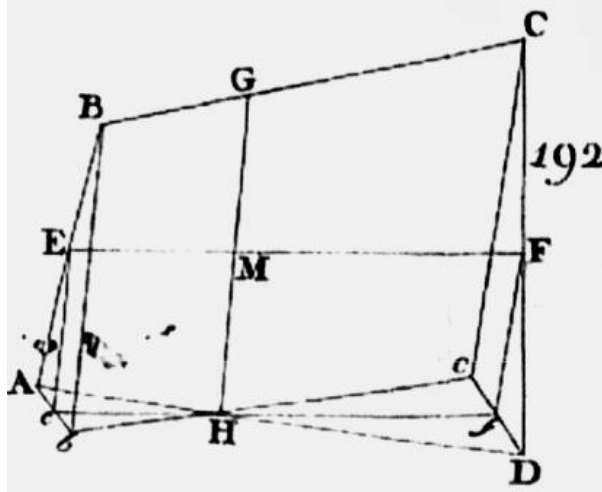


Fonte: Legendre (1809b, est.8)

Prosseguindo com a demonstração do teorema precedente, o autor propõe que a linha AB encontre os planos paralelos MN, PQ, RS, em A, E, B e que, a linha CD, analogamente faça o mesmo nos pontos C, F, D. Assim, teremos  $AE : EB :: CF : FD$ . Em um segundo momento, a linha AD encontra o plano PQ em Ge juntam-se então AC, EG, GF, BD; as intersecções EG, BD nos planos paralelos PQ, RS, pelo plano ABD, são paralelos. Deste modo  $AE : EB :: AG : GD$ . Analogamente tem-se  $AG : GD :: CF : DF$ ; Logo, pela razão  $AG : GD$ , teremos  $AE : EB :: CF : FD$  (LEGENDRE 1809b).

Antes de ser apresentada a Proposição XVI, vamos exibir a Figura 174 (192 o.o.), a qual é de relevância para o entendimento de seu teorema associado.

Figura 174 - Auxiliar na interpretação da proposição XVI, do Livro V



Fonte: Legendre (1809b, est.8)

Assim, após ser apresentada a Figura correspondente, é apresentado o argumento para a demonstração. Acerca deste teorema, Legendre (1809b, p.154), nos traz a ideia de que:

Seja ABCD hum quadrilátero [...] situado, ou não situado, no mesmo plano; se cortarmos os lados oppostos proporcionalmente por duas rectas EF, GH, de sorte que seja  $AE : EB :: DF : FC$ , e  $BG : GC :: AH : HD$ ; digo que as rectas EF, GH se cortarão em hum Ponto M, de maneira que será  $HM : MG :: AE : EB$ , e  $EM : MF :: AH : HD$ .

Logo, após apresentado o argumento, o autor desenvolve toda a demonstração, exibida na Figura 175.

Figura 175 - Demonstração da Proposição XVI, Livro V

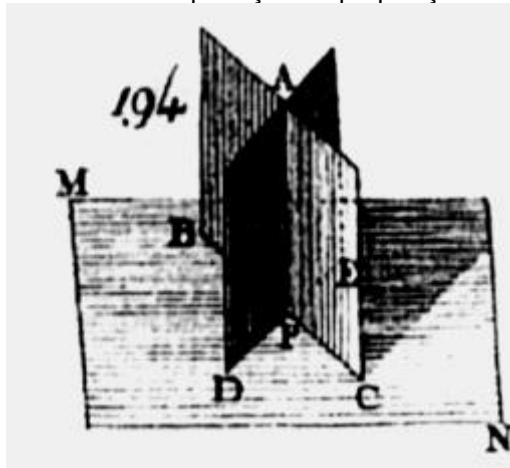
Conduza-se por AD hum plano qualquer  
 AHeD que não passe por GH ; pelos pontos E,  
 B, C, F, tirem-se a GH as paralelas Ee, Bb,  
 Cc, Ff, que encontrem este plano em e, b, c, f.  
 Por causa das paralelas Bb, GH, Cc (15.3.), teremos  
 $bH : He :: BG : GC :: AH : HD$  ; logo (20. 3.) os  
 triangulos AHb, cHD são semelhantes. Depois te-  
 remos  $Ae : eb :: AE : EB$ , e  $Df : fc :: DF : FC$  ;  
 logo  $Ae : eb :: Df : fc$ , ou, *componendo*,  $Ae : Df ::$   
 $Ab : Dc$  ; mas os triangulos semelhantes AHb,  
 cHD dão  $Ab : Dc :: AH : HD$  ; logo  $Ae : Df ::$   
 $AH : HD$  ; mas de serem semelhantes os triangulos  
 AHb, cHD, se segue que o angulo HAc = HDf ;  
 logo os triangulos AHe, DHf são semelhantes (20.  
 3.), e o angulo AHe = DHf. Segue-se daqui que  
 eHf he huma linha recta, e que assim as tres pa-  
 rallelas Ee, GH, Ff são situadas em hum mesmo  
 plano, o qual conterá as duas rectas EF, GH ; lo-  
 go *ellas se devem cortar em hum ponto M*. Além  
 disto, por causa das paralelas Ee, MH, Ff, tere-  
 mos  $EM : MF :: eH : Hf :: AH : HD$ . Por huma  
 construcção semelhante, fazendo passar hum plano  
 por AB, demonstrariamos que  $HM : MG :: AE :$   
 $EB$ . ,,

Fonte: Legendre (1809b, p.154)

Através da citação de Legendre (p.154) para o argumento e da Figura 142, prova-se a Proposição XVI. Na sequência, apresentamos a Proposição XVIII.

Para esta Proposição, primeiramente é apresentada a Figura 176 (194 o.o.), a qual expõe os elementos citados no teorema que será apresentado na sequência:

Figura 176 - Auxiliar na interpretação da proposição XVIII, do Livro V



Fonte: Legendre (1809b, est.9)

Após exibir a Figura 176, com os elementos de análise, voltaremos o nosso estudo à Proposição, em que Legendre (1809b, p.156) afirma: “Sendo a linha AP [...] perpendicular ao plano MN, logo o plano APB, conduzido por AP, será perpendicular ao plano MN”.

Prosseguindo com os estudos de Legendre (1809b), observa-se que: se BC é a intersecção dos planos AB, MN; se no plano MN temos DE perpendicular a BC, a linha AP, que é perpendicular ao plano MN, será perpendicular a cada uma das retas BC, DE; por sua vez, o ângulo APD, que é reto, nos dará a perpendicularidade de ambos entre si.

Por fim, fechando a ideia deste teorema, o Scholio relativo à proposição:

Quando três rectas, como AP, BP, DP são perpendiculares entre si, cada huma destas rectas he perpendicular ao plano das outras duas, e os três planos são perpendiculares entre si. (LEGENDRE 1809b, p.157)

Para o estudo da Proposição XIX, igualmente utiliza-se a Figura 143. Como esta já foi apresentada, segue-se com os seus enunciados. Primeiramente, em seu teorema, Legendre (1809b, p.157), afirma que “Se o plano AB [...] for perpendicular ao plano MN, e no plano AB tirarmos a linha PA perpendicular à intersecção commum PB, digo que PA será perpendicular ao plano MN”.

Haja vista que, se no plano MN, PD é perpendicular a PB, o ângulo APD será reto pela perpendicularidade destes entre si; assim, a linha AP, também será perpendicular a PB e PD, portanto é correto afirmar que é perpendicular ao plano MN. Por fim, o Corolário a seguir, traz o fechamento desta ideia:



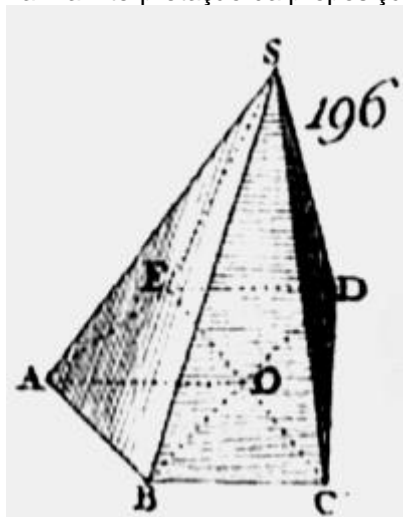
Se o plano AB for perpendicular ao plano MN, e por hum ponto P da intersecção commum levantarmos huma perpendicular ao plano MN, digo que esta perpendicular estará no plano AB; porque, se não estivesse, poderíamos tirar no plano AB huma perpendicular AP à intersecção commum BP, a qual seria ao mesmo tempo perpendicular ao plano MN; logo haveria no mesmo ponto P duas perpendiculares ao plano MN, o que he impossível. (LEGENDRE 1809b, p.157).

A Proposição XX, também referenciando a Figura 143 traz, além de seu teorema, um breve comentário. Primeiramente, apresenta-se o seu teorema, o qual afirma que “Se dois planos AB, AD, [...] forem perpendiculares a hum terceiro MN, a sua intersecção commum AP será perpendicular ao terceiro plano” (*idem*).

Acerca deste teorema, Legendre (1809b), ainda observa que se do ponto P elevarmos uma perpendicular ao plano MN, estareta deve, ao mesmo tempo, ficar no plano AB e no plano AD; portanto, este será o ponto daintersecção AP.

Para o estudo daProposição XXII estaremos, a exemplo do que fizemos naquelas precedentes, apresentando primeiramente a Figura que traz os argumentos para o teorema, bem como para seus comentários e, por fim, o seu Scholio. Assim sendo, segue a Figura 177 (196 o.o.).

Figura 177 - Auxiliar na interpretação da proposição XXII, do Livro V



Fonte: Legendre (1809b, est.9)

Após a exibição da Figura a qual será referida daqui em diante, apresentamos o teorema desta proposição, onde Legendre (1809b, p.158) afirma que “A somma dos ângulos planos que formão hum ângulo sólido he sempre menor que quatro ângulos rectos.”.

Complementarmente ao exposto no teorema acima, os estudos de Legendre (1809b) chamam a atenção para o ângulo  $S$ , cortado por pelo plano  $ABCDE$ ; parte-se de um ponto  $O$  tomado do mesmo plano, e traçam-se à partir de cada um dos ângulos as linhas  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$ ,  $OD$ ,  $OE$ . A soma dos ângulos nos triângulos  $ASB$ ,  $BSC$ , etc. formados em torno do vértice  $S$ , equivale a soma dos ângulos de igual número de triângulos  $AOB$ ,  $BOC$ , etc, formados em torno do vértice  $O$ . No entanto, ao analisarmos o ponto  $B$ , os ângulos  $ABO$  e  $OBC$ , juntos, fazem o ângulo  $ABC$  menor que a soma dos ângulos  $ABS$ ,  $SBC$ ; analogamente, no ponto  $C$  temos  $BCO + OCD < BCS + SCD$ , e assim em todos os ângulos do polígono  $ABCDE$ .

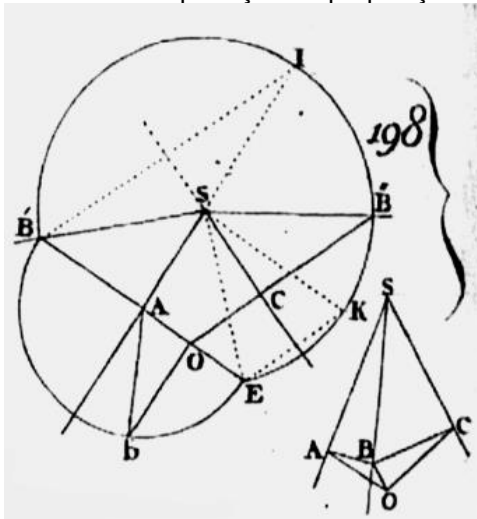
Posto isso, pode-se dizer que os triângulos que têm seu vértice em  $O$ , tem como característica a soma dos ângulos de sua base ser menor que a soma dos ângulos da base nos triângulos que tem o vértice em  $S$ ; em contrapartida, a soma dos ângulos formados em torno do ponto  $O$  é maior que aquela dos ângulos em torno do ponto  $S$ . Porém, a soma dos ângulos em torno do ponto  $O$  é igual a quatro ângulos retos; logo a soma dos ângulos planos que formam  $S$  é menor que quatro ângulos retos (LEGENDRE, 1809b).

Por fim, como fechamento para este teorema, apresenta-se o seu Scholio, onde Legendre (1809b, p.159), conclui que:

Esta demonstração supõe que o ângulo sólido he convexo, ou que o plano de huma face prolongado nunca pode cortar o ângulo sólido; se fosse o contrário, a somma dos ângulos planos não teria limites, e poderia ter qualquer grandeza.

As Proposições XXIV e XXV tratam de problemas geométricos relativos às proposições que precederam a sua apresentação. Deste modo, apresenta-se na íntegra o de número XXIV e, sobre o problema XXV, com breves comentários. Assim, na sequência, para apresentar a Proposição XXIV, adota-se o mesmo critério, antes de tudo exibir a Figura em estudo e seus argumentos geométricos. Desta maneira, segue abaixo a Figura 178 (198 o.o.).

Figura 178 - Auxiliar na interpretação da proposição XIV, do Livro V



Fonte: Legendre (1809b, est.9)

Após a apresentação da figura relacionada à Proposição, o problema que diz respeito à mesma será evidenciado pelas palavras de Legendre (1809b, p.162): “Sendo dados os três ângulos planos que formão um ângulo sólido, achar por huma construcção plana os ângulos que fazem entre si dois destes planos.”.

Dado o problema, Legendre (1809b, p. 162-3), começa a dissertar sobre a sua solução<sup>99</sup>, propondo primeiramente que:

Seja S [...] o ângulo sólido proposto no qual se conhecem os três ângulos planos ASB, ASC e BSC; pede-se o ângulo que fazem entre si dois destes planos, por exemplo, os planos ASB, ASC. Imaginemos que se tenha feito a mesma construcção [...], o ângulo OAB seria, o ângulo procurado. Por tanto trata-se de achar o mesmo ângulo por huma construcção plana ou traçada sobre hum plano.

A proposta de construção do autor, para a resolução da Proposição XXIV é apresenta, em sua primeira parte, a seguir por meio da Figura 179.

<sup>99</sup>A resposta é de extensão considerável, por conseguinte, apresentaremos as considerações do autor em um formato híbrido, ora com suas palavras (citação e Figura), ora com os nossos comentários.

Figura 179 - Proposta de construção para a resolução da Proposição XXIV

Para isso, fação-se sobre hum plano os angulos  $B'SA$ ,  $ASC$ ,  $B''SC$ , iguaes aos angulos  $BSA$ ,  $ASC$ ,  $BSC$ , na figura sólida; tomem-se  $B'S$  e  $B''S$  iguaes cada huma a  $BS$  da figura sólida; dos pontos  $B'$  e  $B''$  abaixem-se  $B'A$  e  $B''C$  perpendiculares sobre  $SA$  e  $SC$ , as quaes se encontrem em hum ponto  $O$ . Do ponto  $A$  como centro e com o raio  $AB'$  descreva-se a semi-circumferencia  $B'E$ ; ao ponto  $O$  levante-se sobre  $B'E$  a perpendicular  $Ob$ , que encontre a circumferencia em  $b$ ; tire-se  $Ab$ , e o angulo  $EAb$  será a inclinação procurada dos dois planos  $ASC$ ,  $ASB$  no angulo sólido.

Fonte: Legendre (1809b, p.163)

Dando seguimento ao raciocínio da Figura acima, o raciocínio do autor nos orienta a provar que o triângulo  $AOb = AOB$ . Se os dois triângulos  $B'SA$ ,  $BSA$ , são retângulos em  $A$ , seus ângulos em  $S$  também serão iguais; logo os ângulos em  $B$  e  $B'$  também o serão. Somado a isso, as hipotenusas  $SB'$  e  $SB$  são iguais; com isso, concluímos que estes triângulos são iguais; logo  $SA$  da Figura plana e  $SA$  da Figura sólida são iguais, também,  $AB'$  ou  $Ab$  na Figura plana, é igual a  $AB$  na Figura sólida. (LEGENDRE 1809b)

Com isso, consegue-se demonstrar que do mesmo modo que  $SC$  é igual em outra parte; assim o quadrilátero  $SAOC$  será igual em uma e outra Figura e, por consequência,  $AO$  da figura plana é igual a  $AO$  da figura sólida; logo em uma e outra figura, os triângulos retângulos  $AOb$  e  $AOB$ , tem as suas hipotenusas iguais e outro de seus lados igual; como são iguais, o ângulo  $EAb$ , pela construção plana, é igual à inclinação dos dois planos  $SAB$ ,  $SAC$ , no ângulo sólido (*idem*).

Por fim, quando o ponto  $O$  recaire entre  $A$  e  $B'$  na Figura plana, o ângulo  $EAb$  será obtuso, e medirá inclinação real dos planos. Por este motivo, é que se designou-se por  $EAb$ , e não por  $OAb$ , a inclinação real, a fim de que a mesma solução adapte-se a todos os casos, sem exceção (*ibidem*).

E, para finalizar o estudo do Livro V, a Proposição XXV traz, a exemplo da precedente um problema de Geometria, o qual versa sobre “[...] dados dois dos três ângulos planos que formam hum angulo sólido, com o angulo que os seus planos fazem entre si, achar o terceiro angulo plano” (LEGENDRE 1809b,

p. 164). É feita uma referência à Figura 145 em seus lados e ângulos e, o autor segue, nas páginas 165 e 166 com o desenvolvimento desta demonstração.

Após a apresentação dos estudos sobre o Livro V, finaliza-se a avaliação deste capítulo dos *Elementos de Geometria* de Legendre (1809b) para, na sequência, apresentar estudo do Livro VI.

#### 5.4.6 O Livro VI

A sexta, dentre as oito divisões, dos *Elementos de Geometria* de Legendre (1809b) – Poliedros - inicia com dezenove definições sobre poliedros, prismas e suas variações, bem como as grandezas envolvidas. Na sequência, páginas 171 a 205, o autor expressa em XXV Proposições os temas de estudo deste capítulo.

Antes de destacar as Proposições e seus respectivos Teoremas, destaca-se que este Livro apresenta igualmente aos anteriores algumas de suas partes com visibilidade prejudicada, as quais não serão objeto de estudo e/ou comentários. Isto será percebido na ordem das proposições apresentadas.

Deste modo, inicia-se as definições deste Livro VI com aquela que dá nome a esta parte da obra: o Poliedro ou, na versão original, Polyedro. Para Legendre (1809b, p.167), trata-se de: “[...] todo o sólido terminado por planos ou faces planas.”. Da mesma forma, prossegue o autor, chamamos de “[...] tetraedro o sólido que tem quatro faces; hexaedro o que tem seis; octaedro o que tem oito, dodecaedro o que tem doze; [...], &c.” (*idem*).

A definição II trata do lado ou da aresta, que vem a ser “A intersecção commum de duas faces adjacentes d’hum polyedro [...]” (*ibidem*) A definição III (poliedro regular), por sua vez, encontram-se na Figura 180, que segue abaixo:

Figura 180 - Definição de Poliedro regular

III. Chama-se *polyedro regular* aquelle cujas faces são todas *polyedros regulares iguaes*, e os ângulos solidos são todos *iguaes* entre si. Elles *polyedros* são cinco.

Fonte: Legendre (1809b, p.167)

A Definição IV versa sobre o prisma, e encontra-se na Figura 181.

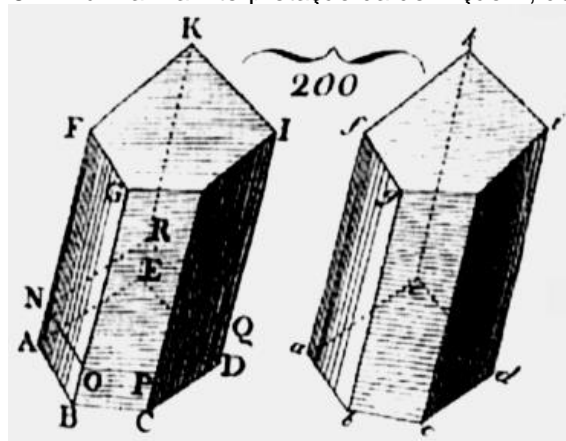
Figura 181 - Definição de Prisma

IV. *Prisma* he hum solido comprehendido por muitos planos parallelogrammos, terminados de ambas as partes por dois planos polygonos iguaes e parallelos.

Fonte: Legendre (1809b, p.167)

Antes de avançar para a Definição V, que aborda as superfícies dos prismas, apresenta-se a Figura 182 (200 o.o.), a qual servirá de base para o estudo do conceito em questão:

Figura 182 - Auxiliar na interpretação da definição V, do Livro VI



Fonte: Legendre (1809b, est.9)

Após a exposição da Figura 149, podemos avançar na definição V, onde Legendre (1809b, p.168) estabelece que:

Os polygonos iguaes e parallelos ABCDE, FGHIK, se chamão bases do prisma; os outros planos parallelogrammos todos juntos constituem o que se chama superfície lateral ou convea do prisma.

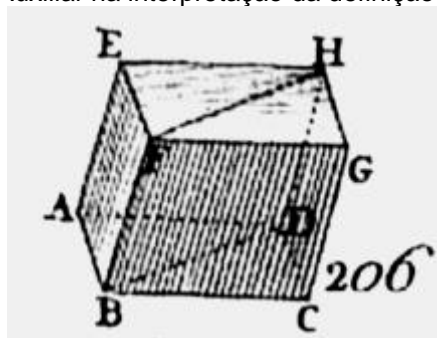
A definição VI versa sobre a altura dos prismas, e a define como sendo “[...] a distância de suas duas bases, ou a perpendicular abaixada de hum ponto da base superior sobre o plano da base inferior.” (*idem*)

Na sequência, a definição VII analisa a questão dos prismas retos e oblíquos, onde o prisma reto é aquele em que “[...] os lados AF, BG, &c. são perpendiculares aos planos das bases; então cada hum delles he igual à altura do prisma.” (LEGENDRE 1809b, p.168). Por outro lado, sempre que o prisma é oblíquo, a altura é menor que o seu lado.

A definição VIII delibera sobre a classificação dos prismas quanto ao formato de suas bases. Assim sendo um prisma pode ser “[...] triangular, quadrangular, pentagonal, hexagonal, &c. conforme a base he hum triângulo, hum quadrilátero, hum pentágono, hum hexágono, &c.” (LEGENDRE 1809b, p.168).

Anteriormente à definição IX (paralelepípedo), vamos apresentar a Figura 183 (206 o.o.), a qual ajudará com o desenvolvimento da significação da mesma:

Figura 183 - Auxiliar na interpretação da definição IX, do Livro VI



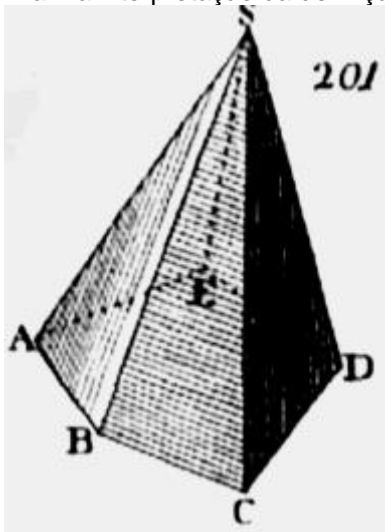
Fonte: Legendre (1809b, est.9)

Assim, após a apresentação da Figura 150, será definido o paralelepípedo como aquele prisma “[...] que tem por base hum parallelogrammo, e tem todas as suas taces parallelogramâmicas; [...]”(LEGENDRE 1809b, p.168).

Prosseguindo, apresentamos a definição X, a qual aborda a entendimento do que é o cubo, que nas palavras de Legendre (*idem*) é um : “[...] hexaedro regular compreendido por seis quadrados iguaes.”.

Para avançarmos à definição XI (pirâmide), se faz necessário antes, apresentar a Figura 184 (201 o.o.). Deste modo, exhibe-se na sequência a representação de uma pirâmide, que auxiliará no desenvolvimento de sua descrição:

Figura 184 - Auxiliar na interpretação da definição XI, do Livro VI



Fonte: Legendre (1809b, est.9)

Após apresentar a Figura 151 será apresentada a definição de pirâmide que, em Legendre (1809b, p.168), trata de “[...] hum sólido formado por muitos planos triangulares que partem do mesmo ponto S e terminados no mesmo plano polygonal ABCDE.”. Por sua vez, o polígono ABCDE é chamado de base e, o ponto S é o vértice. Os triângulos ASB, ASE, BSC, etc, formam a lateral da pirâmide. Após definir a pirâmide e algumas de suas características, a definição XII versa sobre o que vem a ser a altura da pirâmide que Legendre (1809b, p.169) conceitua como “[...] a perpendicular abaixada do vértice sobre o plano da base [...]”.

No que tange a definição XIII, ainda sobre as características da pirâmide, o autor atesta que, de acordo com a forma sua base, ela pode ser classificada como triangular, quadrangular, etc. Assim, sobre a pirâmide regular, Legendre (*idem*), afirma que:

He aquella que tem por bafe hum polygono regular, e ao mesmo tempo a perpendicular abaixada do vértice sobre o plano da base, passa pelo centro da mesma base: esta linha se chama eixo da pyramide.

A definição XV disserta sobre a diagonal de um poliedro que, de acordo com Legendre (*ibidem*) “[...]he a linha que une os vertices de dois ângulos sólidos não adjacentes.”

Na sequência, a definição XVI aborda a questão dos poliedros simétricos, os quais são definidos como aqueles:



Que tem huma base commum, e são constituídos semelhantemente, hum acima do plano da base, outro abaixo, com condição que os vértices dos ângulos sólidos homólogos estejam situados em iguaes diistâncias do plano da base, sobre huma mesma recta perpendicular a este plano. (LEGENDRE 1809b, p.169)

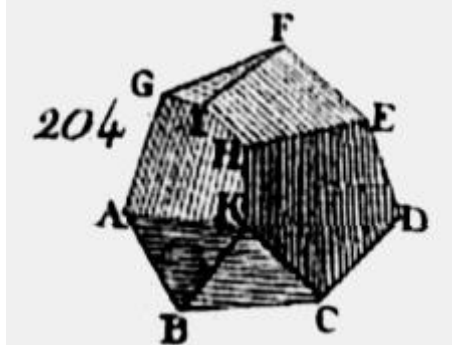
A definição XVII trata da semelhança entre pirâmides triangulares que, para Legendre (*idem*) são aquelas que “[...] tem duas faces semelhantes cada huma a cada huma, semelhantemente dispostas, e igualmente inclinadas entre si.”.

A definição XVIII dedica-se a estabelecer as condições de semelhança de dois poliedros que o serão se, por meio de bases semelhantes “[...] os vértices dos angulos sólidos homólogos, fora destas bases, são detaminados por pyrâmides triangulares semelhantes cada huma a cada huma.” (LEGENDRE, 1809b, p.170). Por fim, a última definição, dentre as iniciais, do Livro VI, trata dos vértices de um poliedro que, para Legendre (*idem*) são “[...] os pontos situados nos vértices dos feus dillerentcs ângulos sólidos.”.

A seguir, apresenta-se as Proposições e seus respectivos Teoremas. Atenta-se novamente para o fato de que aquelas que não forem encontradas mais adiante não foram estudadas por motivos expostos anteriormente de legibilidade prejudicada.

Assim, na Proposição I e o seu teorema Legendre (*idem*) afirma que “Dois polyedros não podem ter os mesmos vértices e no mesmo número sem coincidir hum com o outro.”. Antes de exhibir o Scholio associado a este teorema, se faz necessário trazer a Figura 185 (204 o.o.) a qual, de antemão, apresenta os subsídios para a discussão que seguirá:

Figura 185 - Auxiliar na interpretação da Proposição I, do Livro VI



Fonte: Legendre (1809b, est.9)

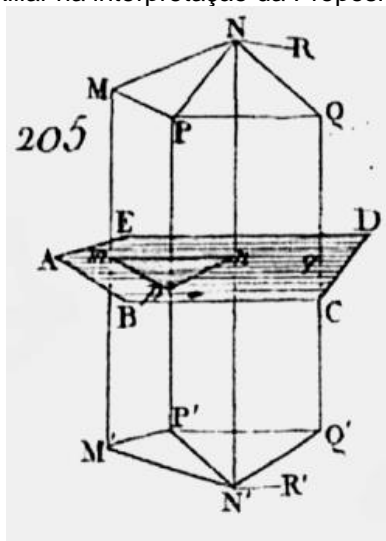
Após a exibição da Figura 152, o Scholio relativo a esta proposição pode ser apresentado para que seja complementada a ideia da mesma. Logo, Legendre (1809b, p.171) argumenta que sejam “[...] dados de posição os pontos A, B, C, K, &c, que devem servir de vértices a hum polyedro, he fácil descrever o polyedro.”

A Proposição II versa sobre as relações dos poliedros simétricos onde, de acordo com Legendre (*idem*):

As faces homólogas são iguaes cada huma a cada huma, e a inclinação das duas faces adjacentes em hum dos sólidos he igual à inclinação das faces homólogas no outro.

Para subsidiar este teorema, apresentamos a seguir, respectivamente, a Figura 186 (205 o.o.) o Corolário e o Scholio relativos. Deste modo, a Figura abaixo traz os subsídios necessários para que se possa prosseguir com essa demonstração:

Figura 186 - Auxiliar na interpretação da Proposição II, do Livro VI



Fonte: Legendre (1809b, est.9)

O Corolário da Proposição II, conforme as ideias de Legendre (1809b) mostra que as partes constituintes de um sólido (ângulos, lados e inclinações das faces), são iguais umas às outras; dessa forma, podemos concluir que dois poliedros simétricos são iguais ainda que não seja possível uma sobreposição de ambos. Isso ocorre, pois, não há diferença nos sólidos senão as posições das partes, as quais não são essenciais à sua grandeza.

No mesmo sentido e complementando o Corolário, Legendre (1809b, p.173-4) observa que:

Pode-se notar que os ângulos sólidos de um poliedro são os simétricos dos ângulos do outro poliedro; porque se o sólido N he formado pelos ângulos MNP, PNQ, QNR, e seu homólogo N'he formado pelos planos M'N'P', P'N'Q', Q'N'R', &c.

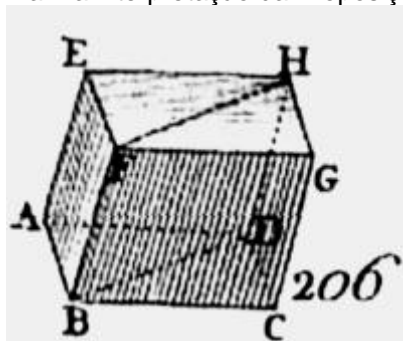
Assim, todos estão dispostos na mesma ordem; mas, como os dois ângulos sólidos estão em situação inversa um com relação ao outro. A disposição real dos planos torna o ângulo sólido N' é a inversa daquela que tem lugar no ângulo homólogo N. Além disso, as inclinações dos planos consecutivos são iguais em ambos os ângulos sólidos. Logo estes ângulos sólidos são simétricos um do outro. (LEGENDRE, 1809b)

A Proposição III trata da semelhança de dois prismas, os quais “[...] são iguaes quando tem hum ângulo sólido compreendido entre três planos iguaes cada hum a cada hum e semelhantemente dispostos.” (LEGENDRE 1809b, p.174).

Desta forma, e referenciando a Figura 149, o autor afirma que as bases ABCDE e abcde são iguais. Da mesma forma, o paralelogramo ABGF = abgf e, também, o paralelogramo BCHG = bchg; com isso, os prismas ABCI e abci também serão iguais e, sobrepondo cada um destes, eles coincidirão.

No que diz respeito a Proposição IV e seu teorema, Legendre (1809b, p.175) destaca que “Em todo o paralelepípedo os planos oppostos são iguaes e paralelos.”. Desta forma, e subsidiando o entendimento deste teorema, apresentamos a Figura 187 (206 o.o.) para que, em seguida, seja possível prosseguir com a demonstração:

Figura 187 - Auxiliar na interpretação da Proposição IV, do Livro VI



Fonte: Legendre (1809b, est.9)

Por definição neste sólido, as bases ABCD e EFGH, são paralelogramos iguais, e seus lados são paralelos; Resta então demonstrar que o mesmo vale para as laterais opostas: AEHD e BFGC. Deste modo, Legendre (1809b, p.175-6) afirma que:

AD he igual a parellela BC, porque a Figura ABCD he hum parallelogrammo; por semelhante razão AE he igual e parellela a BE. Logo o ângulo DAE he igual ao ângulo CBF. Logo, também o parallelogrammo DAEH he igual ao parallelogrammo CBFH. Demonstrar-se-ha no mesmo modo que os parallelogrammos oppostos ABFE, DCGH são iguaes e parellelos.

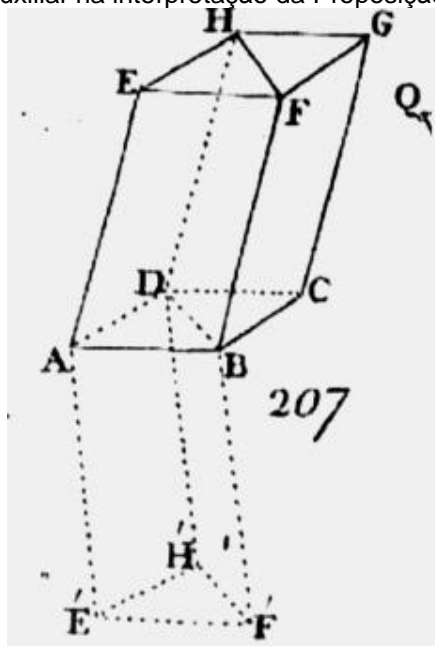
Por fim, o paralelepípedo é um sólido composto de seis planos, dos quais os opostos são iguais e paralelos. Com isso pode-se afirmar que qualquer lado e seu oposto podem ser tomados por base do paralelepípedo.

A Proposição V, também sobre o paralelepípedo, refere-se à simetria de seus ângulos sólidos e, como complemento, “[...] as diagonais tiradas pelos vértices destes ângulos se cortão, mutuamente em duas partes iguaes.” (LEGENDRE 1809b, p. 176).

Junto a isso, podemos comparar o ângulo sólido A com o seu oposto G; os ângulos EAB e EFB são iguais, assim como também é igual BGC. Os ângulos DAE, DHE, CGF, DAB, DCG e HGF também são iguais. Assim sendo, os três ângulos planos que formam o ângulo sólido A são iguais aos três que formam o ângulo sólido G, um a um; além disso, a disposição é diferente em um e outro; Por consequência, os dois ângulos sólidos A e G são simétricos entre si. (LEGENDRE, 1809b)

A Proposição VI, que versa sobre a mesma figura de seu precedente, e onde Legendre (1809b, p. 177) aborda a questão de um plano que corta duas retas paralelas BF, DH e, com isso “[...] divide o paralelepípedo AG em dois prismas triangulares ABDHEF, GHBCD, symmétricos hum do outro.”. Para ilustrar este teorema utiliza-se a Figura 188 (207 o.o.) a qual, ao apresentar os planos, prismas e retas citadas acima, nos auxiliará com a visualização e compreensão da Proposição.

Figura 188 - Auxiliar na interpretação da Proposição VI, do Livro VI

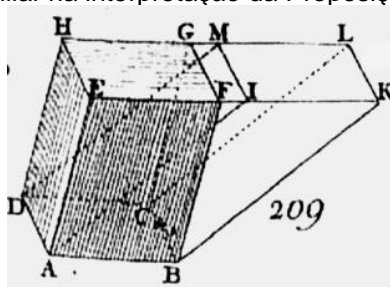


Fonte: Legendre (1809b, est.9)

Após a apresentação da Figura 188 é possível, com base nas ideias de Legendre (1809b), inferir algumas observações e comentários. Inicialmente, dois sólidos, prismas, porque os triângulos ABD, EFH, que tem os seus lados iguais e paralelos, são iguais, e ao mesmo tempo as bases latentes ABFE, AD HE, BDHF são paralelogramos; logo o sólido ABQHEF é um prisma; o mesmo acontece ao sólido GHFBCD. Por fim, afirmo que dois prismas são simétricos um do outro.

Na proposição VII temos dois paralelepípedos, AG e AL, ambos com a base comum ABCD e bases superiores IKLM e EFGH – Figura 189 (209 o.o.). Se “[...] forem compreendidos em um mesmo plano e entre as mesmas paralelas, EK, KL, estes dois paralelepípedos serão equivalentes entre si.” (LEGENDRE 1809b, p. 178)

Figura 189 - Auxiliar na interpretação da Proposição VII, do Livro VI

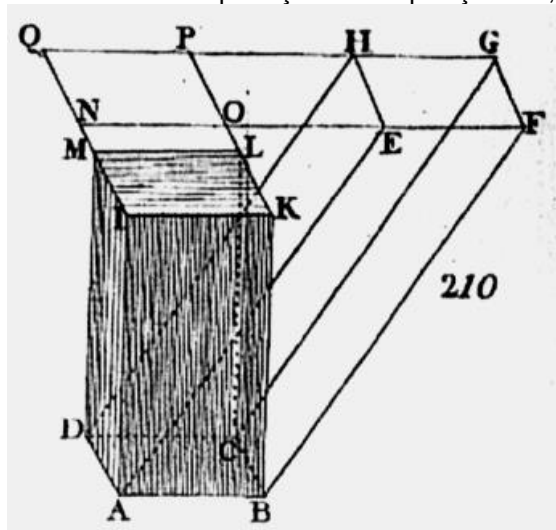


Fonte: Legendre (1809b, est.9)

Como  $AE$  é paralela a  $BF$  e  $HE$  a  $GF$ , o ângulo  $AEI = BFK$ ,  $HEI = GFK$  e  $HEA = GFB$ . Estas três igualdades formam os ângulos formam os ângulos sólido  $E$  e  $F$ ; logo, como os ângulos planos são iguais entre si e dispostos de forma semelhante, segue-se que os ângulos sólidos  $E$  e  $F$ , são iguais. Agora, se pusermos o prisma  $AEM$  sobre o prisma  $BFE$ , e primeiro a base  $AEI$  sobre a base  $BFK$ , estas duas bases que são iguais irão coincidir; e como os ângulos sólidos  $E$  e  $F$  são iguais, e o lado  $EFH$  cairá sobre o seu igual  $FG$ . Nada mais é necessário para provar que os dois prismas coincidem em toda a sua extensão porque a base  $AEI$  e a aresta  $EH$  determinam o prisma  $AEM$ , como a base  $BFK$  e a aresta  $FG$  determinam o prisma  $BFL$ , estes prismas são iguais. (LEGENDRE, 1809b)

A Proposição VIII, em Legendre (1809b, p.179), afirma que “Dois paralelepípedos de mesma base, e da mesma altura são equivalentes entre si.”. Posto isso, é razoável considerarmos a Figura 190 (210 o.o.) como auxiliar na demonstração deste teorema, conforme exibimos abaixo:

Figura 190 - Auxiliar na interpretação da Proposição VIII, do Livro VI



Fonte: Legendre (1809b, est.9)

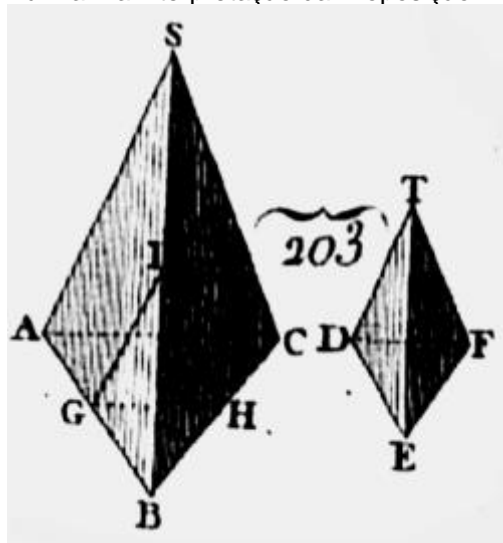
Logo, apresentada a Figura 188, pode-se propor que,  $ABCD$  é uma base comum aos dois paralelepípedos  $AG$ ,  $AL$ ; como ambos têm a mesma altura, as suas bases superiores  $EFGH$  e  $IKLM$  estarão no mesmo plano. Por sua vez, os lados  $EF$  e  $AG$  são iguais e paralelos, a exemplo de  $IK$  e  $AB$ , valendo o mesmo para os lados  $EI$  e  $IK$ ,  $GF$  e  $LK$ . Estendem-se os lados  $EF$ ,  $HG$ ,  $LK$ ,  $IM$ , até que estes formem por suas intersecções o paralelogramo de base  $NOPQ$ , que é

iguais bases EFGH e IKLM. Então, se imaginarmos um terceiro paralelepípedo, de base comum ABCD, e base superior NOPQ, pode-se afirmar que este é equivalente ao paralelepípedo AG, porque possui a mesma base inferior, as bases superiores estão no mesmo plano e, estão situadas entre as paralelas GQ, FN. Para concluir, adicionalmente pode-se dizer que por esta mesma razão este terceiro paralelepípedo seria equivalente ao paralelepípedo AL. Logo os dois paralelepípedos AG, AL, que tem a mesma base e a mesma altura, são equivalentes entre si. (LEGENDRE 1809b)

A Proposição XXI apresenta o seguinte teorema: "Duas pirâmides triangulares semelhantes tem as faces homólogas semelhantes, e os ângulos sólidos homólogos iguais." (LEGENDRE 1809b, p.197).

Esta proposição apresenta quatro corolários e um Scholio, os quais, trataremos na sequência. No entanto, antes disso, mostra-se a Figura 191 (203 o.o.), a qual nos auxiliará nesta demonstração:

Figura 191 - Auxiliar na interpretação da Proposição XXI, do Livro VI



Fonte: Legendre (1809b, est.9)

Desta forma, Legendre (1809b) parte da prerrogativa que duas pirâmides triangulares semelhantes têm as faces homólogas semelhantes e os ângulos sólidos homólogos iguais. Corroborando com esta ideia, os Corolários I, II, III e IV a seguir mostram através da proporção, inclinação das faces e dos planos. Assim, apresentamos na Figura 192, que segue os referidos Corolários:

Figura 192 - Corolários I, II, III e IV da Proposição XXI, Livro VI

*Corollario I.* Os triangulos semelhantes nas duas pyramides tornecem as proporções  $AB : DE :: EC : FF :: AC : DF :: AS : DT :: SB : TE :: SC : TF$ ; logo nas pyramides triangulares semelhantes, os lados homologos são proporcionaes.

II. E, como os angulos solidos homologos são iguaes, segue-se que a inclinação de duas faces quaesquer de huma pyramide he igual à inclinação das duas faces homologas da pyramide semelhante.

• III. Se cortarmos a pyramide triangular  $SABC$  por hum plano  $GHI$ , paralelo a huma das faces  $SAC$ , a pyramide parcial  $BGHI$  será semelhante à pyramide inteira  $SABC$ . Porque os triangulos  $BGI$ ,  $BGH$ , são semelhantes aos triangulos  $SAS$ ,  $SAC$ , cada hum a cada hum, e semelhantemente dispostos; a inclinação dos seus planos he a mesma em ambas as partes; logo as duas pyramides são semelhantes.

IV. Em geral, se cortarmos huma pyramide qualquer  $SABCDE$  (fig. 214.) por hum plano  $abede$ , paralelo à base, a pyramide parcial  $Sabede$  será semelhante à pyramide inteira  $SABCDE$ . Porque, as bases  $ABCDE$ ,  $abede$  são semelhantes, e ajuntando  $AS$ ,  $ac$ , acabamos de provar que a pyramide triangular  $SABC$  he semelhante à pyramide  $Sabc$ ; logo o ponto  $S$  está determinado acerca da base  $ABC$  como está o ponto  $S$  acerca da base  $abc$  (def. 18.); logo as duas pyramides  $SAECDE$ ,  $Sabede$ , são semelhantes.

Fonte: Legendre (1809b, p.198-9)

Associado aos Corolários acima, temos ainda o Scholio, em que Legendre (1809b, p.199) complementa a ideia destes, com a seguinte afirmativa:

Em vez dos cinco dados que requer a definição para a fmelhança de duas pyramides triangulares, poderíamos substituir outros cinco, segundo diferentes combinações, e daqui resultarião outros tantos theoremas entre os quaes se distingue o seguinte: *Doas pyramides triangulares são semelhantes quando tem os lados homólogos proporcionaes.*

Prossegue o autor, referenciando a Figura 158, e as proporções estabelecidas em  $AR : DE :: PC : EF :: AC : DF :: AS : DT :: SB : TE :: SC :$



TF, o que estabelece cinco condições e, a semelhança entre os triângulos ABS, AEC, DET, DEF dispostos de forma semelhante. Temos ainda os triângulos semelhantes SBC e TEF. Assim, os três ângulos planos que formam o ângulo sólido B serão iguais aos ângulos planos que formam o ângulo sólido E, entre si; assim, a inclinação dos planos SAB, ABC é igual à dos seus homólogos TDE, DEF e, portanto, as duas pirâmides são semelhantes. (LEGENDRE, 1809b)

A Proposição XXII versa sobre a semelhança de poliedros, os quais “[...] tem as faces homólogas semelhantes, e os ângulos sólidos homólogos iguaes.” (LEGENDRE 1809b, p.200).

A partir deste teorema, pode-se dizer pelos estudos de Legendre (1809b), que quaisquer dois poliedros semelhantes terão as faces homólogas semelhantes e seus ângulos sólidos homólogos iguais. Acerca disso, o Corolário associado a esta proposição esclarece que se a partir de

Quatro vértices de hum polyedro, formarmos huma pyramide triangular, e formamos segunda com os quatro vértices homólogos de hum polyedro semelhante, as duas pyramides serão semelhantes; porque terão os lados homólogos proporcionaes. (*idem*)

Por fim, o autor observa também que duas diagonais homólogas, por exemplo, estão para si como dois lados homólogos.

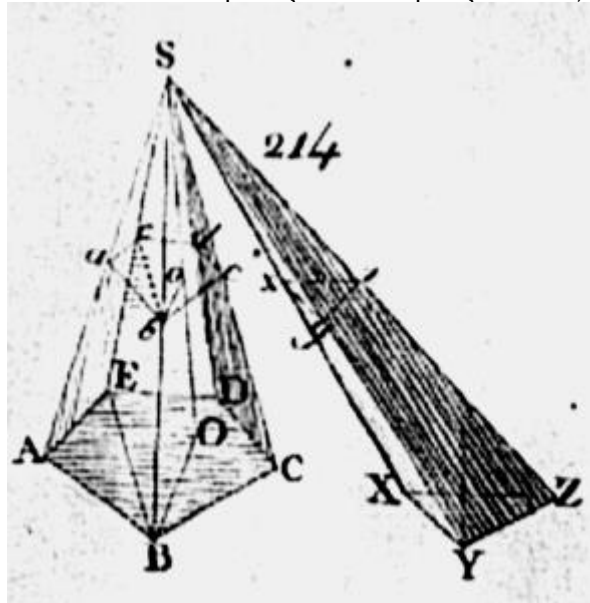
A Proposição XXIII estabelece que quando se tem dois poliedros semelhantes “[...] se podem repartir nom mesmo número de pyramides triangulares semelhantes, cada huma a cada huma, e semelhantemente dispostas” (LEGENDRE 1809b, p.202).

Já foi provado que as superfícies de dois poliedros podem ser divididas em um mesmo número de triângulos semelhantes entre si e, semelhantemente dispostos. Consideremos agora todos os triângulos de um poliedro, com exceção daqueles que formam um ângulo sólido A e que tem como bases outras tantas pirâmides triangulares que tem o vértice em A; estas pirâmides juntas compõem um poliedro (LEGENDRE 1809b).

Por fim, conclui o autor, repartindo-se do mesmo modo outro poliedro em pirâmides que tenham por vértice comum o vértice do ângulo “a” homólogo a “A”. A pirâmide que ajunta os quatro vértices homólogos de um poliedro será semelhante à pirâmide que une os quatro vértices homólogos do outro poliedro. Logo teremos dois poliedros semelhantes.

Na sequência, apresentaremos a Proposição XXIV na qual Legendre (1809b, p.203) afirma que: “Duas pyramides semelhantes estão entre si como os cubos dos lados homólogos.” A proposição precedente, e o seu respectivo teorema, são ancoradas pela Figura 193 (214 o.o.) exibida na sequência.

Figura 193 - Auxiliar na interpretação da Proposição XXIV, do Livro VI

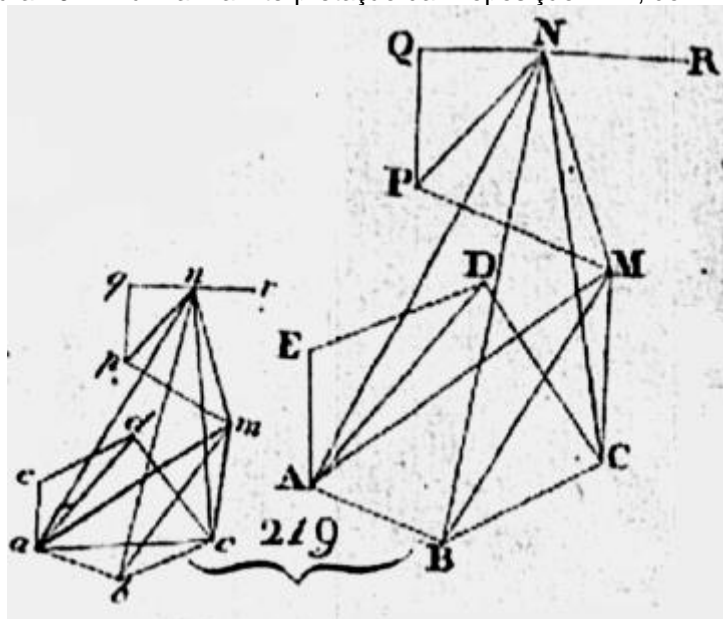


Fonte: Legendre (1809b, est.10)

A análise de Legendre (1809b) acerca da Figura 160, gira em torno das semelhanças das duas pirâmides. Pode-se propor uma sobreposição da menor sobre a maior, de maneira que fiquem tendo o ângulo sólido S comum. Então as bases ABCDE, abcde, serão paralelas pois como as faces homólogas são semelhantes, os ângulos Sab e SAB, Abc e SBC são iguais. Logo os planos abc e ABC são paralelos; Isto posto, seja SO uma perpendicular traçada a partir do vértice S sobre o plano ABC, e seja “o” o ponto em que esta perpendicular encontra o plano abc teremos:  $SO : So :: SA : As :: AB : ab$ . Por consequência:  $\frac{1}{3} SO : \frac{1}{3} So :: AB : Ab$ . Com isso demonstra-se que duas pirâmides semelhantes estão para si como os cubos de seus lados homólogos.

Por fim, na Proposição XXV Legendre (1809b, p.204) afirma que “Dois polyedros semelhantes estão entre si como os cubos dos lados homólogos.”. Para fundamentar a demonstração deste teorema, sugere-se a visualização da Figura 194 (219 o.o.), a qual está exibida abaixo:

Figura 194 - Auxiliar na interpretação da Proposição XXV, do Livro VI



Fonte: Legendre (1809b, est.10)

Seguindo com a demonstração referente ao teorema da proposição XXV, Legendre (*idem*) afirma que: “Dois polyedros semelhantes podem ser repartidos no mesmo número de pirâmides triangulares semelhantes cada huma a cada huma. “Deste modo as duas pirâmides da Figura 161, APNM e apnm, estão entre si como os cubos de lados homólogos AM e am, ou AB e ab.

A mesma razão pode ser usada entre outras duas pirâmides homólogas quaisquer; logo a soma de todas as pirâmides que compõe um poliedro, resulta que no próprio poliedro está para o outro poliedro como o cubo do um lado qualquer do primeiro está para o cubo do lado homólogo do segundo.

Após a apresentação dos estudos sobre o Livro VI, finalizamos os estudos deste capítulo dos *Elementos de Geometria* de Legendre (1809b) para, na sequência, apresenta-se o estudo do Livro VII.

### 5.4.7 O Livro VII

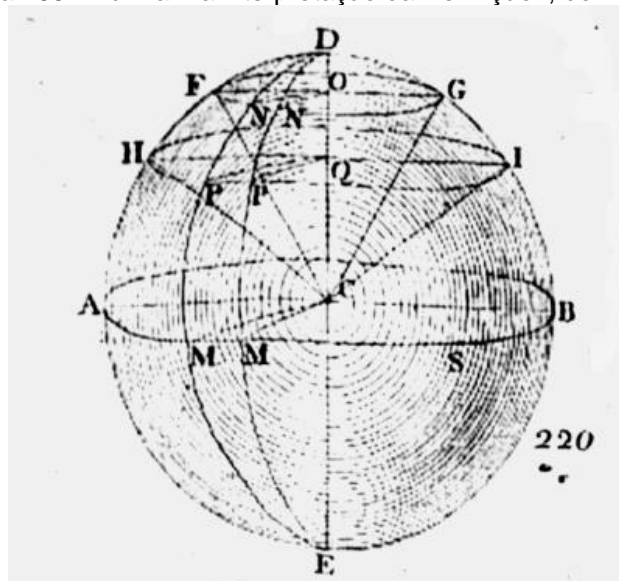
A sétima, dentre as oito divisões, dos *Elementos de Geometria* de Legendre (1809b) – Esferas - inicia com quinze definições sobre esferas, suas variações, bem como as grandezas envolvidas. Na sequência, páginas 208 a 238, o autor expressa em XXVII Proposições sobre os temas de estudo deste capítulo.

Antes de destacar as Proposições e seus respectivos Teoremas, destacamos que este Livro apresenta igualmente aos anteriores algumas de suas partes com visibilidade prejudicada, as quais não serão objeto de estudo e/ou comentários. Isto será percebido na ordem das proposições apresentadas.

Deste modo, inicia-se as definições do Livro VII com aquela que dá nome a esta parte da obra: a Esfera. Para Legendre (1809b, p.206), trata-se de: “[...] hum sólido terminado por huma superfície curva, da qual todos os pontos são igualmente distantes de hum ponto interior que se chama *centro*.”

Para auxiliar na visualização deste conceito, sugere-se a visualização da Figura 195 (220 o.o.), onde é correto imaginar que a esfera será produzida pela revolução do semicírculo DAE em torno do eixo DE. A superfície descrita neste movimento pela curva DAE terá todos os seus pontos em igual distância do centro C (LEGENDRE 1809b).

Figura 195 - Auxiliar na interpretação da Definição I, do Livro VII

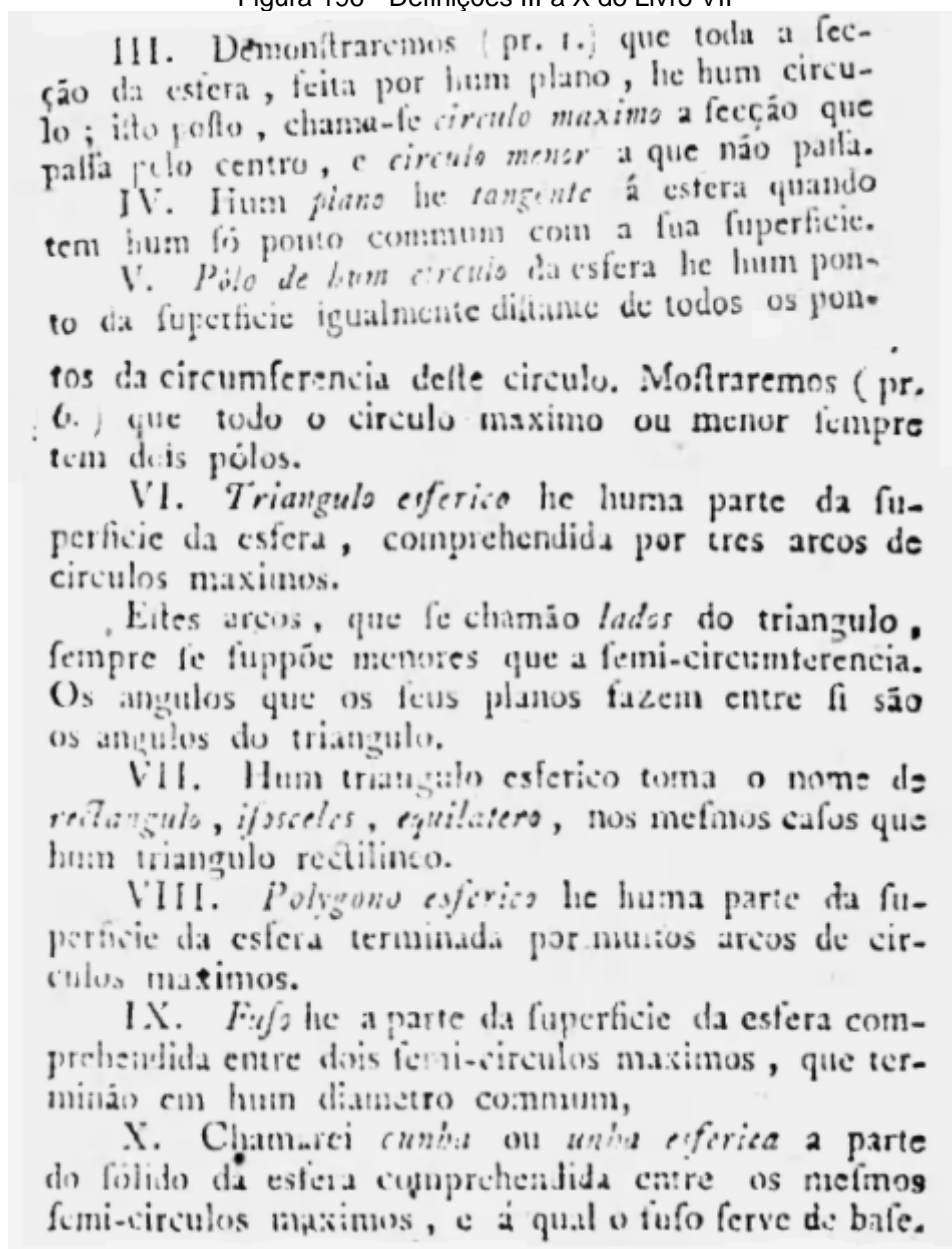


Fonte: Legendre (1809b, est.10)

O Raio da esfera é pela definição II em Legendre (1809b, p.206): “[...] huma linha recta tirada do centro a hum ponto da superfície [...]”. Por sua vez, o diâmetro ou eixo he huma linha que passa pelo centro e termina de huma e outra parte na superfície.” (*idem*). Observamos ainda que “[...] todos os raios da esfera são iguais; todos diâmetros são iguais e duplos do raio.” (*ibidem*).

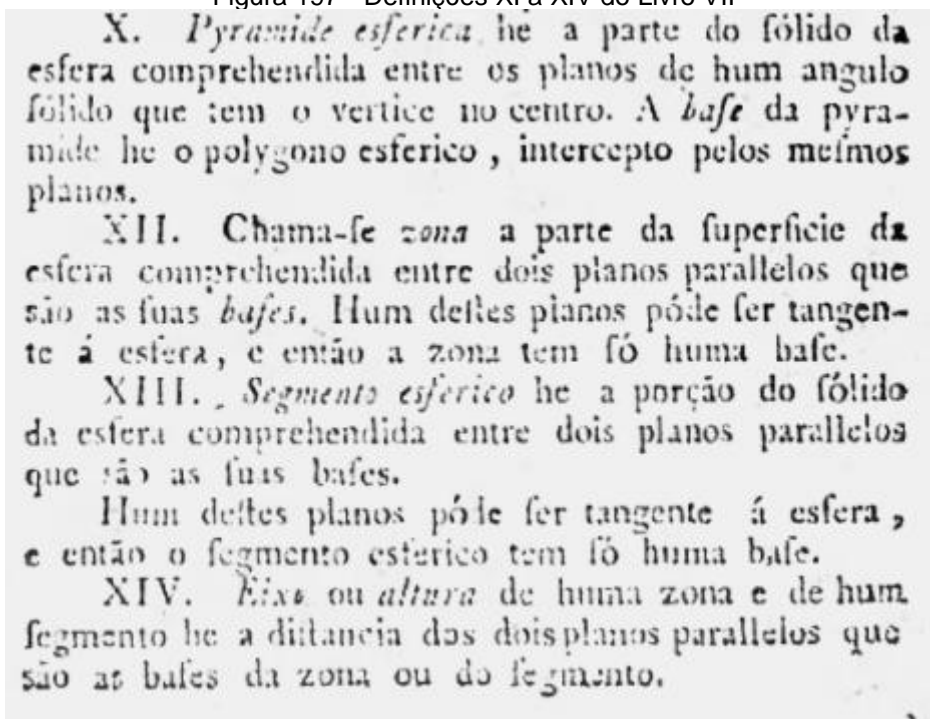
As definições III, aX podem ser visualizadas através da Figura194. Este recurso, do qual estamos lançando mão se dá em virtude de boa legibilidade apresentada nesta parte da obra e, pois a referência para as definições e citações é sempre a mesma, Legendre (1809b). Desta forma, segue abaixo:

Figura 196 - Definições III a X do Livro VII



Da mesma forma que as definições III a X, as subsequentes XI<sup>100</sup> a XIV também se encontram em uma figura. Pelos mesmos motivos apontados, segue a Figura 197.

Figura 197 - Definições XI a XIV do Livro VII



Fonte: Legendre (1809b, p.205)

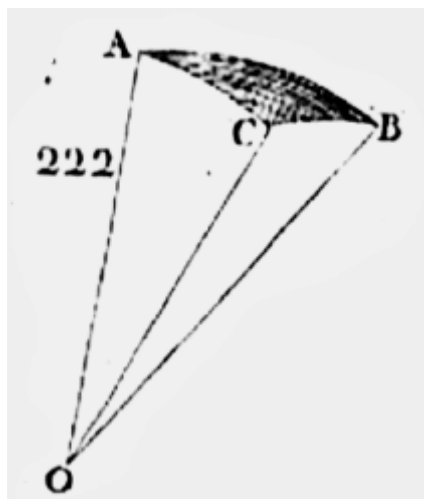
Por fim, a definição XV, trata do semicírculo DAE – Figura 162 – e seu giro “[...] em torno do eixo DE descreve a esfera, tudo o sector circular, como DCF ou FCH, descreve hum (ilegível) que se chama sector esférico”

A seguir, apresenta-se as Proposições e seus respectivos Teoremas. Atenta-se novamente para o fato de que aquelas que não forem encontradas mais adiante não foram estudadas por motivos expostos anteriormente de legibilidade prejudicada.

Assim, inicia-se pela Proposição II e o seu teorema onde Legendre (1809b, p.209) afirma que “Em todo o triangulo esférico ABC (fig. 222) um lado qualquer he menor que a somma dos outros dois”. Antes de exhibir a demonstração associada a este teorema, se faz necessário trazer a Figura 198 (222 o.o.) a qual, de antemão, apresenta os subsídios para a discussão que a sucederá:

Figura 198 - Auxiliar na interpretação da Proposição II, do Livro VII

<sup>100</sup> A numeração correta, da qual fizemos uso, é atribuída em errata na obra original.



Fonte: Legendre (1809b, est.10)

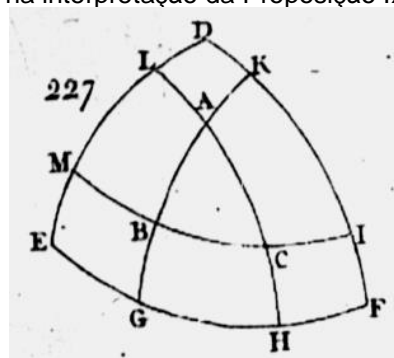
Na demonstração deste teorema, Legendre (1809b) inicia a partir do centro  $O$  da esfera a traçar os raios  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$ . Imaginando que os planos  $AOB$ ,  $AOC$ ,  $COB$ , formarão no ponto  $O$  um ângulo sólido, os referidos ângulos terão por medida os lados  $AB$ ,  $AC$ ,  $BC$ , do triângulo esférico  $ABC$ . Posto isso, podemos afirmar que cada um destes três ângulos planos que compõe o ângulo sólido é menor que a soma dos outros dois; Assim, um lado qualquer do triângulo  $ABC$  será menor que a soma dos outros dois.

Ao desenrolar da Proposição IX e seu respectivo teorema Legendre (1809b, p.210) trata de um dado triângulo  $ABC$

Dos pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , como pólos, descreveremos os arcos  $EF$ ,  $FD$ ,  $DE$ , que formem o triângulo  $DEF$ , reciprocamente os três pontos  $D$ ,  $E$ ,  $F$  serão os pólos dos lados  $BC$ ,  $AC$ ,  $AB$ .

Para o desenvolvimento deste teorema, antes será ilustrada a proposição acima com a Figura 199 (227 o.o.):

Figura 199 - Auxiliar na interpretação da Proposição IX, do Livro VII



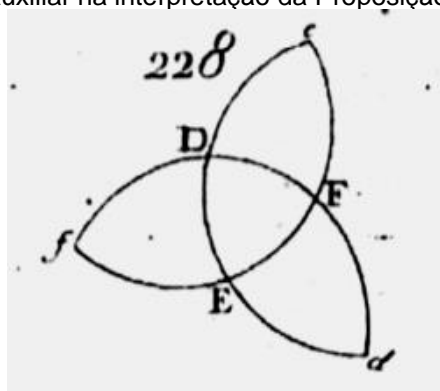
Fonte: Legendre (1809b, est.11)

Sendo o ponto A o polo do arco EF, a distância AE é um quadrante; sendo o ponto C o pólo do arco DF, a distância CE é igualmente um quadrante; Assim, o ponto E está distante um quadrante de cada hum dos pontos A e C. Deste modo, ele será o polo do arco AC. Demonstra-se do mesmo modo que D é polo do arco BC, e F do arco AB. (LEGENDRE 1809b)

Para complementar esta demonstração, na sequência, descreve-se o Corolário desse teorema: “[...] podemos descrever ABC por meio de DEF, assim como DEF por meio de ABC” (LEGENDRE 1809b, p.210).

No que se refere à Proposição X, supondo exatamente o exposto no teorema anterior e “[...] cada angulo de hum dos triângulos ABC, DEF, terá por medida a semi-circumferência menos o lado oposto de outro triângulo.” (*idem*). Antes de avançar para o Scholio, apresenta-se a Figura 200 (228 o.o.), a qual auxiliará no entendimento deste teorema.

Figura 200 - Auxiliar na interpretação da Proposição X, do Livro VII



Fonte: Legendre (1809b, est.11)

Ao prolongarmos os lados AB e AC, até o encontro de EF em Ge H, o ângulo A, como é polo do arco GH, terá por medida o próprio arco. Porém, o arco EH é quadrante como GF, pois E é polo de AH, e F é o polo de AG; logo EH + GF vale uma semicircunferência. Sabendo-se que EH + GF é o mesmo que EF + GH, o arco GH que mede o ângulo A será igual a uma semicircunferência menos o lado EF. Do mesmo modo o ângulo B terá por medida  $\frac{1}{2} \text{circunferência} - DF$ , e o ângulo C,  $\frac{1}{2} \text{circunferência} - DL$  (LEGENDRE 1809b).

Para concluir o fechamento da ideia desta demonstração, o autor denota o Scholio abaixo:



Cumpramos notar que além do triângulo DEF (fig. 228), poderíamos formar outros três pela intersecção dos três arcos DE, EF, DF. Mas a proposição actual só tem lugar no triângulo central, onde se distingue dos outros três, porque os dois ângulos A e D estão situados da mesma parte de BC (fig. 227), os dois B e E da mesma parte de AC, e os dois C e F da mesma parte de AB. (LEGENDRE 1809b, p.217)

Vale destacar, segundo o autor, que aos triângulos ABC, DEF é dado o nome de triângulos polares.

A proposição XIII, por sua vez, versa sobre triângulos situados sobre esferas iguais ou distintas e chama a atenção para o detalhe de que estes “[...] são iguaes em todas as suas partes, quando tem hum lado igual e adjacente a dois ângulos iguaes cada hum a cada hum.” (LEGENDRE 1809b, p.219)

Acrescenta Legendre (1809b), que esse teorema também pode ser explicado e demonstrado pela sobreposição destes triângulos (ou de um simétrico) assim como no teorema VII do Livro I.

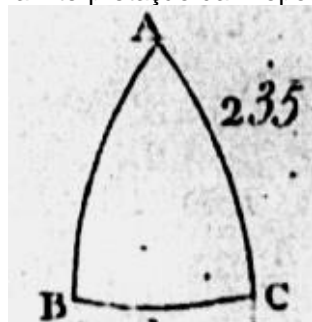
A Proposição XVIII, novamente envolvendo triângulos traçados sobre uma esfera, é assim descrita pelo autor: “[...] Se dois triângulos traçados sobre a mesma esfera ou esferas iguaes forem equiângulos entre si, também hão de ser equiláteros.” (LEGENDRE 1809b, p.222).

A complementação desta ideia é trazida pelo autor no Scholio do teorema. Nesta passagem, o autor alerta que esta proposição não tem validade para triângulos retilíneos, nos quais se pode evidenciar apenas a proporcionalidade dos lados enão a igualdade dos ângulos. (LEGENDRE 1809b).

A Proposição XIX versa sobre a soma dos ângulos em um triângulo esférico onde será sempre “[...] menor que seis e maior que dois ângulos rectos.” (LEGENDRE 1809b, p.224).

Antes de iniciarmos a descrição da demonstração deste teorema, vamos exhibir a Figura 201 (235 o.o.), a qual auxiliará no entendimento não só do teorema, mas, também, dos Corolários I e II:

Figura 201 - Auxiliar na interpretação da Proposição XIX, do Livro VII

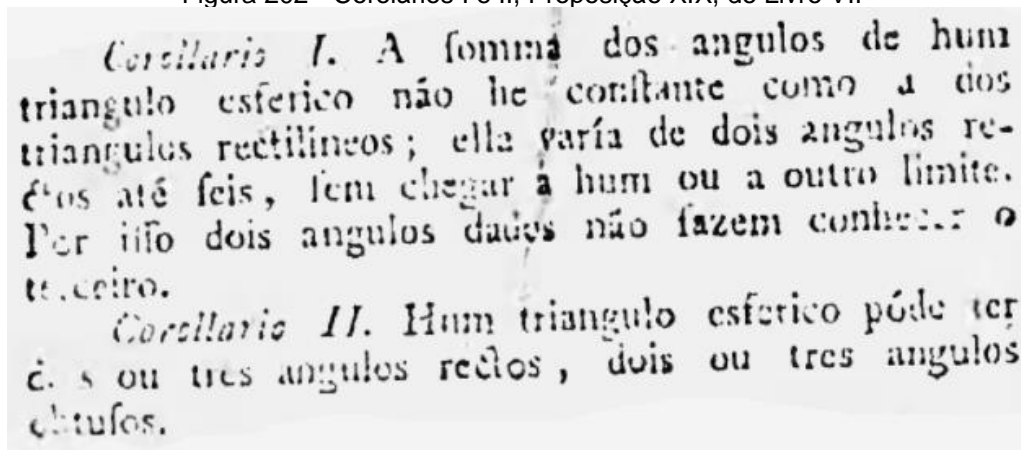


Fonte: Legendre (1809b, est.11)

A afirmativa do autor no teorema acima dá-se principalmente por dois motivos, a saber: 1º cada ângulo de um triângulo esférico é menor que dois ângulos retos, logo a soma dos três ângulos será menor que seis ângulos retos; 2º A medida dos ângulos de um triângulo esférico é igual a semicircunferência menos o lado que corresponde ao triângulo polar. (LEGENDRE 1809b).

Dito isto, não menos importante é observar que os Corolários I e II, presentes na Figura 202 na sequência, complementam a ideia da proposição e dos comentários acima.

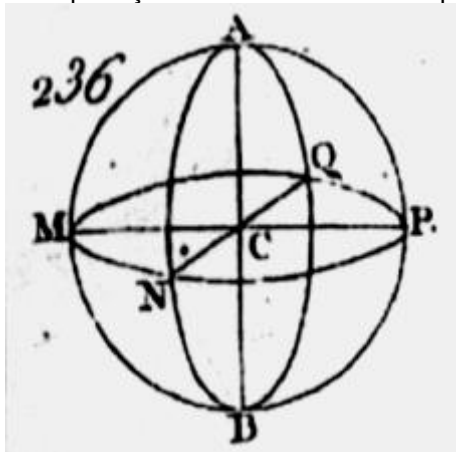
Figura 202 - Corolários I e II, Proposição XIX, do Livro VII



Fonte: Legendre (1809b, p.224)

Complementando a informação dos Corolários, Legendre (1809b), destaca ainda que, caso o triângulo ABC (fig. 168) possuir dois ângulos retos, B e C, por exemplo, o vértice A será o polo da base e os lados AB e AC serão os quadrantes. Analogamente, se o ângulo A também for reto, seus lados serão iguais aos quadrantes, como mostra a Figura 203 (236 o.o.) que segue:

Figura 203 - Auxiliar na interpretação dos Corolários da Proposição XIX, do Livro VII



Fonte: Legendre (1809b, est.11)

O referido triângulo estará contido oito vezes na superfície da esfera, supondo o arco MN igual a um quadrante.

Por fim, o Scholio que segue serve como fechamento da proposição, sobretudo quando, através dele, o autor afirma que a ideia deste teorema é válida para os triângulos esféricos que possuem os lados menores que a semicircunferência. Partindo-se então deste princípio:

Segue-se que os ângulos sempre são menores que dois ângulos rectos. Porque se o lado AB for menor que a semi-circunferência, bem como AC, estes arcos devem ser prolongados ambos para se encontrarem em D. Ora, os dois ângulos ABC, CBD, juntos, valem dois ângulos rectos; logo o ângulo ABC só he menor que dois ângulos rectos. (LEGENDRE 1809b, p.225)

Como última observação é pertinente lembrar que existem triângulos esféricos dos quais alguns lados são maiores que a semicircunferência, e certos ângulos maiores que dois ângulos retos. No entanto, a sua resolução se reduzirá sempre a dos triângulos com compreendidos nesta proposição. (LEGENDRE 1809b)

A Proposição XX disserta sobre os fusos. A Figura de referência para visualização é a 170 e, acerca dela desenvolve-se o estudo deste teorema. Inicialmente, destaca-se o que diz Legendre (1809b, p.226) acerca desta parte da superfície da esfera:

O fuso AMBNA [...] está para a superfície da esfera, como ângulo MAN deste fuso está para quatro ângulos rectos, ou como o arco MN que mede este ângulo está para a circunferência.

Supondo-se que o arco MN está para a circunferência MNPQ em uma razão de 5 para 48. Divide-se então esta circunferência em 48 partes das quais MN contem 5; acrescentando o polo A e pontos de divisão por outros tantos quartos de circunferência, haverá 48 triângulos na semi-esfera AMNPG, os quais serão todos iguais entre si (LEGENDRE 1809b).

Deste modo, a esfera conterá 96 destes triângulos e o fuso AMBNA conterá 10; Assim, o fuso estará para a esfera, assim como 10 está para 96, ou como 5 está para 48 ou como o arco MN está para a circunferência.

Por fim, os Corolários I e II, Figura 204, complementam a ideia do teorema e dos comentários acima:

Figura 204 - Corolários I e II, Proposição XX, Livro VII

*Corollario I.* Dois fusos estão entre si como os seus angulos respectivos.  
*Corollario II.* Já vimos que a superficie inteira da esfera he igual a oito triangulos tri-rectangulos (19.). Logo, se a área de hum desses triangulos se tomar por unidade, a superficie da esfera será representada por 8. Isto posto, a superficie do fuso que tem o angulo em A será expressa por  $2A$  (se o angulo  $A$  for avaliado servindo o angulo recto de unidade); porque temos  $2A : 8 :: A : 4$ . Logo aqui ha duas unidades diferentes; huma para os angulos, que he o angulo recto; outra para as superficies, que he o triangulo esferico tri-rectangulo, ou aquelle que tem todos os angulos rectos e os lados são quartos de circumferencia.

Fonte: Legendre (1809b, p.226-7)

A última etapa de demonstração para esta proposição é dada pelo scholio a seguir. Representado na Figura 205, ele trata da questão dasunhas esféricas:

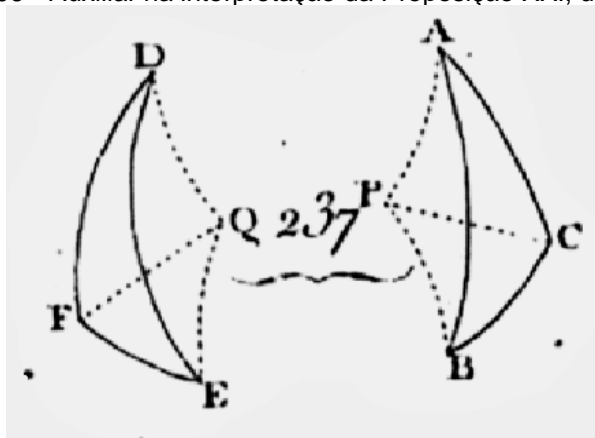
Figura 205 - Scholio, Proposição XX, Livro VII

*Scholio.* A unha esferica comprehendida pelos planos  $AMB$ ,  $ANB$ , está para a solidez total da esfera como o angulo  $A$  está para quatro angulos rectos. Porque, sendo os fusos iguaes, as unhas esfericas serão também iguaes. Logo duas unhas esfericas estão entre si como os angulos formados pelos planos que as comprehendem.

Fonte: Legendre (1809b, p.227)

A Proposição XXI, ilustrada pela Figura 204 (237 o.o.) versa sobre a igualdade dos triângulos esféricos. Para tanto, Legendre (1809b, p.228) afirma que: “Dois triângulos esféricos symmétricos são iguaes em superficie.”. Antes de proceder com os comentários e o Scholio que completa esta proposição, apresenta-se a Figura 206, auxiliar no entendimento da Proposição XXI:

Figura 206 - Auxiliar na interpretação da Proposição XXI, do Livro VII



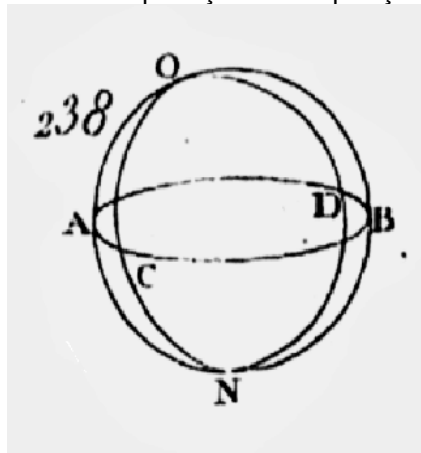
Fonte: Legendre (1809b, est.11)

Nesse Scholio, as ideias de Legendre (1809b) apontam para os polos P e Q situados dentro dos triângulos ABC, DEF; então devemos somar os três triângulos DQF, FQE, DQE para com eles formar o triângulo DEF. Igualmente devemos somar os três triângulos APC, CPB, APB, para formar o triângulo ABC. Em relação aos demais triângulos possíveis, a demonstração é a mesma.

A Proposição XXII, que trata da questão de dois círculos máximos, AOB e COD, que se cortaram “[...] como se quiser no hemisfério AOCBD, a somma dos triângulos AOB, BOD, será igual ao fuso cujo ângulo he BOD.”. Para melhor

visualização e entendimento deste teorema, exhibe-se abaixo a Figura 207 (238 o.o.) para auxiliar no entendimento desta proposição:

Figura 207 - Auxiliar na interpretação da Proposição XXII, do Livro VII

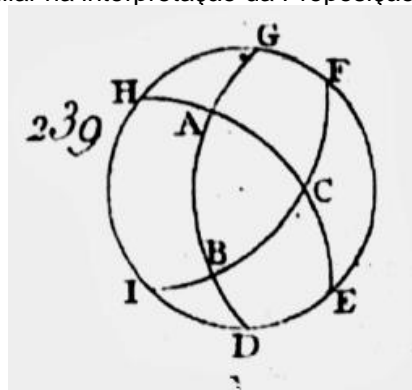


Fonte: Legendre (1809b, est.11)

Ao escrever o Scholio para esta proposição Legendre (1809b) deixa claro que as duas pirâmides esféricas que tem por base os triângulos AOC, BOD, se somadas, equivalem à unha esférica, cujo ângulo é BOD.

A Proposição XXIII, fala da medida da superfície de um triângulo esférico que vem a ser, conforme Legendre (1809b, p. 229): “[...] o excesso da somma dos seus três ângulos sobre dois ângulos rectos.”. A Figura 208 (239 o.o.) é auxiliar no entendimento da proposição e dos Corolários I e II que vem na sequência.

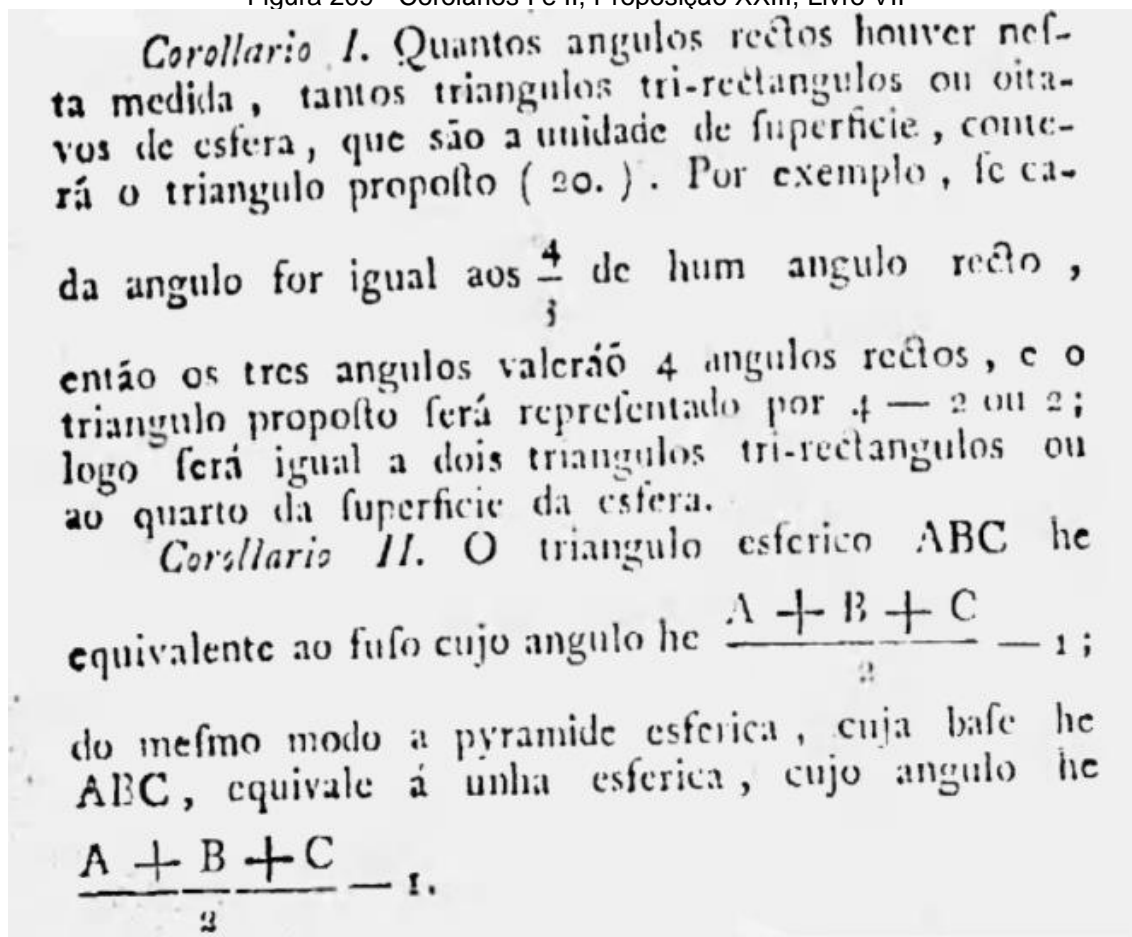
Figura 208 - Auxiliar na interpretação da Proposição XXIII, do Livro VII



Fonte: Legendre (1809b, est.11)

Os Corolários I e II, por sua vez, abordam questões de equivalências de medidas dos ângulos, caso do Corolário I, e com o fuso, Corolário II. Ambos estão representados na Figura 209 que segue abaixo

Figura 209 - Corolários I e II, Proposição XXIII, Livro VII



Fonte: Legendre (1809b, p.230)

Por fim, temos o Scholio deste teorema, onde o autor aponta que o triângulo esférico pode ser comparado com um triângulo tri-retângulo e, a pirâmide esférica também pode ser comparada com uma tri-retângula de base comum. Assim, Legendre (*idem*), observa que:

O ângulo sólido do vértice da pyramide se compara do mesmo modo com o ângulo sólido do vértice da pyramide tri-rectangula: com effeito, a comparação se estabelece pela coincidência das partes. Ora, se as bases das pyramides coincidirem, he evidente que as mesmas pyramides concidirão, bem como os ângulos no vértice.

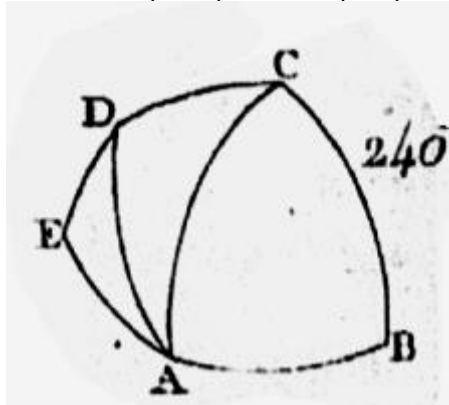
Por fim, aponta ainda o autor, O angulo no vértice da pirâmide tri-retangularé formado por três planos perpendiculares entre si. Este ângulo, ao

qual chamamos ângulo sólido reto, é muito próprio para servir de unidade de medida aos outros ângulos sólidos. Isto posto temos que o mesmo valor que é encontrado para a área do polígono esférico, será a medida do ângulo sólido correspondente. (LEGENDRE, 1809b)

A Proposição XXIV apresenta uma forma de definir a superfície externa de um polígono esférico que será dada, conforme Legendre (1809b, p.231), pela soma “[...] dos seus ângulos, menos o produto de dois ângulos rectos pelo número de lados do polyedro menos dois.”

Antes do Scholio da Proposição, apresentamos a Figura 210 (240 o.o.), a partir da qual será traçado além do vértice A as diagonais AC, AD; o polígono ABCDE ficará repartido em tantos triângulos quantos forem os seus lados, diminuído de dois.

Figura 210 - Auxiliar na interpretação da Proposição XXIV, do Livro VII



Fonte: Legendre (1809b, est.11)

O scholio a seguir trata da determinação da medida da superfície de um polígono esférico. Legendre (1809b, p.231-2) assim escreveu: “Seja [...],  $n$  o número dos seus lados; supondo que o ângulo reto é a unidade, a superfície do polígono terá por medida  $s - 2(n - 2)$ , ou  $s - 2n + 4$ .”

A Proposição XXV também trata das questões de relações entre o número de lados e medidas. Legendre (1809b, p.232) afirma que: “Seja  $S$  o número de ângulos sólidos de hum polyedro,  $H$  o número de suas faces,  $A$  o número das arestas; digo que será sempre  $S + H = A + 2$ .”

A partir dos estudos de Legendre (1809b) para esta proposição, da visualização da Figura 177, e de seu poliedro ABCDE (sendo  $n$  o número de lados), pode-se concluir que do polígono em questão, a sua superfície será –



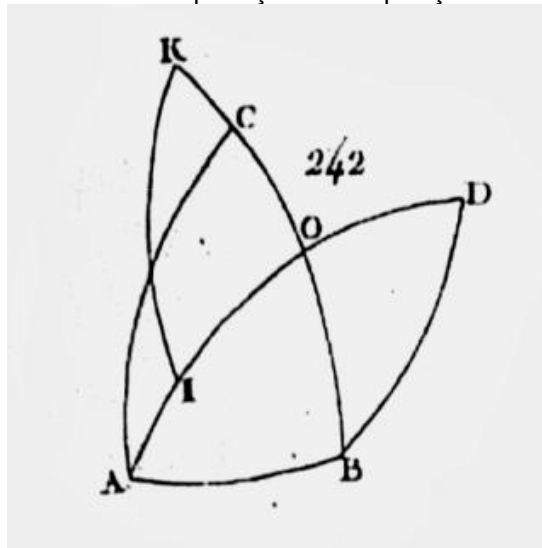
$2n + 4$ , sendo  $s$  a soma dos ângulos  $A, B, C, D, E$ . Segue o autor, observando que, como todos os ângulos tem a origem no ponto  $A$ , estes valem quatro ângulos retos; e a soma de todos os ângulos dos polígonos é igual a  $4$ , tomado tantas vezes quantas sejam os ângulos sólidos o que é igual a  $4S$ . Depois disso, o dobro do número dos lados  $AB, BC, CD$ , etc, é igual ao quádruplo do número das arestas ou  $4A$ , pois a mesma aresta serve de lado à duas faces. Logo teremos  $8 = 4S - 4A + 4H$ . Simplificando por  $4$ , teremos a fórmula apontada no teorema:  $S + H = A + 2$ .

Por fim, a Proposição XXVII é aquela onde o autor aborda a questão de como descobrir qual é o maior dos triângulos esféricos em um dado polígono. Para tanto, no teorema desta proposição Legendre (1809b, p.236) afirma que:

De todos os triângulos esféricos formados com hum lado dado e hum perímetro dado, o maior he aquele no qual os dois lados não determinados são iguaes.

Para este teorema, a Figura 211 (242 o.o.) será auxilio importante para a visualização e entendimento daquilo que é proposto. Dessa forma, segue baixo:

Figura 211 - Auxiliar na interpretação da Proposição XXVII, do Livro VII



Fonte: Legendre (1809b, est.11)

A demonstração desse teorema será apresentada na forma de comentários, Figura e citações pois entendemos que, por ser extensa, correríamos o risco, em utilizando apenas um método, de ou fazer uma longa

transcrição do autor, ou de apenas colar uma Figura que contenha todo o texto necessário.

Assim, considere-se, como Legendre (1809b), AB o lado dado (fig. 177), comum aos dois triângulos ACB, ADB e, considerando que  $AC + CB = AD + DB$ ; pode-se crer que o triângulo isóscele ACB, no qual  $AC = CB$ , é maior que o não isóscele ADB. Isso pode ser afirmado porque, como estes triângulos tem a parte comum AOB, é suficiente mostrar que o triângulo BOD é menor que AOC. O ângulo CBA é maior que OAB e assim “[...] o lado AO he maior que OB; tome-se  $OI = OB$ , faça-se  $OK = OD$ , e tire-se KI; o triângulo OKI será igual a DOB.” (LEGENDRE 1809b, p.236-7).

Os triângulos DOB e KOI (iguais) serão maiores ou iguais a OAC, pois, como o ponto I, que está entre os pontos A e C, o ponto K ficará sobre o prolongamento de OC. Do contrário, o triângulo OKI estaria contido no triângulo CAO, e por consequência seria menor. (LEGENDRE 1809b).

Isso exposto e considerando CA o mais curto caminho de C para A, mostraremos na Figura 212 os desdobramentos a partir desse pressuposto:

Figura 212 - Desdobramentos a partir da afirmativa de CA

$CK + KI + IA > CA$ . Mas  $CK = OD - CO$ ,  
 $AI = AO - OB$ ,  $KI = BD$ ; logo  $OD - CO +$   
 $AO - OB + BD > CA$ , e reduzindo,  $AD - CB$   
 $+ BD > CA$ , ou  $AD + BD > AC + CB$ .

Fonte: Legendre (1809b, p.237)

Por fim, se esta desigualdade contraria a hipótese  $AD + BD = AC + CB$ , então o ponto K não pode estar situado no prolongamento de OC; deste modo, deverá estar entre O e C e, também, o triângulo KOI, ou o triângulo ODB, será menor que ACO; Conclui-se, então, que o triângulo isóscele ACB é maior que o não isóscele ADB de mesma base e de mesmo perímetro.

Após a apresentação das Definições e Proposições do Livro VII, procede-se com a apresentação da Proposição e do teorema do Apêndice aos Livros VI e VII (localizado no final deste capítulo da obra consultada) e alguns comentários a respeito dos problemas propostos (também relativos aos Livros VI e VII).

Desta forma, mostra-se a seguir a Proposição I, a qual trata da quantidade de poliedros regulares, onde Legendre (1809b, p.239) afirma que: “Não pode haver mais que cinco polyedros regulares.”. Esta afirmativa decorre do fato que ao definir poliedros regulares como “[...] aquelles dos quaes todas as faces são polygonos regulares iguaes, e todos os ângulos sólidos são iguaes entre si.” (*idem*) o autor limita as Figuras às condições que podem ocorrer em apenas três casos a saber:

1.º Se as faces forem triângulos equiláteros, pode-se formar cada ângulo sólido do polyedro com três ângulos destes triângulos, ou com quatro, ou com cinco. Daqui nascem três corpos regulares, que são o tetraedro, o octaedro, e o icosaedro. Com triângulos equiláteros não se podem tornar mais do que estes, porque seis ângulos destes triângulos valem quatro ângulos rectos, e não podem formar ângulo sólido.

2.º Se as faces forem quadrados, se poderão ajuntar os seus angulos três a três; e daqui resulta o hexaedro ou cubo. Quatro ângulos de quadrados valem quatro ângulos rectos, e nisto podem formar ângulo sólido.

3.º Finalmente, se as faces forem pentágonos regulares, se poderão também ajuntar os seus ângulos três a três, e daqui resultará o dodecaedro regular. (LEGENDRE 1809b, p.239-0)

O autor conclui seus estudos acerca desta proposição constatando que não é possível avançar mais, porque três ângulos de hexágonos regulares valem quatro ângulos retos; três de heptágonos ainda mais, logo não se pode formar mais de cinco poliedros regulares, sendo três com triângulos equiláteros, um com quadrados e outro com pentágonos. (LEGENDRE 1809b).

No que diz respeito aos Problemas trabalhados no Livro Apêndice, o autor trabalha os conceitos expostos nos dois livros citados. Assim sendo, todos os três problemas envolvem os poliedros regulares em situações como a sua construção, medição da inclinação de faces adjacentes e, por último, encontrar o raio de uma esfera inscrita e de uma circunscrita. Maiores comentários a respeito destes entende-se, neste momento, de menor necessidade, o que não quer dizer que não devam ser feitos em outro momento, dada a sua relevância.

Após a apresentação dos estudos sobre o Livro VII, finalizamos os estudos deste capítulo dos *Elementos de Geometria* de Legendre (1809b) para, na sequência, apresentarmos o nosso estudo do Livro VIII.

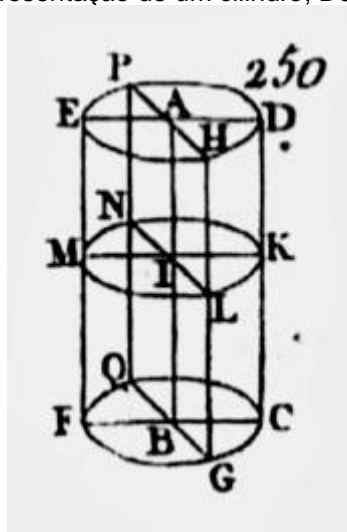
#### 5.4.8 O Livro VIII

A oitava, e última, dentre as oito divisões dos *Elementos de Geometria* de Legendre (1809b) – os Três Corpos Redondos - inicia com seis definições sobre o cilindro, o cone e a esfera, suas variações, bem como as grandezas envolvidas. Na sequência, páginas 251 a 283, o autor expressa em XIX Proposições sobre os temas de estudo deste capítulo.

Antes de destacar as Proposições, seus lemmas e Teoremas, destaca-se que este Livro apresenta igualmente aos anteriores algumas de suas partes com visibilidade prejudicada, as quais não serão objeto de estudo e/ou comentários. Isto será percebido na ordem das proposições apresentadas.

Assim, apresentamos a Definição I, qual traz o conceito de cilindro que, segundo Legendre (1809b, p.249) é “[...] o sólido produzido pela revolução de um rectângulo ABCD [...] que se imagina girarem torno do lado immoveel AB”. Para melhor visualização e compreensão desta definição, apresenta-se a seguir a Figura 213 (250 o.o.), a qual traz consigo as coordenadas citadas acima:

Figura 213 - Representação de um cilindro, Definição I, Livro VIII



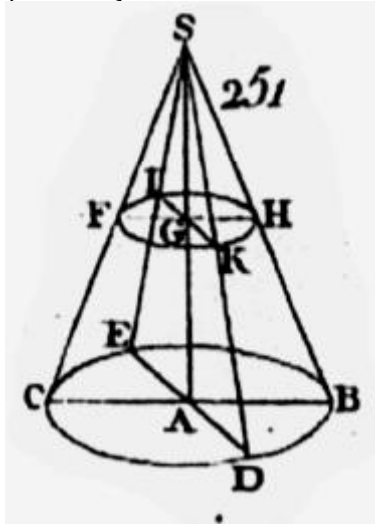
Fonte: Legendre (1809b, est.12)

É necessário observar ainda que nesta rotação os lados AD e BC permanecem perpendiculares a AB, descrevendo os planos circulares DHP e CGQ, chamamos de base do cilindro e o lado CD descreve a superfície convexa. A linha AB, estática, chamamos de eixo do cilindro.

A Definição II versa sobre o conceito de cone, onde Legendre (1809b, p.249) afirma que esta Figura é “[...] o sólido produzido pela revolução do triângulo reíngulo SAB [...] que se imagina girar em torno do lado immoveel SA.”.

Como no exemplo da definição anterior, apresenta-se a seguir a Figura 214 (251 o.o.), a qual traz consigo as coordenadas citadas acima:

Figura 214 - Representação de um cone, Definição II, Livro VIII



Fonte: Legendre (1809b, est.12)

Acrescenta-se à definição II que, no movimento imaginário de rotação, o lado AB descreve um plano circular BDCE formando o que chamamos de base do cone. A hipotenusa SB descreve a superfície convexa, o ponto S se chama vértice, SA é o eixo da altura e, por fim SB lado ou apótema.

A Definição III, que também faz referência à Figura 181, disserta sobre o tronco do cone, que conforme Legendre (1809b, p.250), é formado “[...] se do cone SCDB tirarmos, por uma secção paralela à base, o cone SKFH [...]”, neste caso, o sólido restante CBHF é o sólido desejado<sup>101</sup>.

Por sua vez, a Definição IV - semelhança entre dois cones é descrita sucintamente pelo autor e ocorre “[...] quando os seus eixos estão entre si como os diâmetros das suas bases.” (*idem*)

A Definição V disserta sobre a inscrição e a circunscricção de um prisma reto em um cilindro. Aqui, Legendre (*ibidem*) observa que:

Se no círculo ACD [...] que serve de base a hum cylindro, inscrevemos hum polygono ABCDE, e sobre a base ABCDE levantarmos hum prisma recto igual em altura ao cylindro, o prisma se chama *inscrito no cylindro*, ou o *cylindro circunscrito* ao prisma.

<sup>101</sup> Também podemos supor que o tronco do cone é obtido a partir da rotação do trapézio ABHG, que tem os ângulos A e G retos, em torno do lado AG. A linha estática AG se chama eixo ou altura do tronco, os círculos BDC e HKF são as bases e, BH o lado. (LEGENBRE, 1809b)

Destaca ainda Legendre (1809b) que as arestas AF, BG e CH do prisma, que são perpendiculares ao plano da base são compreendidas na superfície convexa do cilindro; Desta forma, o prisma e o cilindro se tocam na direção destas arestas.

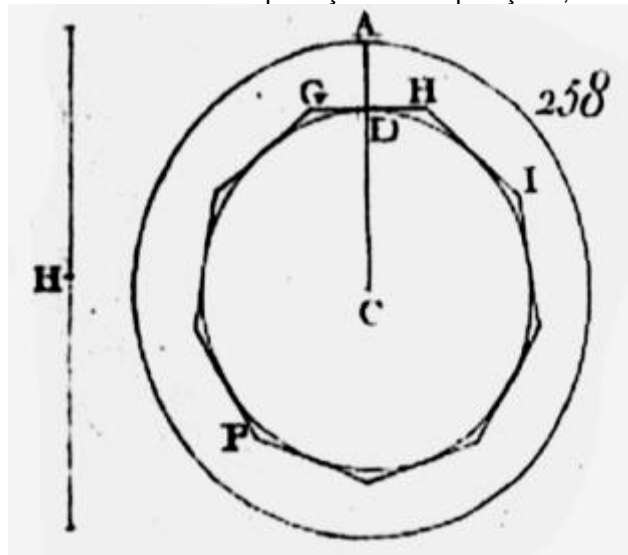
Por fim, na Definição VI o autor observa outra possibilidade que é o cilindro inscrito no prisma ou, o prisma circunscrito ao cilindro. Desta maneira:

Se ABCD [...] for hum polygono circunscrito a base de hum cylindro, e sobre a base ABCD constuirmos hum prisma recto igual em altura ao cylndro, o prisma se chama *circunscrito ao cylindro* ou o *cylndro inscrito no prisma*. (LEGENDRE 1809b, p.250)

A seguir, apresenta-se as Proposições e seus respectivos lemmas e Teoremas. Atentamos novamente para o fato de que aquelas que não forem encontradas mais adiante não foram estudadas por motivos expostos anteriormente de legibilidade prejudicada.

A Proposição I aborda o tema da solidez de um cilindro, que vem a ser, conforme Legendre (1809b, p.253) “[...] o prouto da sua base pela sua altura.”. Para suportar esse teorema, apoia-se na Figura 215 (258 o.o.), a qual apresenta as coordenadas dos comentários que a sucedem:

Figura 215 - Auxiliar na interpretação da Proposição I, do Livro VIII



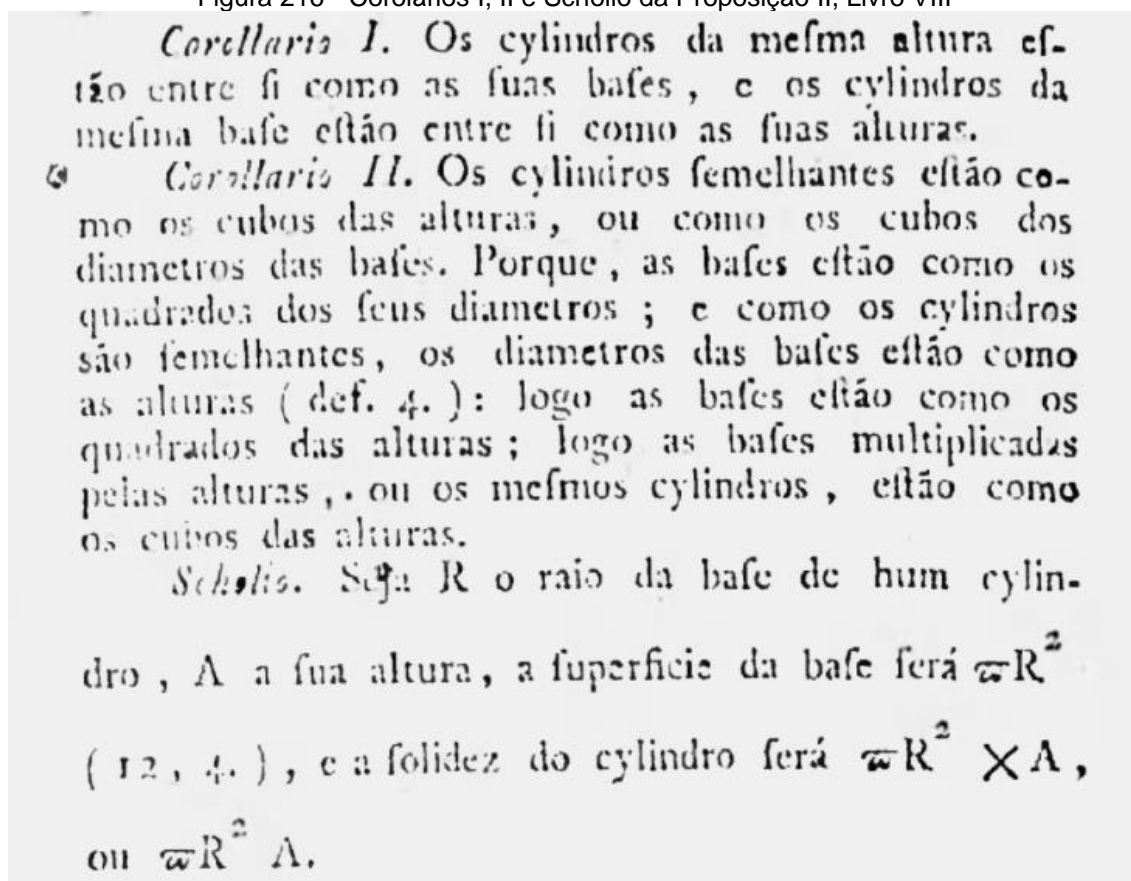
Fonte: Legendre (1809b, est.12)

Com complemento à proposição I, o autor enfatiza que se CA é o raio da base do cilindro dado e A é a altura, pode-se atribuir o argumento “*superf. CA*” à

superfície do círculo do qual CA é o raio. Assim, a “solidez” do cilindro será dada por  $\text{perf.} \times CA \times A$  (LEGENDRE, 1809b).

Para maior esclarecimento, principalmente em relação ao termo apresentado pelo autor, “solidez”, apresentamos a seguir, por meio da Figura 216, os Corolários I e II, e o Scholio desta proposição:

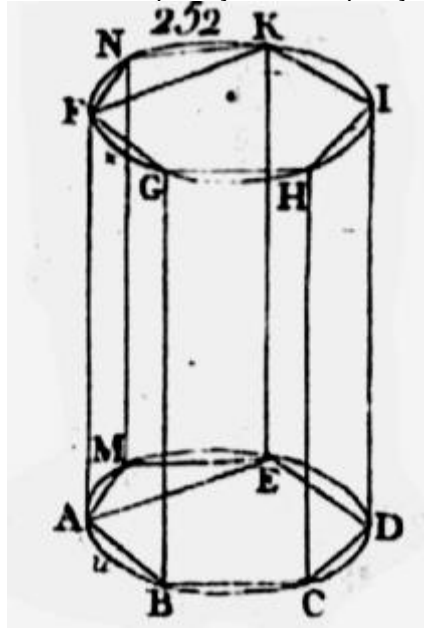
Figura 216 - Corolários I, II e Scholio da Proposição II, Livro VIII



Fonte: Legendre (1809b, p.255)

A Proposição II traz consigo o seguinte lemma: “A superfície convexa de hum prisma recto he igual ao perímetro da sua base multiplicado pela sua altura.” LEGENDRE (1809b, p.255). Para melhor ilustrar este lemma, apresenta-se a Figura 217 (252 o.o.), a qual servirá de base para comentários e observações adicionais:

Figura 217 - Auxiliar na interpretação da Proposição II, do Livro VIII



Fonte: Legendre (1809b, est.12)

A superfície da Figura 217 será igual à soma dos ângulos AFG, B, BGHC, CHID; as alturas AF, BG, CH, etc dos retângulos são iguais à altura do prisma e as suas bases AB, BC, CD, etc, juntas formam o perímetro da base do prisma. Logo a soma destes retângulos é igual ao perímetro da base multiplicada pela altura.

A Proposição III, em seu lemma, é trazida por Legendre (1809b, p.256) com a seguinte afirmação:

A superfície convexa do cilindro he maior que a superfície convexa de qualquer prisma inscrito, e menor que a superfície convexa de qualquer prisma circunscrito

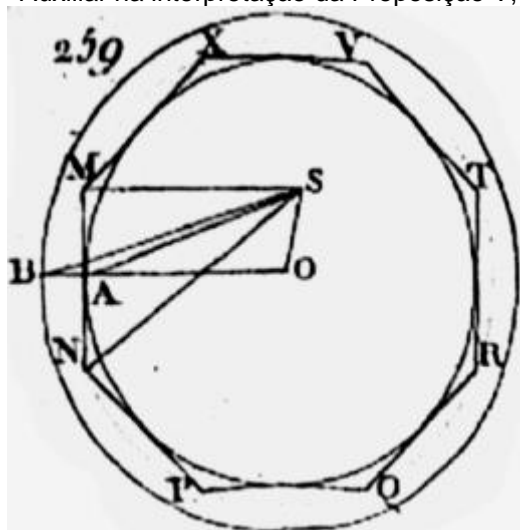
A superfície convexa do cilindro e do prisma inscrito ABCDEF (fig.184) podem ser observadas e consideradas como de comprimento igual, pois toda a secção feita em ambas, paralela à AF, é igual a AF. Corrobora com isso o fato de que, se para obtermos as larguras destas superfícies as cortarmos em planos paralelos à base ou perpendiculares à AF, suas secções serão iguais, sendo uma delas à circunferência da base e a outra ao contorno do polígono ABCDE (LEGENDRE 1809b).

Por fim, como em comprimentos iguais, a largura de superfícies cilíndricas é maior que a de superfícies prismáticas, conclui-se que as superfícies cilíndricas são maiores que as superfícies prismáticas.



A Proposição V, ancorada na Figura 185 (259 o.o.), discute a solidez do cone, onde Legendre (1809b, p.258) indica que esta “[...] he igual ao produto da sua base pelo terço da sua altura.”. Para melhor visualização e entendimento, segue abaixo a Figura 218, a qual servirá de base para comentários e observações que se sucederão:

Figura 218 - Auxiliar na interpretação da Proposição V, do Livro VIII



Fonte: Legendre (1809b, est.12)

O Corolário deste teorema é trazido por Legendre (1809b, p.159) onde o autor afirma que “Hum cone he o terço de hum cylindro de mesma base e da mesma altura [...]”. Ainda a respeito deste enunciado, expostas abaixo na Figura 219, são feitas pelo autor as seguintes considerações:

Figura 219 - Considerações acerca do Corolário da Proposição V, Livro VIII

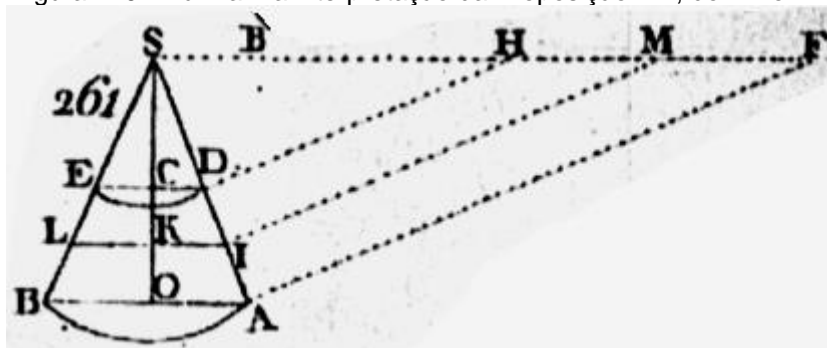
- 1.º Que os cônes de alturas iguaes estão entre si como as suas bases:
- 2.º Que os cônes de bases iguaes estão entre si como as suas alturas:
- 3.º Que os cônes semelhantes estão como os cubos dos diâmetros das suas bases, ou como os cubos das suas alturas.

Fonte: Legendre (1809b, p.260)

Para finalizar a análise da Proposição V, o Scholio faz a seguinte afirmação: “Seja R o raio da base de hum cone, A esua altura; a solidez do coneserá  $\pi R^3 * \frac{1}{3} A$  ou  $\frac{1}{3} R^2 * A$ ” (LEGENDRE 1809b, p. 260)

A Proposição VIII discorre sobre asuperfície convexa do tronco do cone. Aqui, Legendre (1809b, p.264) afirma que “A superfície [...] ADEB [...] he igual ao seulado AD multiplicada pela semi-somma das circumferências das suas duas bases AB,DF.” Para a visualização e, o amparo estudo deste teorema a Figura 220 (261 o.o.) é disponibilizada abaixo:

Figura 220 - Auxiliar na interpretação da Proposição VIII, do Livro VIII



Fonte: Legendre (1809b, est.12)

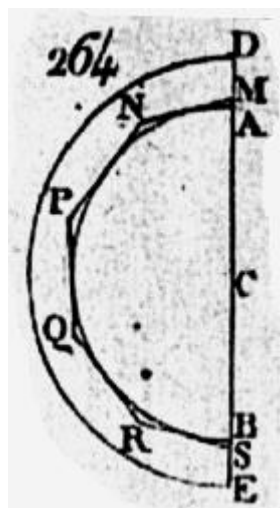
No que se refere ao Corolário deste teorema, Legendre (*idem*) demonstra que: “a superfície de hum tronco de cone he igual ao seu lado multiplicado pela circumferência de huma secção feita emigual distância das duas faces”.

Isso pode ser provado quando pelo ponto I meio de AD, é traçada uma reta KL paralela a AB, e IM paralela a AF;isso demonstra que IM é igual à sua circular IK. Com isso, também podemos concluir que o trapézio ADHF = AD x IM = AD x circular IK.

A Proposição X e seu teorema trazem a questão da medida da superfície da esfera, onde Legendre (1809b, p.266) afirma que esta “[...] he igual ao seu diâmetro multiplicado pela circumferência de hum círculo máximo.”

A partir dessa afirmação do autor, busca-se o auxílio da Figura 221 (264 o.o.) para a visualização das coordenadas que são citadas no Corolário e que sucede a apresentação da imagem:

Figura 221 - Auxiliar na interpretação da Proposição X, do Livro VIII

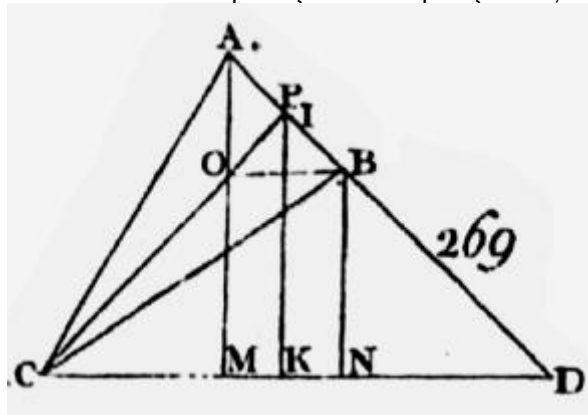


Fonte: Legendre (1809b, est.12)

Conforme anunciado no parágrafo antecedente à imagem 187, apresentamos o Corolário referente a este teorema, o qual aborda a questão de “como se medir a superfície do círculo máximo”. Desta forma, o autor aponta que, a obtenção desta medida é obtida “[...] multiplicando a sua circunferência pela metade do raio ou o quarto do diâmetro; logo a superfície da esfera he quadrupla da de hum circula máximo.”. (LEGENDRE 1809b, p. 267)

A Proposição XII e seu teorema versam sobre a forma de obtenção de uma zona esférica que, segundo Legendre (1809b, p.269) “[...] he igual à altura desta zona multiplicada pela circunferência de hum círculo máximo.”. A Figura 222 (271 o.o.) nos auxilia visualmente e na compreensão do Corolário e seus comentários que a sucedem:

Figura 222 - Auxiliar na interpretação da Proposição XII, do Livro VIII



Fonte: Legendre (1809b, est.12)

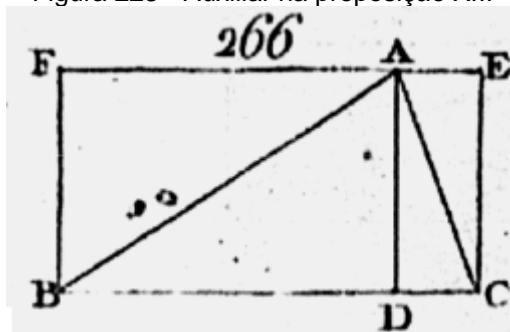
Observando o arco AB (fig. 221) e traçando-se BD perpendicular sobre o raio AC, pode-se afirmar que a zona descrita pela rotação do arco AB em torno de AC terá por medida  $AD \times$  circular AC.

Dessa forma, através do corolário, Legendre (1809b) complementa o teorema, propondo que duas zonas esféricas estão para si, assim como as suas alturas e, uma zona esférica qualquer estará para a superfície da esfera, assim como a sua altura estará para o diâmetro.

A Proposição XIII, por meio das Figuras 221 e 222 (respectivamente 266 e 267 o.o.) e do seu teorema descreve uma rotação de um triângulo retângulo BAC e um retângulo BCEF de base comum BC. Dito isto, o sólido resultante deste movimento é assim descrito em Legendre (1809b, p.271): “[...] o sólido descrito pela revolução do triângulo será o terço do cilindro descrito pela revolução do rectângulo.”.

A seguir, e antes de avançar, apresenta-se as Figuras 189 e 190 para, a sequência, procedermos com os comentários e, apresentação do scholio relativo a este teorema.

Figura 223 - Auxiliar na proposição XIII

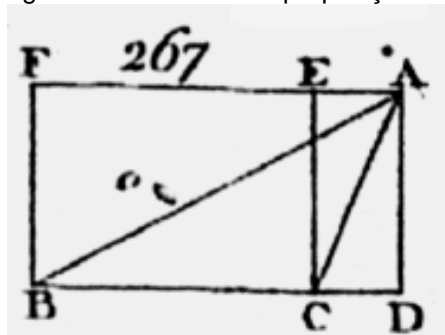


Fonte: Legendre (1809b, est.12)

Conforme a ideia do autor, ao traçar uma perpendicular AD sobre o eixo CB, o cone descrito pelo triângulo ABD será a terça parte do cilindro determinado pelo retângulo AFDB, do mesmo modo o cone descrito pelo triângulo ADC será a terça parte do cilindro determinado pelo retângulo ADCE; Conclui-se então que a soma dos dois cones ou o sólido descrito por ABC é a terça parte da soma dos dois cilindros ou do cilindro descrito pelo retângulo BCEF.

Na sequência, apresentamos a Figura 224 para complementar a ideia do teorema referente à proposição XIII:

Figura 224 - Auxiliar na proposição XIII



Fonte: Legendre (1809b, est.12)

Ao observar a Figura 224, e vislumbrar a possibilidade da perpendicular AD alongar-se para fora do triângulo, então o sólido determinado por ABC seria a diferença entre os cones descritos por ABD e ACD. Mas, ao mesmo tempo, o cilindro caracterizado por BCEF seria a diferença dos cilindros descritos por AFBD e AECD. Analogamente ao primeiro caso, conclui-se então que o sólido descrito pela revolução do triângulo será sempre a terça parte do cilindro descrito pela revolução do retângulo, da mesma base e da mesma altura (LEGENDRE, 1809b).

Finalizando o estudo da proposição XIII, há o scholio<sup>102</sup> seguinte, que Legendre (1809b, p. 272) assim descreve:

O círculo, cujo raio he AD tem por superfície  $\pi * \overline{AD}^2$  ; Logo  $\pi * \overline{AD}^2 * BC$  he a medida do cilindro descrito por BCEF, e  $\frac{1}{3} \pi * \overline{AD}^2 * BC$  he a medida do sólido descrito pelo triângulo ABC.

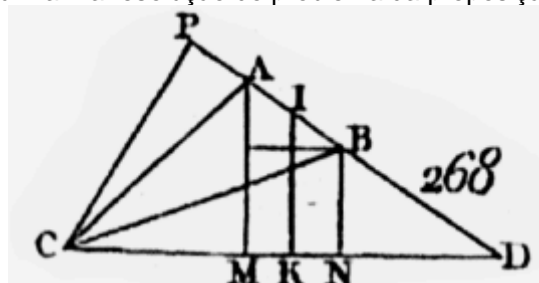
A Proposição XIV, por sua vez, visa analisar o resultado da rotação de um dado triângulo CAB, sobre uma linha CD. Para isso, o problema proposto por Legendre (1809b, p.272) é apresentado a seguir:

Suppondo que o triângulo CAB [...] faz huma revolução em torno da linha CD, tirada arbitrariamente fora do triângulo pelo seu vértice C, achar a medida do sólido gerado desta maneira.

<sup>102</sup> Neste scholio, devido ao uso de caracteres especiais, substituímos o símbolo da multiplicação "x" pelo símbolo "\*". Esta medida visa não confundir o símbolo da operação com uma eventual incógnita.

Antes de apresentar a solução, é necessário centrar o estudo deste problema na Figura 225 (269 o.o.) a qual apresenta as características citadas no enunciado.

Figura 225 - Auxiliar na resolução do problema da proposição XIV, Livro VIII



Fonte: Legendre (1809b, est.12)

Para apresentar a resolução deste problema, lançamos mão das Figuras 226 e 227, as quais trazem, na íntegra, o seu desenvolvimento. Primeiramente, na Figura 226, apresenta-se a parte I da resolução:

Figura 226 - Parte I da resolução do problema da proposição XIV

Prolongue-se o lado AB até encontrar o eixo CD em D, dos pontos A e B abaixem-se sobre o eixo as perpendiculares AM, BN.

O sólido descrito pelo triângulo ADC tem por medida (13.)  $\frac{1}{3} \pi \times \overline{AM}^2 \times CD$ ; o sólido descrito pelo triângulo CBD tem por medida  $\frac{1}{3} \pi \times \overline{BN}^2 \times CD$ ; logo a diferença destes sólidos ou o sólido descrito por ABC terá por medida  $\frac{1}{3} \pi \times (\overline{AM}^2 - \overline{BN}^2) \times CD$ .

Póde-se dar a esta expressão outra forma. Do ponto I, meio de AB, tire-se IK perpendicular a CD, e pelo ponto B tire-se BO paralela a CD, teremos  $AM + EN = 2IK$  (7, 3.) e  $AM - BN = AO$ ; logo  $(AM + BN) \times (AM - BN)$ , ou

Fonte: Legendre (1809b, p.272-3)

Na sequência, por meio da Figura 227, apresenta-se a parte II da resolução proposta pelo autor para o problema da proposição XIV. Note que, por sua extensão e complexidade, esta resolução ocupa mais de uma página, o que ajuda a justificar a opção por este recurso:

Figura 227 - Parte II da resolução do problema da proposição XIV

$\overline{AM}^2 - \overline{BN}^2 = 2IK \times AO$  (10, 5.). Logo a medida do solido de que se trata he expressa tambem por  $\frac{2}{3} \varpi \times IK \times AO \times CD$ . Mas se abaixarmos CP perpendicular sobre AB, os triangulos ABO, DCP, serão semelhantes, e darão a proporção  $AO : CP :: AB : CD$ ; donde resulta  $AO \times CD = CP \times AB$ ; por outra parte CP  $\times$  AB he o dobro da área do triangulo ABC; assim temos  $AO \times CD = 2ABC$ ; logo o solido descrito pelo triangulo ABC tambem tem por medida  $\frac{4}{3} \varpi \times ABC \times KI$ , ou, que he o mesmo,  $ABC \times \frac{2}{3} circ. KI$ ; ( porque  $circ. IK = 2\varpi. IK$  ).

Fonte: Legendre (1809b, p.273)

Após apresentar a solução do problema da proposição XIV na demonstração acima (partes I e II), concluímos com Legendre (1809b, p.273), afirmando que:

O sólido descrito pela revolução do triangulo ABC, tem por medida a área deste triângulo multiplicada pelos dois terços da circunferência que descreve o ponto I, meio da sua base.

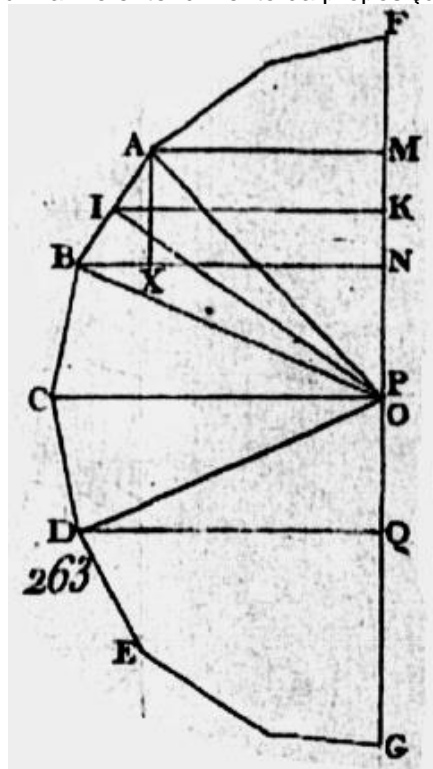
A proposição XV é apresentada por Legendre (1809b, p.275) sob o seguinte teorema:

Sejão AB, BC, CD [...] muitos lados sucessivos de hum polygono regular, O o seu centro, e OI o raio do círculo inscrito; se imaginarmos que o sector polygonal AOD, situado na mesma parte do diametro FG,

faça huma revolução em torno deste diâmetro, o sólido descrito terá por medida  $\frac{2}{3}\pi * \overline{OI}^2 * MQ$ , sendo MQ aporção do eixo terminada pelas perpendiculares extremas AM, DQ.

Para facilitar o entendimento e melhor visualização das características descritas acima, apresentamos a Figura 226 (263 o.o.) a qual nos auxiliará na compreensão do teorema da proposição XV:

Figura 228 - Auxiliar no entendimento da proposição XV, Livro VIII



Fonte: Legendre (1809b, est.12)

Para demonstrar que a sua proposição é verdadeira, Legendre (1809b), sugere que, como o polígono em questão é regular, os triângulos AOB, BOC, COD, etc são iguais e isósceles. Desta forma, o sólido gerado pelo triângulo isóscele AOB tem por medida  $\frac{2}{3}\pi * \overline{OI}^2 * MN$ , o sólido descrito pelo ângulo BOC tem por medida  $\frac{2}{3}\pi * \overline{OI}^2 * NP$  e, o sólido descrito pelo triângulo COD tem pro medida  $\frac{2}{3}\pi * \overline{OI}^2 * PQ$ . A soma destes sólidos terá por medida  $\frac{2}{3}\pi * \overline{OI}^2 * MQ$ .  
(LEGENDRE, 1809b)





raios das bases do segmento e, EF a sua altura; o segmento produzido pela rotação do círculo BMDEF em torno do eixo EF. O autor ainda considera que, se uma das bases for nula, o segmento do qual estamos tratando será esférico de uma só base. Assim, conclui ele, “[...] todo o segmento esférico de uma só base tem por valor a metade do cilindro da mesma da mesma base e da mesma altura.” (LEGENDRE 1809b, p. 282).

Por fim, no scholio deste teorema, o autor aponta os métodos para apontar a solidez de um cilindro, de um cone, de uma esfera, de um setor esférico e, com segmento de uma base. Para apresentação destes métodos, apresentamos abaixo a Figura 230.

Figura 230 - Considerações acerca do scholio da proposição XIX

Seja  $R$  o raio da base de hum cylindro,  $A$  a sua altura; a folidez do cylindro será  $\varpi R^2 \times A$ , ou  $\varpi R^2 A$ .

Seja  $R$  o raio da base de hum cône,  $A$  a sua altura, a folidez do cône será  $\varpi R^2 \times \frac{1}{3} A$ , ou  $\frac{1}{3} \varpi R^2 A$ .

Seja  $R$  o raio de huma esfera a sua folidez será  $\frac{4}{3} \varpi R^3$

Seja  $R$  o raio de hum sector esférico,  $A$  a altura da zona que lhe serve de base; a folidez do sector será  $\frac{2}{3} \varpi R^2 A$ .

Sejam  $P$  e  $Q$  as duas bases de hum segmento esférico,  $A$  sua altura, a folidez deste segmento será  $\left(\frac{P+Q}{2}\right) \cdot A + \frac{1}{6} \varpi A^3$ .

Se o segmento esférico tiver só huma base  $P$ , sendo a outra nulla, a sua folidez será  $\frac{1}{2} PA + \frac{1}{6} \varpi A^3$ .

Fonte: Legendre (1809b, p.282-3)

Com a Figura 230, encerra-se o estudo da obra *Os Elementos de Geometria* de Legendre (1809b). Na sequência, busca-se o fechamento das análises das obras aqui trabalhadas.

#### **5.4.9 Análises e reflexões acerca dos *Elementos de Trigonometria***

A obra analisada, composta de 398 páginas, igualmente às anteriores traduzidas para a língua portuguesa por ordem de “Sua Alteza Real”, o príncipe regente, para uso dos alunos da Real Academia Militar, foi impressa em 1809<sup>103</sup>, pela Impressão Régia, a qual foi fundada por D. João e funcionou com o principal elemento de difusão de obras impressas em território brasileiro naquele período.

Assim, ao proceder com o exame da obra, que foi dividida em oito subdivisões, as quais o autor chamou de Livros. Assim, optou-se por utilizar, para esta análise, a mesma nomenclatura oficial, apresentando as suas características.

Dessa forma, no Livro I o autor primeiramente define o que é a Geometria. Após essa definição, ele faz um apanhado dos termos e definições que ele próprio utilizou no decorrer da obra, funcionando assim, como se fosse um Glossário da Geometria. Feito isso, Legendre (1809b) avança por meio de suas Proposições, acompanhadas de seus Teoremas, para questões conceituais sobre os ângulos, as retas e os casos do paralelismo e, da perpendicularidade, igualdade e semelhança entre triângulos – estudo dos lados e dos ângulos, e os quadriláteros. Todas estas proposições e seus respectivos Teoremas são acompanhados pelas demonstrações apontando para o rigor matemático que Legendre (1809b) se propunha ao escrever a sua Obra Elementar de Geometria, contrariando assim a tendência francesa à época ancorada, principalmente, nos estudos de Bézout.

No Livro II o autor concentra os seus esforços nos estudos do Círculo e suas propriedades, tais como o arco, a corda, a tangente, secante, raio, diâmetro, Figuras inscritas e circunscritas. No início desta divisão da obra, mais precisamente nas duas primeiras páginas, Legendre (1809b) define primeiramente o que é o círculo para, na sequência, fazer o mesmo com cada

---

<sup>103</sup> Chamaremos esta obra de 1809b para diferenciá-la dos *Elementos de Trigonometria*.

uma das propriedades citadas acima. Na sequência, ao longo do Livro II, o autor lança mão da mesma estratégia utilizada no tópico precedente, ou seja, em suas vinte e nove Proposições, a demonstração acompanha cada uma para que o leitor possa fazer a verificação dos Teoremas. Ao final do Livro II, são apresentados dezoito problemas de Geometria Pura, não havendo indício de cunho prático ou associação à prática da instrução militar. Estes problemas apresentados referem-se ao Livro I e II.

O Livro III trata essencialmente das proporções das Figuras. Ao longo desta divisão, o autor se propõe, em seus Teoremas, a demonstrar questões sobre a medida das superfícies e sua comparação; as propriedades do triângulo retângulo e dos triângulos equiângulos e as propriedades das Figuras semelhantes. Como nos Livros anteriores, antes de tudo, são apresentadas algumas definições como, por exemplo, Figuras semelhantes e Figuras equivalentes, altura em diferentes Figuras (triângulo, trapézio e paralelogramo) e, por fim, área de uma Figura plana. A mesma estrutura: Proposição, Teorema e Demonstração perfazem trinta e quatro proposições ao longo de trinta e seis páginas. Ao final, dezenove problemas em número igual de páginas propõem a colocação em prática dos Teoremas apresentados de maneira precedente.

O Livro IV, onde são trabalhadas as questões dos Polígonos Regulares e as Medidas do Círculo, por sua vez, quebra o roteiro dos seus antecedentes, ou seja, rompe com a estrutura Proposição, Teorema e Demonstração. Inicialmente, o mesmo apresenta duas seções: a inicial com dezesseis Proposições em vinte páginas, as quais são acompanhadas, ora por Teoremas ou lemas, ora por Problemas e as suas resoluções propostas por Legendre (1809b); a segunda seção, em forma de Apêndice ao Livro IV, onde são trabalhados, de forma inicial, os conceitos de máximo e mínimo em uma circunferência, bem como as Figuras com perímetros iguais, as quais o autor denomina “isoperimétricas”. Seguem-se ao longo de onze páginas e dez Proposições, o acompanhamento de Teoremas, Lemas ou Problemas. No caso dos dois primeiros, acrescentam-se as demonstrações e, no caso do último, as resoluções.

Ao longo do Livro V o autor propõe o estudo dos planos e dos ângulos sólidos. As definições de reta perpendicular, paralelismo de linhas em relação ao plano e, de um plano em relação a outro, intersecção entre planos e o ângulo

formado por esta, e ângulos sólidos aparecem primeiramente, mostrando os assuntos que serão tratados ao longo desta divisão dos *Elementos de Geometria*. Ao longo de vinte e três páginas e vinte e cinco proposições, Legendre (1809b) utiliza-se em alguns momentos, de Teoremas e Demonstrações, em outros, de problemas e resoluções para abordar os temas relativos a este Livro.

No Livro VI, Legendre (1809b) apresenta aos leitores os seus estudos referentes aos Poliedros. Primeiramente, ao longo de dezoito definições, o autor estabelece termos como o poliedro, propriamente dito, aresta, prisma, cubo, hexaedro, pirâmide, vértice, diagonal, altura, simetria entre poliedros são definidos pelo autor, terminologia esta, necessária para o desenvolvimento de suas Proposições ao longo desta divisão da obra. Durante o desenrolar das definições, destaque ao tetraedro “o sólido de quatro faces, hexaedro o que tem seis; octaedro o que tem oito; dodecaedro o que tem doze, [...] &c” (LEGENDRE 1809b, p.167). Ao longo de trinta e oito páginas e vinte e cinco Proposições, ancoradas em Teoremas ou Lemas, e suas respectivas demonstrações, Legendre (*idem*) apresenta ainda alguns exemplos acerca do assunto.

O Livro VII é reservado ao estudo da Esfera. No início desta divisão dos *Elementos de Geometria* Legendre (1809b) apresenta quinze definições, abordando os conceitos da própria Esfera (por óbvio o primeiro), o círculo máximo e o círculo mínimo de uma esfera, raio, plano tangente, pirâmide esférica, polo, triângulo esférico e suas variações (isóscele, equilátero e retângulo), polígono esférico, fuso, segmento esférico, eixo e setor esférico. Ao total o Livro VII apresenta vinte e oito páginas e vinte e sete Proposições que precedem os seus respectivos Teoremas e estes, são complementados de forma subsequente por suas demonstrações. A destacar ainda neste Livro, o apêndice relativo aos Livros VI e VII, o qual apresenta quatro Proposições, sendo uma acompanhada de seu Teorema respectivo e, na sequência por sua demonstração mais três com seus Problemas e soluções propostas por Legendre (1809b).

Ao fim, em seu Livro VIII, que trata do tema “Os três corpos redondos”, Legendre (1809b) aborda, em específico, os seguintes sólidos em rotação (ou revolução): o cilindro, o cone e a esfera. De maneira inicial, a definição de cada um dos corpos redondos é apresentada para, em seguida, serem tratados os

temas “inscrito em” ou “circunscrito ao” e, semelhança entre os corpos redondos. Esta divisão concentra os seus estudos, principalmente sobre o cone e o cilindro, visto que a esfera já havia sido o centro de estudos no Livro VII. No decorrer das trinta e quatro páginas e dezenove Proposições, o autor apresenta os Teoremas e Lemas correspondentes a cada uma delas, seguido de suas demonstrações. Ao final desta divisão, ainda consta uma subseção de Notas, onde são apresentadas algumas considerações a respeito dos *Elementos de Geometria*. Ao final inclui-se ainda, em treze páginas, a lista com as duzentas e oitenta e três figuras que fazem parte da obra, e são sugeridas ao longo do texto.

Após esta análise da obra *Elementos de Geometria*, de Legendre (1809b) trataremos, na sequência, de outras análises, reflexões e considerações acerca deste capítulo e, também, de como a matemática se entrelaçou na formação dos Oficiais do Exército Brasileiro e, como as obras analisadas e o contexto escolar ajudaram no desenvolvimento da instrução militar brasileira no período oitocentista.

## 5.5 ANÁLISES E REFLEXÕES DAS OBRAS *ELEMENTOS D'ALGEBRA* DE LACROIX, *TRATADO DE TRIGONOMETRIA* E *ELEMENTOS DE GEOMETRIA* DE LEGENDRE NA INSTRUÇÃO MILITAR BRASILEIRA

Ao iniciar um momento de reflexão sobre o ensino da matemática na instrução militar brasileira no período oitocentista e as razões para analisar uma obra de profundo conteúdo teórico com, quiçá, alguns exemplos práticos, é necessário fazer, antes de tudo, algumas considerações que guiarão essa análise.

### 5.5.1 Considerações acerca do contexto escolar

A análise da Carta-Régia (BRASIL, 1810) que trata da criação da Real Academia Militar aponta para, em seu estatuto, a organização de compêndios de suas aulas, os quais deveriam passar por aprovação prévia do governo antes de chegarem às salas de aula e, por consequência, às mãos dos alunos.

No entanto, e aqui não se deixa passar em branco as condições desfavoráveis ao ensino (sobretudo em seus primeiros anos<sup>104</sup>) na Real Academia, os compêndios, sobretudo no que se refere à matemática, não se tornaram realidade, preferindo os lentes, no trabalho direto com os alunos, o manuseio das obras traduzidas. Sobre este assunto, percebe-se uma renúncia dos responsáveis na constituição de um “[...] centro autônomo de elaboração didática.” (MOTTA 2001, p.41) e, ainda, se observa que “[...] os professores nada souberam criar em matéria de ensino [...]” (*idem*), sendo que alguns deles não deixaram mesmo assim de atingir certa notoriedade “[...] como tradutores de livros franceses [...]” (*ibidem*).

Os livros franceses foram escolhidos, principalmente, devido ao modelo francês de *École Polytechnique* servir de inspiração a D. Rodrigo de Souza Coutinho na elaboração da Carta-Régia e, na matemática mais precisamente, pelo fato de que, os grandes matemáticos da época estavam ligados a estas Instituições, tornando-as centro de produção de conhecimento e seus produtores reconhecidos mundialmente.

Assim, após a admissão, os alunos que chegavam a Real Academia em seu primeiro ano já começavam a receber os ensinamentos destas obras, conforme destacado na Carta-Régia (BRASIL, 1810. p.235):

Como os estudantes não serão admitidos pela junta militar sem saberem as quatro primeiras operações da Aritmética, o Lente ensinará logo a Álgebra, cingindo-se quanto puder, ao método do célebre Euler nos seus excelentes elementos da mesma ciência, debaixo de cujos princípios e da aritmética e Álgebra de Lacroix [...]

O resultado dessa sobrecarga de tratados e conceitos matemáticos sobre os alunos que, geralmente, apenas dominavam as quatro operações matemáticas era previsível. As reprovações em larga escala, sobretudo nas

---

<sup>104</sup> Sobre este assunto, embora já mencionado neste trabalho, maiores informações podem ser obtidas em Motta (2001).

cadeiras matemáticas, ao fim do primeiro ano de curso flertavam com os oitenta por cento o que, de acordo com Motta (2001, p.44) era: “[...] fato naturalmente resultante do grande desnível do que se exigia como preparo para o ingresso na Academia e o programa de ensino para aquele ano.”.

Outra condição prevista na Carta-Régia (BRASIL, 1810) eram as aulas práticas, onde os alunos poderiam através das Cadeiras do início do curso matemático desenvolver um espírito inventivo que conduziria às maiores descobertas por meio das possibilidades do cálculo algébrico das potências, das quantidades exponenciais, dos logaritmos e, dos financeiros, ao exercitá-los na resolução dos diversos problemas.

Os indícios apontam para um desencanto em relação aos objetivos destacados na Carta-Régia no que diz respeito ao ensino prático das disciplinas citadas. O que percebe-se, sobretudo, na obra de Motta (2001) que repetidas vezes destaca o abandono pelas coisas práticas em detrimento de um ensino reduzido “[...] ao mundo dos livros e apostilas”, resultando, assim, em uma atitude de viés contrário ao que pressupunha a sua finalidade, ou seja, a formação de “hábeis Oficiais” das mais diversas armas.

Há que se considerar que essa contenda não se resumia apenas às Cadeiras matemáticas e se estendia a, praticamente, o curso inteiro, resumindo assim as aulas das diversas Cadeiras a uma mera questão de apenas dois atos: “o de ensinar” por parte dos Lentes, e “o de estudar” por parte dos alunos, afastando-se da ideia do Conde de Linhares e da Carta-Régia que era “[...] a integração desses dois atos num conjunto único, solidário e funcional, acompanhada de uma alta valorização da pesquisa e do exercício.” (MOTTA 2001, p.42).

Pois bem, se por um lado os Lentes traziam consigo as suas responsabilidades sobre esse afastamento dos objetivos didáticos da Real Academia em relação ao ensino prático, por outro, a compreensão que se tinha da finalidade da Escola não era unanimidade entre aqueles que a comandavam. Dito isso, é necessário também observar a falta de um profissional da área da Educação na Escola, que pudesse fazer o papel de um Supervisor Escolar e, com isso, fazer com que as ideias de D. Rodrigo Coutinho pudessem ser colocadas, efetivamente, em prática.



Mas, deixando um pouco de lado esta discussão e procurando levar o centro da discussão para os conteúdos matemáticos e seu caráter útil dentro da formação dos Oficiais, destaca-se o que dizem Sousa e Rocha (2017, p.159):

O ensino de Matemática era tido como um dos mais importantes para a formação da real Academia Militar. Os estudantes tinham, nos primeiros anos, que se debruçar nos estudos voltados para esta ciência, pois ao ver dos idealizadores e dos fundadores da instituição, eram de suma importância os conhecimentos matemáticos para qualquer que fosse o seguimento do aluno.

Partindo-se então do pressuposto dos autores, entende-se que o primeiro ano do Curso Matemático ou, as Cadeiras que o compunham, tinham consigo o objetivo de preparar os seus alunos para uma “Matemática superior” que viria ao longo do segundo ano e daqueles seguintes, como corrobora com essa ideia a própria Carta-Régia (BRASIL 1810, p.235):

O.Lente do segundo anno repetindo e ampliando as noções de calculo já dadas no primeiro anno, [...]passará depois ao calculo differencial e integral, ou das fluxões e fluentes, mostrando os mesmos e as suas applicações ate aonde tem chegado nos nossos dias nas brilhantes applicações à phsica, astronomia e cálculo das probabilidades.

Assim, o primeiro ano, operando como um curso preparatório servia para dar os subsídios necessários aos demais anos de estudo e, com os fundamentos da matemática fazer com que os alunos pudessem desempenhar um melhor aproveitamento na já referida “matemática superior”.

Esse fato mencionado que supostamente divide a Matemática em um primeiro ano “elementar” e um segundo ano “superior” encontra eco na pesquisa de Valente (2020), sobretudo no que diz respeito à Álgebra, Cadeira esta que mais tarde seria ensinada na sua parte primeira no ensino secundário. Subsidiava ainda mais a nossa ideia do caráter elementar da Álgebra no primeiro ano, o Decreto 140, aqui já tratado, que instituía o primeiro ano como de caráter preparatório, com as Cadeiras de Aritmética, Álgebra Elementar, Geometria, Trigonometria Plana e Desenho.

A seguir, serão tecidos alguns comentários acerca deste capítulo e outras reflexões que, porventura, ainda não tenham sido deixadas aqui neste trabalho.

## 5.6 CONSIDERAÇÕES ACERCA DESTE CAPÍTULO E OUTRAS REFLEXÕES

Observa-se, inicialmente, que dos tópicos analisados, e integrantes das obras de Lacroix (1811), Legendre (1809a) e, do mesmo autor (1809b), muito embora fosse exigido dos alunos ingressantes (no que diz respeito somente à Matemática) apenas o conhecimento das quatro operações básicas, nos parece que este pré-requisito é “muito” elementar, pois, obviamente que se utilizar as lentes da contemporaneidade, será percebido que as quatro operações básicas são equivalentes ao conteúdo ensinado nos anos iniciais da etapa escolar que hoje chamamos de Ensino Fundamental.

Logicamente sabe-se que a organização escolar naquele período histórico era bastante rudimentar e, o sistema público de ensino praticamente inexistia. Grosso modo, as Escolas com o maior número de alunos eram aquelas “particulares”, onde os filhos das famílias com “algumas posses” frequentavam e recebiam “algo a mais” em termos de conhecimentos matemáticos.

Havia, portanto, aos olhos de quem está analisando, uma lacuna entre o pré-requisito regimental e os conteúdos ensinados, especialmente aqueles do primeiro ano do curso na Real Academia que, ao se chamar “preparatório”, e aí se supunha: “preparar” os alunos compensando eventuais “brechas” no aprendizado observadas entre o mínimo exigido para o ingresso e o necessário para que se pudesse ser aprovado, além de não ser realidade, protagonizavam altos índices de reprovação, dada a erudição dos professores e rigor matemático dos conteúdos ensinados. Diante da análise das fontes à disposição, pode-se inferir que os citados altos índices de reprovação, sobretudo nos primeiros anos da Escola, eram fruto destas brechas e, ainda de certa ausência de entendimento daqueles que nela ingressavam da amplitude que a expressão “debruçar-se” sobre os livros e, engajar-se ao rigor do estudo da matemática, representava. Este pré-requisito tão elementar fazia com que, inicialmente os alunos frequentassem o Curso Matemático e que, no primeiro ano trabalhava, conforme Brasil (1810), conteúdos básicos de aritmética, Geometria retilínea (a qual contemporaneamente chamamos de Geometriaplana) e fundamentos de Álgebra. Nos anos seguintes, os assuntos tratados iam evoluindo à matemática superior, e o aprofundamento nos conteúdos se tornava cada vez mais rigoroso.

Outro ponto a ser analisado diz respeito à origem do público que frequentava a Escola: os voluntários, e os compulsórios; sendo tanto um, quanto outro, militares ou buscando essa carreira. A diferença estava no posto que cada um pudesse ocupar, sendo os voluntários, aqueles que prestavam o exame de admissão por livre e espontânea vontade e os compulsórios, aqueles que, além de frequentar as aulas deveriam em alguns dias da semana prestar serviço no Corpo da arma a que haviam “sentado praça”.

Acerca da condição dos alunos compulsórios, fora apontada como fator preponderante pelo Lente Antônio José do Amaral para o baixo rendimento dos estudantes nas Cadeiras de Matemática, conforme cita Motta (2001, p.44) “[...] o trabalho corporal excessivo não é compatível com a meditação e o homem fatigado não se pode dar às abstratas e profundas reflexões que o estudo matemático requer.”

Esse quadro de admissão de somente alunos militares, ou comprometidos com a carreira militar foi alterado em 1823 quando o Governo, via decreto, passou a permitir o ingresso de uma nova categoria: os alunos civis, também chamados de “paisanos” que, ao final de seus estudos, receberiam o título de Engenheiro Civil e não tinham a obrigatoriedade de vínculo com o Exército.

Falando do corpo discente, de baixo desempenho e de pré-requisitos, convém destacar um mapa dos alunos da primeira turma da Real Academia. Motta (2001), chama a atenção para o perfil desses pioneiros que eram um total de 73 alunos ingressantes, predominantemente, maiores de 30 anos (apenas 23 tinham menos de 20 anos), 36 deles, comprovadamente brasileiros, 16 portugueses e 1 italiano; os demais, em número de 20, não tiveram a sua nacionalidade comprovada. Ainda, com respeito ao posto que ocupavam, apenas 7 deles eram civis em busca da carreira militar. Já os demais ocupavam algum posto; sendo que a maior parte, 23 alunos, já eram oficiais.

Os estudos de Motta (2001) e Silva e Sad (2011) acerca da formação do corpo docente apontam para Profissionais com trajetória acadêmica em terras portuguesas, mais precisamente na Universidade de Coimbra ou, na Academia Real dos Guardas-Marinhas. No total, onze lentes efetivos mais cinco substitutos formavam a equipe de lentes da Real Academia. Ainda a respeito da lista destes professores, obviamente ela foi sofrendo alterações ao longo dos anos e, com

isso, não serão mencionados o nome de todos os que vieram depois dos pioneiros aqui já citados.

Sobre as aulas, Silva e Sad (2011, p. 510) apontam para uma “instrução oral dos conhecimentos científicos”, sendo que estas tinham a duração de hora e meia cada, e as manhãs eram assim divididas: “[...] das sete e meia ou oito horas até as onze ou meio dia, nas diversas aulas que se houverem de estabelecer” (BRASIL 1810, p.240).

A Carta-Régia (BRASIL, 1810) ainda versava, em seu título sétimo, sobre como deveriam ser desenvolvidas as aulas, assim, dentro daquela uma hora e meia de cada uma das lições, os Lentes explicavam o assunto do dia nos primeiros 45 minutos e, nos 45 seguintes, os alunos deveriam realizar as atividades propostas para aquele momento. Ainda, de forma oral, eram nomeados, a critério do Lente, alguns discípulos para realizar uma exposição sobre a aula do dia, fazendo com que além de verificar o seu aprendizado, esta apresentação pudesse “[...] ser útil aos outros, de maneira que a todos seja profícua” (BRASIL 1810, p.241).

Aos sábados (BRASIL, 1810) eram repetidos todos os assuntos tratados durante a semana, e realizado um acompanhamento dos alunos, com o objetivo de:

Fazer conhecer aos discípulos, não só o necessário encadeamento do que lhes tiver ensinado, mas ainda as consequências que se seguem das verdades mostradas; e também os diferentes métodos de as demonstrar, preparando-lhes assim o espírito para tentarem descoberta, e despertando o gênio inventor de que a natureza possa ter dotado alguns dos discípulos. (BRASIL 1810, p.241)

Observa-se através desta citação que, mesmo reconhecidas as dificuldades que os discípulos enfrentavam com a Matemática, a oferta das “aulas de revisão” aos sábados mostrava uma preocupação da Real Academia com o aprendizado dos mesmos e que para além dos conhecimentos matemáticos, havia também a ideia de que com ela e, por meio dela, poderia se desenvolver um oficialato de alto nível através dessa forma de ensino.

Apesar de todas as dificuldades narradas, é fato que, conforme menciona Mormêllo (2010, p.144) a Real Academia:

Chegou ao final do período (1831-1874) consolidada como uma instituição de ensino militar importante, não só para o Exército como para o Brasil, mas apresentando ainda basicamente a mesma estrutura

curricular de 1810. A partir da segunda metade do século começa a se tornar significativa a procura pelos seus cursos. Em 1850 já eram quase trezentos os alunos matriculados.

Essa narrativa corrobora com a ideia de que o rigor no ensino de Matemática na Real Academia, embora entendido como alto, as conseqüentes dificuldades iniciais acabaram por prevalecer, tornando a instituição referência na formação de Professores, Engenheiros e Topógrafos de grande capacidade técnica. Ainda sobre esse assunto, e a importância da referida instituição, Sousa e Rocha (2017, p. 160) observam que: “[...] tornava-se mais evidente após a completude do curso por seus alunos, em quem se podia notar o rigor existente em suas obras arquetônicas”.

Ao se perceber que no Brasil colonial o conhecimento científico era rudimentar, é louvável que pouco mais de sessenta anos após a sua criação, a Real Academia tenha atingido resultados tão expressivos.

Acerca ainda do material didático, Sousa e Rocha (2017), apontam que a escolha dos livros, embora o já citado “descompasso” entre o pré-requisito e o teor das aulas, era premeditada justamente para promover o rigor no estudo da Matemática. O intuito da Carta-régia (BRASIL, 1810), ao indicar tais obras já apontava para isso. Esta literatura, além de reconhecimento internacional de seus autores, possuía boa aceitação nos cursos superiores da época por oferecer os conteúdos com a rigidez possível ao período.

Paralelamente a isso, observa-se que, embora os Lentes de cada uma das Cadeiras eram responsáveis após os primeiros anos de estudo pela elaboração de Compêndios para trabalharem em aula, salvo exceção isso acabou não ocorrendo. Esse fato, fez com que as obras traduzidas que, em tese, seriam de manuseio dos professores, chegassem até os alunos o que, nos faz crer que a matemática que tinham acesso aqueles estudantes era essa, com esse mesmo rigor que pudemos observar nas obras estudadas nesta investigação.

Feitas as considerações e reflexões acerca das obras e seus desdobramentos, procede-se agora com as considerações finais deste trabalho, onde pretende-se realizar o tecimento de nosso referencial teórico, do contexto histórico e social e onde estes fatores estão emaranhados ao Ensino de Matemática na instrução militar brasileira no período oitocentista.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta investigação representou um grande desafio de apuração e resgate histórico de interpretações de eventos e de obras didáticas. No decorrer do tempo, a análise de Decretos Imperiais, de obras elementares das áreas de estudo da matemática aqui analisados e de fontes secundárias, tais como artigos e dissertações, proporcionou uma representação acurada do período em questão. As fontes utilizadas, sejam primárias ou não, tratam o tema formando partes que foram se ajustando e colaborando para que se pudesse realizar o fechamento da pesquisa, cujas particularidades e especificidades a qualificam como investigação profícua em seus resultados.

Desse modo, por meio da análise documental e pesquisa em fontes primárias e secundárias, apresenta-se um estudo desde o ensino da matemática na instrução militar brasileira oitocentista a partir da análise de obras didáticas e suas relações sócio-históricas. Analisa-se, através de uma delimitação temporal, como os fatores políticos e sociais influenciaram as atividades escolares. Com isso, e ao trazer os elementos citados para a análise e considerações, entende-se que o objetivo deste trabalho foi alcançado.

A opção pela investigação do Ensino de Matemática na instrução militar nos oferece possibilidades investigativas reais, além de um número considerável de fontes primárias para a prospecção dos temas e um aporte teórico de análise histórica consistente para sustentar a argumentação de uma pesquisa. A perspectiva da Hermenêutica de Profundidade possibilitou um singular campo de estudo para que fosse possível revisitar os períodos históricos envolvidos nesta pesquisa e, também, anteriores, os quais, na concepção histórica, colaboraram no estabelecimento do contexto político e social do recorte temporal em análise.

Sobre esta, ainda, se destaca que, com o auxílio de suas ferramentas, entre elas a análise sócio-histórica, nos foi possível conjecturar acerca dos fatores que contribuíram para a criação da Real Academia Militar e para as mudanças curriculares ocorridas ao longo do período que é objeto dessa pesquisa.

Através desse estudo foi possível, ainda, verificar que as condições da criação da Academia Militar no Rio de Janeiro passaram por uma necessidade

da Coroa Portuguesa, então em processo de mudança do País Ibérico para o Brasil, devido à motivos de conflitos políticos que tomavam conta da Europa naquele momento e não necessariamente porque havia o objetivo de desenvolver a colônia. Acerca disso, com as crescentes tensões e disputas por territórios na Bacia do rio da Prata, entendiam os portugueses que era necessário um Exército numeroso e bem treinado, através do domínio da tecnologia de guerra disponível na época e com oficiais que pudessem, através de uma formação sólida, realizar o reconhecimento de terrenos e possuir o domínio da arte da guerra, mantendo o território brasileiro sob segurança.

Porém, não se pode esquecer que a formação de oficiais para a guerra era apenas um dos objetivos da Real Academia Militar. O país, então experimentando um aumento de sua população urbana necessitava de profissionais que pudessem dar conta do planejamento urbano, das construções de pontes, prédios, da abertura de ruas, entre outros aspectos e claro, mais tarde, com o início da massificação do ensino escolar, o recrutamento de professores.

Sobre os primeiros anos de funcionamento da Real Academia Militar observa-se a baixa procura pelos cursos devido, principalmente, não ser uma obrigatoriedade passar pelos bancos e laboratórios da instituição para galgar postos no oficialato. O grau de erudição e domínio da Matemática necessários ocasionava, aos poucos alunos matriculados, uma alta taxa de reprovação chegando, em alguns momentos, a oitenta por cento.

Se é verdadeiro que o rigor exigido na matemática criava uma espécie de filtro aos discípulos da Real Academia, também o é que havia uma preocupação com o aprendizado e a apreensão dos significados de cada uma das lições. Como foi possível narrar, aos sábados havia os momentos em que os lentes propunham os problemas aos seus alunos, orientando-os na resolução e estes que, com seus esforços, deveriam concluir os trabalhos.

Esse mesmo rigor matemático exigido de seus discípulos, aos poucos foi se tornando o diferencial destes alunos que, ao concluírem os seus cursos formavam uma elite técnica, política e cultural daquele Brasil oitocentista com influências sobre a vida brasileira.

Sobre o aspecto político, cita-se a independência do Brasil, em 1822, que teve a precisa participação de oficiais do Exército formados pela Real Academia

que, conscientes do momento histórico que o país vivia, não aceitavam mais o tratamento de colônia dispensado ao Brasil pela Coroa Portuguesa aqui estabelecida. Mais tarde, em 1889, tem-se a participação muito forte e, pode-se dizer decisiva, de alunos e Lentes da Província de São Pedro e do Rio de Janeiro nos movimentos que iriam culminar com a Proclamação da República e um novo tempo que os ventos republicanos ao soprar, traziam para o Brasil.

Em meio a tudo isso, ainda, é possível observar os conflitos internos ocorridos da primeira metade dos anos 1800 e a Guerra do Paraguai que já na segunda metade daquele século serviu para provar aos governantes da época o quão valorosos e decisivos eram os oficiais oriundos daquela Academia e, analogamente, serviu para os militares buscarem uma melhor valorização e reconhecimento naquele Brasil pós 1870.

Ainda dentro do espectropolítico, observa-se um significativo número de lentes da Real Academia que acabaram por se tornar deputados. Sendo militaristas ou sendo cientificistas, todos defendiam a instituição e apregoavam a necessidade de melhor e maior investimento para que ela continuasse com a sua missão.

As agruras enfrentadas pelos primeiros alunos da Real Academia diziam respeito não só ao fato de o Brasil possuir imensas dimensões territoriais, os “paisanos” que se aventuravam a tentar a sorte na instituição eram oriundos de outras partes do país e contavam com uma esparsa rede de apoio e a manutenção de suas custas era penosa.

No entanto, apesar das dificuldades e, das grandes discussões, das diversas idas e vindas em seu currículo, mais de dez ao longo desse recorte temporal, assim como das disputas internas entre os cientificistas e os militaristas, pode-se dizer que o sucesso nos eventos bélicos ocorridos durante a época analisada colaborou não só para o estabelecimento, mas para a consolidação do modelo de ensino da instituição ao longo do tempo.

No presente trabalho constatou-se, ainda, que o citado “rigor matemático” existente na Real Academia era oriundo do modelo francês e que as obras didáticas utilizadas eram aquelas que melhor representavam esse modelo. Na falta da elaboração dos compêndios, previstos no estatuto, as obras acabaram por chegar diretamente para o manuseio dos alunos que, para aprender as lições



dadas, precisavam debruçar-se sobre estas e estudar uma grande quantidade de horas.

Sobre este aspecto, como os compêndios não puderam ser elaborados e, o material manuseado pelos estudantes eram as obras originais e traduzidas, tem-se que os exemplos tratados nos livros eram de um grau elevado de abstração, com pouquíssimas aplicações diretas para a instrução militar. Isso tudo corrobora com o que foi possível averiguar durante essa pesquisa, ou seja, grande quantidade de horas de estudo, reduzidíssimo nível de conhecimento exigido no ingresso, a abstração do tema e a erudição dos professores.

A respeito da influência do pensamento francês na Real Academia, constata-se que ela não se restringia apenas às obras didáticas, mas, em algum momento e mais precisamente em 1839, optou-se por um estatuto onde fora dividida a Real Academia em duas Escolas, uma responsável pela formação geral, e outra pela formação técnica. O modelo, inspirado na *École Polytechnique* de Paris, porém, foi implementado somente em 1855, tendo sua duração estendida até 1874, quando a Real Academia (aqui chamada de Escola Central) deixou de ser uma Escola Militar e tornou-se então destinada à formação de Engenheiros Civis.

Ainda a respeito das obras, foi relatado o alto grau de conhecimento necessário para manuseá-las, visto que, embora algumas se tratavam de compilações, a abstração predominante e, a forma de elaboração com teoremas, postulados, enunciados e exemplos abstratos tornava a apreensão das lições penosa e árdua, sobretudo devido ao fato de as aulas contarem, em sua maior parte com exposições orais de aproximadamente quarenta e cinco minutos dos lentes aos discípulos e, após, atividades sobre o que foi apresentado.

Nessa investigação pode-se perceber, ainda, que as obras analisadas traziam os primeiros elementos de livros didáticos, que haviam participado de um concurso no final do século anterior em Paris, onde se escolheram as coleções didáticas a serem utilizadas na formação de professores para o sistema escolar daquele país.

Através desse trabalho também foi possível tomar conhecimento dos conteúdos trabalhados na matemática exigida dos futuros oficiais do Exército do período investigado. De maneira mais aprofundada, foi possível abordar os conhecimentos trabalhados em Álgebra, Trigonometria e Geometria através das

obras de Lacroix (1811), Legendre (1809a) e Legendre (1809b), respectivamente.

O estudo das obras citadas, desde a sua origem e o porquê da sua chegada ao Brasil, especificamente para os estudos na Real Academia Militar nos permitiu, primeiramente, apurar a procedência da Matemática ensinada nas escolas destinadas à instrução militar. Nesse mesmo sentido, também nos foi possível, a partir destas obras didáticas, formar uma ideia para analisar qual era esta Matemática que era ensinada no período oitocentista aos alunos envolvidos com a instrução militar.

Procedendo com a análise de cada documento oficial (Decretos e Leis), foi possível a compreensão da dinâmica do Ensino de Matemática na instrução militar brasileira. Foi percebido, também, o papel estratégico desta instrução dentro do planejamento da corte instalada em nosso território.

Através desse estudo, foi possível perceber a influência exercida pela sociedade e pelas mudanças sociais e políticas sobre os currículos escolares. Posto isso, não se pode negligenciar que os acontecimentos históricos, como as revoltas e as guerras, também atuaram sobre os currículos escolares.

Os caminhos trilhados permitem afirmar que diversos fatores foram preponderantes nas mudanças curriculares ocorridas não apenas no Ensino de Matemática, mas na instrução militar como um todo e, dentre eles, principalmente, o cenário político (a sobreposição de um projeto político sobre outro), pedagógico (quando a visão sobre a educação majoritária para um dado momento é posta em prática) e social (quando há movimentação das comunidades) foram fatores determinantes para que ocorressem influências e, por consequência, modificações nos currículos escolares.

Tecendo as últimas impressões, é importante chamar a atenção para a validade deste estudo histórico que em um primeiro momento ocupou-se da investigação sobre o Ensino de Matemática na instrução militar brasileira no período oitocentista a partir de obras didáticas e, em suas conclusões. Visualiza-se em uma pretensa continuidade desta, o aprofundamento deste trabalho sobre o Ensino da Matemática da instrução militar brasileira, aprofundando as discussões e reflexões a respeito do assunto e, com isso, apontando novas possibilidades de pesquisa, não só para a Matemática, mas, também, para as

outras disciplinas escolares que colaboraram na formação deste importante segmento da sociedade brasileira.

## REFERÊNCIAS

BIRAL, A. C. Uma Análise do “Tratado de Trigonometria” de Adrien-Marie Legendre. In: Seminário Nacional de História da Matemática, 9, 2011, Aracaju. **Anais...** Aracaju, 2011.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blucher, 1989.

BENTO, C. M.; COUTINHO N. **Escolas de Formação de Oficiais das Forças Armadas do Brasil (1792 – 1987)**. Rio de Janeiro: Fundação Habitacional do Exército. 1987.

BRASIL. **Carta de Lei, de 04 de dezembro de 1810**. Cria a Real Academia Militar no Rio de Janeiro. Disponível em <https://www2.camara.leg.br/atividade-legislativa/legislacao/colecao-anual-de-leis>. Acesso em: 04 out. 2021.

BRASIL. **Decreto Imperial nº 3.555, de 09 de março de 1832**. Reforma a Academia Militar da Corte e, incorporando nela a dos Guardas-Marinhas. Disponível em: <https://www2.camara.leg.br/atividade-legislativa/legislacao/colecao-anual-de-leis>. Acesso em: 13 out. 2021.

BRASIL. **Decreto Imperial, de 22 de outubro de 1833**. Separa a Academia de Marinha e a companhia dos Guardas-Marinhas da Academia Militar da Corte e dá o Estatuto para a Academia Militar do Império do Brasil. Disponível em: <https://www2.camara.leg.br/atividade-legislativa/legislacao/colecao-anual-de-leis>. Acesso em: 13 out. 2021.

BRASIL. **Decreto Imperial, de 23 de fevereiro de 1835**. Torna sem efeito os Decretos de 1832 e 1833 e dá novo Estatuto para a Academia Militar do Império do Brasil. Disponível em: <https://www2.camara.leg.br/atividade-legislativa/legislacao/colecao-anual-de-leis>. Acesso em: 13 out. 2021.

BRASIL. **Decreto Imperial – Regulamento 39, de 22 de fevereiro de 1839**. Regulamenta a execução e dá novo Estatuto para a Academia Militar do Império do Brasil. Disponível em: <https://www2.camara.leg.br/atividade-legislativa/legislacao/colecao-anual-de-leis>. Acesso em: 13 out. 2021.

BRASIL. Decreto Imperial nº140, de 09 de março de 1842. Dá novo Estatuto para a Academia Militar do Império do Brasil, <https://www2.camara.leg.br/atividade-legislativa/legislacao/colecao-anual-de-leis>. Acesso em 14 out. 2021.

BRASIL. **Decreto Imperial nº 404, de 01 de março de 1845.** Regulamenta a execução e dá novo Estatuto para a Academia Militar do Império do Brasil. Disponível em: <https://www2.camara.leg.br/atividade-legislativa/legislacao/colecao-anual-de-leis>. Acesso em 14 out. 2021.

BRASIL. **Decreto Imperial nº 634, de 20 de setembro de 1851.** Cria na Província de São Pedro do Rio Grande do Sul um Curso de Infantaria e Cavalaria. Disponível em: <https://www2.camara.leg.br/atividade-legislativa/legislacao/colecao-anual-de-leis>. Acesso em: 15 out. 2021.

BRASIL. **Decreto Imperial nº 1534, de 23 de janeiro de 1855.** Altera o Curso de Estudos da Academia Militar do Império do Brasil. Disponível em: <https://www2.camara.leg.br/atividade-legislativa/legislacao/colecao-anual-de-leis>. Acesso em: 15 out. 2021.

BRASIL. **Decreto Imperial nº 2116, de 01 de março de 1858.** Aprova o regulamento reformando os da Escola de Aplicação do Exército e do curso de Infantaria e Cavalaria da Província de São Pedro do Rio Grande do Sul, e os estatutos da Escola Militar da Corte. Disponível em: <https://www2.camara.leg.br/atividade-legislativa/legislacao/colecao-anual-de-leis>. Acesso em: 16 out. 2021.

BRASIL. **Decreto Imperial nº 2422, de 18 de maio de 1859.** Aprova o regulamento da Escola Geral de Tiro de Campo Grande. Disponível em: <https://www2.camara.leg.br/atividade-legislativa/legislacao/colecao-anual-de-leis>. Acesso em: 16 out. 2021.

BRASIL. **Decreto Imperial nº 2582, de 22 de abril de 1860.** Aprova o regulamento e os estatutos da Escola Militar da Corte. Disponível em: <https://www2.camara.leg.br/atividade-legislativa/legislacao/colecao-anual-de-leis>. Acesso em: 16 out. 2021.

BRASIL. **Decreto Imperial nº 3083, de 23 de abril de 1863.** Aprova o regulamento para as Escolas Militares do Império. Disponível em: <https://www2.camara.leg.br/atividade-legislativa/legislacao/colecao-anual-de-leis>. Acesso em: 16 out. 2021.

BRASIL. **Decreto Imperial nº 3555, de 09 de dezembro de 1863.** Entre outras providências, cria os Depósitos de Instrução e de Disciplina. Disponível em:

<https://www2.camara.leg.br/atividade-legislativa/legislacao/colecao-anual-de-leis>. Acesso em: 16 out. 2021.

BRASIL. **Decreto Imperial nº 5529, de 17 de janeiro de 1873**. Regulamenta e organiza as Escolas do Exército. Disponível em: <https://www2.camara.leg.br/atividade-legislativa/legislacao/colecao-anual-de-leis>. Acesso em: 16 out. 2021.

BRASIL. **Decreto Imperial nº 8205, de 30 de julho de 1881**. Altera disposições do Regulamento das Escolas Militares do Exército. Disponível em: <https://www2.camara.leg.br/atividade-legislativa/legislacao/colecao-anual-de-leis>. Acesso em: 21 out. 2021.

BRASIL. **Decreto Imperial nº 9857, de 08 de fevereiro de 1888**. Altera o regulamento da Escola da Província de São Pedro do Rio Grande do Sul. Disponível em: <https://www2.camara.leg.br/atividade-legislativa/legislacao/colecao-anual-de-leis>. Acesso em: 22 out. 2021.

BRASIL. **Decreto Imperial nº 10203, de 09 de março de 1889**. Aprova o regulamento para as Escolas Militares do Império. Disponível em: <https://www2.camara.leg.br/atividade-legislativa/legislacao/colecao-anual-de-leis>. Acesso em: 25 out. 2021.

KUHN, M. C; BAYER, A.A **matemática nas Escolas paroquiais luteranas gaúchas do século XX**. Canoas: ULBRA, 2017.

LACROIX, S. F. **Elementos D'Álgebra**. Rio de Janeiro: Imprensa Régia, 1811.

LEGENDRE, A. M. **Tratado de Trigonometria**. Rio de Janeiro: Imprensa Régia, 1809a.

LEGENDRE, A. M. **Elementos de Geometria**. Rio de Janeiro. Imprensa Régia, 1809b.

MEDEIROS, L. T. **Escola Militar de Porto Alegre**. Porto Alegre: Editora da Universidade, 1992.

MORMÊLLO, B. **O Ensino de Matemática na Academia Real Militar do Rio de Janeiro, de 1811 a 1874**. 198 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade de Campinas. 2010.

MOTTA, J. **A formação do oficial do Exército**. Rio de Janeiro: Biblioteca do Exército, 2001.

POSSAMAI, P. C. A Guarnição da Colônia do Sacramento. *In*: POSSAMAI, P.C.A. (org.). **Gente de Guerra Gente de Fronteira** - Estudos de História Militar do Rio Grande do Sul. Pelotas: Editora e Gráfica Universitária. 2010. p. 33 – 52.

**RELATÓRIOS DO MINISTRO DA GUERRA**. Rio de Janeiro: AHEx, 1850 - 1901. Acervo Sob Responsabilidade do Arquivo Histórico do Exército. Rio de Janeiro.

RICOEUR, P. **Tempo e Narrativa**. Campinas: Papirus, 1969.

RICOEUR, P. **A memória, a História, o Esquecimento**. Campinas: UNICAMP, 2007.

SAD, L. A. Rastros do Ensino de Cálculo Diferencial e Integral nas décadas iniciais da Academia Militar do Rio de Janeiro. **Revista Brasileira de História da Matemática**, São Paulo, v. 11, n. 21, p. 45 – 67, 2011.

SCHLEIRMACHER, F. D. E. **Hermenêutica: Arte e Técnica de Interpretação**. 2. Ed. Petrópolis: Vozes, 2000.

SCHUBRING, G. **Análise Histórica de Livros de Matemática: Notas de Aula**. Campinas: Autores Associados, 2003.

SILVA, M. L. P. **Conceitos Fundamentais de Hermenêutica Filosófica: Notas de Aula**. Coimbra, 2010. Disponível em: [https://www.uc.pt/fluc/lif/publicacoes/textos\\_disponiveis\\_online/pdf/conceitos\\_hermeneutica3](https://www.uc.pt/fluc/lif/publicacoes/textos_disponiveis_online/pdf/conceitos_hermeneutica3). Acesso em: 20 out. 2021.

SILVA, C. M. S. da. Controle estatal sobre livros didáticos de matemática utilizados na Academia Militar do Brasil. **Revista Zetetiké**, v.19, n. 35, jan/jul, p.11 – 35, Campinas, 2011.

SILVA, C. M.S.; SAD, L. A. . Um lugar para educação matemática na Academia Militar do Rio de Janeiro oitocentista. *In*: Congresso Iberoamericano de Historia de la educacion matematica, 1, 2011, Covilhã. **Anais...**, 2011.

SILVA, J. O. da. **Paul Ricoeur: A Ética no cruzamento entre a prática historiadora e a condição histórica**. 286 p. Tese (Doutorado em História). Universidade Federal do Rio Grande do Sul. 2015.

SOUSA, F.S.; ROCHA, M. L. P. C. Academia Real Militar: primeiros Livros utilizados para o Ensino de Matemática Superior no Brasil. **Revista REMATEC**, Belém, v.12, n. 26, set/dez, p.144 – 161, 2017.

STRECKER, G.; SCHNELLE, U. **Introducción a la exégesis del Nuevo Testamento**. Salamanca: Sigueme, 1997.

THOMPSON, J. B. **Ideologia e Cultura Moderna: Teoria social crítica na era dos meios de comunicação de massa**. 2.ed. Petrópolis: Vozes, 1990

VALENTE, W. R. **Uma História da Matemática Escolar no Brasil (1730 – 1930)**. 2. Ed. São Paulo: Livraria da Física, 2020.

VEYNE, P. **Como se escreve e história**. 4. Ed. São Paulo: UnB, 2014.