

UNIVERSIDADE LUTERANA DO BRASIL
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
DIRETORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENSINO DE
CIÊNCIAS E MATEMÁTICA



**HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UMA
ALIANÇA POSSÍVEL**

MICHELE GOMES DE ÁVILA

CLAUDIA LISETE OLIVEIRA GROENWALD

Canoas, 2004.

UNIVERSIDADE LUTERANA DO BRASIL
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
DIRETORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENSINO DE
CIÊNCIAS E MATEMÁTICA



**HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UMA
ALIANÇA POSSÍVEL**

MICHELE GOMES DE ÁVILA

CLAUDIA LISETE OLIVEIRA GROENWALD

Dissertação apresentada ao Programa de Pós - Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil para obtenção do título de mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Canoas, 2004.

AGRADECIMENTOS

Deixo aqui registrados, meus sinceros agradecimentos a todas as pessoas que iluminaram meu caminho nessa trajetória:

Aos meus familiares pela fé e confiança de todos os dias, em especial aos meus pais Jorge e Lilia e a minha irmã Gabriele, que não permitiram que eu desistisse;

Ao meu noivo Rodrigo Bozzetto pelo amor, companheirismo e incentivo dedicado a mim ao ingressar neste curso;

A professora Dra. Claudia Lisete Oliveira Groenwald, pela sua contribuição como amiga e orientadora, por sua inteira dedicação e confiança;

Aos alunos e professores que participaram deste estudo, pois suas contribuições foram fundamentais para realização deste;

Às Escolas Santo Antônio e Concórdia, pela compreensão e incentivo;

Aos amigos que me incentivaram nesta jornada, em especial a Alessandra Wolff, Paulo Bujes e Mauricio Rosa ;

Aos professores Dr. Sérgio Nobre, Dr. Iran Abreu Mendes, Dr. Juan Eduardo Nápoles Valdés e Dra. Cármen Kaiber da Silva pelo apoio, respeito e confiança no meu crescimento intelectual e profissional;

Enfim, a todos àqueles que de alguma forma contribuíram para que eu me tornasse uma pessoa melhor e uma educadora em constante crescimento.

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho aos meus pais, pelas angústias e preocupações que passaram por minha causa, por terem dedicado suas vidas a mim, pelo amor, carinho e estímulo que me ofereceram. Por me conduzirem aos melhores caminhos e por fazerem com que eu descubra, todos os dias, o melhor de mim. Dedico-lhes essa conquista como gratidão.

RESUMO

O presente estudo busca investigar a utilização da história da Matemática como recurso didático associado à resolução de problemas no Ensino Básico, bem como, seu papel unificador dentro da Educação Matemática. Propomos uma abordagem para uso em sala de aula, baseado na metodologia resolução de problemas, utilizando problemas históricos como estratégia didática. O principal enfoque deste estudo é a conjunção da história da Matemática com a resolução de problemas, com a finalidade de mostrar o quanto pode ser efetivo esse modo de trabalho para o ensino da Matemática. Discutimos a eficiência da associação entre esses dois elementos, de modo a desenvolver no aluno estratégias de pensamento e ainda, como forma de motivá-los ao estudo da disciplina, tornando a Matemática mais acessível e próxima da realidade do estudante. Foi investigada a opinião dos professores de Matemática quanto ao seu conhecimento em história da Matemática e se o utilizam em sala de aula. Produzimos uma seqüência didática para aplicação em sala de aula utilizando um problema histórico “O Problema das Sete Pontes de Königsberg”. A atividade foi desenvolvida com 24 alunos de uma turma de oitava série do Ensino Fundamental, onde consideramos os resultados obtidos no trabalho muito positivos, visto que a turma se demonstrou interessada, motivada com a aula e, além disso, atingimos nosso principal objetivo: proporcionar ao estudante momentos em que ele possa desenvolver seu pensamento crítico, seu espírito de investigação e suas próprias estratégias de resolver problemas. Desta forma, analisando os resultados da nossa experiência, consideramos que esta abordagem metodológica pode contribuir efetivamente para o ensino e aprendizagem da Matemática.

ABSTRACT

The present study aims at investigate the use of the history of Mathematics as a didactics resource associated to the solution of the Elementary School problems, as well as, its unifying role in Mathematics Education. We propose an approach to be used in the classroom, based on the problem solving methodology, utilizing historical problems as a didactics strategy. The main focus of this study is the conjunction of the history of Mathematics and the solving of problems, to show how effective this method of work can be in the teaching of Mathematics. We have discussed the effectiveness of the association between these two elements so as to develop in the student thinking strategies and also, as a way to motivate him to studying the subject, making Mathematics more accessible and closer to the student's reality. We also investigated the Math teachers' opinion as to their knowledge of the history of Mathematics. And if they used it in the classroom. We produced a didactics sequence to be applied in class using a historical problem, 'O Problema das Sete Pontes de Königsberg'= 'The Königsberg's Seven Bridge Problem'. The activity was developed with 24 students in the eighth grade, elementary school, where we considered the work results as very positive, since the group seemed interested, motivated by the class and, besides this, we reached our main objective: to provide the student with moments in which he can develop his critical thinking, his spirit of investigation and his own strategies to solve problems. This way, analyzing the results of our experiment, we consider that this methodological approach can effectively contribute to the teaching and learning of mathematics.

SUMÁRIO

LISTA DE GRÁFICOS	10
LISTA DE TABELAS	11
LISTA DE FIGURAS	13
SITUANDO A PROBLEMÁTICA DO ESTUDO	15
1.1 Primeiras Considerações	15
1.2 Objetivos do estudo	22
1.3 Metodologia	24
1.3.1 Análise da investigação com os professores	27
2 A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E A METODOLOGIA RESOLUÇÃO	
DE PROBLEMAS	40
2.1 Resolução de Problemas	40
2.1.1 Conceito de problema.....	46
2.1.2 Tipos de problemas.....	51
2.1.3 Diferença entre problema e exercício	59
2.1.4 A Metodologia Resolução de Problemas.....	62
2.1.4.1 A resolução de problemas como processo de investigação	65
2.1.4.2 Como ensinar a resolver problemas uma tarefa diferente para o professor de Matemática	70
2.1.5 Como solucionar um problema	73
2.1.6 Habilidades	81
2.2 Grandes Problemas que marcaram a História	86
2.2.1 Um pouco de história	89
2.2.2 A Matemática e seus “problemas”	92

3 A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA: UMA ALIANÇA POSSÍVEL	142
2.2 Utilizando um problema histórico no Ensino Básico	144
3.1.2 Justificativa	144
3.1.3 Seqüência didática para a solução do Problema das Sete Pontes de Königsberg	148
3.1.3.1 Um pouco de história	148
3.1.3.2 Problema	150
3.1.3.3 Atividades para a resolução do problema	151
3.1.3.4 Biografia de Leonhard Euler	160
3.1.3.5 Exercícios	161
3.2 Análise dos dados da aplicação do experimento didático	162
CONSIDERAÇÕES FINAIS	170
OBRAS CONSULTADAS	174
HOME PAGES CONSULTADAS	180
ANEXOS	181

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1- Frequência do uso da história da Matemática pelos professores	30
Gráfico 2- Na sua formação acadêmica, você teve história da Matemática?	33
Gráfico 3- O livro que você adota aborda, de alguma forma, a história da Matemática?.....	36
Gráfico 4- Para quem ensina e para quem aprende Matemática, é importante saber história da Matemática?	38

LISTA DE TABELAS

Tabela 1- Formação dos professores	28
Tabela 2- Nível de formação	28
Tabela 3- Séries que os professores atuam em sala de aula	29
Tabela 4- Tempo de serviço	29
Tabela 5- Tipo de escola que atuam	29
Tabela 6- A compreensão dos professores com respeito à relação entre história e ensino da Matemática	30
Tabela 7- Por que os professores utilizam a história da Matemática em suas aulas	31
Tabela 8- Qual a frequência que os professores utilizam a história da Matemática em suas aulas	31
Tabela 9- De que forma os professores de Matemática abordam os conteúdos de história em suas aulas	32
Tabela 10- Quais as razões que levaram os professores a buscar a história da Matemática para suas aulas	34

Tabela 11- Onde os professores buscam recursos para utilizar a história da Matemática em suas aulas	35
Tabela 12- Quanto a material de apoio, os professores pesquisados, adotam livro didático?	35
Tabela 13- Os efeitos percebidos pelos professores ao utilizarem a história da Matemática em suas aulas	37
Tabela 14- Comentário dos investigados sobre a relação entre história e pedagogia da Matemática	38

LISTA DE FIGURAS

Figura 1- Quadro resumo sobre o conceito de problemas	50
Figura 2- Esquema (tipos de problemas)	58
Figura 3- Elementos essenciais de uma aula na aprendizagem por investigação	66
Figura 4- Processo de investigação na resolução de problemas	68
Figura 5- Ilustração do problema	76
Figura 6- Processo de um problema escolar	80
Figura 7- Uma parte do Papiro Rhind	94
Figura 8- Cálculo do volume do tronco de uma pirâmide	99
Figura 9- Problema 14 do Papiro de Moscou	100
Figura 10- Demonstração geométrica do problema	101
Figura 11- Demonstração geométrica do problema	103
Figura 12- Demonstração geométrica do problema	108
Figura 13- Quadrado ABCD e o quadrante de círculo BED	109
Figura 14- Demonstração geométrica do problema	111

Figura 15- Representação geométrica atual do problema	112
Figura 16- Trissecção do ângulo	113
Figura 17- Números triangulares	115
Figura 18- Números quadrangulares	115
Figura 19- Demonstração	116
Figura 20- O Gnômon	119
Figura 21- Demonstração geométrica	120
Figura 22- Problema do Bambu quebrado resolvido atualmente	122
Figura 23- Problema do Bambu quebrado na Antigüidade	122
Figura 24- Solução do problema 15 dos “Nove capítulos”	123
Figura 25- Quadrado Mágico	123
Figura 26- O Quadrado Mágico mais antigo	124
Figura 27- Ilustração do método para construir quadrados mágicos	125
Figura 28- Resolução da equação	130
Figura 29- Esquema do problema das três casas e dos três postes	147
Figura 30- Mapa da região de Königsberg, atual Kaliningrado	148
Figura 31- Passeio pelas Sete Pontes de Königsberg	150
Figura 32- Diagrama de Euler	153
Figura 33- Escola de Ensino Fundamental Padre Antônio Vieira	163
Figura 34- Professora de Matemática da turma	164
Figura 35- Turma em que aplicamos a atividade	165
Figura 36- Turma iniciando a atividade	166
Figura 37- A professora explicando a atividade no quadro para a turma	167
Figura 38- A professora assessorando a turma	167

1 SITUANDO A PROBLEMÁTICA DO ESTUDO

Um dos maiores erros que se pratica em educação, em particular, na Educação Matemática, é desvincular a Matemática das outras atividades humanas. [...] as idéias matemáticas aparecem em todas as atividades humanas, definindo estratégias de ação para lidar com o ambiente. Em todos os momentos da história e em todas as civilizações, as idéias matemáticas estão presentes em todas as formas de fazer e de saber. (D'AMBROSIO, 1999, p. 97)

1.1 Primeiras considerações

O enfoque histórico dado ao ensino da Matemática é uma proposta metodológica que atua como motivação para a aprendizagem, já que por meio dele o estudante descobrirá a gênese dos conceitos e métodos que aprenderá em aula. Em outras palavras, permitirá fazer relação das idéias matemáticas vistas em sala de aula com suas origens.

O conhecimento da história da Matemática proporciona uma visão dinâmica da evolução dessa disciplina. Assim, podem-se buscar as idéias originais em toda a sua essência e originalidade (VALDÉS, 2002).

A história da Matemática é considerada um aspecto importante para formação matemática do aluno. Ela lhe proporciona uma noção mais clara desta ciência em construção, com erros e acertos e sem verdades universais. Contrariando a idéia positivista de uma ciência universal e com verdades absolutas, a história da Matemática tem este grande valor de poder também contextualizar este saber, mostrar que seus conceitos são frutos de um contexto social e político. Essa visão da Matemática faz com que ela seja vista pelo aprendiz, como um saber que tem significado, que foi, e é construído pelo homem para responder suas dúvidas na leitura do mundo, permitindo ao aluno apropriar-se deste saber, o que lhe propiciará uma melhor leitura do contexto mais global.

Para Valdés (2002), “Se estabelecermos um laço entre o aluno, a época e o personagem relacionado com os conceitos estudados, se conhecerem as motivações e dúvidas que tiveram os sábios da época, então ele poderá compreender como foi descoberto e justificado um problema, um corpo de conceitos, etc..”

O mundo sempre esteve e está repleto de Matemática. Afirmo, ainda, que isto pode causar admiração, pois o matemático é tido como um indivíduo de óculos espessos, seco, alheio à vida, cujo reino, verdadeiramente, não é deste mundo, mas que se delicia com elipses e hipérbolas, com frações e raízes, com logaritmos e integrais, o que é a pura verdade, mas quando tira seus óculos e esfrega os olhos para passar em revista o céu e a terra, a sua alegria de descobrir não tem fim. No alto dos céus depara com a lua cheia: um círculo perfeito, melhor do que o traçado com o mais caro dos compassos. Vê o cristal da rocha – onde encontrará ele, ângulos mais exatos (KARLSON, 1961, p.3).

Desde o seu aparecimento na terra, o homem tem recorrido à Matemática; calculava, contava e media, mesmo no período que o seu espírito ainda não tinha consciência de si mesmo e quando ainda sobre tais assuntos não existiam conceitos ou convenções. Ele dividia a presa em partes iguais, com o que criou as frações, cortava sua clava ou media um pedaço de pele – comparando comprimentos, admitindo assim as idéias contrárias de “maior” e “menor”. Para encurtar o caminho na curva de um rio, ele abria um atalho retilíneo através do capim da estepe – junto ao leito dos rios – e com isso traçava a primeira corda de um arco. Fabricava vasos, que eram seus padrões de medida.

Os exemplos da utilização da Matemática na resolução dos problemas do dia-a-dia são inúmeros, não representavam operações matemáticas conscientes com reflexão científica, porém, analisando esses exemplos, percebe-se a grande influência da Matemática em toda história do homem.

É nesse sentido, que este trabalho pretende discutir a utilização da história da Matemática como um recurso didático no ensino aprendizagem de conceitos e seu papel unificador dentro da Educação Matemática, ou seja, pretende mostrar como a história desta ciência tão enriquecida de conceitos pode e deve ajudar na construção do conhecimento dos alunos.

Para Karlson (1961): “A simples Matemática é capaz de desencadear sentimentos, os mais contraditórios possíveis, desde o arrepio de horror até o mais franco entusiasmo”.

É a necessidade que leva o homem a aprender mais e a Matemática não pode estar desvinculada deste processo evolutivo. A Matemática como conhecimento em geral, é resposta às preocupações com a sobrevivência e a busca de novas tecnologias, que sintetizam as questões existenciais da vida.

As idéias matemáticas, particularmente comparar, classificar, quantificar, medir, explicar, generalizar, inferir, e de algum modo, avaliar, são formas de pensar, presentes em toda a espécie humana. É neste contexto que se deve pensar em história da Matemática, como uma poderosa ferramenta no ensino aprendizagem desta disciplina.

Um sólido conhecimento de história da Matemática, deveria ser parte indispensável da bagagem de conhecimentos de qualquer matemático em geral e do professor de qualquer nível, fundamental, médio ou superior. Isso, não somente com a intenção de utilizá-la como um instrumento em seu ensino, mas principalmente por que tal conhecimento pode proporcionar uma visão verdadeiramente humana da Matemática, o que é difícil de se imaginar, pois a imagem que os alunos possuem dessa disciplina, muitas vezes, está totalmente desvinculada da realidade.

O professor entendendo como a Matemática se desenvolveu desde seu princípio, ou seja, toda sua história, compreende melhor a dificuldade do homem e da humanidade na elaboração das idéias matemáticas, tendo condições de transmitir de forma mais clara seus conhecimentos aos alunos e utilizar este saber como uma ferramenta para sua própria pedagogia.

Como afirma Valdés (2002): “Se voltássemos às origens destas idéias, a Matemática perderia esta aparência de morte e de ossos dissecados e voltaria a tomar forma de vida.”

O valor do conhecimento histórico não consiste em ter uma bateria de histórias e anedotas curiosas para entreter os alunos, a história pode e deve ser utilizada, por exemplo, para entender e fazer compreender uma idéia mais difícil e complexa de modo mais adequado (VALDÉS, 2002).

A história deveria ser um potente auxiliar no processo de ensino- aprendizagem, com a finalidade de manifestar de forma peculiar as idéias matemáticas, situar temporalmente e espacialmente as grandes idéias e problemas, junto com sua motivação e precedentes históricos e ainda enxergar os problemas do passado, bem como encontrar soluções para problemas abertos.

Um dos fundamentos do atual ensino da Matemática é o conceito que se tem a respeito da natureza do conhecimento matemático. A perspectiva histórica permite mostrar, entre outras coisas, que a Matemática é um conjunto de conhecimentos em contínua evolução, que desempenha um papel muito importante na formação do aluno, pois sua inter-relação com outros conhecimentos e a necessidade de desenvolver determinados problemas práticos, torna a vida muito mais desafiadora.

Segundo Ozámiz (1993): “A história da Matemática, como recurso didático, visa atingir os seguintes objetivos”:

- mostrar que o processo do descobrimento matemático é algo vivo e em desenvolvimento.

A história da Matemática é um importante recurso no processo de ensino e aprendizagem da disciplina, pois permite que o estudante enxergue além dos algoritmos e fórmulas ao qual o tradicional ensino se constitui. Na história o aprendiz descobre que a Matemática é uma ciência

em constante construção e que os conceitos conhecidos por ele hoje, são resultados de estudos que ocorreram em momentos diferentes, como consequência de algum marco da sociedade.

- aceitar o significado dos objetos matemáticos em seu triplo significado: institucional, pessoal e temporal;

Esse é um dos objetivos de maior relevância na história da Matemática. Aprender Matemática com o auxílio de dados extraídos da história, faz com que o aluno perceba que a disciplina está intimamente ligada a um processo evolutivo, ou seja, os objetos matemáticos possuem um significado muito maior que aqueles aprendidos em sala de aula. Eles possuem um elo de ligação com as pessoas, com a sociedade e com a época em que foram descobertos.

- estabelecer distinção entre uma prova, uma argumentação e uma demonstração dos conceitos matemáticos, bem como saber dosar de maneira equilibrada no currículo escolar.

Um professor de Matemática reconhece com clareza a diferença entre uma prova, uma argumentação e uma demonstração. A maioria, porém, não percebe que seus discípulos não possuem tal discernimento. A história da Matemática vem, como um bom recurso didático, auxiliar no aprimoramento dessas idéias. Dessa forma, o mestre pode equilibrar de maneira mais eficiente os conteúdos no currículo escolar, tornando mais simples a compreensão dos mesmos.

- destacar a importância de se fazer “provas” com os alunos, porém provas que contribuam ao conhecimento e não somente para testar “decobas”.

No ensino atual, os alunos são submetidos a aulas expositivas, seguidas de exercícios e para comprovar os conhecimentos, nada melhor do que provas escritas. Estas têm como único objetivo testar os conhecimentos adquiridos em sala de aula. Não é possível desprezar a importância da avaliação nas aulas de Matemática, porém estas devem contribuir para o crescimento do estudante, devem dar a eles a possibilidade de crescer não somente na disciplina, mas como ser pensante. Desvincular a Matemática da sua história, faz com que as pessoas não compreendam a origem das idéias, faz com que a disciplina perca sua essência e originalidade.

Klein apud Tahan (1984) afirma que: “O professor que ensina a Matemática desligada de sua parte histórica, comete verdadeiro atentado contra a ciência e contra a cultura em geral”.

É neste sentido que tem crescido cada vez mais o interesse pela história da Matemática em relação ao ensino, não somente como uma ferramenta didática, mas também como campo de investigação.

As Diretrizes Curriculares para os Cursos de Licenciatura em Matemática, versão preliminar de 1999, afirmam que: *“um tipo de atividade muito importante para um professor de Matemática é a resolução de problemas. Quer como disciplina específica, quer inserida no contexto das demais, a resolução de problemas que agucem a imaginação, incentivem a criatividade e despertem a iniciativa devem ser uma atividade presente durante todo o curso”*.

Um dos objetivos dos educadores matemáticos é fazer com que o aluno perceba a importância da Matemática como uma ferramenta que permita a ele ter uma melhor compreensão

da realidade que o cerca. Um caminho para que este objetivo seja atingido é fazer com que o aluno trabalhe com situações problemas dessa realidade e também de realidades passadas, isto é, trabalhar com situações problemas dentro do contexto histórico.

Há várias maneiras de se usar a história da Matemática no sentido de se buscar um ensino com significado, útil na formação do cidadão. Um dos fatores revolucionários da Matemática é sua forma, que altera com o tempo, devido a fatores sociais, políticos e mesmo da própria Matemática. A forma revolucionária desta ciência propicia as novas descobertas. É, nesta perspectiva, por exemplo, que se pode pensar em trabalhar a história da Matemática como um recurso didático na Metodologia da resolução de problemas, podendo-se situar-se um determinado problema dentro do contexto histórico.

Vimos que, trabalhar com a história nas aulas de Matemática é muito importante para a aprendizagem dos conteúdos, porém não podemos esquecer que esta não é uma tarefa muito simples para o professor. Nobre estabelece que: “Tanto quanto o conteúdo matemático, há a necessidade de o professor de Matemática conhecer sua história, ou seja, a história do conteúdo matemático” (1999, p. 130) e além disso o professor precisa manter um elo de ligação entre os conteúdos a serem desenvolvidos e sua história, para que esses não fiquem soltos e sem significado.

1.2 Objetivos do estudo

Após mencionarmos nossas primeiras considerações acerca do estudo e buscarmos um significado para sua realização, é necessário colocar quais as finalidades que nortearam nosso

trabalho. Partimos dos objetivos propostos a seguir para o desenvolvimento da nossa investigação.

O objetivo geral do trabalho é desenvolver uma proposta para os professores de Matemática trabalharem em sala de aula através da interligação da metodologia resolução de problemas com o recurso da história da Matemática.

Trabalhar a metodologia resolução de problemas através de recursos da história da Matemática, é uma tentativa de aperfeiçoar o trabalho do professor em sala de aula, propondo uma sugestiva atividade de ensino e aprendizagem.

A finalidade de apresentar e discutir uma proposta para o ensino da Matemática baseada em atividades históricas, pressupõe que a participação efetiva do aluno na construção do seu conhecimento escolar, constitui-se em um aspecto preponderante nesse procedimento de ensino-aprendizagem (MENDES, 2001b). Nesse sentido apresentamos e discutimos a seguir, os objetivos específicos do nosso trabalho.

- Discutir a utilização da história da Matemática como recurso didático no Ensino Fundamental e Médio, na metodologia resolução de problemas;

Para utilizar a história da Matemática em sala de aula na metodologia resolução de problemas, é necessário conhecer não somente problemas soltos e descontextualizados, pois assim eles perdem o sentido dentro da proposta. A história da Matemática deve ser um forte

agente dentro do estudo como um todo, pois no processo evolutivo desta ciência, muitos acontecimentos políticos e sociais contribuíram para o desenvolvimento da disciplina.

- Investigar o nível de conhecimentos em história da Matemática, dos professores de Matemática, identificando se eles a utilizam como recurso didático;

Este estudo possui relevância, pois dá a possibilidade de conhecermos o nível de atualização dos professores que atuam nas escolas e, além disso podemos oferecer recursos para que estes se capacitem.

1.3 Metodologia

O presente trabalho optou por uma metodologia de base qualitativa. Realizando a análise da aplicação da atividade didática de história da Matemática e resolução de problemas através da observação e registros realizados pela pesquisadora e por uma entrevista realizada com a professora. Optando na análise da investigação com os professores pelo estudo exploratório, permitindo uma investigação mais profunda dos problemas em questão:

- os professores de Matemática utilizam a história da Matemática como recurso didático?
- o uso da história da Matemática associado a metodologia resolução de problemas pode auxiliar o processo de ensino e aprendizagem do Matemática do Ensino Básico?

Para responder ao primeiro questionamento, aplicamos um questionário com 12 perguntas (anexo 1) em 100 professores de Matemática, da região da grande Porto Alegre, que atuam no Ensino Fundamental e Médio, para investigar se os professores afirmam ter conhecimentos em história da Matemática e o quanto a utilizam em suas aulas.

Para análise do instrumento aplicado, foram validados 70 questionários dos 100 distribuídos, pois 30 questionários voltaram preenchidos apenas com o perfil e nenhuma pergunta relativa ao assunto da investigação respondida. Na organização dos dados coletados utilizamos uma análise estatística descritiva o que permitiu uma melhor visualização da realidade.

O instrumento aplicado foi composto por 4 questões de alternativa simples e 8 perguntas abertas, conforme anexo 1. As respostas dos professores foram organizadas por categorias e levamos em consideração apenas as respostas válidas, por essa razão a base de respostas de cada questão varia entre 56 e 70 respostas válidas.

Para responder a segunda pergunta da investigação, realizamos um levantamento bibliográfico para a organização didático pedagógica de uma atividade: “O Problema das Sete Pontes de Königsberg”, que buscou relacionar a história da Matemática com a metodologia de resolução de problemas. O objetivo dessa atividade foi sugerir aos professores de Matemática um exemplo de uma ferramenta didática para utilização em sala de aula.

A atividade proposta enfatiza a relação temporal na resolução de problemas e apresenta uma seqüência didática que objetiva levar os estudantes a tirarem conclusões e através da análise do problema proposto deduzir as proposições dadas por Euler ao solucionar o problema.

Escolhemos o Problema das Sete Pontes de Königsberg por tratar-se de uma interessante realidade vivida pelos moradores da antiga cidade da Prússia, que se situava junto ao Rio Pregel, muito conhecido na Matemática devido ao famoso matemático suíço Leonhard Euler.

Além disso, é um problema de processo, cuja solução envolve operações que não estão contidas no enunciado dos problemas e não podem ser resolvidos pela aplicação automática de algoritmos (DANTE, 2002). Logo, este é um tipo de problema que proporciona ao aluno desenvolver suas próprias capacidades e estratégias de resolução de problemas.

Para verificar a aplicabilidade da proposta, inicialmente aplicamos um teste piloto com oito alunos do 1º ano do Ensino Médio, com duração de dois períodos (2 horas/ aula), no colégio Concórdia, situado na cidade de Porto Alegre. O teste apesar de obter resultados positivos, pois os alunos demonstraram interesse e motivação com relação à atividade e solucionaram o problema antes do tempo previsto, sem ser necessário desenvolver toda a seqüência didática, verificamos que o piloto havia ficado muito extenso, ultrapassando o tempo reservado para o trabalho, tornando a atividade cansativa. Assim, o projeto passou por reformulações antes de sua aplicação efetiva.

Em seguida, passamos para a segunda etapa do estudo, a aplicação da atividade em outra turma. A atividade piloto foi aplicada em uma turma de 1º ano do Ensino Médio. Porém aplicamos o projeto reformulado em uma turma de 8º série por considerar a atividade adequada para ser trabalhada em turmas a partir da 8º série do Ensino Fundamental.

Aplicamos o experimento com 24 alunos em uma turma de 8º série do Ensino Fundamental, da Escola Padre Antônio Vieira, situada na cidade de Eldorado do Sul, que fica localizada entre as cidades de Porto Alegre e Guaíba. Consideramos satisfatória a aplicação, pois os alunos apesar de não estarem acostumados com este tipo de trabalho, demonstraram interesse pela atividade e motivaram-se com a aula. Os estudantes trabalharam em pequenos grupos e solucionaram o problema nos dois períodos reservados à aplicação da atividade. Durante a atividade a pesquisadora realizou as observações e o registro das situações mais significativas para análise da aplicação da atividade. A análise encontra-se descrita no capítulo 3.

Também foi realizada uma entrevista semi estruturada, após a aplicação da atividade, com a professora que aplicou a atividade na turma piloto.

Salientamos que a pesquisa qualitativa não objetiva a descoberta de leis sociais e está mais preocupada com a compreensão ou interpretação do fenômeno social, com base nas perspectivas dos atores por meio da participação em suas vidas (Taylor & Bogdan, 1984). O pesquisador segundo Santos Filho e Gamboa (2002) precisa tentar compreender o significado que os outros dão às suas próprias situações.

1.3.1 Análise da investigação com os professores

A presente pesquisa teve como principal objetivo, investigar a utilização da História da Matemática pelos professores da área, bem como identificar a forma como estes profissionais a utilizam em seu trabalho diário de sala de aula.

Como já mencionamos, a pesquisa foi aplicada em 100 professores, atuantes na área de Matemática e, através de análise posterior, foram validados apenas 70 questionários (anexo 1).

A experiência visou identificar o nível de escolaridade desses professores e às séries de atuação. As tabelas a seguir mostram a caracterização dessa amostra.

Caracterização da Amostra:

Tabela 1
Formação do professor

Formação	Frequência	%
Matemática	61	87,1
Ciências	5	7,1
Letras	2	2,9
História	2	2,9
Biologia	2	2,9
Total	70	

Tabela 2
Nível de formação

Nível	Frequência	%
Licenciatura plena	48	68,6
Especialização	8	11,4
Licenciatura curta	6	8,6
Graduação incompleta	5	7,1
Mestrado	3	4,3
Total	70	

Tabela 3
Séries que os professores atuam em sala de aula:

Série	Frequência	%
Ensino Fundamental	39	55,7
Ens. Fundamental + Ens. Médio	16	22,9
Ensino Médio	11	15,7
Ens. Superior	3	4,3
Não Respondeu	1	1,4
Total	70	100,0

Tabela 4
Tempo de serviço

Tempo de serviço	Frequência	%
1 – 5 anos	16	22,9
6 – 10 anos	28	40,0
11 – 15 anos	11	15,7
16 – 20 anos	13	18,6
+ de 20 anos	2	2,9
Total	70	100,0

Tabela 5
Tipo de escola que atuam

Tipo de escola	Frequência	%
Pública	33	47,1
Particular + Publica	25	35,7
Particular	12	17,1
Total	70	100,0

Com base na caracterização da amostra, percebemos que entre os 70 professores pesquisados 87,1% possuem formação em Matemática (tabela 1) e 68,6% desses educadores têm formação em Licenciatura Plena (tabela 2). Um número bastante expressivo, também, é a quantidade de professores que atuam somente no Ensino Fundamental, 55,7% da amostra (tabela

3). Observamos que a maioria dos investigados atua no ensino há cerca de 7 anos (tabela 4) e principalmente na rede pública de ensino (tabela 5).

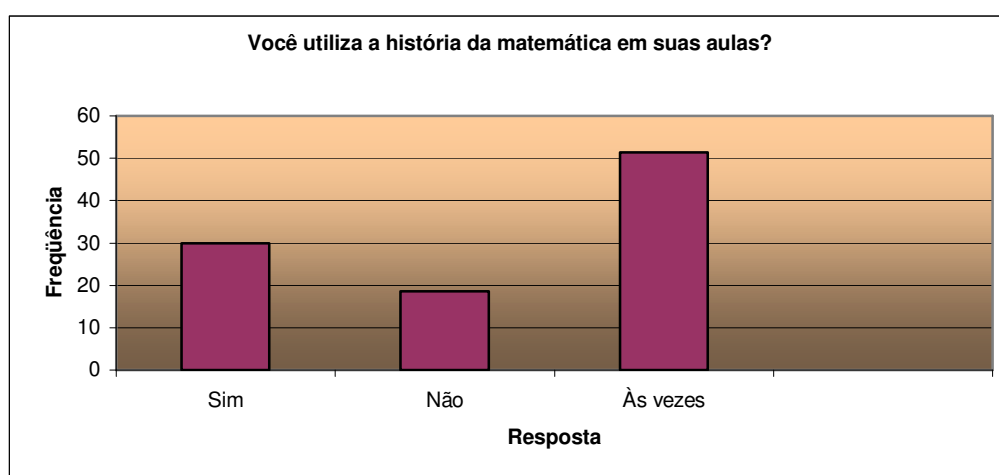
Após a caracterização da amostra, a seguir estão relacionadas às questões em discussão:

Tabela 6

A compreensão dos professores com respeito à relação entre história e ensino de Matemática.

Resposta	Frequência	%
Importante para a aprendizagem	33	47,1
Interessante	21	30,0
É necessário conhecer a história desde sua origem	3	4,3
Situar o aluno cronologicamente	3	4,3
Facilita a compreensão dos conteúdos	2	2,9
A história é capaz de mostrar o por que alguns conteúdos são geralmente difíceis	2	2,9
A relação é motivadora	2	2,9
Não responderam	4	5,7
Total	70	100,0

Gráfico 1



Fonte: Investigação com os professores de Matemática do Ensino Fundamental e Médio

A partir dos dados levantados na pesquisa, concluímos uma tendência a utilização da história da Matemática em sala de aula. Porém, é importante ressaltar que, apesar de 47,1% professores (tabela 6) acharem muito importante a utilização do recurso nas aulas de Matemática para a aprendizagem do estudante e 30,0% acharem interessante trabalhar com a história, apenas 30,0% (gráfico 1) professores afirmaram utilizar este recurso em suas atividades.

Tabela 7
Por que os professores utilizam a história da Matemática em suas aulas.

Resposta	Frequência	%
Por que motiva os estudantes ao estudo da matemática	26	45,6
Por que o uso da história auxilia na aprendizagem dos conteúdos	21	36,8
Por que está nos parâmetros curriculares	5	8,8
Por que é uma nova tendência dentro do ensino da Matemática	5	8,8
Base	57	100,0

Obs.: 13 professores não responderam a esta questão

Com relação a este item da investigação, 46,5% dos professores que responderam a esta questão, afirmaram utilizar a história da Matemática em suas aulas, por que motiva os estudantes ao estudo da Matemática (tabela 7) e, boa parte, 36,8% dos professores, afirmaram que o uso da história pode auxiliar na aprendizagem dos conteúdos (tabela 7).

Tabela 8
Qual é a frequência com que os professores utilizam a história da Matemática em suas aulas.

Resposta	Frequência	%
Sempre que inicio um novo conteúdo	33	57,9
Uma vez a cada bimestre	9	15,8
Raramente durante o ano	9	15,8
Uma vez por semestre	6	10,5
Base	57	100,0

Obs.: 13 professores não responderam a esta questão

Tabela 9

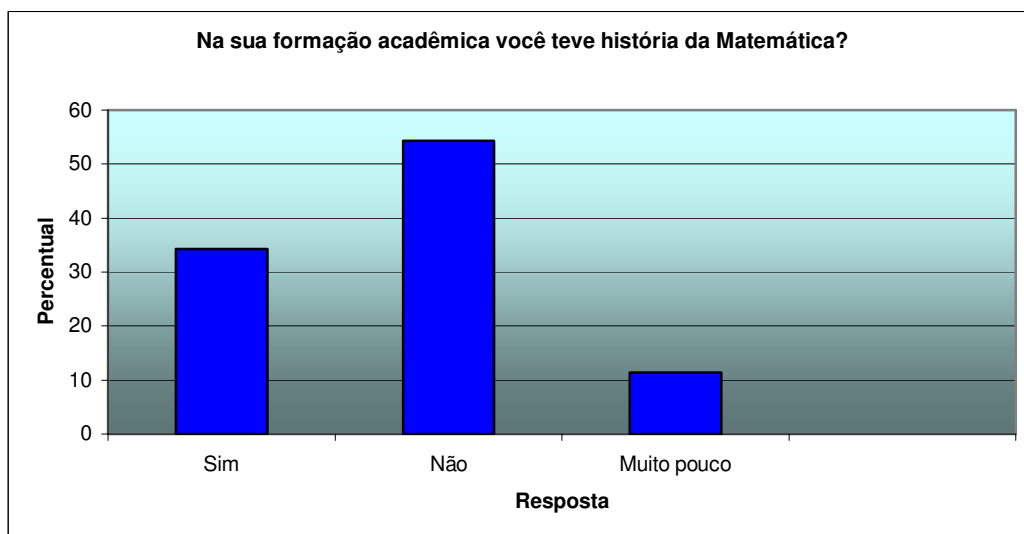
De que forma os professores de Matemática abordam os conteúdos de história em suas aulas

Resposta	Frequência	%
Conta a vida dos principais matemáticos, relativo aos conteúdos	10	17,5
Quando inicio um novo conteúdo faço referência à época	10	17,5
Não aborda	6	10,5
Levo para as aulas livros que falem um pouco da história	6	10,5
Debates em sala de aula	5	8,8
Faço a leitura de paradidáticos	4	7,0
Pela necessidade	4	7,0
Faço pesquisa na área	4	7,0
Uso pouco a história em sala de aula	3	5,3
Trabalho com situações problemas	3	5,3
Livros didáticos que tratem do assunto	1	1,8
Indico livros para leitura	1	1,8
Base	57	100,0

Obs.: 13 professores não responderam a esta questão

Com a análise da tabela 8, verificamos que 57,9% dos professores que responderam esta questão, utilizam a história da Matemática em suas aulas sempre que um novo conteúdo é iniciado e 15,8% dos professores afirmaram utilizar a história raramente durante o ano letivo, o que é um número expressivo dado o tamanho da amostra. É interessante chamar atenção para o seguinte dado: apesar de 30,0% dos professores utilizarem recursos da história em suas atividades diárias (gráfico 1), a tabela 9 mostra que os professores não sabem como usufruir deste recurso, pois usar a história da Matemática como recurso didático em sala de aula, não é simplesmente contar a vida dos matemáticos em questão, ou iniciar um novo conteúdo fazendo referência à época e, mais relevante ainda, fazer com que os alunos façam leituras de livros de história sem contextualizar o conteúdo em discussão. Outro ponto importante que salientamos, é que apenas 3 professores afirmaram utilizar a história trabalhando com situações problemas (tabela 9), o que demonstra a importância de realizar investigações nessa área.

Gráfico 2



Fonte: Investigação com os professores de Matemática do Ensino Fundamental e Médio

Observando o gráfico 2 e comparando seus resultados com o restante da análise, verificamos que a falta de conhecimento na área é o principal motivo pelo qual os professores não utilizam a história em suas aulas de Matemática. Ainda no gráfico 2, verificamos que apenas 35% dos professores tiveram esta disciplina em sua formação, o que comprova o quanto os educadores necessitam de atualização para sua docência e mais do que isso, a falta de material de apoio dificulta o seu trabalho.

Tabela 10
Quais as razões levaram os professores a buscar
a história da Matemática para suas aulas

Resposta	Frequência	%
Motivar o aluno ao estudo da disciplina	10	17,5
Para tornar a aula mais interessante	7	12,3
Facilitar na aprendizagem	6	10,5
Para conscientizar o aluno da importância da matemática	6	10,5
Para obter novos conhecimentos	5	8,8
Pela curiosidade dos alunos	5	8,8
Percebi que era importante	4	7,0
Mostrar que a matemática surgiu por uma necessidade humana	4	7,0
Para atualizar-me	3	5,3
Conheço pouco sobre o assunto	1	1,8
Por que está nos parâmetros	1	1,8
Senti que havia uma falha na minha formação	1	1,8
Não responderam	4	7,0
Total	57	100,0

Obs.: 13 professores não responderam a esta questão

Neste item da análise (tabela 10) obtivemos diferentes respostas, porém a maioria demonstrou uma única preocupação: a melhoria do ensino aprendizagem da Matemática. Os educadores reforçaram que falta motivação por parte dos alunos com relação à disciplina e que suas aulas estão pouco interessantes e mais do que isso, que a história seria um bom aliado para superar as dificuldades encontradas por eles. Um dado muito interessante que analisamos nesta questão é que 7,0% dos professores pesquisados apontam a utilização da história em suas aulas como um importante recurso para mostrar aos alunos que a Matemática surgiu por uma necessidade humana, ou seja, que a disciplina possui razões importantes para existir, reforçando a importância de usufruir esse recurso para auxiliar no processo de aprendizagem.

Tabela 11
Onde os professores buscam recursos para utilizar
a história da Matemática em suas aulas

Resposta	Frequência	%
Livros didáticos	42	73,7
Livros de história	15	26,3
Internet	12	21,1
Biblioteca	1	1,8
O que aprendi na graduação	1	1,8
Base	57	100,0

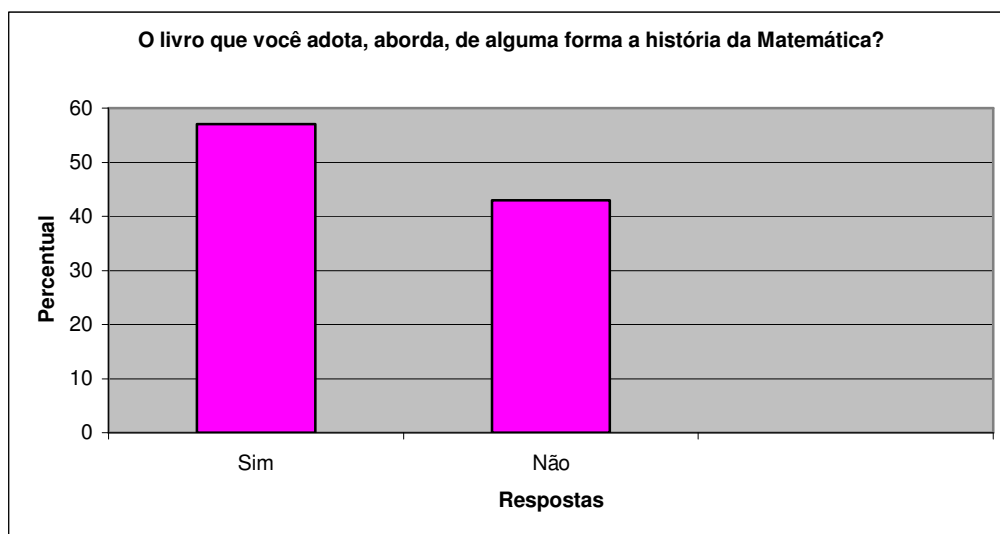
Obs.: 13 professores não responderam a esta questão

Outro fator relevante e que verificamos na pesquisa, é a falta de material de apoio apontado pelos docentes da área. A tabela 11 mostra, que 73,7% dos mestres buscam recursos para as aulas em livros didáticos.

Tabela 12
Quanto a material de apoio, os professores pesquisados, adotam livro didático?

Resposta	Frequência	%
Não	46	65,7
Sim	21	30,0
Não responderam	3	4,3
Total	70	100,0

Gráfico 3



Fonte: Investigação com os professores de Matemática do Ensino Fundamental e Médio

De acordo com nosso estudo, os professores de Matemática apontam como uma das dificuldades para trabalharem a história em suas aulas, a falta de material de apoio. Juntamente com isso, a tabela 12 aponta que 65,7% dos professores não adotam livro didático nas aulas e, apesar de apenas 21 professores terem respondido esta questão, eles apontam, no gráfico 3, que os livros adotados não abordam tópicos de história.

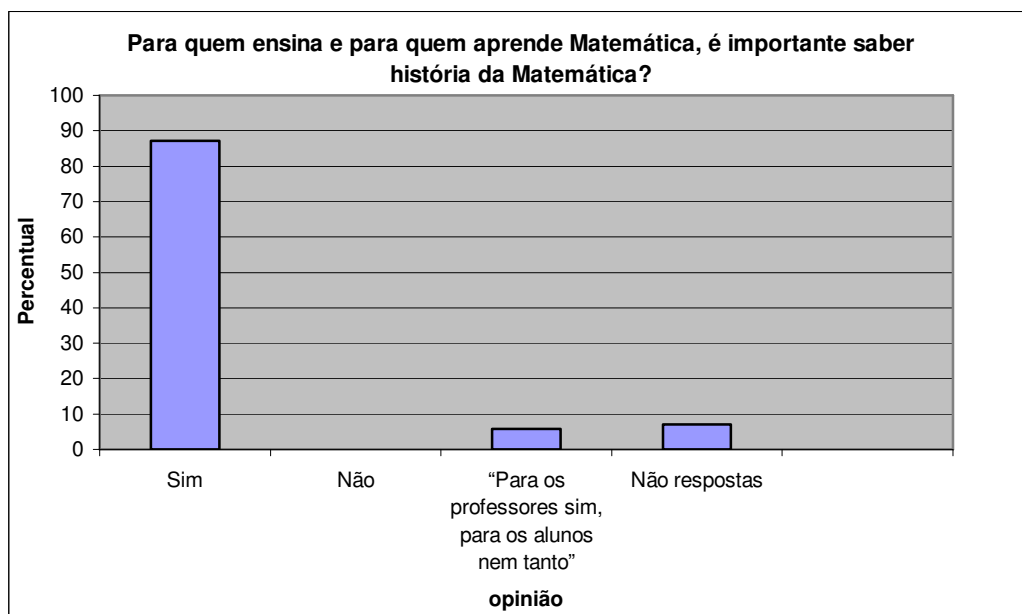
Tabela 13
Os efeitos percebidos pelos professores ao
utilizarem a história da Matemática em suas aulas

Resposta	Frequência	%
Maior interesse dos alunos	21	36,8
Mais motivação com a disciplina	14	24,6
Não fez diferença	6	10,5
Mais facilidade na aprendizagem dos conteúdos	4	7,0
Os alunos sentiram-se mais a vontade com o conteúdo	3	5,3
Os alunos ficaram impressionados com a maneira como a Matemática evoluiu.	3	5,3
Despertou o interesse pela pesquisa	3	5,3
Cria outro tipo de relação entre o aluno e a disciplina	2	3,5
Não responderam	1	1,8
Base	57	100,0

Obs.: 13 professores não responderam a esta questão

O item da tabela 13 é de grande importância para nossa discussão, pois ressalta os efeitos positivos que o uso da história da Matemática em sala de aula pode ocasionar. Em nossa análise, comprovou-se a falta de conhecimento dos professores nesta área, porém mesmo com tal resultado, eles admitem que a utilização deste recurso, é muito positivo na aprendizagem dos conteúdos matemáticos e no desenvolvimento da disciplina. Dentre os professores pesquisados, 36,5% apontam que houve maior interesse dos estudantes com relação ao estudo e que a motivação dos mesmos, aumentou consideravelmente.

Gráfico 4



Fonte: Investigação com os professores de Matemática do Ensino Fundamental e Médio

Tabela 14

Comentários dos investigados sobre a relação entre história e pedagogia da Matemática

Resposta	Frequência	%
A história da Matemática deveria ser disciplina obrigatória nos currículos dos cursos de licenciatura em matemática	8	72,7
Na formação dos professores deveria haver uma disciplina específica de história	2	18,2
Realizar mais pesquisas na área, fazendo com que os resultados cheguem às salas de aula	1	9,1
Base	11	100,0

Obs.: 59 professores não responderam a esta questão.

Cabe ainda ressaltar, que apesar dos poucos comentários obtidos na questão 13, a maioria torna público a necessidade de ter disciplinas de história da Matemática na formação do professor, com a finalidade oportunizar conhecimentos e esclarecer dúvidas, para que os

professores em questão possam trabalhar com mais tranquilidade com esse recurso em sala de aula.

Mais adiante, neste trabalho pretendemos apresentar uma atividade metodológica utilizando a história da Matemática associada a metodologia resolução de problemas para que os professores possam utilizar em seu trabalho em sala de aula, mostrando que não basta o educador ir para a sala de aula com nomes e datas históricas, pois assim o conteúdo fica sem significado e não motiva o estudante ao seu estudo, ficando desvinculado do momento, contexto e situação ao qual foi construído. É importante dar um enfoque investigativo ao assunto, para que o estudante consiga entender que o conteúdo é um processo em constante construção. Dessa forma, o aprendiz compreenderá que a formalização de uma idéia matemática é resultado de um momento histórico.

2 A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E A METODOLOGIA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

2.1 Resolução de problemas

Ensinar Matemática é muito mais do que ter conhecimento profundo dos conteúdos. É uma busca contínua de métodos e estratégias que satisfaçam os propósitos da educação. Conhecer e dominar a disciplina é fundamental, mas não suficiente para motivar e propiciar ao estudante um bom aproveitamento da disciplina.

A sociedade atual exige, mais do que nunca, do sistema educativo a capacitação das pessoas para resolver problemas. Problemas não quer dizer problemas matemáticos, mas sim, uma situação desconhecida total ou parcialmente sobre o que se tenha de tomar uma decisão razoável, em um período de tempo determinado (GROENWALD, 1999).

Os objetivos gerais da área de Matemática, nos PCN (1999), buscam contemplar todas as linhas que devem ser trabalhadas no ensino de Matemática. Esses objetivos têm como propósito fazer com que os alunos possam pensar matematicamente, levantar idéias, estabelecer relações

entre elas, desenvolver formas de raciocínio, estabelecer conexões entre temas matemáticos e outras áreas e desenvolver a capacidade de resolver problemas.

Entre os objetivos gerais listados no Padrão Referencial de Currículo (1998) encontra-se: *“valer-se do conhecimento da lógica matemática, identificando, analisando e abstraindo através de situações problemas numa relação do sujeito com o mundo real, interpretado e construído em diferentes linguagens”*.

Ainda segundo o Padrão Referencial de Currículo (1998) a Educação Matemática necessita:

- a) privilegiar a construção de significados, sem deixar de lado a linguagem simbólica;
- b) desenvolver a capacidade de matematizar situações reais;
- c) estabelecer relações entre os diversos problemas, em diferentes contextos;
- d) realizar atividades articuladas com outras áreas do conhecimento e da educação.

Segundo Polya (1995): “Educar através do processo da resolução de problemas em sala de aula, tem como objetivo, elevar a criatividade e o interesse dos alunos em sala de aula, bem como, habituar os estudantes a tratar situações problemáticas abertas, e não somente torná-los seres capazes de resolver exercícios mecanicamente”.

Neste sentido sustenta-se a idéia de que a resolução de problemas é uma atividade de grande importância na Matemática, não somente por que contribui para o desenvolvimento da ciência em si, mas também por que possibilita a transferência de aprendizagem, melhora a capacidade analítica, aumenta a motivação e contribui para uma melhor compreensão da Matemática (GONZALÉZ, 1993).

Para que estes objetivos sejam cumpridos, é necessário que, os estudantes sejam expostos a numerosas e variadas experiências, afim de encorajá-los a valorizarem a iniciativa em Matemática, a desenvolver hábitos matemáticos da mente e a entender e apreciar o papel dessa disciplina na vida. Levando-os a explorar, adivinhar e até mesmo, a cometer erros de modo que, através dessas atividades, ganhem confiança em sua capacidade de resolver problemas.

Na opinião de Andrade (1998): “A resolução de problemas é muito importante para a aprendizagem do aluno, pois esta metodologia possibilita ao estudante um maior crescimento cognitivo, além de motivá-lo ao estudo da Matemática, mostrando a ele o lado real da disciplina.”

Para Polya (1995): “Resolver problemas era o tema mais importante para se fazer Matemática, e ensinar o aluno a pensar era sua importância primeira”.

Resolução de problemas envolve aplicar a Matemática ao mundo real, atender a teoria e a prática de ciências atuais e emergentes e resolver questões que ampliam as fronteiras das próprias ciências matemáticas (BICUDO, 1999).

Andrade (1998) afirma que: “Em nível mundial, as investigações sistemáticas sobre Resolução de Problemas e suas implicações curriculares têm início na década de 1970. Embora grande parte da literatura hoje conhecida em resolução de problemas tenha sido desenvolvida a partir dos anos 70”.

No final dos anos 70, a resolução de problemas ganhou espaço no mundo inteiro. Começou o movimento a favor do ensino de resolução de problemas. Em 1980 é editada, nos Estados Unidos, uma publicação do NTCM – National Council of Teachers of Mathematics – que chamava todos os interessados, pessoas e grupos, para juntos, buscar uma melhor Educação Matemática para todos.

A primeira dessas recomendações dizia que “resolver problemas deve ser o foco da Matemática escolar para os anos 80” e destacava que “o desenvolvimento da habilidade em resolução de problemas deveria dirigir os esforços dos educadores matemáticos por toda esta década e que o desempenho em resolver problemas mediria a eficiência de um domínio, pessoal e nacional, da competência Matemática”. Em outro relato do documento, dizia que é preciso preparar os indivíduos para tratar com problemas especiais com que irão se deparar em suas próprias carreiras.

O referido documento, enfatiza as seguintes ações:

- o currículo matemático deveria ser organizado ao redor da resolução de problemas;

- a definição e linguagem de resolução de problemas em Matemática deveria ser desenvolvida e expandida de modo a incluir uma ampla gama de estratégias, processos e modos de apresentação que encerrassem o pleno potencial das aplicações matemáticas;
- os professores de Matemática deveriam criar ambientes de sala de aula onde a resolução de problemas pudesse prosperar;
- materiais curriculares adequados ao ensino de resolução de problemas deveriam ser desenvolvidos para todos os níveis de escolaridade.

Em decorrência dessas inúmeras manifestações com relação à resolução de problemas, que começaram nos anos 80, é que hoje a resolução de problemas está cada vez mais difundida, e não somente como exercício de aplicação, mas sim como metodologia de ensino.

Segundo Andrade (1998): “A resolução de problemas passa a ser pensada como uma metodologia de ensino, como ponto de partida e um meio de se ensinar Matemática. O problema é olhado como um elemento que pode disparar um processo de construção do conhecimento”.

Sob este enfoque, problemas são propostos ou formulados de modo a contribuir para a formação dos conceitos antes mesmo de sua apresentação em linguagem Matemática formal. O foco está na ação por parte do aluno. Ao ensinar Matemática através desta metodologia, observa-se que os problemas são importantes não somente como um propósito de se aprender Matemática, mas, também, como um primeiro passo para se fazer isso. O ensino-aprendizagem de um tópico

matemático começa com uma situação-problema que expressa aspectos-chave desse tópico e são desenvolvidas técnicas matemáticas como respostas razoáveis para problemas razoáveis.

Um dos objetivos de aprender Matemática é o de poder transformar certos problemas não rotineiros em rotineiros. O aprendizado deste modo pode ser visto como um movimento do concreto (um problema do mundo real) para o abstrato (representação simbólica). Para Pozo, o ponto central do interesse em trabalhar o ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas baseia-se na crença de que a razão mais importante para este tipo de ensino é a de ajudar os alunos a compreender os conceitos, os processos e as técnicas operatórias necessárias dentro do trabalho feito em cada unidade temática (1998, p.9).

Na visão do professor, a compreensão da Matemática, por parte dos alunos, envolve a idéia de que entender é essencialmente relacionar. Esta posição baseia-se na observação de que a compreensão aumenta quando: o aluno é capaz de relacionar uma determinada idéia matemática a outros contextos; o aluno consegue relacionar um dado problema a um grande número de idéias matemáticas implícitas nele; o aluno consegue construir relações entre as várias idéias matemáticas contidas num problema (POLYA, 1995).

É importante observar, que compreender deve ser o principal objetivo do ensino, apoiados na crença de que o aprendizado da Matemática, pelos alunos, é mais forte quando é autogerado do que quando lhe é imposto por um professor ou por um livro texto. Quando um professor ensina Matemática através da metodologia resolução de problemas, ele deve estar consciente, que o que ele está dando ao seu aluno, é uma ferramenta para que ele desenvolva sua própria compreensão. Logo, a medida que a compreensão dos alunos se torna mais profunda e mais rica, sua habilidade em usar matemática para resolver problema aumenta consideravelmente (POZO, 1998, p.9).

São características do ensino da Matemática construtivista: construir sobre um conhecimento prévio, enfatizar sobre o pensar, dar tempo para pensar, esperar por explicações ou justificativas para as respostas ou pelo modo de pensar, fazer perguntas e saber ouvir, reconhecer que a Matemática é “parte invenção” e “parte convenção”, trabalhar os conceitos e procedimentos matemáticos em termos de resolução de problemas.

Na abordagem resolução de problemas como uma metodologia de ensino, o aluno, tanto aprende Matemática resolvendo problemas, como aprende Matemática para resolver problemas. Nesse trabalho, o papel do professor muda de comunicador de conhecimentos para o de observador, organizador, mediador, interventor, controlador e incentivador da aprendizagem. Ele lança questões desafiadoras e ajuda os alunos a se apoiarem, uns nos outros, para atravessarem as dificuldades. O professor faz a intermediação, leva os alunos a pensar, espera que eles pensem, dá tempo para isso, acompanha suas explorações e resolve, quando necessário, problemas secundários.

2.1.1 Conceito de Problema

Planejar situações que garantam a aprendizagem tem sido um dos grandes desafios de todos os que se ocupam da reflexão sobre o trabalho em sala de aula. Para atuar dentro da metodologia resolução de problemas, é necessário, primeiramente, que o professor saiba, com clareza, o conceito de problema, para que desta forma possa realizar um trabalho eficiente. Resolver problemas é o meio para a construção dos conhecimentos matemáticos, é a essência da atividade matemática (MARINCEK, 2001). Muitos autores conceituam problemas de diferentes formas. Neste sentido, vamos expor algumas destas idéias.

Podemos partir de uma definição já clássica de problema: “É uma situação que um indivíduo ou grupo, quer ou precisa resolver e para a qual não dispõe de um caminho rápido e direto que o leve à solução” (LESTER, 1983, apud POZO, 1998).

Em Matemática, entende-se por problema qualquer tipo de atividade procedimental que seja realizada dentro e fora da sala de aula. No entanto, uma tarefa qualquer (seja Matemática ou não) não constitui um problema. Para que possamos falar da existência de um problema, a pessoa que está resolvendo esta tarefa precisa encontrar alguma dificuldade que a obrigue a questionar sobre qual seria o caminho que precisaria seguir para alcançar a meta (GROENWALD, 1999).

Para V. Brenes e M. Murillo (1994) apud Polya (1995): “Entende-se que resolver um problema é fazer o que se faz quando não se sabe o que fazer, pois se sabemos o que se deve fazer, então não há problema”.

Para Pólya (1995): “O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta”.

Todo o problema é um desafio que põe a prova nossos saberes, nossa capacidade de interpretar, de detectar a informação relevante, de relacionar, operar, de antecipar, de organizar e de validar os procedimentos.

Segundo Kilpatrick (1982): “O conceito de problema matemático pode ser abordado sob quatro pontos de vista: matemático, curricular, cognitivo e sociológico”.

Na perspectiva matemática, o que interessa é o problema como estrutura, bem como seu papel no processo de ensino e aprendizagem no desenvolvimento da Matemática. No ponto de vista pedagógico, os problemas são enfocados observando o seu grau de complexidade, em função das demandas intelectuais dos estudantes, assim podendo classificá-los. Quanto à perspectiva sociológica e curricular, é importante que o problema seja contextualizado, isto é, que o aluno seja capaz de transferir seus conhecimentos matemáticos para a realidade. Enfocando o ponto de vista cognitivo, a resolução de problemas passa a ser um processo pelo qual se aplicam conhecimentos previamente estabelecidos, isto é, todo o ensino estrutura-se primeiro em preparar o terreno para que depois o aluno possa resolver problemas (SMOLE; DINIZ, 2001).

Neste contexto, pode-se denominar problema matemático, como sendo toda situação que requer a descoberta de informações matemáticas desconhecidas para solucioná-lo, e/ou a invenção de demonstrações de resultados matemáticos. O fundamental é que o resolvidor tenha de inventar estratégias e criar idéias; ou seja: pode até ocorrer que o resolvidor conheça o objetivo a chegar, mas só estará enfrentando um problema se ele ainda não tem os meios para atingir tal objetivo. Um bom problema de matemática é muito mais do que uma charada.

Ampliando o conceito de problemas, devemos considerar que a resolução de problemas trata de situações que não possuem solução evidente e que exijam que o resolvidor combine seus conhecimentos e decida pela maneira de usá-los em busca da solução (SMOLE; DINIZ, 2001).

Problema é qualquer situação que exija o pensar do sujeito para solucioná-lo. Problema – matemático é qualquer situação que exija a maneira matemática de pensar e conhecimentos matemáticos para solucioná-lo. Problemas de aplicação são aqueles que retratam situações reais

do dia-a-dia e que exigem o uso da Matemática para serem resolvidos, são também chamados de situação – problema (DANTE, 2002).

Para entender um pouco mais o sentido de situação-problema, Perrenoud (1999) afirma que: “Uma situação-problema, não é uma situação didática qualquer, pois deve colocar o aprendiz diante de uma série de decisões a serem tomadas para alcançar um objetivo que ele mesmo escolheu, ou que lhe foi proposto e até traçado.”

Na perspectiva construtivista o aluno está diante de um problema, quando uma determinada situação não é passível de ser assimilada aos seus esquemas, provocando, assim, uma situação de desequilíbrio. A metodologia resolução de problemas representa, em essência, uma mudança de postura em relação ao que seja ensinar Matemática, isto é, um problema não significa apenas compreensão do que é exigido, ou aplicação de técnicas e fórmulas adequadas para obter uma resposta correta, mas, além disso, uma atitude de investigação científica em relação àquilo que está pronto.

Para Diniz (1999): O ensino atual se compõe de apenas duas ações:

- propor questões;
- resolver as questões propostas.

Na perspectiva resolução de problemas, o que se exige, é que, além dessas duas ações se coloquem mais duas: questionar as respostas obtidas e ainda, questionar a própria questão original (DINIZ, 1999).

O conceito de problema é muito amplo, podendo ter diferentes denominações, de acordo com cada linha de pensamento. Acreditamos que o conceito de problema reúne as seguintes características principais:

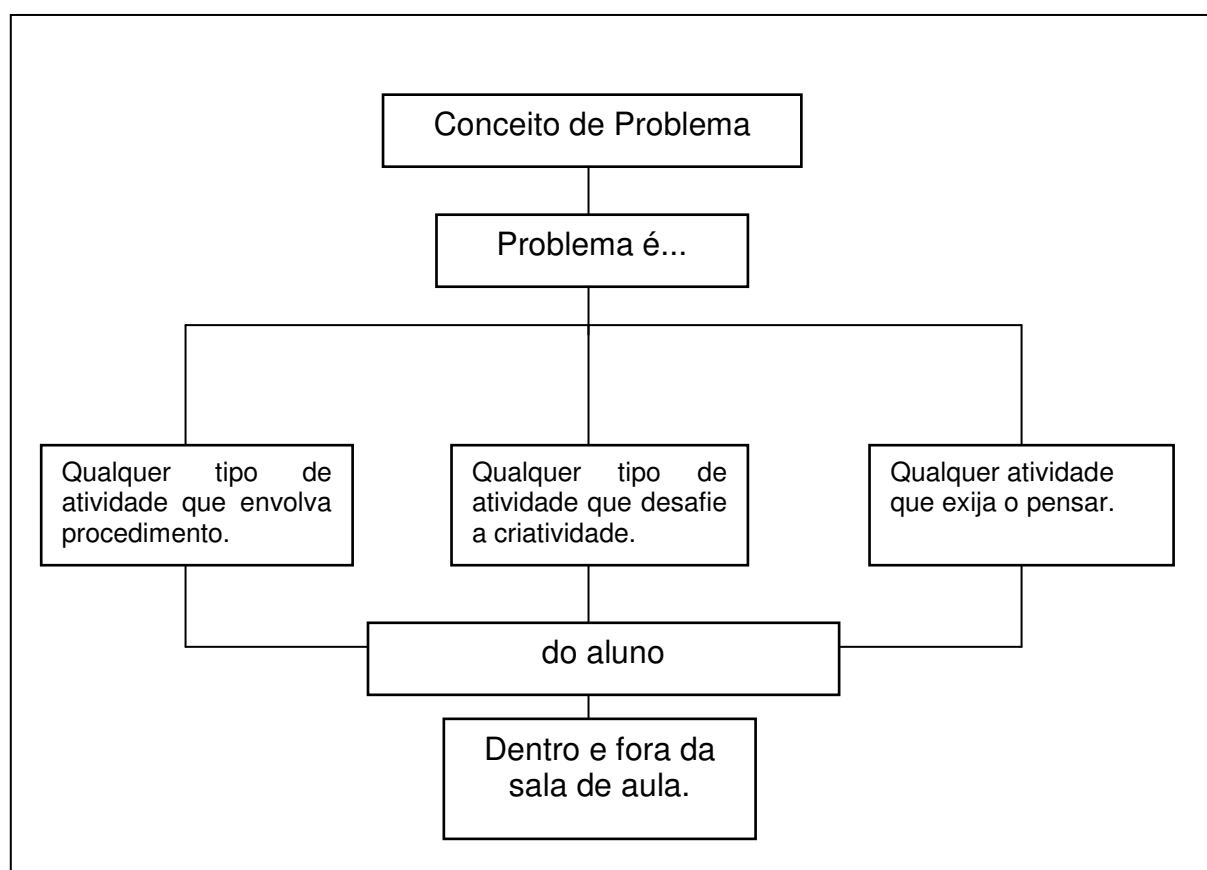


Figura 1- Quadro resumo sobre o conceito de problemas

Frente a essa discussão, a resposta correta em um problema tem seu valor diminuído e a ênfase deve ser dada no processo de resolução, permitindo o aparecimento de soluções diferentes, comparando-as entre si e pedindo que alguns alunos verbalizem como chegaram a solução.

2.1.2 Tipos de Problemas

Uma das preocupações dos professores é fazer com que os alunos sejam capazes de resolver diferentes tipos de problemas nas aulas de Matemática. Mas, o que realmente isso significa?

Para tornar mais simples a reflexão, vamos analisar dois casos de problemas, segundo Diniz (2001):

A) Ricardo comprou 3 pacotes de figurinhas. Em cada pacote há 4 figurinhas. Quantas figurinhas Ricardo têm ao todo?

B) Isso é um cêrbero. Cada vez que uma de suas cabeças está doendo, ele tem que tomar quatro comprimidos. Hoje as suas três cabeças tiveram dor. Mas o frasco já estava no fim e ficaram faltando comprimidos para uma cabeça. Quantos comprimidos havia no frasco?

Diniz (2001) afirma ainda que: “Há uma única semelhança entre os dois problemas: Os dois envolvem uma multiplicação. Eles diferem em vários outros pontos, seja no processo de resolução, no número de respostas possíveis ou na forma de resolução”.

O problema A, possui frases curtas e objetivas e não exige um pensamento mais elaborado para sua interpretação. Todos os dados que o resolvedor precisa estão explícitos no texto de modo claro e na ordem que precisam ser usados. Já o problema B, tem uma estória com personagens, oferece uma situação inusitada. Isso motiva, encanta e envolve o aluno. Este caso exige uma leitura mais cuidadosa do texto, pois o aluno precisa coletar as informações a além disso, decidir quais as informações serão necessárias para solucionar o problema.

O problema A, é o tipo mais comum trabalhado nas aulas de Matemática e geralmente encontrados nos livros didáticos. Porém o problema B, para Diniz (2001): “É um excelente tipo de problema para ser trabalhado nas aulas de Matemática, pois estimula o desenvolvimento de estratégias variadas de resolução. Além disso, favorece o desenvolvimento de diferentes maneiras de pensar”.

É possível diferenciar problemas do tipo dedutivo ou do tipo indutivo, dependendo do raciocínio que o aluno precisa realizar para chegar a solução. Por exemplo, fazer a demonstração de uma fórmula matemática, pode ser chamado de problema dedutivo, enquanto que para estabelecer regularidades no comportamento dos objetos em função do seu peso, é um problema do tipo indutivo (POZO, 1998).

Uma das classificações clássicas dos diferentes tipos de problemas, é a realizada por *Gestalt*⁴, em função das atividades que as pessoas realizam para resolver problemas. Os psicólogos da Gestalt distinguem entre pensamento produtivo e reprodutivo. O pensamento

⁴ Foi uma escola de Psicologia que se desenvolveu na Alemanha entre as duas guerras mundiais e que deve seu nome a um termo alemão que pode ser traduzido como “configuração”, já que consideravam que os processos psicológicos deveriam ser analisados de forma global e estrutural.

produtivo consiste na produção de novas soluções a partir de uma organização ou reorganização dos elementos do problema, enquanto que o pensamento reprodutivo consiste na aplicação de métodos já conhecidos.

Esta distinção é semelhante a que antes fizemos entre problema e exercício (POZO, 1998). Embora ambos exijam uma conduta dirigida para um objetivo e a utilização de uma série de meios para alcançá-lo, no caso dos problemas, essa situação pressupõe algum obstáculo que o sujeito deve superar, ou por que precisa obter novos meios para alcançar uma solução, ou por que deve organizar de forma diferente os meios que já dispõe. Ao contrário, no caso do exercício o sujeito conhece e já automatizou as técnicas que o levarão à solução da tarefa.

Um problema bem definido ou estruturado, é aquele no qual é possível identificar facilmente se foi alcançada uma solução [...] neste tipo de tarefa tanto a proposição como a solução do problema e o tipo de operações que devem ser feitas para percorrer a distância entre ambos estão especificados de forma muito clara. Pode-se citar como exemplo de problema bem definido, qualquer problema de matemática escolar (POZO, 1998, p.20).

Um problema mal definido ou mal estruturado é aquele no qual o ponto de partida ou as normas que estipulam quais são os passos necessários para resolver a tarefa são muito menos claros e específicos (POZO, 1998). Além disso, nos problemas mal estruturados, é possível encontrar várias soluções para um determinado problema, todas elas válidas e por meio de métodos também diferentes e válidos. Um bom exemplo, para problema mal definido é, segundo Pozo (1998): “O que você faria para evitar as conseqüências da recessão econômica ocidental nos países do terceiro mundo?”.

Podemos classificar os problemas ainda, em abertos e fechados.

Problemas fechados são os que apresentam certas características que podem levar o aluno a solução imediata do problema, através da aplicação de um ou mais algoritmos. Com isso, o aluno pode transformar a linguagem usual em linguagem matemática (POZO, 1998).

Para Medeiros (2001): “Problemas abertos se caracterizam por não terem vínculo com os últimos conteúdos estudados”.

Nos problemas abertos, os alunos têm a oportunidade de conquistar suas próprias idéias a respeito de um novo conteúdo, fazendo com que o estudante viva a necessidade da busca de solução para o problema. Além disso, eles podem ser trabalhados em grupo, o que diminui o medo de não conseguir chegar ao resultado.

Um problema aberto tem por objetivo permitir que o aluno desenvolva um processo de resolução de problemas, ou seja, onde o aluno desenvolverá a capacidade de tentar, supor, testar e provar o que for proposto como solução para o problema (POZO, 1998).

Comparando os problemas abertos com os fechados, observa-se, de acordo com Billy (1995), que no problema aberto, o objetivo do aluno é obter o resultado, superando os obstáculos inerentes a um verdadeiro problema. O professor, anteriormente, constrói um problema, prevendo os obstáculos, para que o aluno possa superá-lo em uma situação significativa. Já no problema fechado, o professor propõe uma coleção de exercícios variados e usa o método expositivo.

Embora tais diferenças entre os tipos de problemas possam trazer consigo divergências quanto aos procedimentos de resolução também é verdade que existe uma série de procedimentos e habilidades que são comuns a todos os problemas e que todas as pessoas colocam em ação com maior ou menor competência. É evidente que para resolver qualquer problema temos que prestar atenção, recordar, relacionar entre si certos elementos; mas também é verdade que na maioria dos problemas estas habilidades tem que estar numa determinada ordem para que nos levem à meta (POZO, 1998, p. 22).

Dentro da perspectiva, de problemas abertos e fechados, podemos classificá-los também, segundo Diniz e Smole (2001) em:

- Problemas sem solução: Este tipo de problema rompe com a concepção de que os dados apresentados devem ser usados na sua resolução e de que todo problema tem solução. Além disso, ajuda a desenvolver no aluno a habilidade de aprender a duvidar, a qual faz parte do pensamento crítico.

Pensamento crítico significa uma atividade prática reflexiva, cuja meta é uma crença ou uma ação sensata. Há cinco termos chaves relacionados a este termo: prática, reflexiva, sensata, crença e ação, que podem ser combinados na seguinte definição operacional dada por Ennis (1985). O pensamento crítico é uma forma de pensamento racional, reflexivo, focado no decidir aquilo em que acreditar ou fazer (TENREIRO, 1997, p. 26).

- Problemas com mais de uma solução: O uso desse tipo de problemas nas aulas de Matemática, rompe com a crença de que todo problema tem uma única resposta, bem como a idéia que sempre há uma maneira certa de resolvê-lo e que, mesmo quando há várias soluções, uma delas é correta.

O trabalho com problemas com duas ou mais soluções faz com que o aluno perceba que resolvê-los é um processo de investigação do qual ele participa como ser pensante e produtor do seu próprio conhecimento (DINIZ; SMOLE, 2001, p. 109).

- Problemas com excesso de dados: Nesses problemas nem todas as informações disponíveis no texto são usadas em sua resolução. Trabalhar com eles rompe com a crença de que um problema não pode permitir dúvidas e de que todos os dados do texto são necessários para a sua resolução. Além disso, evidencia ao aluno a importância de ler, fazendo com que aprenda a selecionar dados relevantes para a resolução de um problema.
- Problemas de lógica: Fornecem uma proposta de resolução cuja base não é numérica, que exigem raciocínio dedutivo e que propiciam uma experiência rica para o desenvolvimento de operações de pensamento como previsão e checagem, levantamento de hipóteses, busca de suposições, análise e classificação.

Ainda nesta perspectiva, Dante (2002), destaca alguns tipos de problemas:

- Problemas-padrão: Sua resolução envolve a aplicação direta de um ou mais algoritmos anteriormente aprendidos e não exige qualquer estratégia. São os tradicionais problemas encontrados nos finais dos capítulos dos livros didáticos.
- Problemas-processo ou heurísticos: São problemas cuja solução envolve operações que não estão contidas no enunciado. Em geral, não podem ser traduzidos diretamente para a linguagem matemática, nem resolvidos pela aplicação automática de algoritmos, pois exigem do aluno um tempo para pensar e arquitetar um plano de ação, uma estratégia que poderá levá-lo a

solução. Por isso tornam-se mais interessantes do que os problemas-padrão. Estes problemas aguçam a curiosidade do aluno e permitem que ele desenvolva sua criatividade, sua iniciativa e seu espírito explorador. E, principalmente, iniciam o aluno no desenvolvimento de estratégias e procedimentos para resolver situações-problema, o que, em muitos casos, é mais importante que encontrar a resposta correta.

- Problemas de aplicação: São aqueles que retratam situações reais do dia-a-dia e que exigem o uso da Matemática para serem resolvidos. São também chamados de situações-problema. Através de conceitos, técnicas e procedimentos matemáticos procura-se matematizar uma situação real, organizando os dados em tabelas, traçando gráficos, fazendo operações e etc. Em geral, são problemas que exigem pesquisa e levantamento de dados.
- Problemas de quebra-cabeça: São problemas que envolvem e desafiam grande parte dos alunos. Geralmente constituem a Matemática recreativa, e sua solução depende, quase sempre, de um golpe de sorte ou da facilidade em perceber algum *truque*, que é chamado de solução.

Ao trabalhar com os diferentes tipos de problemas nas aulas de Matemática, o professor pode modificar a postura do aluno diante desta proposta. O aluno tem a oportunidade de verificar que a resolução de problemas está muito além das simples estórias matemáticas encontradas nos livros didáticos. Com a resolução de problemas, o estudante desenvolve seu senso crítico, seu espírito de investigação e sua autonomia, tornando-se um indivíduo capaz de enfrentar, observar, discutir e deduzir os desafios, perseverando na busca de caminhos para possíveis soluções (DINIZ, 2001).

O quadro a seguir, resume os principais tipos de problemas:

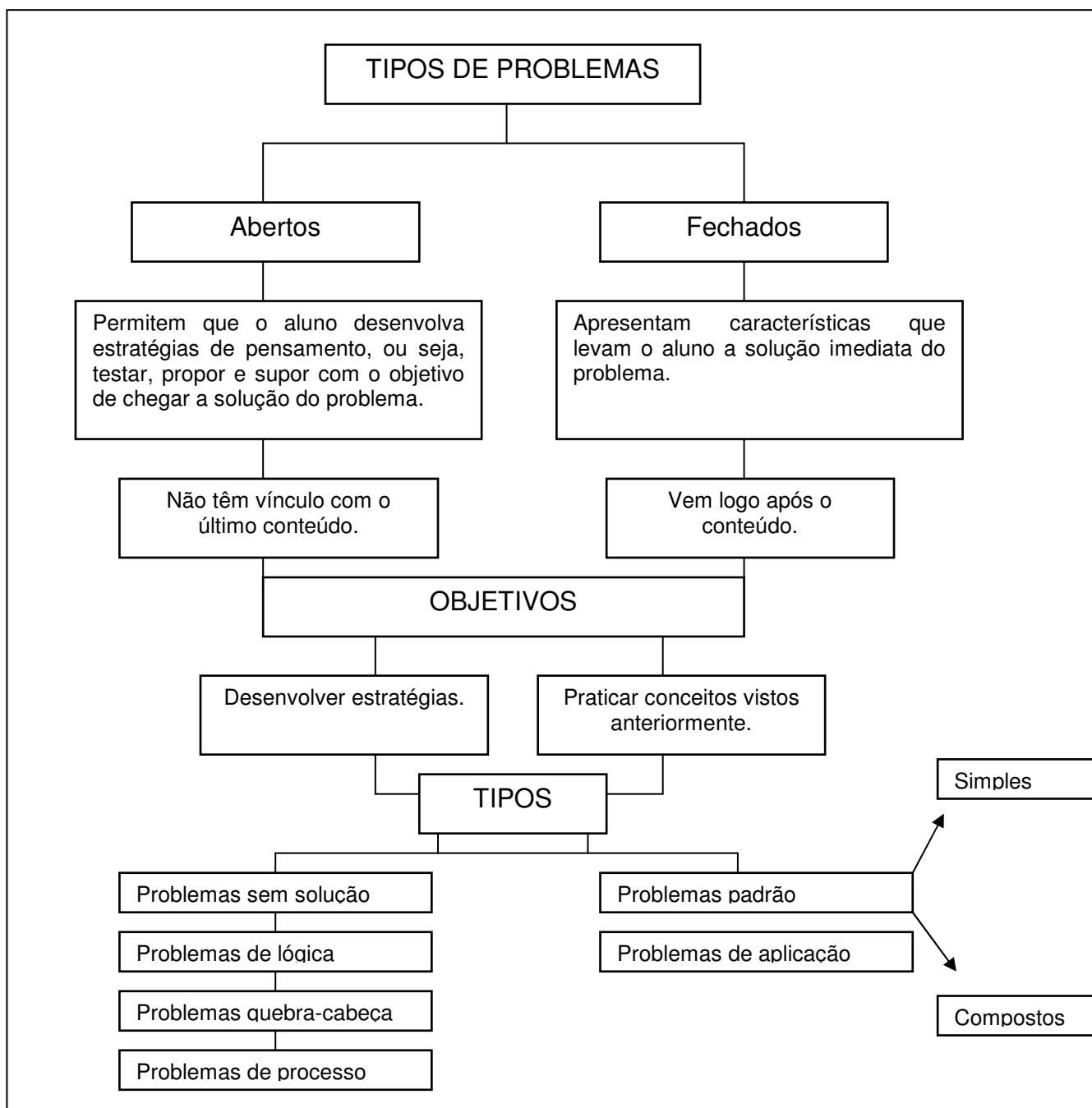


Figura 2 : Esquema (tipos de problemas)

Deve-se reconhecer a importância dos problemas abertos, pois a partir deles, o estudante descobre suas capacidades inventivas, ou seja, aqui ele desenvolve seus próprios critérios de

resolução do problema. Diferente dos problemas fechados, onde os alunos são treinados a realizar e praticar métodos de solução.

O importante no ensino, é estar em constante busca pelo aperfeiçoamento do aluno. Trabalhar com diferentes tipos de problemas nas aulas de Matemática, possibilita ao estudante uma visão sob diferentes perspectivas da disciplina, tornando a sua compreensão mais simples e prazerosa.

2.1.3 Diferença entre exercício e problema

Estudar Matemática é resolver problemas. Portanto a incumbência dos professores de Matemática, em todos os níveis, é ensinar a arte de resolver problemas. O primeiro passo nesse processo é colocar o problema adequadamente (DANTE, 2002, p. 43).

Trabalhar com a metodologia resolução de problemas não é tarefa simples para o professor. Ele deve estar atento a todos pontos e, um dos principais pontos, é saber diferenciar claramente problema de exercício. O professor deve ter em mente que solucionar um problema é muito diferente de resolver um exercício e que ambos são importantes atividades no processo de ensino aprendizagem, desde que se saiba a diferença entre seus objetivos. Para que esta diferença fique clara, destacamos conceitos importantes, segundo alguns autores.

Podemos chamar uma situação de problema, na medida em que exista um reconhecimento dela como tal, e na medida em que não disponhamos de procedimentos automáticos que nos permitam solucioná-la de forma imediata, sem exigir, de alguma forma, um procedimento de reflexão ou uma tomada de decisão sobre a seqüência de passos a serem seguidos (POZO, 1998, p.16).

Esta última característica diferencia um verdadeiro problema de situações similares, como os exercícios, por exemplo. Logo, podemos dizer, que um problema se diferencia de um exercício na medida em que, neste último, dispomos e utilizamos mecanismos que nos levam, de forma imediata à solução. Assim, é possível, que uma mesma situação represente um problema para uma pessoa enquanto que para outra esse problema não existe. Isso por que, uma pessoa pode possuir mais ou menos mecanismos cognitivos para resolver tal problema. Desta forma se ela possui mais meios para resolver o problema, ela pode reduzi-lo a um simples exercício.

Por exemplo: Consertar um circuito elétrico é um simples exercício para algumas pessoas, mas um problema complexo e trabalhoso para outras. Da mesma forma, interpretar a informação contida num gráfico ou isolar uma incógnita numa equação matemática pode representar um problema, um exercício ou nenhuma das duas coisas, para alunos com diferentes conhecimentos e atitudes.

Para Pozo (1998): “De forma sintética, podemos dizer que a realização de exercícios se baseia no uso de habilidades ou técnicas sobreaprendidas (ou seja, transformadas em rotinas automatizadas como consequência de uma prática contínua). Limitamo-nos a exercitar uma

técnica quando enfrentamos situações ou tarefas já conhecidas, que não representam nada de novo e que, portanto, podem ser resolvidas pelos caminhos ou meios habituais”.

Dessa forma, não é possível determinar, a priori, se uma tarefa escolar é um problema ou exercício, pois isso depende não somente da experiência e dos conhecimentos prévios de quem a executa, mas também dos objetivos que estabelece enquanto a realiza.

Segundo González (1987): “Tanto a realização de exercícios como a resolução de problemas são duas atividades importantes no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Entretanto, seus objetivos são muito diferentes: os exercícios são apropriados para a aprendizagem e habilidades específicas, já a resolução de problemas permite a aquisição de enfoques gerais, que ajudam a enfrentar situações matemáticas diversas, possibilitando a realização de descobertas originais e ajudam a aprender a aprender”.

Dante (2002), afirma que: “É preciso fazer clara distinção entre o que é um exercício e o que é problema [...] exercício, serve para exercitar, para praticar um determinado algoritmo ou processo. Problema ou problema-processo, é a descrição de uma situação onde se procura algo desconhecido e não se tem previamente estabelecido nenhum algoritmo que garanta sua solução”.

Concluindo, a solução de problemas e a realização de exercícios constituem um *continuum* educacional cujos limites nem sempre são fáceis de estabelecer. Entretanto, é importante que nas atividades de sala de aula a distinção entre exercícios e problemas esteja bem definida e, principalmente, que fique claro para o aluno que as tarefas exigem algo mais de sua parte do que o simples exercício repetitivo (POZO, 1998).

Assim, é importante, que o professor esteja consciente da diferença entre problema e exercício e, além disso, que ele saiba os objetivos de aplicar cada um deles, pois ambos possuem plena importância dentro da aprendizagem.

2.1.4 A Metodologia Resolução de Problemas

A Matemática, apesar de estar presente constantemente na vida das pessoas, é algo estranho a maioria delas que normalmente não a compreendem, chegando mesmo a temer e/ou odiá-la. Por isso, um grande número de pessoas, mesmo capazes de utilizar sinais verbais, não conseguem usar os símbolos e o raciocínio matemático. O motivo pode estar na natureza intrínseca da ciência: abstrata; ou na forma como se dá o seu ensino: verbalização inadequada (RABELO, 2002).

Analisar a resolução de problemas como uma perspectiva metodológica a serviço do ensino e da aprendizagem de Matemática amplia a visão puramente metodológica e derruba a questão da grande dificuldade que alunos e professores enfrentam quando se propõe a resolução de problemas nas aulas de Matemática (DINIZ; SMOLE, 2001, p.87).

Na metodologia resolução de problemas, deve ficar clara ao professor, que trabalhar nesta perspectiva, requer paciência, pois o processo é vagaroso e repleto de idas e vindas, cabendo a ele orientar o aluno sem atropelar a fase de criação. Cada nova colocação sobre um problema necessita de tempo para que os alunos compreendam e se decidam por condutas de ação nem sempre as mais eficientes e às vezes incorretas. Logo, um único problema pode ocupar várias

aulas, seguidas ou não, sendo necessário sacrificar a quantidade de problemas em favor da qualidade de ensino.

O professor deve desenvolver o processo ensino-aprendizagem sob a forma de desafios e, em aulas especiais, propor problemas interessantes, que possam ser explorados e não apenas resolvidos.

... nós, professores de Matemática, que deveríamos estimular o pleno raciocínio, somos os mais ferrenhos cobradores de automatismos; se damos um exercício ou um problema, exigimos uma resposta por um caminho ensinado, quando deveríamos animar o encontro desse resultado por vários caminhos. Só assim a capacidade de conjecturar e de relacionar se desenvolveria (LIMA apud RABELO, 2002, p. 63).

Segundo Nasser (1999): “Explorar um problema significa procurar soluções alternativas, além da natural, e analisá-lo sob diferentes pontos de vista matemáticos”.

Sabe-se que um mesmo problema pode ter uma resolução aritmética e outra algébrica ou ainda, geométrica, ou pode ser resolvida por uma estratégia (heurística), sem o uso de algoritmos ou de conhecimentos matemáticos específicos. É evidente que isso nem sempre será possível com qualquer problema e, nas primeiras séries, a “exploração” deve ser conduzida pelo professor com bastante cuidado. Problemas ideais para serem “explorados” são os chamados “problemas de processo”, ou seja, aqueles que não podem ser resolvidos apenas pelo uso de uma ou mais operações, mas requerem o uso de uma estratégia adequada (POZO, 1998).

Para González (1987): “A resolução de problemas é importante atividade na Matemática das escolas quando”:

- as estratégias gerais de resolução de problemas aprendidas na Matemática podem, em certos casos, ser transferidas e aplicadas em outras situações (transferência de aprendizagem);
- a solução dos problemas matemáticos podem ajudar os estudantes a melhorar a sua capacidade analítica e aplicar esta capacidade em diversas situações (melhoramento da capacidade analítica);
- a solução de problemas nos cursos de Matemática constituem uma atividade fascinante para muitos estudantes, estas atividades podem melhorar sua motivação, isto pode tornar a Matemática mais interessante;
- a resolução de problemas em aula pode conduzir os estudantes a uma melhor compreensão da natureza da Matemática e das atividades que são inerentes aos matemáticos.

Neste processo de ensino e aprendizagem, o papel do aluno é tão importante quanto o do professor. Para que haja sucesso na utilização desta metodologia, é necessário que aluno e professor estejam integrados ao processo.

No ensino da Matemática, os conteúdos devem estar adaptados ao aluno, para que este compreenda o que lhe é ensinado. Além disso, o erro do estudante não deve ser visto como

definitivo, absoluto. Aqui, o erro pode ser observado como construtivo, uma fonte inesgotável de contradições e, portanto, de aprendizagem, às vezes, maior até do que o próprio acerto (RABELO, 2002).

Instruir alguém em Matemática não é fazê-lo armazenar resultados na mente. É ensiná-lo a fazer parte do processo que torna possível o estabelecimento do conhecimento. Ensinamos essa disciplina não para produzirmos pequenas livrarias ambulantes sobre o assunto, mas sim a fim de levar o estudante a pensar matematicamente por si mesmo, para observar os fatos, da mesma forma que um historiador para tomar parte no processo de conquista do conhecimento. Conhecer é um processo, não um produto (BRUNER apud RABELO, 2002).

Segundo Rabelo (2002): “Apesar de constantes buscas metodológicas, sabemos que o ensino assim organizado está dando ênfase quase que somente ao aspecto representacional do conhecimento através de suas linguagens próprias e formais, linguagens essas, muitas vezes distantes e inacessíveis à maioria dos alunos”.

2.1.4.1 A Resolução de Problemas como processo de investigação

Uma proposta didática para o ensino da resolução de problemas é o Modelo de resolução de problemas como investigação (GIL e MTNEZ-TORREGROSA, 1983, apud POZO, 1998), ou seja, a busca de novos conhecimentos na tentativa de resolver um problema.

Para Pozo (1998): “A aplicabilidade do Modelo Resolução de Problemas como investigação, tem sido muito utilizado, pois este propõe o uso de situações problemáticas abertas

de interesse para o estudante, que permitem a ele a troca de conceitos, diferentes metodologias de resolução, exercício da criatividade, entre outras coisas”.

Mas afinal, como organizar o trabalho dos alunos na aprendizagem, de modo a estimular a atividade de investigação?

Segundo Whetley (1991) apud Polya (1995), os três componentes da aprendizagem por investigação:

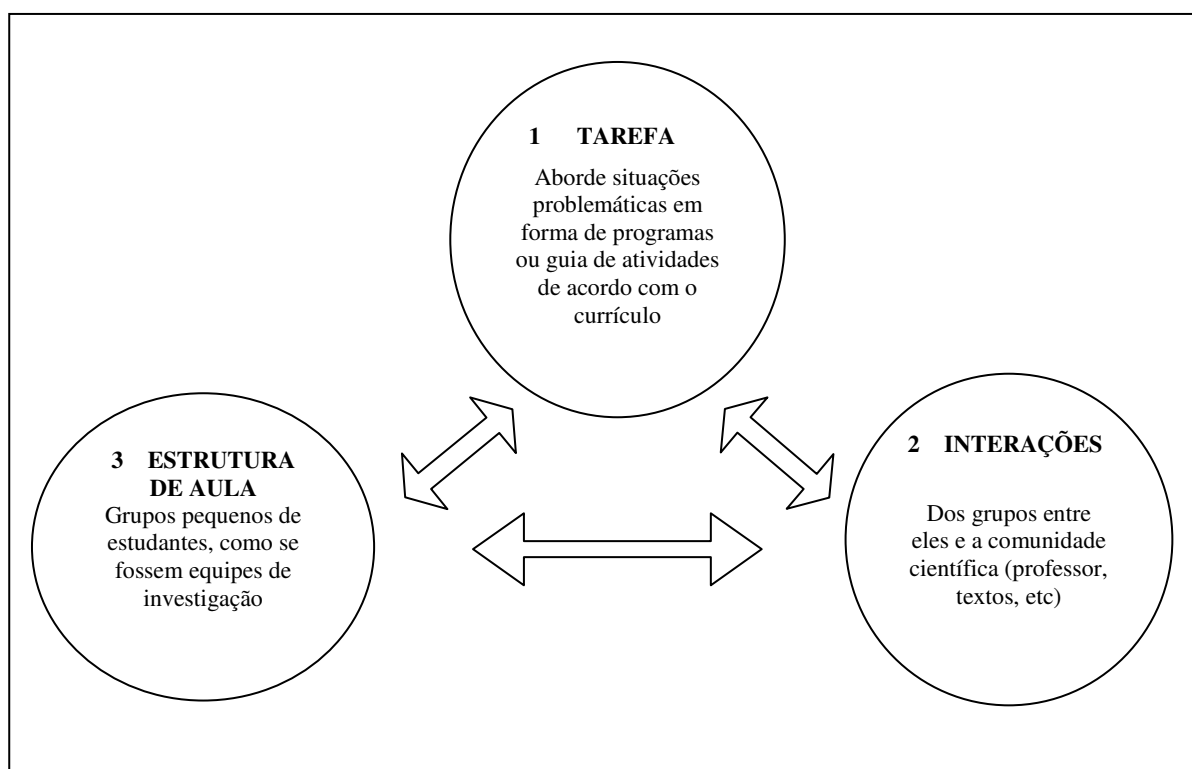


Figura 3: Elementos essenciais de uma aula na aprendizagem por investigação.

Fonte: Investigación em la Escuela, nº 24, 1994.

Para Gil (1978) apud Pozo (1998): “As tarefas da aprendizagem podem ser preparadas antes da interação educativa, pelo professor, em forma de programas ou guia de atividades”.

Neste processo se põe em prova o corpo de conhecimentos disponíveis do aluno. Além disso, através da aprendizagem por investigação, baseada na resolução de problemas, pode-se conseguir muito mais trocas conceituais, metodológicas e atitudinais (FURIÓ, 1994).

O diagrama a seguir, mostra um processo de investigação, segundo Barrenetxea e Martín (1994) apud Furió (1994) , sobre como o professor que atua com a metodologia resolução de problemas deve organizar suas atividades.

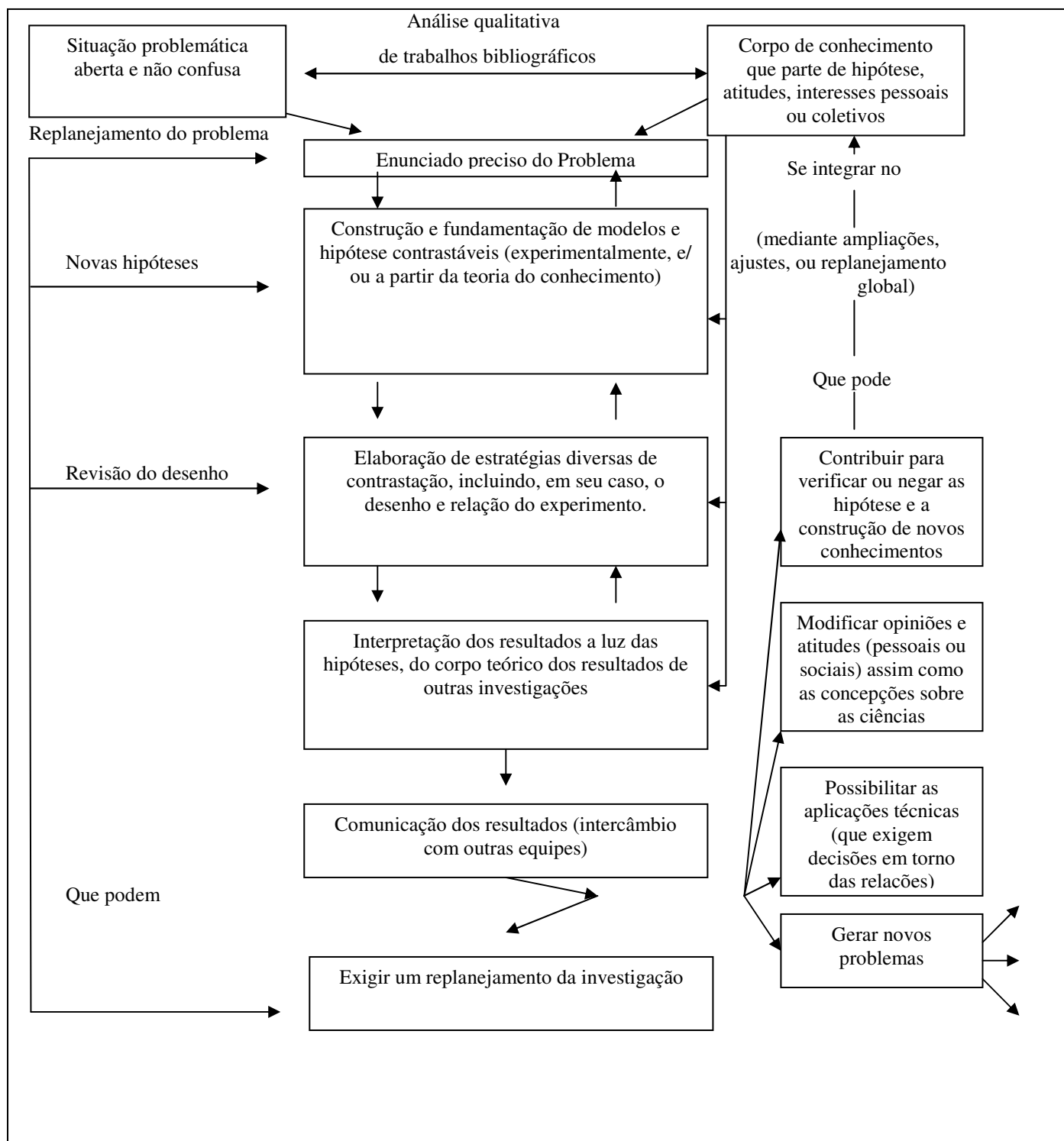


Figura 4: Processo de investigação na resolução de problemas
 Fonte: Investigación en la Escuela, n° 24, 1994.

Os autores explicam as fases da seguinte maneira:

- 1) Considerar quais situações problemáticas podem ser mais interessantes para abordar.
- 2) Análise qualitativa da situação problemática que permita precisá-la de forma operativa.
- 3) Elaboração de hipóteses como atividade que permite estudar de forma natural as estruturas cognitivas dos resolventes na busca de solução para o problema escolhido.
- 4) Explicação das estratégias de resolução antes de proceder a mesma, como prática metacognitivista.
- 5) Resolução, propriamente dita, que conclua no resultado literal em forma de expressão matemática.
- 6) Contrastação do resultado obtido vendo sua coerência interna em relação as hipóteses emitidas.
- 7) Consideração das perspectivas abertas, por investigação realizada contemplando, por exemplo, o interesse de abordar a situação em um nível de maior complexidade ou considerando suas implicações teóricas ou práticas, conceber em particular, novas situações a investigar, sugeridas pelo estudo realizado.

Ao adotar essa metodologia, o professor proporcionará aos seus alunos, a construção do conhecimento matemático por meio de sua própria realidade, além disso, permitirá ao estudante,

extrapolar a disciplina como conteúdo escolar para uma Matemática aplicada ao dia-a-dia e o consequente interesse pelo conteúdo matemático, por intermédio de atividades significativas.

2.1.4.2 Como ensinar a resolver problemas: Uma tarefa diferente para o professor de Matemática

Ensinar é uma ação complexa que depende em grande parte das personalidades envolvidas e das condições locais. Não existe hoje, uma ciência do ensino propriamente dito e não haverá nenhuma em um futuro previsível. Em particular, não existe método de ensino que seja indiscutivelmente o melhor, como não existe a melhor interpretação de uma sonata de Beethoven (POLYA, 1995, p.11).

Está claro que fazer Matemática significa resolver problemas, desde os mais comuns da vida real até problemas internos da própria teoria matemática. A questão é: Como a solução de problemas ou tentativas de soluções podem ser úteis para a didática e aprendizagem da Matemática na escola? E ainda, como o professor ensina Matemática dentro desta nova perspectiva?

O que se observa, em Matemática, é que para que ela se desenvolva, é necessário conhecer a linguagem matemática em si (certos símbolos e nomenclatura especial). Em uma aula tradicional da disciplina, estes conceitos vão sendo introduzidos sucessivamente e os alunos devem aprendê-los como parte da linguagem comum, como meio de comunicação escrita e verbal. Também utilizam técnicas operatórias, bem como exercícios de fixação a cada término de um conteúdo.

O método clássico de ensino, que se aplicava no passado, consistia em memorizar conceitos e técnicas, que evoluíam de acordo com a capacidade operatória do estudante, ou seja, o aluno realizava exercícios até memorizar algumas das principais aplicações de determinado conteúdo. O que acontece nesta metodologia, é que o aluno fica treinado a resolver exercícios, porém não adquire conhecimento, visto que quando ele se depara com uma nova situação (um exercício diferente do previsto), não mais consegue solucioná-la, mesmo que esteja bem “treinado”.

A questão *como ensinar* necessitará superar, em definitivo, a simples transmissão passiva de uma pessoa *que sabe* para um aluno que ignora (GIORDAN E VECCHI, 1996, apud POZO, 1998).

Com a intenção de modificar este contexto e tornar a aprendizagem significativa, é que a metodologia resolução de problemas se aplica muito bem. Consiste em iniciar o avanço dos conhecimentos matemáticos, colocando problemas compatíveis com os conhecimentos previamente adquiridos e que sejam suficientemente motivadores para despertar o interesse dos alunos e que ao mesmo tempo necessitem novos conhecimentos para sua solução (HOZ, 1994).

Ensinar Matemática requer do professor um esforço para organizar os conteúdos. Para uma boa aula, é importante identificar conceitos, procedimentos e atitudes realmente importantes para o futuro. Ao mesmo tempo, é importante verificar quais conteúdos contribuem para o desenvolvimento intelectual do aluno, estimulam a criatividade, a intuição e a capacidade de análise crítica.

O professor deve atuar como um orientador de trabalhos, um incentivador, dando condições para que o trabalho se desenvolva da melhor maneira possível.

O professor tem o objetivo de estimular o raciocínio, o pensamento ativo, a reflexão e a descoberta do aluno (GROENWALD, 1999). Incentivar o pensar selecionando problemas que o estimulam o raciocínio ao invés de sobrecarregar a memória do aluno. Propor situações de aprendizagem e ensinar a pensar deve ser uma preocupação constante do professor.

Além disso, o professor deve possuir a preocupação de formar sujeitos capazes de crítica e autocrítica, capazes de contribuir para o avanço do próprio conhecimento e das ciências, melhorando a sociedade em que vive.

Na escolha do problema, o professor deve estar atento as necessidades do aluno, bem como a seus conhecimentos, de modo que o estudante fique motivado a resolver os problemas selecionados. Neste sentido, o aluno deve ter a liberdade de decidir quanto a forma e método que utilizará para solucionar o problema. Ele deve ser responsável por criar as estratégias e encaminhar o processo de solução, analisar os resultados obtidos, tirar conclusões, construir seu próprio conhecimento e organizar o conteúdo envolvido. O papel do professor aqui é utilizar as técnicas, operações e teorias matemáticas existentes para obter a solução matemática para a solução do problema.

A maior preocupação do professor neste caso, deve ser a de mediar entre o conhecimento e o aluno, ou seja, ele deve incentivar, estimular, criar subsídios para que o aluno chegue ao final, mas nunca chegar ao final pelo aluno, nunca dar a solução pronta do problema.

2.1.5 Como solucionar um problema

Como temos argumentado até agora, uma das maneiras possíveis para levar os alunos a aprender a aprender é a solução de problemas. Diante de um ensino baseado na transmissão de conhecimento, a solução de problemas pode constituir-se não somente um conteúdo educacional mas também, e principalmente, um enfoque ou uma forma de conceber as atividades educacionais (POZO, 1998).

Como vimos, a solução de problemas baseia-se na apresentação de situações abertas e sugestivas que exijam dos alunos uma atitude ativa e um esforço para buscar suas próprias respostas, seu próprio conhecimento.

A solução de qualquer problema é um processo complexo que deve ser realizado, segundo alguns autores, como Pólya (1995), seguindo uma série de passos determinados:

a) Compreender o problema

O professor, precisa evitar que certas coisas ocorram em suas aulas, por exemplo, como responder a uma pergunta que não foi compreendida? Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condição? A condição é suficiente para determinar a incógnita? É suficiente? Redundante? Contraditória?

O aluno precisa compreender o problema, mas não só isto: deve também tentar resolvê-lo. Se lhe faltar compreensão e interesse, isto nem sempre será culpa do professor. Porém, o

problema deve ser bem escolhido, nem muito difícil, nem muito fácil, natural e interessante, e um certo tempo deve ser dedicado à sua apresentação natural e interessante.

Exemplo: Calcular a diagonal de um paralelepípedo retângulo do qual são conhecidos o comprimento, a largura e a altura.

Este não é um problema que exija do aluno muito raciocínio, mas sim exige alguns conhecimentos específicos, como por exemplo, os alunos devem conhecer o Teorema de Pitágoras e suas aplicações, bem como conhecer, mesmo que superficialmente, Geometria Espacial.

Para tornar o problema interessante, o professor pode concretizá-lo. A sala de aula, é um paralelepípedo retângulo cujas dimensões podem ser medidas ou estimadas. Assim, o professor pode “animar” a figura no quadro-negro por contínuas referências a sala de aula.

b) Conceber um plano:

- Já encontrou um problema semelhante? Ou já ouviu o problema proposto de maneira um pouco diferente?
- Conhece um problema relacionado com este? Conhece algum teorema que possa lhe ser útil? Olhe a incógnita com atenção e tente lembrar um problema que lhe seja familiar ou que tenha a mesma incógnita, ou uma incógnita similar.

- Este é um problema relacionado com o seu e que já foi resolvido. Você poderia utilizá-lo? Poderia usar o seu resultado? Poderia empregar o seu método? Considera que seria necessário introduzir algum elemento auxiliar para poder utilizá-lo?
- Poderia enunciar o problema de outra forma? Poderia apresentá-lo de forma diferente novamente? Refira-se as definições.
- Se não pode resolver o problema proposto, tente resolver primeiro algum problema semelhante. Poderia imaginar um problema análogo um pouco mais acessível? Um problema mais geral? Um problema mais específico? Pode resolver uma parte do problema? Considere somente uma parte da condição; descarte a outra parte. Em que medida a incógnita fica agora determinada? De que forma pode variar? Você pode deduzir dos dados algum elemento útil? Pode pensar em outros dados apropriados para determinar a incógnita? Pode mudar a incógnita? Pode mudar a incógnita ou os dados, ou ambos, se necessário, de tal forma que a nova incógnita e os novos dados estejam mais próximos entre si?

A melhor coisa que o professor pode fazer por seu aluno é propiciar-lhe idéias, através de indagações e discussões em sala de aula, para que o estudante, sozinho, alcance seus objetivos.

Voltando ao exemplo anterior, se o professor, depois de expor a situação à turma, notar que esta não teve nenhuma reação em relação ao problema, ele deve estar preparado para repetir, cuidadosamente seu diálogo, de forma diferente e com algumas indagações não respondidas.

Aqui o professor pode citar a incógnita, verificar se o estudante compreendeu o que está procurando. Relacionar o problema em questão com outro já trabalhado em aula é muito importante e pode trazer bons resultados. Como por exemplo, introduzir outros dados ao problema, de forma a deixá-lo mais claro e a despertar o interesse do aluno. Observe os dados que podemos introduzir no exemplo anterior:

No paralelepípedo retângulo em questão, podemos introduzir um triângulo retângulo (figura 5), do qual a diagonal pedida é a hipotenusa.

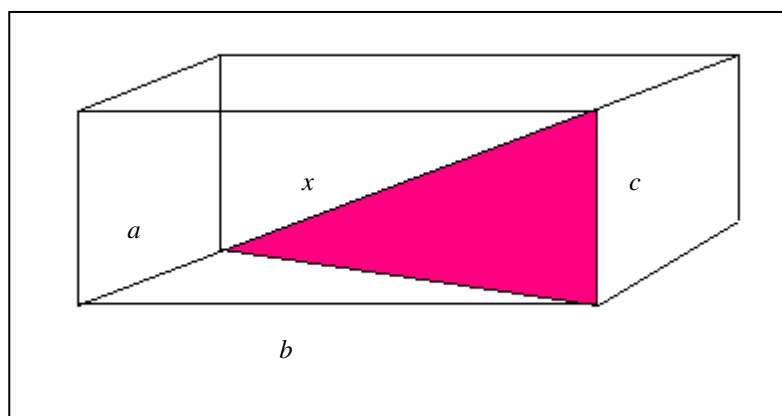


Figura 5: Ilustração do problema

Quando os estudantes conseguirem estabelecer as condições básicas para a solução do problema, como por exemplo, compreender que as incógnitas em questão, possuem um valor e que estes são possíveis de ser calculados, então o professor pode considerar esta etapa cumprida e, assim, presumir que já existe um plano estabelecido.

c) **Executar o plano:**

Executar o plano é muito mais fácil que concebê-lo. Para o professor, quando um aluno conquista este passo, ele conquista mais uma fase de seu trabalho, adquirindo mais tranquilidade. Para que isso ocorra, o estudante precisa, efetivamente, ter realizado seu plano, ou seja, se ele já o recebeu pronto, tudo pode cair no esquecimento, sem qualquer aprendizagem significativa. Aqui, o aluno deve:

- Ao executar o seu plano de resolução, comprovar cada um dos seus passos;
- Ver claramente que o passo é correto e também demonstrá-lo.

Retornando ao problema proposto no exemplo. Aqui o aluno consegue ter a noção da resolução do problema. Ele percebe o triângulo do qual a incógnita x é a hipotenusa e a altura dada c é um dos catetos; o outro cateto é a diagonal de uma face.

Deve-se insistir para que o estudante adote a notação correta, pois nesta etapa ele já tem condições de apropriar-se da nomenclatura adequada. O aluno deve escolher y para denotar o outro cateto, que é a diagonal da face cujos lados são a e b . Assim poderá perceber com clareza a idéia da resolução, que consiste em introduzir um problema auxiliar cuja incógnita será y . Por fim, calculando um triângulo após o outro, ele poderá chegar a (figura 5):

$$\begin{array}{l} x^2 = y^2 + c^2 \\ y^2 = a^2 + b^2 \end{array}, \text{ logo eliminando a incógnita auxiliar } y, \quad \begin{array}{l} x^2 = a^2 + b^2 + c^2 \\ x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \end{array}.$$

d) Visão retrospectiva:

Esta fase tem como objetivo principal, deixar claro ao aluno que problema algum fica esgotado, ou seja, aqui é o momento em que o professor deve voltar ao problema, mesmo depois de demonstrada sua solução. Reconsiderando e reexaminando o resultado final e o caminho que levou até este, eles poderão consolidar o seu conhecimento e a sua capacidade de resolver problemas. O aluno deve sempre considerar as seguintes questões:

- Pode verificar o resultado? Pode verificar o raciocínio?
- Pode obter o resultado de forma diferente? Pode vê-lo com apenas uma olhada? Você pode empregar o resultado ou o método em algum outro problema?

Se existir qualquer forma, mesmo que remota, de comprovar o resultado, ela deve ser utilizada. É uma boa oportunidade para o professor investigar as relações de um problema com outros da mesma linha ou, até mesmo, relacioná-lo com a prática do estudante.

No exemplo em estudo, já na fase anterior, os alunos chegarão a solução: se as três arestas de um paralelepípedo retângulo, que se originam num mesmo vértice, são a , b e c , a diagonal será: $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

O problema literal com relação ao puramente numérico é mais vantajoso, pois permite ao professor inúmeras indagações. Como, por exemplo:

- Utilizou todos os dados?

- A solução será a mesmo se permutarmos a, b e c?
- Se a altura c decrescer até se anular, o paralelepípedo se transformará num paralelogramo. Se fizer $c = 0$ na sua fórmula obterá a fórmula correta para a diagonal de um paralelogramo retângulo?

Estas indagações, permitem que o estudante consolide seu conhecimento, tornando ainda mais claro alguns conceitos utilizados em sua resolução.

Na linguagem de Pólya (1945), falar em estratégias seria equivalente a falar de “um plano para encontrar uma solução”, enquanto o conhecimento operacional seria o que teríamos que colocar em ação para executar o plano projetado estrategicamente. Assim, as estratégias de resolução de problemas seriam formas conscientes de organizar e determinar os recursos de que dispomos para a solução de um determinado problema.

Para Pólya (1945): “O futuro matemático deverá ser um hábil solucionador de problemas, mas não só isso. Oportunamente ele terá de resolver sérios problemas matemáticos e, primeiro, deverá descobrir para que tipos é bem dotado.”

O bom solucionador de problemas procura, antes de tudo, compreender o problema tanto quanto possível completa e claramente. Isto não é, no entanto, suficiente: é preciso que ele almeje sinceramente chegar a solução. Se não tiver um real anseio de resolver o problema, será melhor

deixá-lo de lado. O verdadeiro segredo do sucesso consiste em consagrar toda a sua personalidade ao problema (PÓLYA, 1945).

Segundo Pozo (1998): O processo de um problema escolar e sugestões para o seu desenvolvimento:

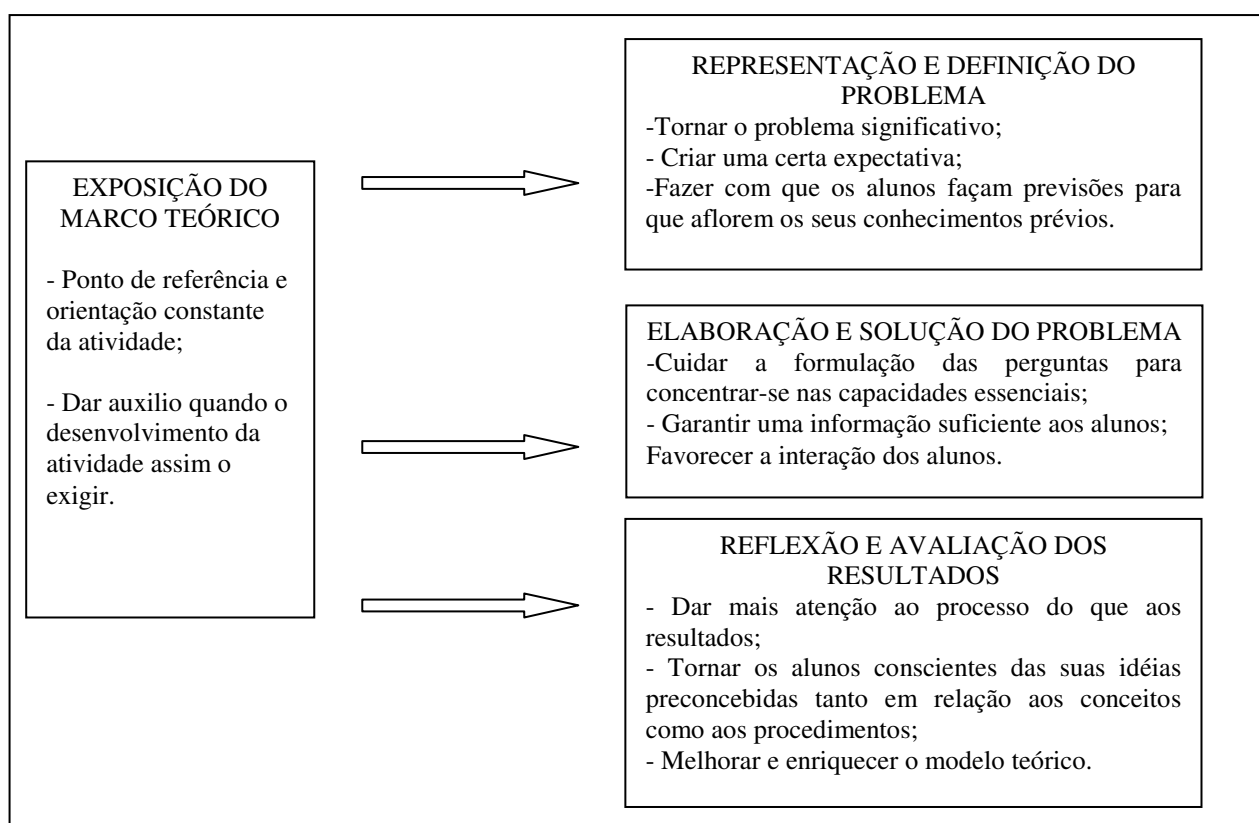


Figura 6: Processo de um problema escolar

Pode-se dizer que o interesse pela resolução de problemas em Matemática, se deve, por um lado, a idéia de que o raciocínio nessa matéria, reflete e estimula o raciocínio em outras áreas do conhecimento e, por outro lado, à idéia de que um maior aprofundamento nos conhecimentos e procedimentos matemáticos ajudaria o avanço em outras áreas científicas e tecnológicas e, inclusive a resolução mais eficiente das tarefas cotidianas (POZO, 1998).

Um aluno que tem sucesso no campo da Matemática, é uma pessoa que sabe raciocinar e pensar de maneira adequada. Logo, ensinar os procedimentos matemáticos, pode contribuir para desenvolver e exercitar a capacidade geral de raciocínio dos alunos (POZO, 1998).

2.1.6 Habilidades

Para os matemáticos, resolver um problema pode ser uma experiência sumamente satisfatória, mas que não acaba no momento em que se encontra a solução. Muitas perguntas ficam por colocar e por responder, com o objetivo de aprofundar o que já foi feito.

Segundo Mancera (2000): “Não basta obter resultados, é preciso refletir sobre os elementos essenciais para obtê-los ou modificá-los, sobre o alcance que a estratégia resolução de problemas possui, enfim as soluções são somente indicadores do que foi trabalhado em certa etapa, apenas satisfazem a nossa curiosidade, não são o fim do caminho”.

É a partir da resolução de problemas que o aluno desenvolve diferentes habilidades intelectuais, que podem ser utilizadas nas diversas áreas do conhecimento.

Habilidade é algo mais que uma ação mecânica que é realizada de maneira eficiente, mas sim um processo mental completo que o indivíduo põe em jogo todos os seus conhecimentos e estratégias para explorar e desenvolver diversas situações (MANCERA, 2000).

Estas habilidades estão presentes em muitas atividades, mas se manifestam abertamente na resolução de problemas, sobre tudo em problemas matemáticos, seja para encontrar uma solução ou para aprofundar aspectos relativos ao problema resolvido.

Para Vilella (1998): “A resolução de problemas faz com que o aluno desenvolva estratégias de pensamento, como as abaixo relacionadas”.

Com a resolução de problemas o aluno pode:

- **Buscar suposições:** Estabelecer uma explicação de sucesso, tomando em consideração que ela pode ser tanto falsa quanto verdadeira.
- **Classificar:** Agrupar conceitos e idéias em função de certos atributos comuns, os quais devem ser eleitos por quem realiza a tarefa.
- **Codificar:** Transformar uma idéia em um elemento com certo significado, o que implica a elaboração de um código gráfico, lingüístico e simbólico, possível de ser decodificado pelo receptor da informação proposta.
- **Comparar:** Observar diferenças e semelhanças para relacionar pontos entre objetos ou idéias tomadas em consideração.
- **Desenhar projetos:** Elaborar um plano de ação para solucionar uma situação de conflito.

- Formular críticas: Analisar e avaliar uma situação de acordo com certos princípios e normas estabelecidos.
- Formular hipóteses: Propor um enunciado provisório como possível solução de um problema.
- Imaginar: Formular uma idéia de algo que não está presente.
- Interpretar: Explicar o resultado da situação estudada.
- Resumir: Estabelecer de modo breve e condensado a idéia do texto apresentado.
- Reunir e organizar dados: Organizar os dados da situação em estudo com a finalidade de utilizá-los para o desenvolvimento de outras soluções.
- Tomar decisões: Responder a pergunta: O que fazer e por quê? Assim como intervir nas situações descritas.

Existem diferentes tipos de problemas, mas por trás dessas diferenças, sabe-se que todos exigem o acionamento de uma série de capacidades de raciocínio e habilidades comuns que precisariam adaptar-se às características de cada tipo de problema. As diferenças individuais na maneira de resolver problemas não seriam devido às diferenças nas capacidades das pessoas, mas sim nas diferenças entre as tarefas e a diferença na aprendizagem dos alunos que a resolvem. Nesse sentido, a aprendizagem contribuiria para que o aluno se adaptasse cada vez melhor à estrutura da tarefa (POZO, 1998, p.19).

Assim, fica claro que a resolução de problemas é muito importante na formação do aluno, visto o quanto ele desenvolve seu senso crítico. Mais do que nunca, precisamos de pessoas ativas e participantes, que deverão tomar decisões rápidas, e tanto quanto possível, precisas. Logo, é necessário formar cidadãos matematicamente alfabetizados, que saibam como resolver, de modo inteligente, seus problemas diários. E para isso, é preciso que a criança, tenha em seu currículo de Matemática elementar, a resolução de problemas como parte substancial, para que desenvolva desde cedo sua capacidade de enfrentar situações-problema (DANTE, 2002).

A proposta de ensino da Matemática através da resolução de problemas pressupõe a possibilidade de conduzir o aprendiz a uma construção constante de métodos e estratégias de pensamento e, além disso, uma constante construção de noções matemáticas presentes em seu meio escolar.

Associada a metodologia resolução de problemas, podemos utilizar a história da Matemática como uma boa ferramenta de auxílio no ensino e aprendizagem dos conteúdos matemáticos, bem como na motivação do aluno com respeito à disciplina.

Além disso, o conhecimento de história proporciona uma visão mais clara e real da Matemática. A história, reflete os interesses da época em que foi escrita e a busca do conhecimento se caracteriza pelo processo de investigação histórica, daí a importância e a utilidade dos estudos históricos (MENDES, 2001).

Mendes (2001) afirma ainda que: “A busca do conhecimento científico cria situações interrogativas no homem que acabam por levá-lo a mais importante dessas questões: de onde vem esse conhecimento?”

Conhecer a evolução do pensamento matemático, faz com que aluno e professor sintam-se parte integrante dessa evolução, ou seja, permite que ambos tenham um relacionamento melhor com a disciplina e, além disso dá ao estudante a oportunidade de buscar os por quês matemáticos, tantas vezes inexplicáveis em uma aula de Matemática.

Nesta perspectiva, vamos estudar através de problemas situados em determinados períodos da história a evolução do conhecimento matemático.

2.2 Grandes problemas matemáticos que marcaram a história

A Matemática é uma atividade humana necessária, que reflete uma reação às necessidades ditadas pela própria existência humana (SWETZ, 1984). A Matemática é evidente em todas as sociedades e culturas, ela é um corpo de conhecimentos que está continuamente evoluindo em resposta às necessidades sociais.

A história da Matemática pode e deve ser utilizada em sala de aula de diferentes formas, com a finalidade de contextualizar a disciplina e envolver o aluno com a aprendizagem dos conteúdos. Um bom recurso para inserir a história nas aulas de Matemática é a metodologia resolução de problemas. Utilizá-la em sala de aula, faz com que o estudante desenvolva métodos e estratégias de raciocínio lógico. Vincular a história à resolução de problemas proporciona uma visão dinâmica e prática da disciplina, permitindo que o aluno contextualize seus conhecimentos juntamente com o desenvolvimento de técnicas de resolução de problemas.

O ensino de Matemática, pode ser humanizado pela inclusão de uma perspectiva histórica nas discussões de sala de aula, porém, isso deve ser feito de forma natural, como parte integrante do conteúdo e não como um “capítulo” à parte de história da Matemática (MENDES, 2001).

Segundo Valdés (2002): “O conhecimento da história da Matemática proporciona uma visão dinâmica da evolução da Matemática. Assim, se pode buscar as idéias originais em toda a sua essência e originalidade”.

A Matemática não é alguma coisa mágica e ameaçadoramente estranha, mais do que isso, é um corpo de conhecimentos desenvolvido naturalmente pelos homens num período de cinco mil anos – homens que erraram e com frequência eram confundidos mas que trabalharam duro nas soluções para seus problemas e deixaram registros dessas soluções de modo que nós nos beneficiamos delas (SWETZ, 1984, p.2).

Ainda tratando desse aspecto, Ferreira afirma que: “A participação da história dos conteúdos matemáticos para ser utilizado pelo professor como recurso didático é muito importante. O desenvolvimento histórico não só serve como elemento de motivação, mas também como fator de melhor esclarecimento do sentido dos conceitos e das teorias estudadas” (1997, p.153), ou seja, um dos objetivos da história é que seu estudo possa esclarecer os “por quês” dos estudantes, muitas vezes denominados impossíveis.

Nesta perspectiva, o uso da história da Matemática aliado a resolução de problemas pode contribuir para uma melhor compreensão do conteúdo matemático, também o estudo dos problemas teóricos e metodológicos a ela associados, possibilita ao professor o desenvolvimento de aulas utilizando os problemas da história como um poderoso recurso didático.

Para Mendes (2001): “Através do conhecimento histórico, o aluno é capaz de pensar e compreender as leis matemáticas a partir de certas propriedades e artifícios usados hoje e que foram difíceis de descobrir em períodos anteriores ao que vivemos”.

O enfoque histórico é uma proposta metodológica que atua como motivação para o aluno, já que através dele descobrirá e gênese dos conceitos e métodos que aprenderá em aula. Em outras palavras permitirá fazer relação das idéias matemáticas vistas em sala de aula com suas origens.

Nesta perspectiva, Valdés (2002) afirma que: “A história da Matemática pode ser trabalhada em meio a um conteúdo dentro da metodologia resolução de problemas. [...] Aqui a história se faz muito presente, pois se torna muito mais fácil e prazeroso ao aluno, resolver um problema buscando não somente algoritmos para sua resolução, mas também buscando suas origens dentro do contexto geral”. E não somente isso, a história da Matemática como gerador de idéias úteis, que permitam considerar métodos de raciocínio.

Assim, podemos concluir que o uso da história da Matemática associado a metodologia resolução de problemas, só faz aprimorar a qualidade do ensino da disciplina, mostrando ao estudante que a Matemática não é somente o estudo de complexas fórmulas para a resolução de exercícios, mas sim que a disciplina possui um lado verdadeiramente prático e real. Conhecer a história é parte importante para um bom desenvolvimento da prática pedagógica do professor, facilitando a conexão de idéias e o aprimoramento de suas aulas.

2.2.1 Um pouco de história

A Matemática é fruto das necessidades do homem e tem sido influenciada, desde seus primórdios pela agricultura, pelo comércio e pela manufatura, pela guerra e pela engenharia, pela filosofia, pela física e pela astronomia.

A Matemática certamente existiu virtualmente em cada civilização das quais há registros. Mas em cada uma dessas civilizações, a Matemática estava no domínio de sacerdotes especialmente treinados e escribas, oficiais do governo cujo trabalho era desenvolver e usar a Matemática para o benefício daquele governo, em áreas como a coleta de taxas, medida, construção, comércio, etc. [...] apesar das origens de muitos conceitos matemáticos virem de sua utilidade nestas áreas, os matemáticos sempre exercitaram sua curiosidade estendendo estas idéias para além dos limites da necessidade prática. (KATZ², 1993,p. 2)

Como afirma Struik: “Poucos progressos foram feitos no conhecimento de valores numéricos e de relações espaciais até se dar à transição da mera recolha de alimentos para a sua produção, isto é, a atitude do homem perante a natureza deixou de ser passiva para se tornar ativa, iniciando-se um novo período, o Neolítico” (1987, p.29). Durante este período existia uma atividade comercial considerável entre as diversas povoações, dando origem a formação da linguagem. As palavras destas linguagens exprimiam coisas concretas com poucas abstrações, mas já se tratava de Matemática, ou seja, já havia lugar para alguns termos numéricos e algumas relações de forma (STRUIK, 1987).

² Traduzido por Ávila, 2004.

As primeiras concepções de número e de forma datam de tempos tão remotos como os do começo da Idade da pedra, o Paleolítico. Este período foi marcado por condições de sobrevivência um pouco diferente das condições dos animais e suas principais atividades eram orientadas para o processo elementar de recolher alimentos onde fosse possível encontrá-los. Porém, o final deste período deixa claro que os homens primitivos tinham compreensão da forma, matematicamente falando, revelam a compreensão da descrição de objetos no espaço (STRUİK, 1987, p. 29).

As primeiras ocorrências foram mais qualitativas do que quantitativas, marcando somente a distinção entre “um”, “dois” ou “muitos”. Com a evolução das civilizações (período Neolítico) a Matemática foi também se desenvolvendo e tornando-se uma prática comum a medida em que novas necessidades fossem surgindo.

Tornou-se necessário medir o comprimento ou volume de certos objetos. As unidades de medidas utilizadas eram grosseiras e em muitas situações provinham de partes do corpo humano, como o dedo, os pés e as mãos.

Alguns dados sobre as origens da Matemática mostram que o desenvolvimento histórico de uma ciência não passa necessariamente pelas mesmas fases que atualmente consideramos no nosso ensino. Algumas das mais antigas formas geométricas conhecidas pelos homens, tais como laços e outros padrões, só recentemente foram tratados cientificamente. Por outro lado, alguns dos ramos elementares da Matemática, como a representação gráfica ou a estatística, datam, em comparação, de tempos mais recentes. (STRUİK, 1987: p.38)

Provavelmente a mais antiga das civilizações do mundo é a Mesopotâmica, a qual começou nos vales dos rios Tigre e Eufrates por volta de 3500 a.C. Muitos reinos se destacaram nesta área nos próximos 3.000 anos, mas para o propósito da história da matemática, é costume denominar a civilização Mesopotâmica como Babilônia (KATZ, 1993).

Naquela época a área tinha desenvolvido uma lealdade política nacional e um deus supremo chamado Marduk. Começava a se organizar uma sociedade. A escrita estava bem desenvolvida. A escrita desenvolvida foi feita por meio de sinais em pedaços retangulares de argila úmida, milhares dos quais têm sido escavados durante os últimos 150 anos (KATZ, 1993).

Neste processo evolutivo da Matemática, grandes problemas surgiram e, muitos deles, ficaram marcados por toda a história. Os problemas, as adivinhações e as recreações matemáticas fazem parte de todas as culturas em todas as épocas. Por isso a importância de utilizar esses problemas nas aulas de Matemática, tornando possível o aprofundamento dos conceitos.

Os problemas mais antigos, são provavelmente os que apareceram nos Papiros Egípcios (Rhind e Moscou) e nas tábuas mesopotâmicas vários séculos antes da nossa era (BOYER, 1997). O mais curioso disso tudo, é que muitos destes problemas continuam interessando os estudantes do século XXI.

Enquanto um ramo da ciência apresentar abundância de problemas, ela permanece viva. A carência de problemas significa a decadência do desenvolvimento independente dessa ciência (HILBERT apud PERERO, 1994).

Grande parte da memória matemática está nas tábuas matemáticas da mesopotâmia. Estas contêm problemas matemáticos com suas respectivas soluções. A maioria das tábuas datam do tempo de Hammurabi³, enquanto um grupo menor data de uns 1400 anos mais tarde, a era Seleucida, contudo são do mesmo caráter e contêm problemas idênticos aos antecessores. A

³ Marcou um período Babilônico da Antigüidade.

Matemática, como o resto da cultura da Babilônia, manifestou uma extraordinária estabilidade neste longo período de tempo (KATZ, 1993).

A Matemática oriental surgiu, também, como uma ciência prática, com o objetivo de facilitar o cálculo do calendário, a administração das colheitas, a organização das obras públicas e a cobrança de impostos. Obviamente que a ênfase inicial foi dada à aritmética prática e a medição. Em seguida a aritmética transformou-se em álgebra, não só por que possibilitava melhores cálculos práticos, mas também por que era o resultado natural de uma ciência cultivada e desenvolvida nas escolas dos escribas (STRUICK, 1987).

Apesar de haver muitas civilizações em outras partes do mundo antes do primeiro milênio a.C., os dados até aqui nos dão poucas pistas do seu conhecimento matemático. Qualquer discussão, portanto deve esperar nova evidência arqueológica (KATZ, 1993).

Para situar o ensino da Matemática através de uma proposta do uso da história aliada a metodologia resolução de problemas, faremos, a seguir, uma descrição de alguns problemas que se destacaram ao longo dos tempos.

2.2.2 A Matemática e seus “problemas”

A importância de se ter material de apoio que reforcem o uso de problemas históricos em sala de aula dá-se pelo fato de que sua utilização é uma boa fonte de inspiração para alunos e professores se envolverem com a aprendizagem dos conteúdos matemáticos.

Problemas de Matemática tem ocupado um lugar central no currículo de Matemática escolar desde a Antigüidade. Registros de problemas matemáticos são encontrados na história antiga egípcia, chinesa e grega, e são, ainda encontrados problemas em livros-texto de Matemática dos séculos XIX e XX (ONUCHIC, 1999, p. 199).

Os Primeiros problemas matemáticos parecem ter surgido no Egito, em um período em que a Matemática primitiva precisava de um embasamento prático para se desenvolver. A maioria dos problemas deste período são do tipo aritmético, porém há outros que podemos designar como algébricos (BOYER, 1997). Isso veio ocorrer com a evolução para formas mais avançadas de sociedade.

Durante muito tempo o nosso campo histórico mais precioso esteve no Egito, devido à descoberta, em 1858, do chamado *Papiro Rhind* (figura 7), escrito por volta de 1650 a.C., que continha um material muito antigo (KATZ, 1993; BOYER, 1997).

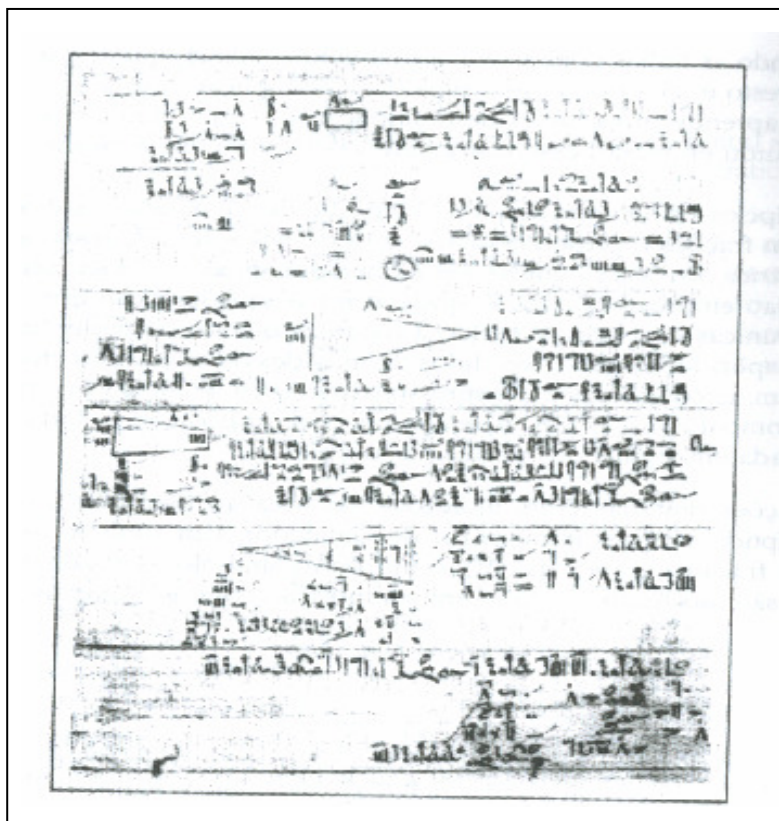


Figura 7: Uma parte do Papiro Rhind

Nesse contexto, junto às dificuldades, muitos problemas foram aparecendo e, muitas vezes ficavam sem solução, pois faltavam ferramentas da álgebra e do cálculo para tanto.

Um importante problema deste período, encontrado no Papiro Rhind, é a **Regra da Falsa Posição** (BOYER, 1997). Esta regra, muito importante no século XIX, apareceu pela primeira vez neste documento e, nele se encontram vários exemplos de sua utilização. Trata-se de problemas, que hoje seriam resolvidos com equações do primeiro grau, todavia, antes eram resolvidos pela Regra da Falsa Posição. A regra consistia em:

1. supor uma resposta;
2. verificar;

- ajustar à resposta encontrada.

Exemplo da utilização da regra encontrado no Papiro de Rhind: “A soma de um número com o seu sétimo é 24. Qual é esse número?”

Em termos algébricos, hoje o problema seria resolvido como uma simples equação do 1º grau: $x + \frac{x}{7} = 24$. Com a regra da falsa posição, o problema era resolvido da seguinte forma:

- supor um número conveniente, neste caso 7 (já que um sétimo de 7 é um);
- verificar se o resultado se aproximava: $7 + \frac{7}{7} = 8$
- ajustar: Sabendo que 8 multiplicado por 3 é 24, terá que multiplicar por 7 também (o número suposto em 1) para ter a resposta correta; $7 \times 3 = 21$.

Demonstração:

$7 \times 3 + \frac{7 \times 3}{7} = 8 \times 3$ $21 + 3 = 24$

Este método é o que se usa constantemente em Matemática para resolver problemas quando não se tem nenhum método determinado de resolução.

No Papiro Rhind todos os problemas são numéricos e boa parte deles é bem simples, embora a maioria tenha origem prática, porém há alguns de natureza teórica (STRUIK, 1987).

Analisando o sistema de numeração egípcio, nota-se que é constituído puramente do caráter aditivo.

Segundo Eves (2002): “Uma das conseqüências do sistema de numeração egípcio é o caráter aditivo da aritmética, assim, a multiplicação e a divisão eram, em geral, efetuadas por uma sucessão de duplicações com base no fato de que todo o número pode ser representado por uma soma de potências de 2”.

Como exemplo dessa multiplicação, encontrou-se o produto de 26 por 33. Como $26 = 16 + 8 + 2$, basta somarmos os múltiplos correspondentes de 33. O trabalho era disposto assim:

$$\begin{array}{r}
 1 \quad 33 \\
 *2 \quad 66 \\
 4 \quad 132 \\
 *8 \quad 264 \\
 *16 \quad \underline{528} \\
 858
 \end{array}$$

Somando-se os múltiplos adequados de 33, isto é, àqueles indicados por asteriscos, chega-se à resposta 858.

Outro exemplo, seria a divisão, onde para dividir 753 por 26, realizava-se o seguinte processo: dobrava-se sucessivamente o divisor 26 até o ponto em que o próximo dobro exceda o dividendo 753. Observe o procedimento:

1	26
2	52
* 4	104
* 8	208
* 16	416
<u>28</u>	

Como, $753 = 416 + 337$
 $= 416 + 208 + 129$
 $= 416 + 208 + 104 + 25$, vemos,
observando as linhas com asteriscos na coluna acima, que o
quociente é $16 + 8 + 4 = 28$ e que o resto é 25.

O processo egípcio de multiplicação e divisão apresentado pelos egípcios, não só elimina a necessidade de aprender uma tábua de multiplicação, como também se enquadra ao “Ábaco” que perdurou enquanto a sua utilização era importante e mesmo depois disso.

Um curioso problema do “Papiro Rhind”, é o de número 79 (EVES, 2002; BOYER, 1997), cuja interpretação não era tão precisa quanto os demais. Nesse problema figura o seguinte conjunto curioso de dados:

	Bens
Casas	7
Gatos	49
Ratos	343
Espigas de trigo	2401
Hecates de grãos	<u>16807</u>
	19607

Facilmente se reconhecem os números como as primeiras cinco potências de 7, juntamente com sua soma: $1^1 + 1^2 + 1^3 + 1^4 + 1^5 = 19601$. Para Eves (2002): Inicialmente pensou-se que o escriba talvez estivesse introduzindo a terminologia simbólica: Casas, gatos, etc. para representar *primeira potência*, *segunda potência* e assim por diante.

Em 1907, porém, o historiador Mortiz Cantor deu uma interpretação mais interessante. Ele viu no problema um precursor de um popular problema da Idade Média e que figura no *Liber Abaci* (1202) de Leonardo Fibonacci (STRUIK, 1987). Dentre os muitos problemas dessa obra há o seguinte: “Há sete senhoras idosas na estrada de Roma. Cada senhora tem sete mulas; cada mula transporta sete sacos, cada saco contém sete pães, com cada pão há sete facas, para cada faca há sete bainhas. Entre mulheres, mulas, sacos, pães, facas e bainhas, quantos estão na estrada de Roma? De acordo com a interpretação de Cantor, o problema original do Papiro Rhind podia receber uma formulação desse tipo. Eis aí um problema que parece ter se preservado em meio aos quebra-cabeças do folclore universal (EVES, 2002).

Na mesma época, foi escrito o “Papiro de Moscou” com 25 problemas, deixando, também, marcas da evolução Matemática sob a forma de problemas. Todos os problemas são da vida prática, como os outros. Porém dois problemas têm significado especial (BOYER, 1997). O problema 14 do Papiro de Moscou, é um deles. Associada a ele há uma figura (figura 8) que parece um trapézio, mas os cálculos associados a ela, mostram que o que se quer representar é o tronco de uma pirâmide. Acima e abaixo da figura estão sinais para dois e quatro respectivamente e no interior estão os símbolos para seis e cinquenta e seis. As instruções na figura, deixam claro que o problema pergunta qual o volume de um tronco de pirâmide quadrada com altura de seis unidades se as arestas das bases superiores e inferior medem duas e quatro unidades, respectivamente.

A solução do problema, é apontada da seguinte forma: um escriba, segundo Boyer (1997), indica que se deve tomar os quadrados dos números dois e quatro e adicionar à soma desses quadrados o produto de dois por quatro, o resultado sendo 28. Esse é então, multiplicado por um

terço de seis; e o escriba conclui com as palavras, “Veja, é 56 e você a achou corretamente”. Isto é, o volume do tronco foi calculado de acordo com a fórmula moderna: $V = \frac{h.(a^2 + ab + b^2)}{3}$, em que h é a altura e a e b são os lados das bases quadradas. Essa fórmula não aparece descrita em nenhum documento, mas o que podemos observar é que ela já era conhecida pelos egípcios (BOYER, 1997).

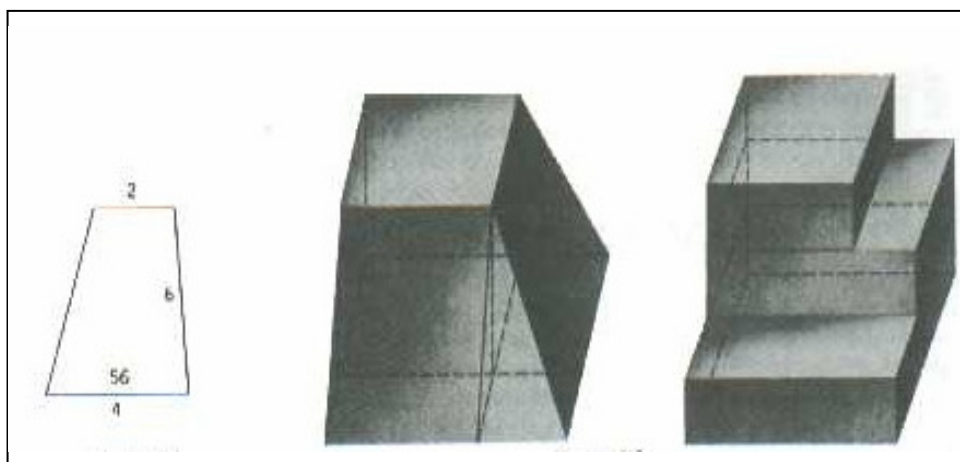


Figura 8: Cálculo do volume do tronco de uma pirâmide (BOYER, 1997)

O problema de número 10 do Papiro de Moscou apresenta uma questão ainda mais difícil de interpretar que o problema anterior relatado. Aqui o escriba pede a área da superfície do que parece ser um cesto com um diâmetro $4\frac{1}{2}$. Procede como se usasse o equivalente da fórmula $S = \left(1 - \frac{1}{9}\right)^2 \cdot (2x) \cdot x$ onde x é $4\frac{1}{2}$, obtendo como resposta 32 unidades. Como $\left(1 - \frac{1}{9}\right)^2$ é a aproximação egípcia para $\frac{\pi}{4}$, a resposta 32 corresponderia à superfície de um hemisfério de diâmetro $4\frac{1}{2}$; e essa foi a interpretação dada ao problema em 1930 (BOYER, 1997).

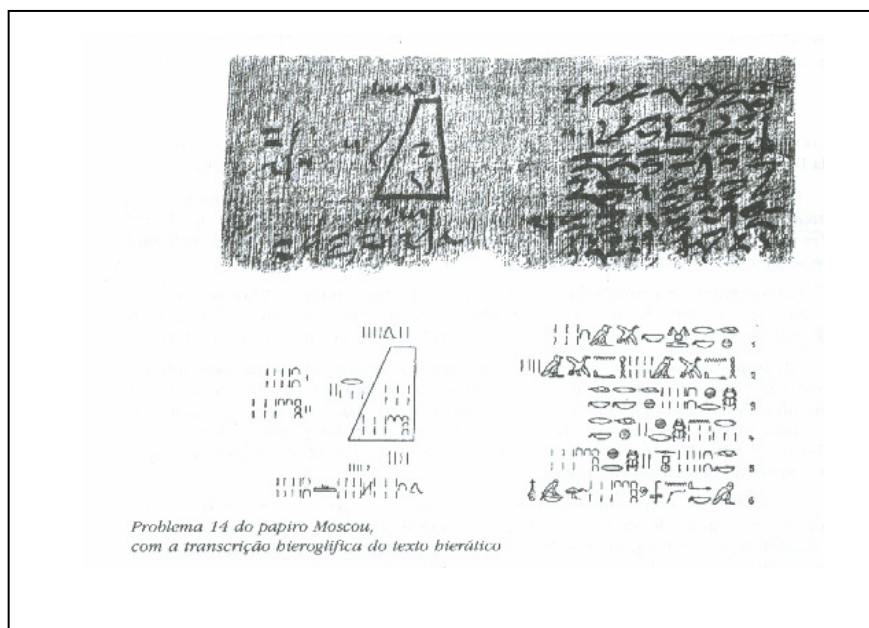


Figura 9: Problema 14 do Papiro de Moscou, com a transcrição hieroglífica do texto hierático (EVES, 2002).

A Matemática mesopotâmica atingiu um nível mais elevado do que o obtido pela egípcia (STRUIK, 1987). Uma característica importante que sobrepõe a cultura da civilização mesopotâmica à egípcia é a de que, enquanto os egípcios indicavam cada unidade mais elevada através de um novo símbolo, os Sumérios usavam o mesmo símbolo, mas indicavam o seu valor pela sua posição (Sistema Sexagesimal). Assim, 1 seguido de outro 1 significava 61 e 5 seguido por 6 e por 3 (devíamos escrever 5, 6, 3) significava $5 \times 60^2 + 6 \times 60 + 3 = 18363$ (KATZ, 1993).

O sistema de posição eliminou muitas das dificuldades da aritmética fracionária, tal como o nosso sistema decimal o faz em relação a escrita de frações. Em consequência deste sistema, houve a chamada “invenção do zero”, que foi um resultado lógico da introdução do sistema de posição (STRUIK, 1987).

Também datam dos Sumérios, a nossa atual divisão das horas em 60 minutos e em 3600 segundos, assim como a divisão do círculo em 360 graus, cada grau com 60 minutos e cada minuto em 60 segundos (STRUIK, 1987).

Em decorrência, na Babilônia, encontramos textos que comprovam uma aritmética transformada em álgebra bem estabelecida (STRUIK, 1987). Embora nesta mesma época, os egípcios fossem capazes somente de resolver equações lineares simples, os Babilônicos tinham a posse completa da técnica para manipular as equações quadráticas. Resolviam equações lineares e quadráticas com duas variáveis, e até mesmo, problemas que envolviam equações cúbicas e biquadráticas (EVES, 2002). Formulavam esses problemas apenas com valores numéricos específicos para os coeficientes, mas os seus métodos não deixam dúvidas de que conheciam a regra geral. A seguir, podemos observar alguns problemas que demonstram os conhecimentos desse período:

- Uma determinada área A , que é a soma de dois quadrados, tem o valor 1000. O lado de um dos quadrados é igual a $\frac{2}{3}$ do lado do outro, menos 10 (figura 10). Quanto mede os lados dos quadrados (EVES, 2002)?

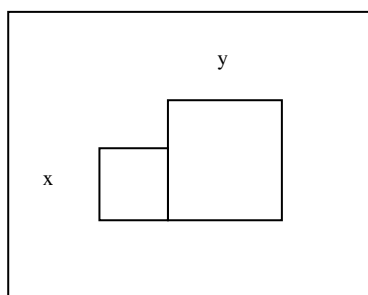


Figura 10: Demonstração geométrica do problema

Isto induz às equações $x^2 + y^2 = 1000$, $y = \frac{2}{3}x - 10$ e a solução pode ser encontrada, resolvendo a equação quadrática $\frac{13}{9}x^2 - \frac{40}{3}x - 900 = 0$, que tem solução, $x = 30$.

Demonstração

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1000 \rightarrow x^2 + \left(\frac{2}{3}x - 10\right)^2 = 1000 \\ y = \frac{2}{3}x - 10 \end{cases}$$

$$x^2 + \frac{4}{9}x^2 - \frac{4}{3}x \cdot 10 + 100 = 1000$$

$$\frac{13}{9}x^2 - \frac{40}{3}x - 900 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = \frac{13}{9} \\ b = -\frac{40}{3} \\ c = -900 \end{cases}$$

$$x = \frac{-\left(-\frac{40}{3}\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{40}{3}\right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{13}{9}\right) \cdot (-900)}}{\frac{26}{9}}$$

$$x = \frac{\frac{40}{3} \pm \sqrt{\frac{1600 + 46800}{9}}}{\frac{26}{9}} = 30$$

No caso da Matemática Babilônica, o que se observa é que sua geometria algébrica era muito desenvolvida. Isso fica claro nos problemas abaixo relacionados (EVES, 2002):

- A área de um retângulo é 375. O lado menor é 30 vezes o comprimento do maior. Sabendo que o lado maior tem 5 unidades a menos que o dobro do outro lado. Qual é o comprimento e o lado do retângulo?

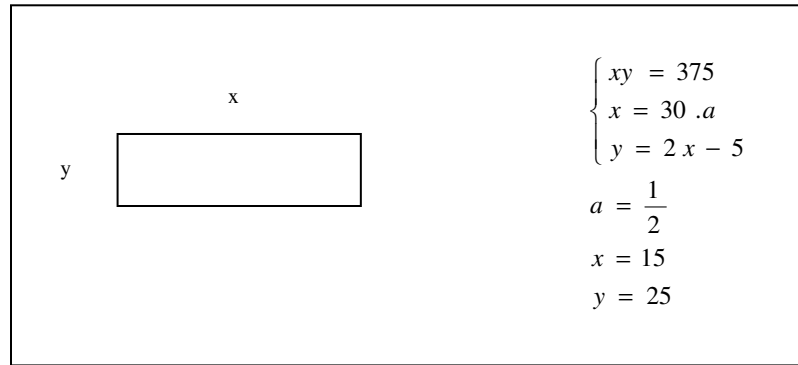


Figura 11: Demonstração geométrica do problema

Demonstração:

$$\begin{cases} xy = 375 \\ y = 30x \\ x = 2y - 5 \end{cases} \quad \begin{aligned} (2y - 5)y &= 375 \\ 2y^2 - 5y - 375 &= 0 \\ y &= \frac{5 \pm \sqrt{3025}}{4} \\ y &= 15 \end{aligned} \quad \begin{aligned} x &= 2 \cdot 15 - 5 \\ x &= 30 - 5 \\ x &= 25 \end{aligned}$$

- Um cateto de um triângulo retângulo é 50. Uma paralela ao outro cateto e a distância 20 dele corta o triângulo formando um trapézio retângulo de área 5,20. Determine os comprimentos das bases do trapézio:
- Verificar se um trapézio isósceles de bases 14 e 50 e de lados 30 tem área 12,48:

$$A = \frac{(B+b) \cdot h}{2} \rightarrow 12,48 = \frac{(14+50) \cdot h}{2} \rightarrow h = 0,78$$

$$A = \frac{64 \cdot 0,78}{2} \rightarrow A = 24,96.$$

Logo, um trapézio isósceles de base 14 e 50 e de lados 30, tem área igual a 24,96.

Os Babilônicos também conheciam o “Teorema de Pitágoras”, e não apenas para casos especiais, mas com toda a generalidade, como uma relação numérica entre os lados de um triângulo retângulo, o que conduziu a descoberta dos triplos pitagóricos, tais como (3,4,5), (5,12,13), etc (EVES, 2002). A característica principal desta geometria, era o seu suporte algébrico. Isso fica evidente em muitos textos de problemas do período babilônico antigo (BOYER, 1997).

Estes textos, mostram, por exemplo, que a solução de equações quadráticas não constituía grande dificuldade para os babilônicos. Isso por que tinham desenvolvido operações algébricas flexíveis. Podiam transportar termos em uma equação somando iguais a iguais, e multiplicar ambos os membros por quantidades iguais para remover frações ou eliminar fatores, pois muitas fórmulas simples de fatoração lhes eram familiares (BOYER, 1997, p. 21).

Os babilônicos não usavam letras para representar quantidades desconhecidas, pois o alfabeto não havia sido inventado, mas palavras como “largura”, “comprimento”, “área” e “volume” faziam bem o papel (BOYER, 1997). Um problema que, segundo Boyer (1997), comprova estes conhecimentos é: “ Dê o peso x de uma pedra se $\left(x + \frac{x}{7}\right) + \left(\frac{1}{11}\right)\left(x + \frac{x}{7}\right)$ é um mina. A resposta é dada simplesmente como 48; 7; 30 gin, onde 60 gin formam uma mina.

A Matemática tornava-se mais perfeita na sua técnica de cálculo, a álgebra procurava resolver problemas por meio de equações que ainda hoje requerem uma considerável habilidade numérica.

Ainda na Babilônia, podemos observar que já era possível uma aproximação do conhecido número π , onde a melhor delas era bíblica em que $\pi = 3$ (1 Reis VII: 23), sendo a área do círculo $\frac{1}{12}$ do quadrado do seu perímetro. No entanto, foram encontradas aproximações que dão o valor de $\pi = 3\frac{1}{8}$ (EVES, 2002). Os problemas descritos a seguir, deixam muito claro este saber.

- A razão entre o perímetro de um hexágono regular e a circunferência do círculo circunscrito é dada como 0; 57;36. Mostre que isso leva a 3;7;30 ou a $3\frac{1}{8}$ da aproximação de π .
- Determine o raio do círculo circunscrito ao triângulo de lados 50, 50 e 60:

O que chamamos de Matemática moderna, nasceu com a civilização grega, na atmosfera do racionalismo jônico. Neste momento a Matemática não somente questionava o “como”, mas também a moderna questão científica: “por quê?” (STRUİK, 1987).

Struik (1987) afirma que: “Tradicionalmente, o pai da Matemática grega é Tales de Mileto, um mercador que visitou a Babilônia e o Egito na primeira metade do século VI a. C. Sua figura simbolizava as circunstâncias sob as quais foram estabelecidos os fundamentos não só da nova Matemática, mas também da ciência e da filosofia moderna”.

Segundo GARBI (1997): “Tales, visitou o Egito e a Babilônia e de lá trouxe para a Grécia, o estudo da Geometria. Entretanto, ao invés de apenas transmitir o que aprendera, introduziu um conceito revolucionário: as verdades matemáticas precisam ser demonstradas”.

Foi a primeira vez que um homem havia pensado neste alicerce fundamental de toda a atividade científica.

Os primeiros estudos da Matemática grega tinham um objetivo principal: compreender o lugar do homem no Universo de acordo com um esquema racional. A Matemática ajudava a encontrar a ordem no caos, a ordenar as idéias em seqüências lógicas e a encontrar princípios fundamentais (GARBI, 1997).

A Matemática era considerada pelos gregos, como sendo a mais racional de todas as ciências e embora existam poucas dúvidas quanto à aquisição do conhecimento oriental pelos mercadores gregos, eles descobriram que os Orientais tinham deixado de fazer a maior parte da sua racionalização. Muitos questionamentos foram surgindo naturalmente na medida em que seus conhecimentos evoluíam. Pela primeira vez, a Matemática foi vista como uma ferramenta para a busca da compreensão e não como simples utilidade (EVES, 2002).

Segundo Katz (1993): “Não era mais suficiente meramente calcular respostas numéricas aos problemas, tinha-se agora que provar que os resultados estavam corretos”.

Essa mudança na natureza da Matemática, começando cerca de 600 a.C, foi relacionada as grandes diferenças entre a civilização grega emergente e aquelas do Egito e Babilônia, de quem a Grécia aprendeu (KATZ, 1993).

Muitas e muitas vezes na história da Matemática abrem-se um cenário parecido, um cenário que mostra como a Matemática evoluiu como uma ciência: um conceito ou uma idéia matemática é perseguido e estudado pelo seu significado utilitário ou sociológico, mas gradualmente, suas razões tornam-se abstratas e divorciadas da realidade empírica. Um exemplo desse fenômeno é ilustrado pelos três problemas clássicos da Antigüidade grega: A **Quadratura do Círculo**, a **Duplicação do Cubo** e a **Trissecção do ângulo** (KATZ, 1993; SWETZ, 1984; BOYER, 1997; EVES, 2002).

A Quadratura do círculo, é considerado um dos problemas centrais da Matemática grega (KATZ 1993). Era o início da axiomática, como é indicado pelo nome do livro supostamente escrito por Hipócrates, *Elementos* , que é título de todos os tratados axiomáticos gregos, incluindo o de Euclides (EVES, 2002).

Trata-se de construções que devem ser feitas mediante intersecções de retas e circunferências, utilizando somente régua sem medidas e compasso (EVES, 2002, BOYER,1997, LINTZ, 1999).

Para Perero (1994): “Retas e círculos eram considerados pelos filósofos e matemáticos gregos como as curvas perfeitas a partir das quais, todas as demais construções deveriam ser possíveis”.

Durante o século XIX, provou-se a impossibilidade de resolver estes problemas com as restrições impostas pelos clássicos gregos.

Provavelmente, nenhum outro problema exerceu um fascínio maior ou mais duradouro do que aquele de construir um quadrado de área igual à área de um círculo dado. Já em 1800 a.C. os egípcios haviam “resolvido” o problema, tomando o lado de um quadrado igual a $\frac{8}{9}$ do diâmetro do círculo dado. De lá pra cá, literalmente, milhares de pessoas trabalharam no problema e, a despeito de já se ter uma demonstração de que a construção é impossível, não há um ano que não tenha sua safra de “quadradores de círculos” (EVES, 2002, p. 140).

O problema, como afirmado anteriormente, consiste em construir um quadrado de área igual à de um círculo dado, conforme a figura 12:

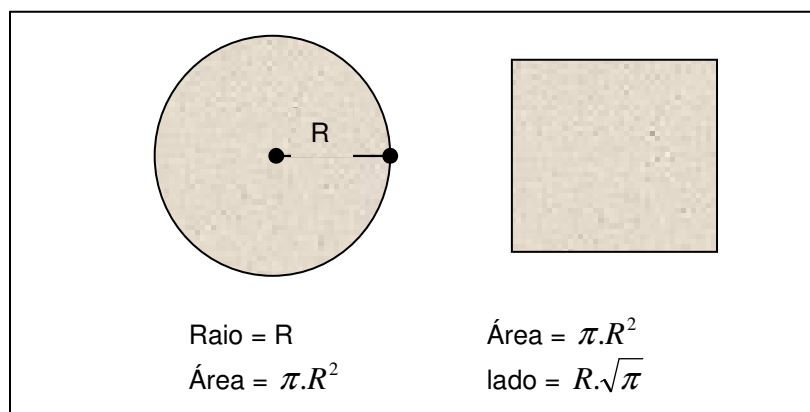


Figura 12: Demonstração geométrica do problema

Ferdinand Lindeman (Alemanha, 1852 – 1939), demonstrou em 1822, que era impossível construir “exatamente” a $\sqrt{\pi}$ com régua e compasso. (Os segmentos construídos com régua e compasso são expressos por raízes quadradas e π não pode ser expresso por raiz quadrada) (PERERO, 1994).

O problema tem sido resolvido de muitas maneiras, utilizando diferentes meios, por exemplo (LINTZ, 1999):

- Quadratrix de Hípias (425 a.C.): É construída da seguinte maneira (figura 13), o quadrado ABCD e o quadrante de círculo BED.

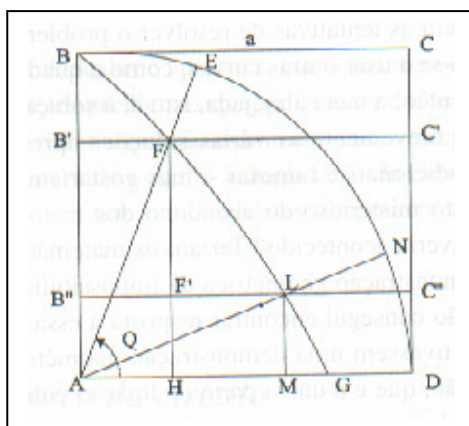


Figura 13: Quadrado ABCD e o quadrante de círculo BED

Suponha-se que o raio do círculo AB gire com movimento angular uniforme até a posição AD, e simultaneamente, um ponto move-se de B até A uniformemente; assim, quando ele ocupa a posição B', o raio AB estará em AE e, considerando-se a paralela B'C' a AD, determina-se o ponto F. O lugar de todos os pontos F assim determinados, é uma curva AFG denominada *quadratrix de Hípias*, em homenagem ao matemático que a construiu. Presumindo-se que G⁴ é um ponto bem definido, a solução do problema da quadratura do círculo faz-se da seguinte maneira: $\frac{BED}{AB} = \frac{AB}{AG}$ (1). Portanto, sendo o arco BED construtíveis com régua e compasso, a área

de BED também será, a partir das magnitudes AB e AG.

⁴ É um ponto delicado, muito discutido na época, pois quando o ponto o raio ocupa a posição AD, o ponto móvel ocupa a posição A, de sorte que o ponto correspondente G da quadratrix estaria indeterminado sendo, então, uma posição limite dos pontos próximos quando o rio ainda não está em AD e o ponto móvel ainda não está em A.

- Espiral de Arquimedes (287 – 212 a.C.): Arquimedes, procedeu da seguinte forma na sua tentativa de resolver o problema: seja OB um segmento no plano que gira em torno de O com movimento angular uniforme partindo de uma posição inicial; imagina-se que ao mesmo tempo em que OB começa a girar em torno de O, um ponto P move-se sobre OB com velocidade constante. O lugar da posição de P é uma espiral, cuja equação polar é: $\rho = a\theta$. Seja T o ponto de encontro da tangente à espiral em P com uma reta traçada de O perpendicular a OP; então OT chama-se a subtangente polar.

Arquimedes demonstra que, depois de uma primeira volta completa em torno de O, isto é, quando θ varia de 0° a 360° , o comprimento da circunferência de raio OP é igual a OT. Suponha-se que seja dado um círculo de raio r no plano e desenha-se também, uma espiral, como acima descrito, no mesmo plano. Então, o círculo de raio OP, como identificado acima, tem um comprimento l, que se constrói com régua e compasso a partir da tangente à espiral; então, temos:

$$\frac{\text{comprimento}}{l} = \frac{r}{OP},$$

o que evidencia que o comprimento de C se constrói com régua e compasso e, conseqüentemente, o mesmo se passa com sua área.

O segundo problema é a duplicação do cubo. Diz a lenda grega que Mimos, rei de Creta, havia ficado descontente com o tamanho do túmulo, de forma cúbica, erguida para seu filho Glaucus, e ordenou que se duplicasse seu volume (PERERO, 1994).

O problema consiste em construir o lado de um cubo, cujo volume seja o dobro do volume de um cubo inicial. Para isso, teria que se construir um segmento de comprimento igual à raiz cúbica de 2 e isso é impossível usando somente régua e compasso.

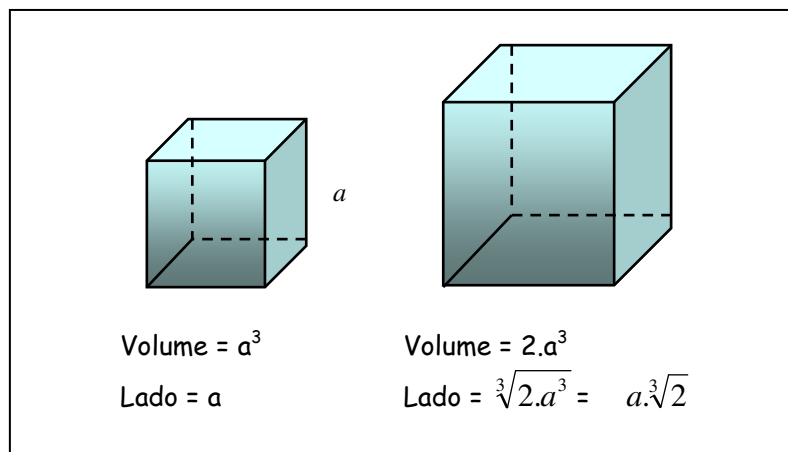


Figura 14: Demonstração geométrica do problema

Observa-se na demonstração acima, o surgimento dos *números irracionais*. Durante muito tempo, os matemáticos acreditaram que qualquer problema prático podia ser resolvido operando somente com os números naturais e fracionários. Não sentiam falta de nenhum outro tipo de número.

A necessidade das grandezas irracionais decorre do período que se iniciou em 530 a.C, na Grécia, mais precisamente com os conhecidos “pitagóricos” (GUELLI, 1998). Acreditava-se que o sistema dos números racionais era suficiente para propósitos práticos envolvendo medições, uma vez que ele contém todos os inteiros e todas as frações. Com a evolução da Matemática, surgiu a necessidade de um novo sistema. Situações como a descrita a seguir, ilustram o problema (EVES, 2002): Marque dois pontos distintos, O e I numa reta horizontal (I à direita de O) e tome o segmento OI como unidade de comprimento. Admitindo-se que os pontos O e I representem os números 0 e 1, respectivamente, então os inteiros positivos e negativos podem ser representados por um conjunto de pontos da reta convenientemente espaçados a intervalos unitários, os positivos à direita de O e os negativos à esquerda de O. As frações de denominador q podem ser representadas pelos pontos que dividem cada um dos intervalos unitários em q

partes. Então para cada número racional, há um ponto da reta. No entanto, foi um choque descobrir que há pontos na reta que não correspondem a nenhum número racional. Essa descoberta foi uma das grandes realizações dos pitagóricos. Eles provaram que não há nenhum número racional ao qual corresponda ao ponto P da reta no caso em que OP é igual a diagonal de um quadrado cujos lados medem uma unidade (figura 14). Assim, novos números tiveram que ser inventados para serem associados a estes pontos; e não sendo racionais, vieram a ser números irracionais (EVES, 2002). A descoberta desses números assinala um dos grandes marcos da história da Matemática.

Voltando à duplicação do cubo, já no século IV a.C., Menecmo, matemático grego, inventor das cônicas, construiu um segmento pela intersecção de uma parábola com uma hipérbole.

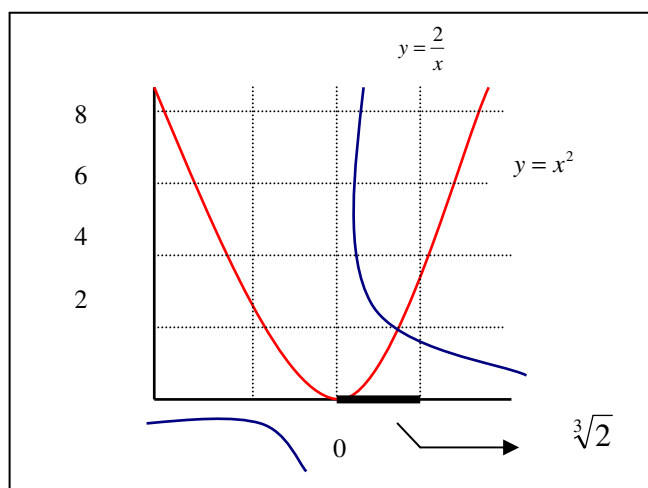


Figura 15: Representação geométrica atual do problema

Com a notação e representação atual, teríamos a intersecção das curvas $y = x^2$ com $y = \frac{2}{x}$, tal qual aparece na figura 15.

O terceiro problema é o da Trissecção do Ângulo. Consiste em dividir um ângulo em três partes iguais, somente com régua e compasso. Facilmente é possível dividir ângulos em 2, 4, 8, ... partes, e muitos ângulos especiais podem ser trissecionados, como 90° , 180° , etc. Mas o problema em geral não possui solução exata (EVES, 2002).

Hoje, existem muitas maneiras de trissecionar ângulos utilizando meios menos restritos que os antigos gregos. A seguir, é apresentado o método utilizado por Arquimedes (BOYER, 1997).

Dado um círculo (centro O e raio r) e uma corda AB , toma-se um ponto C sobre AB de tal forma que $BC = r$. Unindo-se C e O , a reta CO corta a circunferência em D e F (figura 16) .

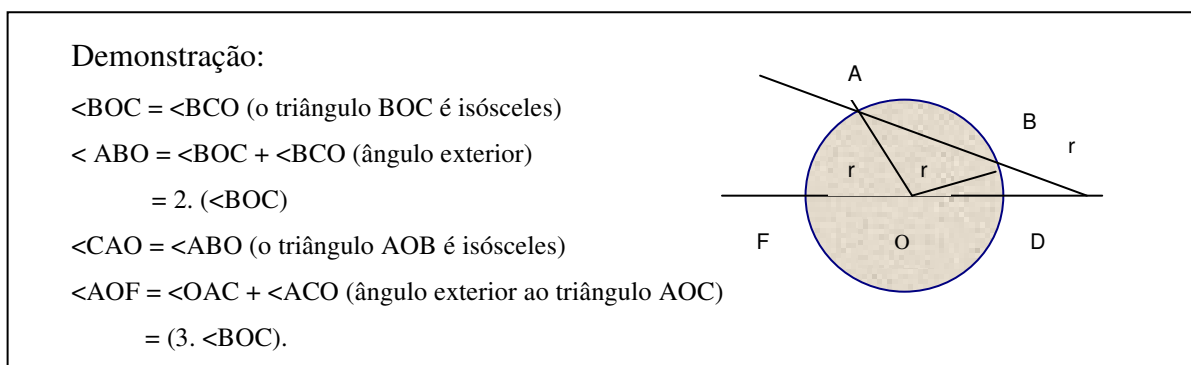


Figura 16: Trissecção do ângulo

Agora, para dividir um ângulo, por exemplo $\angle AOF$, em três partes iguais: constrói-se um segmento $BC = r$, de tal maneira que o prolongamento BC passe por A . Este procedimento pode ser feito se pudermos marcar a distância na régua e, isso viola as regras dos antigos gregos.

A importância desses problemas reside no fato de que eles não podem ser resolvidos, a não ser aproximadamente, com régua e compasso, embora estes instrumentos sirvam para a resolução de muitos outros problemas de construção. A busca de soluções para estes problemas influenciou profundamente a geometria grega, levando a importantes descobertas, tais como: as seções cônicas, muitas curvas cúbicas e quárticas e várias curvas transcendentais. (EVES, 2002, p. 134).

Segundo Eves (2002): “O grande estímulo ao desenvolvimento da Matemática, inclusive para a criação de novas teorias, dados pelos esforços continuados para resolverem os três famosos problemas da Antigüidade, ilustra o valor heurístico de problemas matemáticos atraentes não resolvidos”.

No mesmo período, destacam-se os chamados pitagóricos, de cuja escola foi fundador Pitágoras, que se supõe ter sido místico, cientista e estadista aristocrático (STRUIK, 1987). Os pitagóricos salientavam o estudo dos elementos imutáveis da natureza e da sociedade, e na procura de leis eternas do universo, eles estudaram geometria, aritmética, astronomia e música.

Uma doutrina matemática importante da escola dizia que: “o número era a substância de todas as coisas”, que números, isto é, números inteiros positivos, formavam o princípio organizacional básico do universo. Pitágoras quis dizer, com isso, que nem todos os objetos conhecidos têm um número, ou podem ser ordenados e contados, mas sim que os números estão na base de todos os fenômenos físicos (KATZ, 1993).

A sua aritmética era uma ciência especulativa. Os números eram divididos em classes: ímpares, pares, pares vezes pares, ímpares vezes ímpares, primos e compostos, perfeitos, amigos, triangulares, quadrados, pentagonais, etc (STRUIK, 1987; KATZ, 1993).

Alguns dos resultados mais interessantes relacionam-se com os números triangulares produzidos pelas adições sucessivas dos números naturais, pois representam uma ligação entre a geometria e a aritmética (STRUIK, 1987):

Uma das grandes preocupações dos pitagóricos era o conceito do número desenvolvido a partir da definição, atribuído a Tales, que o introduziu como a seqüência dos números inteiros e representou por pontos (LINTZ, 1999), os chamados números triangulares.

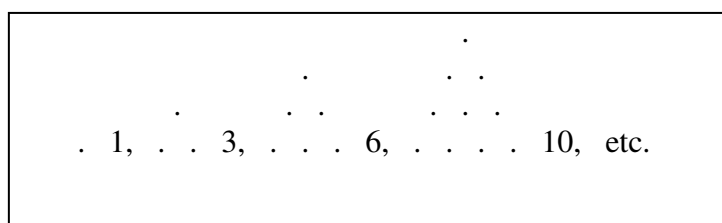


Figura 17: Números triangulares

A partir disso, muitos teoremas desenvolveram-se de maneira puramente geométrica. Podemos citar um deles, talvez o mais conhecido: “todo número quadrado é a soma de dois números triangulares sucessivos”. Por exemplo, observa-se que um número quadrado na sua forma geométrica pode ser dividido como a figura 18.

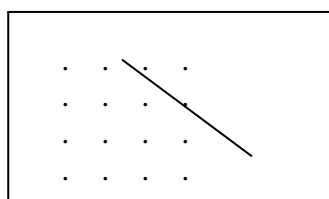


Figura 18: Números quadrangulares

Porém, como citado anteriormente, a descoberta mais importante atribuída a Pitágoras foi a dos Irracionais, por meio de segmentos de retas incomensuráveis (KATZ, 1993). Esta sua

descoberta pode ter sido o resultado do seu interesse pela média geométrica $a:b = b:c$, que servia como símbolo da aristocracia.

Para Boyer (1997): “Deve ter sido um choque descobrir que há pontos na reta que não correspondem a nenhum número racional. [...] Essa descoberta foi uma das grandes realizações dos pitagóricos”.

Em particular, os pitagóricos provaram que não há nenhum número racional ao qual corresponda ao ponto P da reta no caso em que OP é igual à diagonal de um quadrado cujos lados medem uma unidade, conforme a figura 19.

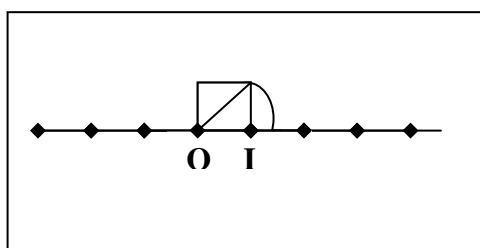


Figura 19: Demonstração (BOYER, 1997)

Segundo Garbi (1997): “Após Tales e Pitágoras, as descobertas geométricas avançaram rapidamente e os teoremas foram se acumulando em grande quantidade”.

O desenvolvimento da astronomia e da Matemática, neste período, na Babilônia atingiu o seu auge no período Selêucida⁵ e a astronomia grega foi impulsionada; a importância deste fato só começou a ser melhor entendida agora (STRUIK,1987). Na Grécia, importantes centros de estudos matemáticos se desenvolveram, especialmente Alexandria, Atenas e Siracusa.

⁵ Período antigo, caracterizado por ter governantes vindos da Síria, após o Oriente ter sido dividido em três impérios.

Atenas tornou-se um centro educacional, enquanto Siracusa destacou Arquimedes, o maior dos matemáticos gregos. Ele é uma das poucas figuras científicas da Antigüidade onde vários dados foram conservados acerca da sua vida e da sua personalidade (STRUIK, 1987).

Os trabalhos de Arquimedes são obras-primas de exposição matemática, e lembram artigos de revistas modernas. Além de exibirem grande originalidade, habilidade computacional e rigor nas demonstrações, são escritas numa linguagem altamente acabada e objetiva. Cerca de dez tratados de Arquimedes se preservaram até nossos dias e há vestígios de outros extraviados. (EVES, 2002,p.194)

As mais importantes contribuições de Arquimedes na Matemática foram feitas no domínio daquilo a que agora chamamos de “cálculo integral”. Na medição do círculo, encontrou uma aproximação da circunferência do círculo pelo uso de polígonos regulares inscritos e circunscritos. Levando esta aproximação a polígonos de 96 lados, encontrou (na nossa notação)

(STRUIK, 1987): $3^{\frac{10}{71}} < 3 \frac{284^{\frac{1}{4}}}{2017^{\frac{1}{4}}} < \pi < 3 \frac{667^{\frac{1}{2}}}{4673^{\frac{1}{2}}} < 3 \frac{667^{\frac{1}{2}}}{4672^{\frac{1}{2}}} = 3^{\frac{1}{43}}$, o que é usualmente expresso

dizendo que π é aproximadamente $3\frac{1}{7}$.

Na realidade, Arquimedes encontrou resultados de forma mais heurística. Ele diferia da maior parte dos matemáticos gregos pela sua capacidade de cálculo. Este fato deu ao seu trabalho, juntamente com todas as suas características gregas, um toque oriental.

Arquimedes triunfou não somente na aplicação de métodos para determinar áreas e volumes de novas figuras, mas também em desenvolver novas técnicas que permitiam os resultados serem descobertos em primeiro lugar. Diferente de seus predecessores, não foi nem relutante em compartilhar seus métodos de descoberta nem teve medo de executar cálculos numéricos e exibir resultados numéricos. (KATZ, 1993, p.95)

Isto é revelado no seu problema do gado, um problema muito complicado de análise indeterminada, envolvendo oito incógnitas inteiras relacionadas por sete equações lineares e sujeitas ainda a duas condições adicionais, a saber, que a soma de um certo par de incógnitas é um quadrado perfeito e que a soma de outro par determinado de incógnitas é um número triangular. Sem as condições adicionais, os menores valores das incógnitas são números da ordem de milhões, logo, uma das incógnitas deve ser um número com mais de 206 500 dígitos (EVES, 2002); que pode ser interpretado como um problema que conduz a uma equação do tipo Pell: $t^2 - 4729494u^2 = 1$ que é resolvida com números muito grandes (STRUICK, 1987; KATZ, 1993).

Para Eves (2002): “Um problema interessante, do primeiro livro de trabalho de Arquimedes, sobre os corpos flutuantes, é a famosa lei da hidrostática: *Um corpo imerso num fluido recebe um impulso, de baixo para cima, de intensidade igual ao peso do fluido deslocado*”.

Outro ramo da Matemática que se desenvolveu na Grécia foi a Trigonometria. Segundo o historiador Heródoto (490 – 420 a.C.), foram os gregos que deram o nome **gnômon** ao relógio de sol que chegou até eles através dos babilônios, embora já tivesse sido utilizado pelos egípcios antes de 1500 a.C. (COSTA, 2003).

O mais antigo Gnômon de que temos conhecimento e que chegou até nossos dias, está no museu de Berlim (EVES, 2002). Evidencia e reforça a hipótese de que a trigonometria foi uma ferramenta essencial para a observação dos fenômenos astronômicos pelos povos antigos.

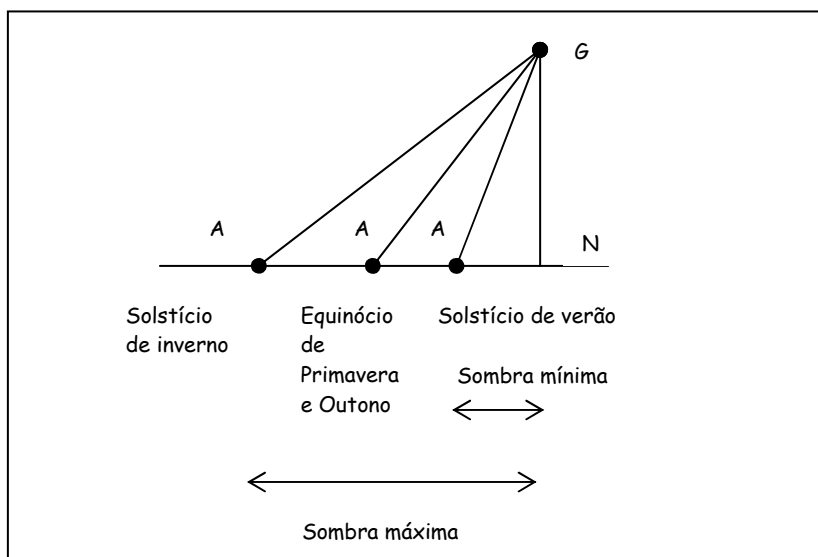


Figura 20: O Gnômon (vareta que se espetava no chão, formando com ele um ângulo de 90° , e o comprimento de sua sombra (AN) era observado em um horário determinado: meio dia).

Um problema que demonstra este conhecimento, faz parte da “coleção” de medições feitas por Aristarco e Eratóstenes:

Aristarco de Samos aplicou a Matemática à Astronomia. Tornou-se conhecido como o Copérnico da Antiguidade por ter reformulado a hipótese heliocêntrica do sistema solar (EVES, 2002).

Usando instrumentos toscos, Aristarco observou que a distância entre a Lua, quando está exatamente meio cheia, e o sol é $\frac{29}{30}$ de um ângulo reto. Com base nessa medição ele mostrou

(sem a ajuda da trigonometria) que a distância da Terra ao Sol situa-se entre 18 e 20 vezes à distância da Terra à Lua.

Podemos verificar isso, utilizando-se do resultado da observação de Aristarco. (O ângulo em consideração é, na verdade, aproximadamente $89^{\circ}50'$.) Em seus estudos sobre os tamanhos e as distâncias do Sol e da Lua, ele usou algo equivalente ao fato de que: $\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} b} < \frac{a}{b} < \frac{\operatorname{tga}}{\operatorname{tgb}}$, onde

$0 < b < a < \frac{\pi}{2}$. Admitindo-se conhecidos os gráficos das funções $\operatorname{sen} x$ e $\operatorname{tg} x$, mostre que

$\frac{(\operatorname{sen} x)}{x}$ *decrece* e $\frac{(\operatorname{tg} x)}{x}$ *crece*, conforme x cresce de 0 a $\frac{\pi}{2}$, estabelecendo assim as

desigualdades acima.

Outro problema deste período, segundo STRUIK (1987), demonstra os conhecimentos na área da Geometria, que por sua vez está intimamente ligado à Trigonometria.

Dados dois segmentos 1, a e b , construir segmentos de longitude ab , $\frac{a}{b}$.

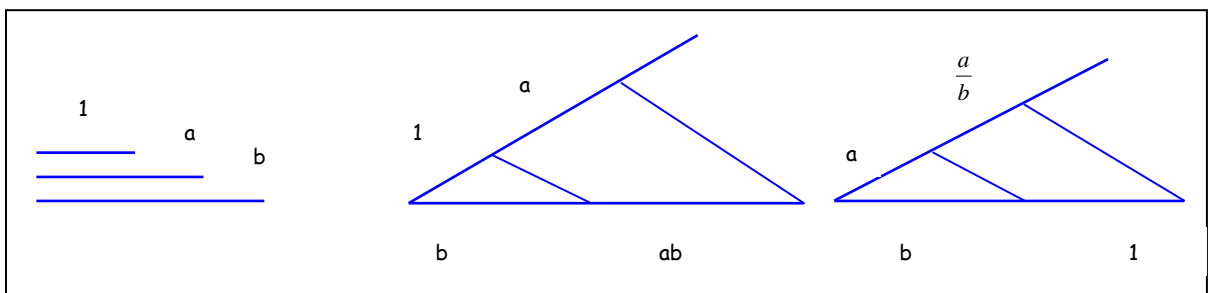


Figura 21: Demonstração geométrica

Segundo Eves (2002): “É desapontador, mas muito pouco se sabe sobre a vida e a personalidade de Euclides. Sabe-se que foi ele o criador da famosa escola de Alexandria, da qual foi professor”.

Avançando na história, temos o estudo da antiga Matemática chinesa, que apesar de difícil tradução, têm-se algumas informações nos livros de Mikami (1913) e de Needham (1959) ou em artigos especiais (STRUICK, 1987).

Os problemas que marcam este período aparecem no livro que mais influenciou a Matemática chinesa: o *Jiu Zhang Suan Shu*, “Os Nove capítulos sobre a Arte da Matemática”. A versão mais conhecida desta obra é do século II a.C, porém sabe-se que alguns resultados da Matemática chinesa datam do ano 1100 a.C.. A obra é uma compilação de 246 problemas práticos, dentre eles aparecem equações com duas ou mais incógnitas e nos capítulos finais, apresenta as propriedades dos triângulos retângulos, incluindo o teorema “*Gou-Gu*”, conhecido no Ocidente como Teorema de Pitágoras (PERERO, 1994 ; BOYER, 1997).

O caso do bambu quebrado é uma aplicação deste teorema: “Um talo de bambu tem 10 “chi” de altura. Havendo quebrado o talo, seu topo toca o solo a 3 “chi” de distância da base do talo. Qual a altura da parte que ficou em pé?” (BOYER, 1997). Observe as figuras 22 e 23, que mostram uma versão moderna do problema e outra original, segundo Eves (2002), respectivamente.

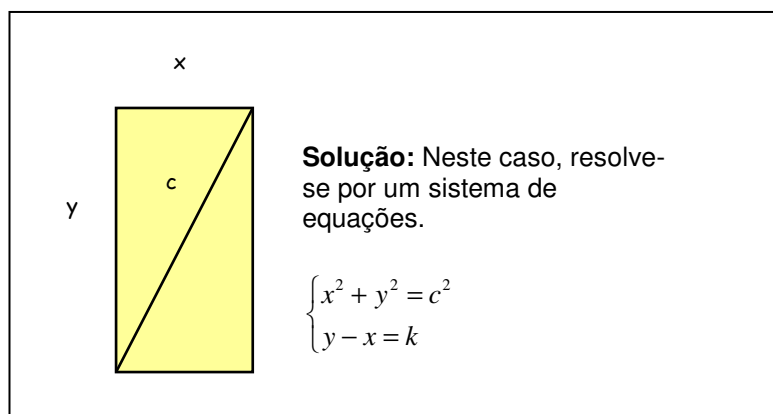


Figura 24: Solução do problema 15 dos “Nove Capítulos”

Em livros datados do período de Han (206 a.C. a 220 d. C), encontramos um diagrama muito conhecido, o quadrado mágico, com o qual muitas lendas são relacionadas. Este quadro, famoso até os dias de hoje, é especial, pois a soma de suas linhas, colunas e diagonais somam sempre 15 (KATZ, 1993;BOYER, 1997).

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Figura 25: Quadrado Mágico

Os chineses gostavam muito de diagramas, tanto que o primeiro registro de um quadro mágico apareceu na China. O quadro foi supostamente trazido para os homens por uma tartaruga do Rio Lo nos dias do lendário imperador Yii, considerado um engenheiro hidráulico (BOYER, 1997). A preocupação com tais diagramas levou o autor dos Nove capítulos a resolver o sistema

de equações lineares simultâneas:
$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases}$$
, efetuando operações sobre colunas na matriz:

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

, para reduzi-la a .

0	0	3
0	5	2
36	1	1
99	24	39

Um dos clássicos matemáticos chineses mais antigos é o *I-King* ou *Livro das Permutações* (EVES, 2002). Nele aparece um diagrama numérico conhecido como *lo-shu*, posteriormente desenhado como a figura 26. Trata-se do exemplo conhecido mais antigo de quadrado mágico. Como se observa na figura 26 é um arranjo quadrado de numerais expressos por nós em cordas; nós pretos para números pares e brancos para números ímpares.

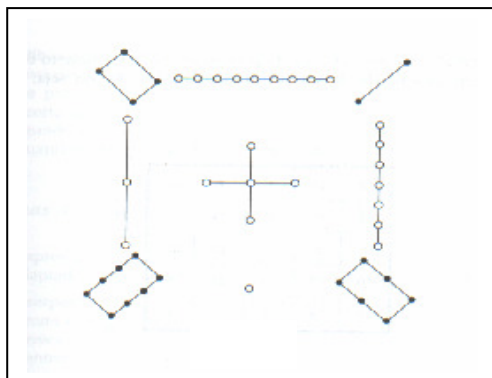


Figura 26: Segundo Eves (2002): o quadrado mágico mais antigo.

Um quadrado mágico de ordem n é um arranjo quadrado de n^2 inteiros distintos dispostos de maneira tal que os números de uma linha qualquer, de uma coluna qualquer ou da diagonal principal têm mesma soma, chamada *constante mágica* do quadrado. O quadrado mágico se diz normal se os n^2 números que o formam são os n^2 primeiros números inteiros positivos (EVES, 2002, p. 269).

De La Loubère, quando enviado de Luis XIV no Sião (atual Tailândia), no período entre 1687 e 1688, aprendeu um método simples de construir quadrados mágicos normais de qualquer

ordem ímpar (EVES, 2002). Podemos construir ilustrar este método construindo um quadrado de ordem cinco. “Desenhar um quadrado e dividir em 25 celas (ver figura 27). Contorne o quadrado com celas ao longo de suas bordas superior e direita e sombreie a do canto superior direito. Escreva 1 na cela superior do quadro original”.

A regra geral consiste em proceder na diagonal para cima e para a direita com os inteiros sucessivos. As exceções a essa regra, segundo EVES (2002), ocorrem quando essa operação nos leva para fora do quadrado original ou uma cela já ocupada. Na primeira situação, voltamos ao quadrado original deslocando o número que cairia fora, ou de cima para baixo ou da direita para a esquerda, conforme seja o caso, para a última cela em branco da fila correspondente. Na segunda situação escrevemos o número na cela abaixo da última a ter sido preenchida e seguimos com a regra geral. Devemos considerar ocupada a cela sombreada.

	18	25	2	9	
17	24	1	8	15	17
23	5	7	14	16	23
4	6	13	20	22	4
10	12	19	21	3	10
11	18	25	2	9	

Figura 27: Ilustração do método para construir quadrados mágicos

Na ilustração (figura 27), a regra indica que devemos colocar o 2 diagonalmente acima do 1 na quarta cela do contorno superior do quadrado. Portanto devemos deslocar o 2 para a quarta

cela da linha de baixo do quadrado original. Prosseguindo com a regra geral, quando chegamos ao 4 atinge-se a terceira cela do contorno lateral direito do quadrado. Devemos então, deslocar o 4 para a terceira cela da primeira coluna do quadrado original. A regra geral colocaria o 6 na cela já ocupada pelo 1; portanto ele deve ser escrito na cela exatamente abaixo do último número registrado, ou seja, o 5. E assim por diante.

A numeração chinesa foi sempre decimal, e já no segundo milênio a. C. encontramos números expressos com nove símbolos e com valor de posição. O sistema estabilizou-se no período Han, ou talvez antes. Os nove numerais eram expressos por um arranjo de paus de bambu, de modo que, por exemplo, $\perp TT=TTTT$ significava 6729 e também era escrito dessa forma (STRUİK, 1987,p. 66).

A Matemática chinesa ocupou um lugar excepcional, pois a sua tradição permaneceu praticamente intacta até recentemente, o que permite estudar com mais exatidão a sua posição na comunidade do que a da Matemática egípcia e babilônica.

Não é por acaso que a Matemática chinesa é um importante marco na história. Os matemáticos chineses aplicaram seus talentos não somente para melhorar velhos métodos de solução para problemas práticos, mas também para estender estes métodos além das necessidades práticas do dia-a-dia (KATZ, 1993).

No período de 200 a.C – 1250 d.C, a Matemática Hindu deixou importantes contribuições para a Matemática moderna. Foi nesta época que foi criado o sistema de numeração posicional de

base 10, os números negativos e positivos e nota-se um excepcional desenvolvimento da álgebra, com a resolução de equações indeterminadas (BOYER, 1997; EVES 2002).

A Índia produziu muitos matemáticos na segunda metade da idade Média, porém um deles merece um destaque especial: Bháskara, o mais importante matemático do século XII (BOYER, 1997). Foi ele quem preencheu algumas lacunas na obra de Brahmagupta⁶, por exemplo, dando uma solução geral para a equação de Pell e considerando o caso da divisão por zero.

A equação de Pell ($Dx^2 \pm b = y^2$) é um tipo inteiramente diferente de equação indeterminada de grande interesse dos matemáticos indianos, cuja primeira ocorrência está no trabalho de Brahmagupta (acima referido). Hoje o caso especial $Dx^2 \pm 1 = y^2$ é geralmente referido como a equação de Pell (erroneamente em homenagem ao inglês do século XVII, Jonh Pell). Há algumas evidências que certos casos especiais desta equação foram resolvidos na Grécia, mas a primeira documentação de um esforço pra resolver esta equação em alguma generalidade é na Índia. (KATZ, 1993, p. 208)

Katz (1993) afirma que: “A meta de Bháskara, no capítulo sobre álgebra neste texto, era mostrar como qualquer equação na forma $Dx^2 + 1 = y^2$ pode ser resolvida com números inteiros”.

As duas partes mais importantes do trabalho de Bháskara são Lilāvati (“bela” – livro dedicado a sua filha, segundo Boyer, 1997) e Vijaganita (“extração de raízes”), que tratam da aritmética e da álgebra, respectivamente.

⁶ Matemático hindu que viveu em 628, na Índia central. Suas contribuições à álgebra são de ordem mais alta que suas regras de mensuração, pois ele encontrou soluções gerais de equações quadráticas, inclusive duas raízes mesmo quando uma delas é negativa. (Mais informações sobre a obra de Brahmagupta ver BOYER, p. 150: 1997).

Um problema interessante, que faz parte do texto Lilāvati de Bháskara: “Linda donzela de olhos resplandecentes, uma vez que entendeis o método de inversão correto, dizei-me qual é o número que multiplicado por 3, depois acrescido de $\frac{3}{4}$ do produto, depois dividido por 7, diminuído de $\frac{1}{3}$ do quociente, multiplicado por si mesmo, diminuído de 52, pela extração da raiz quadrada, adição de 8 e divisão por 10, resulta o número 2?”(EVES, 2002).

Pelo método da inversão, começamos com o número 2 e operamos para trás. Assim, $[(2)(10) - 8]^2 + 52 = 196, \sqrt{196} = 14, (14)\left(\frac{3}{2}\right)(7)\left(\frac{4}{7}\right) / 3 = 28$, sendo 28 a resposta. Observamos, que todas as operações feitas na solução são inversas ao que foi pedido, o que responde pelo método de inversão.

É exatamente o que faríamos se tivéssemos a necessidade de resolver o problema utilizando métodos modernos. Assim, representando por x o número procurado temos:

$$\sqrt{\left[\frac{\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{7}{4}\right)(3x)}{7}\right]^2 - 52 + 8} \div 10 = 2.$$

Para resolver esta equação pelos métodos modernos, multiplica-se ambos os membros por 10, depois subtrai-se 8 de cada membro, depois eleva-se ao quadrado cada membro e assim por diante.

Esse problema ilustra também a prática hindu de revestir problemas aritméticos de trajés poéticos. Isso acontecia porque os textos escolares eram escritos em versos e porque os problemas eram freqüentemente usados para entretenimento social (EVES, 2002).

Os hindus, segundo Eves (2002), por volta de 628 d.C. à 1150 d.C, aceitavam os números negativos e os irracionais e sabiam que uma equação quadrática tem duas raízes formais. Eles unificaram a resolução algébrica de equações quadráticas pelo método familiar de complemento de quadrados (EVES, 2002). Esse método é hoje, muitas vezes conhecido, como método hindu. Bhãskara deu as duas seguintes identidades notáveis:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\left(a + \sqrt{a^2 - b}\right)/2} \pm \sqrt{\left(a - \sqrt{a^2 - b}\right)/2}.$$

Os hindus somavam progressões aritméticas e geométricas e resolviam problemas comerciais envolvendo juros simples e compostos, descontos e regras de sociedade.

Nesta mesma época, a Matemática Árabe teve grande importância, pois além de preservar o patrimônio matemático dos gregos, divulgando estes conhecimentos pela Índia, assimilando ambas as culturas e fazendo avançar tanto a Álgebra como a Trigonometria, dentre suas contribuições, encontra-se um dos mais antigos métodos para resolver equações do segundo grau, o método geométrico de “Completar o quadrado”, atribuído a Al-Khowarizmi (também chamado o pai da Álgebra) (BOYER, 1997).

Ele considerava cinco tipos de equações do segundo grau: $ax^2 = bx$; $ax^2 = b$; $ax^2 + bx = c$; $ax^2 + c = bx$; $ax^2 = bx + c$, onde a, b e c eram positivos e $a = 1$ (Os números negativos e complexos apareceram depois). Aqui, um dos problemas que tratam este método:

“Resolver a equação $x^2 + 10x = 39$:

Solução: Constrói-se um quadrado ABCD, com $AB = AD = x$. Estende-se os lados AB e AD, de forma que $DE = BF = 5$ (5 é a metade de 10, o coeficiente de x). Em seguida, completa-se o quadrado AFKE.

A área de AFKE (figura 28) pode ser expressa como: $x^2 + 10x + 25$, mas a equação a resolver é $x^2 + 10x = 39$, portanto, tem que somar 25 aos membros da equação, resultando em: $x^2 + 10x + 25 = 39 + 25 = 64$. Os dois membros da equação, são agora, quadrados perfeitos: $(x + 5)^2 = 8^2$. Logo, $AF = AE = x + 5 = 8$ e a solução será: $x = 3$.

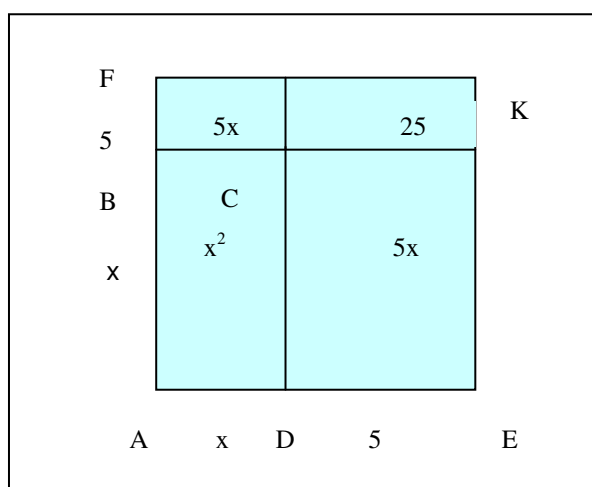


Figura 28: resolução da equação

O período que vai de 500 d.C. a 1600 d.C., na Idade Média, é marcado por níveis muito baixo de saber, ou seja, o ensino praticamente deixou de existir, estando ele, concentrado nas mãos da igreja (STRUIK, 1987). Nos monastérios, a cultura grega e árabe foi preservada, logo, aos poucos, com a penetração dos clássicos gregos na Europa, este saber foi lentamente transmitido.

Neste período, é importante mencionar *Leonardo Fibonacci*, pois foi o matemático de maior destaque da época. Publicou a famosa obra *Líber Abaci* e, através dela, difundiu a notação indo-arábica na Europa (KATZ, 1993; EVES, 2002). Fibonacci gostava das frações unitárias – ou julgava que seus leitores gostassem, pois o *Líber Abaci* contém tabelas de conversão de frações comuns a unitárias. A fração $\frac{98}{100}$ por exemplo é decomposta em $\frac{1}{100} \frac{1}{50} \frac{1}{5} \frac{1}{4} \frac{1}{2}$ e $\frac{99}{100}$ aparece como $\frac{1}{25} \frac{1}{5} \frac{1}{4} \frac{1}{2}$. Um estranho capricho de sua notação levou-o a exprimir a soma de $\frac{1}{5} \frac{3}{4}$ e $\frac{1}{10} \frac{2}{9}$ como $\frac{1}{2} \frac{6}{9} \frac{2}{10} 1$, a notação $\frac{1}{2} \frac{6}{9} \frac{2}{10}$ significando nesse caso $\frac{1}{2 \cdot 9 \cdot 10} + \frac{6}{9 \cdot 10} + \frac{2}{10}$ (BOYER, 1997).

Muito do *Líber Abacci* é desinteressante, mas alguns dos problemas são tão estimulantes que foram usados por autores posteriores (BOYER, 1997). O problema de *Líber Abaci* que mais inspirou aos futuros matemáticos, foi o seguinte: “Quantos pares de coelhos serão produzidos em um ano, começando com um só par, se em cada mês cada par gera um novo par que se torna produtivo a partir do segundo mês?” (BOYER, 1997; KATZ, 1993).

Esse problema deu origem ao que hoje conhecemos como *Seqüência de Fibonacci* : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ..., u_n, \dots , onde $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, isto é, em que cada termo após os dois primeiros é a soma dos dois imediatamente precedentes. Verificou-se que essa seqüência tem muitas propriedades belas e significativas. Por exemplo, pode-se provar que dois termos sucessivos quaisquer são primos entre si e que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n-1}}{u_n}$ é a razão da secção áurea $(\sqrt{5} - 1)/2$ (BOYER, 1997).

Fibonacci era um algebrista, tratou com clareza a equação cúbica. Ele exhibe uma atitude quase moderna ao provar primeiro a impossibilidade da existência de raiz no sentido euclidiano, como razão de inteiros, ou da forma $a + \sqrt{b}$, onde a e b são racionais. Fibonacci tratou de exprimir a raiz positiva aproximadamente como uma fração sexagesimal com meia dúzia de casas – 1; 22, 7, 42, 33, 4, 40. Esse foi seu mais notável sucesso (BOYER, 1997).

Os talentos de Fibonacci chamaram a atenção do imperador Frederico II, com o conseqüente convite a ele para participar de um torneio de matemáticos na corte. Dentre os problemas propostos no torneio, um deles, segundo EVES (2002) demonstra o conhecimento, já mencionado, da solução para equações cúbicas: “Encontrar a solução da equação cúbica $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$. O matemático tentou provar que nenhuma raiz da equação pode ser expressa irracionalmente na forma $\sqrt{a + \sqrt{b}}$ ou, em outras palavras, que nenhuma raiz pode ser construída com régua e compasso. Obteve então, uma resposta aproximada, que expressa em notação decimal, é 1, 3688081075 e que é correta até a nona casa (EVES, 2002).

Para Eves (2002): “Outro problema que demonstra os conhecimentos matemáticos de Fibonacci com total clareza, é o seguinte”: “Encontrar um número, cujo quadrado aumentado ou diminuído em 5, continue sendo quadrado”. A solução encontrada por Fibonacci foi:

$$\frac{1681}{144} = \left(\frac{41}{12}\right)^2$$

Observe que:

$$\frac{1681}{144} - 5 = \frac{961}{144} = \left(\frac{31}{12}\right)^2$$

$$\frac{1681}{144} + 5 = \frac{2401}{144} = \left(\frac{49}{12}\right)^2$$

Depois disso, tudo que segue, podemos chamar de Matemática Moderna, ou seja, de 1700 até a atualidade. A Matemática, sofreu muitas transformações ao longo dos anos e sua evolução deu-se, principalmente pela influência de importantes nomes que mergulharam na resolução de inúmeros problemas e com isso decifraram mais áreas do conhecimento matemático.

Nesta perspectiva, um problema de grande importância para todos os matemáticos, foi o famoso “Teorema de Fermat”.

Em 1648, o francês Pierri de Fermat (1601-1665) foi promovido a conselheiro do rei do parlamento de Toulouse, título mantido até sua morte. Era a culminação de uma carreira pautada pelo cumprimento do dever na área jurídica do serviço público. Mas, em que pesem seus méritos profissionais, foi através de seu *hobby* predileto, a Matemática, à qual prazerosamente reservava suas horas de lazer, que Fermat se imortalizou (DOMINGUES, p. 56, 2003).

Entre as contribuições de Fermat à Matemática, a que mais marcou seu nome foi uma anotação que fez em 1637 na margem de seu exemplar da *Arithmetica de Diofanto de Alexandria*. Resumidamente, a anotação dizia que, se $n \geq 3$, então nenhum terno (a, b, c) de números inteiros positivos é solução da equação $x^n + y^n = z^n$ (DOMINGUES, 2003).

O problema teve suas origens na Grécia antiga, mas somente atingiu sua maturidade no século XVII, quando Fermat o colocou como um desafio para o resto do mundo. Uma sucessão de grandes matemáticos foi humilhada pelo legado de Fermat e durante trezentos anos ninguém conseguiu uma solução (SINGH, 2000; BOYER, 1997; EVES, 2002; KATZ, 1993).

O Teorema, tornou-se o santo graal da Matemática. Vidas inteiras foram devotadas – e até mesmo sacrificadas – à busca de uma demonstração para um problema aparentemente simples (SINGH, 2000).

Em 1963, o matemático Andrew Wiles (na época, com dez anos de idade), já era fascinado pela Matemática. “...Eu adorava resolver problemas na escola. Eu os levava para casa e criava novos. Mas os melhores problemas eu encontrava na biblioteca local”(Wiles apud Singh, 2000). Foi em um desses dias, onde andava pela biblioteca, que Andrew deparou-se com um problema que lhe tirou o sono por cerca de 32 anos, o Teorema de Fermat.

Parecia tão simples, e no entanto nenhum dos grandes matemáticos da história conseguiu resolvê-lo. Ali estava um problema que eu, um menino de dez anos, podia entender e eu sabia que partir daquele momento nunca o deixaria escapar. Tinha de solucioná-lo (WILES apud SINGH, 2000, p. 27).

Geralmente, metade de um problema de Matemática, consiste em entender a questão, mas nesse caso, ela era simples e direta: ***Provar que não existe solução em números inteiros para a seguinte equação: $x^n + y^n = z^n$, para n maior do que 2*** (KATZ, 1993; SINGH,2000).

O problema tem uma aparência simples e familiar, porque é baseado em um elemento da Matemática que todos conhecem, o Teorema de Pitágoras. Ele foi fonte de inspiração para o problema que desafiou as maiores mentes matemáticas da história (SINGH,2000).

Em 1993, passados 365 anos desde o desafio de Fermat, Wiles assombrou o mundo ao anunciar a demonstração, porém sua luta ainda não tinha terminado. Um erro o fez voltar as pesquisas por mais quatorze meses, até que em 1995, ele ganhou as páginas de jornal do mundo inteiro e 50 mil dólares da Fundação Wolfskehl.

Embora Wiles tenha recorrido a métodos do século XX para resolver o enigma do século XVII, ele conquistou o desafio de acordo com as regras do comitê Wolfskehl. No dia 27 de junho de 1997, Andrew Wiles recebeu o prêmio e finalmente o Último Teorema de Fermat foi oficialmente provado.

Segundo Singh (2000): “Wiles compreende que para dar a Matemática uma de suas maiores demonstrações, ele teve que privá-la de seu maior enigma”.

As pessoas me dizem que eu lhes tirei seu problema e me pedem que lhes dê alguma outra coisa em troca. Há um sentimento de melancolia. Perdemos algo que estava conosco há muito tempo e uma coisa que atraiu muitos de nós para a Matemática. Talvez seja sempre assim com os problemas da Matemática. Temos que encontrar novos para capturar nossa atenção (WILES apud SINGH, 2000, p. 286).

Analisando o crescimento histórico dos problemas matemáticos, observamos que já na antiguidade existia uma forte tendência em desenvolver novas áreas de conhecimento, novos conceitos e métodos através da resolução de problemas. Hoje, a metodologia está sendo ponto de reflexão de muitos educadores, pois possibilita ao aluno, o desenvolvimento de diferentes estratégias e habilidades de resolução.

A verdadeira força da resolução de problemas requer um amplo repertório de conhecimento, não se restringindo as particularidades técnicas e aos conceitos, mas estendendo-se às relações entre eles e aos princípios fundamentais que os unifica. A Matemática precisa ser ensinada como Matemática e não como um acessório subordinado a seus campos de aplicação (ONUCHIC, 1999).

A perspectiva histórica permite mostrar, entre outras coisas, que a Matemática é um conjunto de conhecimentos em contínua evolução, que desempenha um papel muito importante na formação do aluno, pois sua inter-relação com outros conhecimentos e a necessidade de desenvolver determinados problemas práticos, o que torna a vida acadêmica muito mais desafiadora (VALDÉS, 2002).

Com isso, estamos querendo afirmar, que um aluno precisa ter liberdade para experimentar e colher resultados de seus experimentos, argumentar diante de uma idéia colocada, refutar, inventar, errar para poder alcançar a sua certeza no conhecimento. Em Matemática, isso é especialmente verdadeiro. Um problema, por exemplo, precisa suportar várias soluções e múltiplas estratégias, mesmo que seja única a sua resposta (RABELO, 2002).

Logo, as atividades propostas aos alunos não podem ter soluções que só o professor “conhece”. Mas sim, devem dar ao aluno a oportunidade de pensar e estabelecer regras para encontrar seu próprio caminho (RABELO, 2002).

A seguir, estão organizados, alguns dos principais problemas históricos que até os dias de hoje não foram solucionados:

1. *A conjectura de Goldbach* (LAVADO, 2002; VAZQUEZ, 1989):

Em uma carta de 1742 a Euler, o matemático russo Christian Goldbach disse que, todo número par é igual a soma de dois números primos, por exemplo:

$$4 = 2 + 2; 6 = 3 + 3; 8 = 3 + 5; 10 = 3 + 7, \dots; 100 = 3 + 97; 102 = 5 + 97; \dots$$

A proposição de Goldbach foi verificada por computador para todos os números pares até 100 milhões, mas apesar dos esforços dos melhores matemáticos dos últimos 250 anos, sua forma geral não pode ser demonstrada. Em 1937, o matemático russo Vinogradov demonstrou que todo número par “suficientemente grande”, é igual a soma de mais quatro primos e este, ficou conhecido como Teorema de Vinogradov-Goldbach.

2. *Conjectura de Catalán* (VAZQUEZ, 1989):

Consideramos a equação $x^n - y^m = 1$. Admite nos inteiros a solução $x=3, n=2, y=2, m=3$ já que $3^2 - 2^3 = 1$.

A conjectura de Catalán (1814 – 1894), afirma que esta solução é a única para números inteiros, alguns progressos foram feitos, porém a conjectura não foi provada com certeza.

3. *Números primos gêmeos* < Disponível <http://www.somatematica.com.br>> Acesso em: 22/10/03;(PERERO, 1994).

Estes são números primos cuja diferença é 2. Por exemplo: são primos gêmeos 3 e 5, 5 e 7, 17 e 19, 29 e 31, ..., 71 e 73, ..., 10.006.427 e 10.006.429, ... Sabe-se que os números primos são infinitos (pela demonstração de Euclides), mas que vão ficando cada vez mais distantes a medida que crescem os intervalos. Com os primos gêmeos também é assim, na medida que crescem, vão ficando cada vez mais escassos. Mas sabemos que já foram encontrados primos gêmeos na ordem de milhão e de milhões, entretanto não se demonstrou se existem infinitos números primos gêmeos.

O maior par de primos gêmeos conhecidos é $2409110779845 \cdot 2^{60000} \pm 1$. Esses primos têm 18075 dígitos, e foram descobertos por Wassing, Jári e Indlekofer.

4. *Números perfeitos* (PERERO, 1994; VAZQUEZ, 1989):

Os números perfeitos são números inteiros, iguais a soma de seus divisores. Por exemplo: $6 = 1 + 2 + 3$; $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$. Outros números perfeitos são: 496, 8128, 33 550 336, ...

Em 1952, eram conhecidos somente 12 números perfeitos. A dificuldade de encontrar esse tipo de número, segundo René Descartes apud Perero (1994): “...os números perfeitos são iguais a homens perfeitos, são muito escassos”.

Em 1811, o matemático inglês Peter Barlow, em seu livro *Theory of Numbers*, fala de um número perfeito de 19 cifras descoberto por Euler em 1772 e disse: “Jamais se descobrirá nenhum maior, pois estes números são interessantes e não úteis”. O que ele não considerou é que a chegada dos computadores facilitaria este estudo.

Hoje, já se conhecem 30 números perfeitos, o último foi descoberto em 1963 pelo Departamento de Illinóis (E.U.A.), tem 6751 cifras e 22425 divisores. Entretanto, há dois problemas ainda não solucionados com relação a estes números que seguem interessando matemáticos e pesquisadores da área:

- Existem números perfeitos ímpares? Todos os conhecidos até agora são pares e terminam em 6 ou 8. Sabe-se também, que se existe um número perfeito ímpar terá que ser maior que 100^{100} .

- Também não se sabe se é finito ou infinito o número de números perfeitos.

5. *O problema do viajante* (PERERO, 1994):

Um viajante tem que ir com seus produtos a várias cidades e voltar a seu ponto de partida, mas quer fazer o caminho da forma mais econômica possível.

Este problema, descoberto há mais de um século, é relativamente fácil de resolver quando se trata de ir a poucas cidades. Basta calcular todos os caminhos possíveis e ver qual deles é o mais conveniente. Com os computadores de hoje em dia a proposta torna-se extremamente fácil. Entretanto, o problema fica complicado quando temos, por exemplo, 100 cidades.

O número a ser calculado, neste caso, seria $100 \times 99 \times 98 \times 97 \times 96 \times \dots = 100!$. Sabendo-se que este número é de ordem 10^{200} , ou seja 1 seguido de 200 zeros.

O interessante, é que pegamos um número pequeno, isto é 100 é um número muito baixo para as aplicações reais deste problema. Organizações de linhas telefônicas, desenhos de circuitos integrados (chips), etc., são resolvidos através do problema do viajante.

O algoritmo que permite resolver exatamente o problema em geral não foi descoberto, todavia, muitos progressos foram feitos e métodos descobertos para diminuir o número de operações a efetuar. Entretanto, a tendência é buscar soluções aproximadas que, em quase todos os casos, são satisfatórias para fins práticos.

Os problemas citados são importantes problemas da história da Matemática, porém muitos outros ficaram perdidos em livros e trabalhos sem memória, ou seja, muitos deles perderam-se

com o tempo, pois foram deixados em materiais nem sempre duradouros. Muitos problemas existiram na Matemática e muitos ainda surgirão, pois a Matemática é uma ciência constituída destes pequenos enigmas sem solução. É isso que faz o belo na Matemática.

3 A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA: UMA ALIANÇA POSSÍVEL

Resolver problemas com o auxílio da história da Matemática é uma proposta metodológica que visa melhorar as condições de ensino aprendizagem dos alunos do Ensino Básico. Esse tipo de abordagem permite aos estudantes levantar hipóteses, estruturar seu pensamento, desenvolver suas próprias estratégias e interpretá-las e, além disso, oportuniza aos estudantes um momento para discutir suas idéias em classe com o professor e colegas. Mesmo que a escola não ofereça condições materiais desejáveis para o exercício dessa prática, não se justifica a omissão do professor, pois é necessário tentarmos melhorar de alguma forma a qualidade do ensino adaptada as condições da escola e ao nível de seus alunos (MENDES,2001) .

Um dos principais obstáculos ao sucesso do ensino aprendizagem da Matemática diz respeito ao desinteresse dos estudantes com relação ao modo como a Matemática é apresentada em sala de aula. Nesse sentido, Mendes afirma que: “[...] é através de um ensino mais prático e dinâmico por parte do professor e dos estudantes, de modo que ambos lancem mão das brincadeiras, de atividades práticas e experimentos que a aprendizagem torna-se mais significativa” (2001b, p. 115). Logo a metodologia resolução de problemas associada à história

da Matemática se faz presente, pois neste caso, os conteúdos passam a ter sentido, motivando os alunos ao estudo da disciplina e gerando maior interesse pela Matemática.

A história da Matemática pode ser uma grande aliada quanto à explicação de dúvidas e porquês muitas vezes inexplicáveis para os estudantes, principalmente se associada a um problema que exija do aluno métodos e estratégias de raciocínio. Dessa forma, o aluno estará adquirindo conhecimentos de maneira mais prazerosa e significativa.

Com base no estudo, elaboramos uma atividade que visa associar a história da Matemática à resolução de problemas. Desenvolvemos uma seqüência didática para aplicação em sala de aula, utilizando um problema histórico “O Problema das Sete Pontes de Königsberg”. Para trabalhar com este problema nas aulas de Matemática, foi necessário estudar o problema com mais profundidade, ou seja, escrevê-lo e interpretá-lo para que ficasse realmente claro para nós⁷ e para que pudéssemos analisar quais suas principais características para aplicá-lo em sala de aula. A escolha desse problema, justifica-se pelo fato de ser uma situação histórica e, além disso, geradora de conhecimentos posteriores, como por exemplo a Topologia, ramo da Matemática, cujos principais conceitos podem ser estudados através da resolução de problemas. Mais do que isso, o problema das Sete Pontes, foi selecionado por ser um problema de processo, cuja principal característica é estimular e desenvolver estratégias de raciocínio lógico dos estudantes, bem como motivá-los a pesquisa e a investigação.

⁷ A solução do problema pode ser vista no anexo 2

3.1 Utilizando um problema histórico como recurso didático no Ensino Básico

3.1.2 Justificativa

A utilização de atividades históricas no ensino de Matemática é um recurso pedagógico que pode influir na solução de alguns problemas detectados pelos professores durante sua prática escolar, pois é comum surgirem questionamentos dos alunos acerca da evolução histórica desse tópico matemático, bem como das causas e importância de sua construção (MENDES, 2000).

Consideramos importante o estudo de atividades que envolvam aspectos históricos relacionados com a resolução de problemas. O importante é que a construção do conhecimento seja realizada desde as idéias iniciais, com informações históricas e com um encadeamento de idéias que levem o aluno a compreender os conceitos necessários para a solução do problema.

A Matemática tem se construído, ao longo da história, como resposta a perguntas traduzidas em tantos outros problemas. Tais perguntas tem tido variações em suas origens e em seu contexto: problemas de natureza doméstica (divisão de terras, cálculos de crédito, etc), problemas formulados em estreita vinculação com outras ciências, especulações a respeito de objetos, entre outros (CHARNAY,1996).

Como já justificamos no decorrer do capítulo 1, trabalhar com a metodologia resolução de problemas em sala de aula, é considerado de total importância para o desenvolvimento de habilidades no aluno. Diante disso, o professor deve definir que tipo de problema vai utilizar em suas aulas, bem como, qual objetivo quer alcançar com isso.

Para Rabelo (2002): “Em Matemática, para cada problema proposto, surgem diferentes estratégias para sua resolução, todas válidas, cada uma viabilizando a solução correspondente”.

Considerando isso, podemos observar que a Matemática, muitas vezes, tem como objetivo principal a solução de problemas. Problemas estes, que não surgiram hoje, mas que se originaram em outros tempos e que tiveram uma grande importância histórica. É o caso do problema das Sete Pontes de Königsberg, que é considerado um problema de processo, cuja finalidade é desenvolver no aluno sua criatividade, iniciativa e espírito exploratório, levando a compreensão de conceitos importantes. Segundo Dante (2002), esse tipo de problema não está diretamente associado a um conteúdo específico e nem mesmo pode ser traduzido para linguagem matemática formal.

Problemas de processo, têm o objetivo de estimular a criatividade e o raciocínio do aluno, fazendo com que ele desenvolva suas próprias habilidades e técnicas de resolução. Habilidades essas que, como já citamos, estão presentes na resolução de problemas, podendo o estudante buscar suposições, classificar, codificar, comparar, desenhar projetos, etc.

O problema que selecionamos para trabalhar em sala de aula: as Sete Pontes de Königsberg, é um problema que envolve Topologia. A Topologia é um ramo da Matemática, sendo que seus principais conceitos podem ser estudados utilizando a metodologia resolução de problemas, pois a compreensão das idéias topológicas são fundamentais na construção da solução de determinados problemas. Assim algoritmos e contas passam a ser, neste caso, desnecessários.

Esta ramificação da Matemática, estuda algumas propriedades das figuras geométricas. O termo Topologia foi usado pela primeira vez em 1930, pelo matemático Solomon Lefschetz (de

origem Russa e pioneiro nas técnicas algébricas de topologia). Dentre suas contribuições nesta área destacou-se o estudo das transformações em determinados pontos fixos.

A Topologia começou com muita Geometria e pouca Álgebra, mas agora é muita Álgebra e pouca Geometria (BOYER, 1997). Está classificada dentro da Geometria e preocupa-se com as propriedades de figuras geométricas, onde não importa se o espaço dobra, diminui, ou de alguma maneira se deforma. As duas únicas exceções são que o espaço não pode se romper, criando uma descontinuidade e ainda, que dois pontos distintos não podem coincidir. A Geometria se ocupa de propriedades como a posição ou a distância absoluta de retas paralelas, porém a Topologia somente preocupa-se de propriedades como a posição relativa e a forma geral.

Os antigos conheciam alguns problemas, porém por não terem recursos suficientes para resolvê-los, estes eram qualificados como adivinhações ou simples problemas sem valor científico. Mas hoje, sabemos que são problemas topológicos, onde muitos deles já foram resolvidos matematicamente de maneira positiva ou negativa, isto é, para afirmar que um problema não possui solução é necessário que se demonstre o que não se pode encontrar (Vera, 1948).

O problema a seguir, pode ilustrar estes conhecimentos, segundo Karlson (1961): “Construíram-se três casas de campo, com um pombal, um poço e um galpão, para uso comum. Acontece, porém, que os proprietários desejavam estabelecer um trilho de acesso separado a cada uma dessas instalações comuns, de cada uma das casas, e nenhum desses caminhos deveria cruzar o outro. Como orientar os nove trilhos?”. O problema citado por Karlson (1961), é muito semelhante ao problema das três casas e dos três postes, também muito conhecido na

Matemática: “traçar nove caminhos que vão de cada casa a cada poste, de modo que nenhum dos caminhos se cruze”. Esses exemplos, podem ser observados de forma mais clara no esquema da figura 29.

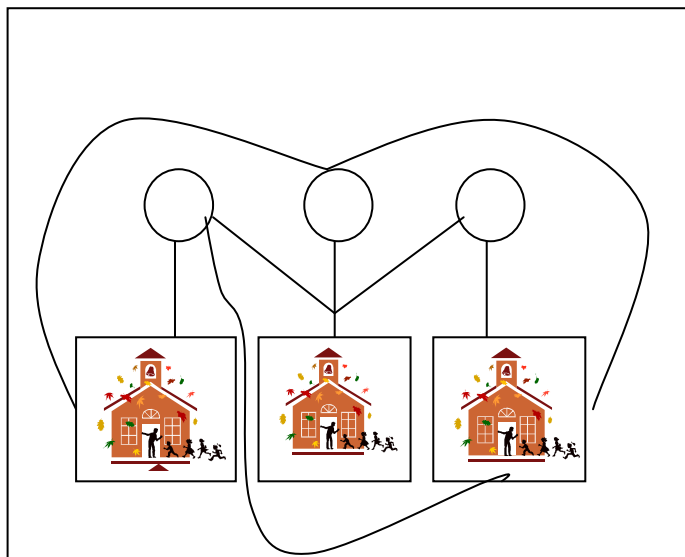


Figura 29: Esquema do problema das três casas e dos três postes

Buscamos com a atividade proposta desenvolver as habilidades referidas e, mais do que isso, tornar a Matemática mais próxima da realidade do aluno vinculando-a a problemas práticos do dia-a-dia, tornando a aula e a aprendizagem dos conceitos mais prazerosa, interessante e motivadora.

3.1.3 Seqüência didática para a solução do problema das Pontes de Königsberg

3.1.3.1 Um pouco de história



Figura 30- Mapa da região de Königsberg, atual Kaliningrado

A cidade de Königsberg junto ao Rio Pregel, ficou conhecida em Matemática devido ao famoso problema das Sete Pontes, resolvido pelo matemático suíço Leonhard Euler. Atualmente a referida cidade é chamada de Kaliningrado.

Na cidade de Königsberg nasceu o importante filósofo Alemão Immanuel Kant, de onde nunca saiu. Estudou na Universidade de **Kaliningrado**, criada em 1544. Aos 16 anos, ingressou no curso de teologia da universidade. Escreve os primeiros ensaios em 1755, influenciado pelos tratados de física de Newton e pelo racionalismo do filósofo Leibniz. A partir de 1760 distancia-se dessa corrente e declara-se seguidor da moral filosófica de Rousseau e em 1770 torna-se professor de lógica da Universidade de Königsberg. Sua principal obra, *Crítica da Razão Pura* (1781), aborda a oposição entre racionalismo e empirismo. Entre 1788 e 1790 escreve *Crítica da Razão Prática* e *Crítica do Juízo*, sobre a teoria do conhecimento. Influencia a geração de filósofos que o sucede, com a Escola do Kantismo e Idealismo.<Disponível em <http://www.prof2000.pt/users/miguel/grafos/tarf1e2.htm>> Acesso em: 25/10/03.

Outro acontecimento importante que marca a vida da cidade, cujo nome significa Montanha do Rei, é o fato de ela ter sido local de nascimento de Johann Muller (1436-1476), um dos maiores matemáticos do século XV, mais conhecido como *Regiomontanus*, uma latinização do nome de sua cidade natal (MELLO, 2003).

Regiomontanus, ainda bem jovem, estudou com Peurbach⁸ em Viena e mais tarde tomou a si a tarefa de completar a tradução do *Almagesto* iniciada pelo mestre. Traduziu, também, do grego, trabalhos de Apolônio, Herão e Arquimedes. Em seu livro mais famoso, *De Triangulis omnimodis*, escrito por volta de 1464, mas publicado postumamente em 1533, apresenta uma visão mais moderna da Trigonometria com dados tabelados de várias funções trigonométricas; trata-se da primeira exposição européia sistemática de trigonometria plana e esférica, em um tratamento independente da astronomia (EVES, 2002).

A importância dos conhecimentos em Astronomia de Regiomontanus, fez com que ele fosse convidado pelo papa Sixto IV para trabalhar na confecção de um calendário mais acurado do que vinha sendo utilizado pela igreja. Após a realização do trabalho, a gratidão do Papa foi tal que rapidamente o astrônomo se tornou seu principal conselheiro. Depois de um ano em Roma, ele faleceu, tendo sido anunciada como causa da sua morte uma infecção (MELLO, 2003).

⁸ Peurbach, matemático superior (1423-1463), ex aluno de Nicholas Cusa. Depois de ensinar Matemática na Itália, estabeleceu-se em Viena, fazendo da universidade local o centro matemático de sua geração. Ele escreveu uma aritmética, alguns trabalhos de astronomia e coligiu uma tábua de senos. A maioria de seus trabalhos só foram publicados depois de sua morte. Ele também iniciou uma tradução latina, a partir do grego, do *Almagesto* de Ptolomeu (EVES, 2002).

A cidade, fundada em 1255, foi a residência dos Duques da Prússia. Durante a Primeira Grande Guerra Mundial ela foi palco de sangrentas guerras entre Alemães e Russos, tendo ficado significativamente danificada pela Segunda Guerra Mundial.

Por acordo dos aliados na conferência de Potsdam (1945) a URSS anexou a cidade bem como os territórios circundantes. Em 1946 o nome da cidade foi mudado de Königsberg para Kaliningrad, em honra ao Líder Soviético, M. I. Kalinin. Em 1996 a população estimada era de 419 000 habitantes.

3.1.3.2 Problema: “As Sete Pontes de Königsberg”

Referindo-se ao problema que torna a cidade de Königsberg famosa, conta-se que, no século XVIII, havia sete pontes cruzando o rio Pregel, que banhava a pequena cidade universitária prussiana, hoje como já citado Kaliningrad, Rússia. Quatro delas ligavam as margens opostas a uma pequena ilha formada nesse rio, outras duas ligavam as margens opostas a uma outra ilha, próxima à primeira, e a última ponte ligava as duas ilhas, conforme a figura 31.

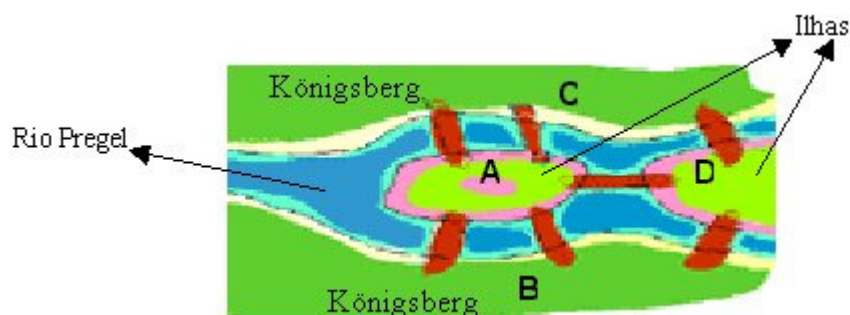


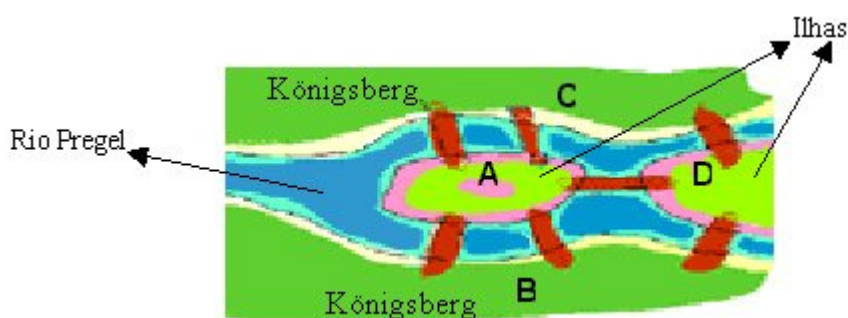
Figura 31- Passeio pelas Sete Pontes de Königsberg

Os habitantes de Königsberg costumavam passear na sua cidade nas tardes ensolaradas de Domingo, mas nunca tinham conseguido dar um passeio especial: **sair de casa, atravessar todas as pontes uma só vez e regressar a casa**. No entanto a dúvida quanto à possibilidade disso persistia.

Euler, em 1735, apresentou, com clareza, a solução ao passeio de Königsberg. Podemos deduzir sua conclusão, sobre a possibilidade ou impossibilidade de tal passeio, através de algumas atividades:

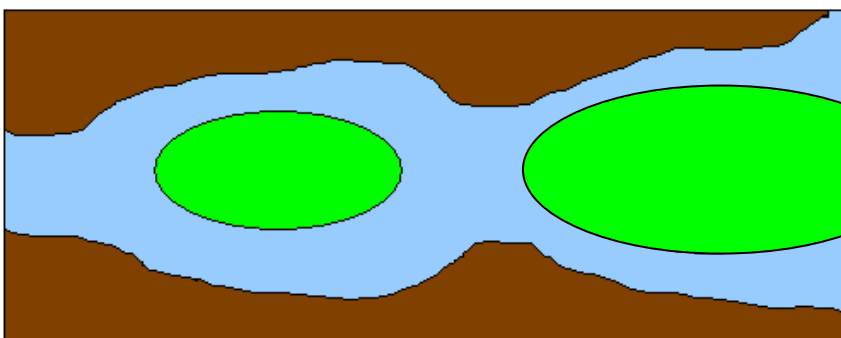
3.1.3.3 Atividades para a resolução do problema

- 1) Observe a situação, você consegue realizar o passeio sugerido pelos moradores da cidade de Königsberg?



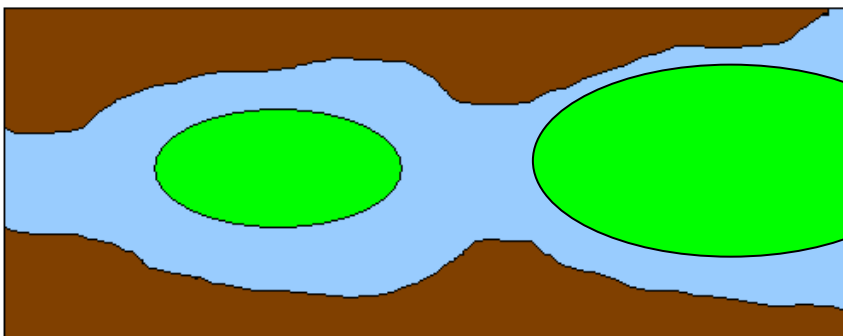
Conclusão:

- 2) Tente mudar uma das pontes de lugar. Assim o passeio se tornará possível?



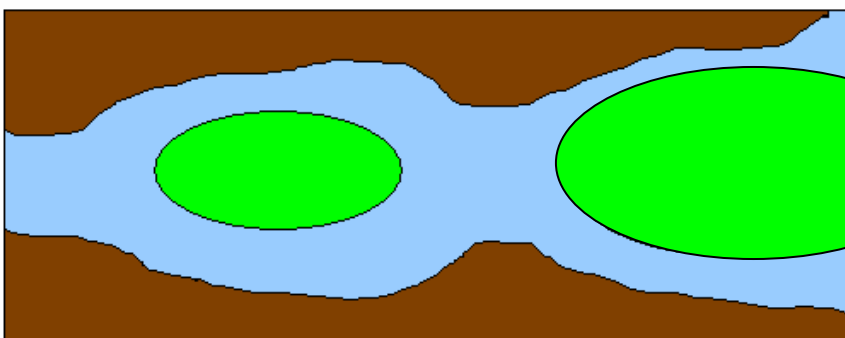
Conclusão:

3) E se retirar uma das pontes, o que acontece?



Conclusão:

4) Tente agora, retirar mais de uma ponte. O que acontece?



Conclusão:

Euler conseguiu provar uma solução definitiva ao problema. Apresentou à Academia de Ciências Russa de São Petersburgo um diagrama em que fazia a seguinte analogia: à terra, representada pelas duas margens, e às duas ilhas, associou quatro pontos; às sete pontes, associou sete linhas. O diagrama era algo parecido com o da figura abaixo:

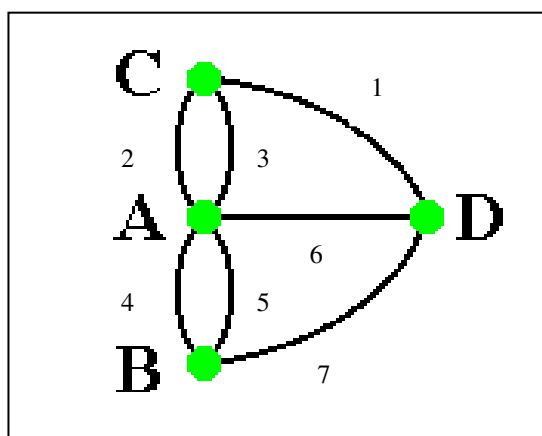


Figura 32: Diagrama de Euler

A, B, C e D são os pontos associados à terra, que é representada pelas duas margens e as duas ilhas (vértices).

1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 são linhas associadas às sete pontes.

Vértice A: 5 linhas

Vértice B: 3 linhas

Vértice C: 3 linhas

Vértice D: 3 linhas

Feita tal associação, o problema das sete pontes ficou restrito a traçar o diagrama descrito, com um movimento contínuo, sem levantar o lápis do papel e sem traçar uma linha mais de uma vez.

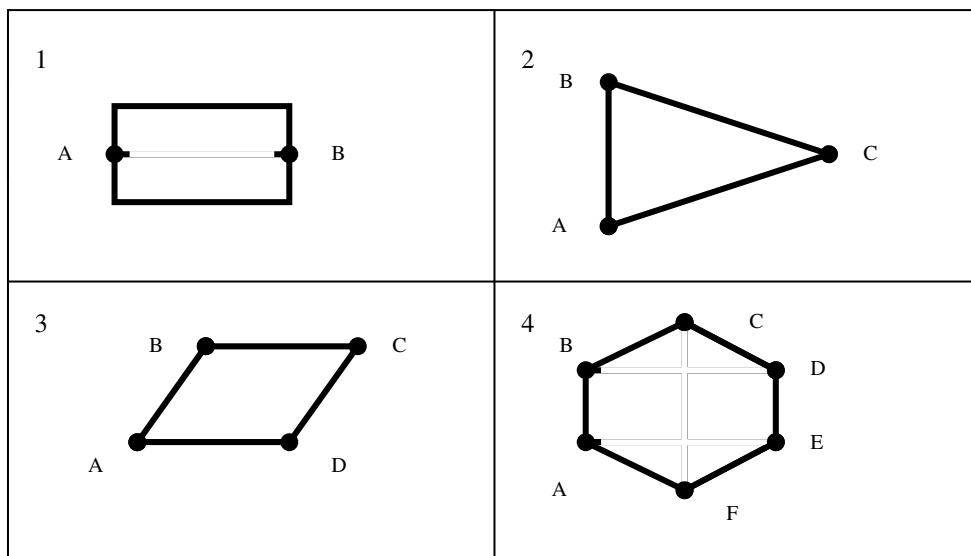
Um diagrama desse tipo é um esquema consistindo em um número finito de pontos chamados vértices, e num determinado número de linhas. Os vértices são as extremidades das linhas e nenhuma linha tem qualquer ponto comum com uma outra, exceto o vértice comum. Um vértice é par ou ímpar, conforme o número de linhas que o formam seja par ou ímpar. Um diagrama somente pode ser atravessado passando-se por todas as linhas exatamente uma vez.

Analisando a teoria de Euler, notamos que problemas deste tipo resumem-se em traçar diagramas saindo de um ponto e voltando a ele, sem levantar o lápis do papel. Você consegue concluir a solução que Euler apresentou?

Euler baseou-se em algumas descobertas que fez, podemos deduzi-las através de algumas questões:

Tente encontrar o caminho nos seguintes diagramas abaixo. Em seguida, tente tirar algumas conclusões:

Atividade 1:



Referente a atividade 1, complete com as informações solicitadas:

Gráfico 1:

a) Número de vértices:

b) Número de vértices pares:

c) Número de vértices ímpares:

Gráfico 2:

a) Número de vértices:

b) Número de vértices pares:

c) Número de vértices ímpares:

Gráfico 3:

a) Número de vértices:

b) Número de vértices pares:

c) Número de vértices ímpares:

Gráfico 4:

a) Número de vértices:

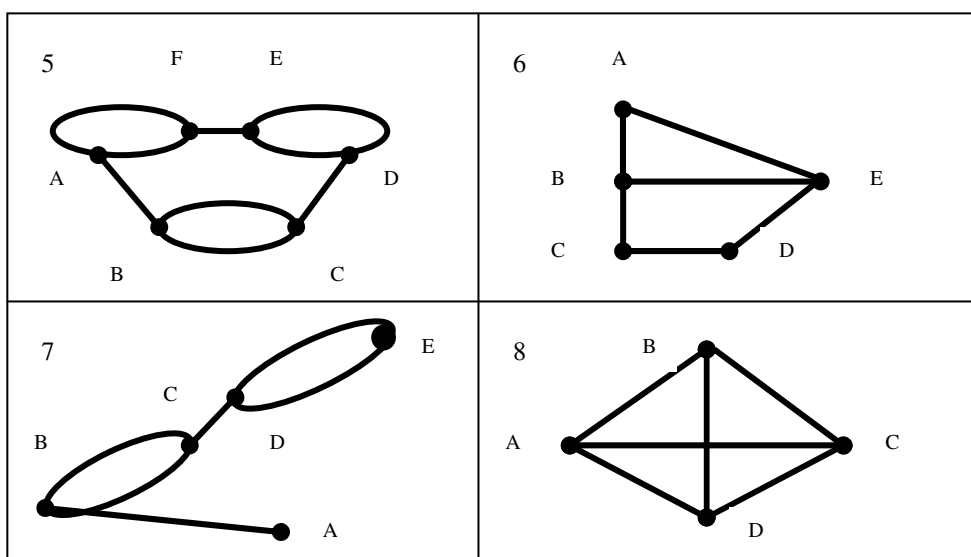
b) Número de vértices pares:

c) Número de vértices ímpares:

Agora, responda:

Partindo do ponto A, dos gráficos acima, você consegue voltar ao ponto de partida, passando por todos os vértices e uma única vez em cada caminho? Por quê?

Atividade 2:



Referente a atividade 2, complete com as informações solicitadas:

Gráfico 5:

a) Número de vértices:

b) Número de vértices pares:

c) Número de vértices ímpares:

Gráfico 6:

a) Número de vértices:

b) Número de vértices pares:

c) Número de vértices ímpares:

Gráfico 7:

a) Número de vértices:

b) Número de vértices pares:

c) Número de vértices ímpares:

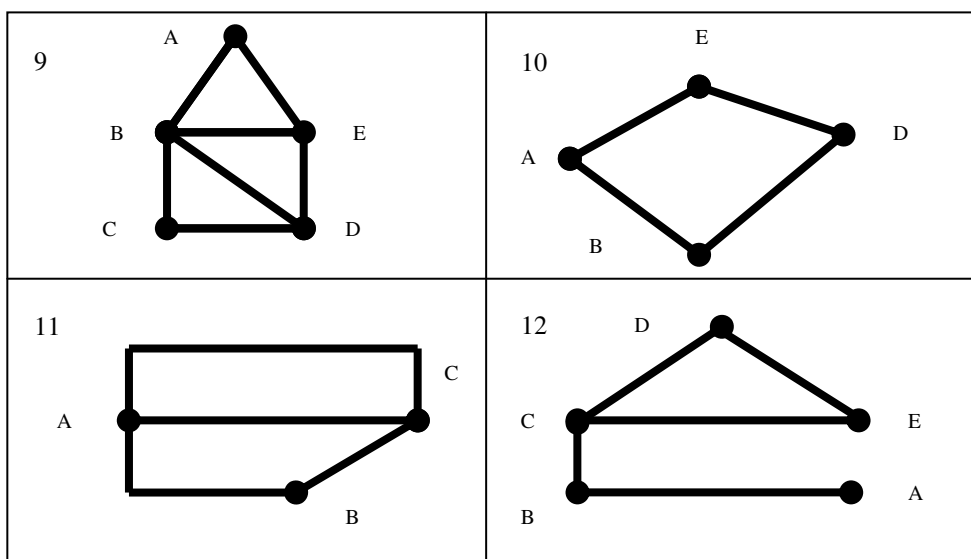
Gráfico 8:

a) Número de vértices:

b) Número de vértices pares:

c) Número de vértices ímpares:

Da atividade 2, o que você consegue concluir? Todos os gráficos são atravessáveis, ou seja, em todos, você consegue começar em A e terminar na origem?

Atividade 3:

Referente a atividade 3, complete com as informações solicitadas:

Gráfico 9:

a) Número de vértices:

b) Número de vértices pares:

c) Número de vértices ímpares:

Gráfico 10:

a) Número de vértices:

b) Número de vértices pares:

c) Número de vértices ímpares:

Gráfico 11:

a) Número de vértices:

b) Número de vértices pares:

c) Número de vértices ímpares:

Gráfico 12:

a) Número de vértices:

b) Número de vértices pares:

c) Número de vértices ímpares:

Referente a atividade 3, desenvolva algumas análises:

Gráfico 9:

Você consegue passar por todos os caminhos, sem repetir nenhum deles, começando pelo vértice A e terminando nele? Por quê?

Gráfico 10:

Você consegue passar por todos os caminhos, sem repetir nenhum deles, começando pelo vértice A e terminando nele? Por quê?

Gráfico 11:

Você consegue passar por todos os caminhos, sem repetir nenhum deles, começando pelo vértice A e terminando nele? Por quê?

Gráfico 12:

Você consegue passar por todos os caminhos, sem repetir nenhum deles, começando pelo vértice A e terminando nele? Por quê?

Agora, tente completar os espaços vazios, de acordo com as conclusões de Euler:

1. Se um diagrama contém somente vértices _____, ele pode ser atravessado começando e acabando no mesmo ponto.
2. Se um diagrama possui somente vértices _____, ele não pode ser atravessado.
3. Se um diagrama contém, no máximo, dois vértices _____, ele também pode ser atravessado, mas não é possível voltar ao ponto de partida.
4. Se o diagrama contém $2n$ vértices _____, onde n é um número inteiro qualquer, para atravessá-lo será necessário n passagens distintas por uma mesma linha.

Na figura inicial, os quatro vértices são todos ímpares, pois são extremidades de um número ímpar de linhas. Logo, não é possível fazer tal passeio.

3.1.3.4 Biografia de Leonhard Euler segundo Eves (2002); Boyer (1997); Struik (1987); Katz (1993);

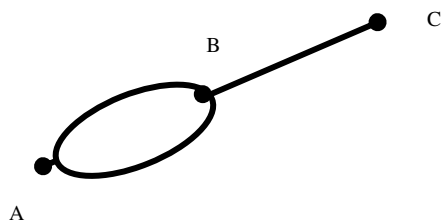
Leonhard Euler (1707 - 1783) foi considerado o maior matemático do século XVIII. Nasceu e cresceu perto de Basel e foi aluno de Johann Bernoulli. Tal como o filho deste, Daniel, Euler mudou-se para S. Petersburg em 1727, onde continuou os seus estudos e as suas investigações. Entre 1727 e 1741 e depois, entre 1766 e 1783, Euler foi membro da Real Academia de Ciências de S. Petersburg, criada por Catarina a Grande. Também entre 1741 e 1766 foi membro da Academia de Berlim.

Euler foi, sem dúvida, o matemático mais importante do seu tempo. A sua obra estende-se ao longo de mais de 70 volumes e abarca todas as áreas da Matemática e ainda alguns campos da Matemática Aplicada. Um dos seus interesses especiais foi o da formulação em linguagem matemática de problemas da área da mecânica. Entre outros trabalhos, Euler identificou as condições para resolução das equações diferenciais de primeira ordem, em que utilizou com frequência séries de potências, desenvolveu a teoria da integração de fatores e deu a solução geral das equações lineares homogêneas de coeficientes constantes. Mais tarde, estendeu este último estudo às equações não homogêneas.

O trabalho de Euler é ainda mais digno se observarmos que aos 20 anos, ficou cego de um dos olhos e que, durante os últimos 17 anos da sua vida, ficou completamente cego.

3.1.3.5 Exercícios:

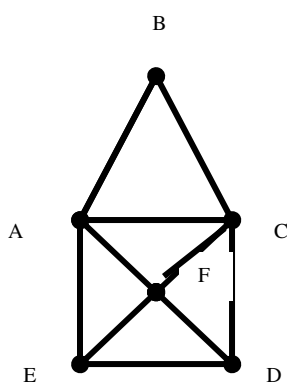
1)



No gráfico ao lado, você consegue percorrer o caminho, sem repeti-los, começando por C? Por quê?

Se ao invés de começar por C, começarmos por A, o que acontece? Através das conclusões anteriores, o que se pode afirmar sobre esta questão?

2)



O problema ao lado, tem solução? Descreva como solucionou o problema:

3.2 Análise dos dados da aplicação do experimento didático

A atividade “O problema das Sete Pontes de Königsberg” foi aplicada em 24 alunos de 8ª série do Ensino Fundamental da Escola Municipal Padre Antônio Vieira, na cidade de Eldorado do Sul, situada entre as cidades de Porto Alegre e Guaíba, no mês de outubro do ano de 2003.

A referida escola, trabalha com uma filosofia tradicional, conteudista e, de acordo com o depoimento de um professor que atua na escola, “[...] o trabalho dos professores é dificultado com relação a atividades diferenciadas”. Assim sendo eles não encontram espaço para propor uma metodologia diferenciada já que devem, em primeiro lugar, expor e vencer o conteúdo estipulado nos planos pedagógicos.

A referida escola tem boa infraestrutura; as salas de aula são limpas e arejadas, porém visualmente poluídas (figura 33), isto é, muitas gravuras e cartazes desnecessários (que não possuem referência alguma com os conteúdos trabalhados) no quadro e nas paredes das salas de aula. A comunidade em que está inserida a escola é muito carente, tanto, que alguns alunos fazem suas refeições no próprio estabelecimento que oferece a merenda escolar.



Figura 33: Escola de Ensino Fundamental Padre Antônio Vieira

A professora da turma em que foi aplicada a atividade, chama-se Márcia Bastos⁹, possui formação em Licenciatura Curta em Ciências e Matemática e atua somente no Ensino Fundamental, de 5^a a 8^a séries. Exerce função de professora de Matemática durante 20 horas do turno da manhã na escola e no turno da tarde trabalha na secretaria da mesma, totalizando 40 horas de trabalho no colégio. Possui mais de dez anos de experiência em sala de aula e atuou basicamente em escolas públicas durante este tempo.

Segundo afirmação de Márcia: *“Seu trabalho baseia-se na filosofia construtivista e tradicional, procurando fazer um trabalho integrado entre as duas formas de ensino”*. Sabemos que não podemos ter duas filosofias de trabalho, ou trabalha-se de forma tradicional ou de forma construtivista, porém, pelo depoimento da professora, entendemos que ela desenvolve seu trabalho de maneira tradicional, mas não tão rígida. Avalia seus alunos através da participação em aula, provas com e sem consulta e trabalhos individuais.

⁹ Autorizou a utilização de seu nome e imagem neste trabalho (anexo 3).



Figura 34: Professora de Matemática da turma

A turma de 8^a série, em que foi aplicada a atividade, era composta de 24 alunos, 10 meninas e 14 meninos, todos com idade média entre 14 e 15 anos. A atividade despertou muita curiosidade na turma, visto que o trabalho era diferente do que haviam feito durante o ano letivo e, segundo os alunos: “esta atividade os fazia sair da rotina”. Os alunos e a professora mostraram-se muito integrados, pois ao longo do trabalho ao surgirem às dúvidas, estas eram solucionadas pela professora com explicações extras individualmente.

O que mais chamou nossa atenção ao longo da aplicação da atividade, foi a surpresa dos estudantes em relação à situação temporal do problema. No momento em que o problema foi introduzido, a professora deu um breve relato sobre a Matemática e sua história. Em um de seus depoimentos explicou: “[...] *peçoal a Matemática não nasceu hoje, as idéias foram evoluindo com o tempo...*”, outro relato importante veio de um aluno: “*não sabia que a Matemática era tão antiga*”, ou ainda “*adorei trabalhar assim professora, esse problema faz a gente pensar*”.

Estes relatos nos mostraram que propostas de trabalhos e atividades diferenciadas, mesmo desvinculadas do conteúdo de sala de aula, podem render frutos positivos para a aprendizagem do estudante. Nossa atividade exemplificou de forma clara esses fatores positivos, pois apesar de ser um problema dissociado dos conteúdos, despertou curiosidade, motivou a turma e oportunizou aos alunos o desenvolvimento de técnicas e métodos de raciocínio, tornando a aula mais atrativa e mais próxima da sua realidade.



Figura 35: Turma em que aplicamos a atividade

A aplicação da atividade teve uma avaliação satisfatória, pois através da proposta observamos o interesse e a motivação dos estudantes pela aula de Matemática e comprovamos que é possível realizar um trabalho de integração entre professores e alunos, utilizando recursos da história da Matemática associados à resolução de problemas para auxiliar na aprendizagem dos estudantes.

O tempo de aplicação da atividade foi de dois períodos (2 horas/aula) e esta foi feita da seguinte forma: primeiramente a professora explicou a atividade à turma, pedindo que eles

fizessem os exercícios com calma e respondessem a todas as questões com seriedade, podendo ser individual ou em pequenos grupos. Em seguida distribuiu a atividade aos alunos e começou a leitura passo a passo junto com a turma.



Figura 36: turma iniciando a atividade

Ao iniciar a atividade, a professora demonstrou estar desconfortável, pois segundo seu depoimento: “*não estava habituada a trabalhar com atividades que utilizam a história da Matemática em suas aulas*”, mas em seguida expôs o trabalho à turma com clareza e objetividade.

A escola Padre Antônio Vieira está situada em Eldorado do Sul, como já referimos, e a cidade fica perto da Ilha da Pintada, um bairro de Porto Alegre. O bairro, como o próprio nome diz, é uma ilha que está ligada à outra ilha por meio de uma ponte de madeira, a chamada Ilha Mauá. Em sua explicação inicial, a professora fez referência a tal situação, já que para os alunos daquela comunidade essa era uma realidade conhecida. O que comprova o quanto podemos explorar a metodologia utilizada nesta atividade com situações da realidade. Dependendo da

realidade é possível retirar novos dados e compará-los até mesmo com práticas diárias, que foi o nosso caso.



Figura 37: A professora explicando a situação no quadro para a turma

Para reforçar a importância desse tipo de atividade nas aulas de Matemática, a professora afirmou que: “[...] os professores deixam de lado este tipo de trabalho por causa da cobrança imposta pela direção das escolas e perdem uma ótima oportunidade de desenvolver nos alunos o apreço pela disciplina e a motivação pelas aulas”. Em outro momento desabafou “[...] eu nem sabia que tinha tantos alunos pensantes. [...] vou fazer mais vezes esse tipo de coisa”.



Figura 38: A professora assessorando a turma

Informações dessa natureza nos fazem refletir sobre a prática diária das aulas de Matemática. Começamos a pensar que os alunos, muitas vezes, podem ter razão quando exprimem seu desprezo e angústia pelas aulas de Matemática. Somente por estes depoimentos já podemos considerar que nossa atividade teve um resultado muito positivo, visto que conseguimos sensibilizar a professora que aplicou a atividade para a utilização de tais recursos em sala de aula.

Outro motivo que nos faz valorizar a atividade, é a reação dos estudantes em relação ao estudo. Toda turma demonstrou-se interessada e motivada na aula e aqueles que não demonstraram nenhuma atitude positiva durante o ano letivo, para surpresa da professora, ficaram atentos ao trabalho. A professora durante a atividade comentou com a turma: “[...] até o João¹⁰ está trabalhando e o que é mais importante, tirando dúvidas”. Nessa perspectiva, os aprendizes desenvolveram estratégias e métodos de raciocínio e, sem perceber, estavam trabalhando na aula de Matemática de maneira prática e prazerosa, fazendo com que nós atingíssemos nosso maior objetivo: auxiliar no ensino e aprendizagem dos alunos da turma na Escola Padre Antônio Vieira.

Em relação a metodologia resolução de problemas, afirmamos no decorrer do trabalho, que o ensino através da resolução de problemas, proporciona aos alunos uma visão mais prática e real da disciplina e, além disso, possibilita ao estudante desenvolver suas próprias capacidades e habilidades para solucionar um problema. O desenvolvimento das habilidades são evidentes na resolução de problemas e segundo Vilella (1998), a metodologia é capaz de desenvolver no estudante estratégias de pensamento muito claras. Isso foi comprovado na aplicação da atividade, pois observamos o quanto nossos alunos desenvolveram tais capacidades. Dentre as capacidades

¹⁰ Nome fictício dado ao aluno.

desenvolvidas, as mais evidentes foram: a busca de suposições, quando receberam a atividade e tentaram incessantemente encontrar uma saída para o exercício, a codificação, quando transformaram idéias soltas em elementos concretos e com significado, a comparação, quando interagiram com os colegas, a observação e a interpretação quando coletaram e organizaram os dados obtidos. Observamos a manifestação dessas estratégias desde o primeiro momento da realização da atividade, pois neste momento inicial a turma já estava organizando a sua própria forma de agir e de se expressar. Apesar de terem muita dificuldade em concretizar seus pensamentos de forma escrita (anexo 4), oralmente mostraram-se capazes e satisfeitos com a resolução do problema.

Sendo assim, a atividade proposta foi muito positiva, pois além de unir dois recursos importantes para o ensino e aprendizagem da Matemática, a história e a resolução de problemas, motivou e incentivou os estudantes ao estudo da disciplina, reforçando nossas idéias iniciais de que o ensino deve estar contextualizado, de forma a mostrar para o aluno o lado prático e real da Matemática. Em um artigo intitulado “o uso da história da matemática em sala de aula”, Ferreira apud Mendes (2001) considera que a utilização da história como recurso didático é imprescindível, pois vai além de um mero elemento motivador nas aulas de Matemática, isto é, constitui-se em um fator justificante para os porquês conceituais e teóricos da Matemática que devem ser aprendidos pelos estudantes. Se aliarmos a essa idéia a metodologia resolução de problemas, seremos capazes de agregar dois importantes recursos do ensino, contextualizando as idéias matemáticas em situações reais e em práticas diárias dos estudantes.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo teve, como principal objetivo, mostrar a importância de trabalhar com a história da Matemática em sala de aula, bem como, seus fatores positivos no ensino e aprendizagem da disciplina. Para isso, aliamos a história à metodologia resolução de problemas, que é uma importante ferramenta para utilização em sala de aula. Verificamos que a resolução de problemas não deve, então, constituir-se de experiências que tenham caráter repetitivo, por meio de aplicações dos mesmos problemas, com outros números, resolvidos pelas mesmas estratégias. É interessante que os alunos resolvam diferentes problemas através de uma mesma estratégia e utilizem diferentes estratégias para resolver um mesmo problema. Juntamente com essa idéia, verificamos que trabalhar com a história da Matemática em sala de aula é um poderoso recurso que deve ser utilizado nas aulas, visto que é através dela que o estudante descobre as idéias originais dos conteúdos e, mais do que isso, a história é capaz de desmistificar a Matemática, ou seja, é capaz de mostrar para os estudantes que a Matemática é uma ciência que não nasceu hoje e principalmente, que ela possui uma razão maior para existir e que foi a necessidade humana que a fez surgir.

Dentro desta abordagem, ao elaborarmos a pesquisa que evidenciava a opinião dos professores com relação a seus conhecimentos em história da Matemática, percebemos uma grande dificuldade em seu trabalho: a falta de material de apoio na área. Muitos deles, apesar de não possuírem conhecimentos em história, demonstraram interesse em conhecer, pois entendem que este é um bom recurso de trabalho. Assim, propomos uma seqüência didática para utilização em sala de aula como sugestão. A aplicação da atividade teve um saldo muito positivo, pois conseguimos alcançar nosso principal objetivo: melhorar a qualidade do ensino da Matemática na sala de aula e torná-lo mais significativo para o aluno, com uma atividade que envolveu e motivou todos os alunos da turma.

Porém, podemos apontar uma grande dificuldade para que este tipo de trabalho seja realizado pelos professores. Antes da aplicação da proposta propriamente dita, foi necessário dedicar um bom tempo de nosso estudo para a investigação do problema. Foram seis meses de leituras sobre o problema das Sete Pontes de Königsberg. Por se tratar de um problema histórico, foi preciso pesquisar suas origens, bem como fontes históricas que comprovassem a existência do problema. Além disso, por essa situação estar em livros extremamente antigos, tivemos que estudar a linguagem daquela realidade, bem como sua resolução, para que pudéssemos realmente entender qual seria sua aplicabilidade na sala de aula e desenvolver uma seqüência didática adequada para a aplicação em sala de aula.

Desta forma, chegamos à conclusão de que os professores não dispõem deste tempo para pesquisa, o que comprova uma falha em nosso ensino, pois os mestres deveriam ter mais tempo para dedicar-se ao estudo e pesquisa antes de levar uma atividade para sala de aula. Mas acreditamos, também, que isso não deve ser motivo suficiente para que não haja empenho por

parte dos professores em melhorar e aperfeiçoar seus conhecimentos, com a finalidade de auxiliar no ensino dos conteúdos e tornar a aprendizagem mais significativa para os alunos.

É muito importante que o professor prepare seus alunos para lidar com situações novas, quaisquer que sejam elas. E, para isso, é fundamental desenvolver neles iniciativa, espírito explorador, criatividade e independência. E através da metodologia resolução de problemas, associada à história da Matemática, podemos encontrar um forte aliado para desenvolver nos estudantes estas características.

Para tanto, o professor deve propor aos alunos alguns problemas que admitem muitas respostas ou soluções e outros que admitem uma única resposta, mas que podem ser resolvidos por meio de várias estratégias de pensamento e mais que isso, se contextualizados, estes problemas são capazes de explicar os por quês matemáticos existentes na cabeça da maioria dos estudantes e, também, motivá-los com relação à disciplina, fazendo-os perceber que a Matemática é uma ciência viva que não depende somente da memorização de fórmulas e algoritmos, na maioria das vezes, descontextualizadas e sem sentido.

Desse modo, esperamos com este trabalho, estar contribuindo efetivamente para entusiasmar os alunos no estudo da Matemática, ajudando-os na busca de uma compreensão maior e melhor do mundo em que vivem através da história, desenvolvendo o espírito criativo, o raciocínio lógico e o modo de pensar matemático através da metodologia resolução de problemas.

Esperamos, também, estar apresentando aos professores de Matemática uma atividade didática que encontre bons resultados ao ser desenvolvida e que pode ser aplicada em alunos de 8ª séries do Ensino Fundamental e 1ª série do Ensino Médio.

OBRAS CONSULTADAS

ALMEIDA, Manoel Campos. *Origens da Matemática*. Curitiba: Champagnat, 1998.

ANDRADE, S. *Ensino – aprendizagem de Matemática via resolução, exploração, codificação e decodificação de problemas*. Rio Claro: UNESP, 1998. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, 1998.

ANGLIN, W.S. *Matemática e História*. The Mathematical Intelligencer. Vol. 14, n.4, 1992, p. 6-12.

BICUDO, Maria A. V. (org.). *Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas*. São Paulo: Unesp, 1999.

BILLY, M. *et al.* Entre situation didactique: regard de l'élève technicien? Reperes- IREM, n° 19, AVRIL Tópiques éditions, 1995.

BOYER, Carl. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blücher LTDA, 1997.

BYERS, Victor. Por que estudar a História da Matemática? **Journal Mathematics Education**, 1982, vol. 13, p. 59-66.

COSTA, Nielce M. Lobo. A história da Trigonometria. **Revista da SBEM**, ano 10, São Paulo, n° 13, p. 60-69, março, 2003.

CHARNAY, R.. *Aprender (por meio de) la resolución de problemas*. Didática de las matematicas Aportes e reflexiones. Argentina: Paidós Educador, 1996.

_____. Cecília Parra e Irmã Saiz (Org). *Aprendendo com a resolução de problemas*. Didática da Matemática: Reflexões Psicopedagógicas. Artes Médicas: Porto Alegre, 1996.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. *A História da Matemática: Questões historiográficas e políticas e reflexos na Educação Matemática*. In: Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas, 1999: 97-115.

DANTE, Luis Roberto. *Didática da resolução de problemas de Matemática*. São Paulo: Ática, 2002.

_____. Uma proposta para mudanças nas ênfases ora dominantes no Ensino da Matemática. **Revista do Professor de Matemática – SBEM**, v.6, 11-20, 1985.

_____. *Didática da Resolução de Problemas de Matemática*. São Paulo: Ática, 1991.

DEWDNEY, A.K. *20.000 Léguas Matemáticas: um passeio pelo misterioso mundo dos números*. Traduzido por Vera Ribeiro. Rio de Janeiro: Jorge Zahar ed, 2000.

DINIZ, Maria Ignez de Souza. A metodologia Resolução de Problemas. **Revista do Professor de Matemática- SBEM**, n.º18, 1999.

DINIZ, Maria Ignez, SMOLE, Kátia Stocco. *Ler, escrever e resolver problemas – Habilidades básicas para aprender matemática*. Porto Alegre: Artmed, 2001.

DOMINGUES, Hygino. O pequeno teorema de Fermat e as dízimas periódicas. **Revista do Professor de Matemática- SBEM**, n.º52, 55-67, 2003.

EVES, Howard (trad. Hygino H. Domingues). *Introdução à História da Matemática*. São Paulo: Unicamp, 2002.

FERREIRA, Eduardo Sebastiani. *O uso da História da Matemática nas aulas de cálculo*. Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática. Sérgio Nobre ed. São Paulo, 1997.

FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. *Novo dicionário Brasileiro da Língua Portuguesa*. São Paulo: Melhoramentos, 1973.

FOSSA, John A. *Ensaio sobre Educação Matemática*. Série Educação n.º 2. Belém do Pará: UEPA, 2001.

FURIÓ, Carlos José. *Contribución de la resolución de problemas como investigación al paradigma constructivista de aprendizaje de las ciencias*. Investigación en la escuela. La didáctica de las ciencias en Europa. n.º 24, 1994.

GARBI, Gilberto G. *O Romance das equações algébricas- A história da álgebra*. São Paulo: Makron Books, 1997.

GIL, D.; FURIÓ, C; VALDÉS, P.; SALINAS, J.; MARTÍNEZ-TORREGROSA, J. ; GUIASOLA, J.; GONZÁLEZ, E.; DUMAS-CARRÉ, A.; GOFFARD Y M. - ¿Tiene sentido seguir distinguiendo entre aprendizaje de conceptos, resolución de problemas de lápiz y papel y realización de prácticas de laboratorio? - **Enseñanza de las Ciencias**. v. 17, n.º 2, junio, 1999.

GOLBERT, Clarissa S. *Novos rumos na aprendizagem da Matemática: conflito, reflexão e situações problemas*. Porto Alegre: Mediação, 2002.

GONZALEZ, F. Transcendência de la Resolucion de Problemas en Matemática. **Paradigma**, VII (1/2), 1987.

_____. *La Investigación en Educacion Matemática: Una Revision Interesada. Conferência Pronunciada en las Primeras Jornadas de Reflexión sobre enseñanza de la Matemática. Valencia, 1993.*

GUELLI, Oscar. *Contando a História da Matemática*. n° 5. 'São Paulo: Ática, 2002.

GROENWALD, Claudia Lisete Oliveira. A Matemática e o desenvolvimento do raciocínio lógico. **Educação Matemática em Revista – SBEM**. 23-30, Porto Alegre, 1999.

HOZ, Victor Garcia. Matemáticas e Resolucion de Problemas. *La enseñanza da las matemáticas en la educacion intermedia*. Madrid: RIALP, S.A., 1994.

FILHO, José Camilo; GAMBOA, Silvio Sanches. *Pesquisa Educacional*. São Paulo, Cortez: 2002.

KARLSON, Paul. *A magia dos Números*. Rio de Janeiro, Globo: 1961.

KATZ, Victor J. *A History of Mathematics - an introduction*. Harper Collins College Publishers, New York: Harper Collins College Publishers, 1993.

KILPATRICK J. *Que es problema?. Solución de problemas. Tradução e adaptação H. C. Esteves para uso Del CENAMEC durante o 2º. Encuentro Nacional de Profesores de Didáctica de la Matemática, Caracas: 1982.*

LAVADO, Nuno. O tio Petro e a Conjectura de Goldbach. **Educação Matemática em Revista**. n° 68, 2002.

LINTZ, Rubens G. *História da Matemática*. Blumenau: FURB, 1999.

MANCERA, Eduardo. *Saber Matemáticas es saber Resolver Problemas*. México: Iberoamérica, 2000.

MARINCEK, Vânia. *Aprender Matemática resolvendo problemas*. Porto Alegre: ARTMED, 2001.

MEDEIROS, Kátia Maria. O contrato didático e a resolução de problemas matemáticos em sala de aula. **Educação Matemática em Revista**. Porto Alegre: SBEM, ano 8, n° 9/10, 2001.

MELLO, José Luis Pastore. A Trigonometria e um antigo problema de otimização. **Revista do Professor de Matemática**, n. 52, p. 29-32, novembro, 2003.

MENDES, Iran Abreu. *História no ensino da Matemática*. Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro. Portugal: 2000.

_____.(b) *Ensino da Matemática por atividades: Uma aliança entre o construtivismo e a história da Matemática*. Natal: UFRN, 2001. Tese de doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Sociais e Aplicadas, 2001.

_____. (a) *O uso da História no Ensino da Matemática*. UEPA, Belém do Pará: 2001.

MINISTÉRIO de Educação e do Desporto, Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) – Matemática –Terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental- Brasília, 1998.

MINISTÉRIO da Educação e Desporto. Diretrizes Curriculares para cursos de Licenciatura em Matemática. Brasília: março de 1999.

NASSER, Lílian. Um problema: resolução e exploração. **Revista do Professor de Matemática**. Rio de Janeiro: UFRJ, n° 15, 1999.

NETTO, Paulo Oswaldo Boaventura. *Grafos, Teoria, modelos e algoritmos*. São Paulo: Edgard Blücher LTDA, 1996.

NOBRE, Sérgio. *A Pesquisa em História da Matemática e suas relações com a Educação Matemática*. In: Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas, 1999, São Paulo. Anais. UNESP, p.129-136.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. *Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas*. In: Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas, 1999, São Paulo. Anais. UNESP, p. 199-218.

OZÁMIZ, Miguel de Guzmán; PÉREZ, Daniel Gil. *Enseñanza de las ciencias y la matemática: tendencias e innovaciones*. Madrid: IBER cima, 1993.

PERERO, Mariano. *Historia e Historias de Matemáticas*. Nápoles: Iberoamérica, 1994.

PERRENOUD, P. *Construir as competências desde a escola*. Traduzido por Bruno Magne. Porto Alegre, Artmed, 1999.

PIRES, Célia Maria Carolino. *Currículos de Matemática: Da organização linear a idéia de rede*. São Paulo: FTD, 2000.

POLYA, George. *A arte de resolver problemas*. Traduzido e adaptado por Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciências, 1995.

_____. *Mathematical Discovery: On Understanding, Learning and Teaching Problem Solving*. New York: John Wiley & Sons, 1945.

POZO, Juan. *A solução de Problemas: Aprender a resolver, resolver para aprender*. Porto Alegre: ARTMED, 1998.

_____. *Teorias Cognitivas da Aprendizagem*. 3 ed. Porto Alegre: Artes Médicas, 1998.

RABELO, Edmar Henrique. *Textos Matemáticos*. 3 ed. Petrópolis: Vozes, 2002.

ROSSO, A. & BECKER, F. A produção do conhecimento e a ação pedagógica. **Educação e Realidade**. Vol. 23, nº 2, 1998.

SACRISTÁN, J.; Gimeno, GOMÉZ Perez. *Compreender e transformar o ensino*. 4 ed. Porto Alegre: Artmed, 1998.

SESTIER, Andrés. *História de lãs Matemáticas*. México: LIMUSA, 2001.

SINGH, Simon. *O último teorema de Fermat*. Rio de Janeiro: Record, 2000.

STANIC, G. & KILPATRICK J. *The teaching and assessment of Mathematical Problem Solving*. Reston, NTCM e Lawrtence Erlbaum, 1989.

SWETZ, Frank J. Buscando relevância? Tente a História da Matemática. Pennsylvania: State University, 1984.

STRUIK, Dirk. *História Concisa das Matemáticas*. Traduzido por João Cosme dos Santos Guerreiro. Lisboa: Gradiva, 1987.

TAYLOR, S. J. & BOGDAN, R. *Qualitative research. Educational Researcher*, 1984, 13 (10), 5-10.

TAHAN, Malba. *O homem que calculava*. São Paulo: Círculo do livro, 1984.

TENREIRO, Celina. *O pensamento crítico na Educação científica*. Lisboa: Instituto Piaget, 1997.

_____. Resolução de Problemas e pensamento crítico em torno das possibilidades de articulação. **Revista da Associação dos Professores de Matemática**. Lisboa, 2001.

UPINSKY, Arnaud-Aaron. *A perversão Matemática: o olho do poder*. Traduzido por Antônio Ribeiro de Oliveira. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1989.

VALDÉS, Juan E. Nápoles. *La Historia como elemento unificador em lá Educación Matemática*. Argentina, 2002 (texto digitado).

VÁZQUEZ, Modesto Sierra. Et al. *Divisibilidad*. Madrid: Sintesis, 1989.

VERA, Francisco. *Breve História de la geometria*. Buenos Aires: Losada S.A., 1948.

VIANNA, Carlos Roberto. *Matemática e História: Algumas relações e implicações pedagógicas*. São Paulo: Universidade de São Paulo, [s.d.] Dissertação de Mestrado, Faculdade de Educação, [s.d.].

VILLELLA, José. *¡ Piedra libre para la Matemática! Aportes y reflexiones para una renovación metodológica em la E.G.B.* AIQUE, Argentina: 1998.

HOME PAGES CONSULTADAS

1- História da matemática e museus - UFRGS

<http://www.athena.mat.ufrgs.br>

2- Só Matemática

<http://www.somatematica.com.br>

3- Gráfos

<http://www.prof2000.pt/users/miguel/grafos/tarf1e2.htm>

4- Grandes vultos da Matemática

<http://www.terravista.pt/enseada/1524/histo.html>

5- Seminários de História e Educação Matemática

<http://www.ime.unicamp>

ANEXOS

ANEXO 1

ANEXO 2

ANEXO 3

ANEXO 4