UNIVERSIDADE LUTERANA DO BRASIL
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
DIRETORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

A GEOMETRIA NO ENSINO MÉDIO:
UM ESTUDO SOBRE O DESENVOLVIMENTO DOS CONCEITOS DE COMPRIMENTO, ÁREA E VOLUME

JOÉL NARDI CHIELE
Autor

Dra. CARMEN TERESA KAIBER
Orientadora

Canoas, 2007.

UNIVERSIDADE LUTERANA DO BRASIL
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
DIRETORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

A GEOMETRIA NO ENSINO MÉDIO:

UM ESTUDO SOBRE O DESENVOLVIMENTO DOS CONCEITOS DE COMPRIMENTO, ÁREA E VOLUME

JOÉL NARDI CHIELE

Dra. CARMEN TERESA KAIBER

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil para obtenção do titulo de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Canoas, 2007.

A GEOMETRIA NO ENSINO MÉDIO:
UM ESTUDO SOBRE O DESENVOLVIMENTO DOS CONCEITOS
DE COMPRIMENTO, ÁREA E VOLUME

JOÉL NARDI CHIELE

Orientadora:

Profª. Drª Carmen Teresa Kaiber

Banca examinadora:

Profª. Drª. Maria Cristina Kessler

Profª. Drª. Claudia Lisete Oliveira Groenwald

Prof. Dr. Arno Bayer

Dissertação apresentada e aprovada em:
Canoas, 19 de abril de 2007.

Agradecimentos

A DEUS por ter me dado a vida.

Aos meus pais que me colocaram na vida.

A minha orientadora pelo apoio.

Aos meus professores que acreditaram em mim.

A ULBRA por ter me dado a oportunidade de crescimento.

E um agradecimento maior à minha MÃE pelo incentivo,
pois sem ele não estaria aqui.

Muito Obrigado!

RESUMO

A presente dissertação, que aborda o tema Geometria no Ensino Médio: um estudo sobre o desenvolvimento dos conceitos de comprimento, área, e volume, tem como objetivo investigar, junto a um grupo de alunos do 1º ano do Ensino Médio, o estágio de domínio de conhecimentos elementares em Geometria e o desenvolvimento dos conceitos de comprimento, área e volume, a partir de uma seqüência didática elaborada. Uma das razões fundamentais a qual ensejou a investigação é a constatação de que o ensino da Geometria, na Escola Básica, parece não estar atendendo aos pressupostos e objetivos estabelecidos e tem levado os alunos a não desenvolverem satisfatoriamente noções elementares, resultando em um aprendizado fragmentado e falho, sem a compreensão adequada dos conceitos. A investigação apóia-se em três hipóteses: o ensino da Geometria não tem atendido aos pressupostos e objetivos estabelecidos para o mesmo, o que tem levado os alunos a não desenvolverem satisfatoriamente noções elementares nessa área de conhecimento; alunos que finalizam o Ensino Fundamental encontram-se no nível básico do modelo de van Hiele; esses alunos ainda não se apropriaram adequadamente das noções de área e volume. Teoricamente, inspira-se no modelo do desenvolvimento do pensamento geométrico de van Hiele, apoiando-se nas pesquisas atuais sobre os processos de ensino e aprendizagem da Geometria e nas diretrizes dos Parâmetros Curriculares Nacionais. Metodologicamente, insere-se em uma perspectiva qualitativa, seguindo os pressupostos da engenharia didática, a qual se reveste de características tanto de uma metodologia de pesquisa quanto de uma seqüência de aulas concebidas, organizadas e articuladas, a fim de realizar um projeto de aprendizagem para uma determinada população de alunos. Assim, o processo metodológico permite não só o desenvolvimento do trabalho em sala de aula como também a investigação do mesmo. A investigação realizada confirmou as hipóteses estabelecidas indicando, ainda, que é possível o desenvolvimento de um trabalho específico o qual resgate noções e conceitos que não foram adequadamente construídos e internalizados ao longo dos anos escolares, possibilitando não só a apropriação dessas noções e conceitos, mas apresentando alternativas para a continuidade de uma aprendizagem efetivamente significativa, que permita potencializar o desenvolvimento do pensamento matemático e, em especial, o geométrico.

Palavras-chave: ensino da Geometria; modelo de van Hiele; áreas de figuras planas.

ABSTRACT

The current research - which boards the subject Geometry in High Education : A research into the development about concepts of length, area and volume - has as its major aim investigate, joined with a group of students of the first year, the period of the acquaintance of basic knowledge about Geometry and the development of concepts, such as length, area and volume, from a constructed didactic sequence. One of the main reasons which attempted this research was the verification that geometry's tuition in Basic School, seems do not reach the fixed purpose target and goals. Consequently, the students do not develop satisfactorily elementary notions, what results in a failed and fragmentary knowledge, without the right comprehension of the concepts.The research has based in three hypothesis: the geometry's tuition hasn't achieved the objectives that were established before, which has led the students don't develop satisfactorily elementary notions in this area of the knowledge; the students who conclude the intermediate school know the basic level of van Hiele's model; these students still don't comprehend properly the basic notions of area and volume. Theoretically, has its inspiration in the van Hiele's model of the geometric's thought development and also a research currently made regarding the Geometry Process of Knowledge as well as the guidelines of the National Parameters, means that methodologically, it is inserted in a qualitative perspective according the didactic engineering. This mentioned didactic engineering has characteristics as being a methodological research and also a sequence of organized classes in order to perform a project to some kind of students. Thus, the methodological process allows the work development together in class. The research confirms the established hypothesis, as well as indicate that the development of this specific work is possible, due to bring back the concepts which has not been correctly built for years at the school environment. The objective is to open new possibilities of continuity of the significant knowledge, means, to increase the development of the mathematic thought, and especially, the geometric one.

Key-words:
geometry's tuition, Van Hiele's Model, area of plain figures..

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Registros em desenhos e figuras feitos pelo homem neolítico sugerem a existência de relações espaciais, pois os objetos produzidos pelos mesmos mostravam congruência e simetria, que são partes da Geometria elementar. Para esse período não há documentos, mas as idéias podem ter sido as sementes que originaram a Matemática e com ela a Geometria (BOYER, 1974). Documentos sobre as antigas civilizações egípcia e babilônica comprovam conhecimento do assunto, geralmente ligado à astrologia.

Vitrac (2005) pondera que, no que se refere à origem da Geometria, a explicação mais aceita foi proposta pelo historiador Heródoto de Halicarnasso (século V a.C.) e está ligada à necessidade do povo egípcio de medir e partilhar terras férteis às margens do Nilo.

Mas foi na Grécia que grandes matemáticos deram forma definitiva à Geometria. Tales de Mileto teria sido o seu precursor na Grécia e os "Elementos" de Euclides representam a introdução de um método consistente que contribui, há mais de vinte séculos, para o progresso das ciências.

A Geometria que, atualmente, chega às escolas, a chamada geometria euclidiana, tem sua fundamentação no sistema axiomático proposto por Euclides, mas, no que se refere ao seu processo de ensino e aprendizagem, é influenciada pelo contexto social, filosófico, psicológico e pedagógico que intervém no sistema educativo.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1997) apontam que a construção do pensamento geométrico deve ocorrer ao longo da Educação Básica e que a Geometria não deve ser vista como um elemento separado da Matemática, mas como uma parte que ajuda a estruturar o pensamento matemático e o raciocínio dedutivo, devendo, portanto, permitir ao estudante examinar, estabelecer relações e compreender o espaço tridimensional onde vive.

Ademais, conteúdos temáticos envolvendo números e operações, espaços e formas, grandezas e medidas, bem como conceitos geométricos constituem fator importante para estruturar o pensamento matemático, desenvolver o raciocínio dedutivo, além de alcançar um tipo espacial de pensamento que permite ao aluno interpretar e compreender melhor a realidade e o espaço tridimensional em que vive. Os Parâmetros Curriculares Nacionais apontam o estudo da Geometria como um campo fértil para trabalhar com situações-problemas, constituindo-se num tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente. O trabalho com noções geométricas, igualmente, contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades.

Além disso, o trabalho com espaço e forma pressupõe que o professor de Matemática explore situações em que sejam necessárias algumas construções geométricas com régua e compasso, visualização e aplicação de propriedades das figuras, além da construção de outras noções relativas à posição, localização de figuras, percepção espacial e deslocamentos no plano e sistemas de coordenadas.

Percebe-se, entretanto, que a importância dada à Geometria, nos documentos oficiais, nem sempre está presente nas aulas de Matemática, pois aspectos numéricos e algébricos são priorizados em detrimento dos geométricos, trabalhando-se a Geometria, via de regra, desvinculada das outras áreas e, quase sempre, como último conteúdo desenvolvido.

Assim, uma das razões fundamentais que ensejou a realização da presente pesquisa é a constatação de que o ensino da Geometria, na escola básica, não está atendendo aos pressupostos e objetivos estabelecidos para o mesmo, levando os alunos a não desenvolverem satisfatoriamente noções elementares nessa área de conhecimento, fato que resulta em um aprendizado falho, fragmentado e pontual de tal maneira que, ao final do Ensino Fundamental, boa parte dos alunos ainda não tem a noção adequada de comprimento, área e volume.

Nesse contexto, este trabalho propõe o desenvolvimento de uma investigação no âmbito da Geometria junto a um grupo de alunos do 1º ano do Ensino Médio, tendo como objetivo identificar o nível de desenvolvimento das noções de comprimento, área e volume, bem como o estabelecimento de estratégias para desenvolver e aprofundar essas noções junto aos alunos, a partir de uma seqüência didática elaborada.

A pesquisa será realizada junto a um grupo de alunos do 1º ano do Ensino Médio da Escola Estadual Julio Mangoni, na Vila Jansen - uma comunidade inserida na área rural e que se caracteriza pela produção de frutas no interior do município de Farroupilha/RS com o objetivo de investigar o estágio de domínio de conhecimentos elementares em Geometria ao concluírem o Ensino Fundamental e ingressarem no Ensino Médio.

O aporte teórico da investigação assenta-se no modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de van Hiele, nas pesquisas atuais sobre os processos de ensino e aprendizagem da Geometria e nas diretrizes dos Parâmetros Curriculares Nacionais, sendo que, metodologicamente, a investigação insere-se em uma perspectiva qualitativa, seguindo os pressupostos da engenharia didática.

A engenharia didática caracteriza-se como uma forma particular de organização dos procedimentos metodológicos da pesquisa em didática da Matemática, já que a mesma possibilita uma sistematização metodológica para realização prática de pesquisa, levando em consideração as relações de dependência entre a teoria e a prática, desenvolvendo-se por meio de quatro fases consecutivas: análises preliminares, análise *a priori* e concepção da engenharia, experimentação, e análise *a posteriori* e validação. Trata-se de uma metodologia de pesquisa específica, realizada através de uma seqüência de aulas concebidas, organizadas e articuladas no tempo, de forma coerente, em que um professor-engenheiro desenvolve um projeto de aprendizagem com um grupo de alunos, o qual evolui através de um processo de trocas entre professor e alunos, em função das escolhas e decisões do professor (ARTIGUE, 1995).

Assim, o capítulo 1 aborda, em linhas gerais, aspectos da história da Geometria, enquanto que o capítulo 2 registra a fundamentação teórica da pesquisa que se apóia no modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele e no desenvolvimento da pesquisa dos processos de ensino e aprendizagem da Geometria. O capítulo 3 apresenta as intenções, a delimitação do tema, o objeto de investigação, a metodologia adotada, o percurso investigativo e a forma de desenvolvimento dos trabalhos. Por fim, o capítulo 4 traz o desenvolvimento da engenharia didática junto ao grupo de alunos, bem como a análise do processo.

Tudo indica que o modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de van Hiele, aliado a um processo metodológico específico, quando trabalhado de forma adequada, em todos os graus de ensino, pode concorrer significativamente para a superação de deficiências no processo de ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos e geométricos e para um desenvolvimento mais satisfatório das noções elementares dessa importante área do conhecimento.

Assim, a presente investigação busca a construção de uma proposta que pretende contribuir para desenvolvimento de processos de ensino e aprendizagem sistemáticos e eficazes, que permitam uma verdadeira apropriação, por parte dos alunos, dos conceitos e procedimentos trabalhados.

1 ASPECTOS HISTÓRICOS DO DESENVOLVIMENTO DA GEOMETRIA

Os primeiros rudimentos da Matemática não foram registrados da forma como se conhece, mas há evidências de que, conforme Boyer (1974), conceitos de número, grandeza e forma já eram conhecidos nos primeiros tempos da vida humana. A percepção abstrata do número talvez tenha levado um longo tempo e tenha sido gradual, juntamente com as idéias de espaço e forma que se formaram no decorrer do tempo. A necessidade diária levou os povos primitivos a contar e desenhar, dando origem à Geometria. As pesquisas arqueológicas e o desenvolvimento da tecnologia fornecem provas de que a idéia de número é muito antiga, cerca de trinta mil anos atrás. Mas, como não se tem registros escritos, não se pode afirmar com certeza a origem da Matemática, isto é, da Aritmética e da Geometria.

Segundo Vitrac (2005), no que se refere à origem da Geometria, a explicação mais aceita foi proposta pelo historiador Heródoto de Halicarnasso, no segundo dos nove livros de sua *Enquete* (século V a.C.). Ele narra as guerras entre os gregos e os povos do Império Persa e investiga suas causas, o que lhe permite descrever os costumes e as instituições dos povos.

Por volta do ano 445, Heródoto fez uma leitura pública de sua obra em Atenas. O livro, dedicado ao Egito, traz a mais antiga menção da palavra grega "geometria" (dita por Heródoto) conhecida atualmente. Os sacerdotes egípcios contaram a Heródoto que o rei Sesóstris dividia o solo entre todos, atribuindo um lote igual a cada um e prescrevendo que cada detentor passaria a lhe dever um tributo anual com base nessa repartição. Como, em função das cheias, algumas vezes o Nilo lhes tomava parte do lote, o proprietário prejudicado ia ao encontro do soberano, que averiguava quanto o terreno diminuíra para, então, providenciar um abatimento proporcional no tributo a ser pago. Ao que tudo indica, concluía Heródoto, foi isso que ensejou o nascimento da Geometria. Ele afirma que os gregos – sem afirmar quais – transmitiam uns aos outros esse conhecimento (VITRAC, 2005).

Ainda, segundo o autor, a força da descrição de Heródoto é etimológica: Geometria constitui-se do prefixo "geo", derivado de "gê", a terra, e do verbo "métrein", "medir". Daí a equação: "geometria = medida de terra", e a idéia de que ela teria nascido da agrimensura.

De acordo com Boyer (1974), Heródoto acreditava que a geometria surgiu da necessidade de medir as terras do povo egípcio. Porém, Aristóteles tinha outro pensamento: achava que os rituais e o lazer dos sacerdotes egípcios deram origem às formas. Considera, ainda, que, na Índia, também foram encontrados vestígios de uma geometria rudimentar, na construção de templos e altares.

> Heródoto e Aristóteles não quiseram se arriscar a propor origens mais antigas que a civilização egípcia, mas é claro que a Geometria que tinham em mente possuía raízes mais antigas. Heródoto mantinha que a Geometria se originava no Egito, pois acreditava que tinha surgido da necessidade da prática de fazer novas medidas de terra após cada inundação anual no Vale do Rio Nilo. Aristóteles achava que a existência, no Egito, de uma classe sacerdotal com lazeres é que tinha conduzido ao estudo da Geometria (BOYER, 1994, p. 4).

Para o autor, os registros em desenhos e figuras feitos pelo homem neolítico, encontrados nas escavações, já sugerem a existência de relações espaciais, pois os objetos produzidos pelos mesmos mostram congruência e simetria. Do período pré-histórico não há documentos, mas a origem presumida de um conceito pode ser a reaparição de uma idéia muito antiga que ficara esquecida.

> O homem neolítico pode ter tido pouco lazer e pouca necessidade de medir terras, porém seus desenhos e figuras sugerem uma preocupação com relações espaciais que abriu caminho para a Geometria. Seus potes, tecidos e cestas mostram exemplos de congruência e simetria, que em essência são parte da geometria elementar (BOYER, 1974, p. 4).

Entretanto, Boyer ressalta que as teorias existentes sobre a origem do contar, medir e desenhar são meras conjecturas, sendo mais antiga que as mais antigas das civilizações. Essa idéia baseia-se em documentos escritos encontrados e que existem até hoje como prova.

Muitas das informações da Matemática egípcia vêm do Papiro Rhind ou de Ahmes (85 problemas) e do Papiro de Moscou (25 problemas). Dos cento e dez problemas contidos nesses documentos vinte e seis são geométricos. Muitos deles referem-se a cálculos de áreas e volumes e têm um caráter essencialmente prático. No Papiro de Moscou, há uma figura a qual parece um trapézio, mas os cálculos mostram que o desenho representa um tronco de pirâmide (BOYER, 1974).

Estes papiros são de época bastante antiga, mil anos antes do surgimento da Matemática grega, mas a Matemática egípcia parece ter permanecido uniforme durante sua longa história. Assim, verifica-se a Geometria pode ter sido uma dádiva do Nilo, mas os egípcios pouco a aproveitaram (BOYER, 1974).

Os Babilônios, civilizações antigas da Mesopotâmia, eram melhores que os egípcios na álgebra, porém, contribuíram menos para geometria. Em 1936, um grupo de tabletes matemáticos foi desenterrado em Susa, a cerca de trezentos quilômetros da Babilônia, incluindo resultados significativos. Não se sabe se os resultados egípcios e assírios eram sempre obtidos independentemente, mas os assírios foram melhores que os egípcios, tanto na Geometria quanto na Álgebra. O teorema de Pitágoras foi encontrado nos tabletes dos babilônios antigos, assim como outras importantes relações geométricas (BOYER, 1974).

Restaram poucos documentos das reconstruções matemáticas gregas primitivas. Os papiros e tabletes encontrados em civilizações antigas, pré-helênicas, contêm casos específicos e problemas sem formulações gerais. Naquela época, boa parte da humanidade se preocupava com problemas imediatos de sobrevivência. Muito da Matemática pré-helênica era prática, mas certamente não toda.

Foi no sexto século a.C. que apareceram, na Grécia, Tales e Pitágoras que não se sabe se compuseram alguma obra. No entanto, um bom número de descobertas matemáticas são atribuídas a eles por tradição. No Egito, aprenderam Geometria e a proposição agora conhecida como teorema de Tales pode ter sido aprendida pelo mesmo durante suas viagens à Babilônia. Por isso, Tales é considerado o primeiro matemático verdadeiro, que deu origem à organização dedutiva da Matemática. Não há provas de que Tales tenha criado a Geometria demonstrativa, mas a ele foram atribuídas descobertas matemáticas específicas. Deu uma grande contribuição à organização racional do assunto, acrescentando à Geometria o elemento novo da estrutura lógica (BOYER,1974).

Pitágoras viajou pelo Egito e Babilônia, talvez até à Índia, absorvendo informações matemáticas, astronômicas e idéias religiosas. Fundou uma sociedade secreta com bases matemáticas e filosóficas. Alguns estudiosos sugerem que Pitágoras aprendeu seu teorema com os Hindus, entretanto, estudos recentes mostram ser isso altamente improvável, dada a familiaridade dos babilônios com o teorema pelo menos mil anos antes.

O quinto século a.C. ficou conhecido como a Idade Heróica, de Anaxágoras a Arquitas, pois nunca mais, em qualquer época, se faria um ataque tão audacioso a tantos problemas matemáticos, fundamentais com recursos metodológicos tão insuficientes. Nessa época surgiram seis problemas fundamentais: quadratura do círculo, duplicação do cubo, trissecção do ângulo, razão de grandezas incomensuráveis, paradoxos do movimento e validade dos métodos infinitesimais.

De acordo com Boyer (1974), praticamente não existem documentos matemáticos ou científicos até os dias de Platão no quarto século a.C. Arquitas de Tarento foi uma figura de transição na Matemática durante o tempo de Platão, por ser um dos últimos pitagóricos. A escola de Platão, Academia Platônica de Atenas era conhecida como o centro da atividade matemática da época, a qual guiava e inspirava seu desenvolvimento. Sobre as portas da sua escola lia-se, "Que ninguém que ignore a geometria entre aqui". Platão ficou conhecido como o criador de matemáticos, principalmente por seu papel como inspirador e guia de outros. Discutiu os fundamentos da Matemática, esclareceu algumas definições e reorganizou as hipóteses. Frisou que o raciocínio usado na Geometria não se refere às figuras visíveis desenhadas, mas às idéias absolutas que elas representem.

Boyer afirma que muitos matemáticos se distinguiram no quarto século a.C., como Teodoro de Cirene, Teaetetus, Eudoxo de Cnido, Manaecmus, Dinóstrata, Autolicus de Pitane, pois estavam associados à Academia de Platão em Atenas. Aristóteles, o homem mais erudito de todos os tempos, cuja morte em geral se considera o fim da Idade Helênica, na história da civilização Grega, foi discípulo de Platão. Era filósofo e biólogo, mas estava a par das atividades dos matemáticos, sendo atribuída a ele a análise do papel das definições e hipóteses na Matemática.

Para Vitrac (2005), o período helênico de realizações extraordinárias em relação à Matemática se iniciou com Tales, através de uma Geometria demonstrativa, e culminou com os Elementos de Euclides.

Segundo o autor, não se sabe nada a respeito dos anos de formação de Euclides. Mas, Proclo de Constantinopla (morto em 485) não hesita em afirmar, ao redigir seu comentário sobre o livro primeiro dos *Elementos*, que Euclides era platônico, baseado na obra com a construção de figuras "platônicas".

De acordo com Vitrac (2005), Proclo tinha razão em um ponto: há, certamente, uma ligação entre Platão e Euclides, mais precisamente entre a cosmologia platônica e o final do livro XIII dos *Elementos*. Em seu diálogo *Timeu*, composto entre os anos 360 e 355 a.C., Platão utiliza a associação entre elementos e poliedros para explicar – por meio da decomposição e recomposição das figuras sólidas a partir de suas faces – as transformações mútuas de três dos quatro elementos (fogo, ar e água) observáveis no mundo físico. De fato, os correspondentes sólidos, por serem todos compostos de triângulos eqüiláteros, prestam-se bem a essas operações. Desse modo, a cada um dos quatro elementos fundamentais que compõem o mundo (fogo, ar, água e terra), associou um sólido regular: tetraedro para fogo, octaedro para o ar, icosaedro para a água e cubo para a terra. O elemento terra, representado por um cubo, escapa às transmutações. Segundo o autor, Platão utilizou, ainda, uma quinta figura para “representar o Universo em seu conjunto”: trata-se do dodecaedro, que não é nomeado por Platão. Em suas proposições XIII-13 a XIII-17, Euclides constrói (e circunscreve com uma esfera) todos esses sólidos. Na última proposição do tratado (XIII-18), compara o comprimento das arestas das cinco figuras. Segundo o autor, surge aí a ligação entre os dois: a denominação tradicional de “figuras platônicas”, que os cinco poliedros recebem, a qual se deve à grande fama que obtiveram Platão e seu *Timeu*.

Contudo, consoante o autor, a dedução feita por Proclo a respeito da filiação filosófica de Euclides é incerta por dois motivos. O primeiro é que, independentemente de quaisquer conotações filosóficas, os cinco sólidos regulares possuem um interesse evidente para todos os geômetras. Como o próprio Proclo afirma, esses poliedros exibem uma propriedade notável: embora seja possível inscrever, dentro de uma circunferência, uma infinidade de polígonos eqüiângulos e eqüiláteros, não existem senão cinco sólidos regulares inscritíveis em uma esfera. Ela, ao contrário da circunferência, não se deixa dividir de infinitas maneiras em porções iguais, mas somente de cinco maneiras. No entanto, a esfera é o análogo tridimensional da circunferência. O segundo motivo é que Proclo já havia mencionado os poliedros regulares ao descrever a genealogia dos *Elementos*. Ele afirma: ”Pitágoras transformou o estudo da Geometria em um esquema de educação liberal; (...) foi ele quem descobriu o estudo dos irracionais e a construção das figuras cósmicas [os cincos sólidos regulares]”. Assim, como Pitágoras havia descoberto a construção dos cinco sólidos regulares, Euclides não seria platônico, mas pitagórico (VITRAC, 2005).

Segundo Ricieri (1989), Euclides viveu na cidade de Alexandria, provavelmente na primeira metade do terceiro século a.C. Das informações sobre esse grande matemático, não se pode demarcar, com exatidão, o local ou mesmo a data de seu nascimento, mas sabe-se que fundou uma escola em Alexandria, no reinado de Ptolomeu I (307-284 a.C.), onde ensinou Filosofia e Geometria e que estava começando a ordenar através de uma linguagem mais precisa e operacional.

Diz a lenda que, certa manhã, o rei Ptolomeu I aproximou-se de Euclides e perguntou-lhe se não haveria um modo mais rápido para que ele, o rei, pudesse aprender a elegante Geometria. Este lhe respondeu: “Não existe um atalho real para o aprendizado da Geometria”.

Para o autor, dentre as contribuições à humanidade, Euclides deixou sua melhor obra - Os Elementos - subdividida em treze livros, perpetuados em manuscritos árabes e gregos e escritos por volta de 300 anos a.C., sendo que sua primeira versão só surgiu em 1482, na cidade italiana de Veneza. Os resultados dessa obra serviram de base para toda a evolução da Matemática e foram considerados como o primeiro anel dentro da evolução da mesma. Esse trabalho só seria complementado no século XIX, quando Riemann e Lobatchevski criaram uma nova Geometria, a não-euclidiana, que serviria de base para os trabalhos de Albert Einstein na sua famosa e revolucionária Teoria Geral da Relatividade.

Na seqüência, Ricieri (1988), apresenta os assuntos que os treze livros abordaram:

- no 1º Livro, Euclides definiu ponto, reta e plano, fazendo um estudo das retas paralelas, perpendiculares e concorrentes, estudando os triângulos e o Teorema de Pitágoras;
- o 2º Livro estabeleceu relações entre áreas dos quadrados e dos retângulos;
- os Livros 3º e 4º demonstraram as principais propriedades do círculo, dos ângulos, polígonos regulares e irregulares;
- nos Livros 5º e 6º Livros, evidenciando grande maturidade científica, Euclides apresentou uma série de soluções para problemas envolvendo áreas de figuras geométricas planas, fazendo, também, um estudo sistemático do que viria a ser, futuramente, a equação do segundo grau;
- os Livros 7º, 8º e 9º foram dedicados ao estudo da Teoria dos Números;
- os Livros 11º, 12º e 13º conceituaram a Geometria Espacial, voltando a atenção para importantes demonstrações sobre volume dos paralelepípedos, pirâmides e esferas, estabelecendo, também, as

relações entre os volumes dos cinco sólidos regulares (tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro).

Embora nem tudo o que escreveu nos seus *Elementos* tenha sido criação sua, Euclides teve importância notável, pois foi o primeiro matemático que se preocupou em reunir todo o conhecimento matemático avulso e dar-lhe ordenação através de linguagem científica (RICIERI, 1988).

Para entender plenamente o pioneirismo de Euclides, na história da Matemática, Ricieri propõe meditar sobre a essência da metáfora de Edina Milay (18 anos): “Euclides foi o único a contemplar a beleza ainda nua.”.

> Perfeita do ponto de vista estético, a afirmação induz a ver em Euclides, o primeiro, aquele que certamente deu vida a uma estrutura científica que se desenvolveria de modo inigualável, atingindo sua maturidade com o Cálculo Diferencial e Integral (RICIERI, 1989, p. 23).

2 O ENSINO DA GEOMETRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Segundo Huete e Bravo (2006), a Matemática distingue-se por seu aspecto formal e abstrato e por sua natureza dedutiva, porém, sua construção liga-se a uma atividade concreta sobre os objetos, para a qual o indivíduo necessita intuição como processo mental. Para os autores, o processo de ensino e aprendizagem da Matemática inicia-se a partir da intuição e, progressivamente, aproxima-se da dedução, assumindo um caráter mais construtivo que dedutivo. Argumentam que, se assim não fosse, seria uma ciência memorialística, longe de seu caráter de representação, explicação e previsão da realidade.

Fainguelernt (1999) considera oportuno esclarecer os principais tópicos epistemológicos que interagem nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática. Para a autora, existem três níveis de questões que interagem: as de Epistemologia da Matemática, as de Epistemologia da Psicologia e as de Epistemologia da Educação Matemática, sendo que o conhecimento matemático é construído tradicionalmente por meio de algumas abordagens. Uma delas é a reflexão feita pelos matemáticos acerca da natureza do conhecimento matemático e a natureza dos processos de descoberta. Segundo a autora, alguns grandes matemáticos preocuparam-se em estabelecer o *status* do pensamento matemático, como Poincaré (1913, 1920) e Hadamard (1949). Outra abordagem é a histórica, cujo objetivo é compreender o ambiente científico e social nos quais novos conceitos matemáticos e novas técnicas emergiram e se desenvolveram, sendo que essa abordagem pode ser encontrada, conforme a estudiosa, em Davis e Hersh (1981). Considera, ainda, que recentemente esses aspectos têm sido privilegiados como temas de pesquisa.

Ainda, segundo Huete e Bravo (2006), das concepções para o entendimento da Matemática e de sua posterior transferência para as aulas emergem os princípios de uma Matemática realista, os quais “contribuem para a bagagem cultural das pessoas; tentam salvar o dualismo saber-e-utilizar Matemática; não devem ser separados das demais ciências”, levando a dois fatores considerados, pelos autores, imprescindíveis no processo de ensino e aprendizagem da Matemática:

> uso e incentivo dos procedimentos intuitivos como mediação para explorar e construir formalmente o conhecimento matemático; conhecimento dos alunos em relação às idéias prévias que possuem e o grau de dificuldade que poderiam manifestar pelo nível de desenvolvimento intelectual alcançado (HUETE e BRAVO, 2006, p. 18).

Duval (2003) considera que as questões envolvidas na compreensão e aquisição do conhecimento matemático não podem se restringir ao campo matemático ou a sua história. É necessária uma abordagem cognitiva que busque descrever o funcionamento cognitivo que possibilite ao aluno compreender, efetuar e controlar os diversos processos matemáticos propostos nas situações de aprendizagem. Para o autor, essa atividade solicitada pela Matemática estaria intimamente relacionada às diferentes representações semióticas requeridas pelos objetos matemáticos os quais, por sua natureza, não são perceptíveis ou observáveis.

Em relação à Geometria, é consenso que a mesma desempenha um papel integrador entre as diversas áreas da Matemática, além de ser um campo fértil para o exercício de aprender a fazer e aprender a pensar.

Segundo Fainguelernt (1999), os estudos desenvolvidos mais recentemente, no campo do ensino e da aprendizagem de Geometria, liderados por Rina Hershkovitz e Abraham Arcavi, no *Weizmann Institute* (Israel) e na *Berkley University* (Estados Unidos), demonstram que as interações do aprendiz com o meio desempenham papel ativo no processo de ensino-aprendizagem da Geometria e estão baseadas na teoria da concepção do espaço pela criança, bem como nos aspectos psicológicos desses processos.

Conforme a autora, dois aspectos importantes devem ser considerados nos processos de ensino-aprendizagem de Geometria: a visão da mesma como uma ciência do espaço e como uma estrutura lógica.

Como uma ciência do espaço,

> a Geometria, desenvolvendo teorias de idéias e métodos para se poder construir e estudar modelos idealizados do mundo físico, requer que a exploração e a descrição do espaço devam ser trabalhadas desde os primeiros anos de escolaridade. A Geometria, nas suas raízes, é pensada como uma ferramenta para descrever o espaço e medir figuras. (FAINGUELERNT & HERSHKIWITZ apud FAINGUELERNT, 1999).

Considerada como uma estrutura lógica,

> sendo a Geometria um ponto de encontro entre a Matemática como teoria e a Matemática como um recurso, ela é um caminho para desenvolver o pensamento e a compreensão para alcançar o nível mais alto de uma teoria formal. Somente quando essa perspectiva é atingida, a noção de estrutura matemática faz sentido. (FAINGUELERNT & HERSHKIWITZ apud FAINGUELERNT, 1999).

A autora ressalta, ainda, que esses dois aspectos estão ligados, uma vez que, para compreender a Geometria como uma estrutura lógica, é necessário ter alcançado alguns níveis da Geometria como ciência do espaço.

Esses aspectos estão presentes na própria construção histórica da Geometria. Gerdes considera que ela nasceu como uma ciência empírica ou experimental, sendo que, "na confrontação com o seu meio ambiente, o Homem da Antiga Idade da Pedra chegou aos primeiros conhecimentos geométricos" (1992, p.17). A passagem da Geometria de uma ciência empírica para uma ciência matemática estruturada ocorreu, de forma lenta, a partir do processo de aquisição de imagens abstratas das relações espaciais entre os objetos físicos e suas partes. Posteriormente,

> Depois de ter sido reunido suficiente material factual respeitante as formas espaciais mais simples, tornaram-se possível, sob condições sociais especiais, como, por exemplo, no Egito antigo, Mesopotâmia e China, sistematizar consideravelmente o material factual recolhido. Com isso começou a transformação da geometria de uma ciência empírica numa ciência matemática... (GERDES, 1992, p.17).

Assim, desde seu nascimento como ciência empírica, pela necessidade do homem dominar e transformar a natureza, passando pela sua estruturação como uma ciência matemática nas diferentes sociedades e culturas, a Geometria chega, atualmente, às salas de aula de todos os níveis de ensino com dificuldades no seu processo de ensino e aprendizagem. Essas dificuldades vão desde um excesso de formalismo apoiado em demonstrações baseadas no raciocínio lógico-dedutivo, passando por um tratamento excessivamente algébrico ou um empirismo que em nada contribui para a construção do pensamento geométrico até uma ausência total do seu ensino.

Objetivando discutir as atuais tendências didático-pedagógicas no ensino de Geometria no Brasil, Andrade e Nacarato (2004) realizaram um estudo que se constitui em uma análise dos Anais dos Encontros Nacionais de Educação Matemática no período de 1987 a 2001. Foram analisados 363 trabalhos, apresentados em sete Encontros Nacionais.

Os autores identificaram duas tendências didático-pedagógicas: Geometria Experimental e Geometria em Ambientes Computacionais. Foram consideradas, na categoria Geometria Experimental, "todas as produções geométricas resultantes da experiência e da ação humanas, ou seja, o que se refere a construções geométricas e formas de representação do mundo, mediadas pela experimentação" (p.62). Em relação à Geometria em Ambientes Computacionais, foram consideradas produções em ambientes de Geometria Dinâmica e Geometria no ambiente LOGO.

Consideram o V ENEM, em 1995, como um marco para o ensino da Geometria, pois, a partir desse encontro, é possível perceber a presença de trabalhos cujas características vão além das puramente ativistas.

> Constata-se que a Geometria Experimental e aquela com recursos computacionais mudam o foco, distanciando-se de uma característica puramente ativista para encaminhamentos que contemplam: a perspectiva sociocultural, a perspectiva das provas e argumentações/refutações e a busca de aportes teóricos (ANDRADE e NACARATO, 2004, P.63).

No que se refere ao aspecto busca de aportes teóricos para o ensino e aprendizagem da Geometria, os autores apontam, além dos fundamentados na Psicologia, trabalhos pautados pelo modelo de van Hiele, no qual se fundamenta o presente trabalho, pela Didática Francesa e pelos construtos epistemológicos relativos à visualização e representação.

Emergiu do estudo, de acordo com os autores, que a tendência para o ensino da Geometria.

> vem se pautando em abordagens mais exploratórias, em que os aspectos experimental e teórico do pensamento geométrico são considerados, quer na utilização de diferentes mídias, quer em contextos de aulas mais dialogadas, com produção e negociação de significados, quer na utilização de softwares de geometria dinâmica (ANDRADE e NACARATO, 2004, P.69).

O quadro atual das pesquisas e das tendências para o ensino e aprendizagem da Geometria nem sempre mostra sua presença nos currículos de Matemática e menos ainda em sala de aula.

Nesse contexto, considera-se relevante buscar um perfil do papel que a Geometria desempenha, atualmente, nos currículos de Matemática, baseado nos Parâmetros Curriculares Nacionais, bem como aprofundar questões relativas aos aportes teóricos que sustentam o seu processo de ensino e aprendizagem.

2.1 A Geometria no currículo de Matemática: do movimento Matemática Moderna aos Parâmetros Curriculares Nacionais

Geometria é um tema sobre o qual repousam, atualmente, controvérsias e unanimidades. Desde o movimento da Matemática Moderna e seu reflexo no Brasil, sentido oficialmente através da reforma do ensino de 1º e 2º graus, introduzido pela Lei 5.692 de 1971, o ensino da Geometria foi relegado a um segundo plano, cedendo espaço a conteúdos que contemplam a lógica e as relações abstratas como álgebra e topologia.

Até a reforma de 1971, o ensino da geometria euclidiana fazia parte do currículo das escolas de primeiro grau e tinha um caráter eminentemente dedutivo com hipótese, tese e demonstração. Esses aspectos eram ensinados aos alunos, que faziam uma leitura das demonstrações, decoravam-nas e as reproduziam, mas dificilmente conseguiam elaborá-las. Na oportunidade, os currículos foram reformulados e os novos passaram a contemplar um ensino da Geometria algebrizado, distribuído por todas as séries do que passou a se chamar Ensino Fundamental, de forma fragmentada e desvinculada dos demais conteúdos da própria Matemática.

Em relação ao ensino da Geometria, a intenção das mudanças pode ter sido boa, pois o modelo antigo já estava superado, mas os resultados não foram satisfatórios. A nova organização, além de distribuí-la ao longo das séries, o que por si só é positivo, o fez de modo tal que os mesmos foram colocados, nos programas oficiais, sempre no final da série, o que propiciou que, freqüentemente, não fossem abordados, principalmente em função da falta de tempo para o cumprimento do programa. Os livros didáticos passaram a ser editados trazendo a Geometria em capítulo separado e, geralmente como o último do livro. Ficou decretado, desse modo, e, na prática, o total abandono do ensino da Geometria.

Já no início dos anos noventa, pesquisadores brasileiros como Perez (1991, 1995a), Nasser (1991), Pavanello (1993) e Lorenzato (1995) confirmavam essa realidade.

Segundo Lorenzato (1995), além do currículo e dos livros didáticos afetarem diretamente o ensino da Geometria, um outro componente reforça a situação: os professores não sabem esse conteúdo. Em sua pesquisa, realizada com 225 professores de 1ª a 4ª série, com cerca de dez anos de experiência, na qual foram propostas oito questões de geometria euclidiana (conceitos de ângulo, paralelismo, área e volume), foram obtidas 2040 respostas erradas, isto é, o máximo de erro. A pesquisa revelou que somente 8% dos professores investigados admitiram que tentavam ensinar Geometria. O autor afirma que os educadores não sabem Geometria porque, nos cursos de formação de professores, ela possui uma posição muito frágil. Segundo o autor, "presentemente, está estabelecido um círculo vicioso: a geração que não estudou Geometria não sabe como ensiná-la" (LORENZATO, 1995, p.4).

As pesquisas de Pavanello (1993) apontam para uma ausência quase que total da Geometria nas salas de aula, justificada, em grande parte, pela constatação de que os professores não dominam satisfatoriamente essa área do conhecimento matemático.

No Ensino Fundamental e Médio, segundo Nasser (1991), é um dos conteúdos que, no planejamento de muitos professores, é desenvolvido no final do ano letivo, prejudicando o bom desenvolvimento desse estudo, já que o tempo é limitado e insuficiente. Assim o aluno, em geral, não faz um estudo adequado ou, muitas vezes, nem chega a estudá-lo durante o período escolar.

Atualmente, apesar das pesquisas indicarem um significativo avanço nas propostas para o ensino e aprendizagem da Geometria, conforme apontado por Andrade e Nacarato (2004), os reflexos em sala de aula são muito tímidos, pois ela continua ocupando um segundo plano. Os aspectos numéricos e algébricos são priorizados pelos professores e, freqüentemente, a Geometria não é trabalhada e, quando o é, são destacados os aspectos algébricos e não os próprios do desenvolvimento do pensamento geométrico.

2.1.1 O que indicam os Parâmetros Curriculares Nacionais

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1997) apontam que a construção do pensamento geométrico deve ocorrer ao longo da Educação Básica e que a Geometria não deve ser vista como um elemento separado da Matemática, mas como uma parte que ajuda a estruturar o pensamento matemático e o raciocínio dedutivo, devendo, portanto, permitir ao estudante examinar, estabelecer relações e compreender o espaço tridimensional onde vive.

Para a Educação Infantil, considerando a faixa etária de 0 a 3 anos, os PCN's (Brasil, 1997) apontam como conteúdos matemáticos "a utilização da contagem oral, de noções de quantidade, de tempo e de espaços em jogos, brincadeiras e músicas junto com o professor nos diversos contextos nos quais as crianças reconheçam essa utilização como necessária". Na faixa etária de 4 a 6 anos, os conteúdos estão organizados em três blocos: "números e sistemas de numeração", "grandezas e medidas" e "espaço e forma". Dentro desse último bloco então a exploração e identificação de propriedades geométricas de objetos e figuras, como formas, tipos de contornos, bidimensionalidade, tridimensionalidade, faces planas, lados retos e outros.

Já nos PCN's de Matemática de 1ª a 8ª séries (BRASIL, 1997), a disciplina de Matemática está dividida em quatro blocos de conteúdos:

- números e operações (Aritmética e Álgebra);
- espaço e formas (Geometria);
- grandezas e medidas (interligações entre os campos anteriores);
- tratamento de informação (Estatística, Probabilidades e Combinatória).

Com relação ao bloco espaço e forma, os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no ensino fundamental porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo de pensamento espacial que lhe permite compreender, de forma organizada, o mundo em que vive.

Nesse contexto, os PCN's apontam o estudo da Geometria como um campo fértil para trabalhar com situações-problema, sendo um tema pelo qual os alunos costumam interessar-se naturalmente. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades, entre outros.

O trabalho com espaço e forma pressupõe que o professor de Matemática explore situações em que sejam necessárias algumas construções geométricas com régua e compasso, como visualização e aplicação de propriedades das figuras, além da construção de outras relações. Esse bloco de conteúdos contempla não apenas o estudo das formas, mas também as noções relativas à posição, localização de figuras e deslocamentos no plano e sistemas de coordenadas.

Destaca-se, ainda, a importância das transformações geométricas (isometrias, homotetias), a fim de permitir o desenvolvimento de habilidades de percepção espacial e como recurso para induzir, de forma experimental, a descoberta, por exemplo, das condições para que duas figuras sejam congruentes ou semelhantes (BRASIL, 1997).

Além disso, é fundamental que os estudos do espaço e forma sejam explorados a partir de objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, de modo que permita ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas de conhecimento.

No Ensino Médio, o ensino da Matemática, de modo geral, deve dar ênfase ao desenvolvimento de competências que são metas a serem perseguidas durante essa etapa da escolaridade. São três grandes competências a serem desenvolvidas:

- representação e comunicação, que envolvem a leitura, a interpretação e a produção de textos nas diversas linguagens;
- investigação e compreensão, marcada pela capacidade de enfrentamento e resolução de situações problema,utilização dos conceitos e procedimentos peculiares do fazer e pensar das ciências;
- contextualização das ciências no âmbito sócio-cultural, na forma da análise crítica das idéias e dos recursos da área e das questões do mundo que podem ser respondidas ou transformadas por meio do pensar e do conhecimento científico.

A seleção e utilização de instrumentos de medição e de cálculo, a representação de dados e a utilização de escalas, fazer estimativas, elaborar hipóteses e interpretar resultados estão fortemente presentes nos PCN's (BRASIL, 1999) e podem estar integrados ao desenvolvimento da Geometria.

Com relação à Geometria, sua presença nas formas naturais e construídas faz com que seja essencial à descrição, à representação, à medida e ao dimensionamento de uma infinidade de objetos e espaços na vida diária e nos sistemas produtivos e de serviços. Para o desenvolvimento desse tema, são propostas quatro unidades temáticas: geometria plana, espacial, métrica e analítica.

Ainda, segundo os PCN's, as propriedades de que a Geometria trata estão associadas à posição relativa das formas e às medidas, o que origina duas maneiras diferentes de pensar em Geometria: a primeira, marcada pela identificação de propriedades relativas a paralelismo, perpendicularismo, intersecção e composição de diferentes formas e a segunda, que tem como foco quantificar comprimentos, áreas e volumes, objeto dessa investigação.

Assim, percebe-se, nos PCN's, que a Geometria está presente ao longo de toda a educação básica, ocupando um espaço similar às demais áreas (como Álgebra, Grandezas e Medidas, Tratamento da Informação). Porém, essa importância que é dada a Geometria nos PCN's nem sempre está presente nas aulas de Matemática. É dada ênfase nos aspectos numéricos e algébricos, em detrimento de aspectos geométricos. A Geometria é, normalmente, trabalhada desvinculada das outras áreas, quase sempre como último conteúdo a ser estudado durante o período escolar.

Por outro lado, entende-se que o desenvolvimento do pensamento geométrico do aluno depende, em grande parte, da observação do professor, ao orientar as discussões e as tarefas, a fim de que novas situações possam surgir e, assim, sucessivamente. Parece que é com esse pensamento que Petrella (2003) propõe, em sua dissertação de mestrado, que:

> Os estudos de geometria, sendo desenvolvidos desde as séries iniciais do ensino fundamental, incentivando a observação, podem atuar como modificador do pensar e do agir, facilitando assim o desenvolvimento do pensamento não apenas para a geometria, mas para diferentes situações que necessitem da aplicação de um pensamento matemático (p. 123).

Entende-se ser de fundamental importância que o professor, ao desenvolver suas ações educativas junto ao aluno, o faça não apoiado somente no conhecimento matemático específico, mas, fundamentalmente, tendo o conhecimento e levando em consideração um referencial teórico que sustente as ações tomadas e seja indicativo do desenvolvimento do aluno.

No caso específico da Geometria, um referencial que tem servido de apoio a pesquisas e também às ações dos professores em sala de aula é o modelo de van Hiele do desenvolvimento do pensamento geométrico.

2.2 O desenvolvimento do pensamento geométrico: o modelo de van Hiele

O modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de van Hiele inclui dois aspectos complementares: um descritivo e um prescritivo. Na sua face descritiva, o modelo busca explicar como pensam os estudantes, em termos geométricos, quando são apresentados cinco níveis de pensamento. No seu aspecto prescritivo, apresenta pautas a seguir no processo de ensino e aprendizagem para que o estudante possa desenvolver seu pensamento, apresentando cinco fases de aprendizagem.

Segundo Crowley (1994), o modelo apresenta, ainda, propriedades que o caracterizam e que são particularmente importantes para os professores, pois podem orientar a tomada de decisões quanto ao ensino. O modelo emergiu dos trabalhos de doutoramento do casal de educadores holandeses Pierre van Hiele e Dina van Hiele-Geldof em 1957.

Com relação aos níveis de compreensão, Crowley (1994) esclarece que, na literatura, encontram-se diferentes maneiras de enumerar os níveis do modelo, mas que os van Hiele referiam-se aos que se iniciavam com o nível básico, ou nível 0, e terminavam com o nível 4, enumeração a qual será seguida neste trabalho. Os cinco níveis são denominados: visualização, análise, dedução informal, dedução formal e rigor. A figura 01 apresenta um quadro elaborado a partir de Crowley (1994), com os cinco níveis e suas características.

Níveis	**Características**
0 – Visualização	• reconhece visualmente uma figura geométrica; • tem condições de aprender o vocabulário geométrico; • não reconhece ainda as propriedades de identificação de uma determinada figura.
1 – Análise	• identifica as propriedades de uma determinada figura; • não faz inclusão de classes.
2 – Deduções informal	• já é capaz de fazer inclusão de classes; • acompanha uma prova formal, mas não é capaz de construir uma outra.
3 – Dedução formal	• é capaz de fazer provas formais; • raciocina num contexto de um sistema matemático completo.
4 – Rigor	• é capaz de fazer provas formais e comparar sistemas baseados em diferentes axiomas; • é neste nível que a geometria não-euclidiana é compreendida.

Figura 01: quadro dos níveis do pensamento geométrico segundo van Hiele

Conforme Crowley (1994), no nível básico, denominado visualização, os alunos percebem o espaço apenas como algo que existe em torno deles. Os conceitos de Geometria são vistos como entidades totais e não como aquelas que têm componentes ou atributos. As figuras geométricas são reconhecidas por sua forma como um todo, isto é, por sua aparência física, não por suas partes ou propriedades.

Para Nasser e Sant'Anna (2004), que também denominam o nível básico como o do reconhecimento, é nesse nível que o aluno realiza reconhecimento, comparação e classifica figuras geométricas por sua aparência global.

O primeiro nível é denominado de análise. Nele, de acordo com Crowley (1994), tem início a análise de conceitos geométricos. Através da observação e da experimentação, os alunos começam a discernir as características das figuras. Eles podem fazer generalizações, porém ainda não são capazes de explicar relações entre propriedades, não vêem inter-relações entre figuras e não entendem definições.

Sobre esse nível, Nasser e Sant'Anna (2004) ponderam que o aluno faz análise das figuras em termos de seus componentes, reconhecendo suas propriedades e o uso dessas para resolver problemas.

O segundo nível é o de síntese e, de acordo com Crowley, (1994), é nele que os alunos conseguem estabelecer relações de propriedades tanto dentro de figuras quanto entre figuras. Um exemplo de relações dentro de figuras é perceber que, se os lados opostos de um quadrilátero são paralelos, necessariamente, os ângulos opostos são iguais e, entre figuras é o reconhecimento do quadrado ser um retângulo, porque tem todas as propriedades de um retângulo.

Para Nasser e Sant'Anna (2004), quando o aluno está nesse nível, ele percebe que uma propriedade pode decorrer de outra, conforme exemplos citados acima.

O terceiro nível é o da dedução, no qual, segundo Nasser e Sant'Anna (2004), o aluno é capaz de ter o domínio do processo dedutivo e das demonstrações. Para Crowley (1994), é nesse nível que são percebidos a inter-relação e o papel de termos não definidos, axiomas, postulados, definições, teoremas e demonstrações.

O quarto nível é o do rigor e, conforme Nasser e Sant'Anna (2004), nessa etapa, o aluno passa a compreender e realizar demonstrações formais, sendo que o mesmo raramente é alcançado por alunos do Ensino Médio.

De acordo com Crowley (1994), assim o nível do rigor é o menos desenvolvido nos trabalhos originais do casal van Hiele, bem como tem recebido pouca dedicação dos pesquisadores. O próprio Pierre van Hiele reconheceu que se interessava particularmente pelos três primeiros níveis.

A teoria dos van Hiele estabelece que o progresso ao longo dos níveis depende mais da instrução recebida do que da idade ou maturidade do aprendiz, o que indica que o método, a organização do curso, os conteúdos e o material usado são importantes áreas de preocupação pedagógica. Assim, estabeleceram cinco fases seqüenciais de aprendizado para tratar dessas questões: interrogação, orientação dirigida, explicação, orientação livre e integração. Afirmam que a instrução desenvolvida de acordo com essa seqüência promove a aquisição de cada um dos níveis (CROWLEY, 1994).

A figura 02 apresenta um quadro elaborado a partir de Crowley (1994), com as fases do modelo e suas características.

Fases	Características
1 – Interrrogação/Informação	• professor e aluno dialogam sobre o material de estudo; • apresentação do vocabulário do nível; • o professor deve perceber quais os conhecimentos anteriores do aluno sobre o assunto a ser estudado.
2 – Orientação dirigida	• os alunos exploram o assunto de estudo através do material selecionado pelo professor; • as atividades deverão proporcionar respostas específicas e objetivas.
3 – Explicação	• o papel do professor é de observador; • os alunos trocam experiências, os pontos de vista diferentes contribuirão para cada um analisar suas idéias.
4 – Orientação livre	• tarefas constituídas de várias etapas, possibilitando diversas respostas,a fim de que o aluno ganhe experiência e autonomia.
5 – Integração	• professor auxilia no processo de síntese, fornecendo experiências e observações globais, sem apresentar novas ou discordantes idéias.

Figura 02: quadro das fases de aprendizado do modelo de van Hiele

Os Van Hiele identificaram algumas generalidades que caracterizam sua teoria, descritas por Crowley (1994) como:

- seqüencial: para que um aluno compreenda as atividades propostas num determinado nível, ele deve ter assimilado as estratégias dos níveis precedentes;.
- avanço: a progressão de um nível para outro depende mais do conteúdo e dos métodos de instrução recebidos do que da idade;
- intrínseco e extrínseco: o objeto inerente a um nível torna-se os objetos de ensino do nível seguinte;
- lingüística: os níveis têm seus próprios símbolos lingüísticos e seus sistemas de relações que ligam esses símbolos;
- combinação inadequada: se o aluno está num nível e o curso em um diferente, o aprendizado e o progresso desejados podem não se verificar.

Ainda referente aos níveis e fases, o autor afirma que o modelo de pensamento geométrico e as fases de aprendizagem desenvolvidas pelos van Hiele propõem um meio de identificar o nível de maturidade geométrica dos alunos e indicam os caminhos para ajudá-los a avançar de um nível para outro. Ressalta o ensino, mais do que a maturidade, como o fator que contribui mais significativamente para esse desenvolvimento.

3 CONTEXTUALIZAÇÃO, OBJETIVOS E METODOLOGIA

Considera-se que o ensino da Geometria, na escola básica, não tem atendido aos pressupostos e objetivos estabelecidos para o mesmo e tem levado os alunos a não desenvolverem satisfatoriamente noções elementares nessa área de conhecimento, o que leva a um aprendizado falho, fragmentado e pontual de tal maneira que, ao final do Ensino Fundamental, boa parte dos alunos ainda não tem a noção adequada de comprimento, área e volume.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1997) evidenciam que a construção do pensamento geométrico deve ocorrer, ao longo da Educação Básica, sendo que a Geometria não é vista como um elemento separado da Matemática, mas como uma parte que ajuda a estruturar o pensamento matemático, o raciocínio dedutivo devendo, também, permitir ao estudante examinar, estabelecer relações e compreender o espaço tridimensional onde vive.

Percebe-se que, nos PCN's, a Geometria está presente ao longo de toda a Educação Básica, ocupando um espaço similar às demais áreas como Álgebra, Grandezas e Medidas, Tratamento da Informação. Porém, essa importância que é dada à Geometria nos documentos oficiais e mesmo nas declarações dos professores nem sempre está presente nas aulas de Matemática. São enfatizados os aspectos numéricos e algébricos em detrimento de aspectos geométricos. A Geometria é, via de regra, trabalhada desvinculada das outras áreas, quase sempre como último conteúdo a ser trabalhado.

As pesquisas de Pavanello (1993) apontam para uma ausência quase que total da Geometria das salas de aula, justificada, em grande parte, pela constatação de que os professores não dominam satisfatoriamente essa área do conhecimento matemático.

Pesquisa realizada por Andrade e Nacarato (2004), a partir dos Anais dos Encontros Nacionais de Educação Matemática, no período de 1987 a 2001, indicam que os rumos da pesquisa sobre Geometria no Brasil apontam, atualmente, a presença de duas tendências didático-pedagógicas: a Geometria Experimental e Geometria em Ambientes Computacionais. Apontam, também, para a busca de um quadro teórico que apóie os trabalhos realizados em sala e que vêm se pautando pelo modelo de van Hiele, pela Didática da Matemática Francesa e pelos construtos epistemológicos relativos à visualização e representação.

Assim, as investigações dos processos de ensino e aprendizagem da Geometria, que considerem o modelo do desenvolvimento geométrico de van Hiele têm se apresentado como alternativas para se estabelecer o que ensinar e como ensinar em Geometria.

Nesse contexto, a presente investigação apóia-se em três hipóteses:

- o ensino da Geometria não tem atendido aos pressupostos e objetivos estabelecidos para o mesmo, o que tem levado os alunos a não desenvolverem satisfatoriamente noções elementares nessa área de conhecimento;
- alunos que finalizam o Ensino Fundamental encontram-se no nível básico do modelo de van Hiele;
- esses alunos ainda não se apropriaram adequadamente das noções de área e volume.

Entende-se que as investigações e ações na área do ensino e aprendizagem da Geometria são atuais e necessárias, uma vez que o quadro atual das pesquisas e das tendências para o ensino e aprendizagem da Geometria nem sempre mostra sua presença nos currículos de Matemática e menos ainda em sala de aula. Além disso, o ensino brasileiro ainda não superou a tendência a enfatizar o desenvolvimento de algumas áreas da Matemática, alijando o aluno de desenvolver, na escola, o pensamento geométrico de forma estruturada.

3.1 Objetivos

A presente dissertação tem como objetivo investigar, junto a um grupo de alunos do 1º ano do Ensino Médio, até que ponto eles dominam conhecimentos elementares em Geometria e o desenvolvimento dos conceitos de comprimento, área e volume a partir de uma seqüência didática elaborada.

Um detalhamento dos objetivos propostos aponta para os seguintes objetivos específicos:

- investigar o estágio de domínio de conhecimentos elementares em Geometria em que se encontra um grupo de alunos ao concluírem o Ensino Fundamental, segundo o modelo de Van Hiele do desenvolvimento do pensamento geométrico;

- implementar uma seqüência didática para o desenvolvimento dos conceitos de comprimento, área e volume;
- investigar o desenvolvimento dos conceitos propostos a partir da seqüência didática aplicada.

3.2 A metodologia de investigação

Buscando atender os objetivos, o percurso investigativo proposto se insere em uma perspectiva qualitativa. Dentro dessa perspectiva, o estudo segue os pressupostos da engenharia didática, porque a mesma se reveste de características tanto de uma metodologia de pesquisa específica quanto uma seqüência de aulas concebidas, organizadas e articuladas para realizar um projeto de aprendizagem para uma determinada população de alunos. Assim, o processo metodológico permite não só o desenvolvimento do trabalho junto aos alunos como a investigação do mesmo (DOUADY, 1995).

A engenharia didática, como processo investigativo, tem características próprias que, ao longo deste trabalho, serão apresentadas, mas também é possível identificar características peculiares a investigações qualitativas, conforme indicado por Bogdan e Biklen (1999). Particularmente, norteiam esta investigação as seguintes características:

- a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador como o elemento principal da pesquisa, porque, mesmo utilizando diversas técnicas e equipamentos para coleta de dados, os mesmos são complementados pela informação obtida através do contato direto;
- a investigação qualitativa é descritiva, ou seja, os dados recolhidos são em forma de palavras ou imagens e não de números. Os resultados escritos da investigação contêm citações, transcrições de entrevistas, notas de campo, fotografias, documentos produzidos pelos investigados e outros registros oficiais sendo analisados com toda a sua riqueza, respeitando, tanto quanto o possível, a forma como esses foram registrados ou transcritos;
- preocupação maior com o processo do que, simplesmente, com os resultados ou produto pois o pesquisador concentra sua atenção investigativa no

desenvolvimento das ações e na produção de significados, sem preocupar-se em quantificar dados e identificar variáveis;

- a investigação tende a uma abordagem indutiva na análise dos dados, já que os mesmos não são recolhidos com o objetivo de confirmar ou reprovar hipóteses construídas previamente, ao invés disso, as abstrações são construídas à medida que os dados particulares são recolhidos e vão sendo agrupados.

3.2.1 A Metodologia Engenharia Didática

Para Douady (1995), a engenharia didática designa uma seqüência de aulas concebidas, organizadas e articuladas no tempo, de maneira coerente, por um professor-engenheiro, com o fim de realizar um projeto de aprendizagem para uma determinada população de alunos. E acrescenta:

> No transcurso das interações entre o professor e os estudantes, o projeto evolui a partir das reações dos estudantes e em função das seleções e decisões do professor. Dessa forma, a engenharia didática é por um lado um produto, resultante de uma análise a priori, e um processo no transcurso do qual o professor executa o produto adaptando-o, se for o caso, a dinâmica da turma (DOUADY, 1995, p. 61).

Segundo Artigue (1995), como metodologia de investigação, a engenharia didática se caracteriza por um esquema experimental baseado em realizações didáticas em sala de aula, ou seja, sobre a concepção, realização, observação e análise de seqüências de ensino.

Para a autora, um aspecto que fundamentalmente diferencia a engenharia didática de outros tipos de investigação baseados em experimentações em sala de aula diz respeito ao fato que essas investigações se situam, via de regra, dentro de um enfoque comparativo com validação externa, baseada em comparações estatísticas. A engenharia didática ocorre no contexto dos estudos de caso cuja validação é interna, baseada na confrontação entre as análises *a priori* e *a posteriori*.

Caracteriza-se, também, por uma distinção temporal do seu processo experimental, as chamadas fases da engenharia. Assim, para o desenvolvimento de uma engenharia didática são consideradas quatro fases: análises preliminares; concepção e análise *a priori* das situações didáticas da engenharia; experimentação; análise *a posteriori* e validação. A seguir, são descritas as características das fases da engenharia didática de maneira geral e também como, particularmente, cada fase vai se desenvolver na presente investigação.

Análises preliminares

De acordo com Machado (2002), as análises preliminares para a concepção da engenharia são feitas através de considerações sobre o quadro teórico didático geral, os conhecimentos didáticos já adquiridos, o assunto em questão, bem como sobre a análise:

- epistemológica dos conteúdos contemplados pelo ensino;
- do ensino atual e de seus efeitos;
- da concepção dos alunos, das dificuldades e obstáculos que determinam sua evolução;
- do campo dos entraves no qual ocorrerá a efetiva realização didática.

As análises preliminares são feitas levando-se em consideração os objetivos específicos da pesquisa e, principalmente, para embasar a concepção da engenharia. Porém, elas são retomadas e aprofundadas durante todo o transcorrer do trabalho. Aspectos das análises preliminares serão desenvolvidos ou não dependendo do objetivo da pesquisa, o qual determinará o grau de profundidade dessas análises (MACHADO, 2002).

Na presente investigação, além da revisão do quadro teórico geral sobre questões epistemológicas e didáticas da Geometria, será aplicado junto aos alunos investigados, um instrumento de pesquisa, chamado Questionário A (Apêndice A), com o objetivo de traçar um perfil do grupo de alunos investigados, e um Teste avaliativo inicial (Apêndice B), com questões envolvendo os conceitos e idéias geométricas necessários para a compreensão das noções de comprimento, área e volume, considerando os três primeiros níveis do modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico. Também serão realizadas entrevistas com a professora titular, objetivando a obtenção de informações para o trabalho desenvolvido pela mesma e do pesquisador. De posse dessas informações, será elaborada a seqüência didática a ser desenvolvida.

Análise a *priori* e concepção da Engenharia

O objetivo da análise a *priori* é determinar no que as escolhas feitas permitem controlar os comportamentos dos alunos e o significado de cada um desses comportamentos. Para tal, vai se basear em hipóteses cuja avaliação estará, em princípio, indiretamente em jogo, na confrontação entre a análise a *priori* e a análise a *posteriori* a ser operada na quarta fase.

A análise a *priori* constitui-se de uma parte de descrição e outra de previsão. Assim, nessa fase, é concebida a engenharia, sendo descritas e analisadas as escolhas locais feitas, relacionando-as com as escolhas globais, caracterizando as situações adidáticas[1] decorrentes de cada escolha. São analisados os desafios propostos aos alunos, decorrentes das possibilidades de ação, escolha, decisão, controle e validação de que ele disporão durante a experimentação. Nessa fase, também são previstos os comportamentos possíveis, já que a análise efetuada permite controlar o sentido desses comportamentos. Além disso, deve-se assegurar que, se tais comportamentos ocorrerem, resultarão do desenvolvimento do conhecimento almejado após a aprendizagem (MACHADO, 2002).

A seqüência didática a ser aplicada junto aos alunos será, em parte, elaborada nessa fase, a partir dos pressupostos teóricos estabelecidos, das análises preliminares e de uma leitura da realidade onde a mesma vai se desenvolver. É importante salientar que as fases da engenharia não são estanques, sucedendo-se de forma linear, mas são interligadas e complementares sendo que, em qualquer uma das fases, pode-se retomar uma outra.

Na presente investigação, a concepção da seqüência didática só se completou no início da fase de experimentação, após o contato do pesquisador com o grupo, da aplicação do questionário A e do teste avaliativo inicial.

Fase da experimentação

Segundo Machado (2002) a fase de experimentação é a da realização da engenharia com certa população de alunos. Ela se inicia no momento em que ocorre

[1] A noção de situação adidática foi descrita por Brosseau (1986) e se caracteriza pela existência de determinados aspectos do fenômeno de aprendizagem, nos quais não se tem uma intencionalidade pedagógica direta ou um controle didático por parte do professor (PAIS, 2002).

o contato pesquisador/professor/observador com a população de alunos objeto da investigação. Durante essa fase, deve-se respeitar, na medida do possível, as escolhas e deliberações feitas nas análises a priori.

A experimentação supõe:

- a explicitação dos objetivos e condições de realização da pesquisa com a população de alunos que participará da experimentação;
- o estabelecimento do contrato didático[2];
- a aplicação dos instrumentos de pesquisa;
- o registro das observações feitas durante a experimentação (observação cuidadosa descrita em relatório, transcrição dos registros audiovisuais, entre outros).

A fase de experimentação, na presente investigação, conta com a realização de treze encontros de duas horas aula. A concepção e o desenvolvimento da mesma serão descritos no capítulo 4.

Análise a *posteriori* e validação

A quarta e última fase refere-se à análise a posteriori e à validação. Apóia-se sobre os dados obtidos durante a experimentação, a partir das observações e registros realizados durante as sessões de ensino, bem como das produções dos alunos em classe e fora dela. As informações obtidas são tratadas, buscando identificar e desvelar as ações e procedimentos de raciocínio dos alunos no desenvolvimento das atividades propostas (MACHADO, 2002).

No que se refere à validação dos resultados, a metodologia pressupõe que a mesma resultará da confrontação dos dados obtidos nas análises a *priori* e a *posteriori*, verificando-se as hipóteses colocadas no início da pesquisa.

3.2.2 O cenário e os sujeitos da pesquisa

A presente investigação tem como cenário uma Escola da zona rural do Município de Farroupilha.

---

[2] Chama-se contrato didático o conjunto de comportamentos do professor que são esperados pelos alunos e o conjunto de comportamentos do aluno que são esperados pelo professor (...). Esse contrato é o conjunto de regras que determinam, uma pequena parte explicitamente mas sobretudo implicitamente, o que cada parceiro da relação didática deverá gerir e aquilo que, de uma maneira ou de outra, ele terá de prestar conta perante o outro (BROUSSEAU apud SILVA, 2000).

O Município de Farroupilha localiza-se entre o norte e o leste do Rio Grande do Sul, na região chamada Encosta Superior do Nordeste, com área de 393,41 km^2 . Fica distante 19 km de Caxias do Sul e 110 km de Porto Alegre. A população está em torno de 56.000 habitantes, sendo 43.000 habitantes no perímetro urbano e 13.000 habitantes na zona rural.

Farroupilha possui cerca de 25.000 estudantes distribuídos nas redes municipal, estadual e particular, conforme o quadro da figura 1, composto a partir de dados do Censo IBGE 2002. O Município tem ao todo trinta e oito escolas públicas e dez particulares. As escolas municipais atendem mais de 60% dos alunos e a evasão escolar municipal está em torno de 1,4%. Segundo o IBGE, o índice de alfabetização é de 96% da população. A partir de dados coletados, foi possível compor a figura 03, que mostra a distribuição da população estudantil nas distintas redes de ensino do município de Farroupilha.

Instituição	**Pré-escola**	**Ensino Fundamental**	**Ensino Médio**	**EJAs**
Estadual	251	2.677	1.901	471
Municipal	651	5.134	0	639
Privada	462	869	469	838
Total	1.364	8.860	2.442	1.948

Figura 03: quadro da distribuição da população estudantil nas redes de ensino

O município está dividido, geograficamente, em quatro distritos, sendo que a investigação proposta desenvolveu-se na sede do Segundo Distrito (Vila Jansen), que dista 15 km da sede do município.

A área geográfica da Vila Jansen abrange cerca de 25% da área do município e a população é de aproximadamente 4.500 habitantes. O relevo é muito acidentado, o solo bastante fértil, próprio para as atividades agrícolas que representam a principal atividade econômica do distrito. Os principais produtos cultivados comercialmente são: uva, pêssego, kiwi, e, em menor escala, ameixa, caqui, alho. Há, ainda, a pecuária, que aparece com certo destaque.

O distrito é composto por 16 comunidades, as quais possuem uma cultura com influências da imigração italiana, uma vez que a população é praticamente toda de descendentes italianos. Todas as comunidades foram fundadas por imigrantes italianos, centradas em torno das pequenas igrejas e salões comunitários, onde a população se reúne semanalmente para as atividades religiosas e recreativas.

Dos 4.500 habitantes, 65% trabalham em suas propriedades, pequenos lotes que possuem em média 12 hectares, sendo que 30% da população são parceiros dos pequenos proprietários. Os outros 5% se dedicam ao setor assalariado, em pequenas empresas, locais ou se deslocam até a cidade.

A educação inicial, ou seja, da 1ª a 4ª séries fica a cargo das escolas municipais situadas nas comunidades. A partir da 5ª série do Ensino Fundamental, o ensino passa a ser centralizado na sede do distrito, na Escola Estadual de Ensino Médio Júlio Mangoni (onde a investigação vai se desenvolver) que a partir de 2000, passou a ministrar o Ensino Médio no período diurno e, a partir de 2004, também no noturno.

A Escola Júlio Mangoni foi criada em 24 de setembro de 1937, através do decreto nº 6.755, do D.O. nº 685, com o nome de Grupo Escolar Linha Jansen, pertencendo ao 2º distrito do município de Farroupilha.

As atividades foram iniciadas no dia 01 de agosto de 1938, funcionando no Clube Recreativo Farroupilha, nessa localidade, sob a direção da professora Joanna Maria Dal Pont e com regência de classe das professoras Elídia Biasiori e Amanda Mangoni, com 38 alunos.

Em 1941, o Grupo Escolar de Linha Jansen transferiu-se para as dependências da antiga subprefeitura, dessa localidade, aí funcionando até maio de 1958.

No dia 23 de junho de 1958, foi inaugurado o novo prédio, sob a direção da professora Adinha Ana Mandelli.

Pelo decreto nº 20.201, de 11 de março de 1970, foi alterada a designação, passando a chamar-se Grupo Escolar Júlio Mangoni, em homenagem ao Sr. Júlio Mangoni, imigrante italiano, fundador da Vila e um dos homens de muito destaque na comunidade.

Através da Portaria nº 22.913, passou a denominar-se Escola Estadual de 1º Grau Júlio Mangoni, conforme publicação feita no D.O. nº 74 de outubro de 1979 e teve seu nome alterado para Escola Estadual de Ensino Fundamental Júlio Mangoni, pelo decreto de alteração de designação nº 313/00 no D.O. de 14/12/2000. O Parecer C.E.E., nº 611/2005 credencia e autoriza o funcionamento do Ensino Médio no D.O. 08/09/2005 – Bol. 14/09/2005. Atualmente, a escola denomina-se Escola Estadual de Ensino Médio Júlio Mangoni.

A Escola tem 55 alunos no período da manhã, 163 alunos na parte da tarde e 45 no turno da noite, totalizando 263 alunos. Vinte professores atuam na Escola nos três turnos.

O grupo investigado constitui-se de vinte alunos da turma 11 do 1º Ano do Ensino Médio do turno da noite. Fazem parte da turma sete alunas e treze alunos, que têm idade média de 15 anos. Como se trata de uma comunidade rural a maioria dos alunos participam das atividades econômicas desenvolvidas pela família.

O trabalho se desenvolveu em encontros semanais de duas horas-aula durante um período de três meses, totalizando treze encontros e vinte e seis horas-aula.

É importante salientar que o desenvolvimento do projeto junto ao grupo de alunos, bem como a divulgação dos resultados da investigação e a publicação das imagens obtidas ao longo da investigação contou com a autorização dos pais dos estudantes, quando menores de idade, e dos próprios alunos, quando maiores de idade. A autorização foi obtida por escrito, mediante a assinatura do documento que consta do anexo G.

4 Desenvolvimento da Engenharia Didática

4.1 Análises preliminares

A elaboração do quadro teórico sobre os processos de ensino e aprendizagem da Geometria, bem como da situação do ensino da mesma no Ensino Fundamental e Médio, permitiu ter uma visão do possível trabalho a ser desenvolvido na intervenção proposta.

Uma certeza maior sobre essa questão foi obtida após três encontros realizados, com a professora titular da turma, nos quais foram discutidas questões relativas ao trabalho desenvolvido pela professora, o trabalho a ser realizado na investigação, como também aspectos referentes ao grupo de alunos. Nessas ocasiões, ficou claro que a realidade do ensino da Geometria na Escola não difere do que ficou estabelecido nas considerações teóricas. Apesar de fazer parte do currículo, com um *status* muito similar ao de outras áreas (como Números, Álgebra e Tratamento da Informação), na prática, na realidade da escola, o trabalho com a Geometria é restrito e pouco sistematizado. Nesses encontros prévios, a professora demonstrou interesse em ficar presente em sala de aula, como observadora, ao longo do desenvolvimento do projeto, o que acabou ocorrendo.

Optou-se pela não-realização de observações prévias do grupo a ser investigado para, em primeiro lugar, não se estabelecer um pré-conceito da turma, que estaria trabalhando um conteúdo diferente do proposto pela investigação, com uma metodologia diferente, a partir de um trabalho desenvolvido por outra pessoa, no caso, a professora titular. Considerou-se que as primeiras impressões sobre a turma já deveriam ser a partir do trabalho proposto.

Assim, ficou estabelecido que o primeiro encontro seria para uma interação com o grupo, a aplicação do questionário A e o desenvolvimento de uma atividade de avaliação de conhecimentos específicos sobre Geometria (teste avaliativo inicial), contribuindo para compor o quadro das análises preliminares.

Optou-se por um planejamento inicial que estaria aberto a modificações, conforme o desenvolvimento do projeto. Entende-se que um contato direto estabelecido na relação professor/aluno/conteúdo contribui de forma significativa e insubstituível para a elaboração do plano de atividades.

Perfil do grupo

Buscando traçar um perfil do grupo investigado, foi aplicado o questionário A (Apêndice A) com questões relativas a gênero, idade, atividade laboral, reprovações em séries anteriores e a relação com a Matemática.

Responderam ao questionário vinte alunos e, a partir das respostas foi possível estabelecer que:

- a turma é composta de vinte alunos, sendo que 7 são do sexo feminino e 13 do masculino;
- a idade média do grupo é de 15 anos, sendo que há um aluno com 18 e um com 19 anos;
- dezesseis alunos não foram reprovados em séries anteriores, dois tiveram uma reprovação, um teve três reprovações em séries distintas e um teve cinco reprovações, também em séries distintas;
- quando questionados sobre trabalho, 5 declararam não trabalhar e, dos 15 que trabalham, 13 trabalham em casa com os pais e 2 em empresa;
- quando questionados se gostam de estudar Matemática, 10 declararam gostar, 7 declararam não gostar e 3, gostar mais ou menos.

Os dados coletados permitem estabelecer que o grupo está na faixa etária correspondente à série, com exceção dos dois alunos mais velhos, que têm um histórico significativo de reprovações em séries anteriores.

Um número significativo de estudantes declarou trabalhar em casa e esse fato justifica-se em função da comunidade ser rural, com pequenas propriedades agrícolas e, de uma forma ou outra, nas famílias, todos desempenham algum tipo de tarefa.

Em relação a gostar de estudar Matemática, os alunos que gostam justificam sua postura através das declarações:

“Sim. Pois é uma matéria que eu acho interessante de estudar. Nela se descobrem coisas legais e o mais importante, que é útil no nosso dia a dia.”

“Tempo atrás não pois eu não me esforçava, mas agora sim pois estou descobrindo que sem ela a gente não vive.”

“Sim, é uma das matérias que mais consigo desenvolver raciocínio.”

Os alunos que não gostam, justificam:

“Não gosto muito, mas sei que é importante para o futuro.”

“Não gosto porque não entendo muito.”

Sobre o teste avaliativo inicial

No primeiro encontro com a turma, também foi realizada a aplicação do teste avaliativo inicial (Apêndice B), com o objetivo de identificar os possíveis conhecimentos do grupo relativos a questões como o reconhecimento de quadriláteros, paralelismo, propriedades de quadriláteros e cálculo de áreas, ligados aos temas que seriam desenvolvidos na investigação. O teste objetivava, também, fazer uma avaliação relacionada aos níveis de van Hiele do grupo investigado.

É importante salientar que o teste avaliativo inicial foi reproduzido (com exceção da questão 16) dos trabalhos do Projeto Fundão, apresentados em Nasser (2004). Apresenta 16 questões, sendo que cinco delas referem-se somente à identificação de quadriláteros (correspondente ao nível de visualização de van Hiele); seis questões referem-se à identificação de propriedades de figuras planas (correspondente ao nível de análise de van Hiele); quatro relacionam propriedades (dedução informal) e uma questão refere-se ao cálculo de área.

A figura 04 apresenta o gráfico do desempenho do grupo no referido teste.

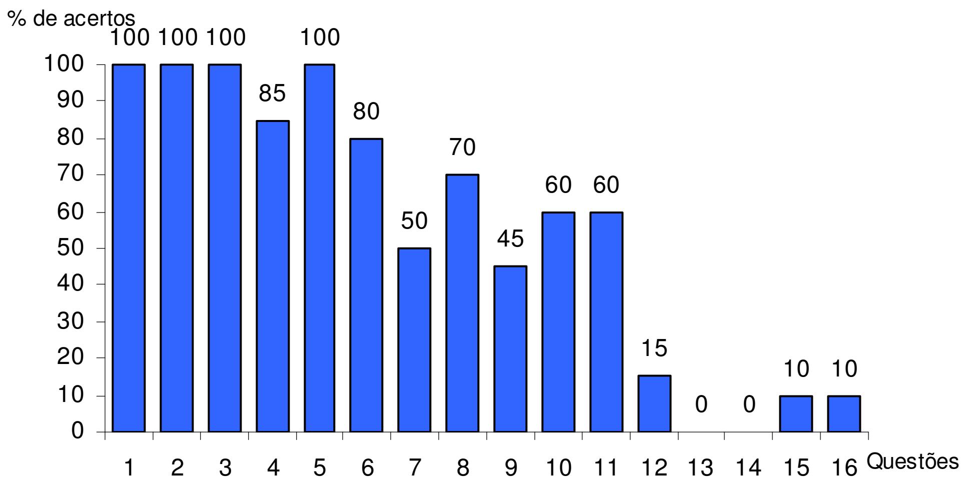


Figura 04: gráfico do desempenho no teste inicial

Uma análise dos percentuais de acertos nas questões do teste inicial permite apontar aspectos do desempenho dos alunos e estabelecer algumas conjecturas.

Nas questões de 1 a 5, que tratam apenas do reconhecimento das figuras, sem a necessidade de identificar componentes ou atributos os quais correspondem ao nível 0 ou de visualização de van Hiele, o desempenho foi absolutamente satisfatório. Quatro das questões foram respondidas corretamente por todos os alunos e uma teve um percentual de 85% de acertos. Eles identificaram corretamente, triângulos, quadrados, retângulos e situação de paralelismo, mas, em relação à identificação de paralelogramos, os alunos que erraram não identificaram um dos dois paralelogramos que havia na questão. O desempenho nessas questões indica fortemente que o grupo domina o nível básico do pensamento geométrico de van Hiele. Entende-se que esse desempenho era esperado, pois se trata de um grupo de alunos do primeiro ano do Ensino Médio.

Nas questões de 6 a 11, que se referem ao nível de análise, onde é esperado que o aluno comece a distinguir as características das figuras, através da observação e experimentação, considera-se que o desempenho foi satisfatório apenas em parte. Os percentuais de acertos oscilaram entre 45% e 80%, o que se considera, em parte, satisfatório, pois as questões que tiveram os percentuais mais altos de acertos (questão 6 – 80% e questão 8 – 70%) eram de escolha múltipla, o que pode ter facilitado. Já as questões onde era solicitado indicar propriedades ou identificar figuras segundo uma propriedade (questões 7, 9, 10 e 11), os percentuais de acerto foram menores, oscilando entre 45% e 60%. Assim, entende-se que, em relação ao nível de análise, o grupo deve avançar significativamente.

Nas questões de 12 a 15, onde era necessário estabelecer inter-relações de propriedades dentro de figuras e entre figuras o desempenho foi altamente insatisfatório. Em duas das questões não houve acertos (questões 13 e 14) e nas outras duas os percentuais de acerto foram 15% e 10%. O desempenho nessas questões, analisado em conjunto com o desempenho nas demais, indica, fortemente, que o aluno tem um conhecimento geométrico pontual e não sistematizado. Reconhece figuras, identifica isoladamente algumas propriedades, mas quando necessita mostrar o significado das definições e relações o domínio mostra-se tênue.

A questão 16 apresenta um polígono irregular de cinco lados que pode ser decomposto em figuras planas elementares (triângulos e retângulo), do qual deveria ser calculada a área. O desempenho nessa questão foi muito baixo (10% de acertos). Apenas oito alunos apresentaram algum tipo de solução para a questão, sendo que dois alunos a acertaram. Os demais deixaram a questão em branco. As soluções apresentadas mostravam cálculos aleatórios envolvendo multiplicações entre as dimensões dos lados do polígono. Os dois alunos que acertaram, mesmo sem formalmente decompor a região, apresentaram cálculos que indicavam que isso tinha sido feito.

A análise realizada permite estabelecer que o grupo transita no nível 1 (de análise) do modelo de van Hiele, embora não satisfatoriamente, e não atingiu o nível 2 de dedução informal. Entende-se que é necessário um trabalho sistemático no nível 1, a fim de estabelecer condições de progressão para o próximo nível.

Em relação à área, que é um dos focos dessa investigação, estava previsto, além da questão específica no teste, um trabalho prático em sala de aula com o objetivo de captar elementos sobre o conhecimento dos alunos relativamente ao significado de área de regiões planas e seu cálculo. O resultado da análise da questão do teste não foi muito conclusivo, pois apenas 40% dos alunos apresentou algum tipo de solução. O tipo de questão, que envolvia um polígono irregular, não permitiu identificar se as dificuldades eram relativas ao cálculo propriamente dito ou a decomposição da figura em outras mais elementares. O trabalho realizado em sala de aula, que se seguiu à aplicação do teste inicial e que se constituiu em medir e calcular a área do quadro-negro e do tampo da escrivaninha, permitiu perceber que o grupo não tinha domínio dos aspectos envolvidos no trabalho proposto. Inicialmente, apresentaram dificuldades para fazer as medições solicitadas (do quadro-negro e do tampo da mesa), as quais se mantiveram quanto à forma de executar os cálculos. Uma vez de posse das medidas, não tinham convicção das operações a serem efetuadas. Também foram percebidas dificuldades em relação ao domínio das unidades de medida de comprimento e operações com números decimais.

O perfil do grupo, traçado com o questionário, o desempenho no teste e o contato do professor-investigador no primeiro encontro, possibilitaram a identificação de elementos importantes para a composição da seqüência didática a ser desenvolvida junto ao grupo e definiram aspectos teóricos e didáticos do trabalho a ser desenvolvido.

4.2 A concepção e o desenvolvimento da engenharia didática

A engenharia didática foi concebida com base no conhecimento construído sobre a evolução histórica do pensamento geométrico e do seu ensino, bem como do papel que a mesma ocupa, atualmente, no currículo de Matemática da Educação Básica, considerando a realidade social e escolar onde a investigação teve lugar.

A seqüência de aulas foi construída tomando como base teórica o modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de van Hiele, inspirado e apoiado nos trabalhos desenvolvidos pelo grupo do Projeto Fundão[3], liderado pela professora Lílian Nasser. Consta, basicamente, do estudo de um texto (Geometria: um pouco de história) e da articulação de dez atividades teórico-práticas desenvolvidas em sala de aula, além de, cinco temas que consistem em tarefas para serem realizadas extra-classe. As atividades 1 e 2 e o tema 1 foram tomados e adaptados de Nasser (2004).

A utilização de um texto com elementos da história da Geometria para iniciar o trabalho objetivou chamar a atenção do grupo para o trabalho que seria desenvolvido, buscando motivá-los e trabalhando a idéia de que a Matemática e, particularmente, a Geometria são corpos de conhecimentos que foram construídos pelo homem ao longo da sua existência e que continuam sendo desenvolvidos. Em sala de aula o professor tem a oportunidade de reconstruir esse conhecimento, ampliando-se e apropriando-se dele.

As atividades foram organizadas contando com a manipulação de materiais e instrumentos para construção de figuras planas e sólidas (cartolina, papel quadriculado, régua, trena, esquadro, calculadora). As atividades práticas foram articuladas às aulas teóricas de tal forma que uma desencadeava ou dava suporte à outra.

O trabalho foi organizado para, em sala de aula, desenvolver-se em pequenos grupos, buscando uma circulação e socialização de idéias, desenvolvendo no aluno a competência de atuar no grupo, analisar situações, discutir, argumentar, buscar resultados, comunicando-os ao grande grupo, proporcionando um trabalho mais participativo e autônomo.

---

[3] Projeto Fundão (SPEC/PADCT-CAPES) – projeto desenvolvido na Universidade Federal do Rio de Janeiro sob a coordenação da professora Lílian Nasser.

Todos os elementos componentes da engenharia didática (atividades, temas, exercícios, aulas teóricas) serão apresentados e descritos de maneira minuciosa ao longo do desenvolvimento da engenharia didática.

A seguir, são descritos todos os encontros realizados, planejados e desenvolvidos, segundo os pressupostos da metodologia engenharia didática.

Os encontros foram semanais, de duas horas-aula durante um período de três meses, totalizando treze encontros e vinte e seis horas-aula. No início do trabalho, o grupo contava com vinte alunos e ao final dos treze encontros dezesseis alunos faziam parte da turma. Na descrição dos encontros, será realizada, também, uma análise do desenvolvimento dos mesmos objetivando, simultaneamente, ter elementos para aprimorar o planejamento e compor *a análise a posteiori*.

Neste trabalho, optou-se por apresentar as fases de concepção e experimentação da engenharia didática de forma conjunta, uma vez que as mesmas estão relacionadas, na medida em que elementos captados na experimentação contribuíram para o desenvolvimento das atividades desenvolvidas.

Plano para o 1º encontro: para o primeiro encontro, foi planejada a apresentação entre professor e alunos, a apresentação do projeto, os objetivos da investigação e a aplicação de um teste avaliativo inicial (Apêndice B), com o intuito de investigar conhecimentos dos alunos em relação a questões como reconhecimento de figuras planas, paralelismo, propriedades dos quadriláteros e cálculo de área. Também ficou previsto o início do trabalho com unidades e instrumentos de medidas e cálculo de áreas.

Aplicação do Plano: o encontro acorreu conforme planejado. Após o contato inicial de apresentação entre professor e alunos, explicadas as razões e os objetivos da pesquisa e como o trabalho seria desenvolvido, passou-se à aplicação do teste.

Realizaram o teste 20 alunos, e no decorrer de 40 minutos, percebeu-se que não havia necessidade de mais tempo, já que o grupo apresentou o que sabia.

Aplicado o teste, passou-se a uma discussão sobre instrumentos de medida, noções e cálculo de área. Alguns alunos externaram o sentimento de que eram fracos em Geometria. Quando questionados se conheciam instrumentos de medidas, responderam que conheciam e sabiam medir com a régua e o metro, sendo que poucos dominavam o uso de outros instrumentos (trena, paquímetro, micrômetro). No que se refere à mudança de unidades, responderam que tinham revisado o assunto em aulas anteriores, mas que não tinham certeza se o sabiam bem. A seguir, solicitou-se que um grupo de três alunos medisse e calculasse a área do quadro-negro. A tarefa foi desenvolvida com a participação de todos os alunos, pois enquanto um pequeno grupo (três alunos) realizava a medição, os demais participavam dando idéias de como as medições e os cálculos deveriam ser desenvolvidos. Na seqüência, solicitou-se que calculassem individualmente a área do tampo da mesa. Essa tarefa foi muito oportuna, pois contribuiu para compor um quadro dos saberes dos alunos em relação ao significado da área de regiões planas e seu cálculo, bem como do uso adequado do sistema de unidades de medida.

O início das atividades foi tímido, os alunos se mostraram desconfiados com o trabalho que estava sendo realizado. Certo receio de se expor foi percebido através das negativas de fazer medições ou ir ao quadro expor uma solução.

Plano para o 2º encontro: realizou-se a leitura e discussão do texto "Geometria: um pouco de história" (Apêndice C), objetivando uma reflexão sobre a evolução e importância da Geometria. Também houve apresentação e utilização adequada de instrumentos de medidas, tais como: trena, metro, régua, paquímetro, transferidor, micrômetro e um cubo de 1 dm^3 (figura 05), através da manipulação dos mesmos. Desenvolveu-se uma atividade prática sobre área de superfícies planas, objetivando investigar o domínio da questão pelos alunos.

Figura 05: instrumentos de medidas

Aplicação do Plano: o segundo encontro iniciou-se estudando o texto sobre a história da Geometria (Apêndice C). Após a leitura do texto, seguiu-se uma discussão sobre o mesmo, bem como sobre questões relativas à importância da Geometria. A seguir, desenvolveu-se o trabalho com os instrumentos de medida. Os alunos tiveram a oportunidade de manusear diversos instrumentos, tais como trena, metro, régua, paquímetro, transferidor, micrômetro, além de uma discussão sobre a utilização adequada dos mesmos. Ao final da tarefa, constatou-se que o metro e a régua foram os instrumentos mais manuseados. Os instrumentos que os alunos não conheciam, ao contrário do que se esperava, não despertaram maior interesse quanto ao seu uso, já que não sabiam operar com os mesmos. Identificou-se, nesse comportamento certa acomodação do grupo, no sentido de não se interessarem pelo desconhecido, esperando sempre indicações do que deveriam fazer e como fazê-lo. Percebeu-se a necessidade de trabalhar uma motivação externa, que fizesse o grupo aderir à proposta de trabalho. A partir do manuseio dos instrumentos de medidas, passou-se a trabalhar situações envolvendo a necessidade de mudanças de unidades. Esse tipo de tarefa não se restringiu apenas a esse encontro, sendo retomado várias outras oportunidades esse aspecto foi retomado.

Objetivando investigar os conhecimentos dos alunos sobre noções de área de superfícies planas, bem como do cálculo das mesmas, para adequação das atividades dos futuros encontros, foi realizada uma atividade prática. Foram distribuídas pequenas caixas com faces, variando de 30 cm^2 a 280 cm^2, para que calculassem, individualmente, a área total de cada caixinha. O desempenho dos alunos ficou abaixo do esperado, pois nenhum deles acertou o cálculo da área total.

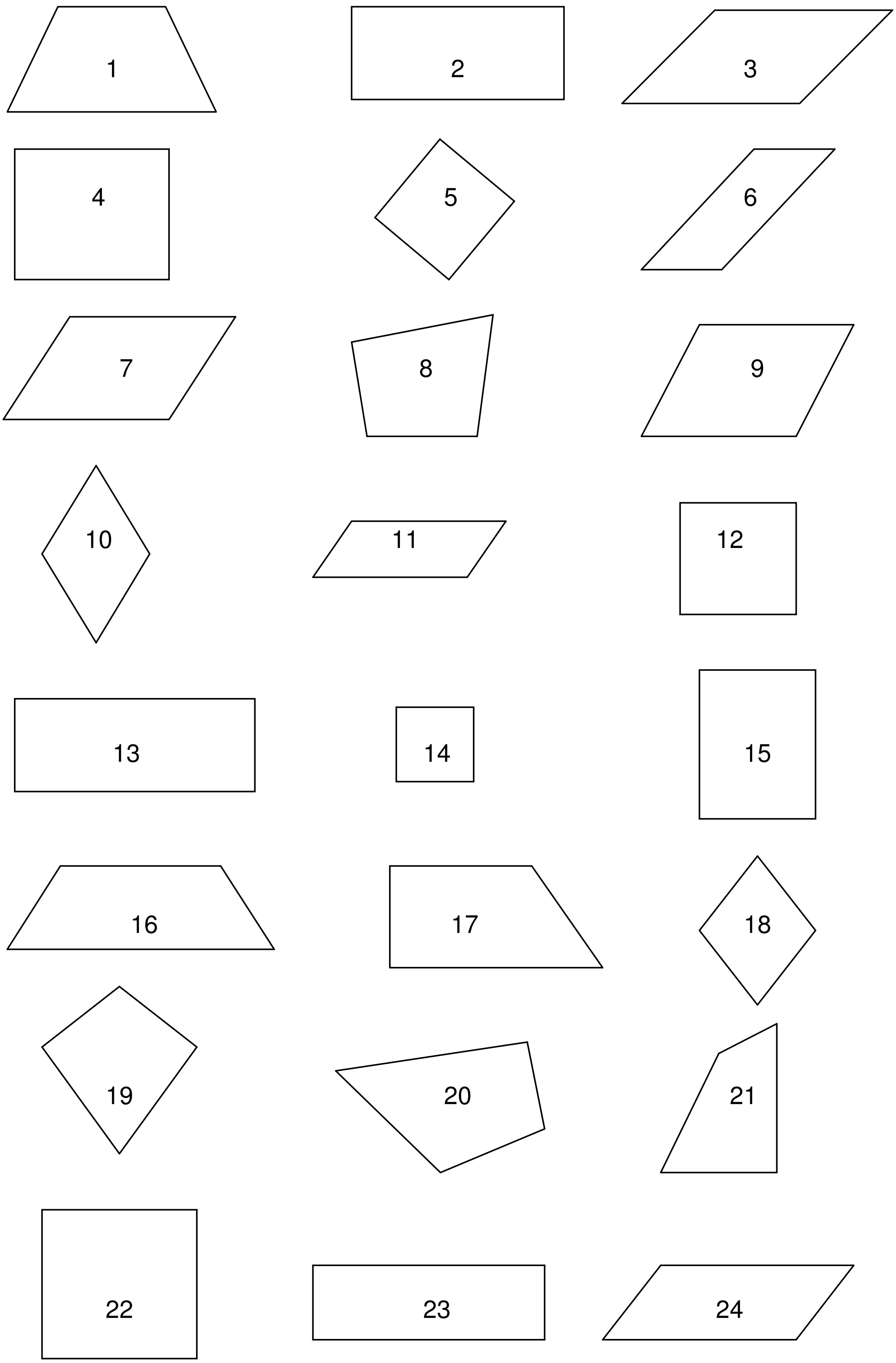
As dificuldades apresentadas pelos alunos, na realização da tarefa, foram:

- interpretação da leitura das medições realizadas - como as caixinhas não apresentavam, necessariamente, medidas inteiras, surgiram muitas dúvidas, relacionadas ao valor da medida a ser utilizada. Por fim, decidiu-se que seriam utilizadas medidas inteiras, sendo necessário realizar um arredondamento. Foram estabelecidos os critérios de arrendamento para obterem-se, sempre, medidas inteiras e discutiu-se o fato de que o resultado obtido seria um valor aproximado;
- cálculo da área de uma face - depois de realizadas as medições do comprimento das arestas, surgiu a dúvida sobre o cálculo que deveria ser feito para obter o valor da área e a pergunta, da grande maioria dos alunos, era se os valores encontrados deveriam ser somados ou multiplicados. Constatou-se que, de modo geral, o grupo não tinha bem definida a noção de área. As manifestações indicaram que, mesmo aqueles que optaram pela multiplicação, não o fizeram com convicção, abandonando suas conjecturas quando as mesmas eram questionadas ou postas em dúvida;
- cálculo da área total - o grupo não mostrou segurança e convicção relativamente ao cálculo da área total. Houve dúvidas se deveriam ser somados os valores encontrados a partir do cálculo da área das faces. Ao menor questionamento, mostravam-se inseguros com relação ao que deveriam realizar ou ao que tinha sido realizado.

Entende-se que as dúvidas e inseguranças apresentadas pelo grupo, em parte, devem-se à falta de conhecimentos específicos, mas boa parte das dificuldades está relacionada ao fato de não estarem acostumados a resolver problemas e realizar tarefas abertas, onde são solicitados a apresentar soluções que não foram já previamente dadas pelo professor.

Como preparação para o próximo encontro, foi solicitada a realização do Tema 1 adaptado de Nasser, relativamente ao reconhecimento de quadriláteros. Em sala de aula, foi realizada uma discussão sobre polígonos e sua nomenclatura, particularizando-se os quadriláteros. Chegou-se ao consenso de que toda figura de 4 lados é um quadrilátero. Esses, por sua vez, recebem nomes específicos, de acordo com determinadas características (propriedades), como par de lados paralelos, ângulos opostos congruentes, lados iguais, entre outros. Quando um polígono não se distingue por características específicas, recebe a denominação de quadrilátero somente.

Tema 1 – Observe os quadriláteros e dê o nome de cada um deles.



Análise dos resultados do tema 1

O desempenho obtido pelos alunos no desenvolvimento do tema 1, que prevê o reconhecimento dos diferentes quadriláteros, pode ser observado nas figuras 06 e 07. Fez-se a análise a partir do número de possíveis respostas corretas e o número total de acertos de cada grupo de polígonos. Resolveram a tarefa 17 alunos.

Polígonos	Número possível de acertos	Número de acertos	% acertos
Quadrado	68	66	97
Losango	51	48	94
Retângulo	68	60	88
Paralelogramo	102	87	85
Trapézio	51	37	72,5
Quadrilátero	68	28	41
Total	408	326	----

Figura 06: quadro do desempenho no reconhecimento de polígonos.

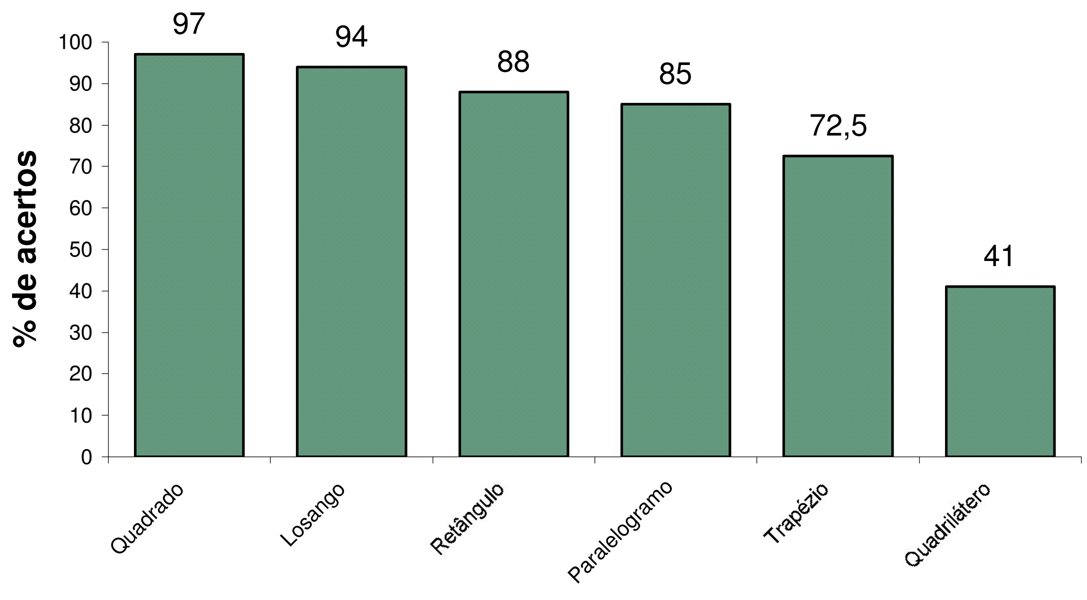


Figura 07: gráfico do desempenho no reconhecimento de polígonos.

A análise do desempenho dos alunos na resolução da tarefa indica que o reconhecimento de figuras, apenas considerando a classificação e visualização das mesmas, foi bastante satisfatória para figuras como quadrado, losango, retângulo, paralelogramo e trapézio.

No que se refere aos polígonos denominados apenas de quadriláteros, o desempenho foi bastante baixo (41% de acertos). Nenhum aluno obteve 100% de acertos no reconhecimento das figuras. O maior índice de erros ocorreu no polígono 19 (houve 9 erros e 5 não responderam em 17 possíveis respostas). As nove respostas erradas indicavam o polígono como sendo um losango. Como o quadrilátero em questão se aproxima de um losango (figura 08), entende-se que há uma forte tendência do aluno nomear uma figura a partir da observação somente da forma, ou seja, o que se parece com um losango passa a ser considerado como tal. Em menor escala, o mesmo ocorreu com os quadriláteros números 8 e 20 (figura 09), que foram nomeados de trapézio em 20% das indicações.

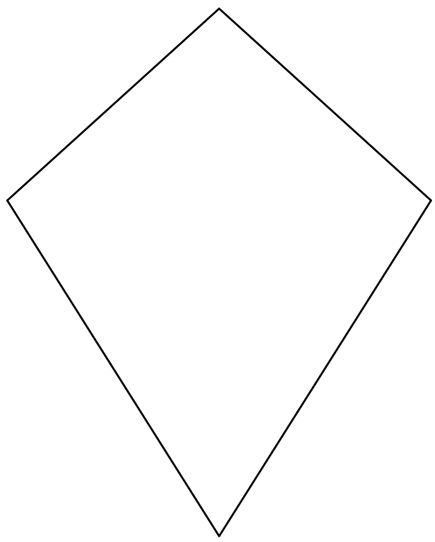


Figura 08: quadrilátero número 19

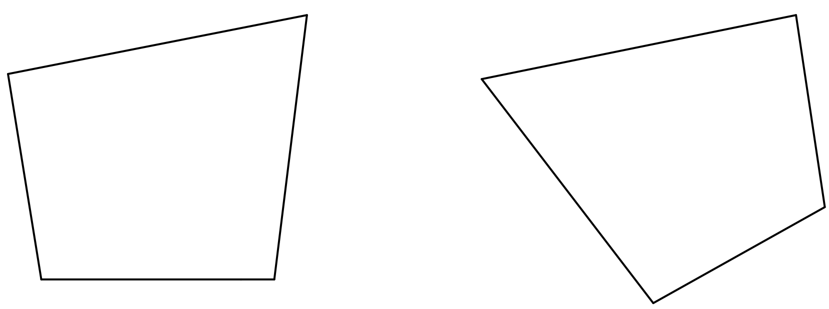


Figura 09: quadriláteros números 8 e 20

A partir do trabalho desenvolvido em sala de aula, no segundo encontro, e da realização da tarefa de reconhecimento de quadriláteros, considerou-se que os alunos investigados, de modo geral, não distinguem figuras planas através de propriedades, o que os coloca no nível 0 do modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de van Hiele. Não se trata apenas de não conhecer determinadas propriedades, mas de sequer considerar que a distinção das diferentes figuras pode e deve ser feita através do reconhecimento das propriedades das mesmas.

Embora se trate de um grupo de alunos do 1º Ano do Ensino Médio, que, teoricamente, já deveriam ter superado esse nível, contudo a realidade aponta em outro sentido. Entende-se que a superação e o avanço em termos dos níveis estabelecidos por van Hiele só ocorrerão mediante um trabalho de real significado para o aluno, objeto desse estudo. O modelo aponta nesse sentido, pois a propriedade *avanço* estabelece que “a progressão (ou não) de um nível para outro depende mais do conteúdo e dos métodos de instrução recebidos do que da idade” (CROWLEY, 1994, p.5).

Assim, considera-se que o 1º e o 2º encontros foram de retomada de idéias e conteúdos, buscando identificar, de forma mais precisa, o real entendimento dos alunos sobre as questões e temas abordados.

Plano para o 3º encontro: nesse encontro, está previsto trabalhar as propriedades dos quadriláteros, com o objetivo de possibilitar aos alunos identificar as propriedades características dos diferentes tipos de quadriláteros. Para tal está previsto o desenvolvimento da atividade descrita a seguir.

Atividade 1 – Estabelecendo características e propriedades

Material a ser utilizado - cinco cartazes, um para cada tipo de quadrilátero (quadrados, retângulos, losangos, paralelogramos e trapézios). Na parte superior de cada cartaz, estão desenhados os quadriláteros correspondentes em diversas posições e tamanhos. Na parte inferior da cartolina, há espaço para que os alunos fixem o nome dos quadriláteros com suas respectivas propriedades, o que é feito com tiras de papel que contém as propriedades e o nome do grupo a que pertencem os quadriláteros. O número de tiras deverá ser o suficiente para completar cada um dos cinco cartazes. Exemplo do material dessa atividade pode ser visto na figura 10.

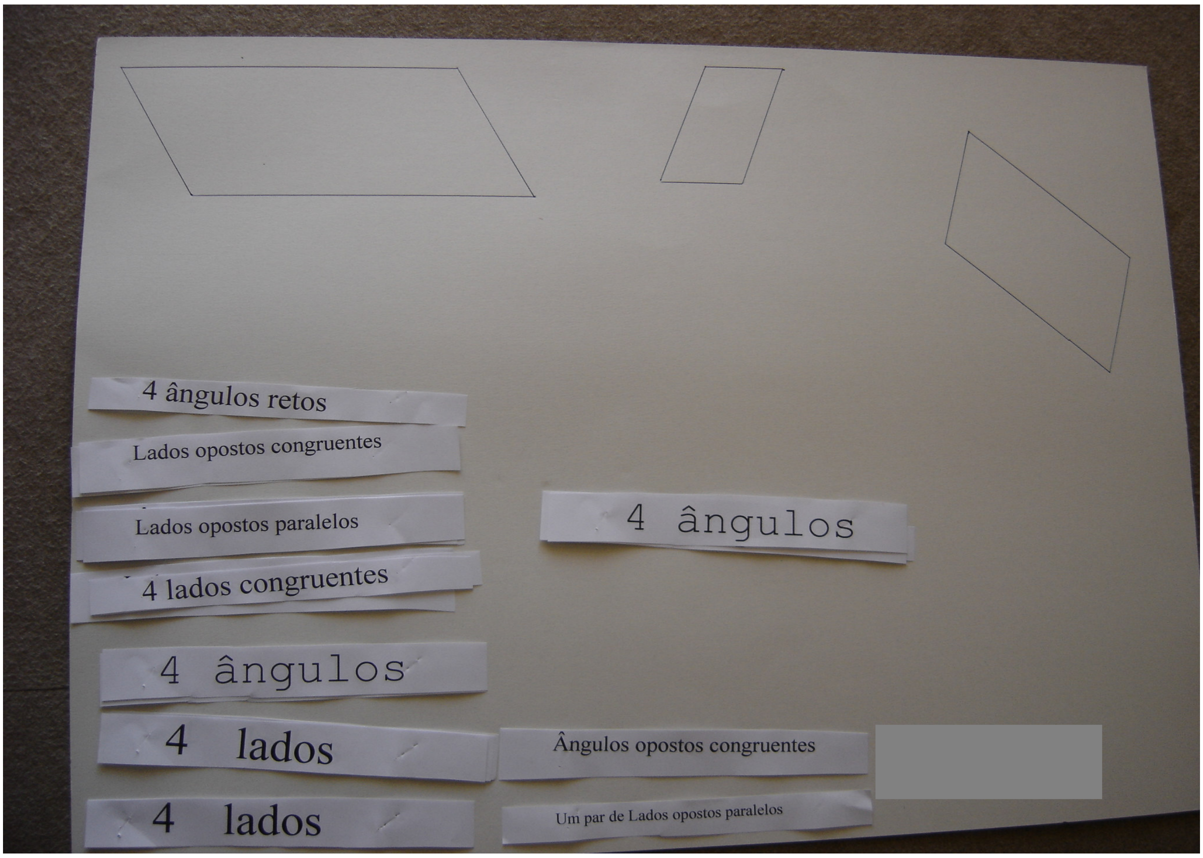


Figura 10: o cartaz dos paralelogramos e as tiras de papel com as propriedades.

Procedimento – atividade realizada no grande grupo. Fixar o cartaz dos quadrados no quadro, questionando a turma em relação:

- ao nome dado aos quadriláteros que aparecem no cartaz (depois que o nome surgia, colocavam a tira correspondente logo abaixo das figuras);
- às propriedades desse tipo de quadrilátero (colocavam as tiras na seqüência).

Os alunos organizavam-se em pequenos grupos, sendo que as questões colocadas eram discutidas nesses pequenos grupos, para que, posteriormente, fizessem o fechamento no grande grupo.

Sem retirar do quadro o cartaz do quadrado, colocavam, também, o cartaz do retângulo, utilizando o mesmo procedimento descrito. Analogamente, trabalhavam com os outros três tipos de quadriláteros. Cada aluno deverá reproduzir, no caderno, os cartazes montados.

Aplicação do plano: A atividade “Estabelecendo características e propriedades” se desenvolveu conforme previsto e detalhado no plano. Os alunos, trabalhando nos pequenos grupos, podem ser vistos na figura 11.

Figura 11: alunos listando propriedades.

Nessa atividade, foi impressionante a capacidade de organização dos alunos e busca dos resultados. Se, no início dos trabalhos, o grupo mostrou um certo desinteresse, essa atividade serviu para motivá-los e integrá-los ao trabalho. A disposição em realizar a tarefa ficou acima da expectativa.

A figura 12 a seguir mostra os alunos organizando os cartazes dos grupos de figuras.

Figura 12: alunos apresentando os resultados de dois grupos de figuras.

O empenho e a motivação dos alunos pode ser percebido claramente, pois, não terminava a apresentação de um grupo de figuras e a turma já questionava sobre qual seria o próximo grupo a ser apresentado. Surpreendentemente, todos queriam apresentar os resultados. As figuras 13 e 14 apresentam o trabalho sendo realizado nos pequenos grupos e a apresentação nos cartazes.

Figura 13: alunos listando propriedades de um grupo de figuras.

Figura 14: alunos apresentando os resultados finais das propriedades de figuras.

A partir do desenvolvimento da atividade, os grupos, como tarefa de casa, elaboraram um quadro-síntese com as propriedades das figuras, que pode ser visto na figura 15.

A elaboração e discussão do quadro-síntese possibilitou uma reflexão sobre a questão dos quadriláteros apresentarem propriedades que podem ser comuns ou não a todos. Também houve o reconhecimento de que um quadrilátero deve-se dar por essas propriedades e não pela forma como estão desenhados.

Nomes das figuras / Propriedades	Quadrilátero	Trapézio	Losango	Paralelogramo	Retângulo	Quadrado
Tem quatro lados	X	X	X	X	X	X
Tem quatro lados iguais			X			X
Tem quatro ângulos	X	X	X	X	X	X
Apenas um par de lados opostos paralelos		X				
Lados opostos paralelos			X	X	X	X
Lados opostos congruentes (iguais)			X	X	X	X
Ângulos opostos congruentes			X	X	X	X
Quatro ângulos retos					X	X

Figura 15: quadro das propriedades dos quadriláteros.

Plano para o 4º encontro: nesse encontro, continuou-se o trabalho com as propriedades dos quadriláteros, com o objetivo de ampliar a possibilidade dos alunos identificarem as propriedades características dos diferentes tipos de quadriláteros. Para ta, está previsto o desenvolvimento da atividade descrita a seguir.

Atividade 2 – Reconhecimento de figuras

Essa atividade prevê o reconhecimento de figuras geométricas através de seus elementos, a partir de um cartaz em que apareçam gradativamente partes de uma figura a ser descoberta, conforme pode ser visto na figura 16.

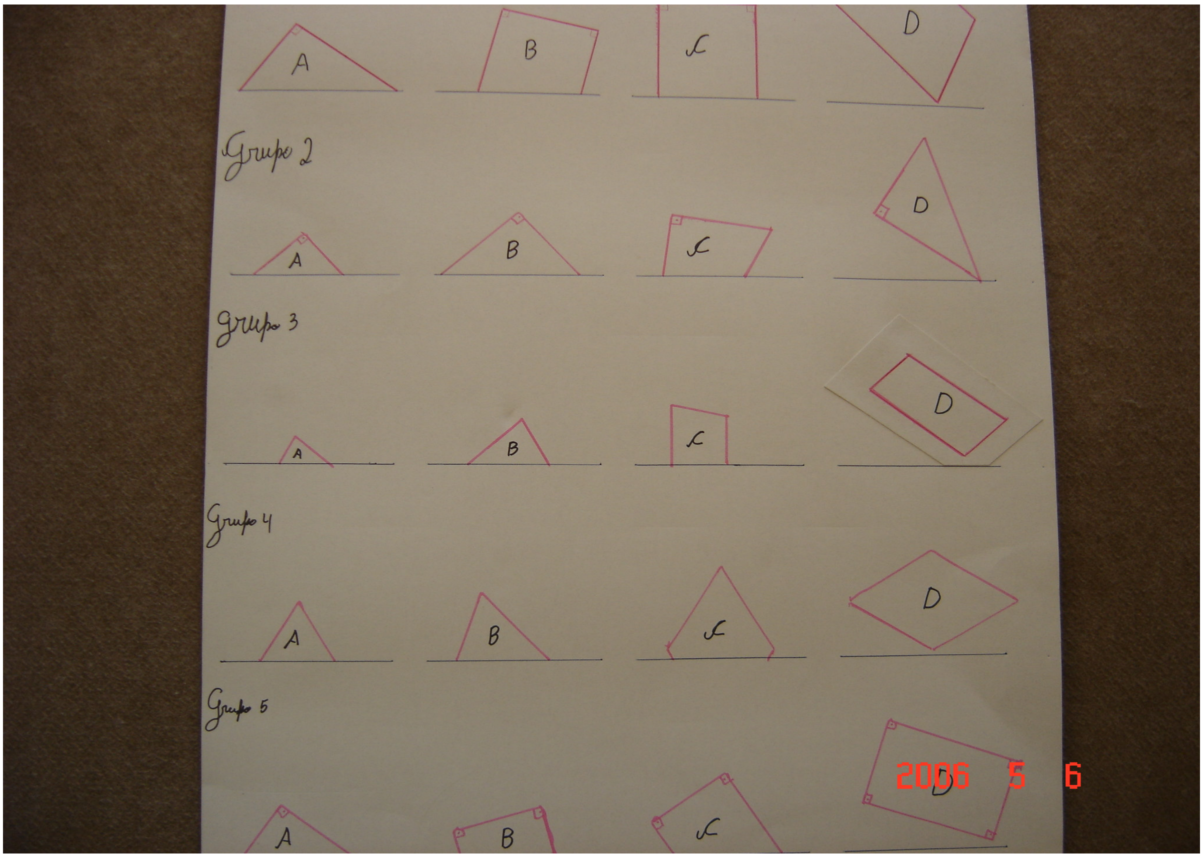


Figura 16: cartaz com grupos de figuras a serem reconhecidas.

Inicialmente o cartaz é apresentado com as figuras cobertas as quais vão sendo descobertas uma a uma, iniciando pelo grupo 1, de A para B, de B para C e de C para D. A cada figura descoberta são feitos questionamentos sobre a figura que está surgindo e o aluno faz conjecturas sobre a questão, registrando essas informações em uma planilha (Apêndice D). Ao final do processo, o aluno com base nas características e propriedades de cada figura, identifica-a. Quando finalmente a figura fica totalmente à vista, cada um, individualmente, verifica se havia indicado a figura correta. Nesse momento, surgem dúvidas e questões que são discutidas no grande grupo. A figura 17 mostra um cartaz onde as figuras ainda estão cobertas.

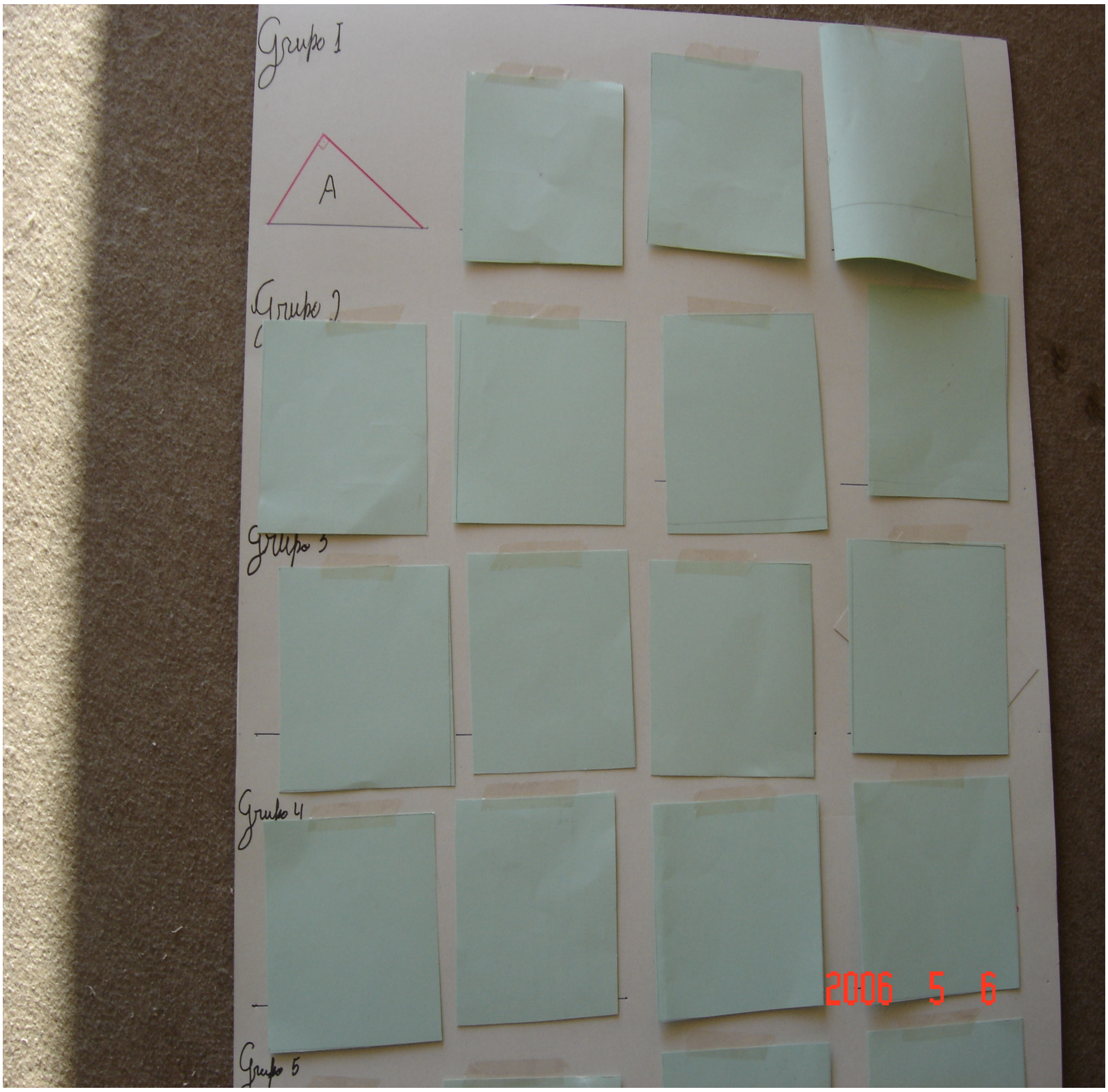


Figura 17: figuras cobertas.

Aplicação do plano: a atividade “Reconhecendo figuras” se desenvolveu conforme previsto e detalhado no plano.

Nessa atividade foram observadas algumas iniciativas muito interessantes por parte dos alunos. Por iniciativa própria, eles elaboraram a técnica de preenchimento da planilha. Cada um preencheu à sua maneira e demonstraram muita segurança, pois, ao questioná-los, os mesmos tinham argumentos convincentes da técnica de preenchimento.

Na figura 18, a seguir, aparece dois exemplos distintos de planilhas preenchidas.

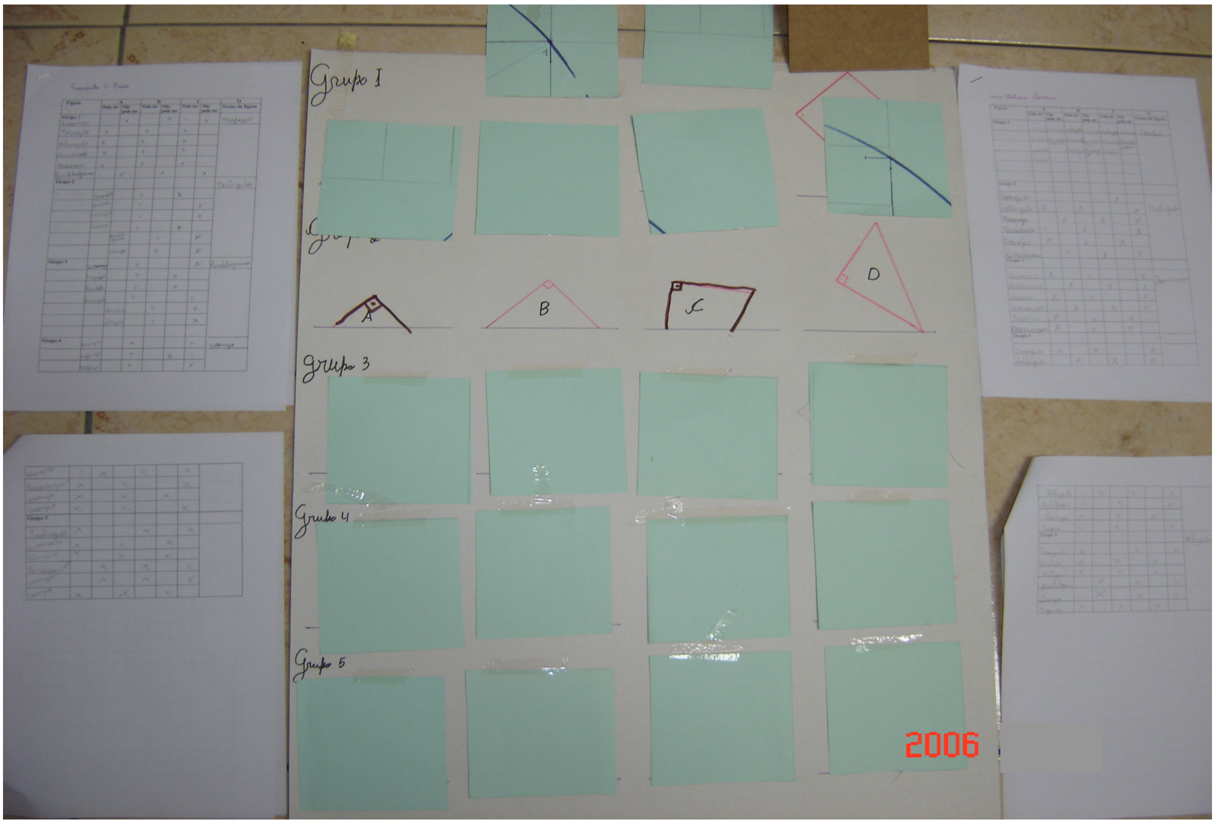


Figura 18: planilhas preenchidas referentes à atividade descobrindo figuras.

Como a atividade desenvolvida no terceiro encontro, o trabalho transcorreu com uma participação muito intensa dos alunos, que faziam conjecturas, justificavam suas decisões e argumentavam quando suas soluções eram colocadas em dúvida. Entende-se que o grupo cresceu muito nesse sentido, uma vez que posturas indecisas e sem convicção foram substituídas por discussões e defesas de pontos de vista. Em relação às idéias matemáticas que estavam sendo desenvolvida, uma análise preliminar aponta, também, para um crescimento.

As atividades desenvolvidas nos encontros três e quatro permitiram ao grupo transitar do nível de visualização ou reconhecimento para o nível de análise, correspondente ao segundo nível da teoria de van Hiele. Entende-se que houve um avanço significativo para o terceiro nível, que corresponde à dedução informal ou ordenação, uma vez que as atividades permitiram estabelecer relações de propriedades dentro das figuras e entre figuras.

Plano para o 5º encontro: a partir do quinto encontro, iniciou-se a articulação de atividades com o objetivo de retomar e aprofundar as noções de área e volume, bem como o cálculo de áreas de figuras planas e volumes de sólidos. Para tal, foi proposta a atividade 3.

Atividade 3 – Montando e desmontando um cubo

Material necessário: cartolina de 16 cm x 22 cm, tesoura, régua, lápis e fita adesiva.

Procedimento: inicialmente, os alunos quadricularam a cartolina em cm^2 para, em seguida, recortá-la conforme croqui apresentado na figura 19. A idéia era montar e desmontar o sólido com o intuito de trabalhar as noções de figura plana e figura espacial, área e volume.

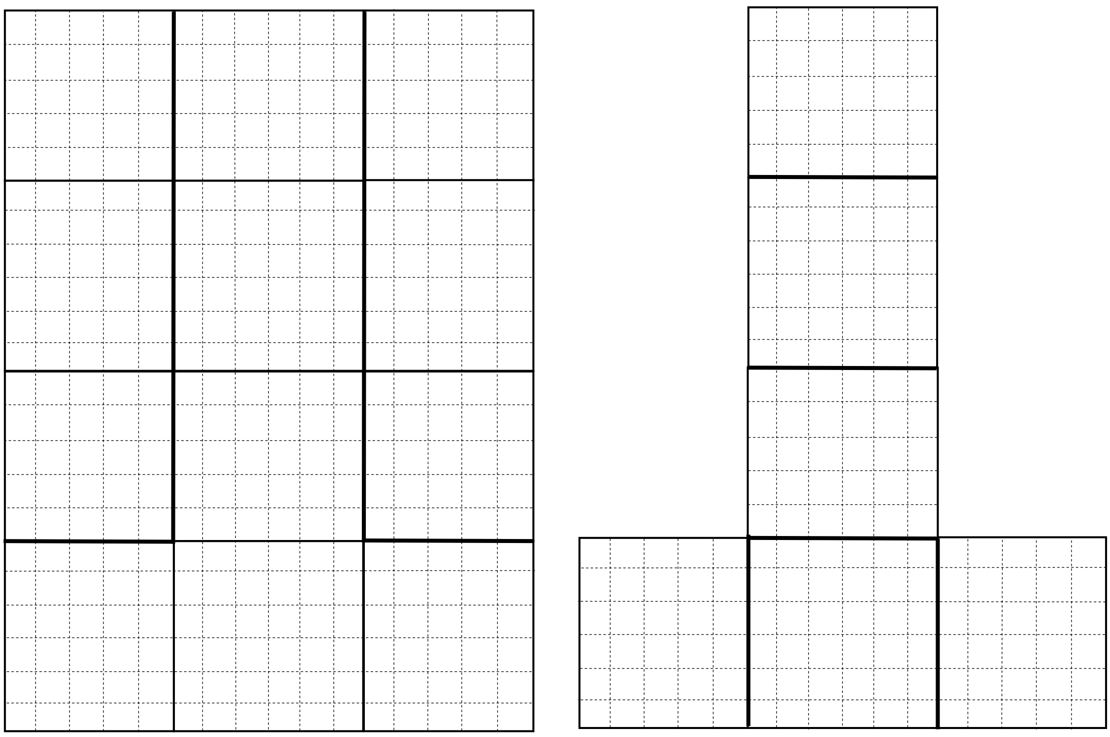


Figura 19: croqui da cartolina quadriculada.

Nesse mesmo encontro, foram planejadas atividades para retomada de operações algébricas, bem como a utilização de unidades de medidas. Buscou-se o desenvolvimento de atividades que integrassem aspectos geométricos, algébricos e a utilização adequada de sistemas de medidas.

Aplicação do plano: revisaram-se as operações algébricas de adição, subtração e multiplicação, utilizando-se exemplos de operações com expressões que surgiam ao longo do trabalho, exemplificadas a seguir:

a) $2x + 3x + x = 6x$;

b) $5m^2 + 8m^2 + 3m^2 = 16m^2$;

c) $6m^2 – 3m^2 = 3m^2$;

d) $7m^2. m = 7m^3$;

e) $m.m.m = m^3$;

f) $m.m.5m^3 = 5m^5$;

g) $6m.5m=30m^2$.

Foram desenvolvidas atividades envolvendo sistema de medidas linear, retomando aspectos do trabalho desenvolvido no segundo encontro, quando foram apresentados diferentes instrumentos de medidas. A ênfase, nesse momento, foi na transformação de unidades em múltiplos e submúltiplos.

Para a atividade prática, distribuíram-se as cartolinas em duplas, de 16cm x 22cm, solicitando-se que as quadriculassem em cm^2 e que, em seguida, a recortassem conforme croqui apresentado. A idéia era projetar, montar e desmontar o sólido, a fim discutir aspectos e propriedades de figuras planas e espaciais, medidas de comprimento (arestas), a idéia de área (faces), bem como a necessidade de uma outra unidade de medida para quantificar as faces (cm^2). Foram apresentados exemplos de situações para a utilização adequada das unidades de medidas. Por exemplo: na construção de mapas geográficos, as distâncias e áreas de regiões que são medidas em km e km^2, nos mapas, após a utilização de uma escala adequada, são representadas por cm e cm^2; na construção civil, usa-se o m e m^2; na construção mecânica, como motores de automóveis e sistemas hidráulicos, faz-se necessário o uso do mm e mm^2 e ainda, conforme o caso, milésimos de milímetro.

Após a construção e montagem do sólido e da discussão sobre questões envolvendo medidas de comprimento e de área, foi solicitado que respondessem questões do tipo:

- quantos cm^2 havia na cartolina, ou seja, no retângulo inicial?
- quantos cm^2 havia em cada face?
- quantos cm^2 havia no total da caixa?

A figura 20 mostra os alunos desenvolvendo a atividade proposta.

Figura 20: alunos quadriculando uma cartolina em cm^2

A atividade foi desenvolvida em duplas. A construção do sólido transcorreu sem muitos problemas ou dúvidas. Quando surgia uma questão, a mesma era discutida no grupo e, se era de interesse de todos, era socializada. Os alunos fizeram os cálculos e responderam às questões satisfatoriamente, ou seja, que a cartolina possuía 352 cm^2, quatro faces possuíam 30 cm^2, duas faces possuíam 36 cm^2, sendo que, no total, a caixa possuía 192 cm^2.

Além de realizarem os cálculos solicitados, a expectativa era de que, ao desenvolverem a tarefa, percebessem que, na construção, houve perda de material e que a área total da cartolina inicial era maior do que a utilizada, ou seja, que o todo era maior que a soma das partes, pois na construção há perda de material. Os alunos se limitaram a calcular as áreas e dar as respostas. Em nenhum momento questionaram espontaneamente sobre as partes que foram descartadas.

Foi possível perceber que a tarefa, sob certos aspectos, foi realizada de forma mecânica, já que os alunos tinham o modelo. Dúvidas, questionamentos e uma análise do trabalho realizado, que levariam a uma generalização e extensão da noção de área, não ocorreram. Assim, para continuar a explorar a questão, solicitou-se, como tema de casa, que construíssem e montassem um cubo de um decímetro de aresta e medissem o volume.

Figura 21: alunos calculando a área das faces de uma caixa.

A surpresa surgida durante o trabalho foi o questionamento, por parte de um aluno, referente à área do círculo. A pergunta despertou em todos a idéia de que o cálculo da área do círculo deveria ser algo muito difícil, além da capacidade do grupo. Essa postura indicava o quanto se sentiam inseguros, ainda, em relação às suas capacidades. Assim, para continuar explorando a questão solicitou-se, como tema de casa, que construíssem um cubo de um decímetro de aresta e calculassem o seu volume.

Plano para o 6º encontro: para o planejamento do 6º encontro, considerou-se o desempenho do 5º encontro, optando-se por trabalhar com o cálculo de áreas de retângulos e triângulos, através da atividade 4.

Aplicação do plano

Atividade 4 – Área do triângulo

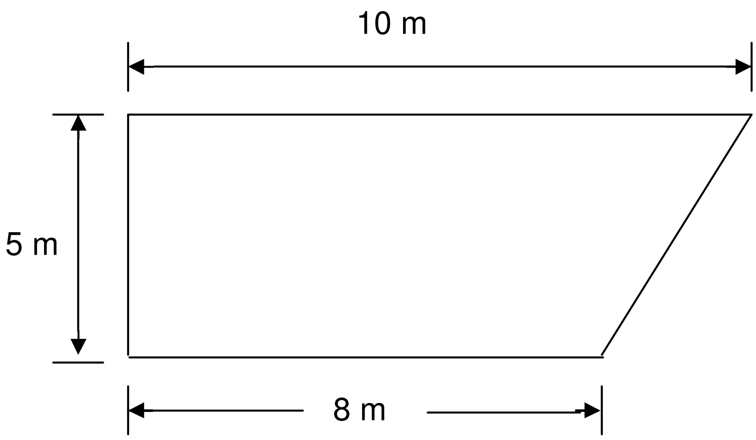
Em cartolina desenharam um retângulo de 7dm X 5dm, quadriculando-o, tomando como unidade 1 dm^2. Calcularam a área. No verso do retângulo, efetuaram a seguinte construção: desenharam um triângulo em que dois vértices coincidiam com dois vértices do retângulo e o outro vértice com qualquer ponto do lado oposto. Recortaram a figura desenhada, comparando-a com as sobras, registrando as conclusões. A partir da atividade e, como conclusão, os alunos afirmaram que a área do triângulo construído equivalia à metade da área do retângulo e, portanto, tinha uma medida de 17,5 dm^2. Ao final, concluíram que foram obtidos três triângulos, um construído e outros dois obtidos das sobras, sendo que a soma das áreas dos triângulos das sobras equivalia à área do triângulo construído. Perceberam, e a questão foi motivo de discussão, que independente do triângulo construído, as sobras correspondiam a um outro triângulo, que era congruente ao primeiro. A figura 22 mostra o grupo trabalhando na construção do triângulo.

A partir dessa atividade, encaminhou-se a modelagem para a obtenção da fórmula para o cálculo da área de um triângulo qualquer. O grupo chegou à fórmula A=(bxh)/2 com bastante facilidade em função das atividades anteriormente realizadas. No decorrer do trabalho, não faltaram perguntas sobre como recortar, construir o triângulo e se sempre iria dar certo. As perguntas foram oportunas e as respostas foram dadas pelos próprios alunos após desenharem e recortarem triângulos de diferentes tamanhos. A turma interagiu e evidenciou confiança no aprendizado.

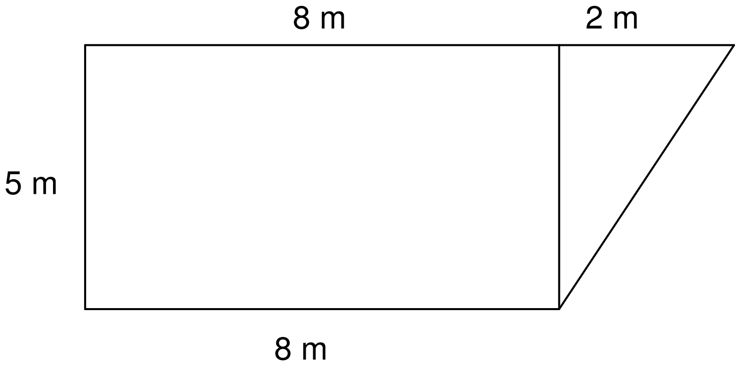
Figura 22: alunos recortando o retângulo.

A atividade deu bons resultados, visto que a desenvoltura dos alunos inspirou confiança. Outro aspecto importante que se pôde observar foi que o trabalho com figuras em verdadeira grandeza facilitou a visualização. Também houve a evolução e o domínio no uso da trena como instrumento básico no cálculo de áreas.

Em forma de desafio, foi apresentada a seguinte figura no quadro:



Questão: como se pode obter a área total dessa figura? Em poucos minutos, um aluno já respondeu, com muita confiança, que se deveria dividir em duas partes a figura, ou seja, em um triângulo e um retângulo, traçando-se um segmento de reta perpendicular à base, conforme croqui abaixo.



Com esse croqui, vários alunos apresentaram A = 8m x 5m = 40m^2 para a área do retângulo e para o triângulo calcularam A = (5m x 2m) / 2 = 5m^2. Rapidamente, disseram que a área total era de 45m^2. Questionados sobre a posição do triângulo, alguns, com firmeza, disseram que independe da posição da figura, pois o que vale são as medidas.

Finalizando o encontro, distribuíram-se as tarefas de casa (tema 2), conforme apresentação a seguir.

Tema 2

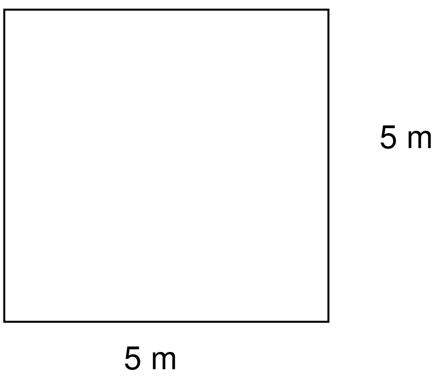
Dadas as figuras calcular a área de cada uma delas:

1)

A =________dm^2

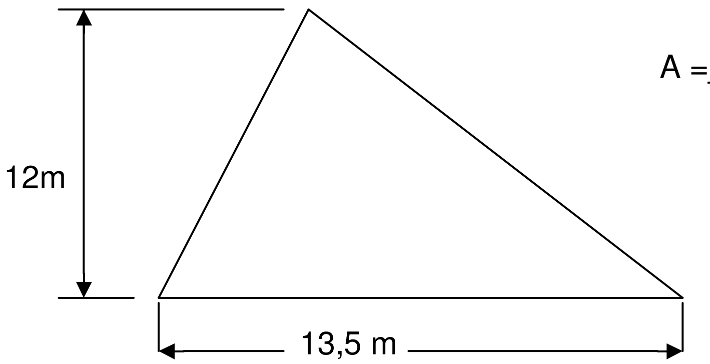
A =________m^2

2)



A =________m^2

A =_______cm^2

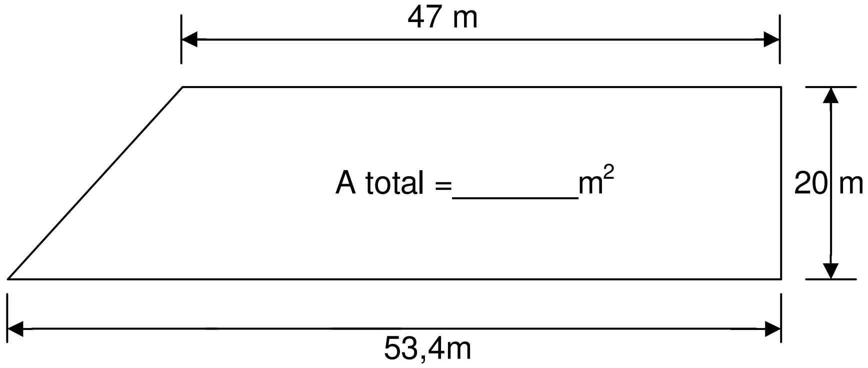
3) 

A =______m^2

4) Um terreno no centro de Nova Sardegna, 3º Distrito, mede 15 metros de frente e 45 metros de fundo. Qual é sua área em metros quadrados?

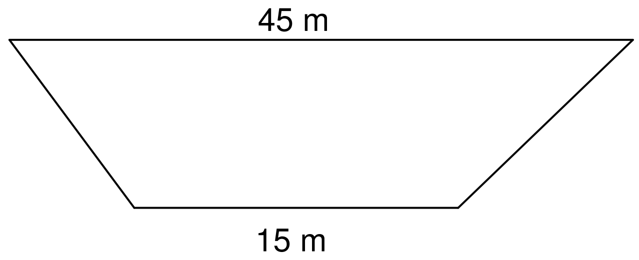
A =_______m^2

5) Observe o seguinte terreno e calcule sua área em metros quadrados.



A primeira e a segunda questão do tema 2 tinham por finalidade investigar o domínio do cálculo de áreas, bem como o domínio sobre a utilização das unidades de medidas. A questão três buscava avaliar a capacidade de utilizar a relação adequada conforme a figura. A questão quatro referia-se a uma aplicação prática, vinculada a uma área concreta da realidade local. A questão cinco objetivava investigar o desempenho dos alunos quando é apresentada uma região que necessita ser desmembrada em figuras elementares para a realização do cálculo da área total.

Com relação às atividades propostas, um aluno questionou a questão 4, argumentando que não seria possível calcular a área. Em face de tal argumento, perguntou-se como ele estava vendo o terreno, como poderia representá-lo através de um desenho. O esboço do terreno foi apresentado pelo aluno conforme verifica-se a seguir:



Analisando a interpretação que o aluno deu para a questão, é possível perceber, além de uma desvinculação das atividades realizadas com a realidade, uma noção equivocada do significado de "15 metros de frente por 45 metros de fundo". No caso, o terreno em questão está localizado em Nova Sardegna, que é um distrito da região conhecido de todos. Na região, os terrenos são padronizados em torno dessas medidas, sendo áreas regulares quase que na sua totalidade. A resposta do aluno também evidencia certa falta de compreensão sobre questões relativas a paralelismo e perpendicularismo. A expressão "15 metros de frente e 45 metros de fundo" é usualmente utilizada para designar áreas retangulares. É importante lembrar que se trata de alunos de 1º ano de Ensino Médio.

O desempenho dos alunos na realização do tema 2 pode ser observado na figura 23.

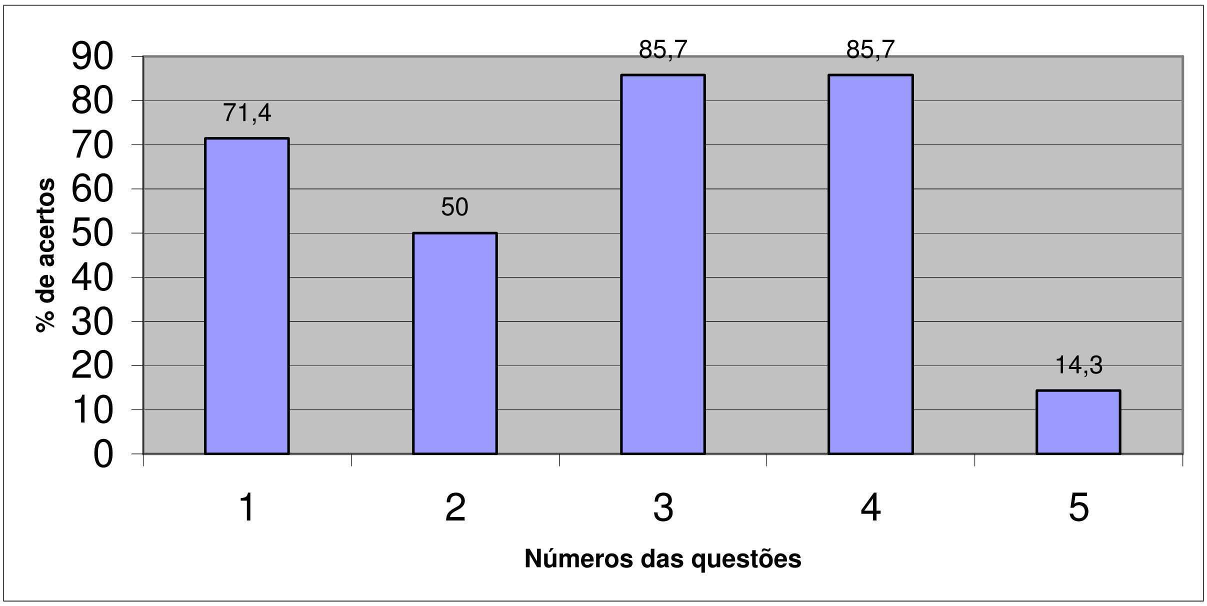


Figura 23: gráfico do desempenho na realização do tema 2.

Uma análise do desempenho na realização da tarefa de casa mostra que, com relação às questões 1 (71,4% de acertos), 3 e 4 (85,7% de acertos), o mesmo foi bastante satisfatório. Na questão 1, o percentual de quase trinta por cento de erros está relacionado não com cálculo da área, mas com a mudança de unidades (m para dm e vice-versa). Na questão 3, o erro cometido foi a não-divisão por dois, ou seja, calcularam como se fosse um retângulo. Na questão 4 o percentual de erros deve-se ao fato de os alunos terem deixado a questão em branco.

A questão 2 apresentou um percentual de acerto de 50%. Ela fornecia as dimensões da figura em metros e pedia solução em metros e centímetros quadrados. A resposta em metros quadrados foi 100% correta, porém a resposta em centímetros quadrados foi 100% incorreta, o que permitiu perceber dificuldades dos alunos em relação à transformação de unidades.

A questão 5 apresentou um percentual de acertos baixíssimo (14,3%). Uma análise dos erros cometidos indica que três alunos realizaram a divisão da região em um retângulo e um triângulo, mas, no cálculo da área do triângulo, não efetuaram a divisão por dois; três alunos deixaram a questão em branco; quatro alunos deram como resposta 27078, sem indicação de como desenvolveram o cálculo (a impressão é que um dos alunos fez o tema e os demais copiaram, pois os erros cometidos nas demais questões foram os mesmos). Dois outros alunos deram respostas aleatórias, embora tenham desenvolvido alguns cálculos corretamente.

Entende-se que a análise do desenvolvimento das questões ficou prejudicada porque muitos alunos não apresentaram os cálculos. Devido a esse fato solicitou-se aos alunos que, ao desenvolverem as tarefas, apresentassem as estratégias e cálculos realizados.

Plano para o 7º encontro: dando seqüência às atividades planejadas, a proposta de trabalho para o 7º encontro era a modelagem da área do losango a partir da atividade 5.

Atividade 5 - Área do losango

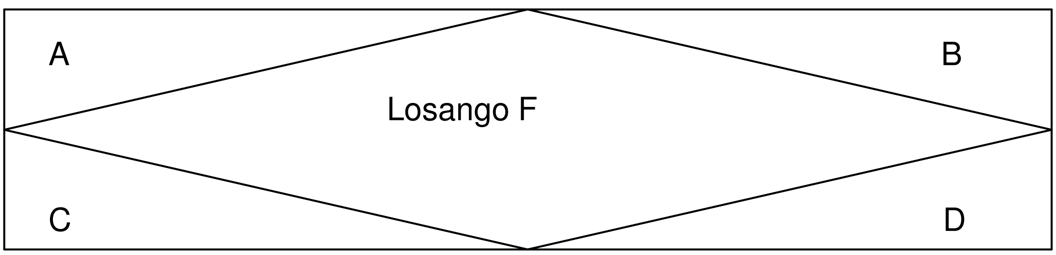
Estratégia: distribuir cartolinas retangulares de diferentes tamanhos (tipo 20cm x 30cm, 15cm x 24cm, etc...) para a construção de losangos com a idéia de que, mesmo com diferentes tamanhos, a fórmula obtida para o cálculo da área é única. Feita a distribuição dos retângulos, foi solicitado que marcassem os pontos médios de cada lado, unindo esses pontos. Na seqüência, foi solicitado que recortassem a figura obtida, comparando com as partes que sobraram. A partir dessa comparação, foi solicitado que anotassem os resultados obtidos, buscando estabelecer uma relação matemática.

Aplicação do plano: iniciou-se o 7º encontro com a retomada de aspectos de cálculo da área de triângulos e retângulos, com o objetivo de retomar questões do tema de casa as quais tiveram baixo desempenho, especialmente a questão 5, que foi discutida e refeita pelo grupo.

O desenvolvimento da atividade para a modelagem da fórmula da área do losango desenvolveu-se satisfatoriamente. Interagiu-se com os alunos e observou-se que, apesar da necessidade de, freqüentemente, retomar algumas idéias, os alunos estavam começando a visualizar as figuras, fato que posteriormente foi confirmado no retorno das atividades de casa.

Um dos alunos foi categórico ao concluir e afirmar que, em relação à diagonal maior e à diagonal menor, não importando a posição, uma pode ser considerada a base e a outra, a altura de um retângulo ao qual o losango está inscrito, bastando girar-se a figura em 90°.

O esboço a seguir mostra como os alunos desenvolveram a atividade e as figuras 24 e 25 mostram os mesmos expondo, no quadro, os resultados dos exercícios práticos feitos em sala de aula, bem como a modelagem solicitada. Chama-se atenção para a figura 24, onde aparece a apresentação da fórmula, primeiramente, utilizando as letras b e h (utilizadas na expressão da área do retângulo) e a evolução para a utilização da notação própria do losango.



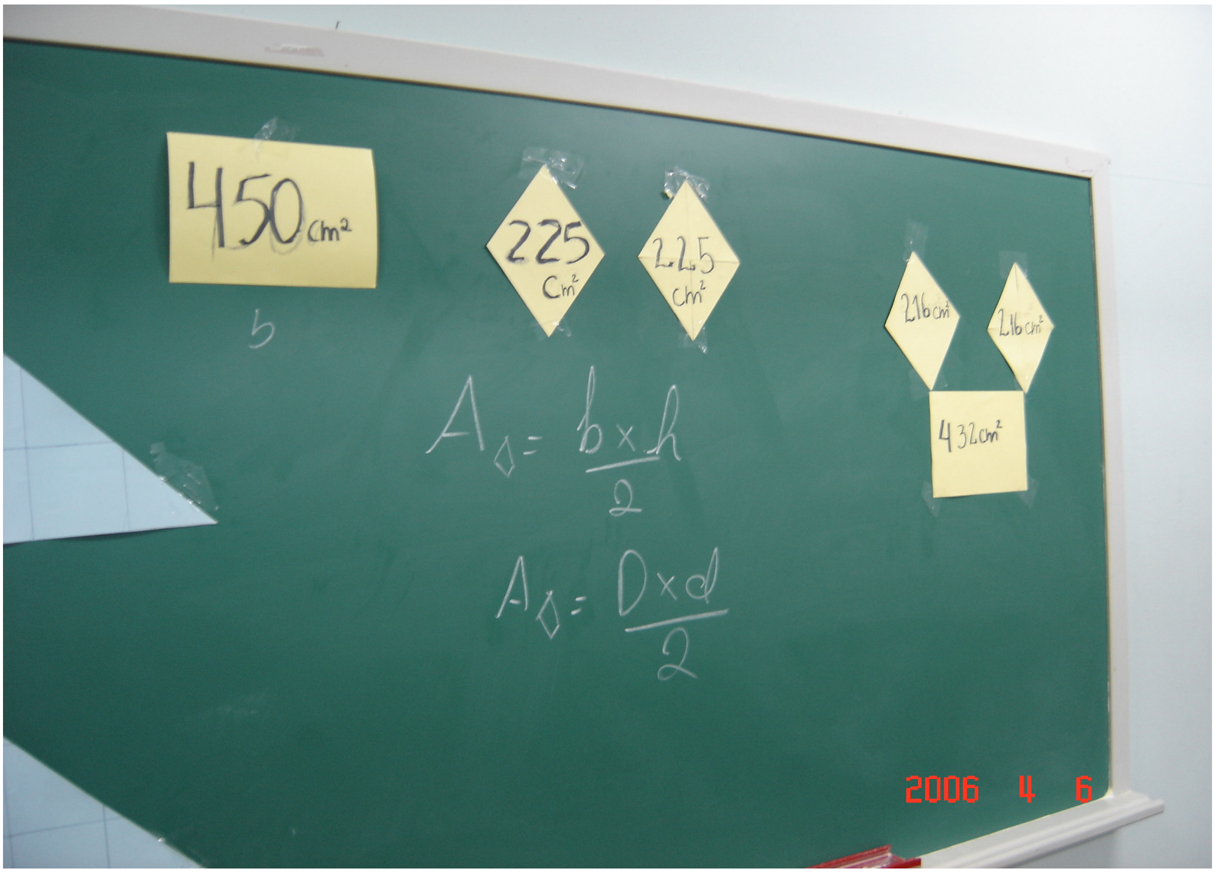


Figura 24: resultado de duas duplas.de alunos

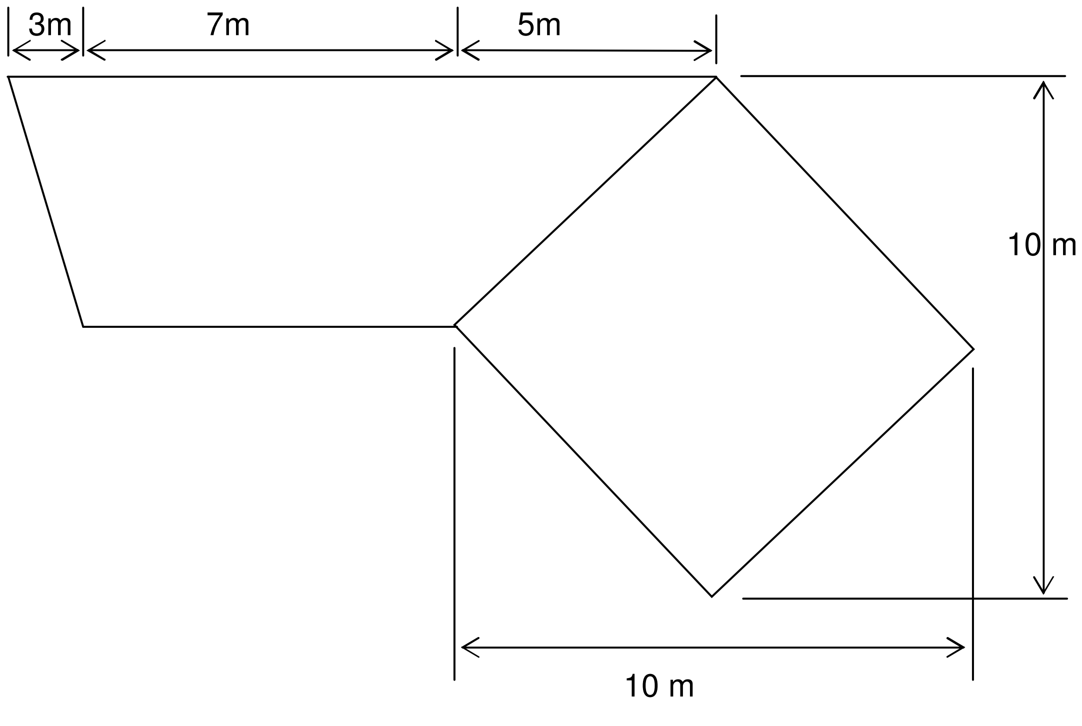
Figura 25: uma dupla apresentando os resultados com explicações.

Objetivando desenvolver as atividades relativas ao cálculo de área de figuras planas, sempre relacionando a nova figura estudada com o retângulo e com as demais já estudadas, colocou-se no quadro o resultado das tarefas referentes ao cálculo da área do triângulo, conforme pode ser visto na figura 25. Nesse momento, do trabalho, foi possível perceber que os alunos, ao resolver as tarefas, estavam desenvolvendo um processo de visualização e comparação de figuras planas, com características que os colocam no primeiro nível da teoria de van Hiele. É certo que, nesse momento, o trabalho não estava direcionado para atingir os demais níveis, o que será retomado posteriormente.

Ao final do encontro, foi solicitado que resolvessem, em casa, uma atividade referente à área de figuras compostas (tema 3), descrito a seguir:

Tema 3 – Cálculo de áreas

1) Observe a figura abaixo, decomponha em partes, de modo que seja possível calcular a área dos novos polígonos. Para cada figura obtida, calcule a área, dê três propriedades e faça o desenho.
2) Calcule a área total.



Obs.: todo o desenvolvimento das questões deve ser apresentado

Plano para o 8º encontro: o trabalho desenvolvido até o 7º encontro evidenciou, fortemente, dificuldades dos alunos em relação ao domínio de unidades de medida e suas transformações. Percebeu-se, também, a necessidade, de ao trabalhar os polígonos, desenvolver não somente aspectos visuais, mas também encaminhar para um trabalho que contemple o desenvolvimento de idéias relativas as propriedades das figuras, buscando avançar nos níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico proposto por van Hiele. Assim, foram propostas algumas atividades que passam a ser descritas.

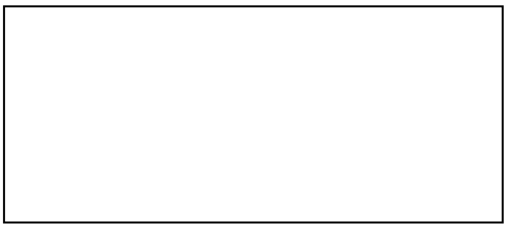
Transforme as unidades conforme pedido:

1) 10m = ______cm
2) 3km = ______m
3) 150 cm = ______m
4) 0,35 m = ______cm
5) 13,45 m^2 = ______cm^2
6) 256 m = ______km
7) 2567cm^2 = ______m^2
8) 23,465dm = ______m
9) 29 m^2 = ______mm
10) 4384 mm = _______cm

A realização desse exercício foi precedida de uma nova discussão sobre unidades de medida e a conveniência da utilização de uma unidade padrão, seus múltiplos e submúltiplos. Procurou-se trabalhar com as unidades mais utilizadas, buscando tornar significativa essa questão para o aluno.

Calcule a área das seguintes figuras abaixo:

11) 8 m



A = _______m^2

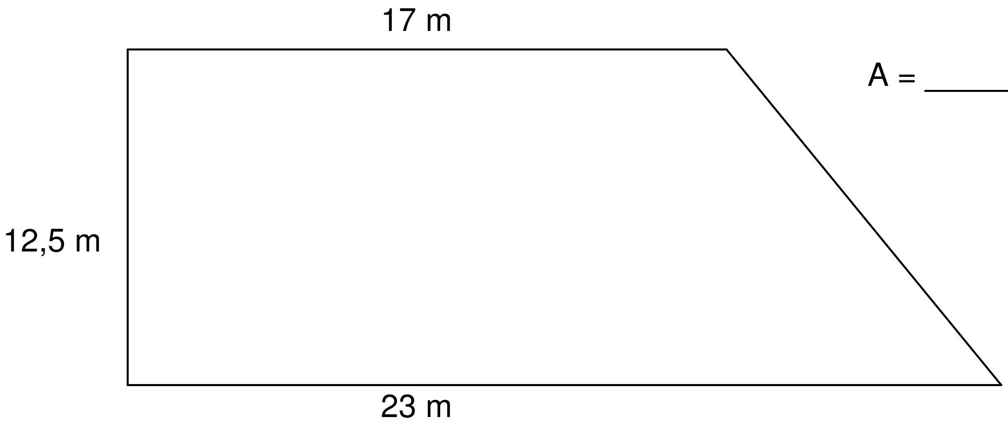
A = _______cm^2

12,5 m

12) Cite três propriedades da figura acima:

-
-
-

13) Observe a figura abaixo e calcule a área total.



A = _______m²

Aplicação do plano: nesse encontro, trabalhou-se apenas com conceitos teóricos. O tema 3 foi discutido e retomado em aula.

Com relação ao desempenho nas atividades do tema 3, dos dezesseis alunos que fizeram o tema, oito responderam corretamente a todos os itens, o que se considerou bastante satisfatório, já que o tema envolvia, além da decomposição de uma figura, o cálculo das áreas parciais e total, bem como a identificação de propriedades das figuras, sendo que os outros oito alunos não realizaram a atividade, não sendo possível avaliá-los.

A aula desenvolveu-se retomando idéias e conceitos já desenvolvidos, uma vez que se sentiu a necessidade dessa retomada para um trabalho posterior de melhor qualidade e aproveitamento.

Plano para o 9º encontro: após o 8º encontro, quando foram desenvolvidas atividades e tarefas objetivando consolidar e ampliar as idéias e conceitos até então trabalhadas, retomou-se o cálculo de área, sendo que para esse 9º encontro foram programados trabalhos com paralelogramos de diferentes tamanhos, como se pode ver na figura 26, através do desenvolvimento da atividade 6.

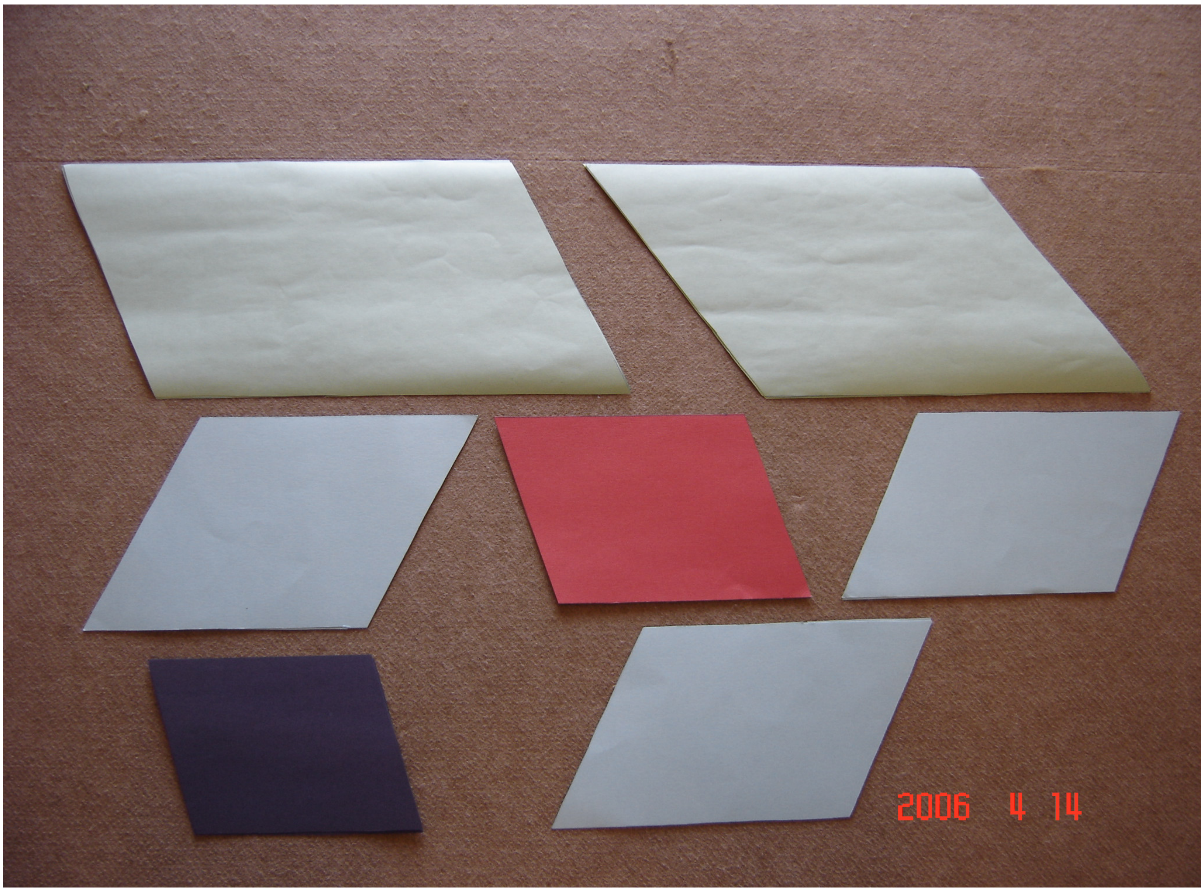


Figura 26: paralelogramos trabalhados.

Atividade 6 – Área do paralelogramo

A atividade proposta, com paralelogramos, tinha por objetivo estabelecer a fórmula para o cálculo da área dos mesmos, a partir da manipulação dos diferentes paralelogramos distribuídos.

Durante o desenvolvimento da atividade, cada dupla de alunos, recebeu em cartolina dois paralelogramos iguais, sendo que diferentes duplas receberam paralelogramos distintos (tamanhos diferentes, inclinações diferentes, inclinações para a direita e esquerda), pois o objetivo era transformar o paralelogramo em um retângulo, sem perda ou ganho de área.

Foi solicitado aos alunos que buscassem uma solução para o seguinte problema: Qual a área em cm^2 da figura recebida?

As soluções foram apresentadas ao grande grupo e discutidas. Solicitou-se às duplas que buscassem uma fórmula geral para o cálculo da área de qualquer paralelogramo com uma justificativa.

Aplicação do plano: foram constituídas oito duplas de alunos, sendo distribuído um par de paralelogramos iguais para cada uma. Solicitou-se que buscassem a solução para o cálculo da área, bem como a fórmula a ser aplicada em qualquer caso. Os paralelogramos poderiam ser dobrados ou cortados.

Rapidamente, os grupos transformaram um paralelogramo em um retângulo.O interesse pela aula foi surpreendente, pois, os grupos que terminaram sua tarefa passaram a ajudar os demais e o resultado foi excelente. É importante destacar que a ajuda entre os grupos estava sendo incentivada pelo professor já nos encontros anteriores e, particularmente, nesse encontro, foi assumida pelo grupo de forma espontânea.

As figuras 27 e 28 mostram o resultado prático da atividade. Já a figura 29 apresenta a conclusão, ou seja, a relação construída e que é válida para o cálculo da área de qualquer paralelogramo.

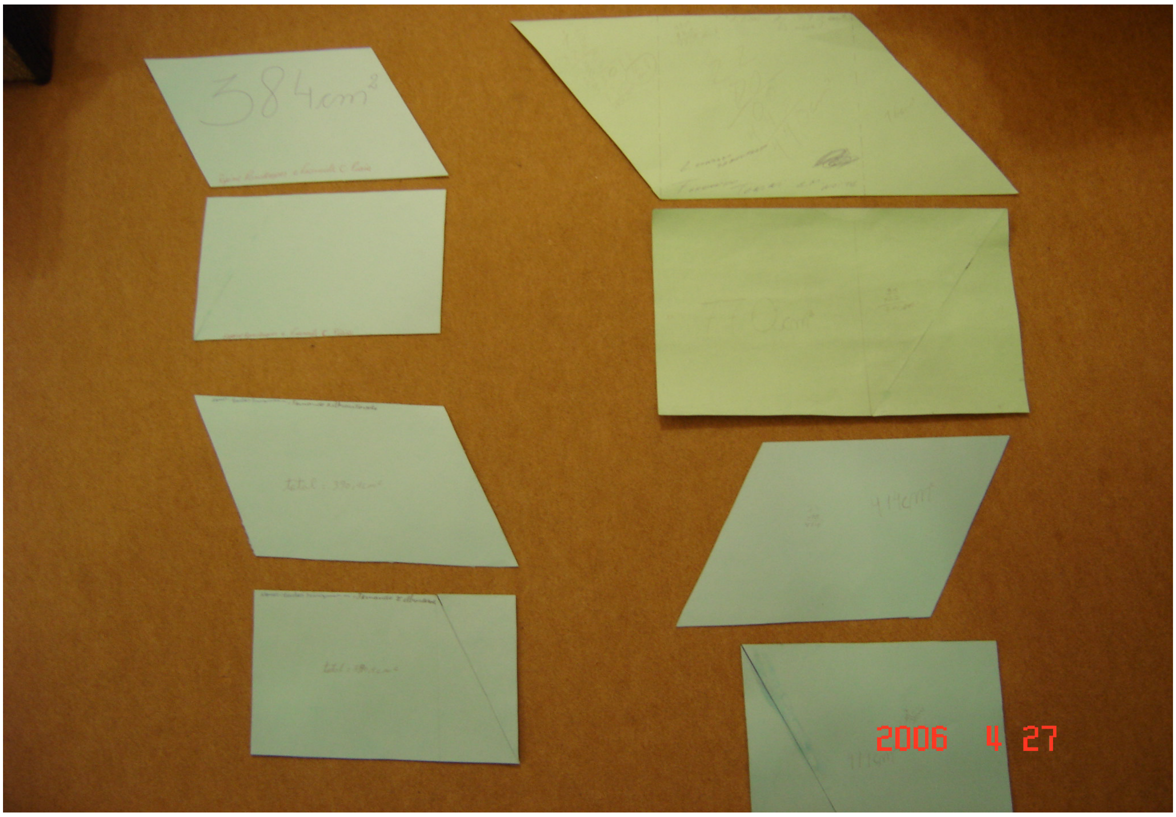


Figura 27: transformando o paralelogramo em retângulo.

Figura 28: uma dupla apresentando os resultados, no quadro.

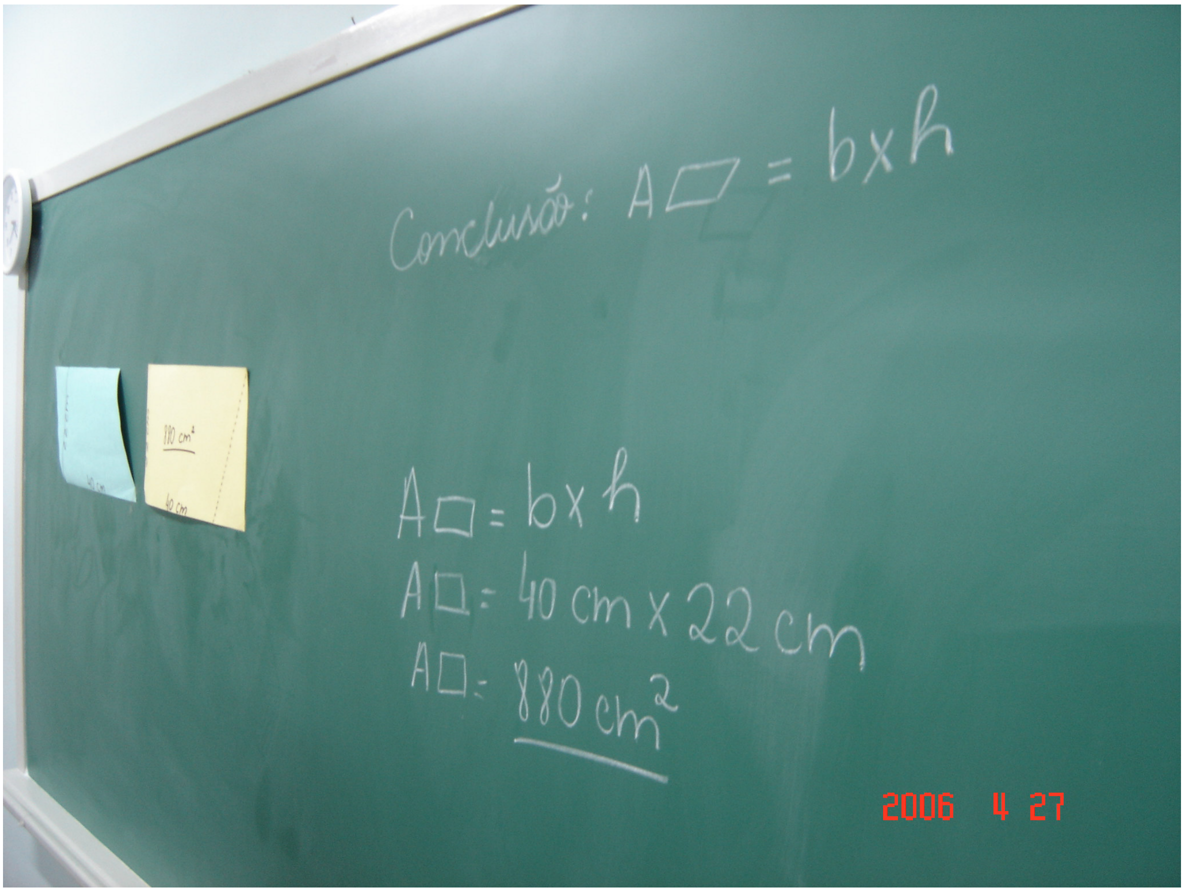


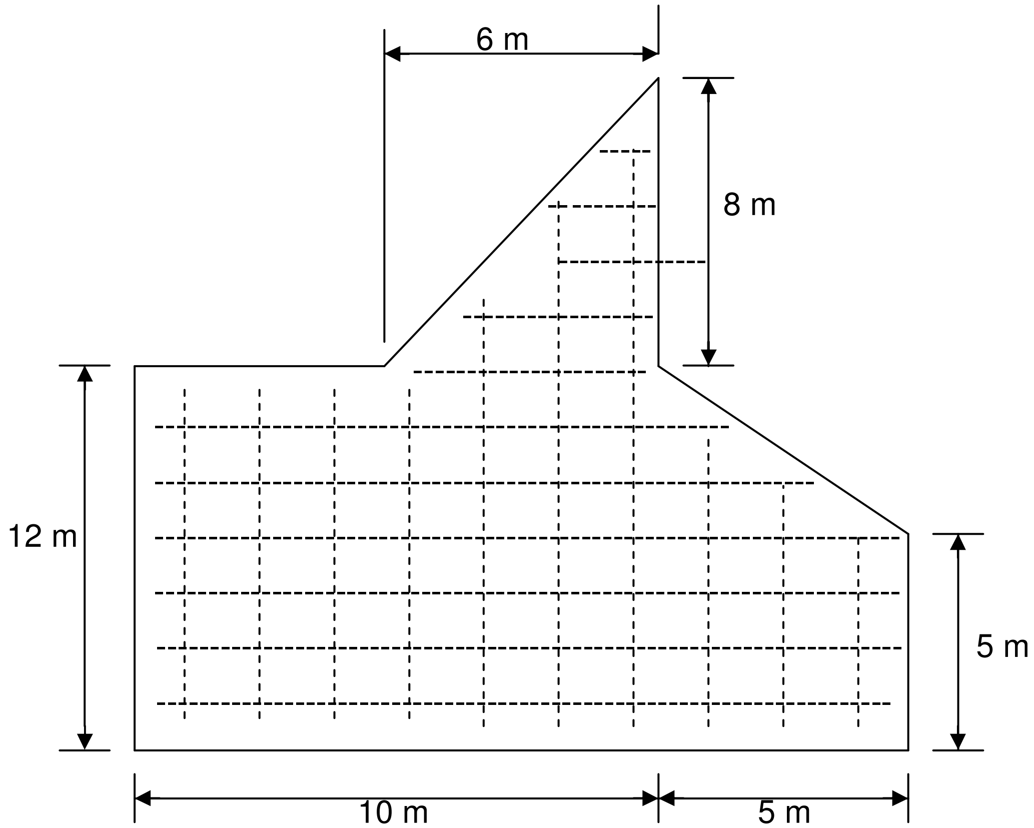
Figura 29: a dupla anterior apresentando a conclusão do estudo.

À medida que os encontros iam se sucedendo, era perceptível a evolução dos alunos no sentido de usar argumentação própria para justificar como tinham resolvido as atividades. A dificuldade inicial de irem ao quadro expor suas soluções foi substituída por uma disputa para essa realização.

Como tema de casa, solicitou-se que resolvessem a seguinte atividade (tema 4).

Tema 4

- Observe a figura abaixo e decomponha-a em figuras conhecidas, de modo que seja possível calcular a área de cada figura.
- A cada novo polígono, construa a figura, nomeando-a. Dê três propriedades e calcule a área.
- Calcule a área total.



Obs 1: se destacar triângulos, não há necessidade de citar as propriedades.

Obs 2: a cada nova figura, deverá aparecer o desenho, os cálculos, as propriedades e o nome.

O tema 4 foi realizado por todo o grupo, surpreendendo a forma de apresentação do mesmo. A tarefa foi realizada com empenho e capricho, o que resultou em um aproveitamento de 100% da mesma. A figura 30 mostra a apresentação de quatro dos trabalhos entregues.

Percebeu-se, nesse momento do trabalho, um envolvimento e empenho muito grande por parte do grupo de alunos. Mesmo organizados em duplas para o desenvolvimento das atividades em sala de aula, foi possível perceber uma interação muito grande entre todos os participantes. A todo o momento, estavam discutindo formas de realizar determinada tarefa, expondo seus pontos de vista e ajudando-se mutuamente. Assim, considera-se que, nesse momento, ocorreu um crescimento em termos de atitudes e procedimentos por parte de toda a turma.

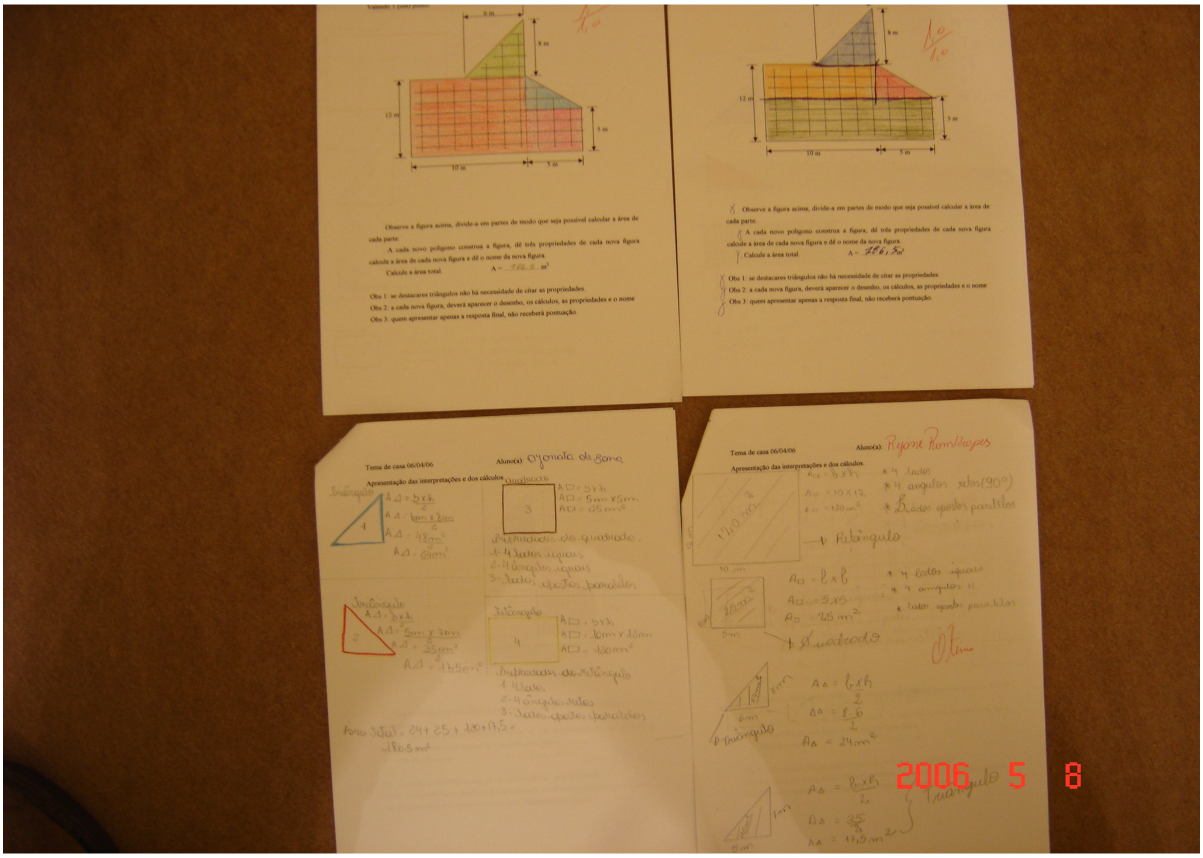


Figura 30: apresentação de resultados.

Na figura 30, pode-se observar que houve diferentes interpretações para seccionar um mesmo polígono, indicando que o grupo já estava desenvolvendo o trabalho de forma mais autônoma, distanciando-se da situação de sempre querer saber do professor o que fazer e como fazer.

Plano para o 10º encontro: as atividades programadas para esse encontro visavam à modelagem da fórmula da área do trapézio, a partir da transformação concreta de trapézios em retângulos ou paralelogramos (atividade 7), conforme pode ser observado na figura 31.

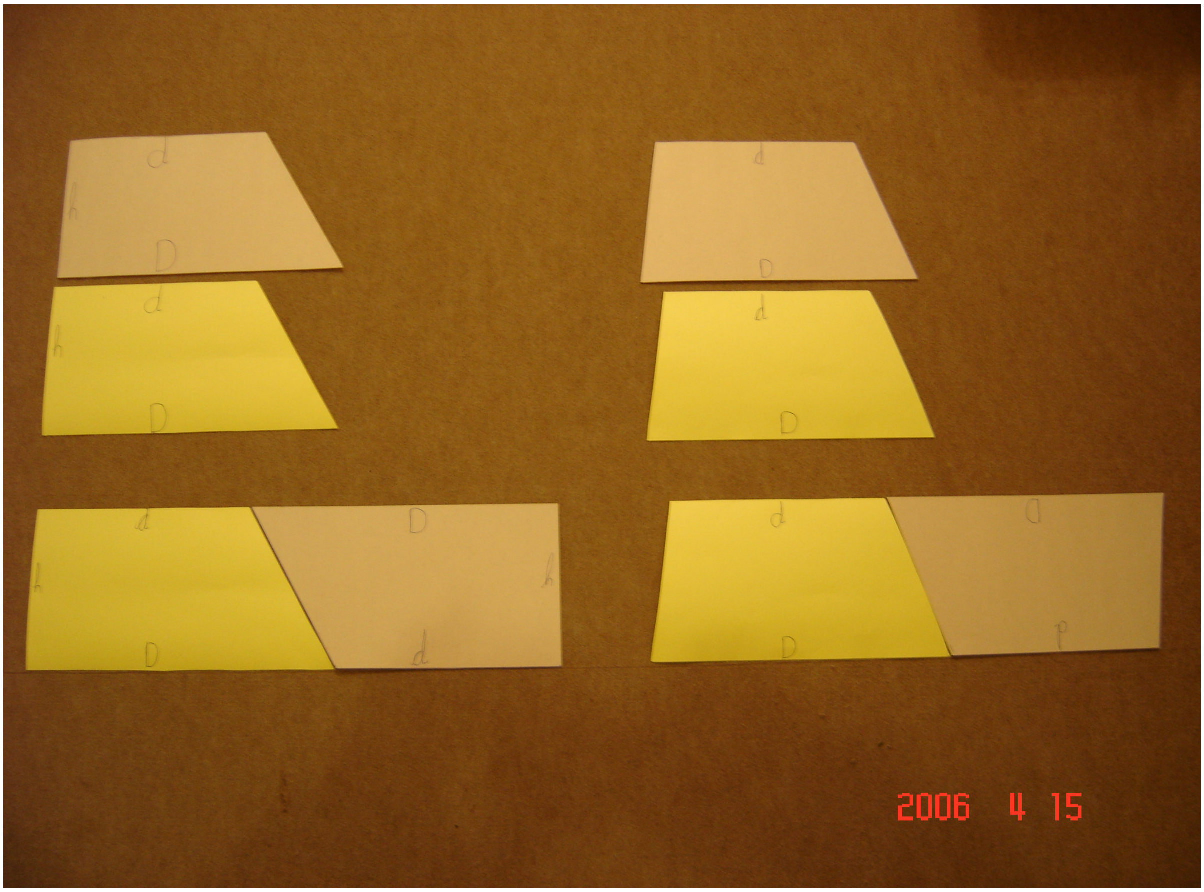


Figura 31: transformação do trapézio em retângulo ou paralelogramo.

Desenvolvimento da atividade 7: a atividade proposta teve por objetivo estabelecer a fórmula para o cálculo da área de trapézios a partir da manipulação de dois trapézios iguais, feitos em cartolina. A transformação deveria resultar em um retângulo ou em um paralelogramo. Em um primeiro momento, cada dupla de alunos recebeu, em cartolina, dois trapézios iguais, com tamanhos e inclinações diferentes. O objetivo era ajustar cada dupla de trapézios e chegar a um retângulo ou a um paralelogramo. Após as montagens efetuadas, solicitou-se que cada grupo buscasse uma solução para o seguinte problema: Qual a área, em cm^2, da figura construída? Após as soluções, que foram específicas para cada grupo, foram apresentadas ao grande grupo e discutidas. Por fim, foi solicitado ao grupo que apresentasse uma fórmula geral para o cálculo da área de qualquer trapézio, juntamente com uma justificativa.

Aplicação do plano: a atividade 7 visava à modelagem da fórmula para o cálculo da área do trapézio. Para o desenvolvimento da mesma, foram distribuídos pares de trapézios iguais para cada dupla de alunos. Os trapézios construídos em cartolina tinham tamanhos distintos, variando de 300 cm^2 a 500 cm^2 .

Alguns alunos já haviam pesquisado o assunto em casa e chegaram à fórmula mais rapidamente que os demais. Outro aspecto importante a ser ressaltado é que alguns grupos queriam, inicialmente, transformar/recortar o trapézio em retângulo e triângulo. Porém, após a discussão com o grande grupo, chegaram à conclusão de que, para efeito do cálculo da área, realmente poderia ser utilizada essa idéia, porém, quando se tentava chegar a uma fórmula geral para o cálculo de qualquer trapézio, não era possível enquadrar o método utilizado para um caso específico. Após várias discussões, chegou-se ao consenso de que a melhor forma de se chegar a uma fórmula geral para o cálculo da área de trapézios era através da transformação em retângulo ou paralelogramo. O resultado do trabalho desenvolvido, bem como a fórmula obtida para o cálculo da área, pode ser observado na figura 32.

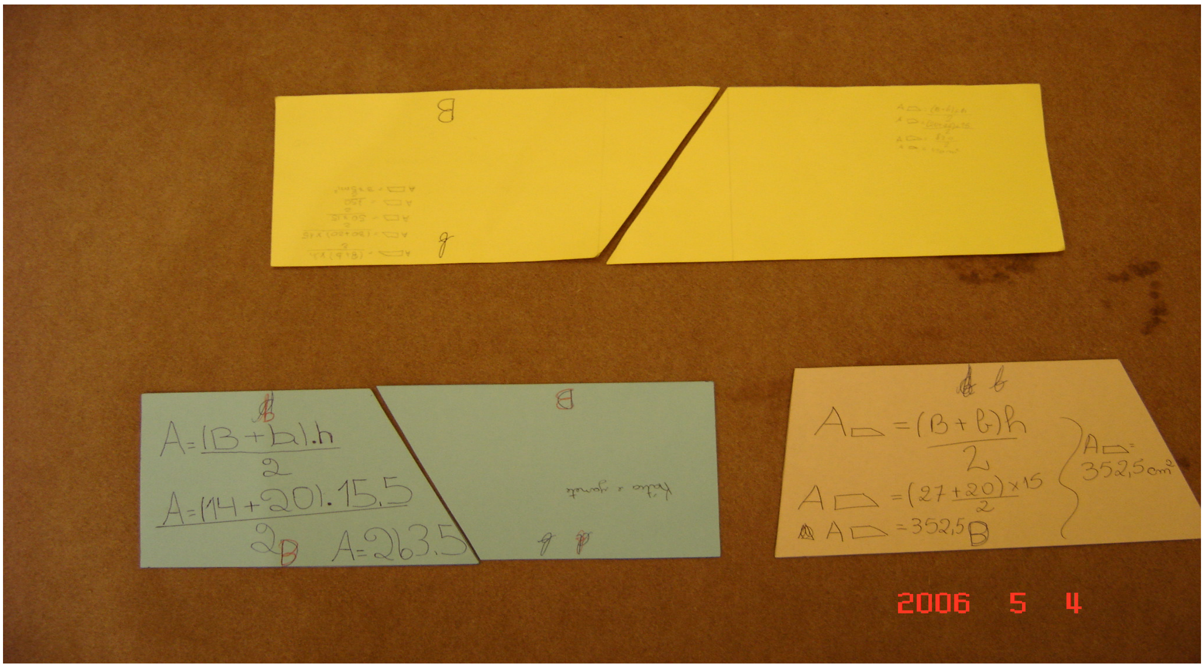


Figura 32: resultado do cálculo da área do trapézio.

Na seqüência, foi proposta uma atividade que envolvia o cálculo da área total de um polígono, que poderia ser desmembrado em diferentes figuras planas já conhecidas (triângulos e quadriláteros). O desenvolvimento dessa atividade visava ampliar não só cálculo específico da área de uma figura plana, mas também a percepção visual, no sentido de decompor um polígono mais complexo em outros elementares e as estratégias que os alunos adotaram para resolver esse tipo de problema. Assim, foram distribuídas duas cartolinas, contendo polígonos dos quais deveria ser calculada a área (tema 5), conforme pode ser visto nas figuras 33 e 34.

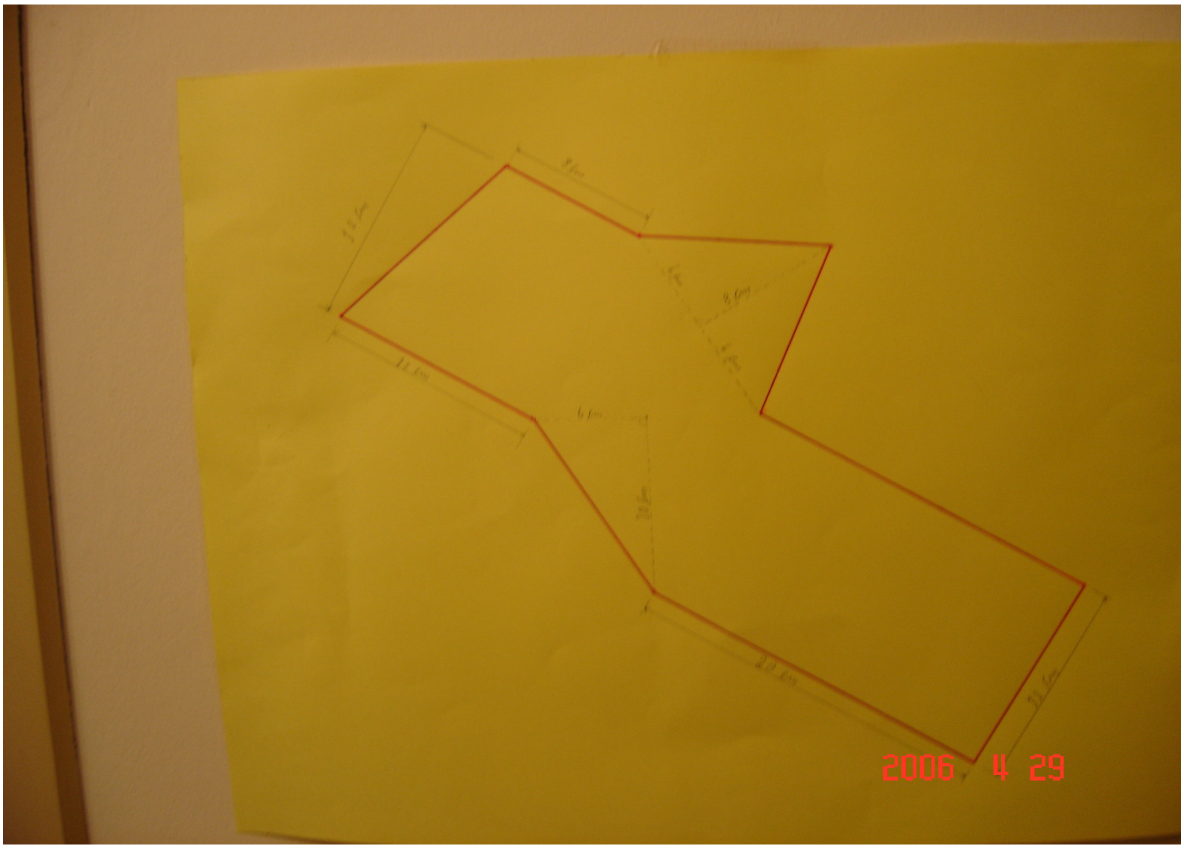


Figura 33: polígono 1 para cálculo de área.

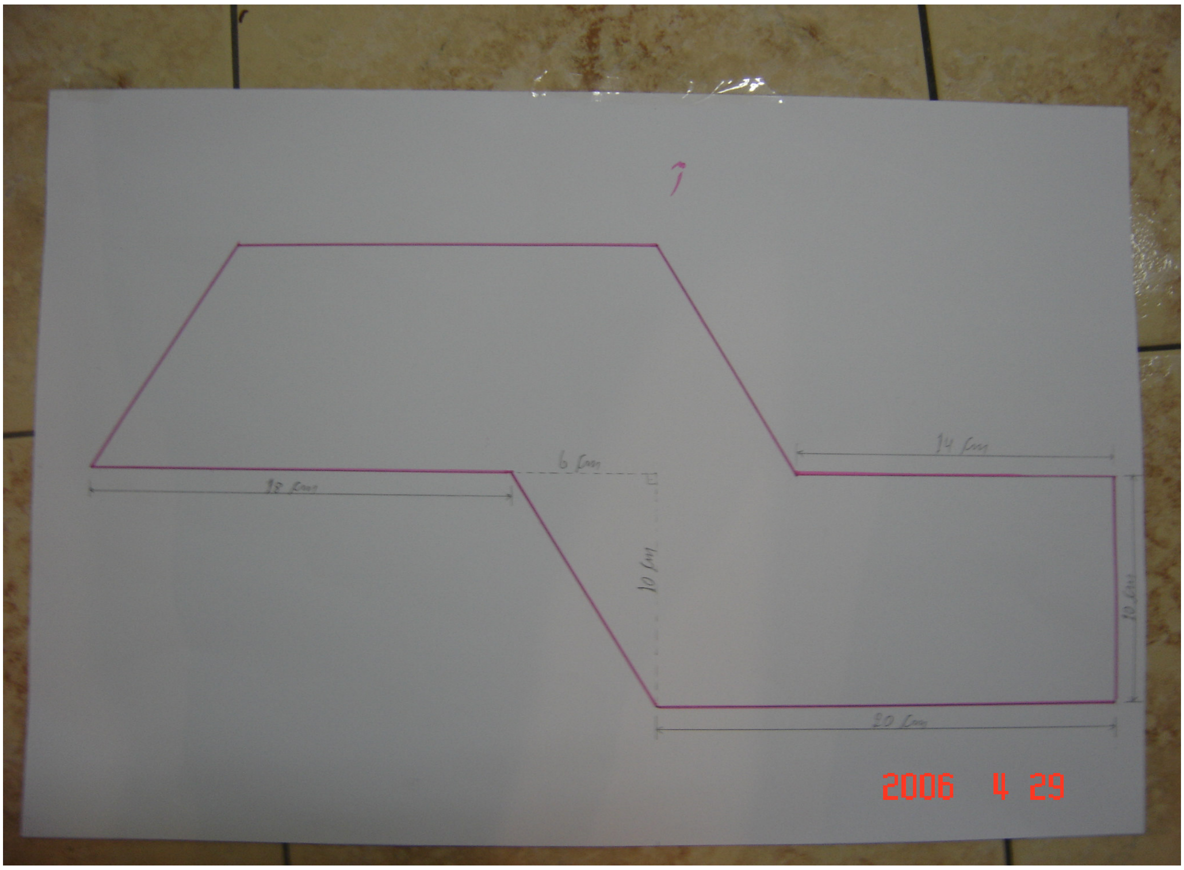


Figura 34: polígono 2 para o cálculo de área.

A atividade proposta foi iniciada em aula, mas concluída em casa. Na sala de aula, foi possível acompanhar e avaliar as propostas de decomposição dos polígonos dados. Foram momentos de reflexão, discussão e estabelecimento de estratégias.

Percebeu-se que os alunos já não tentavam, imediatamente, operar com os dados apresentados, mas sim identificavam e organizavam os dados, estabeleciam metas a serem alcançadas e combinavam estratégias de soluções. Percebeu-se uma evolução do grupo em relação ao tipo de trabalho desenvolvido, expresso através da autonomia na organização e desenvolvimento da atividade, bem como segurança na defesa de seus pontos de vista, através da utilização de argumentação baseada já no domínio do conhecimento teórico. A figura 35 mostra o planejamento de um dos grupos no desenvolvimento da atividade.

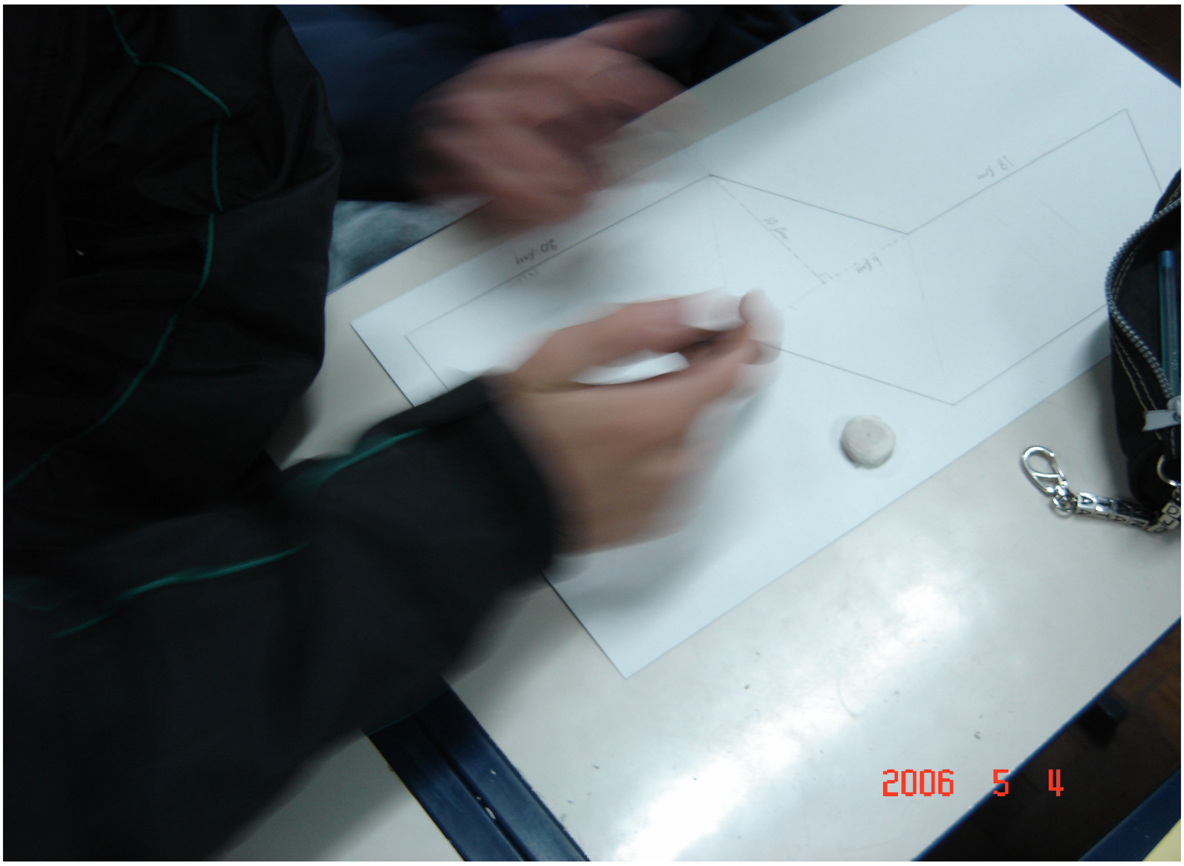


Figura 35: um grupo trabalhando no cálculo da área do polígono 2.

A análise final do desenvolvimento dessa atividade permitiu perceber o avanço dos alunos em relação a esse tipo de tarefa. As diferentes duplas apresentaram diferentes formas de subdividir o polígono, enquanto que a expectativa relacionava-se a uma subdivisão mais simples. As figuras 36 e 37 mostram as diferentes resoluções propostas pelos alunos para o cálculo da área do polígono 2.

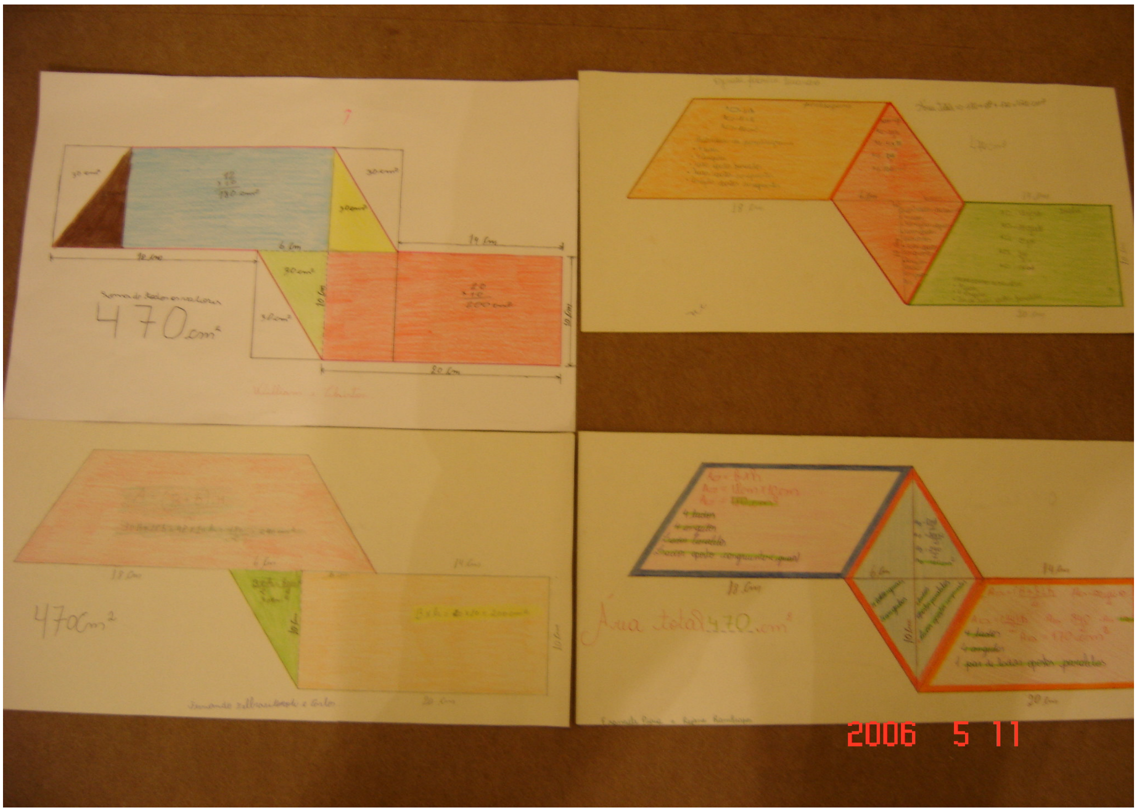


Figura 36: soluções apresentadas para o polígono 2.

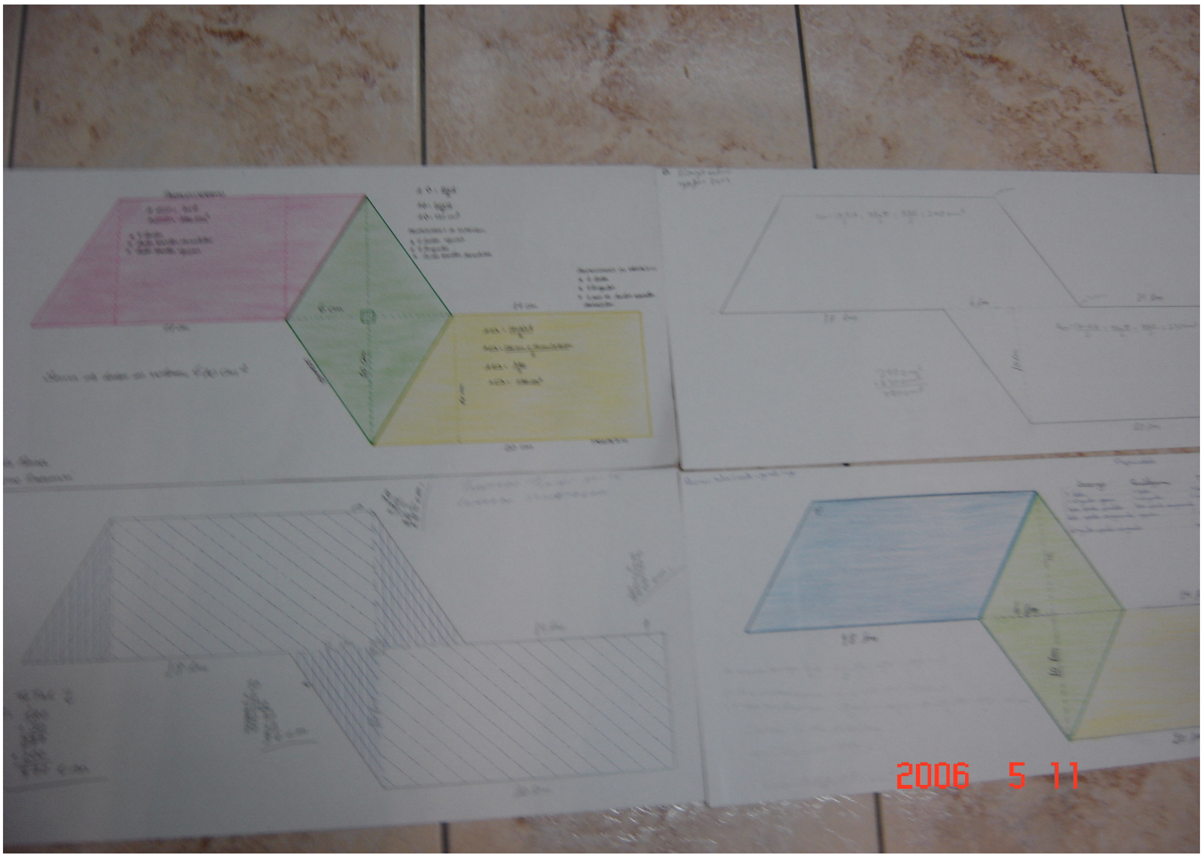


Figura 37: outras soluções para o polígono 2.

Além de superarem as expectativas em relação às diferentes formas de subdivisão dos polígonos, também demonstraram segurança em relação ao que foi realizado. Todos tinham a certeza de que, apesar de seu trabalho ter sido desenvolvido de forma diferente dos demais colegas, estava correto. Considera-se importantíssimo que o aluno se aproprie da idéia de que uma tarefa matemática não precisa, necessariamente, ser desenvolvida da mesma forma por todos, que cada indivíduo ou grupo pode propor soluções, desde que tenha argumentação para defendê-las. Cabe ressaltar que os resultados numéricos (do cálculo da área) foram cem por cento corretos no trabalho realizado com o polígono 2 e quase que cem por cento corretos no polígono 1. Apenas dois grupos erraram o cálculo da área de um dos triângulos surgidos na decomposição. A figura 38 mostra diferentes soluções para o cálculo da área do polígono 1.

Figura 38: soluções apresentadas para o polígono 1.

Nessa fase do trabalho, foi criada uma expectativa em relação ao cálculo da área do círculo. Quando colocada em discussão a questão, buscando identificar o conhecimento que os alunos tinham a respeito, não ocorreu nenhuma manifestação que denotasse conhecimentos em relação a ela. Simplesmente. não surgiram idéias de como seria possível calcular a área de um círculo.

Plano para o 11º encontro: atendendo às expectativas do grupo, o qual, desde encontros anteriores, vinha mostrando interesse e curiosidade com relação ao círculo, no décimo primeiro encontro foram propostas duas atividades - uma para estabelecer experimentalmente o valor de π e outra, também experimental, para estabelecer a fórmula para o cálculo da área do círculo.

Aplicação do plano:

Atividade 8 - Estabelecendo o valor de π

Para o desenvolvimento da atividade experimental, visando obter o valor de π, foi utilizado um conjunto de três discos de madeira com diâmetros de 158 mm (disco 1), 100 mm (disco 2) e 60 mm (disco 3). Os alunos se organizaram em grupos e cada grupo realizou medições preenchendo a tabela a seguir :

Disco	C = comprimento	D = diâmetro	C/D = pi
1			
2			
3			

A tarefa foi desenvolvida rapidamente, com bastante precisão, em parte, pelo fato dos alunos já estarem familiarizados com o tipo de trabalho e também pelo fato de, depois de iniciado o processo, alguns recordarem já terem realizado um trabalho semelhante em alguma série anterior.

Os resultados para o valor de π variaram entre 3,1 e 3,4, aproximadamente. Retomou-se a discussão sobre aproximações, arredondamentos e precisão de medidas experimentais. Para complementar a atividade, foi solicitado aos alunos, como tema, que pesquisassem sobre o π.

Manipulando os elementos da relação $C/D = \pi$, chegou-se à relação $C=2\pi r$, explorando-se a idéia de que, se o π surge da divisão do comprimento de uma circunferência pelo seu diâmetro, então, se for necessário utilizar ou calcular o comprimento de uma circunferência, pode-se usar a mesma relação.

Atividade 9 – Área do círculo

Referente à atividade para o estabelecimento da fórmula do cálculo da área do círculo, distribuíram-se, em cartolina, discos de diâmetro 20 cm. Foi solicitado que os recortassem em 16 “fatias” iguais, conforme aparece na figura 39.

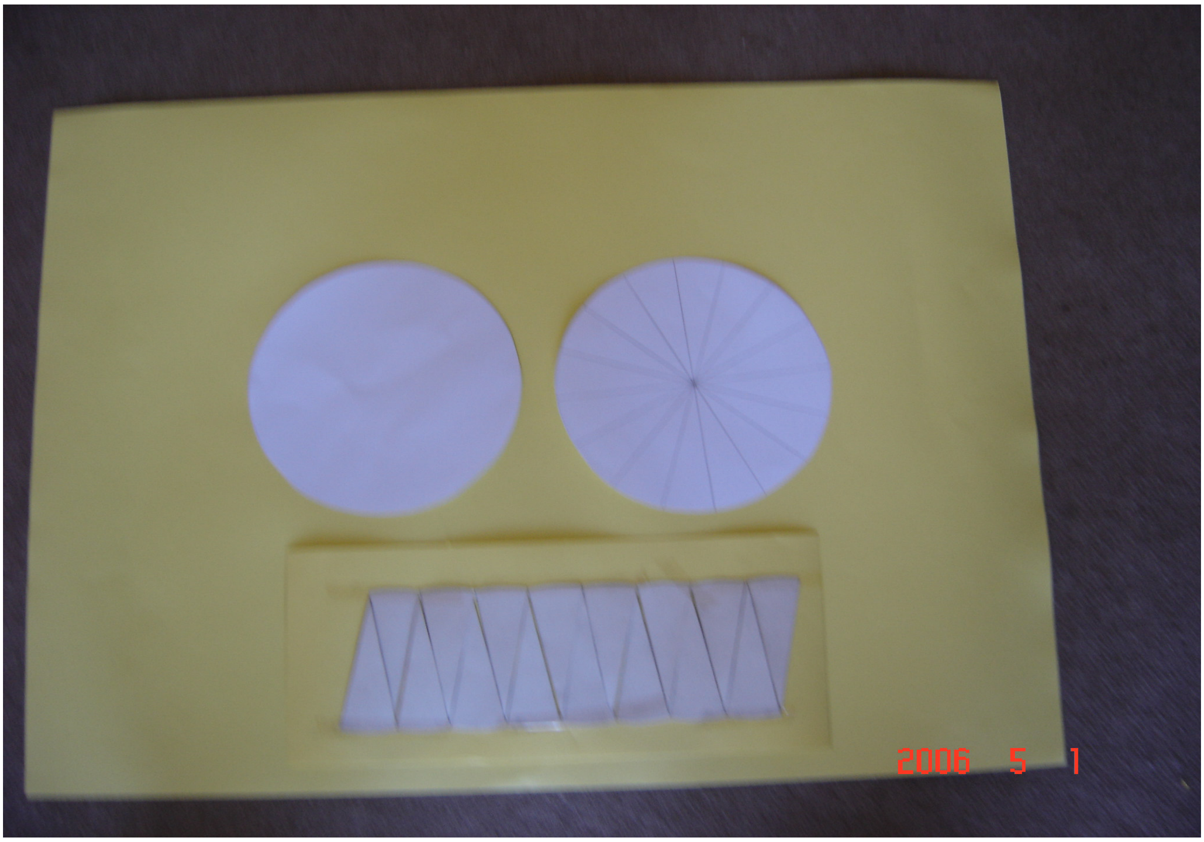


Figura 39: explicação da fórmula para o cálculo da área do círculo.

Após a obtenção das “fatias”, foi solicitado que procurassem encaixá-las, formando um polígono já conhecido.

Alguns alunos apresentaram dificuldades em dividir o disco em 16 partes iguais, mas por outro lado um dos alunos logo percebeu que seria construído algo muito próximo a um retângulo.

Nesse momento, foi solicitado que realizassem um inventário de tudo o que conheciam sobre circulo e circunferência, desde o desenho, os elementos (raio e diâmetro) e as relações obtidas com a atividade para o cálculo do π. A partir de todos esses elementos, deveriam estabelecer uma relação ou fórmula para o cálculo da área do círculo.

O inventário realizado e a montagem do círculo aproximando-se a um retângulo, conforme mostra a figura 39, possibilitou que, muito rapidamente, alguns grupos realizassem a tarefa e não faltaram candidatos para explicá-la no quadro, conforme mostram as figura 40 e 41.

Figura 40: aluna explicando a fórmula para o cálculo da área do círculo.

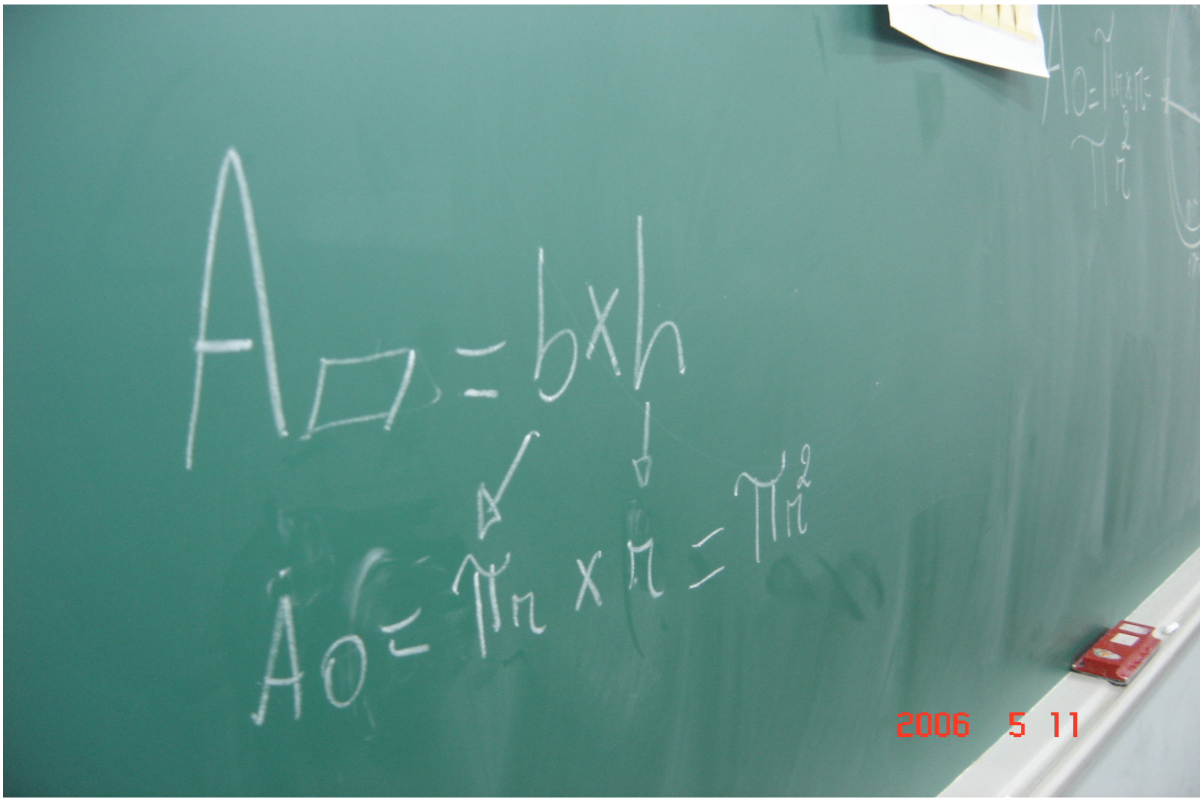


Figura 41: a conclusão dos trabalhos referentes ao círculo.

A figura 41 mostra uma aluna concluindo a fórmula para o cálculo da área de círculos e explicando a relação entre a fórmula do paralelogramo e a fórmula para o cálculo dessa área.

Na seqüência, foram desenvolvidos exercícios no quadro, solicitando-se que calculassem as áreas de círculos. Essa atividade foi bastante oportuna para o uso da calculadora, já que eles não sabiam usar a segunda função. Junto com o uso da calculadora, foi possível tirar-se dúvidas quanto a dificuldades no uso das casas decimais. Assim, com o π valendo 3,14, em um círculo de diâmetro 16 cm, a área é de 200,96 cm^2 e usando o valor de π, na calculadora, obteve-se a área de 201,06 cm^2.

Percebeu-se, na oportunidade, que os alunos demonstraram interesse acima da média. A professora titular da turma também ressaltou a importância da técnica de relacionar a fórmula do cálculo da área do paralelogramo com a área do círculo.

Nesse momento do trabalho, considerou-se importante avançar no sentido de abordar novas idéias, uma vez que as questões relativas à noção e cálculo de área, a operações com números decimais e às unidades de medida estavam suficientemente consolidadas.

Plano para o 12º encontro: desenvolvida e consolidada a noção e cálculo de área de figuras planas, passou-se a trabalhar a idéia de volume. Assim, o décimo segundo encontro objetivava desenvolver o estudo do volume e que o grupo trabalhasse a noção de espaço tridimensional. Como unidade básica de medida de volume, foi utilizado o metro cúbico. Esse trabalho estava previsto desde o início das atividades e já havia sido solicitado, desde o início dos encontros, que os alunos fossem construindo, em cartolina, cubos de 1 dm^3 , já que uma das tarefas consistia na montagem do metro cúbico (atividade 10). Os cubos de 1 dm^3 foram utilizados, também, para simular outros volumes, aproveitando-se, dessa forma, os 1000 cubos construídos.

Aplicação do plano: nesse encontro, iniciou-se o estudo sobre volume. Em um primeiro momento, através de uma discussão no grande grupo, foi questionada a relação entre decímetro cúbico, metro cúbico e litro (medida de capacidade). A discussão evoluiu para "Afinal, como se calcula o volume?"

Atividade 10 – Montando o metro cúbico

Inicialmente, foi solicitado que representassem, através de um desenho, o cubo construído. Os alunos tiveram muita dificuldade em cumprir a tarefa no que se refere à representação em perspectiva. Em função disso, trabalhou-se a construção do sólido com a ajuda dos esquadros e construiu-se um no quadro, o que contribuiu para que cada um realizasse seu desenho. Após, continuou a discussão sobre uma possível fórmula para cálculo do volume. Na seqüência, apresentou-se o princípio de Cavalieri. Após alguns exercícios envolvendo cálculo de volumes, passou-se para a parte prática de construção do metro cúbico.

Entende-se que a construção do metro cúbico permitiu que a noção de volume fosse consolidada, já que a discussão inicial mostrou que, apesar de alguns alunos utilizarem a fórmula para o cálculo volume, não o faziam de maneira segura.

A figura 42 mostra os alunos se organizando para dar início à montagem do metro cúbico. É importante ressaltar que, rapidamente, os alunos se organizaram e deram início à montagem do metro cúbico. Após aproximadamente dez minutos de discussão sobre a melhor maneira, ficou estabelecido que agrupar os cubos com fita de 3 em 3, ou de 4 em 4 ou de 5 em 5 seria a melhor maneira. Em seguida, organizaram-se e, enquanto um grupo montava os blocos, outro grupo ia fazendo a montagem do metro cúbico. Na figura 43, aparece o metro cúbico em torno de 40% montado.

Figura 42: alunos iniciando a construção do metro cúbico.

Figura 43: continuando a construção do metro cúbico.

A figura 44 mostra o metro cúbico montado, ou seja, o volume de 1000 l em verdadeira grandeza. Nesse momento da montagem, o grupo havia chegado ao consenso de que os decímetros cúbicos deveriam ser agrupados de 10 em 10, para facilitar a manipulação e montagem. Durante o processo de montagem, as discussões foram intensas tanto no que se refere aos procedimentos para montagem como em relação à Matemática envolvida. No momento em que agrupavam os decímetros cúbicos em grupos de 4 ou 5, questionavam quantos litros estavam sendo agrupados. Quando decidiram agrupar de 10 em 10, ficou claro para todos que cada grupo correspondia a dez decímetros cúbicos e 10 litros.

Figura 44: conclusão da construção do metro cúbico.

Após a construção, foi solicitado que calculassem o número total de caixinhas envolvidas na montagem e a resposta surgiu imediatamente. Alguns alunos justificavam o número 1000 de caixinhas afirmando que, se havia 10 em cada lado, seriam 100 caixas na base e, como havia 10 camadas de altura, o total era 1000. Também argumentaram que, no total, era possível armazenar 1000 litros naquelas caixinhas. Para finalizar, ainda realizaram, com a trena, a medição das arestas do cubo montado, confirmando com bastante precisão a existência do metro cúbico.

Entende-se que o processo permitiu a apropriação da noção de volume, que no início de processo era bastante vaga, o que possibilitou uma aprendizagem significativa da questão.

O grupo também decidiu que o material construído deveria ser guardado para ser utilizado novamente pela própria turma ou por alunos de outras turmas, o que evidenciou uma valorização do trabalho realizado e sua importância para a aprendizagem.

O metro cúbico montado ficou na sala durante aproximadamente duas semanas e suscitou questionamentos por parte de outros professores que queriam saber do que se tratava. A todos que questionaram foram dadas explicações bastante convincentes, pois esses professores comentaram sobre o interesse e conhecimento que a turma demonstrava.

Para finalizar o trabalho, foi proposta a seguinte atividade:

- estimar a área da sala de aula;
- estimar o volume da sala de aula;
- calcular a área e o volume da sala, confrontando com a estimativa realizada.

As discussões e respostas apresentadas mostraram que alguns alunos ainda não possuíam uma visualização muito precisa, embora não estivesse muito distante da realidade. Todavia, quando se comparou a área de uma face do m^3 com a área do quadro-negro, alcançou-se um ganho significativo na visualização, pois todos concluíram, com convicção, que o quadro possuía mais de $3m^2$ e menos de 4 m^2. Com relação à do volume, após algumas discussões, houve consenso de que estaria próximo de $150m^3$. O argumento dos alunos foi o seguinte: uma vez que a sala tem 7m x 7m, a área é $49m^2$ e, como a altura é 3m, basta colocar três camadas ou três metros de altura para ter-se um total de $147m^3$, que é o volume aproximado da sala.

Entende-se que o trabalho atingiu plenamente seus objetivos no que diz respeito ao conhecimento concreto, ao desenvolvimento de habilidades referentes à estimativa e cálculo mental, bem como o desenvolvimento de procedimentos para a resolução de uma tarefa. Observou-se, também, que os alunos tinham prazer em participar das aulas, uma vez que eram sujeitos ativos e não meros assistentes ou simplesmente ouvintes.

Plano para o 13º encontro: o décimo terceiro encontro foi o último programado no projeto, estando prevista para o mesmo uma atividade de avaliação e a aplicação de um questionário.

Aplicação do Plano: nesse encontro, aplicaram-se dois instrumentos, um questionário denominado Questionário B (Apêndice E), que busca captar os sentimentos e a opinião do grupo sobre o trabalho, bem como a percepção dos mesmos referente à aprendizagem dos conteúdos que foram desenvolvidos e um instrumento de avaliação final (Apêndice F), que consta de 14 questões.

O teste de avaliação final teve por objetivo captar elementos sobre o domínio e evolução do grupo em relação aos objetivos propostos na engenharia didática. No teste, não foi avaliado o nível de visualização referente ao domínio de identificação de figuras planas, uma vez que o desempenho no teste inicial mostrou domínio pleno desse nível.

Assim, as primeiras quatro questões do teste final referiam-se à construção de polígonos (trapézio, triângulo, paralelogramo e losango) dados suas dimensões e o cálculo das respectivas áreas. As questões 5, 6, 7 buscavam o estabelecimento de propriedades de quadriláteros (quadrado, paralelogramo e losango) correspondentes ao nível de análise de van Hiele. As cinco questões (8 a 12) restantes procuravam estabelecer relações entre os quadriláteros, a partir das suas propriedades e correspondiam ao nível de dedução informal. A questão 13 fazia referência ao cálculo de área de um polígono que deveria ser decomposto em regiões elementares. A questão 14 dizia respeito ao cálculo de volume. Realizaram o teste avaliativo final 16 alunos, durante um período de aproximadamente uma hora. O desempenho do grupo no teste final será apresentado e analisado na análise *a posteriori.*

Nesse encontro final, também foi solicitado aos alunos que respondessem a um questionário (Questionário B) com quatro questões relativas aos seus sentimentos em relação ao trabalho realizado e em relação ao seu aprendizado (o que mais gostaram e o que menos gostaram no trabalho desenvolvido, se consideravam que aprenderam e o que julgavam mais importante no aprendizado realizado). O questionário B será analisado na análise *a posteriori.*

4.3 Análise a posteriori

Finalizada a experimentação, realizou-se a análise *a posteriori*, que se apóia no conjunto de dados e informações obtidos ao longo da experimentação. Foram consideradas as observações realizadas ao longo da aplicação da seqüência didática, as produções dos estudantes em sala de aula e fora dela, o desempenho nas atividades realizadas, complementadas com informações advindas de entrevistas e questionários. De acordo com Artigue (1995), a validação das hipóteses formuladas na investigação surge no momento da confrontação dos dados e aspectos apontados nas análises *a priori* e *a posteriori.* Essa validação, essencialmente interna, é uma característica fundamental do processo de engenharia didática enquanto metodologia de pesquisa.

Na presente investigação, o contato bastante prolongado e intenso do pesquisador com a turma onde se desenvolveu a engenharia possibilitou a realização de observações, registros, análises e avaliações que, em conjunto com outros instrumentos utilizados (entrevista e questionários) e com o quadro teórico constituído, constituem um forte substrato para as análises e considerações finais.

Assim, são retomados aspectos observados, analisados e apresentados ao longo da experimentação, juntamente com elementos da análise *a priori* e do quadro teórico estabelecido, buscando validar as hipóteses estabelecidas, a saber:

- o ensino da Geometria não tem atendido aos pressupostos e objetivos estabelecidos para o mesmo e tem levado os alunos a não desenvolverem satisfatoriamente noções elementares nessa área de conhecimento;
- alunos que finalizam o Ensino Fundamental encontram-se no nível básico do modelo de van Hiele;
- esses alunos ainda não se apropriaram adequadamente das noções de área e volume.

4.3.1 Sobre os testes avaliativos inicial e final

O desempenho do grupo investigado nos dois testes aplicados (teste avaliativo inicial e final) forneceu valiosos subsídios, os quais permitiram compor a análise *a posteriori* e, por isso, são novamente apresentados. Assim, a figura 04 apresenta o desempenho dos alunos no teste inicial (Apêndice B).

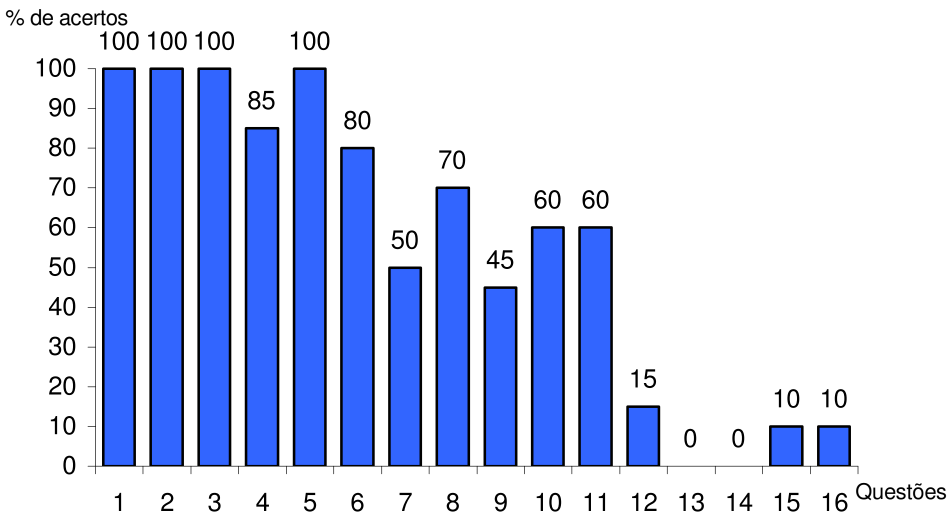


Figura 04: Gráfico do desempenho no teste inicial.

A análise do desempenho no teste inicial mostrou que o grupo transitava no nível 1 (de análise) do modelo de van Hiele, embora não satisfatoriamente, e não atingiu o nível 2 de dedução informal. Essa constatação permitiu perceber a necessidade de um trabalho sistemático no nível 1, para estabelecer condições de progressão para o próximo nível

Em relação à área, que é um dos focos dessa investigação, estava previsto, além da questão específica no teste, um trabalho prático em sala de aula com o objetivo de captar elementos sobre o conhecimento dos alunos relativo ao significado de área de regiões planas e seu cálculo. O resultado da análise da questão do teste não foi muito conclusivo, pois apenas 40% dos alunos (8 alunos) apresentaram algum tipo de solução. O tipo de questão, que envolvia um polígono irregular, não permitiu identificar se as dificuldades eram relativas ao cálculo, propriamente dito ou a decomposição da figura em outras mais elementares. O trabalho em sala de aula permitiu perceber que o grupo não tinha domínio dos aspectos envolvidos no trabalho proposto. Inicialmente, apresentaram dificuldades para fazer as medições solicitadas (do quadro-negro e do tampo da mesa), as quais se mantiveram quanto à forma de executar os cálculos. Uma vez de posse das medidas, não tinham convicção das operações a serem efetuadas. Também foram percebidas dificuldades em relação ao domínio das unidades de medida de comprimento e operações com números decimais. Essa avaliação inicial deu suporte e norteou as ações desenvolvidas ao longo da experimentação.

Como última atividade da fase de experimentação, foi realizado o teste avaliativo final (Apêndice F), com o objetivo de captar elementos sobre o domínio e a evolução do grupo em relação aos objetivos propostos na engenharia didática. O desempenho do grupo na atividade de avaliação final é apresentado no gráfico da figura 45, seguido de análise.

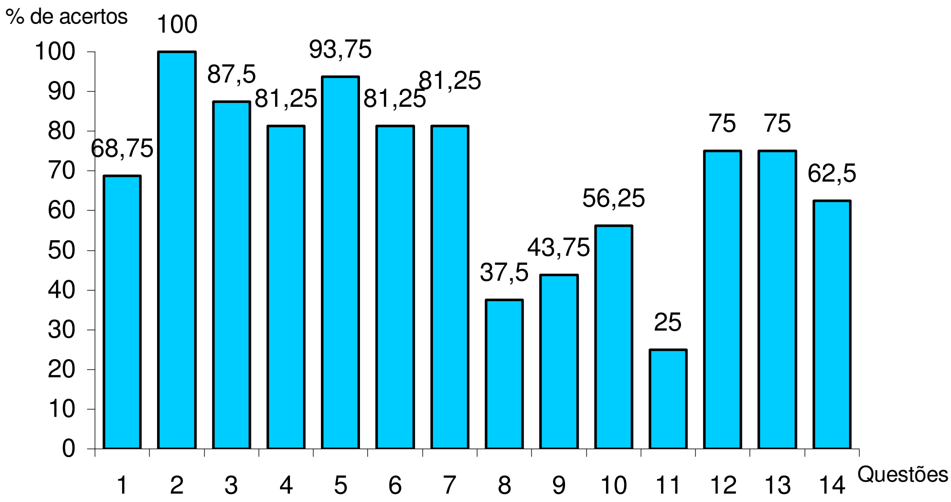


Figura 45: gráfico do desempenho na avaliação final.

Observando os percentuais apresentados no gráfico da figura 45, é possível perceber que o desempenho com relação à construção de figuras e o cálculo das respectivas áreas (questões de 1 a 4) foi bastante satisfatório. A questão de mais baixo desempenho foi a relacionada com o trapézio (68,75% de acertos), sendo que nas demais (relacionadas com triângulo, paralelogramo e losango) o percentual de acertos foi sempre superior a 80%, chegando a 100% na questão que envolvia o cálculo da área de um triângulo. Os alunos resolveram as questões apresentando uma figura, indicando suas dimensões e utilizando a relação adequada de forma bastante segura.

A questão 13 também se referia ao cálculo da área de um polígono irregular e que necessitava ser decomposto em regiões elementares. O percentual de acertos nessa questão foi de 75%, o que foi considerado bastante satisfatório. Dos quatro alunos que erraram a questão 13, um deixou-a em branco; um dividiu corretamente a região em um triângulo e um trapézio, calculando de forma correta a área do triângulo, mas de forma incorreta a área do trapézio; um terceiro aluno dividiu corretamente a região em dois triângulos e um retângulo, acertando a área do retângulo, mas errando a área dos triângulos (considerou-os como retângulos); o quarto aluno efetuou uma divisão pouco adequada, que gerou lados dos quais não era possível estabelecer as medidas, o que levou-o a errar os cálculos.

A apropriação, pelo grupo, da noção de área e o desenvolvimento de habilidades para o seu cálculo se constitui em um dos objetivos da engenharia didática proposta. Considera-se que o desempenho no conjunto das questões envolvendo o cálculo de área de figuras planas evidenciou um amplo domínio dos alunos sobre o tema, o que leva a crer que tal objetivo foi atingido.

Com relação às questões que envolvem a indicação das propriedades dos quadriláteros (questões 5, 6 e 7) e que correspondem ao nível de análise do modelo de van Hiele, acredita-se que o desempenho também foi bastante satisfatório, atingindo um percentual sempre superior a 80% de acertos. Considera-se que esse desempenho bastante satisfatório deve-se, principalmente, ao fato do grupo já ter avançado para o nível de dedução informal, o que permitiu uma apropriação das propriedades das figuras, inclusive, entendendo definições (que não é próprio do nível de análise).

Quanto às questões 8 a 12, as quais se relacionam, principalmente, com o estabelecimento de inter-relações de propriedades entre figuras (nível de dedução informal do modelo de van Hiele), o desempenho foi baixo. O maior índice de acertos (56,25%) ocorreu na questão relativa ao relacionamento entre propriedades de quadrados e retângulos o que, de certa forma, era esperado, uma vez que quadrados e retângulos são as figuras que foram mais evidenciadas ao longo do estudo, pois em várias situações eram retomadas. O menor índice de acertos (25%) ocorreu na questão que relaciona propriedades de quadrados e losangos. O losango é uma figura, freqüentemente, confundida com o quadrado. Basta desenhar um quadrado na posição que, usualmente, é de um losango para se estabelecer a confusão. Acredita-se que essa idéia vinculada à posição espacial dessas figuras tenha influenciado na apropriação e relação entre as propriedades. Porém, comparado ao desempenho inicial, onde questões dessa natureza tiveram um percentual de acertos oscilando entre 0% e 15% e considerando que o trabalho realizado junto ao grupo não teve foco nesse aspecto, entende-se que houve um avanço significativo dos alunos.

A questão relativa ao cálculo de volume teve um percentual de acertos de 62,5%, o que se considera bastante satisfatório, pois a questão apresentada no teste era inédita. Nas atividades realizadas em aula, calculou-se volume de sólidos em forma de paralelepípedo retângulo, mas em nenhum momento se trabalhou com um sólido de onde deveria ser retirada uma parte, como na questão do teste.

Uma síntese do desempenho e da evolução da turma em relação aos níveis do desenvolvimento do pensamento geométrico de van Hiele é apresentada no quadro da figura 46 e permite estabelecer relações que levam a uma comprovação das hipóteses.

Nível de van Hiele	Domínio	Teste inicial /questão	Teste final /questão	Análise
0 - Visualização	Identificação de figuras planas	1 – 100% 2 – 100% 3 – 100% 4 – 85% 5 – 100%	________	Teste inicial mostra domínio total do nível. Julgou-se desnecessário avaliar no teste final.
1 – Análise	Identificação de propriedades	6 – 80% 7 – 50% 8 – 70% 9 – 45% 10 – 60% 11 – 60%	5 – 93,75% 6 – 81,25% 7 – 81,25%	Ó teste inicial indica um desempenho médio. Entende-se que há espaço para avançar no nível. O teste final aponta para um grande avanço no nível.
2 – Dedução informal	Relacionar propriedades entre figuras	12 – 15% 13 – 0% 14 – 0% 15 - 10%	8 – 37,5% 9 – 43.75% 10– 56,25% 11 – 25% 12 – 75%	Teste inicial totalmente insatisfatório. Teste final aponta para um avanço significativo no nível, mas há espaço para melhora.
2 – Dedução informal	Cálculo de área	16 - 10%	1 – 68,75% 2 – 100% 3 – 87,5% 4 – 81,25% 13 – 75%	Teste inicial totalmente insatisfatório. Teste final mostra um grande avanço.
2 – Dedução informal	Cálculo de volume	__________	14 – 62,5%	Não foi avaliado no teste inicial. Teste final aponta um domínio significativo da questão.

Figura 46: quadro-síntese do desempenho nos teste inicial e final.

O confronto entre os testes inicial e final mostrado de forma sintética na figura 46 indica que, efetivamente, o grupo dominava o nível básico de van Hiele e transitava minimamente no nível 1 de análise. A constatação inicial de que havia espaço para avançar no nível 1 se consolidou ao longo do trabalho e mostrou seus resultados no teste final que apontou para um avanço no nível.

Em relação ao nível de dedução informal (nível 2), o teste inicial mostrou-se totalmente insatisfatório, apontando para uma falta de domínio total do que está previsto para o nível. Já o teste final mostrou um significativo avanço, mostrando que o desempenho foi bastante satisfatório em relação às questões que eram foco da engenharia (cálculo de áreas e volume), sendo que os aspectos que não foram trabalhados com profundidade (não se constituíam no foco principal da engenharia) já não tiveram resultados tão bons, embora, em relação ao teste inicial, tenham evoluído muito.

Esses aspectos constatados com a confrontação dos testes inicial e final reforçam a idéia de que a engenharia proposta foi bem sucedida e indicam a validade, para o grupo investigado, das hipóteses que previam que o ensino da Geometria não tem atendido aos pressupostos e objetivos estabelecidos para o mesmo e tem levado os alunos a não desenvolverem satisfatoriamente noções elementares nessa área de conhecimento. Por esse motivo, alunos que finalizam o Ensino Fundamental encontram-se no nível básico do modelo de van Hiele, ou seja, ainda não se apropriaram adequadamente das noções de área e volume.

4.3.2 Análise do questionário B

No último encontro, foi solicitado aos alunos que respondessem ao Questionário B, constando de quatro questões relativas aos seus sentimentos em relação ao trabalho realizado e ao seu aprendizado (o que mais gostou e o que menos gostou no trabalho desenvolvido, se considera que aprendeu e o que julga mais importante no aprendizado realizado).

Responderam ao questionário dezesseis alunos e, a partir das respostas, foi possível estabelecer que:

- o grupo foi unânime em declarar ter gostado do trabalho desenvolvido, sendo que algumas atividades foram apontadas especificamente como as de maior interesse, como cálculo de áreas, propriedades dos quadriláteros, montagem do metro cúbico e dedicação do professor;

- apenas três alunos declararam não ter gostado de alguma coisa, citando especificamente cálculo de área do trapézio, propriedades e cálculo da área do círculo. Um aluno declarou que não estava gostando que as aulas fossem acabar;
- quatorze alunos declararam ter aprendido os conteúdos desenvolvidos e apenas dois indicaram ter aprendido mais ou menos.

Quando solicitados a indicar o que consideravam mais importante ou útil terem aprendido, a grande maioria declarou que tudo o que foi trabalhado e aprendido era importante, destacando alguns aspectos que são evidenciados através das declarações a seguir.

“Forma de medir, de ter elaborado as fórmulas para o cálculo de área, de ter calculado de forma prática.”

“Cálculo de área e volume, pois é importante para nosso cotidiano.”

“O mais importante, eu acho, é calcular a área das figuras e transformar as unidades. Isso porque são mais usadas no dia-a-dia escolar e no de casa.”

As respostas apresentadas nos questionários já eram esperadas, pois o acompanhamento do desenvolvimento das atividades e da dinâmica do trabalho mostrava um envolvimento e interesse crescente do grupo, bem como um domínio dos conteúdos trabalhados.

Por conseguinte, entende-se que é possível afirmar que o trabalho proposto suscitou no grupo uma grande motivação que, a partir de certo momento, não era mais devido a fatores externos (como o tipo de atividade proposta), mas emergia dos alunos, que se apropriaram do trabalho que estava sendo realizado, passando a agir com interesse e autonomia.

4.3.3 Considerações sobre o desenvolvimento da engenharia didática

A engenharia didática proposta constou de 13 encontros de dois períodos de 50 minutos, desenvolvendo-se ao longo dos meses de março, abril e maio de 2006. Contou com aulas teóricas e práticas articuladas de tal forma que, ora o trabalho prático dava suporte para o desenvolvimento teórico, ora uma aula teórica desencadeava um processo prático que iria resultar, por exemplo, na modelagem da fórmula para o cálculo da área de uma figura plana. A seqüência didática contou com o apoio de um texto sobre a história da Geometria, dez atividades práticas que foram desenvolvidas em sala de aula e cinco temas que consistiam em tarefas para serem realizadas extra-classe (todas descritas e analisadas ao longo da experimentação), além de exercícios que foram sendo realizados à medida que se julgava necessário.

As observações e registros realizados ao longo da fase de experimentação, bem como a aplicação de testes e questionários, permitem estabelecer certezas, conjecturas e possibilidades sobre o próprio desenvolvimento da engenharia e sobre o desenvolvimento e desempenho do grupo investigado, são apresentadas a seguir.

Como os alunos possuíam pouco conhecimento teórico e prático de Geometria, não demonstraram muito interesse nas duas primeiras aulas. Conforme foram se apropriando dos assuntos desenvolvidos, o interesse foi aumentando até que as atividades começaram a se desenvolver, naturalmente, com coerência e dinamismo. No final, não foi necessário cobrar as atividades, pois realizavam-nas espontaneamente. Naturalmente, os alunos se dispuseram a construir mil cubos de um dm^3 em cartolina, dando origem ao metro cúbico.

Ao longo dos encontros, pôde-se observar que os alunos foram superando a idéia de que a Matemática é uma ciência exata. Com a dificuldade de obter medidas exatas em diferentes situações, o conceito de exatidão passou a ter outra conotação e chegaram à conclusão de que a exatidão do resultado final depende da precisão das medidas tomadas, também, de arredondamentos que são necessários quando se trabalha com números decimais e/ou números irracionais.

O conceito de aula de Matemática foi se alterando para o grupo, ao longo do desenvolvimento das atividades. No início, percebiam a aula de forma bem tradicional, na qual o professor deveria ensinar determinados conteúdos e eles teriam que resolver exercícios no caderno. Aos poucos, a idéia de que a aula era construída por todos (professor e alunos) e que a boa aula dependia do trabalho e da aplicação do grupo fez com que as atitudes fossem se modificando. O grupo passou a mostrar interesse, inclusive, se antecipando em tarefas, querendo saber qual o próximo tema que seria abordado, passando a assumir a responsabilidade do trabalho. A aula de Matemática passou a ser vista como um trabalho conjunto, uma responsabilidade de todos, que depende fundamentalmente das ações de quem aprende.

Ao longo dos encontros, percebeu-se uma grande mudança no grupo, em relação ao desenvolvimento da autonomia. De um começo de pouco interesse e iniciativa, na qual o grupo esperava que o professor indicasse o que deveria ser feito e como deveria ser feito, passou-se a uma atividade intensa de análises, busca de soluções, tentativas de resolver o que estava sendo proposto. O professor passou a ser consultado não com perguntas de como fazer, mas se o que estavam resolvendo e produzindo estava no caminho certo. O trabalho colaborativo passou a ser um ponto forte do grupo. Considera-se que esse processo de desenvolvimento da autonomia foi um grande ganho para todo o grupo.

A engenharia didática concebida e posta em prática apoiava-se, fundamentalmente, no desenvolvimento de aulas com atividades práticas que oportunizariam ao aluno um trabalho ativo, a busca de soluções para problemas apresentados com um conseqüente desenvolvimento de autonomia e prática de tomada de decisões. Nesse sentido, considera-se que o trabalho atingiu os objetivos, uma vez que, depois de um período inicial de adaptação do grupo ao tipo de trabalho proposto, o desenvolvimento foi plenamente satisfatório. O grupo apropriou-se da metodologia proposta, passando a participar de maneira ativa e comprometida com o trabalho. A todo o momento, opinavam e davam sugestões, demonstrando de forma declarada seu contentamento com o trabalho que estavam realizando.

Com relação aos conteúdos que foram desenvolvidos (que abordaram questões ligadas a propriedades de figuras planas consideradas necessárias para a compreensão da noção de área e volume, bem como para o seu cálculo) entende-se que o processo transcorreu de forma bastante satisfatória. O interesse do grupo permitiu que o trabalho teórico e prático que levou ao desenvolvimento do conteúdo transcorresse sem grandes problemas e o que estava previsto para ser trabalhado o foi. A figura 46, que mostra o desempenho e a evolução do grupo com relação a esses conteúdos, corrobora essa posição.

Com relação aos conteúdos relativos à noção e cálculo de área e volume, entende-se que o aproveitamento foi bastante satisfatório, porque o trabalho oportunizou um espaço para a construção prática de significados que se consolidaram de maneira formal ao longo do processo. A modelagem das fórmulas para o cálculo de áreas dos diversos quadriláteros proporcionou um trânsito entre a construção prática e teórica dessas fórmulas, permitindo ao grupo analisar situações, estabelecer conjecturas, concluir e validar resultados, elementos essenciais na construção do pensamento matemático.

Ao professor-pesquisador foi possível perceber a importância da pesquisa articulada ao trabalho de sala de aula. A experiência mostrou que uma seqüência de aulas organizadas segundo uma metodologia específica, onde o professor tem, também, o papel de pesquisador permite potencializar o trabalho desenvolvido, uma vez que os resultados da pesquisa em andamento interferem no desenvolvimento das aulas e essas, por sua vez, alimentam e qualificam a investigação. O contato com os alunos, como pesquisador, leva o professor a observar mais, avaliar permanentemente os alunos, não só em relação ao domínio de conteúdos, mas, fundamentalmente, em relação a outros aspectos do seu desenvolvimento, como autonomia, auto-estima, tomada de decisões, ou seja, um desenvolvimento integral, que é objetivo do processo educativo.

O projeto proposto, que diferia do modo como a Escola e a turma trabalhavam, teve uma dificuldade inicial em relação à aceitação de um trabalho diferenciado que provocaria mudanças na rotina da sala de aula e na Escola. Mudanças geram em qualquer indivíduo insegurança e incerteza, o que leva a uma resistência ao novo. Essa dificuldade inicial foi superada primeiro com a aceitação da Direção da Escola para o desenvolvimento do projeto, depois com o apoio da professora titular que, ao conhecer o trabalho a ser desenvolvido, se mostrou bastante confiante nos resultados que o mesmo produziria e, finalmente, com a postura dos alunos os quais, com o trabalho em andamento, do segundo para o terceiro encontro, passaram a participar ativamente da proposta.

Um aspecto importante que deve ser ressaltado é a participação da professora titular no desenvolvimento da engenharia didática. Ao longo do projeto, a professora participou como observadora, por vontade própria, de dez encontros. Em nenhum momento interferiu no trabalho em sala de aula e sua presença não causou nenhum constrangimento para o professor-pesquisador ou para os alunos.

A professora fez questão de participar em função de que se tratava, em sua opinião, de um trabalho diferenciado, que classificou como prático, dinâmico e motivador. Durante esse período, ao final dos encontros, o professor-pesquisador e a professora mantinham contato, através de discussões sobre o trabalho realizado e, freqüentemente, a mesma opinava a respeito. A seguir, são apresentadas algumas das considerações feitas pela professora:

“Constatei que esses alunos não tinham noção de Geometria. Isto até deixou-me chocada, pois é o 1º ano que trabalho com eles e sei da importância da Geometria no desenvolvimento do raciocínio e de sua utilidade na vida cotidiana.”

“As aulas dinâmicas fizeram com que os alunos raciocinassem, comparassem e chegassem a conclusões, uns ajudando aos outros. Houve, sim, uma ajuda mútua nos próprios grupos, pois a discussão foi muito importante para complementar a aprendizagem dos que tinham dificuldades. A cada aula tinham uma tarefa de casa que também os fazia raciocinar individualmente.”

“Particularmente, eu, como professora de Matemática, aprendi demonstrações práticas que, com certeza, vou levar a outros alunos, pois percebo que, atualmente, nossos alunos precisam praticar para entender. Eles têm muita dificuldade na parte abstrata e isso faz com que percam a motivação de estudar determinados assuntos, pois no momento não lhes dá significado algum.”

“Como estou trabalhando na área da Matemática de 5ª a 8ª séries do Ensino Fundamental, participando destas aulas, surgiu-me a idéia de trabalhar álgebra com a geometria. Introduzi a parte literal com as áreas das figuras, e na verdade, concluí que foi um dos melhores caminhos até então adotados.”

As contribuições da professora foram bastante valiosas para o desenvolvimento do trabalho, especialmente seu apoio integral ao projeto.

Assim, considerando as hipóteses formuladas, os objetivos propostos para essa investigação e a engenharia didática desenvolvida nas suas diferentes fases – análises preliminares, análise *a priori* e concepção da engenharia, experimentação e análise a posteriori - é possível verificar que:

- as hipóteses estabelecidas inicialmente foram comprovadas, uma vez que o trabalho mostrou e comprovou o pouco conhecimento dos alunos com relação à Geometria (no caso, os conhecimentos específicos que foram abordados) e sua pouca familiaridade em resolver problemas geométricos. De fato, a escola, como instituição e, particularmente, o que é estabelecido e desenvolvido nas aulas de Matemática comprovam a fragilidade do ensino da Geometria e como esse tipo de ação tem prejudicado o desenvolvimento pleno dos alunos;
- os objetivos propostos foram alcançados, já que foi possível organizar, articular e colocar em prática um trabalho que permitiu investigar, previamente, o estágio de conhecimentos elementares em Geometria

de um grupo de alunos e desenvolver uma seqüência didática que trabalhou as noções e conceitos relativos a conteúdos específicos (no caso, comprimento, área e volume). Considera-se que os objetivos foram alcançados, não só porque se conseguiu colocar em prática o que tinha sido proposto, mas, principalmente, porque o trabalho levado à sala de aula possibilitou ao grupo um crescimento em relação aos conteúdos previstos, desenvolvimento da autonomia e de habilidades para a busca de soluções a problemas propostos;

- a engenharia didática desenvolvida teve êxito tanto no que se refere ao desenvolvimento da investigação proposta como, também, na intenção de desenvolver um trabalho de sala de aula que permitisse ao aluno participar ativamente do processo.

CONCLUSÃO

Ao término do presente trabalho investigativo centrado no processo de ensino e aprendizagem da Geometria, é importante ressaltar que, como preconizam os Parâmetros Curriculares Nacionais, a Geometria deve ser trabalhada desde a Educação Infantil até o Ensino Médio, para que o aluno tenha a possibilidade de atingir o máximo de desenvolvimento do pensamento matemático, em especial o geométrico, através de um trabalho que respeite seu desenvolvimento e permita aplicações das noções e conceitos aprendidos em novas situações-problema, transferindo conhecimentos geométricos para outros sistemas de maior complexidade e se estendendo a outras áreas do conhecimento, como a Química, Física, Astronomia, e outras.

A engenharia didática proposta objetivou viabilizar um trabalho para a construção de conhecimentos próprios da Geometria, alicerçado na busca do desenvolvimento da autonomia, no estímulo a tomada de decisões, e na necessidade de elaboração de propostas de solução para as tarefas e problemas apresentados. O trabalho desenvolvido junto aos alunos mostrou-se, no início, lento e de pouco interesse. Porém, na medida em que o grupo se apropriava das noções e conceitos, as atividades e a participação tornaram-se mais dinâmicas e consistentes. Os resultados foram positivos, ocorrendo um crescimento significativo do grupo em relação ao início dos trabalhos.

No que diz respeito à apropriação das idéias e dos conceitos, o desempenho foi bastante satisfatório, evidenciando-se um domínio progressivo das questões que estavam sendo trabalhadas, fato que permite concluir que, se a Geometria for desenvolvida de forma adequada, ou seja, partir de situações concretas para abstratas, em todos os graus de ensino, a fim de que o aluno possa alcançar os níveis de exigência de cada estágio de sua vida estudantil, certamente haverá um ensino da disciplina alinhado com o que estabelecem os currículos e com as reais necessidades dos estudantes.

A investigação permitiu perceber que o modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de van Hiele se constitui em um caminho teórico e metodológico promissor, que pode sustentar um projeto efetivo e de qualidade para o desenvolvimento da Geometria no Ensino Fundamental e Médio, superando a fragmentação e desarticulação presentes atualmente.

Entende-se que trabalhos que considerem essa perspectiva teórica devem ser estimulados e desenvolvidos, buscando-se um aprofundamento dos aspectos teóricos e a produção de material prático, que permita ao professor levá-lo, definitivamente, para a sala de aula.

Ao término do trabalho considera-se importante identificar e analisar aspectos que, no desenvolvimento de futuros projetos, possam ser aprimorados.

Um desses aspectos refere-se à qualificação das atividades desenvolvidas, com a inclusão de situações-problema que envolva o meio social, econômico e ambiental do grupo de alunos. Considera-se que as atividades planejadas contemplaram de maneira bastante frágil essas questões, e um fortalecimento das mesmas permitiria, além da ação concreta por parte dos alunos, uma interação maior com o espaço físico e social do seu entorno.

Outra questão que emergiu da investigação, refere-se às mudanças que um grupo de alunos, participantes de uma ação como a que foi desenvolvida, estão sujeitos. Desde o início do trabalho ficou claro que a proposta rompia com o que vinha sendo desenvolvido até então e produzia alterações no comportamento e nas atitudes dos alunos. Entende-se que esses aspectos poderiam ter sido considerados, de maneira mais efetiva, desde as análises preliminares da engenharia proposta, incorporando elementos teóricos da noção de contrato didático descrita por Brousseau.

Por fim, salienta-se a importância da opção pela engenharia didática como metodologia de investigação. Entende-se que essa opção foi decisiva para o bom desenvolvimento da proposta, viabilizando um trabalho que pode ser organizado, elaborado e aplicado em um ambiente onde era desenvolvido um trabalho bem diverso do proposto. Foi possível vivenciar o que, muito bem, Douady (1995, p.61) colocou:

> No transcurso das interações entre o professor e os estudantes, o projeto evolui a partir das reações dos estudantes e em função das seleções e decisões do professor. Dessa forma a engenharia didática é por um lado um produto, resultante de uma análise a priori, e um processo no transcurso do qual o professor executa o produto adaptando-o, se for o caso, a dinâmica da turma

Tem-se a pretensão que o produto proposto e o processo vivenciado contribuam para a evolução do ensino e aprendizagem da Geometria e das pesquisas na área de Educação Matemática.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, José Antonio, NACARATO, Adair Mendes. Tendências didático-pedagógicas no ensino de Geometria: um olhar sobre os trabalhos apresentados nos ENEM's. **Educação Matemática em Revista**, Ano 11, nº 17, p. 61-70, dez. 2004.

ARTIGUE, Michele. Ingeniería didáctica. In: GÓMEZ, Pedro (editor). **Ingeniería didáctica em educación matemática.** México: Grupo Editorial Iberoamérica, 1995.

BODGAN, Robert, BIKLEN, Sari. **Investigação Qualitativa em Educação**. Porto: Porto Editora, 1999.

BOYER, Carl B. **História da Matemática.** São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1997.

______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológical. **Parâmetros Curriculares Nacionais:Ensino Médio: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias.** Brasília, 1999.

CROWLEY, Mary L. O modelo Van Hiee de desenvolvimento do pensamento geométrico. In: LINDQUIST, Mary, M. SHULTE, Albert, P. **Aprendendo e Ensinando Geometria**. São Paulo: Saraiva, 1994.

DOUADY, Régine. La ingeniería didáctica y la evolución de su relación com el conocimiento. In: GÓMEZ, Pedro (editor). **Ingeniería didáctica em educación matemática.** México: Grupo Editorial Iberoamérica, 1995.

DUVAL, Raymond. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. **Aprendizagem em matemática: Registros de representação semiótica.** Campinas, SP: Papirus, 2003.

FAINGUELERNT, Estela K. **Educação Matemática. Representação e Construção em Geometria.** Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1999.

GERDES, Paulus. **Sobre o Despertar do Pensamento Geométrico.** Curitiba: Editora da UFPR, 1992.

HUETE, J.C. Sánchez, BRAVO, J.A. Fernández. **O ensino da matemática: fundamentos teóricos e bases psicopedagógicas.** Porto Alegre: Artmed, 2006.

LORENZATO, Sérgio. Por que não ensinar Geometria? **Educação Matemática em Revista**, Ano III, nº 4, p. 3-13, 1º semestre 1995.

MACHADO, S. D. A. **Educação Matemática. Uma Introdução.** 2ª ed. São Paulo: EDUC, 2002.

NASSER, Lilian. **Níveis de van Hiele: Uma explicação definitiva para as dificuldades em geometria.** Boletim GEPEM. nº29, p.31-35, 1991.

NASSER, Lilian; SANT'ANNA, Neide P. **Geometria Segundo a Teoria de Van Hiele.** Projeto Fundão – IM/UFRJ, Rio de Janeiro, 2004.

PAIS, L.C. **Didática da Matemática.Uma Análise de Influência Francesa.** 2ª.ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

PAVANELLO, Regina M. **O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e conseqüências**. Zetetiké. Campinas, SP. Ano I , nº1, p.7-17, 1993.

PEREZ, Geraldo. A realidade sobre o ensino de geometria no 1º e 2º graus no estado de São Paulo. **Educação Matemática em Revista**, Ano III, nº 4, p. 54-62, 1º semestre 1995.

RICIERI, Agnaldo P. **Matemático e louco - todos somos um pouco.** São Paulo: Prandiano, 1989.

SANTOS, Beatriz Petrella. O Ensino de Geometria Atuando como Modificador do Pensar e do Agir. Canoas: ULBRA, 2003. Orientador: Arno Bayer. Dissertação para obtenção do título de mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

SILVA, Benedito Antonio. Contrato Didático. In: ALCÂNTARA, Silvia Dias (org.). **Educação Matemática: uma introdução**. São Paulo: EDUC, 2000.

TINOCO, Lucia. **Geometria Euclidiana Por Meio de Resolução de Problemas.** Projeto Fundão – IM/UFRJ, Rio de Janeiro, 2004.

VITRAC, Bernard. A Invenção da Geometria. **Cientific American História**, A Ciência na Antiguidade, São Paulo, p. 30-35.

OBRAS CONSULTADAS

ANTUNES, Celso. **Como Transformar Informações em Conhecimento.** 5ª.ed. Petrópolis: Editora Vozes, 2005.

BASSANEZI, Rodney C. **Modelagem Matemática. Uma Nova Estratégia.** São Paulo: Contexto, 2004.

BIANCHINI, Edwaldo; PACIOLA, Herval. **Matemática. 1ª Série Ensino Médio.** São Paulo: Moderna, 2004.

CARRETERO, M. **Construtivismo e Educação.** Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

CARVALHO, Dione Lucchesi. **A Interação entre o Conhecimento Matemático da Prática e o Escolar.** Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 1995. Tese de Doutorado, Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, 1995.

CATALÁ, Claudi **A. Por Que Geometria?** Madri: Síntesis, 1997.

CHASSOT, Attico. **A Ciência através dos tempos.** São Paulo; Moderna. 2004.

DANTE, Luiz R. **Matemática. Novo Ensino Médio**. São Paulo: Ática, 2005.

DILIGENTI, Marcos Pereira. **Avaliação participativa: um estudo sobre a avaliação da aprendizagem da geometria nos cursos de engenharia.** Porto Alegre: UFRGS, 2001. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós – Graduação em Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul,2001.

ENZENSBERGER, Hans Magnus. **O Diabo dos Números.** São Paulo: Schwarcz, 1998.

EVES, Howard. **Tópicos de História da Matemática.** São Paulo: Atual, 1997.

FEREEEIRA, Gomes et al. Rede Didática. Disponível em: http://www.c5.cl/ieinvestiga/actas/ribie98/266M.html Acesso em: 05 ago. 2006.

FURASTÉ, Pedro Augusto. **Normas Técnicas para o Trabalho Científico.** 13ª.ed. Porto Alegre: Dáctilo Plus, 2005.

GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI, José Ruy Junior. **Matemática Fundamental: Uma Nova Abordagem.** São Paulo: FTD, 2002.

HOGBEN, Lancelot. **Maravilhas da Matemática. Influência e Função da Matemática nos Conhecimentos Humanos**. Porto Alegre: Globo, 1970.

KARLSON, Paul. **A Magia dos Números: A Matemática ao Alcance de Todos.** Porto Alegre: Globo, 1961.

LEDUR, Elsa Alice; WOLFF, Maria Stellita; WOLFF, Rosane. **Metodologia do esino-aprendizagem da geometria plana.** São Leopoldo: UNISINOS, 1990.

LINDQUIST, Mary, M. SHULE, Albert, P. **Aprendendo e Ensinando Geometria.** São Paulo: Saraiva, 1994.

LOPES, Maria Laura M. Leite. **Geometria na Era da Imagem e do Movimento.** Projeto Fundão – IM/UFRJ, Rio de Janeiro, 2005.

LÜDKE, Menga e ANDRÉ, Marli, E.D.A. **Pesquisa em Educação: abordagens qualitativas.** São Paulo: E.P.U, 1986.

MAOR, Eli. **e: A História de um Número.** 2ª ed. Rio de Janeiro: Record, 2004.

MARCONDES, Carlos A; GENTIL Nelson; GRECO Sergio E. **Matemática para o Ensino Médio.** São Paulo: Ática, 1999.

MIORIM, Maria A. **Introdução à História da Educação Matemática.** São Paulo: Atual, 1998.

MOREIRA, Marco A. **Teorias de Aprendizagem.** São Paulo: E.P.U. Editora Pedagógica e Universitária Ltda, 1999.

MOREIRA, Marco Antonio; SILVEIRA, Fernando Lang. **Instrumento de Pesquisa em Ensino e Aprendizagem.** Porto Alegre: EDIPUCRS, 1993.

MOYSÉS, Lucia. **Aplicações de Vygotsky à Educação Matemática.** Campinas: Papirus, 2003.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **Principles and Standards for School Mathematics.** Reston, Va – USA, 2002.

PIAGET, Jean. **Seis Estudos de Psicologia.** 19ª ed. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1993.

POZO, Juan Ignacio (org). **A Solução de Problemas. Aprender a resolver, resolver para aprender.** Porto Alegre: ARTMED, 1998.

PURIFICAÇÃO, Ivonélia da; SOARES, Maria, T.C. **Possibilidade de avanços na construção de conceitos geométricos.** São Paulo: PUC, 1999.

RODRIGUES, Antonio. **Modelos Matemáticos de Geometria Euclidiana.** Porto Alegre: UFRGS, 1978.

SANTOS Fo., J. e GAMBOA, S. S. **Pesquisa educacional: qualidade-quantidade.** São Paulo: Cortez Editora. 2002.

SCHMITZ, Carmen Cecilia; LEDUR, Elsa Alice; MILANI, Miriam de Nadal. **Geometria de 1ª a 4ª Séries: Uma brincadeira séria.** São Leopoldo: UNISINOS, 1997.

SINGH, Simon. **O Último Teorema de Fermat.** 2ª.ed. Rio de Janeiro: Record, 1998.

SMOLE, Kátia C. S; KIYUKAWA, Rokusaburo. **Matemática Ensino Médio.** São Paulo: Saraiva, 1998.

TAHAN, Malba. **As Maravilhas da Matemática.** Rio de Janeiro: Bloch Editores, 1983.

TOLEDO, Mauro; TOLEDO, Marília. **A Construção da Matemática.** São Paulo: FTD, 1997.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Questionário A

Escola Estadual de Ensino Médio Júlio Mangoni

Vila Jansen – Município de Farroupilha

Prezado aluno,

Estou realizando um trabalho de pesquisa sobre ensino e aprendizagem da Geometria e gostaria de contar com sua colaboração para responder a algumas questões.

1) Idade:______anos. 2) Sexo: M(_____)F(_____)

3) Você trabalha?

(___) Em uma empresa.

(___) Em casa com os pais.

(___).Outro. Qual?____

(___) Não trabalho.

4) Se você trabalha, descreva as atividades que desenvolve e o número de horas semanais trabalhadas.

____

5) Você gosta de estudar Matemática?

____

____

6) Na sua vida escolar, você já teve reprovações em alguma série?

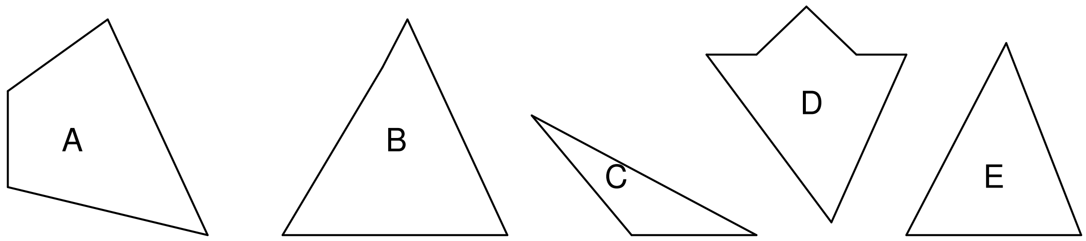
(___) Sim (___) Não

Em que série(s)?____

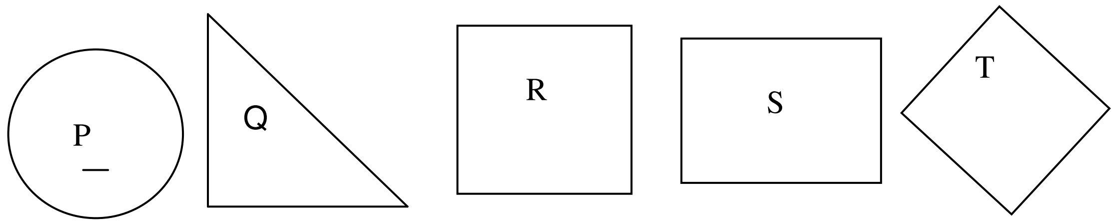
APÊNDICE B – Teste avaliativo inicial

Nome: ____

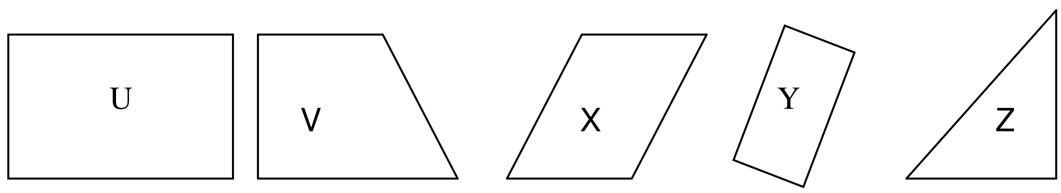
1) Assinale o(s) triângulo(s).



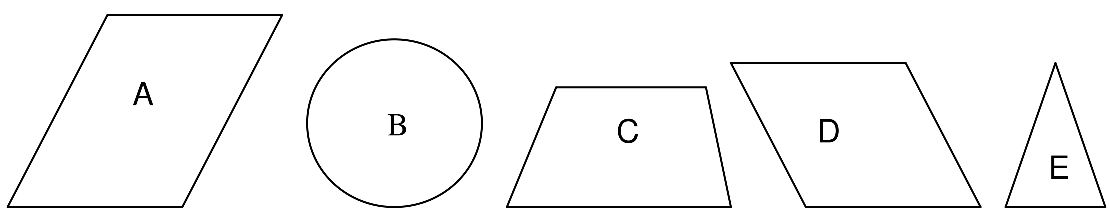
2) Assinale o(s) quadrado(s).



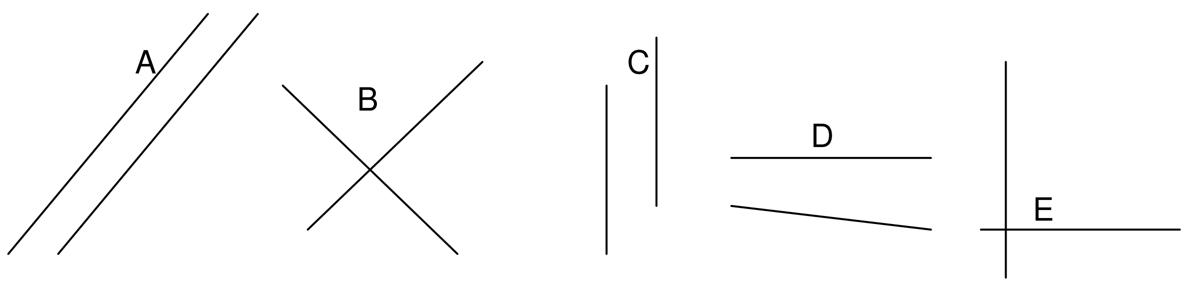
3) Assinale o(s) retângulo(s).



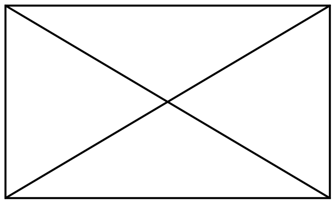
4) Assinale o(s) paralelogramo(s).



5) Assinale os pares de retas paralelas.

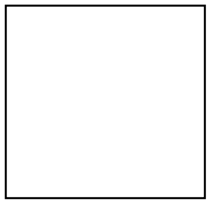


6) No retângulo ABCD, as linhas AC e BD são chamadas de diagonais. Assinale a(s) afirmativa(s) verdadeira(s) para os retângulos.



a) Têm 4 ângulos retos.
b) Têm lados opostos paralelos.
c) Têm lados diagonais de mesmo comprimento.
d) Têm os 4 lados iguais.
e) Todas são verdadeiras.

7) Dê 3 propriedades dos quadrados.

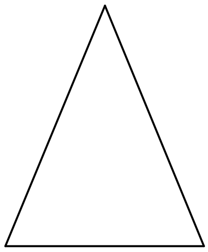


1 - ....

2 - ....,

3 - ....

8) Todo triângulo isósceles tem dois lados iguais. Assinale a afirmativa verdadeira sobre os ângulos do triângulo isósceles.



a) Pelo menos um dos ângulos mede 60º.
b) Um dos ângulos mede 90º.
c) Dois ângulos têm a mesma medida.
d) Todos os três ângulos têm a mesma medida.
e) Nenhuma das afirmativas é verdadeira.

9) Dê 3 propriedades dos paralelogramos.

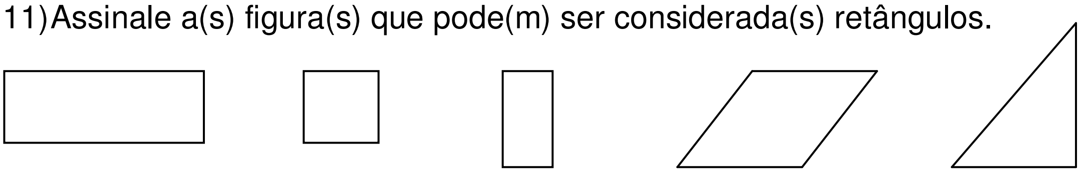
1 - ....

2 - ....

3 - ....

10) Dê um exemplo de quadrilátero cujas diagonais não têm o mesmo comprimento. Desenhe esse quadrilátero.

11) Assinale a(s) figura(s) que pode(m) ser considerada(s) retângulos.



12) Os quatro ângulos A,B,C e D de um quadrilátero ABCD são todos iguais.

a) Pode-se afirmar que ABCD é um quadrado?..................................
b) Por quê?..

....
c) Que tipo de quadrilátero é ABCD?...

13) Pode-se afirmar que todo retângulo é também um paralelogramo?.....Por quê?..

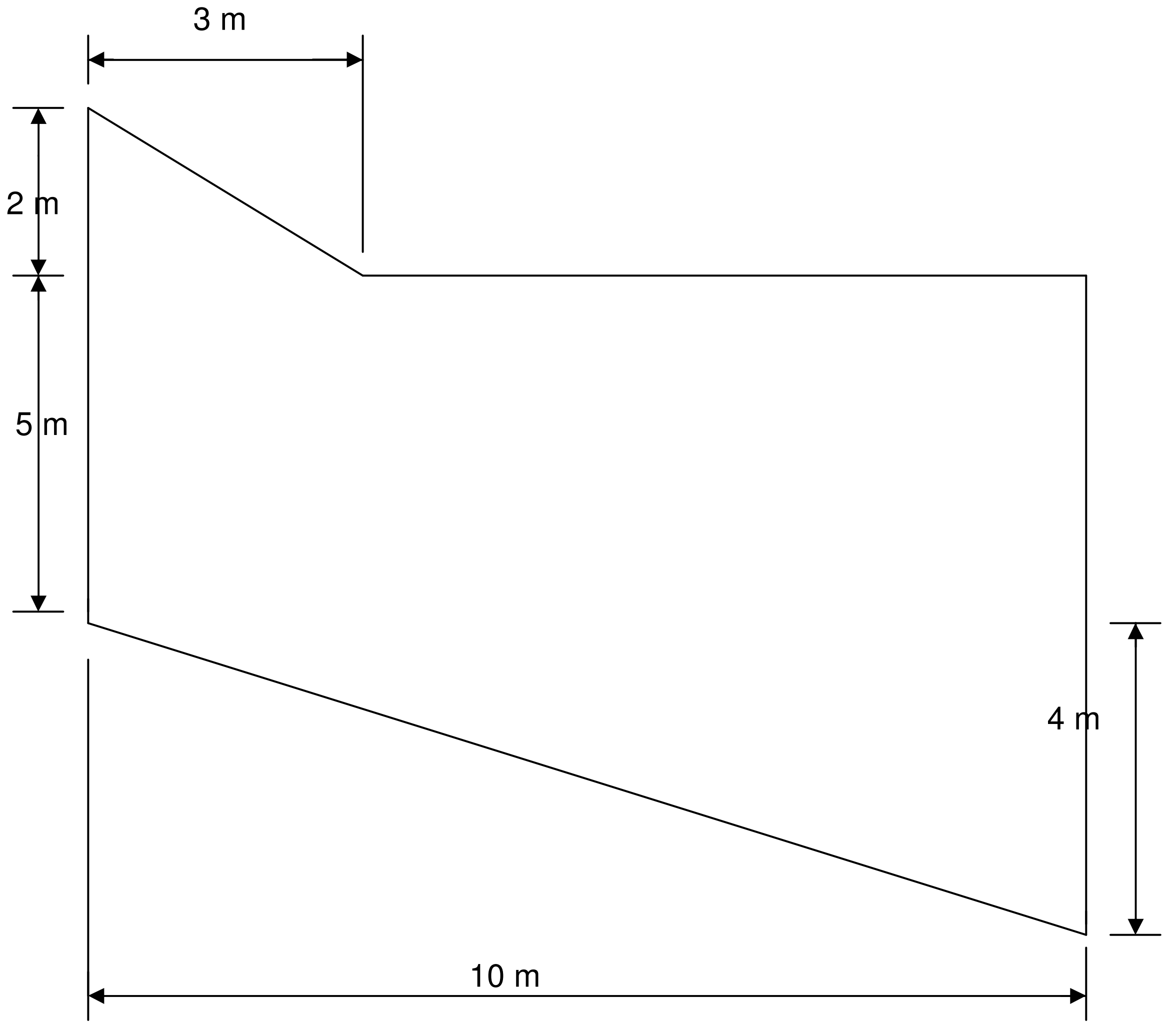
14) Considere as afirmativas:
a) a figura X é um retângulo;
b) a figura X é um triângulo.

Assinale a afirmativa verdadeira.
a) Se I é verdadeira, então II é verdadeira.
b) Se I é falsa, então II é verdadeira.
c) I e II não podem ser ambas verdadeiras.
d) I e II não podem ser ambas falsas.
e) Se II é falsa, então I é verdadeira.

15) Assinale a afirmativa que relaciona corretamente as propriedades dos retângulos e dos quadrados.

a) Qualquer propriedade dos quadrados é também válida para os retângulos.
b) Uma propriedade dos quadrados nunca é propriedade dos retângulos.
c) Qualquer propriedade dos retângulos é, também, válida para os quadrados.
d) Uma propriedade dos retângulos nunca é propriedade dos quadrados.
e) Nenhuma das afirmativas anteriores está correta.

16) Dada a figura abaixo, calcule a área.



APÊNDICE C – Geometria, um pouco de história

As primeiras noções geométricas surgiram quando o homem sentiu a necessidade de efetuar medidas, ou seja, de comparar as distâncias entre os pontos, ao mesmo tempo em que procurou as formas e as dimensões dos corpos que o rodeavam. Ele buscou, então, ao observar uma figura, estudar sua forma, sua posição e seu tamanho.

A maioria das civilizações antigas (egípcios, babilônios, assírios, hindus, chineses) já conheciam as principais figuras geométricas, bem como tinham noção de ângulo, que usavam na astronomia e nas medidas de áreas. Porém, esses conhecimentos eram usados apenas numa forma prática, sem que houvesse uma organização dos mesmos.

Foram os gregos que organizaram os conhecimentos geométricos da época, transformando a Geometria em ciência sistematizada. Um famoso matemático grego, chamado EUCLIDES (século III antes de Cristo), escreveu várias obras sobre a Geometria. Por esse motivo, até hoje denominamos essa parte da Matemática de “Geometria Euclidiana”.

Há referências de que, no terceiro milênio antes de Cristo (a. C.), os babilônios dispunham de plaquetas com tabelas de multiplicar, de quadrados e de cubos. A Geometria já era muito desenvolvida nesse período e ligada às necessidades da vida diária, como agrimensura, a planificação de cidades e o traçado de mapas.

APÊNDICE D – Planilha para o reconhecimento de figuras através de seus elementos

Figura	A		B		C		D
	Pode ser	Não pode ser	Pode ser	Não pode ser	Pode ser	Não pode ser	Nome da figura
Grupo 1							
Grupo 2							
Grupo 3							
Grupo 4							
Grupo 5							

APÊNDICE E: Questionário B

Escola Estadual de Ensino Médio Júlio Mangoni

Vila Jansen – Município de Farroupilha

1) O que você mais gostou no trabalho desenvolvido no projeto de Geometria?

2) O que você menos gostou?

3) Você considera que aprendeu os conteúdos que foram desenvolvidos?

4) Do que você aprendeu, o que você considera mais útil ou importante?

Por quê?

APÊNDICE F – Teste avaliativo final

Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Júlio Mangoni
Vila Jansen – Município de Farroupilha

Nome:____

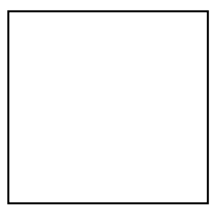
1 – Construa um trapézio cuja base maior meça 12 cm, a menor, 7 cm e a altura, 6 cm. Calcule a área dessa figura.

2 – Construa um triângulo com base de 6 cm e com 5 cm de altura, calculando a área.

3 – Desenhe um paralelogramo com a base de 10 cm e com altura de 4 cm, calculando a área.

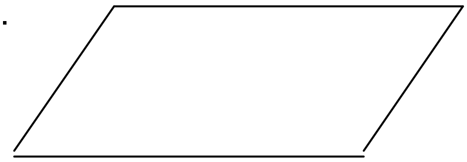
4 – Construa um losango de diagonal maior com 8 cm, diagonal menor de 5 cm e calcule a área.

5) Dê 3 propriedades dos quadrados.



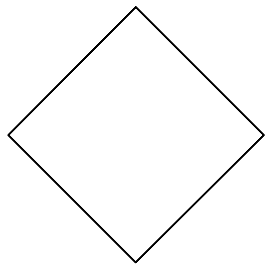
1 - ____________________________________;
2 - ____________________________________;
3 - ____________________________________.

6) Dê 3 propriedades dos paralelogramos.



1 - ________________________________;
2 - ________________________________;
3 - ________________________________.

7) Dê três propriedades dos losangos.



1 - _________________________________;
2 - _________________________________;
3 - _________________________________.

8) Os quatro ângulos A,B,C e D de um quadrilátero ABCD são todos iguais.

a) Pode-se afirmar que ABCD é um quadrado?_____________________

b) Por quê?____

c) Que tipo de quadrilátero é ABCD?________________________________

9) Pode-se afirmar que todo retângulo é também um paralelogramo? Por quê?____

---

10) Assinale a afirmativa que relaciona corretamente as propriedades dos retângulos e dos quadrados.

a. Qualquer propriedade dos quadrados também é válida para os retângulos.
b. Uma propriedade dos quadrados, nunca, é propriedade dos retângulos.
c. Qualquer propriedade dos retângulos também é válida para os quadrados.
d. Uma propriedade dos retângulos, nunca, é propriedade dos quadrados.

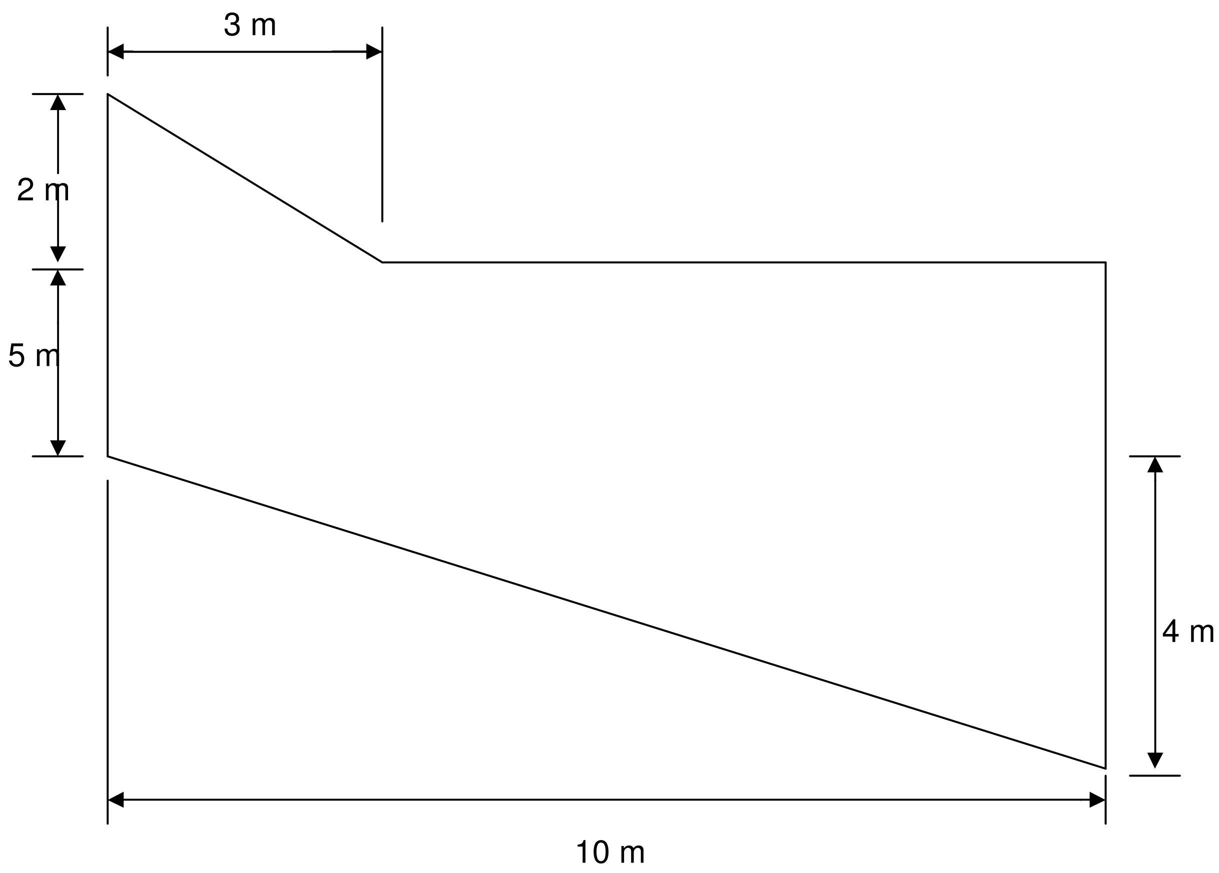
e. Nenhuma das afirmativas anteriores está correta.

11) Assinale a afirmativa que relaciona, corretamente, as propriedades dos losangos e dos quadrados.

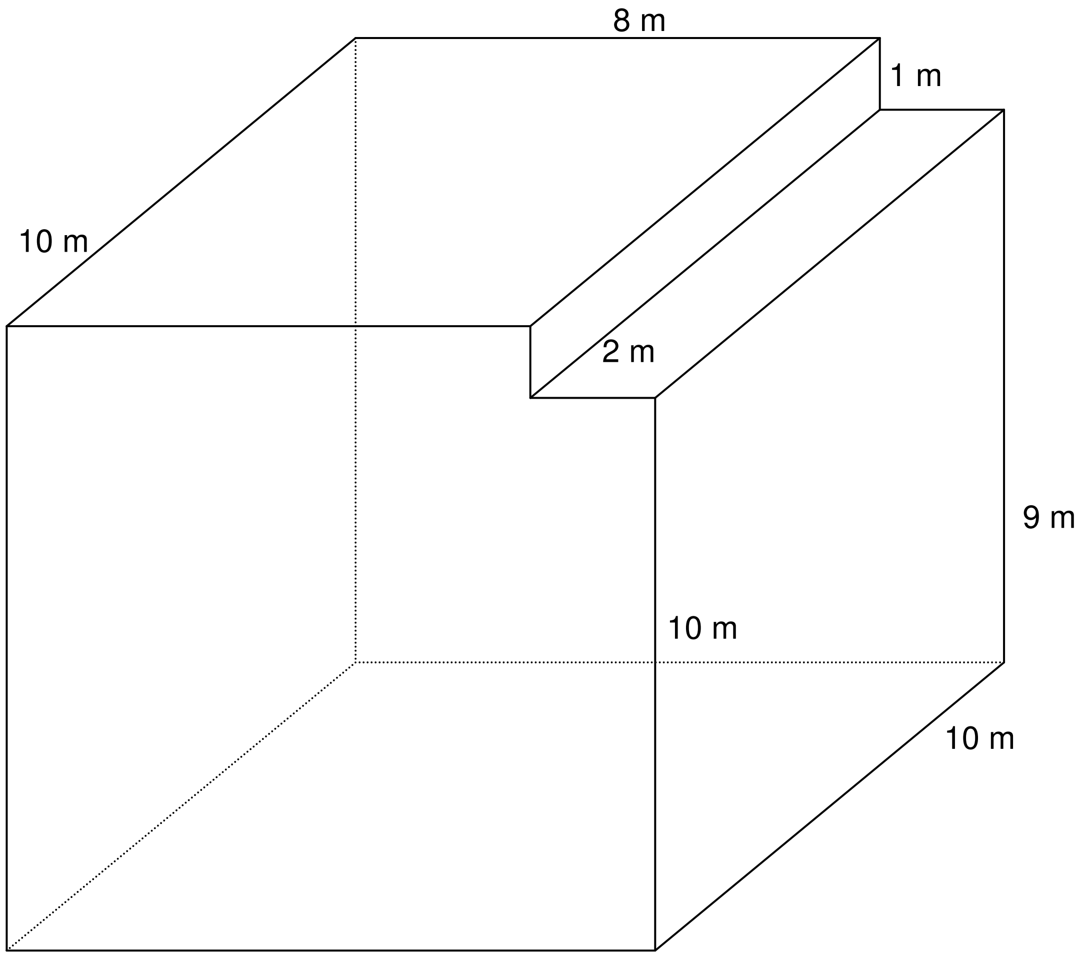
f. Qualquer propriedade dos quadrados também é válida para os losangos.
g. Uma propriedade dos quadrados nunca é propriedade dos losangos.
h. Uma propriedade dos losangos nunca é propriedade dos quadrados.
i. Qualquer propriedade dos losangos também é válida para os quadrados.
j. Nenhuma das afirmativas anteriores está correta.

12) Dê um exemplo de quadrilátero cujas diagonais não têm o mesmo comprimento. Desenhe esse quadrilátero.

13) Dada a figura abaixo, calcule a área.



14) Dado o sólido abaixo, calcule o volume.



APÊNDICE G – Termo de consentimento livre e esclarecido

Prezados alunos e pais,

Durante os meses de março, abril e maio de 2006 foram desenvolvidas, junto aos alunos da turma 11 da Escola Estadual Júlio Mangoni, atividades referentes ao projeto “A Geometria no Ensino Médio: quantificando comprimento, área e volume” que faz parte da minha dissertação de mestrado. No decorrer do trabalho, em diversos momentos, registrei as atividades através de fotos, bem como por escrito, manifestações dos alunos com relação às atividades desenvolvidas. Assim, solicito a autorização do aluno e/ou de seus responsáveis para o uso das imagens e expressões orais e verbais coletadas no decorrer do projeto. Esses dados serão utilizados na minha dissertação, na publicação de possíveis artigos sobre a investigação e em congressos onde os resultados da pesquisa serão apresentados.

Farroupilha, 10 de março de 2006.

____
Joél Nardi Chiele

Nome do aluno (a): ____________________________

_______________________ ___________________________
Assinatura do aluno (a) Assinatura do responsável