UNIVERSIDADE LUTERANA DO BRASIL
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

MODELAGEM MATEMÁTICA DA *ARAUCARIA ANGUSTIFOLIA* NOS CAMPOS DE LAGES, SANTA CATARINA: UMA PROPOSTA METODOLÓGICA REGIONAL PARA O ESTUDO DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL EM SALA DE AULA

ENSINO E APRENDIZAGEM EM ENSINO DAS CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

CÉSAR AUGUSTO MACHADO FREITAS
Mestrando

Profª. Dra. MARILAINE DE FRAGA SANT'ANA
Orientadora

Canoas, 2006

CÉSAR AUGUSTO MACHADO FREITAS

MODELAGEM MATEMÁTICA DA *ARAUCARIA ANGUSTIFOLIA* NOS CAMPOS DE LAGES, SANTA CATARINA: UMA PROPOSTA METODOLÓGICA REGIONAL PARA O ESTUDO DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL EM SALA DE AULA

ENSINO E APRENDIZAGEM EM ENSINO DAS CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e matemática, sob orientação da Profª. Dra. Marilaine de Fraga Sant'Ana.

Canoas, 2006

DEDICATÓRIA

Ao Senhor Deus, por todos os momentos presente em minha vida.

AGRADECIMENTOS

Considero este o momento mais importante da minha vida profissional. Atingir este objetivo com tenacidade foi concretizado. As dificuldades foram inúmeras, porém superadas com dedicação e muito empenho e também pelas palavras animadoras de várias pessoas que contribuíram para essa conquista.

Assim agradeço:

Ao Senhor Deus que me concedeu saúde e todas as condições materiais para realizar o mestrado.

A Rede de Ensino Univest. Em especial as Faculdades Integradas da Rede de Ensino Univest – FACVEST, pelo apoio concedido a minha pessoa.

Aos Caros Colegas professora Msc. Rita Chaves e o professor Msc João Couto, pelos momentos de orientação, diálogos e sugestões. Agradeço por tudo que fizeram na concretização desta pesquisa.

A Professora Drª Marilaine de Fraga Sant'Ana, minha orientadora, pela dedicação nas orientações e pelas palavras de incentivo.

Ao Professor Arno Bayer, coordenador do mestrado. Pessoa amiga e muito exigente que contribuiu consideravelmente no desenvolvimento deste trabalho.

Ao Senhor Júlio Cláudio de Oliveira, pela atenção e disposição em me atender quando solicitado.

RESUMO

O referido trabalho investigou-se acadêmicos da disciplina de cálculo diferencial e integral, a partir da modelagem matemática, podem desenvolver estudos relacionados a problemas de sua região. Fundamentou-se, principalmente na visão teórica do professor Rodney Bassanezzi sobre o papel da modelagem matemática no contexto educacional. A aplicação da modelagem matemática no ensino, segundo o trabalho, pode fazer com que o professor conheça novas metodologias de aprendizagem, pois a modelagem matemática é uma tendência no ensino de matemática no Brasil, e que apresenta condições de fluir em todos os níveis, principalmente no ensino superior. Professores de cálculo diferencial e integral podem problematizar suas aulas considerando fenômenos regionais, para que o educando possa adquirir o conhecimento adequado para traçar as relações existentes entre o abstrato e o concreto, contribuindo assim, na aplicação e compreensão dos processos de derivação e integração. O trabalho foi desenvolvido em uma turma de Ciências da Computação da FACVEST – Faculdades Integradas da Rede de Ensino Univest (Lages – SC), na disciplina de cálculo diferencial e integral, durante o primeiro semestre de 2006. A turma foi dividida em grupos com no máximo seis integrantes. Em aula de campo, escolheram o modelo do seu trabalho relacionado com algum aspecto da *Araucaria angustifolia* para assim dar início à pesquisa. Estruturando a análise dos resultados apresentados pelos alunos em relatos dos modelos desenvolvidos e reflexões sobre as conclusões. Essa pesquisa se propõe a apresentar a modelagem matemática no processo ensino-aprendizagem como uma estratégia delineadora de caráter interdisciplinar. A aplicação da modelagem matemática nas aulas de cálculo junto aos estudantes, possibilitou um melhor entendimento dos processos de derivação e integração. Os resultados apresentados pelos respectivos grupos participantes da pesquisa nos mostram que as aulas de cálculo com a aplicação da modelagem matemática tornaram-se mais dinâmicas, sendo que os alunos tiveram condições de adquirir o conhecimento do cálculo a partir da modelagem matemática, uma vez que a matemática deve ser ensinada de forma vinculada a realidade. Neste contexto os alunos tiveram uma participação mais ativa no processo ensino-aprendizagem saindo da posição de meros ouvintes.

Palavras-chave: *Araucaria angustifolia*. Modelagem Matemática. Interdisciplinaridade. Ensino de Cálculo.

ABSTRACT

This work inquires whether the students of the subject Differential and Integral Calculus can develop studies related to the problems of their region, starting from mathmetical modeling. In order to reach it, we took as a main reference the theoretical vision of professor Rodney Bassanezzi on the role of the mathematical modeling in the educational context. The employment of the matmatical modeling in teaching, according to this work, may cause the techer to get in thouch with new learning methodologies, since this matmatical modeling is a tendency in the teaching of mathmatics in Brazil, and thus it presentes effective conditions to flow in all the levels, mainly in the college teaching. Teachers of differential and integral calculus may render their classes problematic by considering the regional phenomena, so that the student be able to acquire the proper knowledge to notice the existing relations between the abstract and the concrete, and that will contribute for the employment and understanding of the derivation and integration processes. The work was performed with a Computing Sciences group of FACVEST - Integrated Faculties of the teaching net Univest (Lages – SC) – in the subject Differential and Integral Calculus, in the first semester of the year 2005. The team was divided into groups with no more than 6 students each. In their field practice, they had to select the pattern of their work, that had to be related to some aspect of the Araucaria angustifolia, and that would give start to the research, by structuring the analysis of the results that were presented by the students in reports of the developed patterns, and making some considerations on their conclusions. Thus this research intends to present the mathmatical modeling in the learning/teaching process as a delineating strategy of interdisciplinary character. The employment of the mathematical modeling in the calculus classes with the students made it possible to get a better understanding of the derivation and integration processes. The results of the research that the respective involved groups presented show that the calculus classes with the employment of the mathematical modeling became more dynamic, and so the students were able to acquire the knowledge of calculus through this same modeling, demonstrating that the subject mathmatics must the taught in a linked way to reality. In such a context the students had a more dynamic participation in the teaching/learning process and were not mere listeners.

Key-words: Araucaria angustifolia. Mathmatical modelling. Interdisciplinarity. The Teaching of Calculus.

LISTA DE APÊNDICES

Apêndice A – Questionário aplicado aos alunos no início da pesquisa 114

Apêndice B – Lista com a assinatura dos alunos participantes da pesquisa........................ 116

Apêndice C – Planilha do diário de bordo.. 119

Apêndice D – Ficha da definição dos componentes dos grupos 120

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 Etapas da modelagem matemática, adaptado de Bassanezi (2002) 25

Figura 2 Regiões de floresta com *araucaria angustifolia* no Estado de Santa Catarina..... 31

Figura 3 Araucárias: paisagem típica da Região Sul.. 36

Figura 4 Componentes do grupo 1 45

Figura 5 Aula de campo... 49

Figura 6 Aula de campo... 49

Figura 7 Aulas de orientações 50

Figura 8 Variáveis relacionadas 54

Figura 9 Ajuste da curva... 64

Figura 10 Apresentação grupo 1.. 66

Figura 11 Forma do tronco 67

Figura 12 Aula de campo... 71

Figura 13 Sólido gerado pela revolução 77

Figura 14 Componentes do grupo 4 88

Figura 15 Pinheiro do perímetro urbano.. 90

Figura 16 Pinheiro do perímetro urbano, com os eixos x e y e linhas auxiliares 90

Figura 17 Apresentação do trabalho final do grupo 4 99

Figura 18 Parâmetro de medição para o cálculo da altura da araucária 103

Figura 19 Utilização do hipsômetro para cálculo da altura da araucária............................ 105

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 Sexo 45

Gráfico 2 Formação escolar Ensino Médio 46

Gráfico 3 Idade 46

Gráfico 4 Leitura sobre modelagem matemática 47

Gráfico 5 Crescimento médio anual – Função Logarítmica 60

Gráfico 6 Crescimento médio anual – Função Polinominal – 3ª Ordem 61

Gráfico 7 Crescimento médio anual – Função Exponencial 62

Gráfico 8 Crescimento médio anual – Função Potencial 63

Gráfico 9 Quantidade de casca no tronco 74

Gráfico 10 Média da Q.C.T 75

Gráfico 11 Galho 1 (esquerdo) com tronco 91

Gráfico 12 Galho 2 (direito) com tronco 93

Gráfico 13 Galho 1 sem tronco 95

Gráfico 14 Galho 2 sem tronco 95

Gráfico 15 Dz no R^2 99

Gráfico 16 no R^3 100

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Número da Florestal Gateados 37

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 Produção (*Araucaria angustifolia*) 48

Tabela 2 Modelagem do crescimento da altura da *Araucaria angustifolia* em função da idade 53

Tabela 3 Produção de casca (*Araucaria angustifolia*).. 72

Tabela 4 Volume do tronco de altura h 82

Tabela 5 Dos pontos do galho 1 levantados a partir da figura 16 do pinheiro do perímetro urbano, medidas em centímetros.. 92

Tabela 6 Dos pontos do galho 2 levantados a partir da figura 15 do pinheiro do perímetro urbano, medidas em centímetros.. 94

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO 13

1 MODELAGEM MATEMÁTICA 16

1.1 A modelagem matemática no contexto educacional 16

1.2 Algumas experiências desenvolvidas no ensino superior com aplicação da modelagem matemática 20

1.3 Etapas da modelagem matemática 24

1.4 Interdisciplinaridade da modelagem matemática 27

2 FLORESTA DE ARUACÁRIAS: A MODELAGEM MATEMÁTICA EM SALA DE AULA 28

2.1 Florestas de araucárias no Brasil 28

2.2 Floresta de araucária em Santa Catarina 30

3 A PESQUISA 38

3.1 Problema 38

3.2 Objetivos 38

3.2.1 Objetivo geral 38

3.2.1 Objetivos específicos 39

4 METODOLOGIA 40

4.1 Tipo de pesquisa 40

4.2 Controle das informações 41

5 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS 45

5.1 Modelos matemáticos desenvolvidos pelos alunos 47

5.1.1 Grupo 1: Modelo matemático do crescimento da espécie em função da idade 47

5.1.2 Da construção do modelo 51
5.1.3 Definição do modelo matemático.. 54
5.1.4 Utilização de software para o ajuste de gráficos por linhas de tendências................ 57
5.1.5 Modelo final 64
5.1.6 Conclusões finais dos componentes do grupo 1 64
5.2 Grupo 2: Modelo matemático da quantidade de casca do tronco 66
5.2.1 Definição do modelo matemático.. 66
5.2.2 Aplicação do modelo matemático 71
5.2.3 Considerações finais dos componentes do grupo 2 75
5.3 Grupo 3: Modelo matemático para o cálculo do volume do tronco da araucária.......... 76
5.3.1 Relatos relacionados ao tema 76
5.3.2 Da construção do modelo 77
5.3.3 Aplicação do modelo matemático 82
5.3.4 Reflexão sobre o modelo matemático 85
5.4 Grupo 4: Modelo matemático da equação da curva dos galhos de araucárias adultas.. 88
5.4.1 Relatos relacionados ao modelo 88
5.4.2 Da construção e definição do modelo matemático.. 89
5.4.3 Reflexões sobre o modelo desenvolvido 96
5.5 Modelo matemático da curva dos galhos de araucárias jovens 101
5.5.1 Grupo 5: Modelo matemático para o cálculo da altura da *Araucaria angustifolia* 101
5.5.2 Da construção dos modelos 102
5.5.3 Reflexão sobre o modelo desenvolvido.. 105
CONSIDERAÇÕES FINAIS.. 107
REFERÊNCIAS 110
APÊNDICES 113

INTRODUÇÃO

A modelagem matemática é uma tendência no ensino de matemática no Brasil, que pode fluir em todos os níveis desde os alicerces do ensino básico, perpassando pela graduação em matemática, atingindo patamares das pesquisas científicas que isso de muitas formas contribui para o desenvolvimento das populações de modo geral.

É considerável o caráter multidisciplinar que a modelagem matemática pode assumir, sendo, em alguns momentos também, a critério do docente com a devida formação, ser interdisciplinar, ou seja, o educador, pesquisador deve transcender aos modelos tradicionais de ensino no momento de ministrar suas aulas, para isso deverá ter conhecimento de outras áreas da ciência.

Professores não podem se limitar ao conhecimento dos conteúdos do Ensino Médio, estes devem ser embasados em conteúdos superiores, avançados que podem ser aplicados à realidade dos educandos segundo a habilidade didática-pedagógica do educador.

A aplicação da modelagem matemática no ensino, pode fazer com que o professor busque novas metodologias de aprendizagem, estimulando assim, o desenvolvimento do raciocínio lógico matemático do aluno, colocando-o frente à aplicabilidade dos cálculos, tornando-os, mais compreensíveis no cotidiano do aluno, desde que se utilize de modelos para resolvê-los, compreendendo melhor as questões relacionadas com sua região a partir de estudos desenvolvidos em sala de aula.

Por outro lado, acredita-se que professores de matemática devem problematizar seus exercícios buscando subsídios nos fenômenos locais, para que o educando possa apropriar-se do conhecimento com maior propriedade, ou seja, fazendo relações entre o abstrato e o concreto.

Deste modo, acredita-se que não é tarefa fácil fazer com que o professor de matemática do ensino superior comece a estimular, em seus alunos, a capacidade de resolver os problemas regionais através da modelagem, podendo-se dizer que essa atitude se deve ao fato da modelagem matemática ter começado a despontar no Brasil no início da década 70.

Com isso, torna-se necessário buscar a formação de grupos docentes da área, nas agências formadoras de professores de matemática para se discutir uma nova proposta de se estudar os problemas através da modelagem matemática.

A ciência utiliza-se de ferramentas que maximizam seu potencial de observação e análise na busca de reduzir o tempo gasto com experimentação em laboratórios, passa a observar os fenômenos, levantar variáveis para posterior formulação de modelos matemáticos.

A mata de floresta ombrófila mista ou simplesmente chamada de mata de Araucária também esta presente nos campos de Lages – SC. Sua presença na região se dá por fatores clima, altitude, latitude, longitude, entre outros fenômenos que promoveram a Biodiversidade local, muito intensa no início do século XX. Com o início do ciclo da madeira por volta de 1914, que atinge seu apogeu nas décadas de 50 – 60 começa a diminuição intensa do número de espécies, assim, este ciclo caracterizou-se como fator determinante para a degradação genética da biodiversidade existente naquele período. Atualmente na região, a mata de Araucária é formada com alguns remanescentes daquilo que era considerado uma mata de vegetação densa.

Muitos estudos estão sendo empreendidos para se resgatar a fisionomia da paisagem entre eles, pode-se relacionar desde os mais complexos que buscam o melhoramento genético da Araucária até aqueles, que muito embora, pareçam ser simples, porém não menos importantes, como é o caso das técnicas empregadas para se semear as sementes dessa tão nobre espécie, não somente para a região, mas também para todo o Sul do Brasil.

No entanto, pode-se dizer que tratar de *Araucaria sp* não se restringe apenas a Botânicos, geneticistas, biólogos, entre outros. As peculiaridades das características que apresentam a espécie fazem com que os estudos relacionados às matas de Araucária perpassem por todas as áreas do conhecimento entre elas modelagem matemática, que permite, através de simulação, aproximar-se da realidade, como exemplo, contribuindo com o homem do campo para verificar a altura das árvores, verificar a quantidade de regeneração bem como o grau de competição entre as plantas regeneradas ou ainda verificar o grau de dispersão de sementes dentro da mata por agentes dispessores como a cutia – *Dasypracta sp* ou a gralha azul. A todos esses aspectos pode ser dado um tratamento matemático, que facilitará aos pesquisadores atingirem seus objetivos, assim como se poderá dar respostas aos leigos que anseiam pela resolução de problemas antes citados, que por desconhecimento matemático, dificultam suas vidas. Dentro deste contexto é importante destacar quais os meios aplicados pelo homem do campo, no tratamento destes aspectos da espécie relacionados com o seu dia-a-dia.

Este trabalho tem, portanto, sua estruturação na modelagem matemática, que pode ser utilizada como metodologia sugestiva para o ensino do cálculo diferencial e integral. No primeiro capítulo apresento o verdadeiro papel da modelagem matemática no contexto educacional como também algumas experiências desenvolvidas no ensino superior com a aplicação da modelagem matemática, as etapas da modelagem segundo a visão teórica do professor Rodney Carlos Bassanezi e a interdisciplinaridade proporcionada pela modelagem no processo ensino-aprendizagem. No segundo capítulo apresento uma visão geral da situação das matas de araucárias no Brasil e em especial no estado de Santa Catarina. No terceiro capítulo apresento os objetivos que almejo alcançar com o trabalho. A metodologia aplicada para o desenvolvimento desta pesquisa, constitui o quarto capítulo constando ainda neste o tipo de pesquisa detalhes sobre o controle das informações durante o processo da coleta de dados e finalmente as etapas do desenvolvimento da pesquisa.

Terminamos o trabalho com o quinto capítulo que apresenta detalhadamente os modelos matemáticos desenvolvidos pelos alunos que foram divididos em grupos com no máximo seis componentes. Os modelos foram analisados segundo relatos e reflexões conforme suas características peculiares.

Desta forma a modelagem matemática aliada a problemas específicos de certa região pode contribuir para um melhor entendimento do cálculo diferencial e integral. Nós professores, devemos conhecer novos caminhos metodológicos sugestivos que possam auxiliar nossos acadêmicos na aquisição do conhecimento de forma mais clara e objetiva.

1 MODELAGEM MATEMÁTICA

1.1 A Modelagem Matemática no Contexto Educacional

Modelagem matemática é a área do conhecimento que estuda situações reais utilizando a matemática como linguagem interpretativa objetivando a compreensão, a simplificação e a resolução, definindo desta forma as maneiras para desenvolver e implementar modelos matemáticos ligados a estas situações da realidade, estabelecendo assim uma forma estratégica do desenvolvimento do raciocínio e definição de relações por parte do pesquisador. A modelagem utiliza-se da matemática, pois a mesma é considerada a arte interpretativa que pode nos levar a explicações geradoras de entendimento.

“A modelagem permite fazer previsão, tomar decisões, explicar e entender, enfim, participar do mundo real com capacidade de influenciar em suas mudanças” (BASSANEZI, 1988, p. 7).

Este ponto de vista inclui a matemática no campo interdisciplinar, aspecto importante no processo ensino-aprendizagem que permite levar o aluno ao conhecimento de metodologias aplicadas na resolução de situações ligadas às mais diversas áreas.

Segundo Franchi (1993, p. 7) comenta que:

> Muitas são as estratégias de ensino de matemática existentes no momento, mas, entre todas, uma que despertou especial atenção: a modelagem matemática. Centrando o processo de ensino-aprendizagem no aluno, por suas características, a modelagem mostra-se como uma forma de fazer com que a educação escolar cumpra realmente seu papel de capacitar o indivíduo para uma atuação consciente na realidade em que vive.

A modelagem matemática é hoje uma grande tendência que vem sendo desenvolvida em todos os níveis da educação matemática brasileira. Este desenvolvimento se dá a partir da multiplicidade de problemas, cujas soluções dependem, quase sempre, de conceitos matemáticos elementares até teorias matemáticas complexas.

A modelagem matemática,como recurso didático-pedagógico,é a arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos, cujas soluções são interpretadas na linguagem do mundo real. Desta forma, a modelagem matemática pode ser aplicada na resolução de problemas em diversas áreas do conhecimento: economia, biologia, engenharia e outros ramos. Segundo Beimbemgut (2004, p. 17), "na matemática, em particular, o processo de modelagem requer do modelador além do talento para à pesquisa, conhecimento matemático e capacidade de fazer leitura do fenômeno sob a ótica matemática".

Afirma que a habilidade do pesquisador é fator determinante para o sucesso da pesquisa, pois desta forma, ocorre a interpretação do problema no campo matemático.

A educação matemática no Brasil, a partir do desenvolvimento da modelagem, vem assim adquirindo características importantes no seu avanço, como educação holística (visão sistêmica) e temática aprimorando o processo de ensino aprendizagem. A modelagem pode ser caracterizada como um dos caminhos para o desenvolvimento do raciocínio lógico dos alunos, na formação de educadores mais críticos e comprometidos, não somente com os programas escolares desenvolvidos em sala de aula, mas acima de tudo, comprometidos com a pesquisa, pois a educação deste país necessita, mais do que nunca, de professores interessados pela iniciação científica visando assim ao desenvolvimento de novas tecnologias e metodologias de ensino inovadoras, apropriadas na formação de profissionais que bem preparados poderão ser inseridos no mercado de trabalho.

Conforme Bassanezi (2002, p. 15):

> Ao contrário dos que acreditam ser a matemática aplicada uma matemática inferior onde os problemas são abordados com técnicas modestas ou métodos computacionais que desvalorizam está ciência – pensa-se que, para o desenvolvimento de um novo modelo de educação menos aliado e mais comprometido com a realidade dos indivíduos e sociedades necessita-se lançar mão de instrumentos matemáticos inter-relacionados a outras áreas do conhecimento humano. Conforme essa capacidade de estabelecer relações entre os campos da matemática e os outros, evitando reproduzir modos de pensar estanques, imediatos e fracionados que a nosso ver está o futuro da formação de novos quadros de professores e pesquisadores, prontos a enfrentar o desafio de pensar a unidade na multiplicidade.

Este ponto de vista nos direciona a estudar e aplicar a matemática no contexto interdisciplinar, como já foi mencionado anteriormente, porém, destacando que a modelagem matemática pode ser um dos meios para a construção de uma educação que realmente esteja comprometida com a realidade das pessoas, que lhes forneça respostas até então desconhecidas, que resultam da falta de elementos didáticos distantes da educação matemática em sala de aula.

No Brasil, este quadro começa a ser alterado mediante a aplicação da modelagem matemática no processo ensino aprendizagem. Segundo o professor Dr. Dionísio Burak, professor titular da Universidade Estadual de Ponta Grossa, PR, a modelagem matemática começou a ser trabalhada, na década de 80 na Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP, por um grupo de professores especialistas em Biomatemática coordenados pelo professor Rodney Carlos Bassanezi.

Os estudos iniciais sobre o assunto estavam relacionados a modelos de crescimento cancerígeno. Na educação brasileira, a modelagem matemática teve início nos cursos de especialização de professores em 1983 na Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Guarapuava – FAFIGU, PR.

Ressalta-se em Barbosa (2004), a necessidade de se fazer reflexão sistemática sobre a modelagem a partir dos parâmetros da própria educação matemática. Isso não significa uma separação da matemática aplicada com a geral, temos uma forte interação, mas a singularização do objeto no campo da educação matemática.

Neste contexto, torna-se claro o importante papel da modelagem matemática na relação com a matemática aplicada e outras disciplinas como já se expôs, as perspectivas da modelagem matemática no Brasil são potencializadas no que concerne à tomada de decisões diante dos fenômenos que se desencadeiam na natureza, como se pode ressaltar os estudos com o melhoramento genético da *Araucária angustifólia*, onde a modelagem matemática possibilita as inúmeras simulações para verificar o desenvolvimento dos processos na sua totalidade.

Parafraseando Barbosa (*apud* SKOVSMOSE, 2000), há a necessidade de se implementar a modelagem no currículo, sem compartimentá-la ou torná-la uma ilha dentre as outras atividades.

Incorporá-la na escola deve significar também o movimento do currículo de matemática para o paradigma de investigação. Assim, se vê que a modelagem matemática paulatinamente vai assumindo sua posição na aplicação sistematizada dos conhecimentos já adquiridos pela humanidade, que devem ser então maximizados nos algoritmos relevantes aos temas desenvolvidos atualmente no Brasil.

Ainda segundo Barbosa (1999, p. 67 – 85), o ensino de matemática através da modelagem foi utilizado em oportunidades em nosso país, como em, cursos regulares, cursos para bio-cientístas, programas especiais para professores de iniciação científica.

Não se pode deixar de fazer menção da importância da modelagem matemática aplicada em cursos de graduação em várias partes do mundo, como ocorre em grande escala na Inglaterra. Conforme Franchi (1992, p. 43) "a modelagem é ensinada em cursos de graduação, e essa tem sido a forma metodológica como autores, tais como D. G. Medley (BERRY, 1984), H. Burkhardt (BERRY, 1984); K. H. Oke (1982); D. M. Burley (BERRY, 1984); P. B. Taylor (BERRY, 1984) e R. R. Mclone (1976), ligados ao processo de ensino.

Podem-se encontrar em diversos números da *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* e também em *Teaching and Applying Mathematical Modelling* (BERRY, 1984), relatos de experiências com o ensino de modelagem matemática e análises sobre aspectos ligados a essas experiências.

Um outro grupo de pesquisadores vêem a modelagem matemática como uma estratégia de ensino-aprendizagem da matemática. Isso se dá a partir das sistematizações periódicas dos conceitos matemáticos que aparecem no modelo, que se relaciona com ele ou que são necessários para sua resolução.

É de fundamental importância que a educação no Brasil aumente consideravelmente o número de professores com esta visão metodológica sugestiva, que pode, sem sombras de dúvidas enriquecer, a educação na área da matemática e porque não dizer no campo interdisciplinar, desta forma.

A matemática pode tornar-se o meio pelo qual os fenômenos que não conseguimos compreender, em virtude de sua abstração possam ser estudados e analisados com maior clareza, contribuindo para o desenvolvimento das mais variadas modalidades da atividade humana. Assim, para que se obtenha êxito nos processos de ensino-aprendizagem, é necessário que o professor tenha claro as etapas da Modelagem de Matemática.

1.2 Algumas experiências desenvolvidas no ensino superior com a aplicação da modelagem matemática

Podem-se destacar trabalhos ligados à modelagem matemática desenvolvidos no ensino superior por pesquisadores brasileiros.

Uma das experiências desenvolvidas foi a da então mestranda da Universidade Luterana do Brasil no ano de 2005 Bênia Costa Rilho. Seu trabalho tem o título "Uma Experiência em Ensino Aprendizagem: modelos de fundos de investimentos e as derivadas". Segundo Rilho (2005, p. 11), "este trabalho tem, portanto, suas raízes na Modelagem Matemática, usada para desenvolver o conteúdo de derivadas". O referido trabalho apresenta um enfoque diferenciado no estudo das derivadas em sala de aula, pois correlaciona a teoria das derivadas em uma situação presente no mercado financeiro, ou seja, derivadas aplicadas no estudo de fundos de investimento. Destaca também a visão de educação e, dentro dela, o papel elementar da matemática por meio da modelagem matemática como uma estratégia de ensino-aprendizagem. Mostra ainda que o objetivo principal deste trabalho foi a compreensão das derivadas como taxa de derivação do valor de cota.

A referida pesquisa conclui por intermédio dos trabalhos apresentados pelos acadêmicos das Faculdades Rio-Grandense (FARGS), na disciplina Matemática Aplicada no 1º Semestre de 2004, do curso de Administração de Empresas, que houve aprendizagem do conteúdo derivadas e que os modelos no estudo de fundos de investimentos desempenham papel determinante no aprendizado e compreensão dos acadêmicos, sendo que estes podem estar mais aptos a atuar no campo econômico atual.

Considerando relevante a pesquisa realizada em sala de aula no ensino de cálculo diferencial integral pela professora Regina Helena de Oliveira Lima Franchi, dissertação esta que teve a orientação do Professor Dr. Rodney Carlos Bassanezi, apresentada na Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" Campus Rio Claro, SP, curso de Pós-Graduação em Educação matemática no ano de 1993. O referido trabalho definido pelo tema "A Modelagem Matemática com Estratégia de Aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral nos Cursos de Engenharia".

A distinta autora constata as falhas existentes no ensino da matemática de modo geral, tenta detectar as causas e efeitos proporcionados por estas falhas por meio de questionamentos a respeito da educação de modo geral, trilha segundo a mesma, um caminho que a leva especificamente ao ensino do cálculo diferencial e integral, ao qual dedica sua pesquisa. Com o desenvolvimento da pesquisa, Regina Franchi percebe que o objetivo principal da educação escolar é habilitar o estudante para uma participação crítica na sociedade na qual está inserido.

Neste processo de socialização mediante a educação Franchi (1993, p. 3) destaca que:

> Embora às vezes considerada abstrata, a matemática mostra-se como valiosíssima forma de instrumentação para a vida. Se a função da escola é a socialização do saber elaborado a Matemática tem papel de destaque nos currículos escolares como sendo a chave de acesso a esse saber. Deve, pois, o professor de matemática dar ao aluno condições de acesso ao conhecimento matemático. Com esse objetivo, a grande maioria dos professores de matemática, coloca-se como transmissor de conhecimento apresentados de forma pronta e acabada.

Concorda-se com este ponto de vista, constata-se atualmente uma parcela considerável de educadores em matemática preocupadas tão somente com a transmissão do conhecimento e não comprometidos, por falta de preparação ou consciência de que o papel do professor é o de dar condições essenciais ao aluno da aquisição de conhecimento.

Defende-se a idéia de que isso só é possível se o professor conhecer novos caminhos metodológicos, pois muitos conhecem matemática, conhecem técnicas imediatas na resolução de problemas, mas não buscam outras formas para o ensinar. Segundo Franchi (1993, p. 4) “conhecer a Matemática não está sendo colocado apenas como ter domínio das técnicas ou de suas aplicações, mas sim na sua dimensão de conhecimento humano, envolvendo portanto o aspecto afetivo, a compreensão e a comunicação”.

Uma das formas que pode contribuir para a aquisição do conhecimento por parte do aluno é a modelagem matemática, pois a matemática deve ser ensinada de forma vinculada à realidade, ou seja, o professor bem preparado metodologicamente pode auxiliar os educandos na interpretação de situações reais ligadas ao seu cotidiano para o mundo matemático, assim o aluno pode ter uma participação mais ativa no processo ensino aprendizagem saindo da posição de um mero ouvinte.

A pesquisa aponta questionamentos como: será que os professores de cálculo conhecem o cálculo? Qual seria o caminho que leva à compreensão do cálculo e, consequentemente, mostra-se como uma boa forma de fazer com que o aluno o aprenda? É possível aprender cálculo diferencial e integral através da modelagem matemática num curso regular?

Conforme sua pesquisa Franchi (1993, p. 7):

Trabalhos publicados mostram o sucesso da modelagem matemática como estratégia de ensino-aprendizagem da Matemática em nível de 1º e 2º graus, em cursos de especialização e em cursos de suplência.

Mas em 3º grau isso é possível?

Como trabalhar de forma tão imprevista em cursos estruturados, de duração semestral, com rigoroso controle sobre o programa a ser cumprido? Seria a Modelagem matemática uma forma de dar ao aluno a oportunidade de construir o conhecimento de cálculo diferencial e integral, de forma a compreendê-lo de fato?

Observa-se a importância dada nesta pesquisa do sucesso da modelagem matemática ligada ao processo ensino-aprendizagem no terceiro grau o que leva a referida pesquisadora encontrar respostas aos questionamentos apresentados anteriormente.

Franchi (1993) estrutura sua pesquisa em quatro capítulos, sendo que o primeiro faz uma discussão sobre o cálculo diferencial e integral como disciplina básica nos cursos de engenharia, sua importância na interpretação dos fenômenos naturais. O capítulo II discute a modelagem matemática como estratégia de aprendizagem do cálculo nos cursos de Engenharia. No seu capítulo III, apresenta detalhadamente os experimentos desenvolvidos com os alunos da Unimep e por fim o capítulo IV faz uma reflexão interessante dos experimentos realizados pelos alunos na tentativa de uma nova proposta metodológica mediante modelagem matemática para o ensino de cálculo nos cursos regulares. Em suas conclusões Franchi (1993) destaca pontos com os quais manteve contado quando da elaboração dos modelos matemáticos que fazem parte desta pesquisa.

Aspectos peculiares apresentados por Franchi (1993, p. 142) como:

> As necessidades do modelo, ao mesmo tempo motivam a utilização de métodos e recursos atuais (como computador) e o desenvolvimento de novas teorias. Não há dúvidas que trabalhos nesta linha pressupõem o rompimento com estruturas

> cristalizadas e fortes, não só nas instituições de ensino, como também na maneira de pensar das pessoas envolvidas.

O referido trabalho poderia de modo geral relatar em sua conclusão as vantagens metodológicas obtidas no ensino de cálculo nos cursos de engenharia mediante a aplicação da modelagem matemática, pois constatamos este aspecto de forma particularizada, conforme os experimentos elaborados pelos acadêmicos.

Este relato generalizado poderia, sem dúvidas, dar uma visão mais precisa da utilização da modelagem matemática como uma estratégica metodológica no ensino do cálculo diferencial integral.

A Revista de Ciências Naturais e Exatas da Universidade Luterana do Brasil, denominada “Acta Scientiae” apresenta em sua edição artigos ligados à educação matemática dando ênfase à modelagem matemática. Em seu volume 7, número 1, jan./jun. 2005 há a publicação do artigo “Representação da solubilidade de sais inorgânicos em água por modelos matemáticos”. O referido artigo apresenta modelos matemáticos que descrevem a solubilidade de sais inorgânicos em água pura considerando dados obtidos experimentalmente. Os referidos modelos foram desenvolvidos através do ajuste de curvas que facilitam a representação dos fenômenos.

Conforme a introdução do artigo, o trabalho tem suas origens segundo a curiosidade de um professor de matemática quando indagado pelo seu filho sobre a solubilidade de sais.

Segundo Sant’Ana, Aquino e Lenz (2005, p. 17), “este professor buscou a interpretação desse fenômeno do ponto de vista matemático o que despertou curiosidade sobre o assunto, e compartilhou essa curiosidade com seus colegas. Reuniram-se três professores, dois de matemática e uma professora de química, a fim de investigar o assunto”.

Outro aspecto fundamental deste artigo Sant’Ana, Aquino e Lenz (2005, p. 19) além da interdisciplinaridade é a abordagem relacionada a modelos matemáticos quando afirma:

> Bassanezi (2002) define como modelo matemático um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma um objeto estudado. O autor salienta a importância da utilização de uma linguagem concisa na formulação do modelo, expressando as idéias de maneira clara e sem ambigüidade. Já Bender (2000) define modelo matemático como uma construção matemática abstrata e simplificada relacionada a uma parte da realidade e criada para um propósito

> particular. Os modelos podem ser formulados de acordo com a natureza dos fenômenos analisados e classificados de acordo com o tipo de matemática utilizada.

Quanto à regressão ou ajuste de curvas, o artigo apresenta como sendo um recurso utilizado para representar a tendência de uma variável "y" em função de outra variável "x". Mostra também as várias modalidades de ajustes, dentre este ajuste linear, polinomial, exponencial, geométrico, Michaelis-Menten e logística).

Desta forma, o artigo vem contribuir com a idéia de se utilizar a modelagem matemática em sala de aula envolvendo, além da matemática, outras disciplinas favorecendo a comunicação entre estas. Segundo Sant'Ana, Aquino e Lenz (2005, p. 23):

> Com certeza o aluno que tenha um interesse pela área de Química se motivará pelo estudo da matemática a partir de fenômenos químicos e vice-versa. Além disso a matemática é fundamental no entendimento dos modelos físicos e químicos, bem como na determinação e delineamente destes modelos.

Assim é possível concluir que a modelagem pode contribuir no processo ensino aprendizagem como elemento motivador do aluno num contexto interdisciplinar.

1.3 Etapas da modelagem matemática

O processo de modelagem matemática envolve alguns procedimentos, etapas, pois os problemas da realidade se apresentam, quase sempre, em forma de situações especiais ou complexas. Desta forma, devem ser analisados de forma gradativa, por etapas que perfazem praticamente o mesmo percurso da pesquisa científica. Segundo Bassanezi (2002, p. 27), simplifica o processo de Modelagem Matemática conforme o esquema da Figura 1.

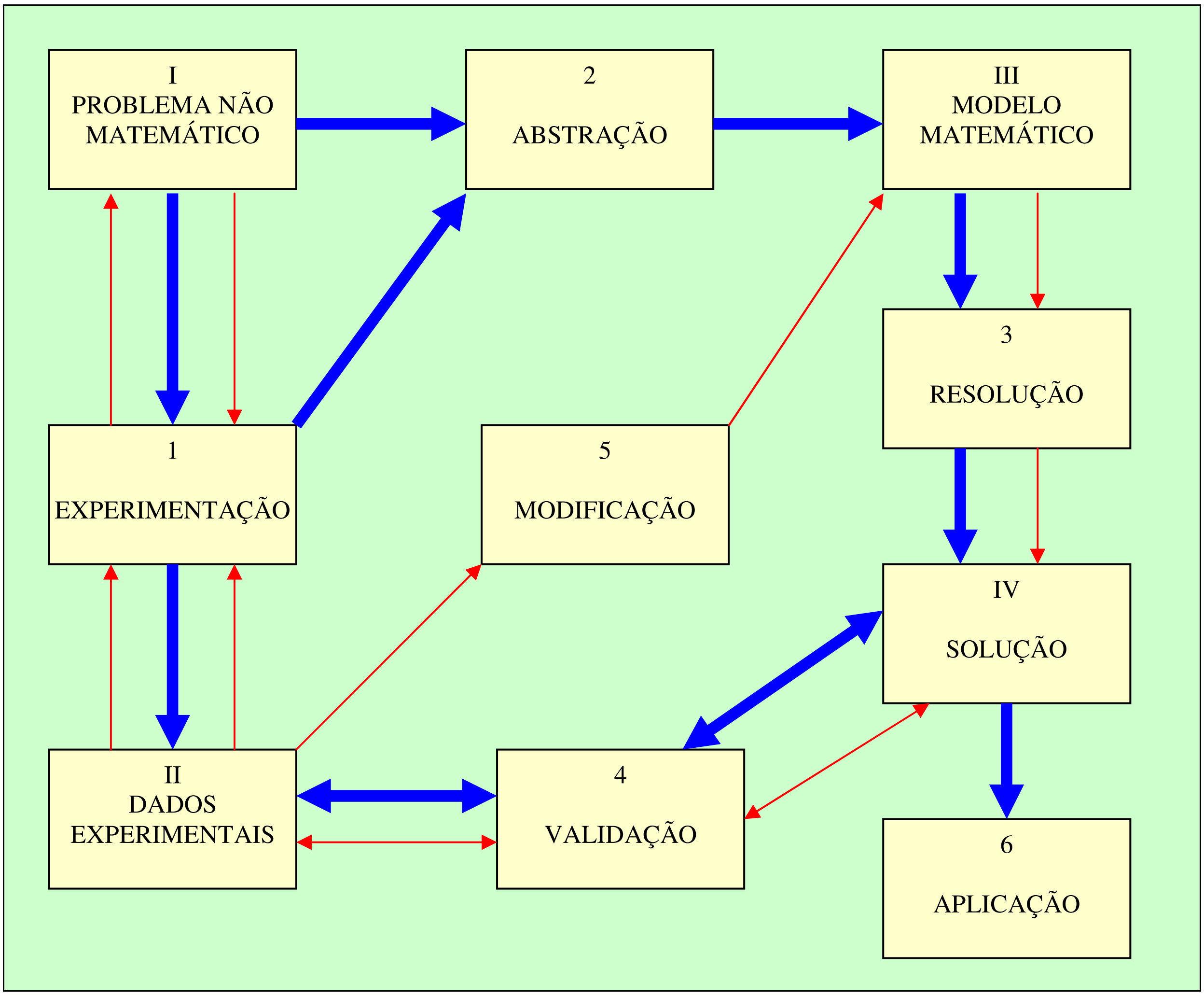


Figura 1 Etapas da modelagem matemática, adaptado de Bassanezi (2002).

As linhas azuis mostram a primeira aproximação do processo de modelagem. As linhas vermelhas mostram um desenvolvimento mais dinâmico para tal processo, com o objetivo real de se buscar um modelo matemático que melhor represente o problema em análise.

De forma mais implícita a figura 1, apresenta o processo de modelagem matemática sucintamente da seguinte forma:

A) **EXPERIMENTAÇÃO:** é uma atividade laboratorial ou estatística onde se processa a obtenção de dados.

B) **ABSTRAÇÃO:** é a etapa da formulação dos modelos matemáticos a partir do processo de seleção das variáveis essenciais, definindo o problema real em linguagem natural.

C) **RESOLUÇÃO:** etapa da montagem do modelo ou seja da linguagem natural passamos para a linguagem matemática.

D) **VALIDAÇÃO:** é o processo de rejeição ou não do modelo. O grau de aproximação é fator determinante para sua validação. Os modelos, juntamente com as hipóteses que lhes são atribuídas, devem ser testados em confronto com dados empíricos, comprando suas soluções e previsões com os valores obtidos no sistema real.

E) **MODIFICAÇÃO:** esta etapa do processo de modelagem matemática apresenta fatores ligados ao problema original que podem provocar a rejeição ou aceitação dos modelos. Modelos simplificados apresentam geralmente soluções que não conduzem às previsões corretas e definitivas.

F) **APLICAÇÃO:** a modelagem devidamente correta permite fazer previsões, tomar decisões, explicando e dando assim entendimento do mundo real com a capacidade de influenciar suas mudanças.

Para Barbosa (1999, p. 67 – 85), a modelagem matemática pode ser implementada em sala de aula, definindo-se de diferentes maneiras:

- a modelagem pode servir como motivação para introduzir novos conceitos e/ou aplicar conhecimentos adquiridos anteriormente;

- a escolha de um tema e a formulação do problema não-matemático a ser modelado podem ficar sob responsabilidade do professor ou do aluno;

- a modelagem pode estar integrada a um programa pré-determinado ou pode se constituir numa atividade extra; e assim por diante.

Enfim, a organização das atividades de modelagem depende em muito das possibilidades de contexto escolar e do nível de flexibilidade do professor perante o método.

1.4 Interdisciplinaridade da modelagem matemática

A matemática está presente em quase todas as áreas de conhecimento, desta forma não é difícil estabelecer a interdisciplinaridade, característica importante para o desenvolvimento do processo ensino-aprendizagem, de forma dinâmica e mais eficiente.

Assim, a modelagem matemática pode ser considerada como uma das ferramentas didáticas que promove a interdisciplinaridade.

De acordo com Fazenda (2001, p. 24),

> A interdisciplinaridade nomeia um encontro que pode ocorrer entre seus – inter – num certo fazer – dade - a partir da direcionalidade da consciência, pretendendo compreende o objeto, com ele relacionar-se comunicar-se. Assim, interpretada, esta supõe um momento que a antecede qual seja a disposição da subjetividade, atributo exclusivamente humano de perceber-se e presentificar-se, realizando nessa opção um encontro com – o – outro, a inter-subjetividade.

Partindo do pressuposto de que fazer pesquisa no campo interdisciplinar significa a busca da construção coletiva de novos conceitos, de novos conhecimentos, torna-se imprescindível estabelecer e enquadrar a modelagem matemática neste universo interdisciplinar.

O professor não pesquisador na sua grande maioria considera a natureza e seus fenômenos como algo distante de nós. Assim, forma-se na mente dos nossos alunos uma concepção de mundo fragmentada, desconexa, estão o maior efeito deste quadro é a incompreensão da totalidade, prevalecendo a visão cartesiana, pontual dos fenômenos que nos norteiam. Desta forma, a modelagem matemática apresenta-se como um meio para a mudança, quebra de paradigmas, estabelecendo-se assim uma nova visão de mundo no campo interdisciplinar.

2 FLORESTA DE ARAUCÁRIAS

2.1 Florestas de araucárias no Brasil

No Brasil a floresta de araucária, e/ou chamada de mata de araucária, pinhal, ou pinheiro do Paraná a *Araucaria angustifólia*[1], em 2004, ocupava cerca de 196.900 km² do território brasileiro, com grandes extensões contínuas no Rio Grande do Sul, Santa Catarina e Paraná. Também encontrada nos pontos mais alto da Serra do Mar em São Paulo e da Serra da Mantiqueira entre Minas Gerais e Rio de Janeiro, em lugares como Monte Verde e Campos do Jordão, por serem locais altos, o clima tem em média 19ºC por ano. (SANTOS, 2005).

Em Santa Catarina segundo Calmon (2004, p. 9), a Floresta Ombrófila Mista, também chamada de Floresta com Araucárias, Mata dos Pinhais, ou Mato de Araucárias "recobria originalmente 40.807km² de extensão ou 42,5% da vegetação original do Estado, constituindo assim, sua principal tipologia florestal".

> Pouco mais de um século de exploração econômica sem planejamento levaram essa rica e singular floresta a uma situação de visível decadência biológica. No território catarinense assim como no Paraná e Rio Grande do Sul, e os outros estados que acolheram grandes extensões desse ecossistema, são evidentes os reflexos da excessiva e irracional exploração da madeira de suas principais espécies arbóreas. A fisionomia primitiva da Floresta com Araucária no Estado foi substituída em sua maior parte, por pastagem e reflorestamentos homogêneos feito com espécies exóticas. Os remanescentes florestais nativos que hoje perfazem entre 1 e 2% da área original em Santa Catarina, são de reduzidas dimensões, encontram-se isoladas e com evidentes alterações estruturais (florestas com Araucárias, João de Deus Medeiros). (CALMON, 2004, p. 9).

Estudo do Ministério do Meio Ambiente (2000) nos mostra que "em todo o país a Floresta com araucárias recobre hoje aproximadamente 5% de sua área original, dos quais irrisórios 0,7% poderiam ser considerados como áreas primitivas".

---

[1] Como dito, o pinheiro-do-Paraná ou *Araucaria angustifolia* é espécie característica das regiões altas, chamadas de Serras, sendo uma espécie heliófila, que germina em áreas abertas podendo chegar a 50 metros de altura.

Para Medeiros *et al*. (2004, p. 15) caracteriza-se por ser um extrato arbóreo superior, “denominado *Araucaria angustifolia*, o pinheiro-brasileiro ou simplesmente araucária. Confere á floresta um desenho exclusivo, associado ao clima mais seco e frio principalmente nas regiões serranas e planaltos”.

Árvore alta, exuberante, que chega a alcançar 50 metros de altura, cujo tronco atinge diâmetro superior a dois metros, *Araucaria angustifolia* é uma das coníferas existentes nas florestas subtropicais da América do Sul. (Id.).

O pinheiro brasileiro apresenta valores, de abundância dinâmica, dominância e freqüência bem superiores das demais espécies, chegando a responder por mais de 40% dos indivíduos arbóreos dessa formação. (CALMON, 2004, p. 7).

É importante ressaltar que com o avanço da fronteira econômica sobre as vastas regiões cobertas por florestas de araucárias e sua conseqüente destruição, Medeiros *et al*. (2004, p. 21 - 22) comentam que:

> [...] ao longo do século XX, motivado pelas virtudes comerciais do pinheiro brasileiro (A*raucarias angustifolia*). Nas primeiras cinco décadas do século passado, milhões de metros cúbicos de araucárias foram embarcados para os estados mais industrializados do Brasil, e para vários outros países. Essa história teve marco inicial com a eclosão da primeira guerra mundial que ao bloquear a comercialização de uma espécie de pinheiro da Letônia, suscito a ploriferação de serrarias nos estados do Paraná e Santa Catarina, instalados para abastecer alguns dos principais centros consumidores de madeira do mundo. (Frederico Carlos Hoehene, 1920, Araucarilândia). [...] a empresa South Brazilian Lumber and Colonisation Comp. Ltda. [...]. Valendo-se de maquinário moderno para a época o que lhe proporcionava maior produção e, portanto, condições para avançar com rapidez sobre os estoques naturais de araucárias, a empresa que controlou com mão-de-ferro a extração e o transporte de madeiras em toda a região, transformando-se no maior empreendimento madeireiro da América Latina. Estima-se que tenha derrubado 15 milhões de pinheiros além de milhões de outras espécies, durante seus 40 anos de operação.

No Paraná os projetos de colonização instalados pelo governo federal e por companhias privadas, a partir da década de 1940, aceleraram a eliminação de extensas florestas de araucárias que recobriam o oeste do estado. Por volta dessa época, as florestas nativas do interior paranaense, foram devastadas para ceder espaço para o avanço das plantações de café, além de uma determinada companhia madeireira obter autorização para cortar mais de 300 mil pinheiros. (MEDEIROS *et al*., 2004, p. 23).

Seguindo o pensamento do mesmo autor (MEDEIROS *et al.*, 2004) comenta que o relatório apresentado pela rede de viação Paraná – Santa Catarina informam que na década de 30 e início da década de 40, as florestas do Planalto Catarinense eram responsáveis por mais da metade das exportações de madeira do país, abastecendo mercados da América do Sul e da Europa.

As florestas são recursos renováveis, mas devem ser plantados ou permitir a regeneração natural, o que historicamente não ocorreu.

Medeiros *et al.* (2004, p. 24) exemplifica que no ano de 1948, um documento do Instituto Nacional do Pinho, criado pelo presidente Getulio Vargas para zelar pela economia vinculada à exploração da araucária, relatava haver 2.800 serrarias em operação nos três estados do sul do Brasil, a maior parte extraindo e beneficiando exclusivamente o pinheiro brasileiro.

2.2 Floresta de araucárias em Santa Catarina

No Estado de Santa Catarina as florestas de Araucária abrangem 95.985 quilômetros quadrados estão inscritos no domínio da mata Atlântica, na região sul do país (MEDEIROS *et al.*, 2004, p. 27).

Originalmente, 85% de seu território ou 81.587km, estavam cobertos por fisionomias florestais e os 15% restantes, por outras formações. (Mapa de vegetação do Brasil, do IBGE, 1993, a cobertura florestal do estado).

Nesse ecossistema, a Floresta Ombrófila Mista, ou seja, a mata de araucária e suas companheiras que compõem o extrato inferior correspondia a 40.807 km do território de Santa Catarina, o que representava 42,5% da vegetação do estado constituindo sua principal tipologia florestal, sua marcante presença na paisagem catarinense contribui para modelar de forma original a cultura regional, fazendo do pinheiro brasileiro e de outras espécies características desse ecossistema, temas de canções, da literatura e de festas populares, influenciando inclusive a culinária local (CALMON, 2004, p. 9).

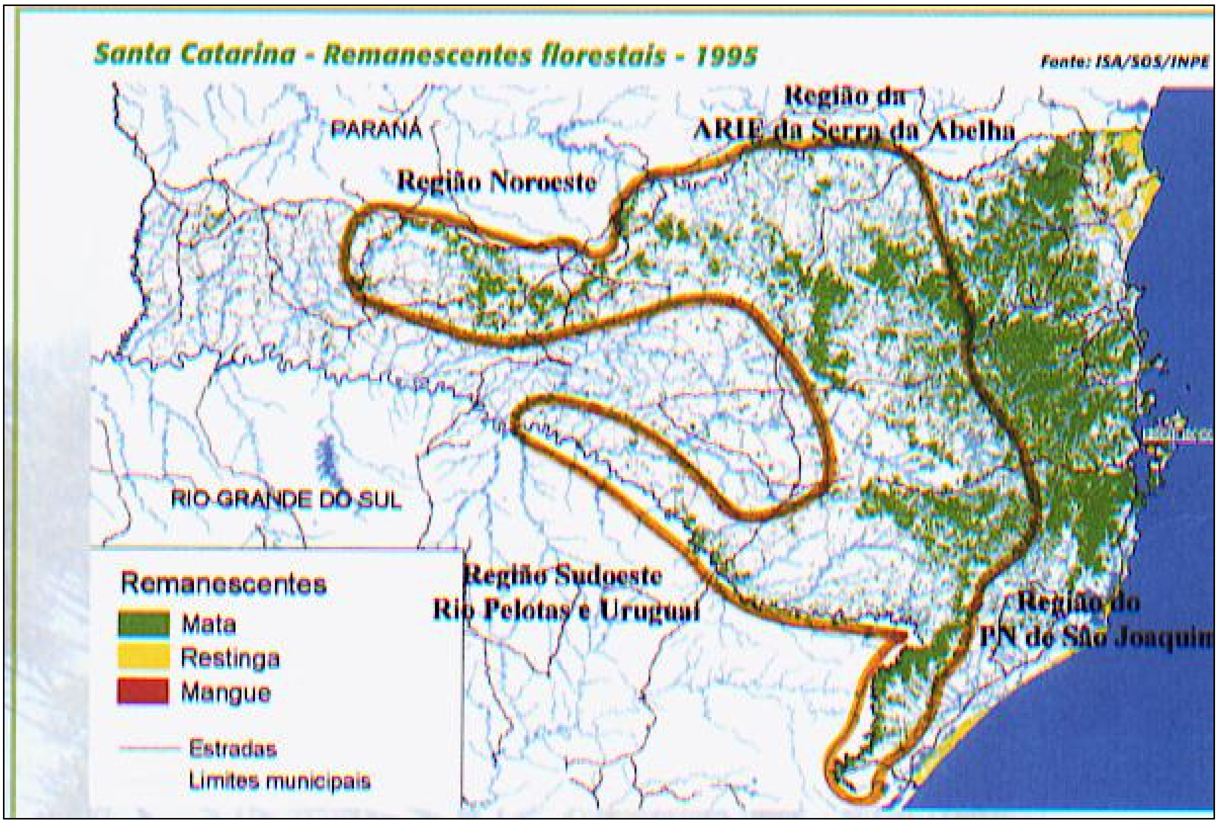


Figura 2 Regiões de floresta com *Araucaria angustifolia* no Estado de Santa Catarina.
Fonte: APREMAVI (2004, p. 10).

A floresta de araucária está em situação critica no estado de Santa Catarina. Levantamento realizado entre 2002 e 2003 por um grupo de trabalho constituído pelo Ministério do Meio Ambiente para identificar áreas para conservação do ecossistema do qual fizeram parte técnicas governamentais, não governamentais e pesquisadores da Universidade Federal de Santa Catarina constatou que em poucos anos, essa tipologia florestal poderá estar definitivamente condenada à extinção, caso não sejam adotadas medidas urgentes para conservar o que resta de sua variabilidade genética (MEDEIROS *et al.*, 2004, p. 27).

Medeiros *et al*. (2004, p. 28 - 29) apresenta que, no planalto catarinense a paisagem está praticamente dominada por plantio homogêneo de *Pinus elliottis*. A maior parte dos remanescentes identificados, com relevância para ações de conservação, está em terras privadas, muitas pertencentes à indústria madeireira, submetida a constantes explorações o que contribui para acelerar seu empobrecimento genético.

Tal situação é agravada pelo fato da floresta com araucária em Santa Catarina estar insuficientemente representado em unidades de conservação. Se forem somadas as áreas protegidas nacionais, estaduais, municipais e particulares existentes no Estado, apenas 2,6%

de todas as fisionomias que integram o domínio da mata Atlântica, incluindo a Floresta Ombrófila Mista (MINISTÉRIO DO MEIO AMBIENTE, 2000).

A floresta com Araucária em Santa Catarina, têm sofrido muitas críticas sobre a situação e decisões que determinaram a suspensão da extração do pinheiro-brasileiro e de outras espécies ameaçadas de extinção presente nesse ecossistema. No entanto não tiveram como efeito a paralisação das pressões sobre seus remanescentes.

Medeiros *et al*. (2004, p. 33), comenta que "nos últimos anos, vários levantamentos realizados por órgãos governamentais ou por entidades da sociedade civil constataram desmatamentos autorizados em Floresta com Araucária no Estado, flagrantemente ilegais".

Em novembro de 2002, ambientalistas da Associação de Preservação do Meio Ambiente do alto Vale do Itajaí (APREMAVI), realizaram um levantamento na região noroeste de Santa Catarina, registraram imagens de derrubada ilegal de madeiras de espécies ameaçadas de extinção nos municípios de:

> Passos Maia, Abelardo Luz e Ponte Serrada, região como se viu, onde estão fragmentos considerados relevantes, pelo Grupo de trabalho do Ministério do Meio Ambiente, para a conservação do ecossistema. Além do corte raso de espécies ameaçadas, os ambientalistas constataram outras ilegalidades, como remoção de floresta em área de preservação permanente o que contraria a Lei 4.771/65, o chamado Código Florestal (MEDEIROS *et al*., 2004, p. 33).

A exploração de espécies ameaçadas de extinção em Santa Catarina, e a *Araucaria angustifolia* constar na lista oficial dessas espécies desde 1992 sua exploração esta suspensa por decisão judicial através da Resolução nº 278/01, do CONAMA, que suspende a autorizações para o corte e exploração dessa e de outras espécies ameaçadas, com finalidades comerciais, continua sendo praticada, contrariando a legislação ambiental.

As principais causas de desmatamento em Santa Catarina, segundo Medeiros *et al*. (2004, p. 34) são:

> a) exploração madeireira por meio de planos de manejo autorizados por órgãos governamentais; b) expansão de monoculturas de pinus e eucaliptos; c) instalação de assentamentos rurais em área de floresta; d) expansão de atividades agropecuárias em pequenas, médias e grandes propriedades e nos casos específicos dos ricos

> fragmentos identificados nas fazendas Guamirim-Gateado[2] e Madalena, no planalto catarinense, há a iminência do enchimento do lago da Usina Hidrelétrica (UHE) Barra Grande, cujo processo de licenciamento apresenta irregularidades.

A permanência dessa situação foi constatada pela Operação Araucária, deflagrada pela administração do Ibama em Santa Catarina, Medeiros et al (2004, p. 35):

> [...] em abril e novembro de 2003. Nesse período, os agentes do órgão apreenderam 375 metros cúbicos de madeira extraída ilegalmente, lavrando 45 autos de infração[3] que resultaram em R$ 2.191.860,20 em multas. Em novembro, a imprensa catarinense anunciou que, em um mês de operação, os ficais do Ibama identificaram cerca de 1,1 mil hectares de matas nativas destruídas – área equivalente a quase 1.300 campos de futebol -, somente no município de Santa Cecília. Apurou-se na ocasião que a maioria dos desmatamentos identificados naquela oportunidade, embora irregulares , haviam sido autorizados pelos escritórios de órgãos estadual de meio ambiente, a FATMA, de Lages e Canoinhas.

A extração seletiva de espécies florestais nobres da Mata Atlântica tem sido realizada de forma predatória, em quantidades muito acima da capacidade de auto-regeneração dessas espécies (MINISTÉRIO DO MEIO AMBIENTE, 2000).

A exploração de madeira autorizada sob o pretexto de "manejo sustentável" vem, na prática, exaurindo os últimos remanescentes de florestas com ocorrência da araucária (MEDEIROS, 2004, p. 37).

Isto acontece porque os planos de manejo apresentados carecem de embasamento técnico e científico e por que não são fiscalizados pelos órgãos competentes após sua implantação (CALMON, 2004).

Para Medeiros (2004), as florestas manejadas tornam-se empobrecidas, já que os melhores indivíduos de cada espécie são preferencialmente abatidos, e não raramente os proprietários acabam suprimindo a vegetação restante para o plantio de pinus, eucalipto e

---

[2] A fazenda tem 7.547 mil hectares com reflorestamento e foi fundada em 1899 e desde 2001 foi transformada em uma empresa jurídica e trabalha com 100% de florestas plantadas, sendo que 6.844,30 hectares são de pinus plantados. Atualmente, sua diretoria vem investindo no plantio de eucaliptos, como forma de diversificar suas atividades. Para cuidar desta área, existem 180 funcionários diretos e cerca de outros 140 de empresas terceirizadas. Para não compactar o solo, a colheita é feita através da tração animal e o preparo da terra é feito manualmente. A Gateados foi a primeira fazenda da região a fazer um reflorestamento de araucária, isto no ano de 1978 (SERRA EM DESENVOLVIMENTO, 2006, p. 15).

[3] Auto de infração: Documento (formulário), lavrado e assinado pela autoridade a pessoa que comete a infração, no qual descreve o ato ou o fato constitutivo da transgressão e qualifica o infrator que, através dele toma conhecimento da instauração de um processo administrativo, contra si para apuração de sua responsabilidade (BARRETO, 2005, p. 1)

outras culturas, subtrair de modo a extrair maior rentabilidade da área no curto prazo. Essa modalidade de exploração está por trás da acentuada erosão genética, em especial de espécies já oficialmente consideradas ameaçadas de extinção, comprometendo gradativamente as dinâmicas envolvidas no processo de sucessão e de regeneração natural das florestas degradadas nos arredores desses fragmentos.

> O abate ilegal de madeiras em remanescentes desse ecossistema acaba se valendo da cumplicidade de servidores de órgãos governamentais somada a brechas na normatização do setor. Uma dessas brechas é o artigo 2º da própria Resolução nº 278/01, que permite a exploração de árvores mortas, num volume máximo de até 15 metros cúbicos dentro de um período de cinco anos, desde que solicitado por pequenos proprietários para finalidades não comerciais. No entanto, empresas madeireiras – que obviamente não são pequenos proprietários – têm obtido autorização do Ibama ou do órgão estadual de meio ambiente para corte e transporte de madeiras de espécies ameaçadas – evidente com fins comerciais (MEDEIROS, *et al.*, 2004, p. 36).

No Paraná, autorizações com base nessa exceção aberta pela resolução do Conama também tem sido constatadas.

Às atuais restrições à exploração de espécies ameaçadas, fez uso também da Instrução Normativa nº 1, editada pelo Ministério do Meio Ambiente em 05 de abril de 1995, revogada em 15 de maio de 2002 com a edição da Instrução Normativa nº 8. Essa medida liberava a exploração de espécies madeireiras, mesmo que sob ameaça da extinção, desde que o interessado declarasse ao órgão ambiental tratar-se de árvores plantadas.

Medeiros *et al.* (2004, p. 37) comenta que:

> Essas autorizações ou informações de corte precisavam estar assinadas por responsáveis técnicos, normalmente engenheiros florestais pagos pelos interessados; porém os dados contidos nesses documentos não eram conferidos *in loco* pelos funcionários do Ibama.

Ainda o mesmo autor Medeiros *et al.* (2004, p. 37) apresenta um levantamento feito pelas Organizações não Governamentais (ONGs) catarinenses:

> No primeiro semestre de 2004, constatou que, entre 2001 e 2003, foram protocolados, nos escritórios regionais do Ibama em Chapecó, Caçador, Rio do Sul e Joinville, 1.300 informações de corte de árvores supostamente plantadas, equivalente a 380.145,62 metros cúbicos, com base no que dispunha a instrução

> Normativa n. 1. Das 946.723 árvores cujos abates foram comunicados ao Ibama no período, 88,9% era araucárias. Uma checagem de campo, realizada pelo Ibama em dois municípios, tendo como base as informações coletadas pelas ONGs, concluiu que todas as 35 informações de corte protocoladas continha dados falsos, ou seja, não se referiam a árvores plantadas, mas a exemplares de mata nativa.

Esse levantamento detectou, ainda, que a utilização desse artifício por madeireiros foi intensificado a partir de 2003, quando a fiscalização sobre as autorizações concedidas com base no art. 2º da Resolução nº 278/01 do Conselho Nacional do Meio Ambiente:

> A exploração eventual, sem propósito comercial direto ou indireto, de espécies da flora nativa ameaçadas de extinção, para consumo nas propriedades rurais ou posses de novos indígenas e populações tradicionais poderá ser autorizada quando não houver possibilidade de uso de outras espécies e desde que respeitadas as seguintes diretrizes:
> I – retirada não superior a quinze metros cúbicos por propriedade ou posse no período de cinco anos;
> II – prioridade para o aproveitamento de exemplares de árvores mortos ou tombadas por causas naturais;
> III – retirada não superior a vinte por cento do estoque dos exemplares adultos.

A partir da resolução 278/01, em seu art. 2º tornou-se mais rigorosa, deixando claro, que a Instrução Normativa n. 1, do Ministério do Meio Ambiente, tinha se convertido em uma alternativa adotada pelos exploradores de araucárias e de outras espécies ameaçadas.

O relatório Serra em Desenvolvimento (2006, p. 15) quando trata de manejo sustentável:

> Na Serra Catarinense empresas como a Madepar, Klabin, Battistela, só para citar algumas, têm no manejo florestal uma importante ferramenta para conquistar maior espaço no mercado externo. Mas sem dúvida ao se falar de modelo de gestão, com manejo adequado, uma referência está no município de Campo Belo do Sul, é a Florestal Gateados. No local existe uma real preocupação em realizar uma exploração madeireira que garanta as gerações futuras, algo a preservar.

O manejo da floresta garante a cobertura florestal da área, retém a maior parte da diversidade vegetal original e pode ter impactos pequenos sobre a fauna, se comparado à exploração não manejada (SERRA EM DESENVOLVIMENTO, 2006, p. 15).

Para uma melhor produção, com menor impacto ambiental a Florestal Gateados, criou regras que permitam a exploração sustentável da matéria-prima, o Manejo Florestal[4].

Figura 3 Araucárias: paisagem típica da Região Sul

Fonte: Região Sul do Brasil (2005).

[4] "Na realidade o manejo é um conjunto de técnicas empregadas para colher cuidadosamente parte das árvores grandes de tal maneira que as menores, a serem colhidas futuramente, sejam protegidas. Com a adoção do manejo a produção de madeira pode ser contínua ao longo dos anos.

Um plano de manejo pode ser organizado em três etapas. Na primeira, faz-se o zoneamento ou divisão da propriedade florestal em áreas exploráveis; áreas de preservação permanente e áreas inacessíveis à exploração. A segunda etapa consiste no planejamento das estreadas secundárias que conectam a área de exploração às estradas primárias. Na terceira etapa, divide-se a área alocada para exploração em blocos ou talhões de exploração anual.

O plano de manejo define como a floresta será explorada, o que inclui o zoneamento da propriedade distinguindo as áreas de exploração, as zonas de preservação permanente e os trechos inacessíveis. Em seguida planeja-se a rota das estradas secundárias e divide-se a área total de manejo em talhões de exploração anual. Por último, define-se a seqüência de exploração do talhão ao longo do tempo. Esta medida visa reduzir os impactos da exploração madeireira sobre a fauna e aumentar a proteção da floresta contra o fogo" (SERRA EM DESENVOLVIMENTO, 2006, p. 15).

Quadro 1 Número da Florestal Gateados

Área	Hectares
Área de preservação permanente	3.411,28
Área de mata nativa	10.434,74
Área de *pinus spp*	6.844,30
Área de *eucalipto spp*	124,90
Área com araucária	535,30
Área com erva-mate	18,00
Área com outras coníferas	24,50

Fonte: Serra em Desenvolvimento (2006, p. 15).

Visando operacionalizar um trabalho através da troca de experiência e implantação de pesquisa a empresa Florestal Gateados Ltda, procura desenvolver um trabalho voltado à introdução de novas espécies florestais (Quadro 1), sempre preservando a diversidade e utilizando técnicas adequadas, porém mantendo 50% de suas áreas com cobertura de essências nativas tornando-se uma das maiores concentrações da biodiversidade da região serrana, destacando-se por possuir uma das maiores reservas de araucária e priorizando o desenvolvimento da cultura regional.

Salienta-se que além das florestas nativas a empresa adquiriu uma floresta de araucária plantada em 1966, além dos demais plantios que realizou nos anos de 1978 a 1980 e 1985, em diferentes áreas da propriedade, seguindo os critérios e normas ambientais.

3 A PESQUISA

A pesquisa foi desenvolvida com os acadêmicos da terceira fase do curso de Ciências da Computação das Faculdades Integradas da Rede de Ensino UNIVEST (FACVEST) do primeiro semestre de 2006 da disciplina de Cálculo II. A turma foi constituída por 38 alunos dos quais 31 eram do sexo masculino e 07 do sexo feminino.

As aulas foram ministradas às segundas-feiras das 18 h 40 min às 20 h 20 min, e também às quintas-feiras, das 19 h 30 min às 20 h 20 min.

Alunos de outras fases do curso de Ciências da Computação constituíram também os referidos grupos, alunos estes que não foram aprovados no devido tempo, portanto repetentes da referida disciplina.

3.1 Problema

São dois os problemas relacionados com a pesquisa.

1º) A utilização da modelagem matemática como estratégica para a aprendizagem do cálculo diferencial e integral.

2º) O estudo do cálculo diferencial e integral com a utilização de um problema regional no caso da pesquisa o quadro atual da floresta de *Araucaria angustifolia* no planalto catarinense.

3.2 Objetivos

3.2.1 Objetivo geral

Investigar como educandos do cálculo diferencial e integral podem ter um melhor entendimento desta disciplina a partir da modelagem matemática utilizando questões ligadas a sua região. Tendo assim, um outro olhar para as metodologias e recursos didáticos pedagógicos no cotidiano de sala de aula.

3.2.2 Objetivos específicos

— Definir as relações entre as variáveis obtidas conforme levantamento em campo relacionados com a *Araucaria angustifolia* na região de Lages – SC.

— Verificar se estudantes de matemática após a apropriação do conhecimento a cerca da modelagem matemática, apresentam condições de aplicá-la em determinado problema de sua região.

— Investigar que tipo de entendimento os estudantes de matemática apresentam sobre questões regionais oriundos dos fenômenos que nos cercam transformando-os em linguagem matemática.

— Mostrar aos estudantes de cálculo a interdisciplinaridade da modelagem matemática, a qual pode interagir com outras ciências não sendo esta uma tendência em educação matemática isolada do contado dos estudos dos problemas regionais.

— Investigar a partir da modelagem matemática, o desempenho dos alunos em aplicar o cálculo diferencial e integral segundo o problema regional processo de extinção da *Araucaria angustifolia*.

4 METODOLOGIA

4.1 Tipo de pesquisa

O presente trabalho é do tipo pesquisa qualitativa porque se propôs a verificar qual foi o entendimento que os alunos obtiveram do cálculo diferencial e integral após a aplicação da modelagem matemática no estudo de situações conforme seu contexto regional.

Segundo Borba (2004, p. 104) "o qualitativo engloba a idéia do sujeito, possível de expor sensações e opiniões. O significado atribuído a essa concepção de pesquisa também engloba noções a respeito de percepções de diferenças e semelhanças de aspectos comparáveis de experiências".

Concorda-se com essa idéia, pois as investigações da concepção e do comportamento do aluno de cálculo no estudo de situações ligadas a sua região mediante a modelagem matemática, enquadram-se num contexto de exposições de opiniões, percepção das variáveis relacionadas com o tema, tendo em vista a análise e interpretação de aspectos ligados à realidade, para isso é fundamental considerar as sensações e percepções do aluno.

A pesquisa apresenta uma abordagem qualitativa, pois a investigação e observação relacionada com o aluno e a aplicação da modelagem matemática em questões regionais em sala de aula, possibilita o contato pessoal do professor com os alunos envolvidos na pesquisa em relação ao fenômeno estudado.

Segundo Lüdke (1986, p. 26), "usada como o principal método de investigação qualitativa ou associada a outras técnicas de coleta, a observação possibilita um contato pessoal e estreito do pesquisador com o fenômeno pesquisado, o que apresenta uma série de vantagens. Em primeiro lugar, a experiência direta é sem dúvida o melhor teste de verificação da ocorrência de um determinado fenômeno".

Somos conscientes que na maior parte das pesquisas qualitativas a coleta de dados é semelhante a um funil, segundo Lüdke (1986, p. 46),

> a fase inicial é mais aberta, para que o pesquisador possa adquirir visão bem ampla da situação dos sujeitos do contexto e das principais questões do estudo. Na fase subseqüente, no entanto, passa a haver um esforço de focalização progressiva do estudo, isto é, uma tentativa de delimitação da problemática focalizada, tornando a coleta de dados mais concentrada e mais produtiva.

É importante, portanto, que o pesquisador juntamente com os alunos tenham critérios ao definir as variáveis importantes na formulação dos modelos, para que não caiam no erro de achar que tudo é importante.

O que é uma tendência neste tipo de pesquisa, assim poder-se-á definir uma coleta de dados coerente e mais produtiva.

Os dados foram levantados nos campos de Lages – SC, onde se encontra, ainda um número relativo de espécies, dados estes levantados pelos alunos do curso de Ciências da Computação da FACVEST, 3ª fase da disciplina de cálculo II.

Ainda, para a coleta de dados foram utilizados, instrumentos como levantamento bibliográfico em revistas indexadas ligadas à área do conhecimento, artigos eletrônicos em sites respeitados, saídas de campo para o levantamento prévio do objeto de estudo, resultando em um diário de bordo, bem como, os acadêmicos foram orientados a seguirem esses mesmos passos de busca de referenciais e de dados, o que resultou em relatórios mensais.

Os modelos foram definidos em sala de aula a critério dos próprios alunos que definiram as variáveis relacionadas com a espécie.

4.2 Controle das informações

Os encontros, sem exceção, foram registrados através de um diário de bordo e também pelos relatórios elaborados pelos alunos ao longo do desenvolvimento da pesquisa.

Os referidos relatórios foram constituídos por questões como: Quais os aspectos, elementos ou observações apontadas pelo grupo conforme os encontros dos componentes?; Citação das dificuldades do grupo na elaboração do modelo matemático conforme o tema sugerido; Apresentação semanal da constituição e modificações para ajuste do modelo; Apresentação de registros por fotos (ver apêndices) e algumas gravações. Houve também, além das gravações, filmagens realizadas principalmente durante o primeiro encontro da turma, ou seja, na aula de campo realizada em uma das fazendas da região.

A pesquisa foi desenvolvida conforme as etapas:

1ª) Apresentação no dia 27/02/2006 do conteúdo programático do cálculo II, segundo projeto pedagógico do curso de Ciências da Computação das Faculdades Integradas da Rede de Ensino UNIVEST (FACVEST). Após apresentação deste, sugeri a turma que desenvolvesse os conteúdos segundo a ementa com auxílio de matemática aplicada, isto é, não desenvolver os conteúdos somente com o conhecimento de técnicas de integração, mas que estas técnicas pudessem ser utilizadas no estudo da araucária, por exemplo, espécie esta conhecida na região serrana de Santa Catarina.

A aplicação matemática desta pesquisa será delineada pela modelagem matemática.

2º) Durante o mês de março realizei revisão relacionadas ao cálculo I englobando teoria de limites, derivação de funções, máximos e mínimos de funções e integrais indefinidas.

3º) No dia 01/04/2006 realizei aula de campo (ver fotos Anexos) com o objetivo de apresentar aos alunos a modelagem matemática como estratégica metodológica no estudo de questões reais que nos rodeiam e também para que os alunos mantivessem contato direto com a araucária, nosso elemento de pesquisa.

Neste dia, convidei a professora Msc. Rita de Cássia Chaves, Bióloga e Mestre em Modelagem Matemática, que falou sobre a importância da modelagem matemática no estudo de estruturas biológicas de espécies arbóreas. Falou também dos aspectos gerais relacionados com a *Araucaria angustifolia*.

Nesta aula, tivemos também o professor MSc João Couto, Mestre em Modelagem Matemática, que falou sobre o caráter interdisciplinar da modelagem matemática como também de todas as etapas que a constitui.

A participação destes professores foi fundamental ao grupo de alunos, tais palestras auxiliaram na escolha dos temas a serem desenvolvidos pelos nove grupos de pesquisa que constituem a 3º fase do curso de Ciências da Computação, presentes na ocasião (ver lista de presença, Anexos).

Nesta mesma aula, foram sugeridas pelos alunos os seguintes temas para pesquisa, como segue-se:

a) modelo matemático do crescimento médio de x árvores em função do tempo;

b) modelo matemático do cálculo do volume de troncos de altura h;

c) modelo matemática de quantidade de casca do tronco com altura h;

d) modelo matemático da curva dos galhos de araucárias adultas;

e) modelo matemático para a determinação da altura das araucárias.

Os demais grupos não definiram os temas alegando dúvidas e insegurança, isto ocasionado pelo grande número de informações em relação à espécie na referida aula de campo.

4º) As aulas de cálculo, na 3ª Fase de Ciências da Computação, eram ministradas às segundas-feiras das 19 h 40 min às 20 h20 min e também às quintas-feiras das 19 h 30 min às 20 h 20 min. Na aula do dia 03/04/2006, orientou-se os grupos em relação ao desenvolvimento da pesquisa em sala de aula inserindo os conhecimentos do cálculo conforme o tema escolhido, como relacionar a teoria nos modelos a serem desenvolvidos pelos alunos mediante as mais diversas formas de procedimento para tal, salientando aos mesmos da liberdade na utilização de bibliografias, artigos, software no ajuste de curvas e interpretação gráfica.

5º) Para dar base aos alunos na utilização do programa Excel para o ajuste de curvas, foi realizado um curso de 4 horas com o professor Msc. João Couto, professor de cálculo diferencial e integral das Faculdades Integradas UNIVEST em Lages – SC. O curso foi desenvolvido em horário extra, ou seja, no sábado, dia 08/04/2006 das 08 hs às 12 hs no laboratório número 1 da referida instituição. O referido curso foi realizado a pedido dos próprios alunos, após informações passadas da possibilidade do ajuste dos pontos das curvas por intermédio do uso de Software, pois resolvem realizar estes ajustes em laboratório.

6º) Durante as aulas do mês de Abril, trabalhou-se com o conceito de integração e suas regras (integral indefinida), logo passou-se a definição de integral definida. A partir destas aulas, começou a surgir os primeiros modelos matemáticos pelos grupos.

7º) Como todas as dúvidas não foram sanadas durante as aulas semanais pela exigüidade do tempo, houve a orientação dos grupos em horários agendados nos sábados no período vespertino do mês de maio. As dúvidas pelos alunos foram as mais diversas como: quais variáveis devem ser consideradas na construção dos modelos: a) qual a taxa de variação presente no fenômeno estudado; b) como resolver uma equação diferencial de 1ª ordem; c) como fazer o ajuste de curvas e porque fazer.

8º) Nas datas de 19, 26 de junho e 3 de julho de 2006 ocorreu a apresentação dos trabalhos pelos grupos. As apresentações foram definidas conforme sorteio realizado no dia 12 de junho em sala de aula.

Além da apresentação com a utilização de equipamento de Multimídia, os alunos foram orientados a entregar um trabalho escrito contendo todos os passos desde o início da construção do modelo até sua conclusão, neste trabalho foi exigido também fotografias relacionadas aos momentos do desenvolvimento da pesquisa.

5 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Os modelos desenvolvidos pelos grupos apresentam-se neste capítulo. Os mesmo foram analisados apresentando o devido relato do desenvolvimento bem como reflexões que consideram importantes para conclusão final deste trabalho.

Os gráficos a seguir apresentam informações mais detalhadas da turma participante da pesquisa, os quais apresentam dados sobre sexo, a formação no ensino médio, idade e também o percentual dos alunos que cursaram esta disciplina pela segunda vez, como também o índice de alunos que já fizeram leitura de alguma bibliografia relacionada com matemática aplicada, especialmente ligada à modelagem matemática.

Os dados foram levantados segundo a aplicação de questionário (ver apêndice...).

Gráfico 1 Sexo

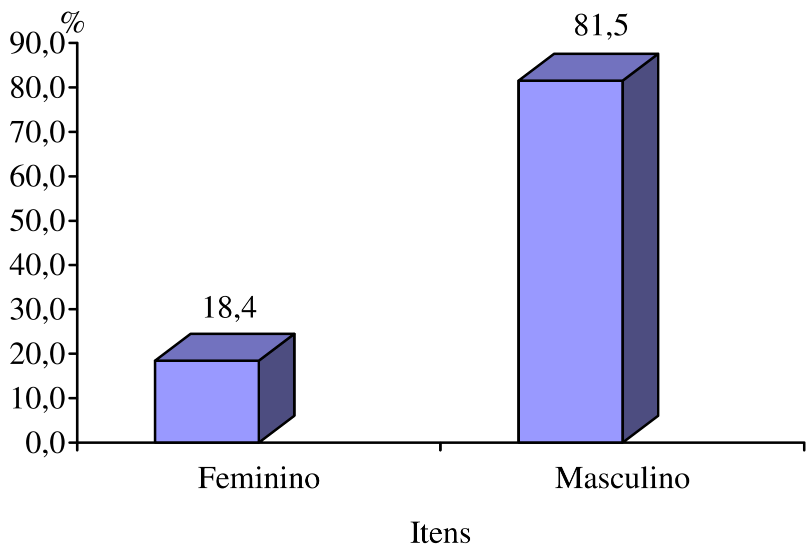


Gráfico 2 Formação escolar ensino médio

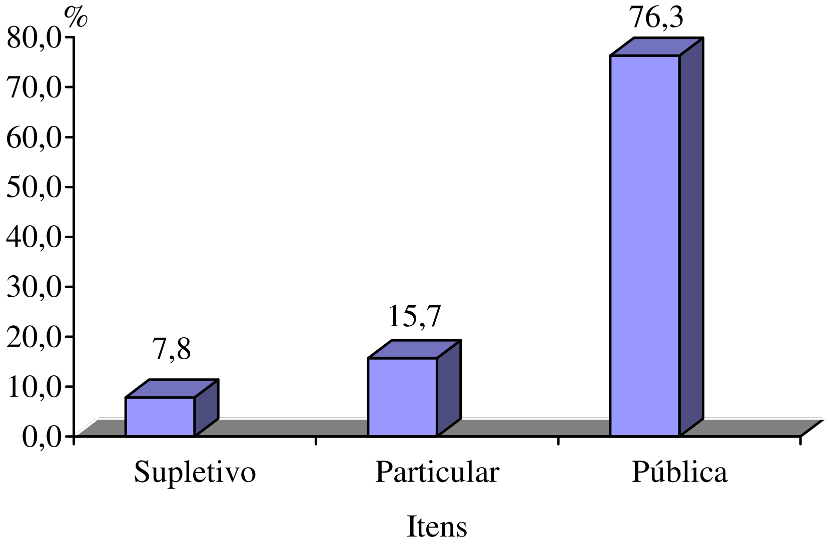


Gráfico 3 Idade

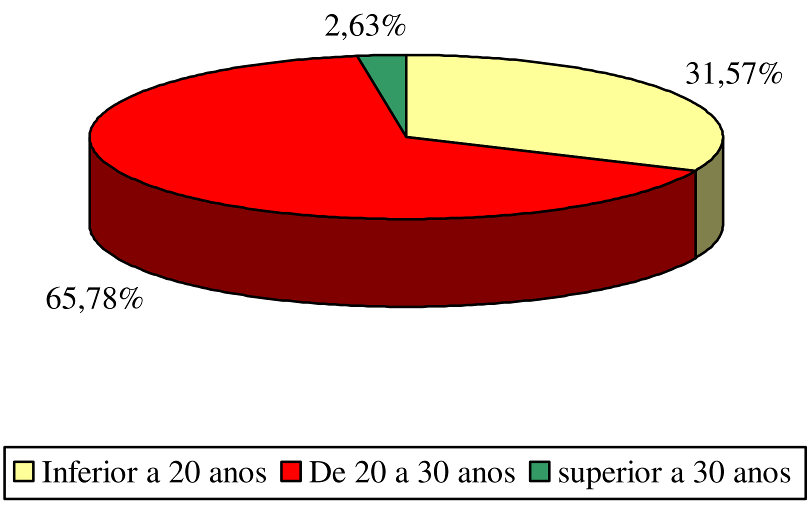
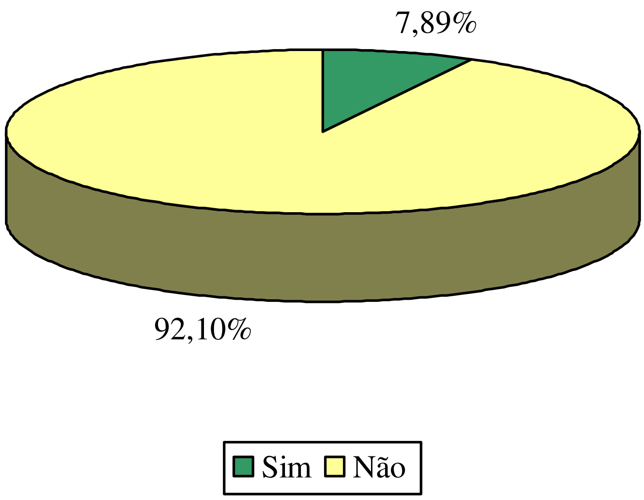


Gráfico 4 Leitura sobre modelagem matemática



5.1 Modelos matemáticos desenvolvidos pelos alunos

5.1.1 Grupo 1: Modelo matemático do crescimento da espécie em função da idade

Figura 4 Componentes do grupo 1

Este grupo composto por quatro acadêmicos apresenta o melhor desempenho, determinado em função do interesse, motivação e dedicação, pois a cada encontro apresenta sugestões durante as discussões na organização e definição do modelo matemático relacionado ao crescimento da espécie em função da idade. Um dos componentes deste grupo em comum acordo sobre a definição do que modelar em relação à araucária, apresentou uma tabela de produção ligada à *Araucaria angustifolia*.

A tabela 1 apresenta dados sobre a idade, número de árvores, altura média e volume total.

Tabela 1 – Produção (*Araucaria angustifolia*)

Idade (anos)	Altura Dominante (m)	Número árvores	Altura média (m)	Volume Total (m³)
4	5,4	990	4,7	9,0
5	6,7	990	5,8	19,6
6	7,9	990	6,9	33,7
7	9,0	990	7,8	50,5
8	10,0	989	8,7	68,9
9	10,9	988	9,4	88,4
10	11,7	986	10,1	108,5
11	12,5	984	10,8	128,6
12	13,2	979	11,4	148,5
13	13,8	974	11,9	167,7
14	14,4	966	12,4	186,2
15	15,0	957	12,9	203,6
16	15,5	946	13,3	219,9
17	16,0	934	13,7	234,9
18	16,5	920	14,1	248,5
19	17,0	905	14,4	260,8
20	17,4	889	14,7	271,6
21	17,8	871	15,0	281,1
22	18,2	853	15,3	289,3
23	18,6	834	15,6	296,2
24	18,9	815	15,8	301,9
25	19,3	795	16,1	306,4
26	19,6	775	16,3	309,9
27	19,9	755	16,5	312,4
28	20,2	734	16,7	314,0
29	20,5	714	16,9	314,8
30	20,8	694	17,2	314,8

Fonte: EMBRAPA (2001)
Dados coletados no período de 2001, inventário de uma floresta com 990 árvores de trinta anos na região de Telêmaco Borba/PR.

Os componentes do grupo definiram o tema anteriormente a aula de campo realizada no dia 01/04/2006.

Figura 5 Aula de campo

Figura 6 Aula de campo

A partir de então envolveram-se de forma surpreendente na busca de informações sobre o tema a ser desenvolvido. Além das orientações em sala de aula, foram realizadas orientações em horários extras, principalmente aos sábados.

Figura 7 Aulas de orientações

Segundo os componentes do grupo, o tema em estudo foi previamente estabelecido antes de haver um contato real com a espécie. No primeiro encontro se desperta o senso de orientação entrando em contato com o objeto de estudo, para assim, desenvolver o modelo matemático partindo da obtenção das variáveis a serem levantadas para explicar matematicamente fenômenos reais, comentaram os alunos.

Alegações pelos alunos em relação de que ponto partir foram sucessivas. Em contato direto com a araucária, deu-se início à coleta de informações, organização das etapas a serem explicadas no objetivo de se definir o modelo matemático. O grupo realizou observações interessantes, quando por exemplo, da afirmação de que a fase do levantamento das variáveis trata-se de uma investigação matemática, pois ela se dá por meio de conceitos e idéias ligadas ao tema.

Foram em busca da definição de modelo matemático segundo Bassanezi (1994, p. 31), “um modelo matemático é quase sempre um sistema de equações ou inequações algébricas diferenciais, integrais, etc., obtido através de relações estabelecidas entre as variáveis consideradas essenciais ao fenômeno sobre análise”.

Orientados da importância em relatar as dificuldades encontradas no desenvolvimento do trabalho, a maior dificuldade que o grupo encontrou foi a transferência de conceitos matemáticos na fundamentação da modelagem do fenômeno proposto. A modelagem matemática foi entendida no início do trabalho como uma forma de representar fenômenos do mundo real por meio da matemática como também do seu caráter interdisciplinar. Outra dificuldade apresentada pelo grupo foi a de definir quais seriam as variáveis consideradas conforme o fenômeno e como deveriam ser relacionadas.

Na tentativa de orientá-los da melhor forma possível retomei um de nossos encontros o conceito de taxa de variação e resolução de equações diferenciais de primeira ordem, sendo que a definição de integração e técnicas de integração estavam claras aos mesmos, pois eram os assuntos do momento nas aulas de Cálculo II do 1º semestre de 2006.

5.1.2 Da construção do modelo

Sem dúvida, pode-se constatar que a maior dificuldade dos alunos foi a do levantamento das variáveis com o fenômeno do crescimento em função da idade. Este problema foi resolvido a partir da observação detalhada dos dados da tabela 2. Observam a coluna das idades e o comportamento da altura média e concluíram que a relação crescimento em função do tempo fisicamente representava velocidade de crescimento e que quanto maior o tempo (idade) menor era a velocidade de crescimento, para tal conclusão usaram alguns dados aleatórios da tabela conforme o exposto.

$$\boxed{v = \frac{\text{altura média}}{\text{idade}}} \Longrightarrow \boxed{v = \frac{dh}{dt}} \longrightarrow \text{Taxa de variação}$$

Tabela 2 – Fenômeno do crescimento em função da idade

Idade (anos)	Altura Média (m)	Velocidade de crescimento (m/a)
4	4,7	-
5	5,8	$v = \dfrac{5{,}8 - 4{,}7}{5 - 4} = 1{,}10\text{m/a}$
6	6,9	$v = \dfrac{6{,}9 - 5{,}8}{6 - 5} = 1{,}10\text{m/a}$
7	7,8	$v = \dfrac{7{,}8 - 6{,}9}{7 - 6} = 0{,}90\text{m/a}$
8	8,7	$v = \dfrac{8{,}7 - 7{,}8}{8 - 7} = 0{,}90\text{m/a}$
9	9,40	$v = \dfrac{9{,}40 - 8{,}7}{9 - 8} = 0{,}7\text{m/a}$

Fonte: Tabela elaborada pelos alunos do grupo 1 em sala de aula, utilizaram dados da Tabela 1.

Procederam desta forma sucessivamente e obtiveram a coluna velocidade média de crescimento em metros por ano conforme tabela 3.

Tabela 2 Modelagem do crescimento da altura da *Araucaria angustifólia* em função da idade

Idade	**Altura média (m)**	**Intervalo idade (ano)**	**Intervalo altura (m)**	**Intervalo idade acumulado**	**Velocidade (m/a)**
4	4,70	-	-	-	-
5	5,80	1	1,10	1	1,10
6	6,90	1	1,10	2	1,10
7	7,80	1	0,90	3	0,90
8	8,70	1	0,90	4	0,90
9	9,40	1	0,70	5	0,70
10	10,10	1	0,70	6	0,70
11	10,80	1	0,70	7	0,70
12	11,40	1	0,60	8	0,60
13	11,90	1	0,50	9	0,50
14	12,40	1	0,50	10	0,50
15	12,90	1	0,50	11	0,50
16	13,30	1	0,40	12	0,40
17	13,70	1	0,40	13	0,40
18	14,10	1	0,40	14	0,40
19	14,40	1	0,30	15	0,30
20	14,70	1	0,30	16	0,30
21	15,00	1	0,30	17	0,30
22	15,30	1	0,30	18	0,30
23	15,60	1	0,30	19	0,30
24	15,80	1	0,20	20	0,20
25	16,10	1	0,30	21	0,30
26	16,30	1	0,20	22	0,20
27	16,50	1	0,20	23	0,20
28	16,70	1	0,20	24	0,20
29	16,90	1	0,20	25	0,20
30	17,20	1	0,20	26	0,20

Fonte: Tabela elaborada após cálculo da velocidade de crescimento médio ano a ano.

Baseados nos dados da tabela 3 concluíram que a velocidade de crescimento é inversamente proporcional ao tempo. Justificaram, assim, a relação $v = \frac{dh}{dt}$. Com esta conclusão compreenderam a relação existente entre as variáveis consideradas na formulação do modelo matemático conforme as apresentadas na figura 8.

Figura 8 Variáveis relacionadas.

5.1.3 Definição do Modelo Matemático

Partindo da taxa de variação $v = \frac{dh}{dt}$ define-se a equação diferencial de primeira ordem com respectiva resolução:

$$\boxed{v = \frac{dh}{dt}}$$

$$dh = v.dt$$

$$\int dh = \int v.dt$$

$$h + c_1 = \int \frac{K}{t} dt$$

$$h + c_1 = K \int \frac{dt}{t}$$

$$\boxed{v = \frac{K}{t}}$$

(velocidade de crescimento médio inversamente proporcional ao tempo).

$$\boxed{\begin{array}{l} \int du = u + c \\ \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c \end{array}}$$

$$h + c_1 = K.\ln|t| + c_2$$

$$h = K.\ln|t| + c_2 - c_1$$

$$\boxed{h = K.\ln|t| + \hat{c}}$$

Condições iniciais conforme tabela 1: modelo matemático do crescimento médio de uma amostra de 990 árvores ao longo de 30 anos.

Aleatoriamente consideram-se os seguintes valores:

$$\begin{cases} t = 5 \text{ anos - substituindo os respectivos valores na equação.} \\ h = 5{,}8 \text{ m} \end{cases}$$

$$h = K.\ln|t| + \hat{c} \text{ obtemos}$$

$$5{,}8 = a.\ln|5| + \hat{c}$$

$$\boxed{5{,}8 = K.1{,}609437 + \hat{c}} \text{ Equação 1.}$$

t = 20 anos

h = 14,7 m

$$14{,}7 = K.\ln|20| + \hat{c}$$

$$\boxed{14{,}7 = K.\,2{,}9958 + \hat{c}} \text{ Equação 2}$$

Assim obtém-se o sistema de equações:

$$\begin{cases} 5{,}8 = 1{,}609437K + \hat{c} \\ \underline{14{,}7 = 2{,}9958K + \hat{c}\quad} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -14{,}7 = -2{,}9958\,K - \hat{c} \\ \\ 5{,}8 = 1{,}609437\,K + \hat{c} \\ \hline \end{cases}$$

$$-8{,}9 = -1{,}386363\,K \qquad K = \frac{8{,}9}{1{,}386363}$$

$$1{,}386363\,K = 8{,}9 \qquad \boxed{K = 6{,}42}$$

Substituindo K = 6,42 na equação 1, temos:

$$5{,}8 = 1{,}609437\,K + \hat{c}$$

$$5{,}8 = 1{,}609437\,(6{,}42) + \hat{c}$$

$$5{,}8 = 10{,}33258554 + \hat{c}$$

$$5{,}8 - 10{,}33258554 = \hat{c}$$

$$\boxed{\hat{c} = -4{,}5375}$$

Como $h = K.\ln|t| + \hat{c}$ logo

$$\boxed{h = 6{,}42.\ln|t| - 4{,}5375}$$

Definimos por esta equação o modelo matemático do crescimento médio das araucárias ao longo de 30 anos.

Para a confirmação da validade do modelo matemático, tomou-se aleatoriamente idades e o cálculo da altura com a utilização da equação do modelo de crescimento. Por exemplo: considerando t = 28 anos conforme a tabela 1, devemos ter h = 16,70 m.

Na equação temos:

$$h = 6{,}42.\ln|t| - 4{,}5375$$

$$h = 6{,}42.\ln|28| - 4{,}5375$$

$$h = 6{,}42 \text{ x } (3{,}332204) - 4{,}5375$$

$$h = 21{,}40 - 4{,}5375$$

$$\boxed{h = 16{,}8 \text{ m}}$$

O referido valor da altura "h" praticamente se iguala ao apresentado na tabela 1.

Considerando t = 30 anos, segundo a tabela 1, devemos ter h = 17,20 m.

Na equação temos:

$$h = 6{,}42.\ln|30| - 4{,}5375$$

$$h = 6{,}42 \text{ x } (3{,}40119738) - 4{,}5375$$

$$h = 21{,}83568719 - 4{,}5375$$

$$\boxed{h = 17{,}2 \text{ m}}$$

O referido valor h = 17,2 m confirma o apresentado na tabela 1, validando desta forma a equação do modelo matemático do crescimento médio.

Em um de nossos encontros apresentei aos alunos a possibilidade de que modelos matemáticos nos permitem fazer previsões. Um dos componentes do grupo 1 sugeriu que se realizasse a definição da altura média para os 50 anos.

$$h = 6{,}42.\ln|50| - 4{,}5375$$

$$h = 6{,}42 \text{ x } (3{,}91202301) - 4{,}5375$$

$$h = 25{,}1151 - 4{,}5375$$

$$\boxed{h = 20{,}57 \text{ m}}$$

5.1.4 Utilização de *softwares* para o ajuste de gráficos por linhas de tendências

Além do procedimento manual na obtenção do modelo, foi aplicado pelos alunos um *software* que possibilita ajustar gráficos por linhas de tendência, pois a representação gráfica do fenômeno favorece um melhor entendimento. O software aplicado foi a planilha do Excel com o objetivo de construir gráficos e ajustá-los. No início se pensava em dispor 5 horas aula para a realização desta atividade, com a planilha *Excel*, porém, este tempo não foi necessário pelo fato dos alunos serem acadêmicos do curso de Computação, dominavam com clareza e naturalidade o referido *software* na construção do gráfico do crescimento médio das araucárias em função do tempo.

Muitas dúvidas surgiram, os alunos gostariam de ter um conhecimento mais detalhado sobre regressão ou ajuste de curvas. Sendo assim, no dia 13 de maio de 2006, ministrei uma aula específica relacionada a ajuste de curvas tendo como bibliografia básica o livro do Dr. Rodney Carlos Bassanezi, entitulado: "Ensino-aprendizagem com modelagem matemática" (2002, p. 54), destacando deste o Capítulo 2.

Inicialmente apresentei a definição de ajuste de curvas segundo Bassanezi (2002, p. 54):

> Uma regressão ou ajuste de curvas é um recurso formal para expressar alguma tendência da variável dependente **y** quando relacionada com a variável independente **x**. Em outras palavras, regressão é um mecanismo ou artifício que fornece uma relação funcional quando se tem uma relação estatística.

Ainda, segundo Bassanezi (2002, p. 54):

> Uma curva de regressão é bastante útil para uma formulação simplificada dos dados ou verificação de alguma tendência entre eles. Quando analisamos algum fenômeno ou situação através de dados numéricos estamos interessados, além da descrição e tendências locais fornecidas por uma curva de regressão em saber se a relação funcional corresponde (y = fcx) é também adequada para se fazer previsão de y quando x escapa do intervalo pesquisado.

Após a construção do gráfico do crescimento médio em função do tempo conforme dados da tabela 1, os alunos realizaram o ajuste dos dados com o objetivo de encontrar aquela que melhor descrevesse, que melhor se aproximasse dos dados colhidos, já se preocupando em definir a equação do crescimento em função do tempo sempre na expectativa que a mesma coincidisse com a encontrada mediante método algébrico.

Os componentes do grupo 1 realizaram um questionamento interessante. "Se não tivéssemos disponível *softwares* para o ajuste de curvas como deveríamos proceder para fazê-lo?"

Este questionamento me levou a reflexão e na busca da resposta, desta forma, procurei ajuda com colegas professores de estatística que me orientaram a conhecer o método dos quadrados mínimos, este é um dos métodos mais usados para estimação de parâmetros ou ajuste de curvas, segundo Bassanezi (2002, p. 57). Considere um conjunto de **n** dados observados $\{\overline{xi}, \overline{Yi}\} = 1,2,3,...,n$ e uma função $Y(x) = f(x, a_1, a_2, ...ak)$, onde aj (j = 1..., K) são os parâmetros - o método dos quadrados mínimos consiste em determinar estes parâmetros de modo que "minimize" o valor de $S = \sum_{i=1}^{n} (Yi - \overline{Yi})^2 = \sum \left[f(\overline{x_i}, a_1, ..., ak) - \overline{Yi}\right]^2$, i = 1, isto é devemos minimizar a soma dos quadrados dos desvios entre os valores $\overline{Yi}$, observados e os valores $Yi = f(\overline{x_i}, a_1, ...ak)$ ajustados.

Aos alunos, limitei-me somente a apresentar o método dos quadrados mínimos, não o trabalhando sistematicamente.

Em busca de maiores informações, os componentes do grupo 1 paralelamente à aplicação do *Excel* utilizaram um *software,* denominado *origin*[5] isto facilitado pelo conhecimento no seu curso de Ciências da Computação.

Não conhecia o referido *software* apenas 2 componentes do grupo o conheciam passando as informações de como proceder na realização do ajuste de curvas. Em relação ao fenômeno em estudo, ou seja, modelo matemático do crescimento das árvores de araucária em função do tempo. Realizaram vários ajustes como segue.

Após os ajustes apresentados pelas curvas definem uma tabela, organizam os dados da tabela 1 paralelamente com os dados obtidos conforme as curvas de ajustes.

---

[5] *Origin – Software* aplicado na análise de dados e visualização com plotagens. Integrado a planilhas do tipo Excel é capaz de ajustar e analisar os diversos modelos de gráficos científicos.

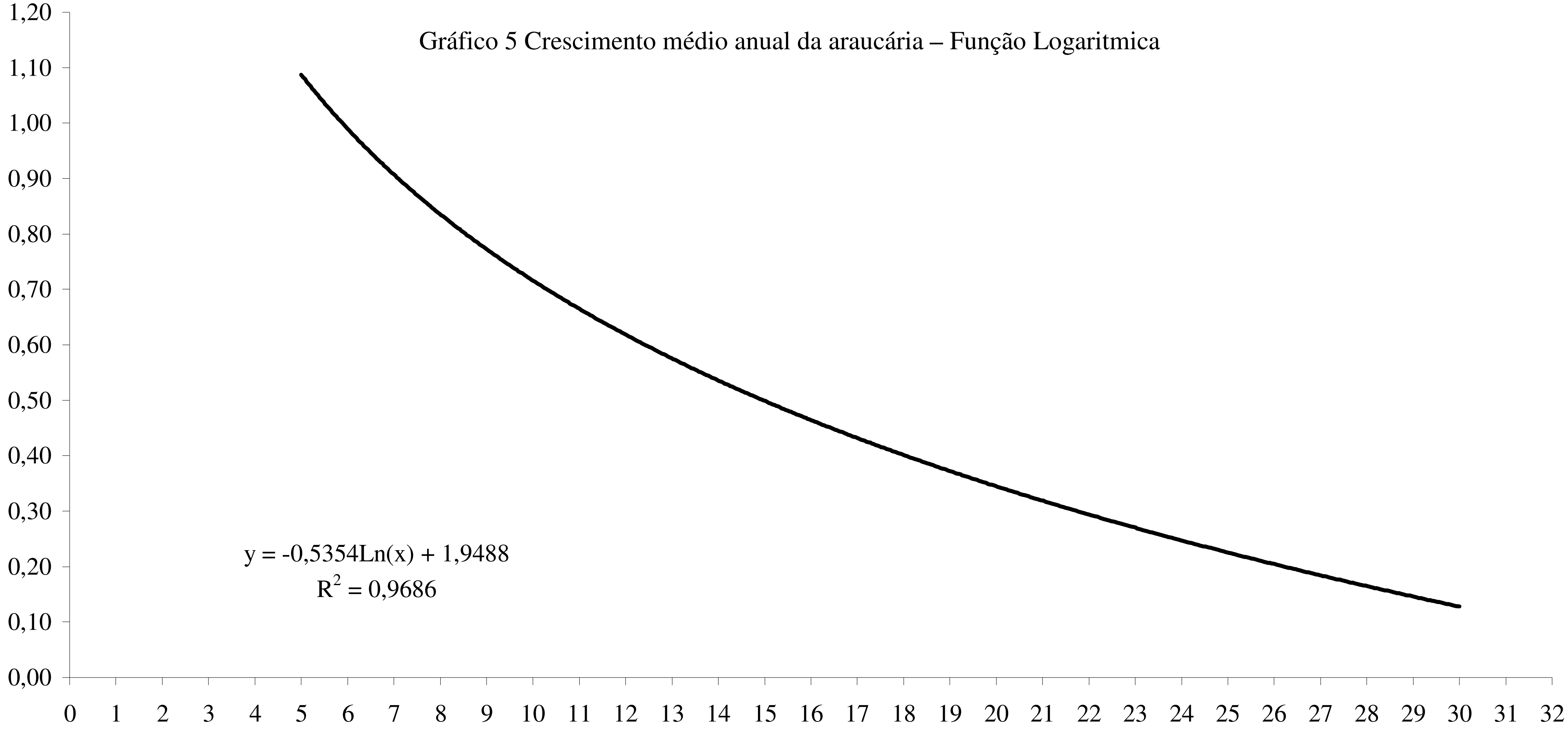


Gráfico 5 Crescimento médio anual da araucária – Função Logaritmica
y = -0,5354Ln(x) + 1,9488
R2 = 0,9686
1,20
1,10
1,00
0,90
0,80
0,70
0,60
0,50
0,40
0,30
0,20
0,10
0,00
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32

Gráfico 6 Crescimento médio anual da araucária – Função Polinominal – 3ª Ordem

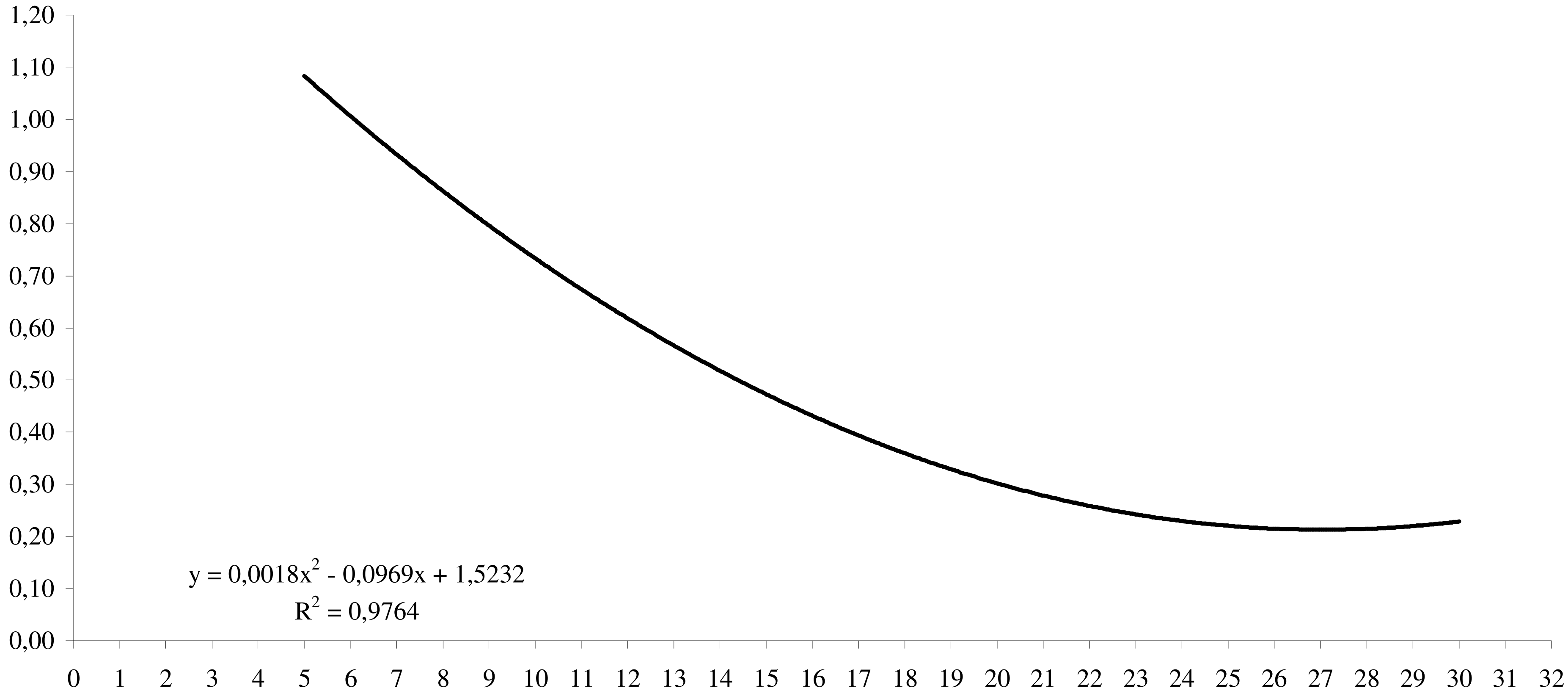


Gráfico 7 Crescimento médio anual da araucária – Função Exponencial

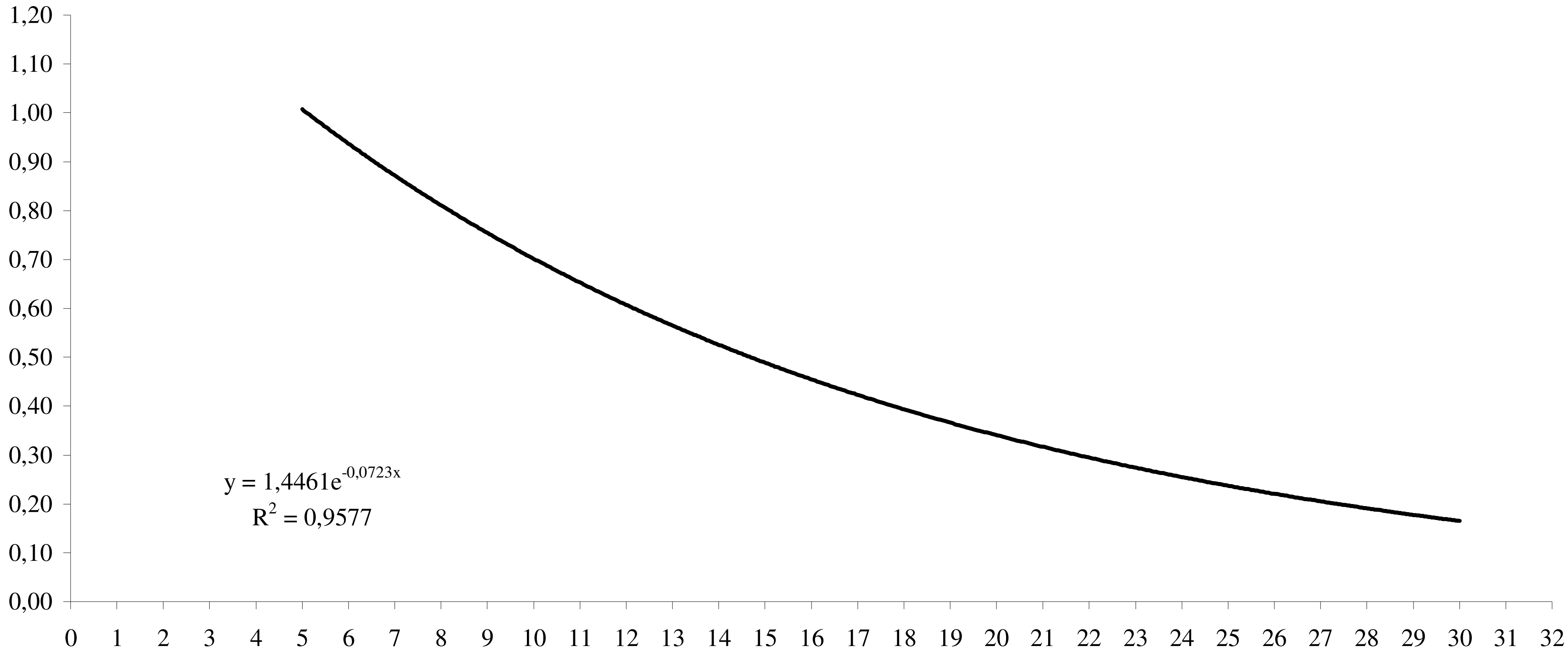
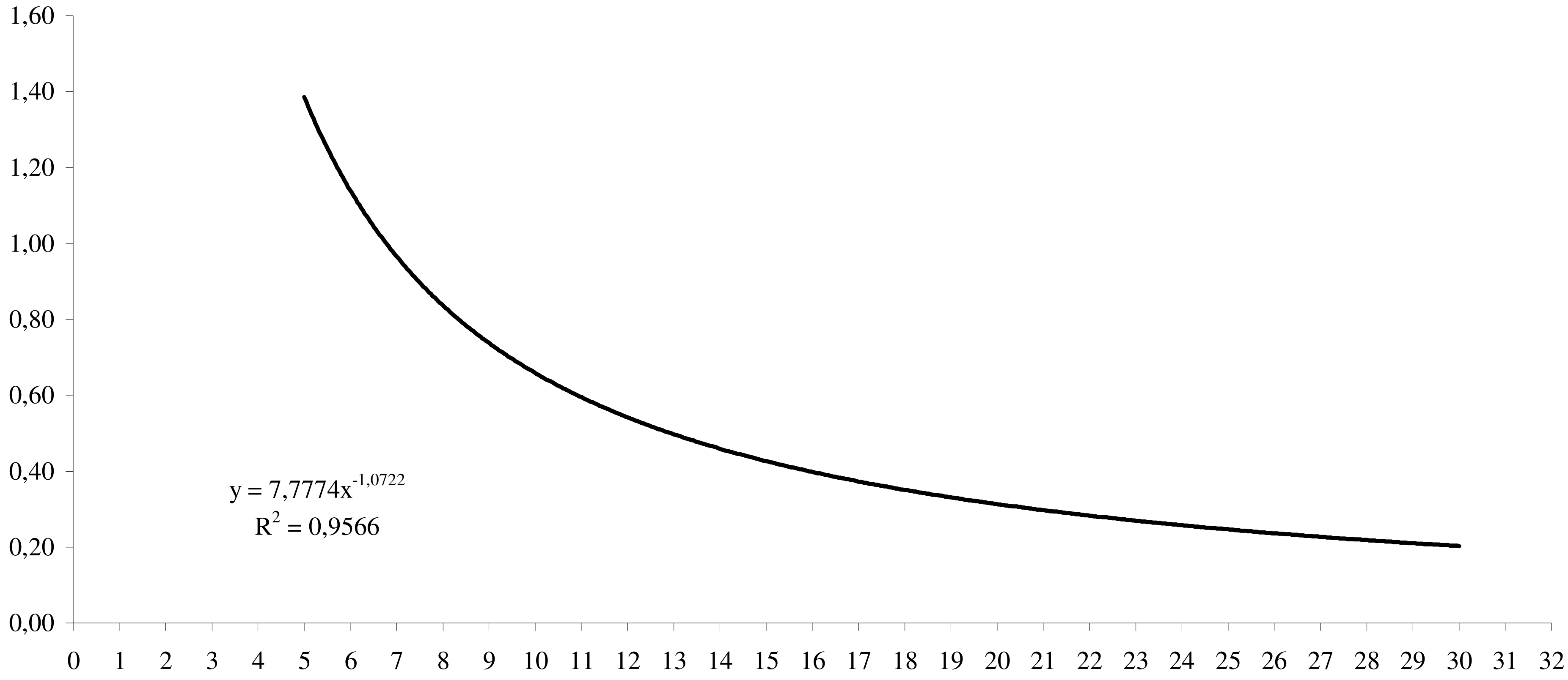


Gráfico 8 Crescimento médio anual da araucária – Função Potencial



5.1.5 Modelo final

A figura 9, indica o ajuste da curva do modelo definitivo com a planilha *Excel* que mostrou o melhor ajuste, ou seja, o que mais se aproxima do fenômeno em estudo.

Os componentes do grupo 1 chegaram a esta conclusão, pois a equação obtida com a aplicação do *Excel* é muito próxima, quase a mesma equação obtida pelo processo algébrico.

O ajuste da curva realizada pelos alunos os leva a concluir que a aplicação do *software* e o processo algébrico se complementam e esta relação comparativa serviu de comprovação de todo o procedimento no objetivo da obtenção do modelo matemático.

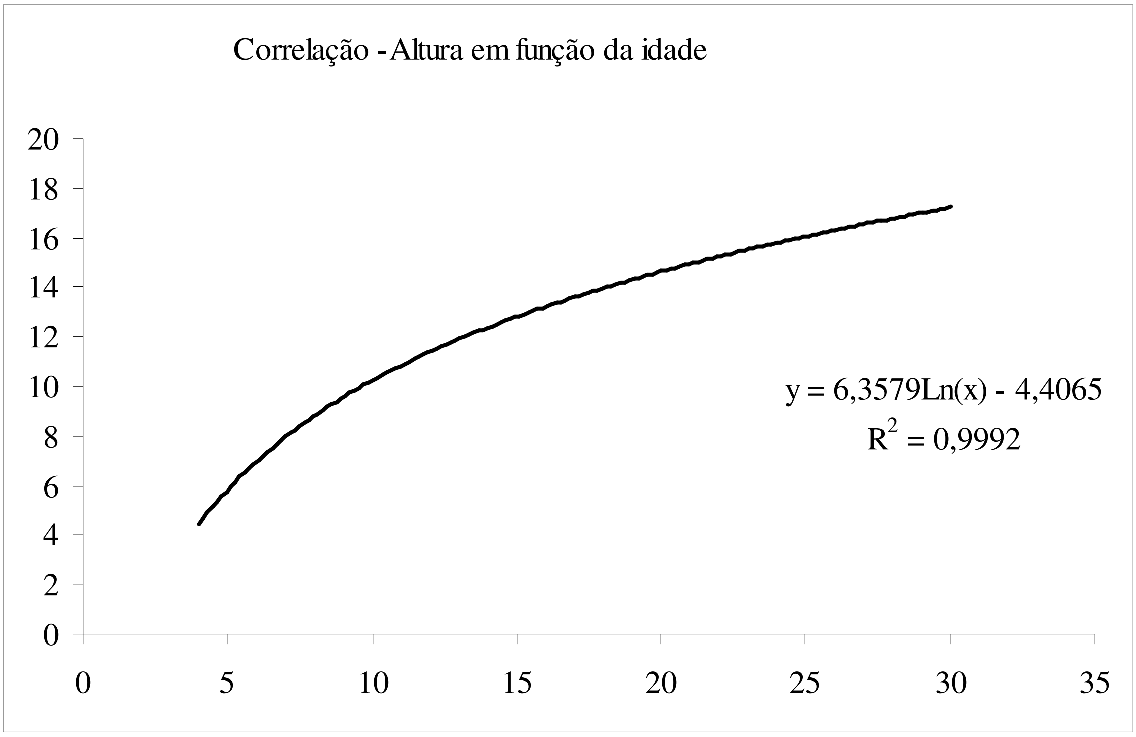


Figura 9 Ajuste da curva

5.1.6 Conclusões finais dos componentes do grupo 1

O componente número 1 conclui que a aplicação da modelagem matemática em situações reais auxilia na explicação de fenômenos do mundo real, assim podendo interagir de forma apropriada, fazendo previsões de como o modelo se comporta em um determinado espaço de tempo afim de obter um maior ganho em conclusões finais relacionados com o fenômeno, além disso, a teoria do cálculo torna-se aplicada, útil no estudo de certo fenômeno natural.

Para o componente 2, com o auxílio da modelagem matemática, é possível resolver questões extra classe, aumentando o interesse dos alunos. *A modelagem matemática utilizada principalmente no estudo de problemas de âmbito regional uniu conhecimentos adquiridos em sala de aula para se compreender situações presentes em nossa região, como o crescimento da araucária estudada de forma interessante com a aplicação de derivadas e integrais*.

No caso do componente 3, *a modelagem ocorre quando da formação dos grupos na escolha do tema de interesse para ser investigado por meio da matemática, contando com o acompanhamento do professor. Após a escolha do tema, a tendência é de um maior conhecimento matemático na área que se refere a construção e a aplicabilidade do modelo, além de ser uma oportunidade que nos permite aplicar a matemática em situações do dia-a-dia mediante o cálculo diferencial integral*.

A consideração final do componente 4 mostra a importância da modelagem matemática, enfatizado no estudo de problemas de outras áreas usando a matemática. *O modelo foi desenvolvido na coleta de informações da situação problema. Os conceitos e idéias matemáticas exploradas no estudo do fenômeno dependeram do encaminhamento que foi obtido à medida do desenvolvimento da atividade; percebi que para se fazer modelagem matemática há a necessidade de se desenvolver o senso da investigação na busca de se encontrar as variáveis favoráveis para a estruturação do modelo matemático.*

Não poderia imaginar que a teoria do cálculo diferencial poderia ser tão útil no estudo de questões tão próximas da nossa realidade, tornando-se a teoria que estrutura a abstração aplicada no estudo de questões regionais ligadas as mais diversas áreas do conhecimento. As aulas de cálculo tornaram-se dinâmicas, mais interessantes, pois não nos limitamos em utilizar somente regras de derivação e integração, a modelagem matemática nos proporcionou a oportunidade de aplicar a teoria no entendimento de uma questão do mundo real.

O grupo realizou a apresentação do seu trabalho no dia 12 de junho de 2006, a todos os demais grupos na sede da instituição, como também entregou o trabalho escrito final do referido modelo desenvolvido.

Figura 10 Apresentação grupo 1

5.2 Grupo 2: Modelo matemático da quantidade de casca do tronco

O referido grupo, no dia da aula de campo, definiu o tema a ser desenvolvido, ou seja, gostariam de estudar o modelo matemático relacionado à quantidade média de falhas e pinhões por pinha. Mas isto não aconteceu, pois em uma de nossas aulas de cálculo, quando se trabalhou com cálculo de áreas, aplicando integrais resolvem mudar o título da pesquisa para Modelo matemático da quantidade de casca no tronco da araucária.

Afirmaram nesta mesma aula sobre a importância de como a matemática pode ser aplicada na natureza de forma prática. Neste caso definindo por intermédio do cálculo diferencial e integral a quantidade de casca que cobre o tronco.

5.2.1 Definição do Modelo Matemático

O grande desafio do grupo para dar início ao modelo matemático foi concluir a forma geométrica da superfície da casca que cobre o tronco.

Para tal conclusão retornei com o grupo para o local onde se realizou a aula de campo, pois um contato novamente com a espécie era fundamental para se elucidar a forma geométrica da referida área.

Alguns componentes do grupo afirmaram que o tronco tinha um formato próximo a forma cilíndrica, o que não poderiam ter concluído sem a devida observação direta com a espécie. Orientei os mesmos que calculassem o comprimento da circunferência da base da árvore e também do comprimento da circunferência distante a 2 m de altura da base do tronco a partir de uma árvore escolhida aleatoriamente, conforme a figura 11, a seguir.

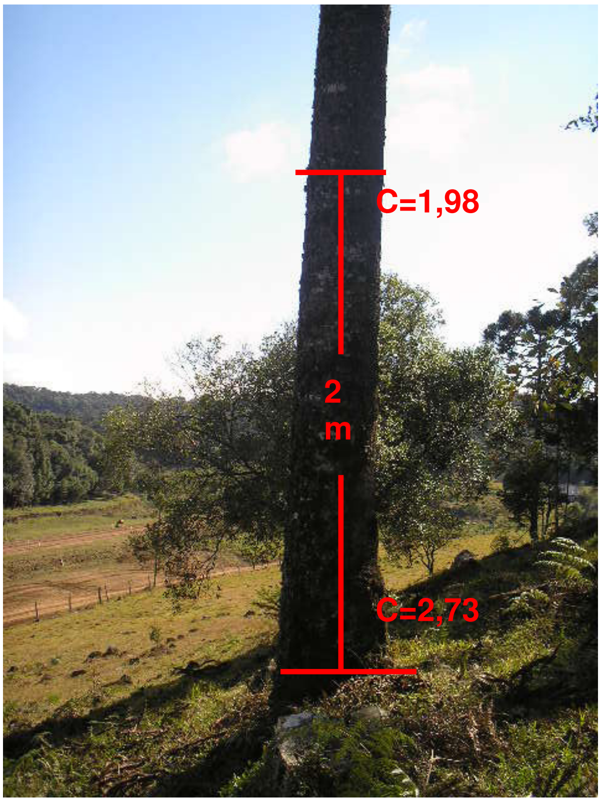
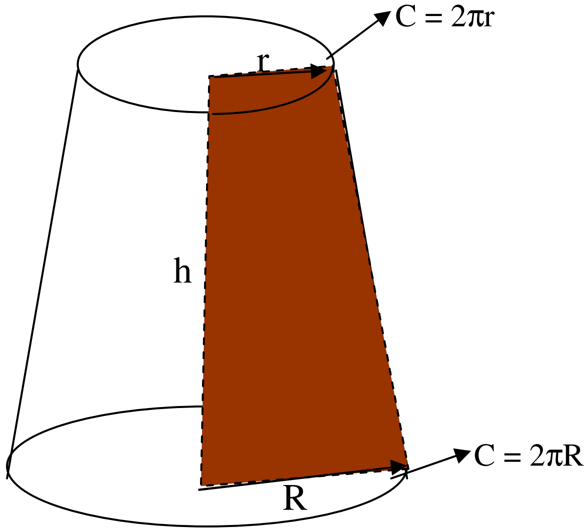


Figura 11 Forma do tronco

Observando que os comprimentos eram diferentes, concluíram que a forma do tronco é muito próximo a tronco de cone.

Tronco de Cone:

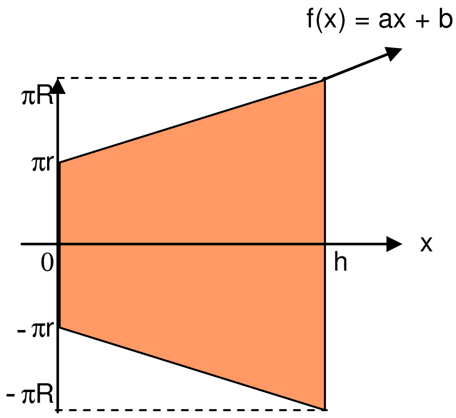


R ⇒ Raio da base

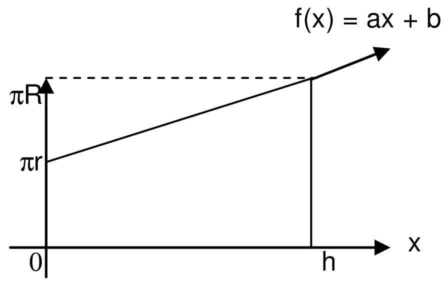
r ⇒ raio da secção paralela a base

h ⇒ Altura do tronco.

Planificação



Aplicando a integral definida no intervalo de 0 a h, obtêm-se da figura 1



$$\text{Área} = \int_a^b f(x)dx = P(x)\Big|_a^b = P(b) - P(a)$$

$$\text{Área} = \int_o^h (ax + b)dx = P(x)\Big|_o^h = P(h) - P(o)$$

$$P(x) = \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$$

Logo: $P(x) = \dfrac{ax^2}{2} + bx$

$$A = \int_0^h (ax + b)dx = \frac{ax^2}{2} + bc\Big|_0^h = P(h) - P(0)$$

$$P(h) = \frac{a.h^2}{2} + b.h$$

a $\Rightarrow$ Coeficiente angular da reta

$$a = \frac{\Delta\gamma}{\Delta\chi}$$

$$a = \frac{\pi R - \pi r}{h - 0}$$

$$a = \frac{\pi(R - r)}{h}$$

Logo: $P(h) = \dfrac{\dfrac{\pi.(R - r).h^2}{h}}{2} + b.h$

$$P(h) = \frac{\pi.(R - r).h}{2} + b.h$$

$b = \pi.r$ b = coeficiente linear.

$$P(0) = \frac{a.0^2}{2} + b.0$$

$$P(0) = 0$$

$$A = \int_0^h (ax + b)dx = \frac{ax^2}{2} + bx \Big|_0^h = P(h) - P(0)$$

$$= \frac{\pi.(R - r) - h}{2} + b.h - 0$$

$$= \frac{\pi.(R - r)}{2}.h + \pi.r.h$$

$$= \pi.h\left[\frac{R - r}{2} + r\right]$$

$$= \pi.h\left[\frac{R - r + 2r}{2}\right]$$

$= \pi.h\left[\frac{R + r}{2}\right]$ Área da Metade do trapézio.

Assim a área total da figura é:

$$A_T = 2.\int_0^h (ax + b)dx$$

$$A_T = \cancel{2}.\pi.h\left[\frac{R + r}{\cancel{2}}\right]$$

$$A_T = \pi.h.[R + r]$$

onde: $R \Rightarrow$ Raio da área da base

$h \Rightarrow$ altura do tronco

$r \Rightarrow$ raio da secção paralela a área base do tronco

Assim para se calcular a área da quantidade de casca que envolve o tronco aplicamos o modelo: $\boxed{Q.C.T = \pi.\ H.\ [R + r]}$

5.2.2 Aplicação do Modelo Matemático

Foi sugerido aos alunos que, após a definição do modelo matemático, aplicassem em diversas situações considerando altura de troncos iguais a 1 m, 2 m e 2,5 m escolhendo aleatoriamente 10 pinheiros localizados na propriedade onde foi realizada a aula de campo do dia 01/04/2006.

Figura 12 Aula de campo

Escolhidos os dez pinheiros da propriedade, fizeram a coleta de dados organizados conforme a tabela 4, que apresenta a numeração dos pinheiros, as alturas consideradas de tronco, o cumprimento da circunferência da base (0m), o comprimento da circunferência da secção paralela a base e a quantidade de casca que cobre o tronco conforme a altura de tronco considerada, aplicando o modelo matemático.

Tabela 3 Produção de casca (*Araucaria angustifolia*)

MEDIDA DOS PINHEIROS PARA CÁLCULO DO VOLUME DA CASCA (EM METROS)

Àrvore/Altura	0m	1m	2m	2,5m	Q.C.T. (1metro)	Q.C.T. (2metros)	Q.C.T. (2,5metros)
1	1,59	1,29	1,22	1,18	1,44	2,81	3,46
2	1,47	1,28	1,2	1,16	1,38	2,67	3,29
3	1,21	1,06	1	0,99	1,14	2,21	2,75
4	0,99	0,83	0,77	0,76	0,91	1,76	2,19
5	1,36	1,2	1,14	1,13	1,28	2,50	3,11
6	1,77	1,48	1,42	1,38	1,63	3,19	3,94
7	2,05	1,78	1,71	1,67	1,92	3,76	4,65
8	2	1,73	1,61	1,58	1,87	3,61	4,48
9	1,61	1,4	1,31	1,28	1,51	2,92	3,61
10	2,33	1,92	1,76	1,7	2,13	4,09	5,04
	0,25306	0,20531	0,19417	0,18780	1,52	2,95	3,65
	0,23396	0,20372	0,19099	0,18462		Ý	
	0,19258	0,16870	0,15915	0,15756		MÉDIA	
Raios Þ	0,15756	0,13210	0,12255	0,12096			
	0,21645	0,19099	0,18144	0,17985			
	0,28170	0,23555	0,22600	0,21963			
	0,32627	0,28330	0,27215	0,26579			
	0,31831	0,27534	0,25624	0,25146			
	0,25624	0,22282	0,20849	0,20372			
	0,37083	0,30558	0,28011	0,27056			
	0,04028	0,03268	0,03090	0,02989			

Fonte: Pesquisa de campo, 2006.

Os valores da tabela 4 foram obtidos da seguinte maneira:

Pinheiro 1: $\Rightarrow$ altura considerada no tronco 1 m.

- Raio do círculo da base

$C = 2\pi R$

$1,59 = 2.\ 3,14R$

$1,59 = 6,28R$

$$R = \frac{1,59}{6,28}$$

$R = 0,25306$ m

- Raio do círculo da secção paralela a base

$C = 2\pi r$

$1,29 = 2.(3,1416).r$

$1,29 = 6,2832r$

$$\frac{1,29}{6,2832} = r$$

$r = 0,2053$ m

- Quantidade de casca em 2 m que envolve o tronco de 1 m de altura.

$Q.C.T = \pi.h\ [R + r]$

$Q.C.T = (3,1416).\ 1\ [0,25306 + 0,2023]$

$Q.C.T = 3,1416\ [0,4553]$

$Q.C.T = 1,44\ m^2$

Altura considerada no tronco 2 m.

- Raio do círculo da base

$C = 2\pi R$

$1,59 = 2.(3,1416).R$

$1,59 = 6,2832R$

$$R = \frac{1,59}{6,2832}$$

$R = 0,2530$ m

- Raio do círculo da secção paralela à base

$C = 2\pi r$

$1,22 = 2.(3,1416).r$

$1,22 = 6,2832.r$

$$\frac{1,22}{6,2832} = r$$

$r = 0,1941$

- Quantidade de casca em m² que envolve o tronco considerando 2 m de altura.

$Q.C.T = \pi.h.[R + r]$

$Q.C.T = (3,1416).(2m).[0.2530 + 0,1941]$

$Q.C.T = 6,2832.[0,4471]$

$Q.C.T = 2,81\ m^2$

Altura considerada no tronco 2,5 m.

Pinheiro 1.

$C = 2\pi R$

1,18 = 2.(3,1416).R

1,18 = 6,2832R

R = 0,1878

Quantidade de casca em m² que envolve o tronco, considerando 2,5 m de altura.

Q.C.T = π.h.(R + r)

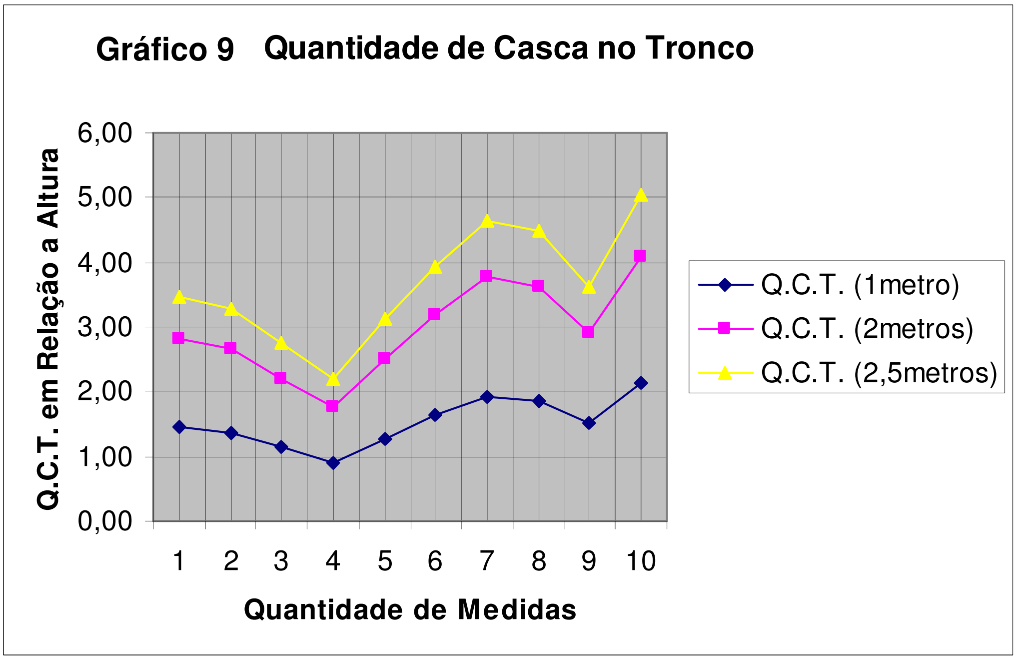
Q.C.T = (3,1416).(2,5).(0,2530 + 0,1878)

Q.C.T = 7,8540 . (0,4408)

Q.C.T = 3,4620 m²

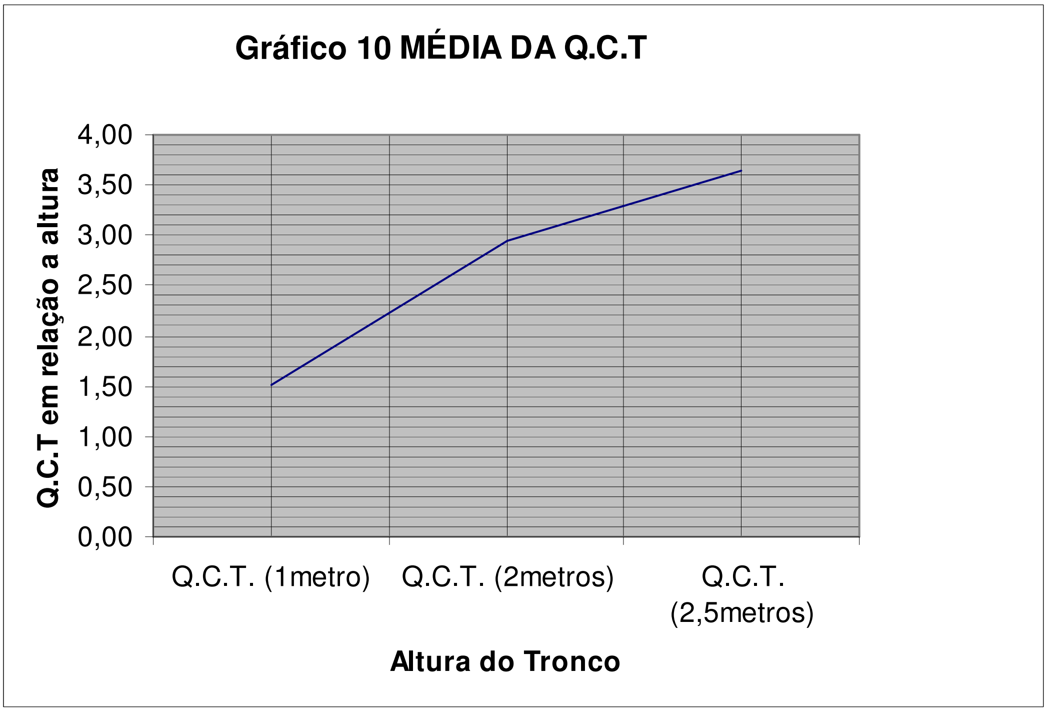
De forma análoga foram desenvolvidos os cálculos com os dados colhidos, nos outros nove pinheiros constituindo-se desta forma a tabela 4.

Visando a uma melhor interpretação dos dados, os componentes do grupo 2, representaram graficamente a quantidade de casca no tronco dos dez pinheiros da amostra considerada.



Além do gráfico 9 da quantidade de casca no tronco em função da altura, elaboram também o gráfico 10 da média da quantidade de casca no tronco dos dez pinheiros.

Os componentes do grupo 2, afirmaram que o cálculo desta média pode contribuir com os proprietários da região que comercializam casca de pinheiros para o consumo nas cidades da serra catarinense, pois no inverno em virtude das baixas temperaturas o consumo de lenha em fogões residenciais é muito grande e este tipo de lenha é mais duradoura.



Esta relação comercial, além de contribuir com a limpeza das propriedades rurais, facilita a vida dos habitantes carentes das cidades que não tem condições financeiras para a aquisição de gás de cozinha. É importante frisar que na região se comercializa casca de pinheiros muito antigos que são derrubadas pelas próprias condições climáticas.

5.2.3 Considerações finais dos componentes do grupo 2

Um melhor entendimento de como se aplicar integrais definidas, a importância do cálculo no estudo de questões tão próximas de nossa realidade, a aplicação do cálculo diferencial integral em diversas áreas, foram algumas das conclusões apresentadas pelos componentes do grupo 2.

A construção do modelo, segundo os componentes do grupo, mostrou-lhes como a matemática pode ser usada na natureza de forma prática e objetiva mediante a métodos algébricos.

Consideram também que já na graduação é possível fazer pesquisa de forma objetiva com o auxílio dos conhecimentos adquiridos em sala de aula e que graduandos comprometidos com a mesma podem se envolver com a iniciação científica e até mesmo desenvolver projetos, levando desta forma a universidade junto a comunidade. Alegaram também que a modelagem matemática é uma forma didática de se compreender de maneira concreta o cálculo diferencial integral, "não nos limitamos tão somente em conhecer as técnicas de derivação e integração, mas fomos além, aplicamos esses conhecimentos no estudo de uma questão do mundo real" (Grupo 2).

5.3 Grupo 3 - Modelo Matemático para o Cálculo do Volume do Tronco da Araucária

5.3.1 Relatos relacionados ao tema

Os componentes do Grupo 3, apresentaram o tema com o objetivo de desenvolver o modelo matemático que permita realizar o cálculo do volume do tronco das araucárias considerando certa altura h.

Para o desenvolvimento do modelo, primeiramente realizaram o levantamento do formato geométrico do tronco.

Na conclusão da forma geométrica do tronco, escolheram aleatoriamente 5 pinheiros adultos, destes mediram o comprimento da circunferência da base como também o comprimento da circunferência distante 2,5 m da área basal. A *priori* a impressão que tinham em relação à forma geométrica do tronco da árvore era a de um cilindro, porém com os dados coletados relacionados aos comprimentos das circunferências que eram diferentes, concluíram que a forma geométrica do tronco das araucárias é de tronco de cone.

O próximo passo foi encontrar, mediante cálculo diferencial integral, a equação que permite calcular o volume do tronco da espécie.

O referido grupo, antes de participar da aula de campo, pretendia estudar o tema relacionado ao cálculo da dispersão das araucárias na região denominada de Lageadinho no período de 5 anos. Com o decorrer do processo de coleta de dados para o início da criação do modelo matemático, encontraram dificuldades, uma delas foi a necessidade da utilização de um aparelho de GPS (*Geographic Position System*) para a coleta dos dados da dispersão, não conseguindo o aparelho que seria determinante na coleta de dados, decidiram mudar o tema. Resolvem então estudar, desenvolver o modelo matemático relacionado com o volume do tronco da espécie motivados pelo estudo das integrais na aplicação do cálculo do volume de sólidos de revolução, segundo as aulas de cálculo em sala.

Sendo assim, foram em busca de informações sobre o assunto e concluíram que modelo matemático é uma estrutura matemática que descreve aproximadamente as características de um fenômeno em questão. Para se chegar ao modelo matemático é necessário passar pelo processo denominado modelagem matemática.

Questionei o grupo sobre tais conclusões, qual bibliografia consultada os levou as mesmas. Buscaram suas conclusões Segundo Biembemgut (2003), a modelagem matemática é o processo que envolve a obtenção de um modelo, e este, sob certa óptica, pode ser considerado um processo artístico, visto que, para se elaborar um modelo, além de conhecimento de matemática, o modelador precisa ter uma dose significativa de intuição e criatividade para interpretar o contexto, saber discernir que conteúdo matemático melhor se adapta e também ter senso lúdico para jogar com as variáveis envolvidas.

5.3.2 Da construção do modelo

Com certa facilidade, os componentes do Grupo 3, correlacionaram o conteúdo desenvolvido em sala de aula com o tema específico do trabalho. Na aula de cálculo ministrada no dia 05/06/2006, trabalhamos com o cálculo do volume de sólidos de revolução. Apresentaram o assunto no trabalho final da seguinte forma: fazendo uma região plana, girar em torno de uma reta obtém-se um sólido denominado sólido de revolução. A reta ao redor da qual a região plana gira é chamada eixo de rotação. Neste caso consideramos a rotação em torno do eixo X.

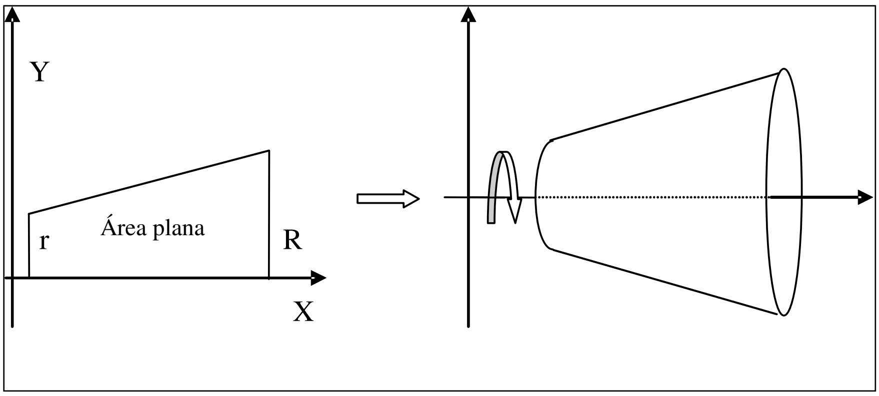


Figura 13 Sólido gerado pela revolução

O estudo matemático em questão objetiva definir o volume do tronco das árvores através dos conhecimentos de cálculo diferencial e integral adquiridos em sala de aula, assim, comparando os sólidos de revolução as formas naturais dos troncos das árvores.

O cálculo diferencial e integral define, desta forma, a fórmula para o cálculo do volume de sólidos de revolução.

$$V = \pi.\int_a^b [f(x)]^2 dx$$

Visando a um conhecimento mais aprofundado sobre o assunto, sugeri aos alunos do grupo que apresentassem a origem da referida fórmula, que seria determinante na constituição do modelo matemático para o cálculo do volume do tronco.

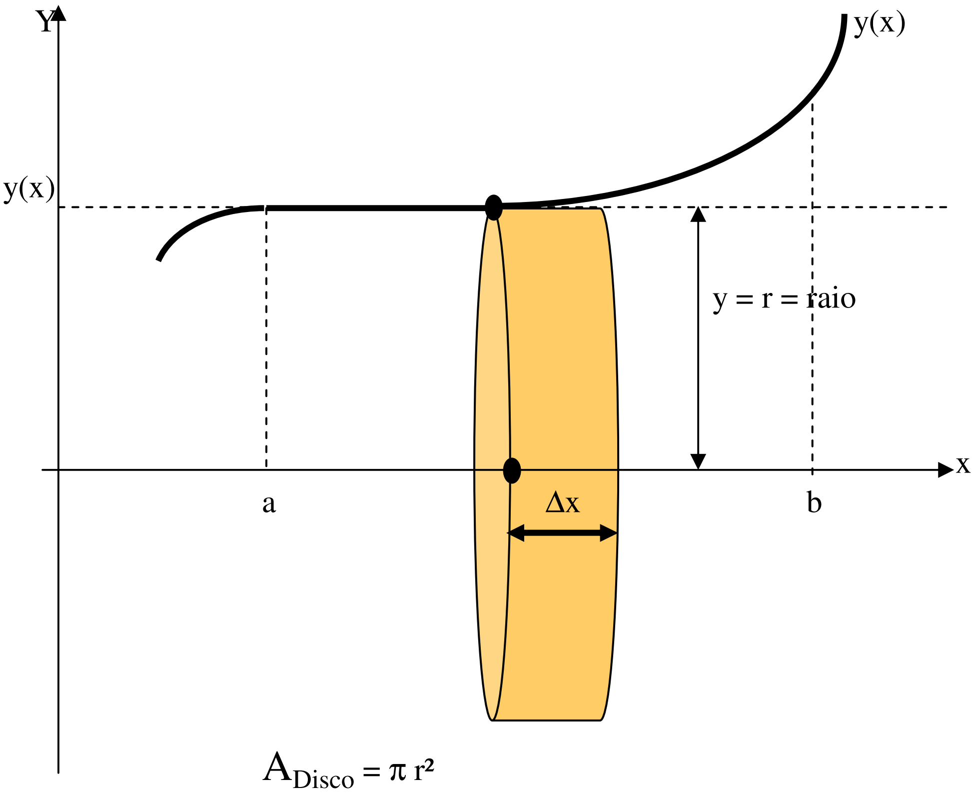
Segundo Flemming e Gonçalves (1992, p. 486) "seja y = f(x) uma função contínua não negativa em [a, b]. Seja R a região sob o gráfico de f de a até b. O volume do sólido T, gerado pela revolução de R em torno do eixo X, é definido por:

$$V = \lim \pi \sum_{i=1}^{n} [f(x)]^2 .\Delta_{xi}$$

A referida soma é uma Soma de Riemann da função $[f(x)]^2$. Como f é contínua, o limite existe, pela definição da integral definida, temos:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 .dx$$

Ainda pelo método do disco temos:



$$A_{Disco} = \pi\, r^2$$

$$A_{Disco} = \pi\, .[y(x)]^2$$

$$dv = A_{Disco}\, .\, \Delta x$$

$$dV = \pi\, y^2(x)\, .\, \Delta x$$

$$V_T = \Sigma\, dv$$

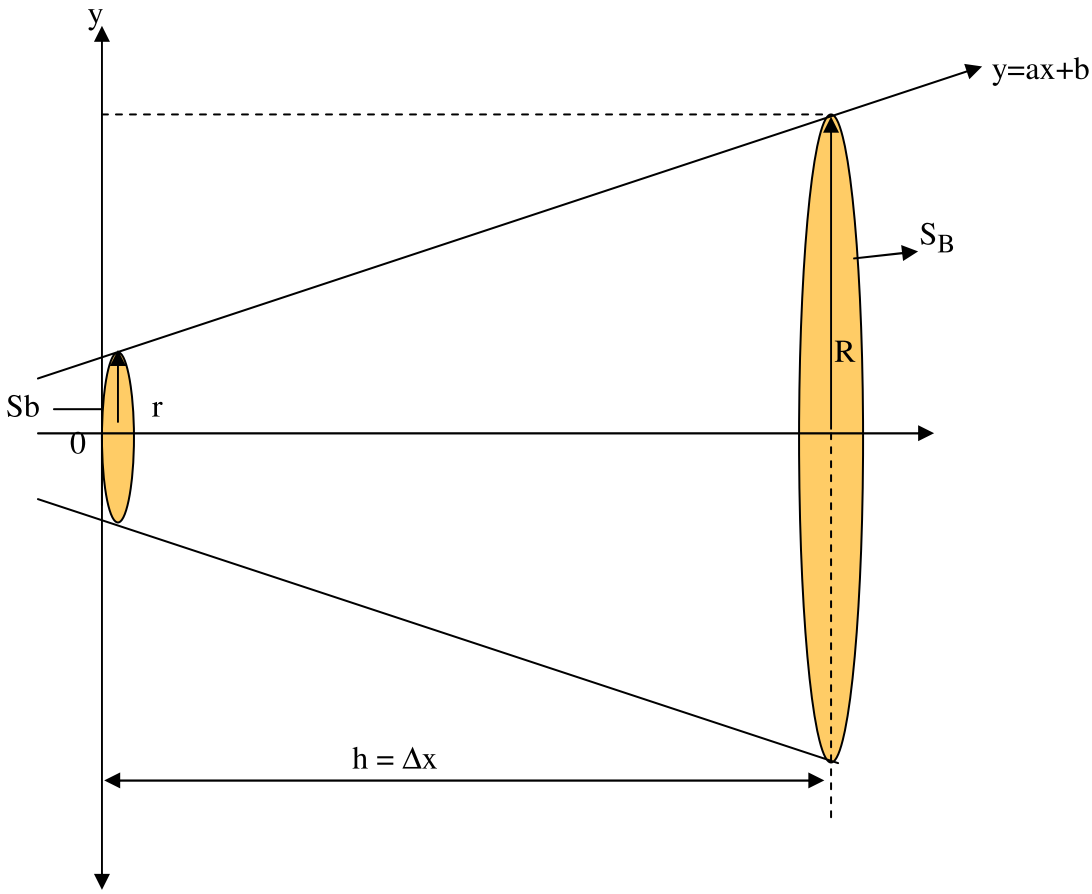
$$\sum dv = \sum \pi [y(x)]^2 .dx$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum^{\infty} dv = \lim_{\Delta x \to 0} \sum^{\infty} \pi [y(x)]^2 .\Delta\, x$$

$$\int dv = \int \pi [f(x)]^2 dx$$

$$v = \pi \int_a^b [y(x)]^2\, dx$$

Com a expressão para o cálculo do volume de sólido de revolução definida, partimos do tronco com altura h conforme figura a seguir.



Sb = área de secção paralela a área basal.

S_B = área da Base do tronco.

$$V = \pi.\int f(x)^2\,dx$$

$$V = \pi.\int_0^h (ax+b)^2\,dx$$

$$V = \pi.\int_0^h \left[\left(\frac{R-r}{h}\right)x + r\right]^2 dx$$

$$V = \pi.\int_0^h \left\{\left[\left(\frac{R-r}{h}\right).x\right]^2 + 2\left[\left(\frac{R-r}{h}\right)x\right].r + r^2\right\}(dx)$$

$$V = \pi.\int_0^h \left[\frac{\left(R^2 - 2Rr + r^2\right).x^2}{h^2} + \frac{2xRr - 2xr^2}{h} + r^2\right]dx$$

$$V = \pi\left[\int_0^h \left(\frac{R^2x^2 - 2Rrx^2 + r^2x^2}{h^2}\right)dx + \int_0^h \left(\frac{2Rrx - 2r^2x}{h}\right)dx + \int_0^h r^2dx\right]$$

$$V = \pi.\left[\int_0^h \left(\frac{R^2x^2}{h^2}\right)dx - \int_0^h \left(\frac{2Rrx^2}{h^2}\right)dx + \int_0^h \left(\frac{r^2x^2}{h^2}\right)dx + 2\int_0^h \left(\frac{Rrx}{h}\right)dx - 2\int_0^h \left(\frac{r^2x}{h}\right)dx + \int_0^h r^2dx\right]$$

$$V = \pi\left[\frac{R^2}{h^2}\int_0^h x^2dx - \frac{2Rr}{h^2}\int_0^h x^2dx + \frac{r^2}{h^2}\int_0^h x^2dx + \frac{2Rr}{h}\int_0^h xdx - \frac{2r^2}{h}\int_0^h xdx + r^2\int_0^h dx\right]$$

$$V = \pi\left[\frac{R^2}{h^2}.\frac{x^3}{3} - \frac{2Rrx^3}{3h^2} + \frac{r^2x^3}{3h^2} + \frac{2Rrx^2}{2h} - \frac{2r^2x^2}{2h} + r^2x\right]$$

Lembrando que $\int_0^h f(x)dx = P(x)\,\mathrm{I}_0^h = P(h) - P(0)$, logo $P(0) = 0$

$$V = \pi.\left[\frac{R^2\cancel{h^3}}{3\cancel{h^2}} - \frac{2Rr\cancel{h^3}}{3\cancel{h^2}} + \frac{r^2\cancel{h^3}}{3\cancel{h^2}} + \frac{2Rrh^2}{2h} \cancel{- \frac{2r^2h^2}{2h}} \cancel{+ r^2.h}\right]$$

$$V = \pi.\left[\frac{R^2h}{3} - \frac{2Rrh}{3} + \frac{r^2h}{3} + Rrh - \cancel{r^2}h + \cancel{r^2}h\right]$$

$$V = \pi.\left[\frac{R^2h}{3} - \frac{2Rrh}{3} + Rrh + \frac{r^2h}{3}\right]$$

$$V = \pi.\left[\frac{R^2h}{3} - \left(\frac{2Rh + Rrh}{3}\right) + \frac{r^2h}{3}\right]$$

$$V = \pi.\left[\frac{R^2h}{3} + \frac{Rrh}{3} + \frac{r^2h}{3}\right]$$

$$V = \frac{R^2h\pi}{3} + \frac{Rhr\pi}{3} + \frac{r^2h\pi}{3}$$

$$V = \frac{h}{3}.\left[R^2\pi + R\pi r + \pi r^2\right]$$

$V = \frac{h}{3}.\left[S_B + S_b + R\pi r\right]$, ainda $R\pi r = \sqrt{S_B.S_b}$, pois

$\sqrt{S_B.S_b} = \sqrt{\pi R^2 \pi r^2} = \sqrt{\pi^2.R^2.r^2} = R\pi r$, logo

$$V_{Tronco} = \frac{h}{3}.\left[S_B + S_b + \sqrt{S_B.S_b}\right]$$

(modelo matemático do cálculo do volume do tronco de altura h da Araucária).

5.3.3 Aplicação do modelo matemático

Após a definição do modelo matemático, sugeri aos alunos que voltassem ao local da pesquisa e escolhessem aleatoriamente cinco pinheiros adultos considerando para o cálculo do volume do tronco as alturas de 1,90 m; 2,5 m; 3 m; 4 m e 7 m, sendo assim obtiveram a tabela 5.

Tabela 4 Volume do tronco de altura h

Pinheiro	Altura h (m)	C.C.B. (m)	C.C.T. (m)	R (m)	r (m)	S_B	S_b	VT (m³)
1	1,90	2,16	1,96	0,34	0,31	0,363	0,3017	0,6305
2	2,50	2,21	1,87	0,3517	0,2976	0,385	0,2782	0,8293
3	3	2,09	1,51	0,3326	0,2406	0,3242	0,1814	0,7498
4	4	1,97	1,21	0,3135	0,1925	0,3087	0,1164	0,6146
5	7	1,88	0,42	0,2992	0,0668	0,2812	0,0140	0,8351

Sendo que:

h → altura do tronco.

C.C.B → Comprimento da Circunferência da Base do tronco.

C.C.T → Comprimento da Circunferência do Topo considerado.

R → Raio do círculo da base.

r → raio do círculo do topo.

S_B → Área Basal.

S_b → Área do círculo do topo

V_T → Volume do tronco.

Cálculos que justificam os dados da tabela 7 do volume do tronco de altura h.

Pinheiro 1

$C = 2\pi r$

C.C.B. = $2\pi R$	C.C.T = $2\pi r$
$2{,}16 = 2.\ (3.14)R$	$1{,}96 = 2.\ (3.1416).\ r$
$2.16 = 6{,}28R$	$1{,}96 = 6,\ 2832r$
$R = 0,\ 34$ m	$r = 0,\ 31$ m

$S_B = \pi R^2$

$S_B = (3,1416) . (0,34)^2$

$S_B = (3,1416) . (0,115)$

$S_B = 0,363 m^2$

$S_b = \pi r^2$

$S_b = 3,14 . (0,31)^2$

$S_b = 3,14 . (0.096)$

$S_b = 0,3017 \ m^2$

$$V_T = \frac{h}{3}\left[S_B + S_b + \sqrt{S_B . S_b}\right]$$

$$V_T = \frac{1,90}{3}\left[0,363 + 0,3017 + \sqrt{0,363 . 0,3017}\right]$$

$V_T = 0,6333 . [0,6647 + 0,3309]$

$V_T = 0,6305 \ m^3$

Pinheiro 2

C.C.B. = $2\pi R$

$2,21 = 2. (3.1416)R$

$2.21 = 6,2832R$

$R = 0,3517$ m

C.C.T = $2\pi r$

$1,87 = 2. (3.1416). r$

$1,87 = 6,2832r$

$r = 0,2976$ m

$S_B = \pi R^2$

$S_B = (3,1416) . (0,3517)^2$

$S_B = (3,1416) . (0,1236)$

$S_B = 0,3885 \ m^2$

$S_b = \pi r^2$

$S_b = 3,1416 . (0,2976)$

$S_b = 0,2782$

$$V_T = \frac{h}{3}\left[S_B + S_b + \sqrt{S_B . S_b}\right]$$

$$V_T = \frac{250}{3} . \left[0,3885 + 0,2782 + \sqrt{03885x0,2782}\right]$$

$$V_T = 0,8333 . \left[0,6667 + \sqrt{0,1080}\right]$$

$V_T = 0,8333 . [0,6667 + 0,3286]$

$V_T = 0,8333 . [0,9953]$

$V_T = 0,8293 \ m^3$.

Pinheiro 3

C.C.B. = 2πR

2,09 = 2. (3.1416)R

2.09 = 6,2832R

$$\frac{2,09}{6,2832} = R$$

R = 0,3326 m

C.C.T = 2πr

1,51 = 2. (3.1416). r

$$\frac{1,51}{6,2832} = r$$

r = 0,2403 m

$S_B = \pi R^2$

$S_B = (3,1416) . (0,326)^2$

$S_B = (3,1416) . (0,1062)$

$S_B = 0,3242\ m^2$

$S_b = \pi r^2$

$S_b = 3,1416 . (0,2403)^2$

$S_b = 3.1416 . 0,0577$

$S_b = 0,18140\ m^2$

$$V_T = \frac{h}{3}\left[S_B + S_b + \sqrt{S_B.S_b}\right]$$

$$V_T = \frac{3}{3}.\left[0,3242 + 0,18140 + \sqrt{0,3242x0,18140}\right]$$

$$V_T = 1.\left[0,5056 + \sqrt{0,059652}\right]$$

$V_T = [0,5056 + 0,2442]$

$V_T = 0,7498\ m^3$

Pinheiro 4

C.C.B. = 2πR

C.C.B. = 6,2832R

1,97 = 6,2832R

$$\frac{1,97}{6,2832} = R$$

R = 0,3135 m

C.C.T = 2πr

1,21 = 6,2832r

$$\frac{1,21}{6,2832} = r$$

r = 0,1925 m

$S_B = \pi R^2$

$S_B = (3,1416) . (0,3135)^2$

$S_B = (3,1416) . (0,09828)$

$S_b = \pi r^2$

$S_b = 3,1416 . (0,1925)^2$

$S_b = 3.1416 . (0,03705)$

$S_B = 0,30876\ m^2$ $S_b = 0,1164\ m^2$

$$V_T = \left[S_B + S_b + \sqrt{S_B.S_b}\right]$$

$$V_T = \left[0,30876 + 0,1164 + \sqrt{0,30876 \text{ x } 0,1164}\right]$$

$$V_T = \left[0,4251 + \sqrt{0,03593}\right]$$

$V_T = [0,4251 + 0,1895]$

$V_T = 0,6146\ m^3$

Pinheiro 5

C.C.B. $= 2\pi R$ C.C.T $= 2\pi r$

$1,88 = 6,2832R$ $0,42 = 6,2814r$

$R = 0,2992\ m$ $\frac{0,42}{6,2814} = r$

$r = 0,0668\ m$

$S_B = \pi R^2$ $S_b = \pi r^2$

$S_B = 3,1416\ .\ (0,2992)^2$ $S_b = 3,1416\ .\ (0,2668)^2$

$S_B = 0,2812\ m^2$ $S_b = 3,1416 \text{ x } 0,00447$

$S_b = 0,014042\ m^2$

$$V_T = \frac{h}{3}\left[S_B + S_b + \sqrt{S_B.S_b}\right]$$

$$V_T = \frac{h}{3}.\left[0,2952 + \sqrt{0,003936}\right]$$

$$V_T = \frac{7}{3}.\left[0,2952 + 0,06274\right]$$

$V_T = 2,3333\ .\ [0,3579]$

$V_T = 0,8351\ m^3$

5.3.4 Reflexão sobre o modelo desenvolvido

No início do trabalho, os componentes do grupo apresentavam muitas dúvidas como, de que ponto partir, quais variáveis deveriam ser consideradas, qual o formato geométrico do tronco das árvores. Em relação a este último aspecto, alguns componentes do grupo deduziam que a forma geométrica era de um cilindro reto, esta dúvida os levou a consulta de livros de cálculo que mencionava o assunto cálculo do volume de sólidos de revolução. Concluíram que a forma geométrica real era a de tronco de cone, confirmada também esta forma geométrica após a consulta pelos alunos a alguns biólogos.

O interessante que a pesquisa desenvolvida com modelagem matemática leva o pesquisador a ouvir outros profissionais que de forma indireta ajudam a definir elementos importantes na consolidação do modelo matemático estudado.

As aulas de cálculo, quando do estudo do volume de sólidos de revolução, foram determinante na escolha do tema. O cálculo, quando trabalhado paralelamente à modelagem matemática, pode auxiliar nossos alunos a definir temas mais diversos ligadas à nossa realidade, obviamente quando o assunto é proposto em sala de aula de forma objetiva. O referido grupo é exemplo desta possibilidade de associação do cálculo à modelagem matemática consolidada em sala de aula, pois havia dúvidas do que modelar em relação a araucária e pelo conteúdo exposto em sala, definiram com toda segurança o tema a ser desenvolvido. O papel do professor é fundamental nesta relação, pois nossos alunos assim podem contemplar esta possibilidade de aprendizagem com a participação direta e decisiva do professor. Como nossos alunos fariam esta associação se em aula nos limitássemos somente a aplicar integrais no cálculo do volume de sólidos?

Portanto, a modelagem matemática trabalhada paralelamente com o cálculo pode ser um bom caminho para estimular em nossos alunos a iniciação científica.

Foi possível perceber que o envolvimento dos alunos com a modelagem levou-os à busca da origem das expressões matemáticas relacionadas ao modelo como foi no caso da expressão do volume de um sólido de revolução. Atualmente nossos alunos não se interessam em deduzir, compreender de forma lógica fórmulas ou expressões matemáticas, preocupam-se tão somente em aplicá-las na busca rápida de certo resultado. Quando do desenvolvimento da pesquisa, percebi esta mudança de comportamento por parte dos alunos, que foram buscar os livros de cálculos a dedução da fórmula do volume de sólidos de revolução, isto tudo, motivado pela modelagem matemática, pois o entendimento de tal expressão seria fundamental na formulação e concretização do modelo matemático. Sendo assim, fica evidenciado que a modelagem matemática pode auxiliar nesta mudança de comportamento de nossos alunos, que foram habituados a esta maneira de se estudar matemática, ou seja, a forma de se receber fórmulas prontas e aplicá-las mediante informações contidas nos problemas. O que mais nos intriga neste quadro é que a maioria dos professores de matemática estão incluídos neste contexto, estes elaboram suas avaliações considerando questões semelhantes as resolvidas em aula para que o aluno não seja prejudicado na referida avaliação. Desta forma, a modelagem matemática incluída nas aulas de cálculo pode auxiliar na mudança deste quadro porque vai mais além, ela nos leva a refletir como proceder, o que deve ser relacionado, leva-nos ao debate coletivo fazendo com que os alunos não sejam meros participantes de uma aula, mas sim construtores de uma boa aula de cálculo.

No processo de elaboração do modelo, a retomada de conceitos elementares como o de função do 1º grau, área do circulo, geometria espacial, conceitos que se perdem ao longo do tempo por parte do aluno são fundamentais na estruturação do modelo associado a conceitos mais complexos da matemática superior como o das integrais definidas e o teorema fundamental do cálculo, juntos harmonizam-se, originando com estas relações, desde do elementar ao mais complexo, ao modelo matemático pretendido.

Esta associação de conceitos de forma lógica pode ser possibilitada pela modelagem matemática, que indiretamente induz ao aluno na busca destes conceitos que outrora não tinham importância ou aplicação nas suas respectivas formações. Considerando este aspecto, pode ficar a evidência que a modelagem matemática associada ao ensino do cálculo diferencial e integral é um bom caminho metodológico de ensino de matemática de forma dinâmica e mais atraente aos nossos acadêmicos, que não se limitarão a uma visão particularizada, mas sim, poderão adquirir uma visão do todo interligado.

Os componentes do grupo 3, em suas considerações finais, conforme o trabalho apresentado em sala de aula, concluíram que a modelagem matemática pode ser considerada uma metodologia diferenciada no ensino da matemática, pois por intermédio desta visualizaram a aplicação de conceitos estudados em sala, no estudo de uma questão do mundo real, consideraram ainda que a modelagem matemática consolida-se como uma alternativa dotada de muita criatividade, audácia e significância, visto que a criação do modelo para o cálculo do volume do tronco lhes proporcionou um contato expressivo da matemática com o meio em que ele esta inserido cotidianamente.

Destacaram como ponto forte da pesquisa a importância de se realizar aulas de campo, junto à realidade dos fenômenos naturais, para aliar desta forma a teoria aprendida em sala, a estes fenômenos tão próximos de nossa realidade.

Por estas considerações apresentadas pelos acadêmicos podemos dizer que a modelagem matemática associada ao processo ensino-aprendizagem poderá contribuir na formação de alunos mais críticos e mais entusiasmados na realização de pesquisas.

5.4 Grupo 4: Modelo Matemático da Equação da Curva dos Galhos de Araucárias 5dultas

Figura 14 Componentes do grupo 4

5.4.1 Relatos relacionados ao Modelo

Os componentes do grupo 4 após a escolha do modelo a ser estudado procuram deixar claro que o objetivo do trabalho é definir o modelo do curvatura dos galhos de uma araucária adulta, mostrando desta forma, que a geometria analítica por meio de suas equações pode explicar de forma clara alguns fenômenos naturais tendo como ferramenta de apoio o cálculo.

Destacaram que a devida equação é uma aproximação da equação relacionada aos galhos das araucárias, que possibilita uma maneira de correlacionar dados partindo do mundo real para a linguagem abstrata ou matemática, dando desta forma, ênfase de que a modelagem é um processo de construção de modelos que explica uma situação real por intermédio da linguagem matemática.

O trabalho da equipe foi desenvolvido em etapas que proporcionaram uma pesquisa detalhada e precisa na obtenção de informações. As etapas foram: a) aula de campo para escolha do aspecto da espécie a ser estudado; b) encontro do grupo para o levantamento das variáveis; c) utilização de cálculos iniciais na construção do modelo; e d) definição do modelo matemático.

A aula de campo foi realizada no dia 01/04/2006 na propriedade do Sr. João Couto na localidade de Lageadinho.

Neste local, os alunos levantaram dados, primeiramente ouviram a professora MSc Rita Chaves, bióloga convidada para falar sobre a espécie, considerando aspectos gerais como, forma de reprodução, habitat e a importância econômica para a região serrana de Santa Catarina.

Em relação à escolha do tema, os componentes do grupo o definiram na aula de campo, pois os acadêmicos tinham a liberdade em fazê-lo após as palestras e orientações que ocorreram na referida aula.

Para levantar as variáveis do modelo matemático dos galhos das araucárias os alunos escolheram alguns pinheiros da propriedade rural, como também, pinheiros do perímetro urbano da cidade de Lages – SC.

Depararam-se com algumas dificuldades, como a altura dos pinheiros que dificultava na determinação de pontos distribuídos ao longo do comprimento dos galhos. Para obter a abscissa **x (**que representa a variação no eixo horizontal) e a ordenada **y** (a variação no eixo vertical) do tronco do pinheiro, usaram fotografias aplicando a semelhança e proporcionalidade na definição destes pontos para a definição do modelo, ou seja, consideraram as variações nos eixos conforme a figura 16.

5.4.2 Da construção e definição do Modelo matemático

Inicialmente os componentes do grupo escolheram um pinheiro no perímetro urbano para se obter os pontos distribuídos ao longo dos galhos. Com a definição dos galhos iniciou-se a escolha dos pares ordenados P(x, y) segundo o procedimento: consideraram a figura 15 do pinheiro.

Figura 15 Pinheiro do perímetro urbano

O tronco do pinheiro representa o eixo y sendo que o eixo x representa o plano horizontal conforme figura 15.

Figura 16 Pinheiro do perímetro urbano, com os eixos x e y e linhas auxiliares

Por intermédio da figura 16, obteve-se assim os pontos (x, y) distribuídos na curvatura dos galhos por meio de uma divisão definida como galho 1, representado pela curvatura do lado esquerdo e galho 2 pela curvatura do lado direito.

Definiram desta forma 30 pontos por galho com o uso de régua, lápis e borracha marcados sobre a figura. Através desse procedimento definiu-se ponto-a-ponto dos galhos em valores representados em centímetros, os pares ordenados (x, y) assim definidos.

Após a definição dos pontos a preocupação dos acadêmicos era descobrir qual à equação que mais se aproximava com a curvatura dos galhos.

Para se ter a definição da equação fizeram o gráfico no Excel. Com a construção do gráfico no Excel, observaram que este forneceu uma equação do tipo y = a x² +bx + c sendo este o ajuste que forneceu o menor erro segundo o parâmetro R², ou seja, o melhor ajuste segundo os componentes do grupo foi o polinomial.

O gráfico 6, mostra a equação do galho 1 com o ajuste feito no Excel. A respectiva equação foi definida pelos pontos levantados no processo de coleta de dados.

Gráfico 11 Galho 1 (esquerdo) com tronco

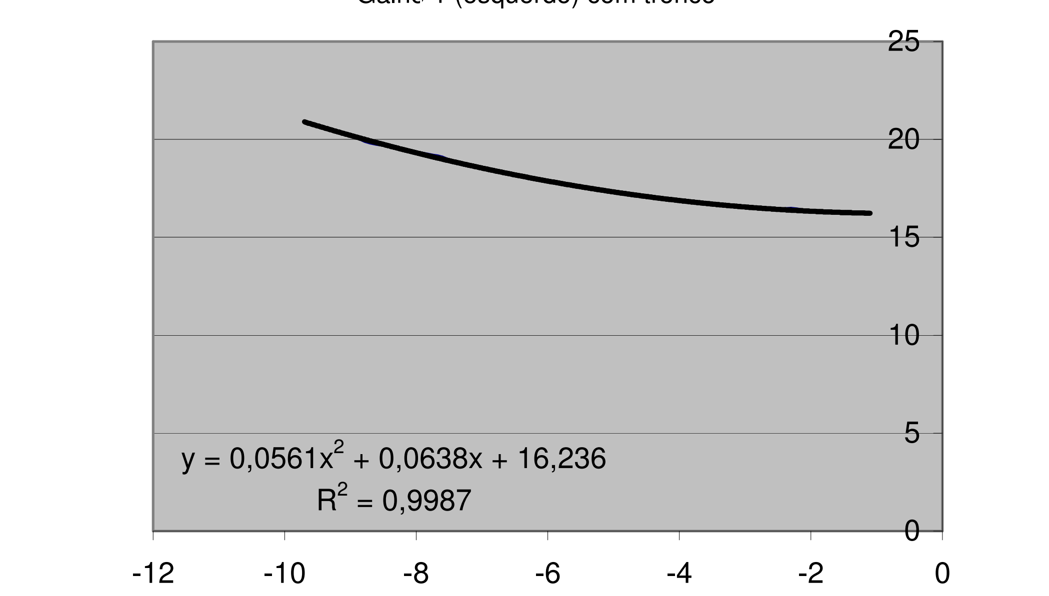
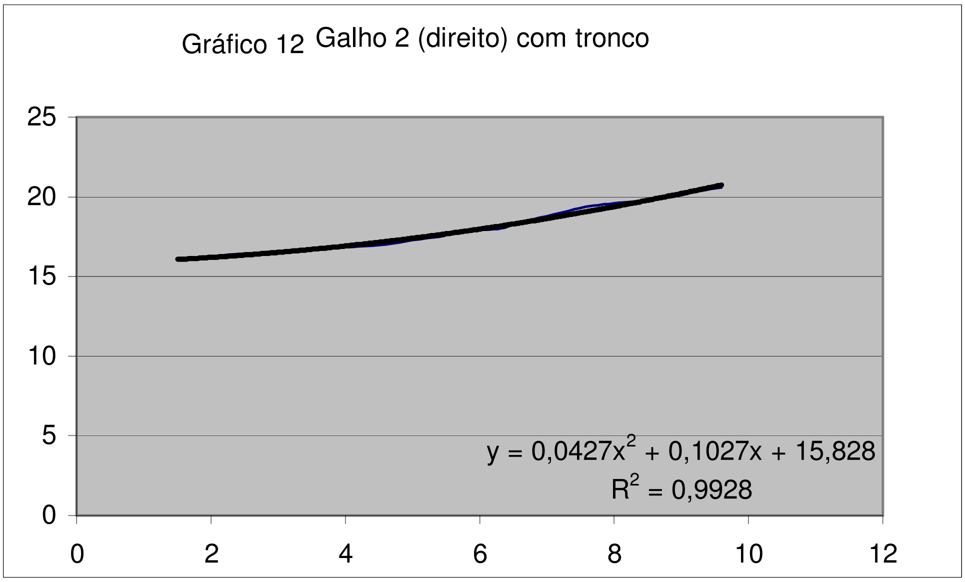


Tabela 5 Dos pontos do galho 1 levantados a partir da figura 16 do pinheiro do perímetro urbano, medidas em centímetros.

X	Y
-9,7	20,9
-9,3	20,5
-9	20,2
-8,7	19,8
-8,3	19,6
-7,9	19,3
-7,6	19,1
-7,3	18,7
-6,9	18,5
-6,6	18,3
-6,3	18
-5,9	17,8
-5,5	17,6
-5,2	17,4
-4,8	17,2
-4,4	17
-4	16,9
-3,8	16,8
-3,4	16,7
-3,3	16,6
-2,9	16,5
-2,6	16,4
-2,3	16,3
-1,9	16,2
-1,5	16,1
-1,1	16
-1	15,9

De forma análoga definem a equação do galho 2 (situado à direita do tronco) conforme o gráfico 14.



Para a definição da equação levantaram os pontos da tabela 6.

Tabela 6 Dos pontos do galho 2 levantados a partir da figura 16 do pinheiro do perímetro urbano, medidas em centímetros

X	Y
9,6	20,6
9,3	20,4
9	20,1
8,7	19,9
8,3	19,7
7,8	19,5
7,5	19,3
7,1	18,9
6,7	18,5
6,5	18,3
6,3	18
5,9	17,9
5,6	17,7
5,4	17,5
5	17,3
4,6	17
4,2	16,9
3,8	16,8
3,6	16,7
3,3	16,7
3,1	16,6
2,7	16,5
2,4	16,4
2,1	16,3
1,8	16,2
1,6	16,1
1,5	16

Os gráficos da curva do galho 1 como da curva do galho 2, não partem da mesma origem do eixo Y, pois ambos estão representados com o tronco do pinheiro, com o intuito de poder observar melhor a dimensão da curvatura os componentes do grupo constroem o gráfico sem tronco.

Gráfico 13 Galho 1 sem tronco

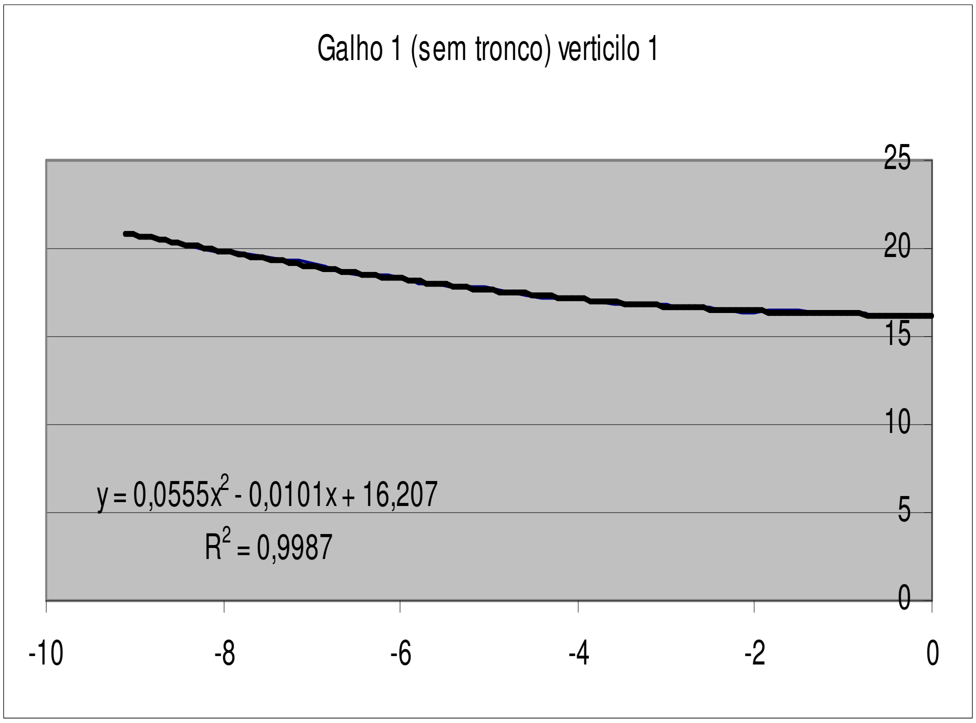
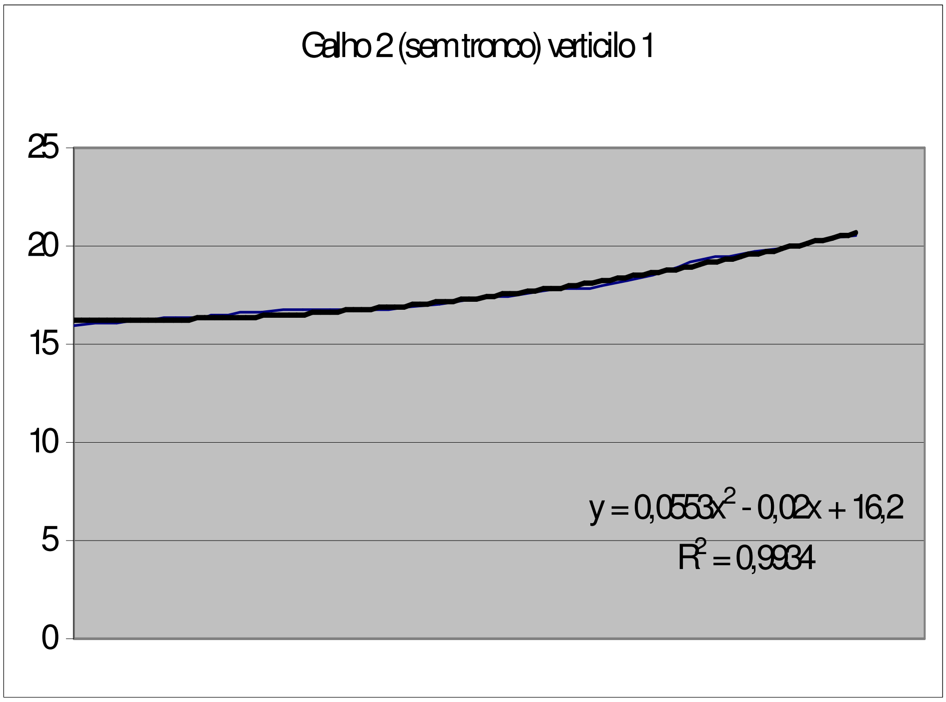


Gráfico 14 Galho 2 sem tronco



Com os gráficos 8 e 9 dos galhos sem o tronco, pode-se observar que estes valores não partem de um mesmo ponto (verticilo), assim comprovam que a melhor maneira de se efetuar e obter as equações foi o de dividir os galhos como foi realizado.

A partir dos gráficos 8 e 9, os alunos observam um R^2 muito eficiente, mostrando que a equação tem um enorme grau de aproximação da realidade. Para comprovar esta aproximação, atribuíram valores de x na equação encontrada obtendo o valor correspondente y do par ordenado bem próximo aos valores definidos nos pontos levantados, não necessitando assim de novo ajuste de curva.

Considerando alguns pontos substituindo x na equação.

⇒ Ponto (-9,7 ; 20,9) primeiro ponto do galho 1

$y = 0{,}0561\ x^2 + 0{,}0683x + 16{,}236$

$y = 0{,}0561\ .\ (-9{,}7)^2 + 0{,}0638\ .\ (-9{,}7) + 16{,}236$

$y = 0{,}0561\ .\ (94{,}09) - 0{,}6188 + 16{,}236$

$y = 5{,}2784 - 0{,}6188 + 16{,}236$

$y = 20{,}89$

A ordenada 20,89 é compatível com a ordenada obtida no processo de levantamento dos dados.

⇒ Ponto (3,3 ; 16,7) ponto do galho 2.

$y = 0{,}0427\ x^2 + 0{,}1027x + 15{,}828$

$y = 0{,}0427\ .\ (3{,}3)^2 + 0{,}1027\ .\ (3{,}3) + 15{,}828$

$y = 0{,}0427\ .\ (10{,}889) + 0{,}3389 + 15{,}828$

$y = 0{,}4650 + 0{,}3389 + 15{,}828$

$y = 16{,}6$

A ordenada 16,6 é compatível, ou seja, está bem próxima a ordenada obtida no processo de levantamento dos dados. Sugeri ao grupo que realizasse o procedimento com 20 pontos escolhidos aleatoriamente, confirmando assim, a aproximação da equação da curva com a realidade.

5.4.3 Reflexões sobre o modelo desenvolvido

O trabalho realizado pelo respectivo grupo nos leva a reflexões importantes mediante as observações feitas por este. Destacam que quando aplicada no ensino, a modelagem pode ser vista como um meio de descrever matematicamente certo fenômeno escolhido livremente pelos alunos.

Esta conclusão apresentada pelos alunos muitas vezes não ocorre imediatamente com o desenvolvimento do trabalho, gradativamente perceberam que o mundo real pode ser estudado mediante linguagem matemática. Este processo deve ocorrer no nosso ponto de vista com muita naturalidade, pois assim, estaremos contribuindo para que a percepção e por conseqüência a correlação das variáveis envolvidas no fenômeno possam ser definidas.

Destacam também que a aprendizagem do cálculo tornou-se mais interessante, motivada pela aplicação da modelagem no processo, os levando a reflexões decisivas na formatação do modelo. Este sem dúvidas é um aspecto positivo, pois aprender cálculo de forma lógica e objetiva é ainda uma barreira encontrada por grande parte dos estudantes da referida disciplina.

A modelagem matemática pelo exposto pode ser uma forma de tornar o entendimento das teorias do cálculo diferencial integral mais familiar para nossos acadêmicos, porque não estarão simplesmente conhecendo as técnicas de derivação e integração, além disso, estarão aplicando e por conseguinte compreendendo com maior facilidade o porque de tais técnicas.

Consideramos como aspecto de maior relevância ligada ao grupo, o fato que a mudança de ambiente proporcionou ao elemento aprendizagem. Aulas de campo podem redirecionar a atenção de nossos alunos, pois há vasta possibilidade de aplicar o cálculo nos fenômenos naturais. Entre os componentes do grupo, alguns na tradicional sala de aula mostravam-se desmotivados em aprender, eram meros participantes das aulas não esboçando se quer uma iniciativa de participação mediante questionamentos. Esse quadro muda completamente na aula de campo, após observei alunos questionadores comprometidos e interessados em aplicar a linguagem matemática no estudo de um fenômeno da natureza.

A modelagem matemática pode ser uma forma para a mudança deste quadro. Por que nossos alunos têm dificuldade em realizar pesquisa? Em se envolver com a pesquisa? Será que o aspecto salas e somente salas de aula não é um dos elementos para a construção deste questão?

O tratamento dos dados em laboratório na construção das curvas em busca do melhor ajuste leva pos acadêmicos a utilizar *software* (excel) na elaboração destas entendendo assim que modelos matemáticos podem ser definidos com maior precisão e rapidez com a utilização de *software*, pois, como sabemos realizar este processo manualmente com a teoria dos mínimos quadrados torna-se trabalhoso requerendo maior tempo.

Com o desenvolvimento da pesquisa observamos uma equipe determinada em atingir seus objetivos, que valorizou em muito a riqueza das discussões em sala de aula. Esta dinâmica no processo ensino-aprendizagem pode mostrar que por meio da modelagem o educando traz para sala de aula as questões que geralmente são levantadas pelo professor de cálculo, desta forma, alunos e professor podem juntos desenvolver aulas com bons índices de aprendizagem.

Sendo assim, defendemos a idéia que novos projetos voltados à aplicação da tecnologia no processo educacional sejam desenvolvidos pelos educadores de cálculo, projetos inteligentes e adaptáveis à educação matemática, como por exemplo: os estudos sobre a utilização de calculadoras gráficas em cursos de cálculo diferencial e integral. A modelagem matemática pode sem dúvidas estar relacionada nestes projetos como meio didático pedagógico para aprendizagem do cálculo.

Segundo Mora (2002, p. 39):

> algumas das críticas feitas aos métodos de projetos estão vinculadas com as possíveis dificuldades apresentadas pelos professores na avaliação individual de seus alunos. Sabemos que os sistemas educativos tem dado muito peso a evolução dos educandos a partir do ponto de vista coletivo. Há certa insistência em avaliar alunos buscando-se exclusivamente no seu rendimento individual, medido exclusivamente mediante provas mensais, anuais o de outra natureza, as quais normalmente são escritas o que representa uma carga de trabalhos muito elevada para os professores. A prática educativa centrada no método de projetos permite, com maior facilidade apreciação das turmas e o desenvolvimento da aprendizagem dos participantes".

A modelagem matemática aplicada no ensino de cálculo possibilita a avaliação coletiva de nossos alunos que por intermédio da elaboração de projetos de pesquisa poderão juntos realizar a coleta de dados, correlacionar as variáveis envolvidas na definição do modelo até a conclusão do mesmo. Assim crescem juntos, realizam discussões coletivas, como ocorreu com este grupo durante todo o trabalho desde a escolha do modelo até a apresentação dos resultados.

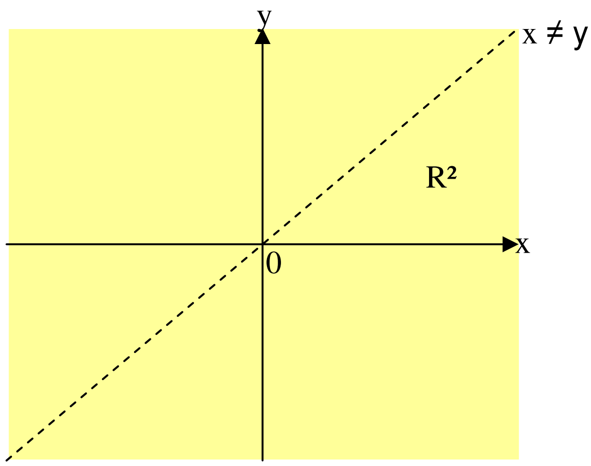
Figura 17 Apresentação do trabalho final do grupo 4

As curvas cônicas são importantes no estudo do cálculo diferencial e integral, como por exemplo na determinação do campo de existência de funções com mais de duas variáveis que pode ser definido com o auxílio de esboço de gráficos construídos pelas cônicas (Hipérbole, elipse, parábola) tanto no R^2 como no R^3.

Este assunto foi trabalhado com os acadêmicos antecedendo as derivadas. Estudaram o campo de existência de funções como $z = \frac{1}{x - y}$ sendo que $x - y \neq 0$ logo

$Dz = \{\forall\ (x, y)\ \varepsilon R^2 /\ x \neq y\}$

Gráfico 15 no R^2



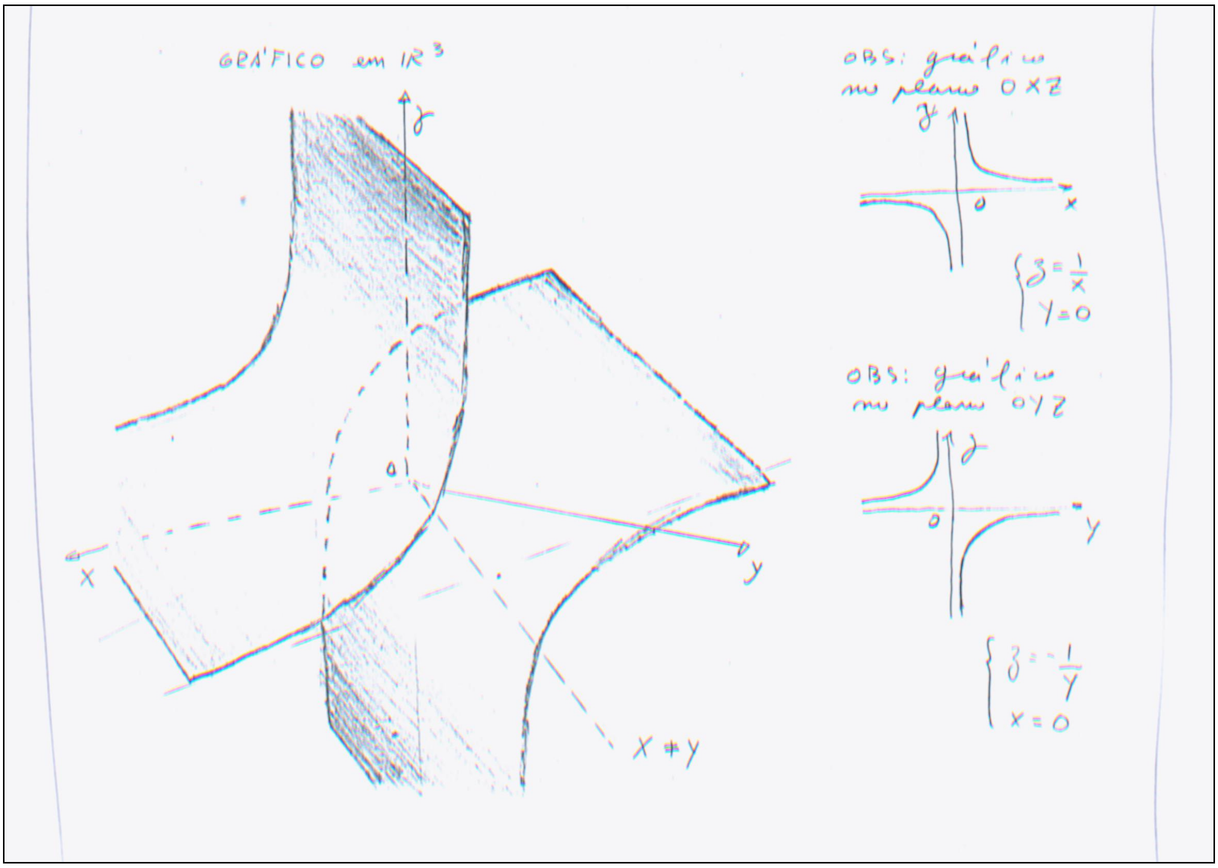


Gráfico 16 no R³

Quando do desenvolvimento do modelo matemático da equação da curvatura dos galhos da araucária o grupo teve plenas condições de correlacionar a teoria das cônicas presentes neste estudo específico da araucária e a realidade. Este é outro aspecto interessante proporcionado pela modelagem matemática no ensino do cálculo, a relação que os estudantes podem definir entre a linguagem matemática estuda em sala de aula com os fenômenos naturais.

Os componentes deste grupo de pesquisa em suas considerações finais concluem seu trabalho com as seguintes palavras:

> com base em todo aprendizado obtido através desta pesquisa, concluímos de como é possível obter variáveis, extrair dados de uma única espécie vegetal como a araucária, e de como é interessante e de grande valia para os estudos da ciência da computação. Isto quando do ajuste de curvas com o auxílio do Excel, realizando pesquisa em campo obtendo assim um melhor entendimento de modelagem matemática, e o mais importante aprendendo na prática cálculo diferencial e integral.

Estas considerações apresentadas pelos alunos no seu trabalho final mostra que, aprender cálculo com o auxílio da modelagem matemática é mais interessante possibilitando a aplicação da teoria conhecida em situações reais.

A modelagem matemática, quando aplicada no estudo de problemas de certas regiões, pode ser um importante instrumento pedagógico no ensino do cálculo, considerando, entretanto, elementos como o relacionamento entre os temas escolhidos pelos alunos e o programa da disciplina.

Devem estar bem definidos para que a referida ementa de cálculo não seja comprometida somente com a realização de aulas de campo, defasando a carga horária que deve ser cumprida em sala de aula. Esse ponto deve ser considerado pelo educador que opte por esta metodologia de ensino.

A presente pesquisa tem como objetivo avaliar os resultados da utilização do cálculo diferencial e integral à utilização da modelagem no ensino de matemática, quando aplicando com o intuito de minimizar essas dificuldades.

5.5 Grupo 5: Modelo Matemático para o Cálculo da altura da *Araucaria angustifolia*

5.5.1 Relatos relacionados ao modelo

Os alunos do grupo 5 definiram o aspecto a ser estudado sobre a araucária na aula de campo, quando alguns alunos ficaram surpresos com a altura de vários pinheiros, alguns com altura superior a 20 m, segundo informações de moradores da propriedade onde foi desenvolvida a aula de campo.

Diante dessa informação, os alunos trocaram opiniões sobre meios práticos de como se determinar a altura dos pinheiros.

Após alguns encontros em horários extras e também pelas orientações em sala de aula definiu-se duas formas práticas para o cálculo da altura das araucárias.

Os modelos desenvolvidos não apresentam em sua constituição derivadas ou integrais, pois foram formados por conceitos elementares em matemática. No caso, apresentam razões e proporções.

5.5.2 Da construção dos modelos

O primeiro modelo desenvolvido para o cálculo da altura apresenta uma expressão simplificada, que por meio de uma figura de um pinheiro com um parâmetro de medição representado pela altura de um dos alunos do grupo, definem as seguintes variáveis:

- Altura parâmetro real (HPR)
- Altura do parâmetro na figura (HPF)
- Altura da araucária na figura (HAF)
- Altura real do pinheiro (HRP)

A relação entre as variáveis pode ser expressa pela proporção:

$$\boxed{\frac{HAF}{HRP} = \frac{HPF}{HPR}}$$

Ou seja, a altura da araucária na figura está para a altura real do pinheiro, assim como a altura do parâmetro na figura está para a altura real do parâmetro.

$$HRP \,.\, HPF = HAF \,.\, HPR$$

$$\boxed{HRP = \frac{HAF.HPR}{HPF}}$$

Para melhor ilustração, os alunos do grupo 5 retornaram ao local da aula de campo e aplicaram o modelo para a determinação da altura de algumas araucárias conforme o exemplo a seguir.

Considerando o pinheiro da figura 18 cujo parâmetro de medição é a altura do aluno igual a 1,85 cm, calcula-se a altura da araucária.

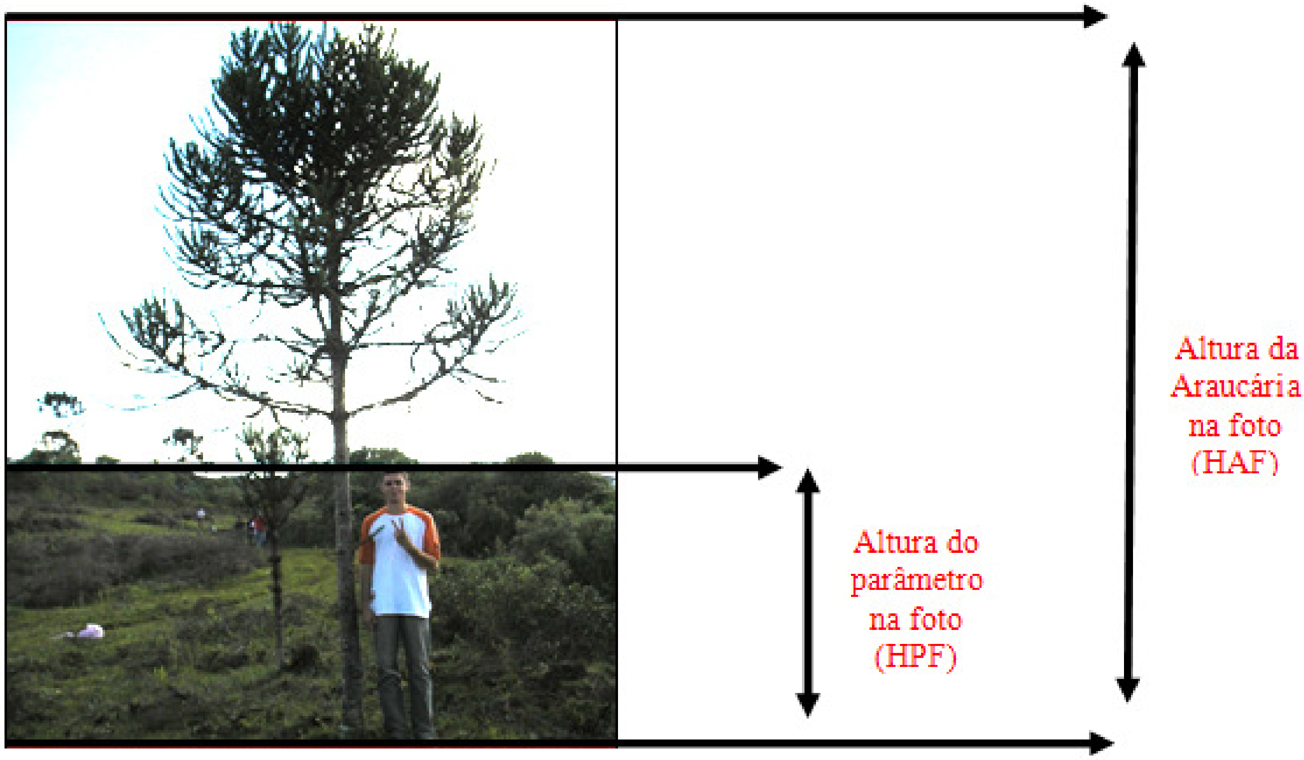


Figura 18 Parâmetro de medição para o cálculo da altura da araucária

Onde: HAF = 10,07 cm

HPR = 1,85 cm

HPF = 4 cm

Aplicando o modelo

$$HRP = \frac{HAF.HPR}{HPF}$$

$$HRP = \frac{10{,}07\,.1{,}85}{4}$$

$$HRP = \frac{1862{,}95}{4}$$

$HRP = 465{,}73$ cm

$\boxed{HRP = 4{,}65 \text{ m}}$

Logo a altura do pinheiro considerado é de 4 m e 65 cm.

Na apresentação do trabalho pelos alunos do grupo 5 na aula final do semestre apresentaram a aplicação do modelo matemático para a determinação da altura de dez pinheiros localizados na propriedade onde foi realizada a aula de campo.

Os componentes do grupo 5 consideraram o primeiro modelo matemático uma forma simplificada na determinação das alturas dos pinheiros. Elaboraram e pesquisaram uma outra forma para o desenvolvimento do modelo 2 para o cálculo da determinação da altura.

O segundo modelo utiliza um instrumento usado em biometria florestal denominado Hipsômetrico de Christen.

Segundo Finger (1992, p. 40),

> Hipsômetro de Christen é um instrumento simples, de fácil construção e manuseio usado na medição de árvores. Tem a vantagem de dispensar a medição da distância horizontal do observador até a árvore. Deste modo, evitam-se erros de medição das distâncias, e proporciona maior rendimento no trabalho se o operador for bem treinado. O instrumento é construído sobre uma régua de madeira, metal ou acrílico, com comprimento total variável a qual apresenta uma relutância de 30 cm, onde esta gravada a escala para a leitura das alturas da árvore, obtidas por cálculos de proporcionalidade.

Com uso do hipsômetro, o mesmo substitui a figura, sendo que na escala do instrumento pelas medidas (cm) nele indicadas, tanto do pinheiro como do parâmetro de medição representado por uma estaca, é possível determinar a proporção que define a altura da araucária.

Para a determinação da altura são consideradas as variáveis:

- Altura parâmetro real (HPR)
- Altura do parâmetro no hipsômetro (HPI)
- Altura da Araucária no Hipsômetro (HAI)
- Altura Real da Araucária (HAR).

O modelo definido é:

$$\frac{HPR}{HPI} = \frac{HAR}{HAI}$$

$$HAR \, . \, HPI = HPR \, . \, HAI$$

$$HAR = \frac{HPR \, . \, HAI}{HPI}$$

A figura 19 exemplifica o cálculo da altura do pinheiro com a utilização do hipsômetro.

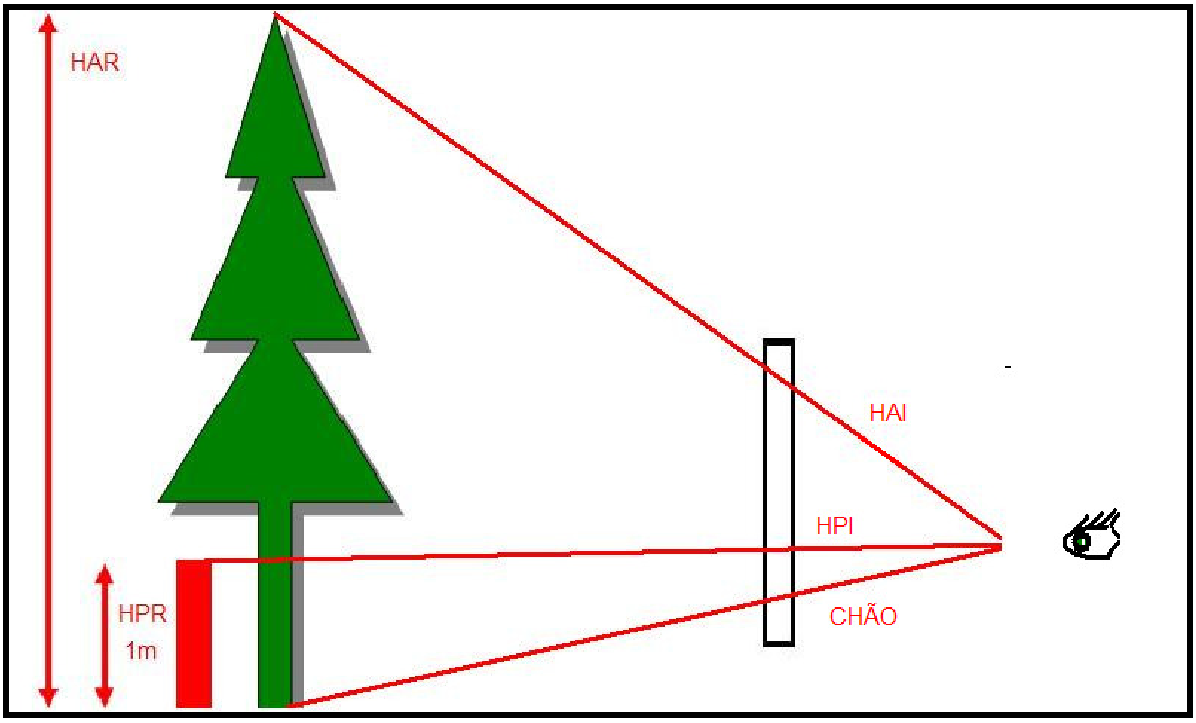


Figura 19 Utilização do hipsômetro para cálculo da altura da araucária

Considerando supostos valores em centímetros, ou seja,

HPR = 100

HAI = 20

HPI = 5 temos que

$$HAR = \frac{100\,.\,20}{5}$$

$$HAR = \frac{2000}{5}$$

HAR = 400

Confirma o exemplo, supondo que o pinheiro mensurado pelo hipsômetro mede aproximadamente 4 m.

5.5.3 Reflexões sobre o modelo desenvolvido

O trabalho realizado pelo grupo nos mostra que é possível desenvolver modelos matemáticos estruturados em conceitos elementares da matemática, esses bem aplicados na elaboração de modelos podem auxiliar no estudo de questões ligadas à realidade.

Desta forma, podemos refletir sobre a questão. A modelagem matemática pode perpassar por todos os níveis da educação, desde o ensino fundamental ao ensino superior?

Defendemos a idéia de que este processo é possível pela pesquisa realizada por estes acadêmicos que foram em busca de meios matemáticos para determinar a altura de pinheiros, alguns muito altos; suas respostas foram encontradas em razões e proporções, tema desenvolvido nas primeiras séries do ensino fundamental.

A metodologia matemática levou os acadêmicos a consultar bibliografias relacionadas ao assunto como forma de comprovar o modelo desenvolvido.

Essa é uma característica importante da modelagem matemática, ou seja, o levantamento bibliográfico com o objetivo de enriquecer a pesquisa desenvolvida.

No caso específico deste grupo, encontraram informações em bibliografias ligadas à biometria florestal, assim fica a evidência de que a modelagem aplicada no processo ensino-aprendizagem conduz e estimula os alunos a consultar livros ligados às mais diversas áreas do conhecimento, dinamizando assim, a aprendizagem e ligando a modelagem matemática ao caráter interdisciplinar. Esses pontos destacados acima ficaram evidenciados pela pesquisa realizada pelos alunos do grupo 5.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao concluir este trabalho, apresento o ensino do cálculo diferencial e integral com a aplicação da modelagem matemática no estudo de problemas relacionados ao crescimento das araucárias da região sul do Brasil. Os alunos do curso de Ciências da Computação das Faculdades Integradas FACVEST buscam novos caminhos metodológicos para aperfeiçoamento desta disciplina.

Constatei que houve aprendizagem do cálculo, pois a aplicação da modelagem matemática foi fator determinante para a concretização deste objetivo, contribuindo também, na formação de alunos mais críticos e aptos a aplicar os conhecimentos adquiridos em questões ligadas à realidade.

Conseguimos ligar a teoria do cálculo diferencial e integral com a realidade, dando mais sentido ao conteúdo desenvolvido em sala de aula, pois, os acadêmicos não foram limitados tão somente a conhecer as técnicas de derivação e integração.

O uso de *software,* no caso a planilha Excel para o ajuste de curvas e definição de alguns modelos, contribuiu na formação dos alunos, sendo estes mais críticos e observadores, constataram erros apresentados em alguns ajustes.

Com a aplicação da modelagem matemática no ensino do cálculo, o professor deixa de ser o centro das atenções, pois há uma participação mais ativa dos alunos que podem opinar, partem de um problema e assim definem qual o conteúdo que deve ser aplicado na busca da solução. O cálculo passa a ser melhor entendido quando há a transferência da teoria para o mundo real.

Precisamos inovar, quebrar paradigmas que são considerados imutáveis por alguns professores de matemática que se preocupam somente com o cumprimento integral de ementas das disciplinas. Educação matemática não pode se resumir em conclusão de ementas, mas sim no entendimento prático dos conteúdos que as constituem.

Portanto, a modelagem matemática aplicada no ensino do cálculo é uma forma para a mudança deste quadro em educação matemática. O papel do professor é fundamental nesta relação para que nossos alunos possam contemplar esta forma de aprendizagem dinâmica e mais eficiente.

Segundo Bassanezi (2002, p. 16):

> Acreditamos que os professores devem valorizar o que ensinam de modo que o conhecimento seja ao mesmo tempo interessante, por ser útil, e estimulante, por ser fonte de prazer. Assim, o que propomos é a busca da construção de uma prática de ensino-aprendizagem matemática que combine situações e resultados práticos. Nessa nova forma de encarar a matemática, a modelagem que pode ser tomada tanto como um método científico de pesquisa quanto como uma estratégia de ensino-aprendizagem tem se mostrado muito eficaz. No setor educacional, a aprendizagem realizada por meio da modelagem facilita a combinação dos aspectos lúdicos da matemática com seu potencial de aplicação. E mais, com a modelagem, o estudante vislumbra alternativas no direcionamento de suas aptidões ou formação acadêmica.

A aplicação da modelagem matemática, como proposta para o ensino do cálculo nesta pesquisa, exigiu uma constante interação entre o professor e os alunos envolvidos no processo, sendo esta relação responsável pela inserção da abordagem qualitativa no âmbito deste trabalho.

A presente pesquisa contém um conjunto de argumentações, que mostram que a utilização da modelagem matemática no ensino do cálculo é uma alternativa viável e uma ferramenta didática eficiente para a formação de alunos mais críticos capazes de influenciar as transformações que ocorrem no mundo real.

A aplicação da modelagem matemática, neste processo de ensino, mostrou-nos a mudança de comportamento de alguns alunos em sala de aula, ou seja, alunos totalmente desligados, distraídos após a apresentação da proposta em estudar o cálculo vinculado à realidade mediante a modelagem, passaram a ter outro comportamento, tornaram-se participativos e construtores de forma ativa de boas aulas.

É possível que professores de matemática passem por dificuldades para a adoção de atividade aplicando a modelagem, pois por tradição, a modelagem matemática é pouco explorada em livros-texto, e também pelo fato da cobrança ao professor pelo cumprimento do programa da disciplina. Com o trabalho desenvolvido, foi possível cumprir a ementa da disciplina, bastou para isso planejamento por parte do professor que pode tranquilamente desenvolver os conteúdos paralelamente com a aplicação da modelagem matemática.

Espero com esse trabalho que possibilidades da aplicação da modelagem matemática no ambiente de sala de aula, especificamente nas aulas de cálculo diferencial e integral, possam auxiliar educadores em conhecer essa estratégia metodológica como uma forma de mudança dos métodos tradicionais de ensino, contribuindo assim para que o professor autoavalie suas metodologias de ensino passando a ser como elemento motivador, incentivador no processo ensino aprendizagem.

Pelos modelos desenvolvidos pelos grupos, atingi todos os objetivos estabelecidos. Os modelos enfatizaram a criatividade, a compreensão e a reflexão sobre problemas regionais ligados à realidade, sendo que os alunos estabeleceram suas estratégias e experiências na compreensão do cálculo, no estudo de uma situação problema.

REFERÊNCIAS

ASSIS, Célia. **Matas de Araucária**. São Paulo: FTD, 1994.

BARBOSA, J. C. **O que pensam os professores sobre a modelagem matemática?** Campinas, SP. v. 7. n. 11. 1999. p. 67 – 85.

_____. **Modelagem matemática**: o que é? Por que? Como? Veritati, v. 4. 2004, p. 73 – 80.

BARRETO, Maria Auxiliadora Pacheco. Processos administrativos/orientações. Disponível em: < http://www.suvisa.rn.gov.br/institucional/proc_adm.htm>. Acesso em: 18 nov. 2005.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. 1. ed. São Paulo: Contexto, 2002.

BEAN, Dale. O que é modelagem matemática? **Educação Matemática em Revista**, SBM/RS, n. 9, a. 8, p. 49-57, 1999.

BEIMBENGUT, Maria Salete. **Modelagem matemática e implicações no ensino e na aprendizagem de matemática**. 2. ed. Blumenau, SC: FURB, 2004.

BEIMBENGUT, Maria Salete.; HEIN, Nelson. **Modelagem matemática no ensino**. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2003.

BORBA, Marcelo de Carvalho (org.). **Pesquisa qualitativa em educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

BRONSON, Richard. **Moderna introdução das equações diferenciais**. Tradução de Alfredo Alves de Farias, revisão técnica Roberto Romano. São Paulo: McGraw-Hill, 1977.

CALMON, Miguel Antonio de Góes. A floresta ombrófila mista. Um símbolo da Mata Atlântica a ser salvo da extinção. *In*: MEDEIROS, João de Deus.; GONÇALVES, Marco Antônio.; PROCHNOW, Miriam.; SCHÄFFER, Wigold B. **Floresta com araucária**: um símbolo da Mata Atlântica a ser salvo da extinção. Rio do Sul; Associação de Preservação do Meio Ambiente do Alto Vale do itajaí (APREMAVI), 2004.

D’AMBRÓSIO, Ubiratam. **Educação para uma sociedade em transição**. São Paulo: Papirus, 1999.

FAZENDA, Ivani Catarina Arante. **Práticas interdisciplinares na escola**. 8. ed. São Paulo: Cortez, 2001.

FINGER, César Augusto Guimarães. **Fundamentos de biometria florestal**. Santa Maria, RGS: UFSM/CEPEF/FATEC, 1992.

FLEMMING, Diva Marilia. GONÇALVES, Miriam Buss. **Cálculo A: Funções limite, derivação, integração**. 5 ed. São Paulo, Makrom, 1992.

FRANCHI, Regina U. de Oliveira Lino. **A modelagem matemática como estratégia de aprendizagem do cálculo diferencial integral nos cursos de engenharia**. 1993, 148 f. Tese (Dissertação de Mestrado)-Curso de Pós-Graduação em Educação matemática, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Campus Rio Claro, São Paulo, 1993.

FUNDAÇÃO de Pesquisas Florestais do Paraná – FUPEF. Instituto Brasileiro de Desenvolvimento Florestal – IBDF. Inventário Florestal do Pinheiro no Sul do Brasil – Relatório final Curitiba, 1978.

FURASTÉ, Pedro Augusto. **Normas técnicas para o trabalho científico**. Porto Alegre: 2002.

KLANOVICZ, Jô.; NODARI, Eunice Sueli. **Da Araucárias às macieiras**: transformações da paisagem em Fraiburgo/SC. Florianópolis, SC.: Insular, 2005.

KOCH, Zig.; CORRÊA, Maria Celeste. **Araucária**: a floresta do Brasil Meridional. Tradução de Peggy Paciornick Distéfano. Curitiba, PR: Olhar Brasileiro, 2002.

LAROUSSE. **Gramática**: de la lengua española. Espanha: Hurope, 1998.

LÜDKE, Menga. **Pesquisa em educação**: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU. 1986.

MACHADO, S. A.; PIZZATO, V. Tabela de volume do povoamento para florestas nativas de *Araucaria angustifolia* nos estados da região sul do Brasil**. Revista Floresta**, Curitiba, V. 26. n. 1 – 2, 1998. p. 11 -26.

MEDEIROS, João de Deus.; GONÇALVES, Marco Antônio.; PROCHNOW, Miriam.; SCHÄFFER, Wigold B. **Floresta com araucária**: um símbolo da Mata Atlântica a ser salvo da extinção. Rio do Sul; Associação de Preservação do Meio Ambiente do Alto Vale do itajaí (APREMAVI), 2004.

MINISTÉRIO DO MEIO AMBIENTE. Avaliação e ações prioritárias para a conservação da biodiversidade para a mata Atlântica e Campos Sulinos. Brasília: Ministério do Meio ambiente, 2000.

MORA, David. **Aprendizaje y enseñanza**. Tradução César Augusto Machado Freitas. La Paz, Bolívia: Campos Íris, 2002.

OLIVEIRA, Y. M. M. **Correlação entre parâmetro deudrométricos em *Araucaria angustifolia*, utilizando fotografias aéreas**. Curitiba, PR. 1980 (Dissertação de Mestrado em Ciências Florestais), Setor de Ciências Agrárias. Universidade Federal do Paraná.

PETRUCCI, Maria das Graças Ribeiro Moreira.; TURA, Marcelo Felix. **Manual de metodologia científica**. Jaboticabal, São Paulo: Faculdade de Educação São Luiz, 1999.

RILHO, Bênia Costa. **Uma experiência em ensino-aprendizagem: modelos de fundos de investimento e as derivadas**. 2005, 156 f. Dissertação (Mestrado)-Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Luterana do Brasil, Canoas, RGS., 2005.

ROSOT, M. A. D. **Estudo comparativo de métodos para a avaliação volumétrica de *Pinus taeda* L.** Curitiba, PR: UFPR, 1989. (Dissertação de Mestrado em Engenharia Florestal).

SANT'ANA, Marilaine de Fraga.; AQUINO, Vitor Coronel.; LENZ, Denise. Representação da solubilidade de sais inorgânicos em água por modelos matemáticos. In.: REVISTA ACTA SCIENTAE. Universidade Luterana do Brasil. Área de Ciências Naturais e Exatas. Canoas, RGS.: Ed. ULBRA, 1999. Revista de Ciências Naturais e Exatas, v. 7, n. 1, p. 17-23, jan./jun. 2005.

SANTOS, Antônio Silveira Ribeiro dos. Programa ambiental: a última Arca de Noé. Disponível em: <www.aultimaarcadenor.com>. Acesso em: 15 nov. 2005.

SERRA EM DESENVOLVIMENTO. Manejo sustentável reduz o impacto ambiental. Caderno de Domingo e segunda-feira. 12 e 13 de março de 2006.

SKOVSMOSE, O. Cenários de investigação. **Bolema** – Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, SP., n. 14, p. 66-91, 2000.

APÊNDICES

APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO APLICADO AOS ALUNOS NO INÍCIO DA PESQUISA

Pesquisa: Modelagem Matemática: Estudo da Araucária em sala de aula

1) Nome: ____

2) Sexo: ( ) Feminino

( ) Masculino

3) Sua formação escolar no ensino médio foi definida em:

a) ( ) Curso Supletivo Público

b) ( ) Curso Supletivo Particular

c) ( ) Escola Pública

d) ( ) Escola particular

e) ( ) Ensino à Distância

4) Reprovou em algum ano do ensino médio?

( ) Sim

( ) Não

5) Qual sua idade:

a) ( ) Inferior a 20 anos

b) ( ) Entre 20 e 30 anos

c) ( ) Superior a 30 anos

6) Em relação a disciplina Cálculo II:

a) ( ) Esta cursando pela 1ª vez?

b) ( ) Esta cursando pela 2ª vez?

c) ( ) Esta cursando pela 3ª vez?

7) Qual fase cusa neste momento?

( ) 1ª ( ) 2ª ( ) 3ª ( ) 4ª ( ) 5ª

( ) 6ª ( ) 7ª ( ) 8ª ( ) 9ª

8) Você já leu alguma bibliografia relacionada com modelagem matemática antes de participar desta pesquisa?

( ) Sim

( ) Não

9) Para você as aulas de cálculo tornaram-se mais interessantes com a aplicação da modelagem matemática no estudo da araucária?

( ) Sim

( ) Não

( ) Não sei

10) Para você o que é mais importante: Estudar as técnicas de derivação e integração sem alguma aplicação ou estudar estas técnicas paralelamente aplicadas em questões regionais para sua interpretação e estudos específicos?

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

APÊNDICE B – LISTA COM A ASSINATURA DOS ALUNOS PARTICIPANTES DA PESQUISA

FACULDADES INTEGRADAS

REDE DE ENSINO univest

ACADÊMICOS PARTICIPANTES (nome legível e por extenso)	ASSINATURA
Mohamad Masri Al Yazigi	
Paula Ehrys dos Santos	Paula Ehrys
Eduardo Anderson Pereira	
Diego de Oliveira Antunes	Diego de O.
Maurício Marcelino Farias	Maurício
Emmanuel Armoni Costa	Emmanuel A.
José Antônio Faria Luz	
Maurício Constante Xafranski	Maurício
Aline Medeiros Padilha	
José Júnior Ferreira da Costa	José Júnior
Rogers [illegible] Pacheco	Rogers
Reginaldo Borguezan	Reginaldo
Hélio de Oliveira Neto	Hélio
Luan Dondé dos Santos	
Fernando Silva Moraes	Fernando
Juliano Costa Mello	
[illegible] Azevin Pires dos Santos	
Mateus Stefanon	
Jakson Duarte	Jakson Duarte
Eduardo Westphal	Eduardo Westphal
Jeison C. Castilho	
João O. Rodrigues	
Adriano Duarte Dalmolin	Adriano Duarte Dalmolin
Denise Richez dos Santos	
Danielle Chiquetti Wagner	Danielle C. Wagner
Bruno Nercolini Ceron	Bruno Nercolini Ceron
Mariano Costa Vargas	
Juliana Andrade Clausmann	

ASSINATURA DO PROFESSOR:	APROVAÇÃO DO COORDENADOR:	DATA:
César Augusto M. Martins		

FACULDADES INTEGRADAS

REDE DE ENSINO univest

ACADÊMICOS PARTICIPANTES (nome legível e por extenso)	ASSINATURA
Rondini da Silva	
João José Freitas Junior	
JULIO CESAR ZANCHETT	
Guilherme Regiani Fogliani	
DIEGO LUCIANO ANSELMO	
Wagner Petri	
Felipe Tortelli	
Glauber Luiz Dias	
Carla Floriani	
Richardo Cassiano Pereira	
Bárbara Vieira Souza	

ASSINATURA DO PROFESSOR:	APROVAÇÃO DO COORDENADOR:	DATA:

APÊNDICE C – PLANILHA DO DIÁRIO DE BORDO

DATA	TEMPO	ATIVIDADES DESENVOLVIDAS PELO PROFESSOR	ATIVIDADES DESENVOLVIDAS PELOS GRUPOS	RECURSOS DE ENSINO	DIFICULADES APRESENTADAS PELOS ALUNOS

APÊNDICE D – FICHA DA DEFINIÇÃO DOS COMPONENTES DOS GRUPOS

CÁLCULO – II – 3ª FASE – CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Pesquisa: Cálculo aplicado: Modelagem Matemática no Estudo da Araucária.

Grupo[6]: Nº

Tema: ____

Componentes: 1 - ____

2 - ____

3 - ____

4 - ____

5 - ____

6 - ____

7 - ____

[6] Folha entregue aos alunos na aula de campo, contendo o nome dos componentes do grupo, como também, o tema escolhido para pesquisa.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

F866m Freitas, César Augusto Machado
Modelagem matemática da *Araucaria Angustifolia* nos campos de Lages, Santa Catarina: uma proposta metodológica regional para o estudo do cálculo diferencial e integral em sala de aula. – Canoas, 2006.
. 120 f.

Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Luterana do Brasil, 2006.
Orientação: Profª Dra. Marilaine de Fraga Sant'Ana

1. Educação matemática. 2. Modelagem matemática. 3.

Bibliotecária Responsável: Veronica Frantz CRB/10- 886