PRISCILA GABRIELE PETRY

O USO DE SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS NA EVOLUÇÃO CONCEITUAL DE FRAÇÕES

Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Luterana do Brasil, Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação.

Orientador: Renato Pires dos Santos

Canoas

2008

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela oportunidade e capacidade de estudar e aprender.

À minha mãe pelo apoio e incentivo em todos os momentos.

Ao professor Doutor Renato Pires dos Santos, orientador da dissertação, pela sabedoria e paciência.

Aos professores-doutores Agostinho Serrano de Andrade Neto, Carmen Teresa Kaiber, Ocsana Danyluk, pela participação na Banca Examinadora e pelas sugestões que foram pertinentes e proveitosas para a evolução do trabalho.

Ao professor Silvio Luiz Martins Britto e ao Instituto Sinodal Dorothea Schäfke pela disponibilidade e ajuda com a investigação.

Aos demais professores e colegas do Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da ULBRA, pelo companheirismo e amizade.

RESUMO

Encontramos em nossas salas de aula muita dificuldade por parte dos alunos em assimilar conceitos relacionados a frações. O simbolismo usado não está claro para os estudantes, que operam, muitas vezes, mecanicamente com os algoritmos, ou então, criam suas próprias formas de resolução, apropriando-se, para isso, de esquemas trazidos muitas vezes das operações realizadas com números naturais. Por outro lado, temos o crescente uso da informática, que tem se mostrado uma das mais promissoras tendências metodológicas no ensino de Matemática. Dentro desta ferramenta metodológica, destacam-se as simulações computacionais, que se diferenciam de outros softwares por proporcionar uma maior interatividade, pois ao usá-la o aluno pode ver resultados instantâneos, testar suas hipóteses e tirar suas conclusões. As simulações permitem o estudo de condições que na prática seriam difíceis e, às vezes até mesmo inviáveis de serem realizadas em sala de aula ou em um laboratório didático. Isso, aliado ao grande interesse dos estudantes pelos microcomputadores, pode, a princípio tornar mais eficiente e agradável o processo de aprendizagem. Surge então o questionamento: Podem as simulações computacionais auxiliar também na evolução conceitual do ensino de frações? Com o intuito de responder a essa questão, simulações computacionais abordando conceitos relacionados a frações foram aplicadas em uma turma de alunos de 7ª série, com o uso da técnica POE, onde o estudante, antes de usar a simulação, prediz o que irá acontecer, verifica ou não sua hipótese, ao usar a simulação, e por fim explica o ocorrido. Para avaliar se essas aplicações foram de fato significativas aplicou-se também um pré e um pós-teste, não só na turma experimental, mas também em outra turma de 7ª série, que teve concomitantemente aulas abordando frações de forma tradicional, com aulas expositivas/dialogadas, para que pudéssemos comparar o rendimento das duas turmas. Tendo em mãos as notas dos testes, a análise dos dados foi feita e verificamos que, de fato, a turma que recebeu as aplicações das simulações teve uma aprendizagem mais significativa que a outra turma, tendo uma evolução conceitual também nos conceitos relacionados a frações que não foram abordados diretamente nas simulações usadas. Assim, respondemos nossa questão de estudo positivamente, as simulações computacionais auxiliaram na evolução conceitual de frações.

Palavras-chave: Simulações computacionais, Frações, Concepções Alternativas.

ABSTRACT

In our classes, students find a lot of difficulties to assimilate concepts related to fractions. The symbolism that is used is not clear for the students who very often do operations, with algorithms mechanically, or even, create their own ways of resolution, and for that they sometimes take schemes brought from operations done with natural numbers. On the other hand, there is an increasing use of informatics, which is being shown one of the most promising methodological tendencies in mathematics teaching. Within this methodological tool, the computational simulations are accentuated, and become different from other software because it offers a bigger interactivity, and when the student uses it, he is able to realize instantaneous results, to test his hypothesis and even take his own conclusions. The simulations let the study of conditions that would be quite difficult from the practical point of view and, sometimes infeasible of being done in classroom or in a didactical laboratory. And this, associated to the students´ big interest to computers, can first of all become the learning process more efficient and pleasant. Here comes the question: Can computational simulations also help in conceptual evolution of fractions teaching? In order to answer this question, it was applied computational simulations dealing with concepts related to fractions in a group of seven-grade students, with the use of POE technique, when the student, before using simulation, predicts what is going to happen, checks his hypothesis and finally explains what has happened. To evaluate if these applications were meaningful, it was also done a pretest and a posttest, not only in an experimental group but also in another seven-grade group that concurrently has classes about fractions on a traditional teaching way and expositive/dialogued classes in order of being able to compare both group's performance. The analysis was done by the grades of the tests, and it was verified that, in fact, the group of students, which had received the applications of simulations, had a more expressive apprenticeship than the other group. And this first group showed also a conceptual evolution on concepts related to fractions that were not directly dealt with the used simulations. Thus, our question of study was positively answered, in other words, the computational simulations helped in the conceptual evolution of fractions.

Key words: Computational simulations; Fractions; Alternative conceptions.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Há muitos estudantes com dificuldades de aprendizagem com relação a frações. Muitos destes chegam ao Ensino Médio e até mesmo ao Ensino Superior com concepções confusas a respeito das frações. Em outras áreas do ensino também há dificuldades, mas em frações essas dificuldades chegam a ser tantas que há quem sugira que o seu ensino deva ser deixado de lado, passando-se a abordar os números racionais apenas na sua forma decimal.

No entanto, sabemos que, ao lidar efetivamente com frações, o aluno se capacita para lidar com problemas do mundo real e tem uma rica arena onde suas estruturas mentais podem evoluir para um desenvolvimento intelectual contínuo. Além disso, sua compreensão fornece as bases nas quais as operações algébricas podem se basear mais tarde (BEHR *et al.*, 1983).

Diante disso, muitos trabalhos e pesquisas têm sido feitos com o intuito de dar subsídio para professores trabalharem este conteúdo da melhor forma possível, possibilitando assim, que os estudantes tenham uma melhor compreensão dos números racionais. Este grande número de trabalhos nos possibilitou esta investigação.

Tendo em mãos vários resultados de pesquisas que geraram artigos, dissertações e teses que tinham como objeto de estudo os números fracionários, buscamos identificar Concepções Alternativas em frações, concepções que não estão de acordo com as concepções científicas e que se mostram resistentes a mudanças, impedindo assim um bom progresso cognitivo dentro deste objeto de estudo.

Além das Concepções Alternativas em frações, nossa pesquisa buscou simulações computacionais que abordassem este assunto e pudessem assim promover uma evolução conceitual em frações através do uso das mesmas, reduzindo as concepções alternativas que se mostravam presentes na conceitualização dos números fracionários nos estudantes.

As simulações computacionais têm se destacado como uma forte ferramenta metodológica, dentro das novas tecnologias usadas em sala de aula, no que diz respeito ao desenvolvimento cognitivo, superando Concepções Alternativas. Muitas pesquisas mostram isso, especialmente na área da Física, mas também na Matemática foram encontradas pesquisas que mostram bons resultados com o uso dessa ferramenta.

Durante as pesquisas, encontramos vários applets que abordavam frações. Alguns destes eram apenas jogos, exercícios, demonstrativos, porém alguns se enquadravam dentro das simulações computacionais. Estes não foram construídos com vistas a trabalhar Concepções Alternativas, mas consideramos que poderiam ser úteis para nossa pesquisa.

Com as concepções alternativas e as simulações computacionais que abordavam as mesmas em mãos, passou-se à investigação com o intuito de verificar se também dentro das frações as simulações computacionais poderiam auxiliar na evolução conceitual.

Nos capítulos desta dissertação traremos inicialmente, no primeiro capítulo, nosso objeto de estudo, a justificativa, a problematização e os objetivos. Seguiremos, no segundo capítulo, abordando a fundamentação teórica, com base nos três pilares desta pesquisa: frações, com sua história e história do seu ensino, bem como fazendo uma análise do ensino de frações atualmente; concepções alternativas, abordando o que são concepções alternativas, como são vistas na Física, e como trabalharemos com as mesmas dentro da Matemática neste trabalho, detalhando também as concepções alternativas em frações identificadas; e simulações computacionais, trazendo primeiramente um pouco do estudo do uso de novas tecnologias e da informática na sala de aula e em seguida abordando as simulações computacionais no ensino. Em seguida, no terceiro capítulo, detalharemos a metodologia adotada para o desenvolvimento desta investigação. E por fim, no quarto capítulo, os resultados da pesquisa, juntamente com uma análise dos mesmos, seguidos das conclusões e perspectivas para futuras investigações na área.

Esperamos que esta investigação possa contribuir para que o processo de ensino e aprendizagem de frações se torne mais agradável e mais efetivo, dando suporte para professores trabalharem e servindo como base para futuras investigações e discussões nesta área, bem como no ensino de Matemática como um todo.

1 OBJETO DE ESTUDO

Delimitaremos nosso objeto de estudo, trazendo inicialmente a justificativa, a problematização e por fim os objetivos desta investigação.

1.1 JUSTIFICATIVA

A justificativa deste trabalho pode ser expressa em dois tópicos, abordando a dificuldade apresentada pelos estudantes em assimilar conceitos relacionados a frações e, por outro lado, o crescente uso da informática como ferramenta metodológica, como veremos a seguir.

1.1.1 A Grande dificuldade na aprendizagem de frações

Que professor nunca se deparou com respostas do tipo: "$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{4}{6}$" ao corrigir atividades de seus alunos que passaram semanas estudando operações com frações? Ou ainda, como exemplifica Powell (1996, apud GOTTLIEB, 1999), mencionando um fato ocorrido, onde se pedia aos alunos que escrevessem uma fração que estivesse entre $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$, um aluno respondeu $\frac{2}{3}$. Confuso pela presteza da resposta, o professor pediu que ele justificasse o procedimento. O aluno fez da seguinte maneira: Os numeradores são 1 e 3. Entre eles está o 2. Os denominadores são 2 e 4, entre eles está o 3. Logo, a fração é $\frac{2}{3}$. Em verdade, o aluno não errou, não deu uma resposta incorreta, no entanto foi um acaso, pois o procedimento usado pelo aluno não está correto. Além dessas, Niemi (1996) coloca que há muitas evidências de que estudantes de Ensino Fundamental e mesmo do Ensino Médio não compreendem frações como números, e particularmente não como números que representam uma relação quociente entre outros dois números.

É freqüente encontrarmos em livros didáticos divisões de figuras como frutas, pães e bolos no estudo de frações, associando a concepção parte-todo, é o caso também da pizza, exemplo clássico do ensino de frações (SILVA, 2005), no entanto, esta metodologia não tem sido suficiente pois, como foi citado, ainda temos muitas lacunas na aprendizagem de frações.

A fim de auxiliar na aprendizagem e construir um significado para o conceito de frações, escrevemos estas como sendo a parte de um todo, “o número de pedaços iguais em que uma pizza foi dividida e o número de pedaços comidos”. Com isso, o estudante as enxerga como sendo dois números distintos, e não um número por si só e, então, nada mais natural que opere separadamente com ambos, como coloca Kieren:

> Infelizmente, a fim de auxiliar os estudantes com a complicada tarefa de construir significado para o conceito de fração, a aproximação instrutiva canônica é para introduzir ilustrações que insinuem um modelo de frações “parte do todo”. Estas ilustrações incluem gravuras de “tortas” ou círculos parcialmente coloridos, bem como situações em que, por exemplo, várias crianças dividem comida ou outros objetos. As crianças foram ensinadas através destes exemplos de colocar o resultado de um cálculo (número de pedaços n “parte”) acima de uma “linha de fração” e o resultado de outro cálculo (número de pedaços de um “inteiro”) abaixo da linha. Então uma fração vem a ser vista como uma combinação mecânica de dois números inteiros não relacionados representando assim dois cálculos separados (apud NIEMI, 1996, p. 71).

Não podemos esquecer de que a forma como escrevemos as frações foi convencionada. Segundo Ifrah (1992), as frações foram concebidas na Antiguidade, mas, na falta de numerações bem constituídas, suas notações foram durante muito tempo mal fixadas, não homogêneas e inaptas às aplicações práticas. As frações não foram consideradas desde a sua origem como números; nem se concebia a noção de fração geral $\frac{m}{n}$. Com o desenvolvimento do cálculo e da aritmética, ficou claro que as frações eram assimiláveis aos números.

A partir daí, foram criadas técnicas para operar com elas. O que é ensinado, geralmente, é apenas um trabalho mecânico, usando algoritmos sem sentido para os alunos, e, por isso, muito sujeito a erros. O “significado” atribuído pelo aluno a este conceito não é necessariamente o mesmo daquele do professor.

> Se o aluno não construiu um significado coerente com a matemática para os diferentes significados dos termos da fração, ele não pode criar o hábito de operar corretamente com os números fracionários. Vai aprender a operar com eles de uma maneira mecânica e só decorará algoritmos que não têm significado para ele. Terá o que o professor Shlamo Vinner (1997) chama de "pseudo-conhecimento".
>
> "Pseudo Conhecimento" faz com que apliquemos métodos de resolução de problemas por analogia com casos já vistos.
>
> Esse conhecimento pode ser confundido com "verdadeiro conhecimento" quando a resposta está de acordo com o resultado desejado. [...]
>
> É, portanto, bastante compreensível que o aluno que não construiu corretamente a sua capacidade de reconhecer o significado dos termos da fração tenda a inventar métodos, para operar com elas, análogos ao que usou com os números naturais. (GOTTLIEB, 1999, p. 28)

Niemi coloca que:

> Para entender e coordenar estas relações, é requerido muito mais do que a noção de que frações são notas que representam dois números independentes, e mais ainda que a idéia de que uma fração é parte de um objeto como, por exemplo, uma torta ou biscoito. Entender uma fração em termos matemáticos significa, entre outras coisas, vê-la simultaneamente como uma relação entre outros dois números, sendo que cada um pode representar uma quantidade medida, e ainda um número único ou quantidade por ele mesmo. (1996, p. 71)

1.1.2 O uso de simulações computacionais no ensino

Dentro da Educação Matemática, uma das tendências que tem se mostrado mais promissora é o uso de novas tecnologias dentro da sala de aula (GROENWALD; SILVA; MORA, 2004), enfatizando a informática, que nos serve tanto como ferramenta motivacional, como uma ferramenta de complementação e aperfeiçoamento, que auxilia o desenvolver de tarefas. Através de softwares, que são cada vez mais sofisticados e específicos, cada habilidade que se deseja desenvolver pode ser trabalhada com êxito dentro de um laboratório de informática.

Segundo Yamamoto e Barbeta (2001), as formas de utilização dos computadores como recurso didático pode ser classificada como:

- tutoriais: onde os programas atuam como tutores, fornecendo informações e verificando, por meio de perguntas, se o aluno compreendeu o tópico abordado;

- exercícios ou práticas: envolvem memorização e repetição, através de problemas revisa o que foi trabalhado em aula;
- demonstrações: permitem visualizações do que ocorre quando altera-se variáveis num determinado processo;
- simulações: permitem reproduzir na tela do computador o comportamento de um dado sistema, a partir do modelo teórico que o descreve;
- jogos: se constituem numa maneira divertida de aprender, podendo promover habilidades cognitivas complexas.

Dentro destas, o uso de simulações computacionais no ensino tem-se destacado como uma forte ferramenta metodológica, pois funcionam como laboratórios virtuais, onde o aluno pode interagir, testar hipóteses, e ver resultados instantâneos. Essa interatividade resultante, conforme Esquembre (2001), é uma característica chave para aprender. As simulações permitem o estudo de condições que na prática seriam difíceis e, às vezes até mesmo inviáveis de serem realizadas em sala de aula ou em um laboratório didático. Isto, aliado ao grande interesse dos estudantes pelos microcomputadores pode, a princípio, tornar mais eficiente e agradável o processo de aprendizagem. (YAMAMOTO; BARBETA, 2001)

1.2 PROBLEMATIZAÇÃO

Com o intuito de auxiliar a formação de novos esquemas para trabalhar com frações e sanar assim essa grande dificuldade encontrada pelos alunos em assimilar frações como números, e de realizar operações com estas, surge a necessidade de encontrar caminhos alternativos para seguir, com o uso de diferentes metodologias e ferramentas mais adequadas. De encontro a essa necessidade temos as simulações computacionais como alternativa.

Em um primeiro momento, o estudo da fração como uma medida, uma quantidade, um número, e não somente a parte de um todo, pode, por si só, trazer um melhor entendimento por parte dos alunos (SALLÁN, 2001). Dentro do campo das simulações computacionais os alunos podem ver instantaneamente “quanto” representa cada fração, podendo, assim, estabelecer relações de igualdade/equivalência de frações, comparar frações, ver sua densidade infinita, analisar o que acontece ao alterar valores tanto do numerador como do denominador. Tudo isso ao interagir, ao testar valores, ao fazer as suas intervenções, testar as suas hipóteses e tirando suas próprias conclusões, de forma orientada.

A utilização destes mundos virtuais pode, também, ajudar a esclarecer aspectos, às vezes sutis, de um objeto de estudo, como enfatizam Yamamoto e Barbeta (2001). Isto encoraja o uso das simulações, deixando a expectativa de que estas realmente contribuam de forma significativa para um melhor entendimento em frações.

Com base no que foi exposto, surge o questionamento que norteia este trabalho: Poderiam, de fato, as simulações computacionais auxiliar na evolução conceitual de frações dos estudantes?

1.3 OBJETIVOS

Para realizar esta investigação, traçamos um objetivo geral, bem como objetivos específicos para conduzi-la.

1.3.1 OBJETIVO GERAL

Investigar o uso de simulações computacionais como uma ferramenta no ensino de frações, verificando assim, se essas realmente auxiliam na evolução conceitual das frações.

1.3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Traçamos também alguns objetivos específicos para alcançar nosso objetivo geral, são eles:

- Investigar as concepções alternativas em frações;
- Averiguar quais as concepções alternativas dos alunos da turma investigada, ao estudar frações;
- Analisar simulações computacionais que abordem tópicos, tidos como essenciais na conceitualização de frações;
- Verificar se o uso de simulações computacionais proporciona a compreensão por parte dos estudantes a respeito de frações.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Consideramos como os três pilares da pesquisa as Frações, Simulações Computacionais e Concepções Alternativas. Abordaremos cada uma a seguir.

2.1 FRAÇÕES

Por que estudar frações?

Estudar/Ensinar números racionais, especialmente frações, é algo que não têm se mostrado fácil. Alunos têm grande dificuldade em assimilar esse conteúdo, muitas vezes até operam com as frações e usam algoritmos de forma mecânica, mas através de testes práticos que requerem o uso de frações no dia a dia podemos identificar lacunas nas suas concepções de frações, e após um tempo sem trabalhar com elas as concepções alternativas vêm à tona. Professores já não sabem como agir diante dessa situação, a ponto de alguns sugerirem que o estudo de frações seja deixado de lado nas escolas.

De fato os conceitos do número racional estão entre as idéias mais complexas que as crianças encontram durante os anos do ensino fundamental, mas também mais importantes, como coloca Behr *et al*. (1983, p. 1), destacando três pontos:

> (a) A partir de uma perspectiva prática, a habilidade de lidar efetivamente com estas noções melhoram significativamente a habilidade de compreender e lidar com situações e problemas no mundo real;
> (b) a partir de uma perspectiva psicológica, os números racionais fornecem uma rica arena, na qual as crianças podem desenvolver e expandir as estruturas mentais necessárias para um desenvolvimento intelectual contínuo; e
> (c) a partir de uma perspectiva matemática, a compreensão/ interpretação do número racional fornece as bases nas quais as operações algébricas elementares podem ser/estar baseadas mais tarde.

Segundo Behr *et al.* (1983, p. 2) muitos dos "problemas-chave" na Matemática da Escola Fundamental estão relacionados às idéias do número racional. Além disso, o desenvolvimento das idéias do número-racional é visto como um contexto ideal a fim de investigar os processos gerais de aquisição do conceito matemático porque:

> 1. Grande parte do desenvolvimento ocorre no limiar/início de um período de reorganização cognitiva significativa (ou seja, a transição do concreto para o pensamento operacional formal);
> 2. As interessantes transições qualitativas ocorrem não somente na estrutura de conceitos latentes/subjacentes, mas também nos sistemas representáveis/representativos usados para descrever e modelar/exibir estas estruturas.
> 3. As funções dos sistemas representativos são completamente diferenciadas e influenciam de forma psicológica, pois ambas as características figurativa e operacional são críticas.
> 4. O conceito do número-racional implica num rico conjunto de subconstruções e processos integrados, relacionado a uma ampla série/linha de conceitos fundamentais mais amplos. (por exemplo, sistema de medidas, probabilidade, sistema de coordenada, gráfico, etc.)

As dificuldades demonstradas pelos alunos são, possivelmente, oriundas dessas várias "interpretações" que os números racionais têm, interpretações que formam um conjunto inter-relacionado que por fim forma o conceito de Número Racional. Nas próximas páginas temos um breve resumo baseado nos estudos de Silva (1997, 2005) e Bezerra (2001), sobre a história das frações abordando suas diferentes interpretações e mais adiante, do seu ensino.

2.1.1 Origem e História das Frações

Os registros mais antigos que se tem do uso de frações no Egito são encontrados no *Papiro de Rhind,* escrito por Ahmes por volta de 1650 a.C., e descoberto em 1658, e no *Papiro de Moscou*, que apresentam a Matemática egípcia por meio de problemas, alguns destes envolvendo frações, claro, com representações diferentes das usadas atualmente. O uso das frações era sempre na forma unitária, com exceção do $\frac{2}{3}$. Havia inclusive tabelas para a conversão de frações em soma de frações unitárias. Segundo Eves (apud SILVA, 2005) no *Papiro de Ackmin*, escrito entre 500 e 800 d.C., aparece um algoritmo para se obter a decomposição em frações unitárias: $\frac{z}{pq} = \frac{1}{pr} + \frac{1}{qr}$, em que r = $\frac{(p+q)}{z}$

As frações mais comuns tinham signos especiais, as outras eram representas com um ponto sobre o número *n* para representar o que hoje escrevemos como $\frac{1}{n}$. Levou certo tempo para que as frações tivessem uma notação padrão, inicialmente não eram nem consideradas números.

Segundo Caraça (apud BEZERRA, 2001), a subdivisão da unidade que resultou nas frações, se fez necessária pela relação do estado com o indivíduo, que deveria pagar certo tributo de acordo com o tamanho do seu terreno, e para que as medições não fossem imprecisas subdividia-se a unidade em partes menores e iguais.

Na Babilônia, onde se usava um sistema de numeração posicional de base 60, as frações aparecem várias vezes no *Código de Hamurabi* (1694 a.C.), em algumas leis como valores de multas. Como neste exemplo: “Se alguém alugar um navio de frete, ele deverá pagar 2 $\frac{1}{2}$ *gerahs* por dia.”

Já na Mesopotâmia, cerca de 4000 a.C., idéias fracionárias eram usadas na distribuição de bens/patrimônios, nos documentos que mostram essa prática aparecem vários exemplos contendo regras de divisão que contornavam as dificuldades aritméticas.

Na Grécia, as frações não eram vistas como números, mas sim como uma razão ou relação entre inteiros, e, assim como os egípcios, os gregos sentem-se “atraídos” pelas frações unitárias, usando apenas o denominador seguido de um acento ou marca para representá-las. Utilizavam os números fracionários em tratados teóricos e demonstrações que aparecem inseridas em textos matemáticos de cálculos e em documentos do dia a dia como: declaração de propriedade, cálculos e registro de câmbios de moedas, taxas, realizações da arquitetura, etc.

Com os romanos, as frações aparecem em situações envolvendo sua moeda, e provavelmente por isso, em geral seu denominador era 12, já que a moeda romana de cobre *as,* que pesava uma libra, era dividida em 12 *unciae.*

Um documento chinês datado do século II a.C., mais tarde reorganizado e chamado de “Os nove capítulos sobre os procedimentos matemáticos”, traz as frações como a parte não inteira dos resultados de divisões, e ocupam um lugar importante, embora não sejam definidas já no início e sim conforme vão aparecendo. No primeiro capítulo do livro aparece como simplificar, somar, subtrair, comparar, calcular a média, dividir ou multiplicar frações, além dos algoritmos para efetuar as operações elementares como aplicação no cálculo de áreas variadas. Sabe-se também que os chineses operavam sobre frações comuns achando o mínimo denominador comum. Usavam analogias, chamando o denominador de mãe e o numerador de filho. Essa civilização tendia a decimalização das frações.

Através das obras de astrônomos e matemáticos tomamos conhecimento das obras indianas a partir do século V, mas desde o século IV a.C. os teóricos lingüistas se interrogam a respeito das frações. Um dos mais antigos textos matemáticos indianos destina um capítulo às frações, apresentando todas as operações, sendo as de adição e subtração após redução ao mesmo denominador, apresentada por Aryabhata. Em relação à divisão, temos a definição precisa de Brahmagupta: “Depois de ter invertido o denominador e o numerador do divisor, o denominador do dividendo é multiplicado pelo (novo) denominador e seu numerador pelo (novo) numerador... ”. Nos matemáticos indianos havia uma concepção única para os números inteiros e fracionários, isso porque os números inteiros eram considerados frações de denominador 1.

Os árabes, de posse de muitas tradições científicas, muito antigas e variadas, se puseram a traduzi-las, e no século IX dispunham de conhecimentos matemáticos e astrológicos de várias origens. No Corão (livro sagrado muçulmano), em versículos destinados à divisão de heranças podemos encontrar termos para “parte” (*guz*), a fração $\frac{2}{3}$ e outras frações na forma $\frac{1}{n}$. Nos livros, as frações e números mistos apareciam como resultados de divisões. Em geral os livros árabes davam muita importância para as frações, dedicando capítulos inteiros para elas, bem como apresentando algoritmos para calcular com as frações. A utilidade prática das frações deixou a sociedade islâmica medieval muito interessada por elas, o que favoreceu sua difusão, e assim novas formas de representação foram surgindo.

Nos séculos XI e XII de um lado a Matemática indo-arábica produzia uma representação fracionária que trazia o numerador sobre o denominador; os judeus exprimiam as frações por intermédio de uma linguagem retórica como quantidades de partes de uma unidade originada de pesos e medidas.

Embora na Europa predominasse a numeração romana, em 1202 Fibonacci, em seu livro *Líber Abaci* apresenta o sistema de numeração posicional de base 10, bem como a escrita fracionária e a terminologia usada atualmente: “Quando acima de um número qualquer aparecer uma barra, e acima dessa for escrito outro número qualquer - o número superior está para o inferior -, o inferior é chamado de denominador, e o superior, numerador.” Mas mesmo Fibonacci preferia a utilização das frações unitárias, e em seu livro apresentava tabelas de conversão de frações comuns para frações unitárias.

Já no século XV, as frações passam a fazer parte do cotidiano das pessoas e as representações e conceitos aperfeiçoados. A notação moderna deve-se aos hindus pela numeração decimal e aos árabes que inventaram a famosa barra horizontal separando o numerador do denominador.

No decorrer do século XVI, os tratados de aritmética já abordavam as frações de uma maneira muito semelhante a dos séculos XIX e XX. Levando em conta as frações maiores que a unidade e considerando as frações como a expressão de uma divisão. Mas os inconvenientes do cálculo fracionário levavam a uma preferência pelos inteiros e culminou no final do século com o uso dos decimais.

A seguir veremos um pouco mais sobre as interpretações do conceito de fração.

2.1.2 Ontologias do Conceito de Fração

De acordo com Behr *et al.* (1983), os números racionais podem ser interpretados em pelo menos estas seis formas (como subconstruções):

- comparação de parte de um inteiro (parte-todo),
- fração como decimal,
- uma razão,
- uma divisão indicada (quociente),
- um operador e
- uma medida de quantidades contínuas ou descontínuas.

Abaixo uma pequena descrição de cinco delas que serão tratadas neste trabalho.

Concepção de Parte Todo

Emerge da idéia de dividir determinada grandeza, contínua ou discreta, em partes iguais. Fazendo a dupla contagem das partes para a representação da fração na forma $\frac{a}{b}$. É a maneira canônica de iniciar o ensino de frações.

Concepção de Razão

Expressa a relação entre duas grandezas ou quantidades. Um índice comparativo, de mesma natureza ou não, como a velocidade (distância/tempo).

O entendimento de razão encaminha naturalmente para a idéia de equivalência de razões e para o raciocínio proporcional, como coloca Silva (2005). Uma relação particular é estabelecida em *a* e qualquer mudança sua implicará uma mudança previsível em *b*.

Concepção de Quociente

Nesta situação a representação $\frac{a}{b}$ indica que *a* deve ser dividido em *b* partes. Resulta na relação dos números racionais na forma fracionária e decimal (3/4 = 3 : 4 = 0,75) e na equivalência de frações ($\frac{3}{4}$ = 0,75 e $\frac{6}{8}$ = 0,75, assim, $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$).

Concepção de Operador

Assume um papel transformador, algo que atua sobre uma quantidade. Representa uma ação que deve ser feita sobre determinada quantidade e que irá alterar o seu valor inicial.

Concepção de Medida

A tarefa de medição encaminha para a insuficiência dos números naturais e a necessidade de novas representações. A localização de frações na reta numerada está também associada à concepção de parte-todo. O local que a fração $\frac{3}{5}$ está na reta, por exemplo, é o ponto que está a $\frac{3}{5}$ de unidade de distância do ponto zero.

A operação de medição envolve não apenas a comparação de duas grandezas de mesma espécie, como também em determinar quantas vezes cabe uma grandeza dentro de outra.

> Há, portanto, no problema da medida, três fases e três aspectos distintos - escolha da unidade; comparação com a unidade; expressão do resultado dessa comparação com um número. (CARAÇA, 1984, p. 30)

Kieren (apud BEHR *et al.*, 1983), sustenta que um entendimento completo dos números racionais requer não somente uma compreensão destas subconstruções de forma separada, mas também de como elas se correlacionam. Ao resolver determinado problema envolvendo números racionais, o sujeito deve ser capaz de transitar entre as subcontruções, conforme for mais conveniente em cada momento.

2.1.3 Ensino das Frações

O ensino das frações passou por um processo de adequação as necessidades dos povos que as vinham estudando e chegou ao ensino como é feito hoje. A seguir teremos um pouco dessa história e também o ensino de frações como é atualmente.

Antigüidade

À medida que as tarefas de medições e os registros e os cálculos de seus resultados tornam-se rotineiros e mais necessários, tiveram que migrar para instituições de ensino, para que outros pudessem aprender a resolver tais tarefas. Isso ocorre desde a Antigüidade, fazendo com que as técnicas de medições e a escrita e os cálculos de seus resultados percorram outro caminho que não o da prática.

Os Egípcios, através dos papiros, usavam técnicas para as operações com fracionários, tinham até mesmo mais de uma técnica para a mesma operação. Utilizavam também frações equivalentes para a resolução de alguns cálculos. Essas técnicas abordavam as concepções de operador e de quociente e, como já foi colocado, apenas o uso de frações unitárias.

Percebe-se, na resolução dos problemas dos quais se tem conhecimento o intuito de tornar rotineira a execução de cálculos com fracionários.

Problemas envolvendo o cálculo de valores desconhecidos são encontrados em registros de diversas civilizações dos mais antigos registros até os dias de hoje. As técnicas para resolver estes problemas associam principalmente a idéia de operador, e são:

- O **método da falsa posição**, onde uma solução era sugerida inicialmente e a partir dela o seu resultado era trabalhado;
- O **método da divisão**, que consiste em "fatorar a equação" e fazer uma divisão;
- E o **método da inversão**, que consiste em partir do final do problema e voltar ao seu enunciado.

Com o passar do tempo as tarefas que emergem da concepção de medida e os sistemas de medida ganham um lugar próprio no ensino e nos livros didáticos, o que acontece até hoje. No entanto, a representação fracionária é substituída quase que totalmente pela representação decimal.

A concepção de operador já era mobilizada no fracionamento das subunidades de medida em relação ao que consideravam unidade. E a concepção de operador teve sua esfera de aplicação ampliada na generalização de cálculos de áreas e volumes.

Alguns problemas abordavam a concepção de razão, que era tratada como o quociente de dois números, muitas vezes a situação tratava de cálculo de taxas de juros, a razão, que também podia ser vista como um operador, durante a manipulação dos números transformava-se num quociente. E com o passar dos anos estas manipulações foram se tornando algébricas.

Ainda na escola moderna, "Os nove capítulos" foram utilizados como manual didático, até 1600.

De acordo com Neyret (1995, apud SILVA 2005), na obra "*Cours de mathématiques*", de Étienne de Bézout, elaborado para candidatos à escola da marinha e muito utilizado, no final do século XVIII e início do século XIX, aparece pela primeira vez a representação fracionária tratada efetivamente como representante de números. Na primeira página os números são classificados em três tipos: inteiros, frações (o que hoje chamamos de números mistos) e números fracionários (o que hoje chamamos de frações ordinárias, ou frações menores que a unidade).

Segundo Valente (2002, apud SILVA, 2005), é por volta de 1830 que começam a surgir as primeiras obras brasileiras para escolas, cursos, liceus e colégios.

Na edição de 1897, Bourdon já na introdução associa a operação de divisão ao número fracionário independente de qualquer contexto, o que permanece e pode ser encontrado em livros de álgebra de 1938. De acordo com Bourdon: “O sinal da divisão que consiste em dois pontos : que se coloca entre o dividendo e o divisor, ou ainda, em uma barra _ , acima e abaixo da qual se colocam, respectivamente, o dividendo e o divisor ... ”

De acordo com Valente (2002, apud SILVA, 2005), em 1929, Euclides Roxo trata as frações com imagens geométricas, com a intenção de facilitar o entendimento de seus leitores, mobilizando assim a concepção parte-todo associada à medida.

Vizcarra e Sallán (2005, apud SILVA, 2005), detectaram o significado parte-todo nos textos escolares espanhóis no início do século XX, para abreviar os períodos de instrução, pois esse significado permite uma introdução rápida da representação simbólica da fração, com altos níveis de êxito a curto prazo.

Algo que merece ser mencionado é o fato de o ensino tratar de situações artificiais, fora da realidade. Como neste caso, entre 2004 e 1595 a.C., na Mesopotâmia: “Encontrei uma pedra, mas não a pesei. Depois somei-lhe a sétima parte do seu peso e depois a décima primeira parte desse novo peso. Pesei o total: 1 *mana*. Qual é o peso original da pedra?” Esse tipo de problema é encontrado até hoje nos livros didáticos.

> Essas situações-problema, consideradas concretas por muitos autores, apresentam muitas vezes elementos improváveis para uma situação real. Isso pode indicar que o mais importante era o treino no algoritmo, ou melhor, o treino dos passos a serem seguidos para a obtenção da solução de um determinado tipo de problema, e não a sua concretude. (MIORIM, 1998, p. 11, apud SILVA, 2005)

Enfim, o ensino de frações iniciou para que mais pessoas pudessem resolver os problemas que envolviam as mesmas, dando-se muitas vezes mais ênfase ao processo do que não ao problema. As frações tomaram um lugar próprio no ensino e para facilitar a aprendizagem, passou-se a ensiná-las a partir da noção parte todo. E até hoje a representação parte-todo é a forma de introdução dos números fracionários, com a técnica da dupla contagem das partes.

Atualidade

Atualmente o ensino de frações inicia na terceira ou quarta série do Ensino Fundamental, onde os alunos têm suas aulas com um mesmo professor, o qual tem formação pedagógica, mas muitas vezes, pouco conhecimento matemático e portanto, estes se baseiam nos livros didáticos para estruturar suas aulas. Assim, achou-se pertinente trazer uma análise de livros didáticos que introduzem ou abordam o conceito fracionário.

Bezerra (2001), em sua dissertação analisou 4 livros didáticos usados no Ensino Fundamental para introdução de frações, e observou que muitas vezes os capítulos dos livros didáticos deixam a desejar com relação às várias formas de representação do número fracionário. O autor ainda ressalta que como o livro didático é o material mais utilizado pelo professor, o emprego da relação parte-todo, como o um único enfoque, poderá limitar o tipo de aula a ser ministrada, e conseqüentemente, reforçar os alunos para uma única abordagem, no entanto as várias interpretações do número racional resultam numa variedade de experiências necessárias. Usando as palavras de Bezerra:

> Percebemos que o livro didático acaba enfocando uma ou outra concepção para o conteúdo das frações. Daí a idéia de que ensinar sob um único ponto de vista é mais fácil. Porém se o professor tivesse uma melhor formação para desenvolver as habilidades e competências dos alunos, permitiria a estes a construção de seu próprio conhecimento. Assim, se as frações pudessem ser exploradas sob os vários modelos, conseqüentemente, as crianças ampliariam seu campo conceitual. (2001, p. 66)

Silva (1997), ao analisar alguns livros didáticos onde o conceito de frações era trabalhado ou introduzido traz algumas colocações importantes sobre estes, algumas destas estão transcritas abaixo:

- Não há variação de situações que permitam ao aluno dar realmente um significado ao que está aprendendo, o modelo é estático, pois as ilustrações mostram a divisão de bolos, maçãs, queijos,... não colocando o aluno em uma outra situação, apenas o objeto muda, mas a "suposta" ação sobre ele não;

- As ilustrações são acompanhadas de definições do tipo: "*cada parte do inteiro é uma fração do inteiro"*, que não fala da necessidade das partes serem iguais, pois tudo que é apresentado já está assim dividido, o que impede o aluno de desenvolver tal percepção. Da mesma forma, não fica explícito, quando citado, o que é para ser considerando como "partes iguais", levando o aluno a entender que só podemos identificar uma fração em um inteiro quando todas as partes desse inteiro têm mesmo tamanho e mesma forma;
- O modelo parte/todo no contínuo é utilizado em todos os livros como ponto de partida para o ensino. O modelo discreto aparece diretamente nos exercícios normalmente com o título "*frações de um número*", onde sempre o número de elementos do conjunto é um múltiplo do número de partes que se deseja, impedindo que se perceba as impossibilidades desse modelo. Não há, em nenhum momento, sugestões para que o aluno participe efetivamente de situações de partição;
- Da forma como esse ensino é apresentado no livro didático, o aluno é conduzido a adquirir concepções errôneas sobre as frações (as partes podem ser desiguais), como desenvolver a linguagem própria das frações, a partir da nomeação de figuras sempre do mesmo tamanho (completamente dividida), o que faz com que o aluno erre quando ocorre qualquer mudança nesse referencial. Na realidade acreditamos que o aluno não desenvolve uma compreensão clara sobre frações, pelo contrário desenvolve um procedimento de dupla contagem das partes no modelo contínuo, a partir da prévia divisão das figuras completamente em partes iguais;
- Nenhuma das coleções faz qualquer referência à história. O aluno não é colocado em uma situação de problema de divisão, de distribuição ou de medição, segue o modelo parte/todo, que historicamente foi um dos que permitiu o surgimento das frações, mas não se refere ao "tamanho" (área), nem à forma dessas partes;

- Quanto aos exercícios encontrados nos livros didáticos, estes não possibilitam ao aluno o uso de diversos processos de resolução e não permitem que o aluno tenha autonomia;
- Aparece constantemente a mistura da linguagem natural escrita com a linguagem matemática;
- Ocorrem erros conceituais como: objeto confundido com a representação, desigualdade das partes, contexto incoerente, concepção errônea de equivalência, representação errônea de algoritmos, incoerência conceitual;
- Percebe-se um enfoque mecanicista no ensino de frações, a partir do livro didático. O conteúdo é apresentado a partir de definições e de modelos que devem ser reproduzidos mecanicamente;
- Muitas obras partem simplesmente de uma definição de fração e no lugar do desenvolvimento do conteúdo a partir de um trabalho de construção, apresentam algoritmos prontos para serem reproduzidos.

Muitas vezes esse ensino limitado e errôneo das frações leva o aluno a criar concepções alternativas a respeito desse assunto, diferente daquelas que se esperava.

2.2 CONCEPÇÕES ALTERNATIVAS

Trataremos também neste trabalho as concepções alternativas dos estudantes ao estudar frações. Primeiramente faremos uma abordagem geral das concepções alternativas, em seguida falaremos das concepções alternativas em matemática, e por fim, as concepções alternativas em frações.

2.2.1 Concepções Alternativas e Mudança Conceitual

De acordo com D'Amore (2007), o estudante constrói um conceito e faz dele uma imagem, que pode ir sendo validada e reforçada no decorrer do currículo escolar, por provas, experiências repetidas, figuras,... Mas pode acontecer que, mais cedo ou mais tarde, tal imagem se revele inadequada com relação a outra imagem inesperada do mesmo conceito, proposta, por exemplo, pelo próprio professor, contrastando com a imagem inicial que o estudante acreditava ser definitiva. Isto nem sempre ocorre de maneira explícita: pode ser que no estudante não exista consciência disto.

Dessa maneira, cria-se um conflito entre a imagem anterior, que o estudante acreditava ser definitiva, e a nova imagem.

> … o conflito cognitivo é um conflito "interno" causado pela não-coincidência entre dois conceitos, ou entre duas imagens ou entre uma imagem e um conceito, ou entre um modelo intuitivo que não corresponde ao modelo matemático do conceito e o próprio modelo matemático (com a eventual complicação do nascimento de modelos parasitas). Em cada caso, existe uma luta entre o desejo inconsciente de manter fixa uma imagem adquirida e novas informações sobre um conceito que tal imagem não consegue "englobar." (D'AMORE, 2007, p. 141)

O estudante precisa, então, adequar a imagem a uma nova, mais ampla, que não apenas conserve as precedentes informações, mas contemple também as novas. A nova imagem é uma conquista cultural, uma nova construção mais poderosa, mas "próxima" do real conceito do objeto em estudo.

> … o que é perfeitamente exato é a idéia de que toda a estrutura se converte em subconjunto de uma estrutura mais rica (comentário de Piaget à intervenção de Fodor, In: PIATELLI-PALMARINI, 1983, p. 193).

Ligada às idéias de imagem de um conceito e de conflito, existe uma questão importante que diz respeito à *misconception,* uma concepção errônea, alternativa. É possível notar como, pelo menos em alguns casos, algumas imagens que precedem a imagem final do conceito, podem ser verdadeiras *misconceptions*, ou seja, interpretações erradas das informações recebidas.

> Na base dos conflitos, existem *misconceptions*, isto é, concepções não corretas, esperando eventualmente, uma sistematização cognitiva mais elaborada e crítica.
>
> Tal evolução se encontra, muitas vezes, na própria natureza didática. A explicação de uma *misconception* ocorre com a *indicação de um mal-estar cognitivo*, que usual e banalmente é chamado de "erro". (D'AMORE, 2007, p. 143)

Os estudantes em geral vêm para a sala de aula com muitos conhecimentos adquiridos ao longo do tempo. Na maioria das vezes, ao observar determinado fenômeno, cada estudante tira suas conclusões a respeito do assunto. Essas conclusões ou conhecimentos prévios, nem sempre são compatíveis com o conhecimento científico, apresentado em sala de aula. Esse conhecimento prévio, quando não está de acordo com o conhecimento científico, é chamado de conhecimento alternativo ou concepção alternativa, e se mostra muito resistente em relação ao conhecimento científico.

> Os estudos realizados sob essa perspectiva revelaram que as idéias alternativas de crianças e adolescentes são pessoais, fortemente influenciadas pelo contexto do problema e bastante estáveis e resistentes à mudança, de modo que é possível encontrá-las mesmo entre estudantes universitários (VIENNOT, 1979, apud, MORTIMER, 1996, p. 1).

Diante disto nos perguntamos, como resolver esse “problema”? Moreira (1994, apud VILLANI; CABRAL, 2001), a luz da teoria da aprendizagem significativa diz que a mudança conceitual, classicamente pensada em termos de substituição de significados, não existe. Mas o aluno deve ser movido a reformular e reorganizar seus conhecimentos, e para que esse processo de acomodação ocorra são necessárias algumas condições: insatisfação, inteligilibilidade, plausibilidade e fertilidade.

Insatisfação - o aluno se depara com uma situação diferente da esperada, diferente do que lhe era comum, e o que ele sabe não é suficiente para explicar o novo fenômeno, para sanar suas dúvidas.

Inteligibilidade - surge então uma nova teoria, uma nova idéia, que tem lógica para ele.

Plausibilidade - além disso, essa nova idéia, pode explicar o novo fenômeno, e engloba seus conhecimentos anteriores sobre o assunto.

Fertilidade - esses novos conhecimentos, explicam os fenômenos antigos, os atuais e ainda apontam para novas descobertas.

> Finalmente, não há substituição de significados mas, sim, são lhes ajuntados novos significados que, cada vez mais, enriquecem a concepção (MOREIRA, 1994 e MORTIMER, 1996.apud VILLANI; CABRAL, 2001, p. 3)

2.2.2 Mudança conceitual: transformação x substituição.

Sobre a Mudança Conceitual, Braz da Silva (2004), traz um estudo que confronta as tendências dominantes na literatura, que dão à expressão *mudança conceitual* o significado tanto de transformação, quanto de substituição das *concepções prévias*. Essas significações conduzem em direção às estratégias diversas no sentido de auxiliar o estudante em seu processo de aquisição dos conhecimentos científicos. Os pressupostos epistemológicos de cada pólo da oscilação envolvem *continuidade* ou *ruptura* entre os conhecimentos informais ou espontâneos e os formais ou científicos. Seguem algumas colocações de Braz da Silva (2004) sobre essas duas tendências.

Epistemologia Rupturista

Em relação a essa discussão podemos dizer que os estudiosos que se apóiam na *epistemologia rupturista* tendem a propor a substituição do conhecimento espontâneo do estudante pelo conhecimento científico, tratando como central as questões referentes às concepções *resistentes* que devem ser confrontadas de maneira a se promover *mudança por substituição* das idéias alternativas (POSNER *et al*., 1982a, 1982b, 1992; HEWSON; HEWSON, 1983, 1988, apud BRAZ DA SILVA, 2004).

Posner e cols. (1982a, 1982b, 1992, apud BRAZ DA SILVA, 2004), expoentes da corrente *rupturista*, admitem, em sua discussão sobre a *mudança conceitual*, dois tipos de mudança: a *assimilação* ou *captura conceitual*, na qual o conceito novo não sendo incompatível com os *conceitos prévios* do estudante é incorporado ao seu sistema conceitual pré-existente; *acomodação* ou *troca conceitual*, caracterizada pela incompatibilidade entre *conceitos prévios* e novos, gerando um *conflito conceitual* que tem como solução a substituição do *conceito prévio* antagônico. Porém, apesar dos autores se referirem aos dois tipos de mudança, a *assimilação* é tratada de maneira discreta, provavelmente para evitar o impasse que se chegaria ao se discutir a questão da coexistência entre *conceitos prévios* e novos.

Epistemologia Construtivista

Em contraposição a esta estratégia, erguem-se aqueles que defendem uma *epistemologia construtiva* (diSESSA, 1982, 1983, 1985, 1988, 1993 e SMITH et al., 1993, apud BRAZ DA SILVA, 2004), baseada no refinamento e na reorganização do conhecimento de maneira a fornecer "um referencial teórico para a compreensão das concepções alternativas, tanto as errôneas quanto as produtivas" (SMITH et al., 1993, p. 115, apud BRAZ DA SILVA, 2004).

Os diversos trabalhos de diSessa *et al.* (apud BRAZ DA SILVA, 2004) têm por premissa que as *concepções prévias* devem ser compreendidas como parte ativa de um processo de desenvolvimento cognitivo/conceitual. Desta maneira, as *concepções prévias* podem ser tomadas como ponto de partida para a construção de novos conhecimentos. Assim sendo, o papel do indivíduo/estudante é o de construtor de seus conhecimentos a partir de seus interesses, que o conduz à ação no sentido de tomar para si um dado *objeto*. Este, o *objeto*, não é de fato *puro*, ou seja, é sempre o resultado de alguma interpretação do sujeito. Esta maneira de ver é coerente com a Epistemologia Genética que considera que o *objeto* é apreendido por meio de alguma *estrutura cognitiva* constituída pelo sujeito a partir de seus interesses e necessidades (PIAGET, 1975, apud BRAZ DA SILVA, 2004).

Esse processo funciona como uma gradual reorganização das *idéias prévias*, na qual os mecanismos cognitivos não são alterados, mas *mudanças estruturais* ocorrem.

> Uma possível razão para o não abandono dessas teorias implícitas talvez seja que a aprendizagem da ciência não supõe nunca o abandono das representações implícitas a favor de um conhecimento mais elaborado, mas sim um processo de integração hierárquica dos sistemas de representação em outros (Pozo, 1999; Pozo y Gómez Crespo, 1998). Segundo essa idéia, adquirir conhecimento não implica substituir algumas representações ou objetos de conhecimento em outros, mas sim multiplicar as perspectivas ou atitudes epistemológicas a respeito desses objetos e finalmente integrá-las em uma única teoria cognitiva que descreva as relações entre esses componentes em um novo nível. (DIENES; PERNER 1999; POZO, 2001 apud POZO, 2002, p. 22)

As Concepções Alternativas dos sujeitos estão, de certa forma, relacionadas à história. De acordo com Piaget (1987), o indivíduo, no seu desenvolvimento intelectual, parece reprisar a história da ciência, passando pelos mesmos períodos epistemológicos. Assim, a história das frações, ou do conceito fracionário, nos ajuda a entender o desenvolvimento desse conceito individualmente em cada sujeito. Recorrendo à história podemos identificar períodos que retratam o pensamento dos sujeitos, assim como as concepções alternativas relacionadas às frações também podem ser identificadas na história das frações, conforme Guabiraba (2008). Seguem alguns exemplos de Concepções Alternativas em Matemática e em após o estudo feito a respeito das concepções alternativas relacionadas às frações.

2.2.3 Concepções Alternativas em Matemática

O Movimento das Concepções Alternativas, inicialmente também designadas concepções errôneas (do inglês *misconceptions*), foi deflagrado pelo trabalho seminal de Driver e Easley, em 1978, que inspirou uma série de estudos em Ensino de Ciências (MORTIMER, 1996). A maior parte da bibliografia encontrada refere-se a concepções alternativas em Física e, neste trabalho, fazemos uma adaptação das idéias e métodos desse Movimento à Matemática. Na Física, os fenômenos estão no mundo físico, do qual construímos representações, que, não estando de acordo com as representações da comunidade científica, são chamadas de concepções alternativas. Na Matemática, no entanto, não temos objetos palpáveis, apenas representações. Os fenômenos observados pelos estudantes de Matemática são, então, por exemplo, as explicações dadas por um professor sobre determinado conteúdo. A forma que o estudante interpreta a representação recebida, que nesta situação é o fenômeno observado, é uma re-representação. Quando esta re-representação não está de acordo com o que é aceito pela comunidade da Matemática, chamaremos neste trabalho, por analogia, também, de concepção alternativa.

Alguns autores colocam essas situações, na Matemática, como Teoremas--em--Ação (VERGNAUD, apud MOREIRA, 2002), ou seja, idéias que estão sendo trabalhadas para chegar às concepções científicas. Ou também, como Obstáculos (BROUSSEAU, apud CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001), que são idéias que já foram eficazes na solução de problemas, mas que se revelaram um fracasso perante um novo problema. Estes obstáculos podem ser de natureza Didática, ou seja, obstáculos impostos pelo próprio sistema de ensino, por professores, em sala de aula, que, na ânsia de tornar o conteúdo claro aos seus alunos e vê-los realizando as atividades momentâneas corretamente, propõem “regras”, “passos a serem seguidos”, “conclusões”, que mais tarde se tornam obstáculos para a aprendizagem. Neste trabalho, como foi colocado no parágrafo anterior, chamaremos essas situações de Concepções Alternativas.

D’Amore (2007), traz alguns exemplos de Concepções Alternativas em Matemática, extraídos de experiências conduzidas em sala de aula. Relatamos três deles aqui:

Retângulos e retângulos... em pé!

O estudante sempre viu desenhar um retângulo “apoiado” na base horizontal com a altura vertical mais curta. Fez uma imagem do conceito “retângulo” dessa maneira e tal imagem sempre foi confirmada pela experiência. Um dia, alguém lhe propõe uma imagem de retângulo que tem base menor que a altura. A denominação dada espontaneamente pela criança é significativa, para adequar o conceito já assumido à nova imagem, definindo essa “nova forma” como um “retângulo em pé”, expressão da nova imagem, mais ampla que a anterior. O estudante já possuía uma imagem intuitiva, que se formara com a experiência no tempo.

A multiplicação aumenta, a divisão diminui.

O estudante verificou, durante anos, que operação de multiplicação “aumenta os valores”. Dito em outras palavras, o produto de dois fatores é maior do que cada um deles (12 é bem maior do que 3 e 4; 60 é bem maior do que 12 e 5; ...). Mesmo as imagens figurais (de esquemas representativos e operatórios), oferecidas ao aluno para tornar aceitável a operação de multiplicação, confirmam essa expectativa intuitiva.

Porém, depois, fatalmente, chegará o dia em que é preciso multiplicar aquele 3, não pelo natural 4, mas por 0,5 e, então, o modelo (já formado), não funciona mais e a suposta regra geral do aumento desmorona. Nesse ponto, assimilar a nova situação para adequar o modelo anterior a um novo não é de modo algum fácil.

Deve-se sempre dividir um número grande por um número pequeno

O estudante dividiu, durante anos, um número maior por um número menor. Em outras palavras, ele formou a imagem de que o dividendo *deve* ser maior do que o divisor. A própria maneira pela qual a divisão é proposta, desde as primeiras vezes na escola, o leva a acreditar nisso: trata-se sempre de repartir muitos objetos entre poucas caixas ou coisas do gênero (divisão por repartição igualitária); trata-se sempre de recipientes que contêm diversos objetos cada um (divisão como medida). Entretanto, isso implica também que, diante de um problema do tipo “15 amigos dividem entre si 5 kg de biscoitos; quantos cabem a cada um?”, o estudante, mesmo de níveis superiores, será espontaneamente levado a efetuar 15 : 5, calculando não quantos biscoitos cabem a cada amigo, mas “quantos amigos para cada quilo de biscoito”.

2.2.4 Concepções Alternativas em Frações

Como já mencionado, quando se trata de frações, qual professor nunca se deparou com respostas do tipo: “$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{4}{6}$”, em que o aluno simplesmente somou os numeradores e os numeradores, separadamente? Ou ainda, como exemplifica Powell (1996, apud GOTTLIEB, 1999), mencionando um fato ocorrido, onde se pedia aos alunos que escrevessem uma fração que estivesse entre $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$, um aluno respondeu $\frac{2}{3}$. Confuso pela presteza da resposta, o professor pediu que ele justificasse o procedimento. O aluno fez da seguinte maneira: Os numeradores são 1 e 3. Entre eles está o 2. Os denominadores são 2 e 4, entre eles está o 3. Logo a fração é $\frac{2}{3}$. Além dessas, Niemi (1996), coloca que há muitas evidências de que estudantes de ensino fundamental e mesmo do ensino médio não compreendem frações como um número e, particularmente, não como números que possam representar uma relação quociente entre outros dois números.

Diante das muitas dificuldades apresentadas pelos alunos e relatadas em artigos sobre o assunto, relacionamos algumas concepções alternativas em frações[1]:

A - Frações são Unitárias

Em alguns estudos foram identificadas e registradas concepções de crianças acerca de frações como sendo apenas unitárias. Niemi (1996) traz o exemplo de um estudante que desenhou uma linha, sendo que abaixo dela, ele escreveu a seguinte seqüência: $0, \frac{1}{10}, \frac{1}{9}, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{1}{0}, 1$. Outros exemplos em que crianças adotam as frações unitárias ao dividir certa quantia de chocolates entre determinado número de crianças, são trazidos por Nunes:

> Algumas crianças pareceram começar com a solução mais simples, onde cada barra do chocolate é compartilhada entre todas as crianças. (2004, p. 09)

Ao dividir 3 chocolates entre 4 crianças um estudante escreveu: $\frac{1}{4} \frac{1}{4} \frac{1}{4}$, mostrando que dividiu cada um dos chocolates entre as 4 crianças, adotando assim as frações unitárias para representar a quantia que cada criança recebeu. (NUNES, 2004)

B - Frações são apenas partes de um todo

A forma tradicional de ensinar, ou pelo menos introduzir o ensino de frações, é usando a relação parte-todo. No entanto, o conceito de fração, como bem sabemos, não se resume a isso, mas por vezes vemos estudantes relacionando frações apenas à parte de um todo, como coloca Niemi:

> Um grande número de estudantes escreveu que uma fração é um pedaço de alguma coisa (ex. uma torta, bolo ou biscoito) que você come. (1996, p. 76)

---

[1] Cabe ressaltar que, com a exceção de NI & ZHOU (2005), os artigos não traziam as concepções alternativas identificadas como tais, mas sim dificuldades e obstáculos enfrentados pelos estudantes, a partir das quais identificamos as concepções alternativas relacionadas.

> Não há compreensão de que $\frac{3}{4}$, por exemplo, não é simplesmente três partes de quatro, mas também expressa relação entre duas quantidades (representada pelos números 3 e 4), e não há entendimento que uma fração é um número que pode ser adicionado, multiplicado, dividido e assim por diante (FREUDENTHAL, 1983; GELMAN; COHEN; HARTNETT, 1989). No lugar de um resumo, no conceito geral de frações, há somente “vagas percepções” (MCLELLAN; DEWEY, 1895, apud NIEMI, 1996, p. 71)

C - As partes que compõe o todo não são iguais

Em seus estudos, Niemi (1996), também ressalta a confusão feita por muitos alunos ao representar graficamente uma fração, onde estes enfatizam demasiadamente a contagem das partes de uma representação fracionária, desconsiderando as divisões iguais em que esta deve ser feita. Em outras palavras, se detém ao número de partes, não observando a área de cada uma delas.

> Muitos estudantes fizeram desenhos indicando que eles não entendiam que objetos têm que ser divididos em partes iguais a fim de mostrar uma fração; um tal aluno desenhou uma figura parecendo um quebra-cabeça no qual as partes não tinham todas o mesmo tamanho. (NIEMI, 1996, p. 76)

D - Frações são compostas por dois números

Entre os erros identificados por Niemi (1996), está o de somar numeradores e denominadores em problemas de adição de frações, decorrente da idéia que o aluno tem de que são dois números distintos, separados por um traço; nada mais natural, nesse caso, que somá-los separadamente.

> ... muitas crianças encontram dificuldade em aceitar uma fração dada como um número e tendem a vê-lo como dois números inteiros. (HART, 1981; KERSLAKE, 1986, apud TIROSH, 1998a, p. 2)

> "Os estudantes não vêem frações como representando quantidades, mas sim como números inteiros que devem ser combinados de alguma maneira. Cada fração é vista como dois números separados por uma linha e parece, portanto, razoável somar os numeradores para obter o numerador da fração resultante, bem como, similarmente, somar os denominadores." (CARPENTER; COBURN; REYS; WILSON, 1976, apud TIROSH, 1998b, p. 2)

> As crianças foram ensinadas através destes exemplos de colocar o resultado de um cálculo (número de pedaços) na “parte” acima de uma

> "linha de fração" e o resultado de outro cálculo (número de pedaços de um "inteiro") abaixo da linha. Então uma fração vem a ser vista como uma combinação mecânica de dois números inteiros não relacionados representando assim dois cálculos separados (KIEREN, 1992, apud NIEMI, 1996, p. 71)

E - Há apenas uma representação fracionária para determinada quantia

A dificuldade em aceitar diferentes representações para uma mesma quantia também é uma situação de conflito. Ora, os estudantes estão acostumados a representar cada número, ou cada quantia, de uma forma apenas. Se cada algarismo representa apenas um número, como determinados números/quantias podem ser representados de maneiras diferentes e continuar valendo a mesma coisa?

> Quando operamos com os inteiros, realizamos o cálculo com base na manipulação da representação escolhida: 2 + 3 = 5 ou II + III = V, por exemplo, o que não acontece com os fracionários. Nesse caso, manipulam-se representações do mesmo tipo para indicar um mesmo número, por exemplo, $\frac{4}{8}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{9}{18}$, ... todas são frações que representam o número fracionário $\frac{1}{2}$. (SILVA, 2005, p. 57)

Ao relatar o resultado de seus estudos Nunes ressalta, ao falar dos estudantes, que:

> ... seu desempenho cai significativamente quando as atividades envolvem a equivalência das frações: somente a metade deles pintou corretamente $\frac{2}{3}$ das figuras que tiveram 6 ou 9 porções. (NUNES, 2004, p. 6)

F - Só existem números Naturais

Desde cedo, as crianças se familiarizam com os números naturais, e os usam das mais diversas formas. Aceitar outro tipo de representação para os números cria certo conflito. Os estudantes acreditam que existam apenas os números naturais.

> Muitas das dificuldades que os estudantes têm para entender frações estão atribuídas à necessidade de conciliar (chamado por Piaget) cedo demais noções de números como "coisas que você conta com" (GELMAN; COHEN; HARTNETT, 1989, apud NIEMI, 1996, p. 1)

G - Não há números entre dois inteiros

Outra concepção alternativa dos estudantes é acreditar que não há números entre dois inteiros. Ni e Zhou enfatizam duas expressões que mostram bem isso:

> Isto se reflete na concepção alternativa mantida por alguns estudantes recém saídos das séries iniciais do ensino fundamental conforme ilustrada pelas seguintes falas: "há um buraco entre dois números" e "não há nenhum número entre 0 e 1" (NI; ZHOU, 2005, p. 35)

H - Frações não são números

E, por fim, não aceitar as frações como números, é mais uma concepção alternativa, que é identificada em estudantes de níveis onde se considera o conceito de frações como pré-requisito para outros, onde se espera que os estudantes já tenham domínio das frações em seus vários aspectos.

> ... muitos estudantes do ensino fundamental e mesmo do ensino médio não compreendem frações como números, e particularmente não como números que possam representar uma relação quociente entre dois outros números. (NIEMI, 1996, p. 1)

2.3 SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS

Apresentamos a seguir os resultados de pesquisas sobre novas tecnologias no ensino de Ciências e Matemática, dando um destaque especial para as simulações computacionais, usadas nesta investigação.

2.3.1 Novas Tecnologias no Ensino de Ciências e Matemática

Como já foi colocado, o uso de novas tecnologias em sala de aula, segundo Groenwald, Silva e Mora (2004), é um tendência que tem se mostrado muito promissora no ensino de Ciências e Matemática, enfatizando a informática, que nos serve tanto como ferramenta motivacional, como uma ferramenta de complementação e aperfeiçoamento, que auxilia o desenvolver de tarefas. Através de softwares, que são cada vez mais sofisticados e específicos, cada habilidade que se deseja desenvolver pode ser trabalhada com êxito dentro de um laboratório de informática.

No entanto, deve-se tomar cuidado para não cair na armadilha de que o simples uso das novas tecnologias será milagroso, pois este deve vir acompanhado de um bom planejamento e ser muito bem direcionado, para que de fato traga os resultados esperados, auxiliando significativamente na educação.

Geralmente, quando se fala em Tecnologia Educacional, pensamos na Informática. No entanto, recursos como televisores, calculadoras e retro-projetores já vêm sendo usados há mais tempo e também fazem parte das Tecnologias Educacionais.

Segundo Esquembre (2001), as Novas Tecnologias no Ensino podem ser classificadas como:

- **Ferramentas de Multi ou Hipermídia** - utilizam-se de vários meios, várias formas, para abordar algum tópico, como imagens, áudios e vídeos. Dentro da hipermídia, temos vários conteúdos ligados uns aos outros por alguma afinidade, não havendo assim uma linearidade.
- **Ferramentas de Aquisição e Manipulação de dados** - são equipamentos utilizados para coletar dados do mundo real, geralmente relacionados a fenômenos físicos, cuja observação, sem o auxílio desses equipamentos, seria muito difícil, ou até mesmo inviável. Muitos, além de coletar os dados, fazem uma pré-analise, trazendo gráficos e/ou tabelas comparativas.
- **Ferramentas de Simulações e Micromundos** - podem ser encarados como laboratórios virtuais, onde o estudante pode alterar parâmetros e testar hipóteses, observando o comportamento do fenômeno estudado, que em laboratórios didáticos ou em sala de aula não poderiam ser tão bem trabalhados.

- **Ferramentas de Modelagem** - permitem que os estudantes criem suas próprias simulações, relacionando conceitos e concepções que serão observadas e comparadas aos fenômenos reais.
- **Ferramentas de Comunicação** - destaca-se principalmente a Internet, com seus vários recursos, que tem servido aos professores e estudantes como ferramenta de pesquisa bem como de comunicação, possibilitando um maior contato entre estes mesmo fora da sala de aula.

De acordo com Yamamoto e Barbeta (2001), as formas de utilização dos computadores como recurso didático podem ser classificada da seguinte forma:

- **Tutoriais**: onde os programas atuam como tutores, fornecendo informações e verificando, por meio de perguntas, se o aluno compreendeu o tópico abordado.
- **Exercícios ou práticas:** envolvem memorização e repetição; através de problemas revisa o que foi trabalhado em aula.
- **Demonstrações:** permitem visualizações do que ocorre quando se alteram parâmetros num determinado processo.
- **Simulações:** permitem reproduzir na tela do computador o comportamento de um dado sistema, a partir do modelo teórico que o descreve.
- **Jogos:** constituem-se numa maneira divertida de aprender, podendo promover habilidades cognitivas complexas.

Dentro destas, o uso de simulações computacionais no ensino tem se destacado como uma forte ferramenta metodológica pois, nas simulações, o aluno pode interagir, testar, e ver resultados instantâneos. Essa interatividade resultante, conforme Esquembre (2001), é uma característica-chave para aprender. As simulações permitem o estudo de condições que na prática seriam difíceis e, às vezes, até mesmo inviáveis de serem realizadas em sala de aula ou em um laboratório didático. Isto, aliado ao grande interesse dos estudantes pelos

> microcomputadores, pode, a princípio, tornar mais eficiente e agradável o processo de aprendizagem. (YAMAMOTO; BARBETA, 2001)

2.3.2 Simulações Computacionais

As simulações computacionais funcionam como um laboratório virtual, onde há a possibilidade de alterar parâmetros e testar hipóteses, com uma constatação imediata dos resultados, quantas vezes forem necessárias. Elas facilitam muitos estudos para os quais seriam necessários laboratórios e recursos de difícil aquisição, que trouxessem resultados possivelmente imprecisos e onde nem sempre são dadas condições para que o estudante investigue suficientemente o fenômeno, como mostram alguns estudos (BROADSTOCK, GEORGE, & VÁZQUEZ-ABAD apud REIS, 2004).

Bellemain, Bellemain e Gitirana (2006, p. 4) resumem bem os benefícios das simulações:

> Elas permitem trazer para a sala de aula experiências que, por diversas razões, não seriam possíveis nas suas versões "concretas". Elas oferecem também a possibilidade de dar acesso aos alunos à modelizações que seriam complexas demais sem as reduções possíveis das simulações pré-programadas. Com simulações virtuais, não temos mais as limitações das experiências reais e podemos multiplicar as experiências com condições iniciais diferentes, medir múltiplos dados e simular em alguns minutos fenômenos que exigiriam muito mais tempo nas condições reais.

Como salienta Reis (2004), algumas pesquisas apontam para o uso de simulações computacionais para auxiliar os estudantes a lidar com as concepções alternativas, em um processo de mudança conceitual (JIMOYIANNIS; KOMIS, 2001; TAO; GUNSTONE, 1999, apud REIS 2004). Os resultados de tais pesquisas demonstram que as simulações ajudam os estudantes a superar problemas cognitivos originados pelas concepções alternativas.

Outro fator que contribui, quando se trata do uso de simulações computacionais, é a maior interatividade, mencionada por Yamamoto e Barbeta (2001), tornando os alunos mais participativos e responsáveis pela sua aprendizagem.

2.3.3 Applets em Java

De acordo com Indrusiak (1996), a linguagem Java foi desenvolvida com o objetivo de ser mais simples e eficiente que as outras linguagens de programação. Seu alvo inicial era a produção de softwares para produtos eletrônicos de consumo (fornos de microondas, agendas eletrônicas, etc.)

A linguagem obteve sucesso em cumprir os requisitos de sua especificação mas, apesar de sua eficiência, não conseguiu sucesso comercial. Com a popularização da rede Internet, seus criadores perceberam que aquele seria um nicho ideal para aplicar a recém criada linguagem de programação.

Esta linguagem permitiu a criação de programas, batizados de applets, que trafegam e trocam dados através da Internet. Com isso, a linguagem conseguiu uma grande popularização, passando a ser usada amplamente na construção de documentos da Internet que permitam maior interatividade.

Atualmente, a linguagem Java é a força propulsora por trás de alguns dos maiores avanços da computação mundial, como o comércio eletrônico e interatividade em páginas da Internet, ensino à distância, jogos e entretenimento.

De acordo com Mawata (1998), os applets em Java começaram a aparecer nas páginas da Internet em 1995. Muitos são usados apenas como fator decorativo. Os mais "sérios" são usados na indústria financeira. Na educação seu uso pedagógico ainda precisa ser bastante explorado.

Mawata (2007) classifica os applets como:

- **Geradores de exemplos**, em vez de uma única imagem com um retrato que dê um exemplo do conceito que está sendo ensinado, um applet permite que nós tenhamos muitos exemplos, não estáticos, mas sim em movimento;
- **Geradores de exercícios**, permitindo verificar se o estudante compreendeu a definição ou conceito;
- **Geradores de dados**, os quais podem ser analisados pelos estudantes que fazem conjecturas baseados nesses dados;
- **Fornecedores de Passos**, seqüências que devem ser seguidas para o manuseio com o applet no conteúdo que vem sendo estudado;

- **Que apresentam figuras**, animações que não poderiam ser feitas sem um computador, com o objetivo de verificar/mostrar algum teorema;
- **Fornecedores de enigmas**, o aluno é desafiado a descobrir como o applet funciona, resgatando o interesse pela resolução de problemas e construindo conceitos matemáticos;
- **Ajustados para um curso**, com diferentes níveis, apresentados em diferentes momentos deste.

Alguns applets voltados ao ensino de frações foram analisados, selecionados e relacionados às concepções alternativas dos estudantes, e, após isso, aplicados, conforme veremos na metodologia do trabalho, abordada no próximo capítulo.

3 METODOLOGIA

Os passos e métodos adotados, bem como identificação dos sujeitos envolvidos na pesquisa serão detalhados a seguir.

3.1 PRINCIPAIS CARACTERÍSTICAS

Com vistas no problema de pesquisa exposto no primeiro capítulo deste trabalho e nos objetivos traçados, buscamos bibliografia e, a partir de leituras e análises de artigos e dissertações relacionados aos três pilares da pesquisa - frações, concepções alternativas e simulações computacionais -, estabelecemos algumas concepções alternativas relacionadas às frações.

Após isso, analisamos e selecionamos applets que abordam frações, relacionando-os às Concepções Alternativas já identificadas.

As aplicações destes applets foram feitas com uma turma de 7ª série, chamada de turma experimental, e, para termos um parâmetro de comparação, trabalhamos de forma tradicional com outra turma de 7ª série, chamada de turma controle. Ambas fizeram um teste antes e outro após as aulas, para avaliação do crescimento.

3.2 COLETA DE DADOS

Para verificar se de fato os applets auxiliariam a evolução conceitual desse conteúdo, trabalhou-se com duas turmas: experimental e controle. A turma experimental foi aquela com a qual fizemos as aplicações das simulações, enquanto a turma controle teve o mesmo período de aulas sobre o mesmo conteúdo, mas de maneira tradicional, como uma revisão em sala de aula de forma expositiva/dialogada. O objetivo de trabalhar dessa forma é avaliar a evolução das duas turmas e, assim, poder analisar o crescimento de ambas, verificando se a turma com a qual as simulações foram aplicadas teve uma melhora mais significativa.

Essa comparação entre a turma experimental e a turma controle foi feita através de testes: o pré-teste e o pós-teste, que na realidade é o mesmo teste, realizado antes e após as aplicações, para verificar o crescimento ou não dos alunos e das turmas como um todo.

3.2.1 Pré e Pós-Teste

Com o objetivo de descartar possíveis respostas corretas ao acaso, o teste (Apêndice A), composto por 23 questões, foi elaborado de acordo com a proposta de Treagust (1988), que propõe um aperfeiçoamento ao teste convencional de múltipla escolha. Além de escolher a alternativa para resposta, o teste solicita ao estudante, em uma segunda parte ou seção, que escolha uma justificativa sua escolha por uma dada alternativa na primeira seção.

Se essa justificativa fosse feita de forma discursiva, sua correção envolveria uma análise de discurso. Os testes de duas seções, porém, podem ser elaborados de forma a oferecer, em sua segunda parte, múltiplas alternativas de justificativa, permitindo ao estudante eleger aquela que mais se aproxima da que ele mesmo daria.

O teste foi elaborado a partir de questões consideradas pertinentes e que pudessem identificar as concepções alternativas e/ou científicas dos sujeitos submetidos a ele. Algumas questões tiveram como fonte de inspiração o trabalho de Silva (2005), as demais foram elaboradas com base na experiência docente e discente da autora e em leituras diversas na área.

À medida que as questões do teste foram elaboradas, construiu-se também o gabarito que identifica as concepções alternativas e científicas. Cada questão identificou uma ou mais concepções relacionadas à frações e/ou uma ou mais concepções alternativas, conforme os gabaritos dos Quadros 1, 2. O Quadro 3 traz o gabarito das questões que identificam ausência de concepção.

Concepção	Gabarito	Definição
Parte-Todo	1ba; 3db; 5ed; 6aa; 9ce; 10cb; 11bb; 19dc; 8cc;	Emerge da ação de dividir uma grandeza em partes equivalentes.
Medida	4dc; 12ad; 17dc; 17cd; 18aa;	As tarefas de medições de comprimentos em geral trazem a necessidade de novos números.
Quociente	2ad; 7bd; 7cc; 15aa; 21ad; 23ba; 8bb, 8cc; 22bc;	Associada à distribuição ou divisão de grandezas.
Razão	13cc;	Associa à idéia de comparação entre medidas de duas grandezas.
Operador	14dc; 16ac; 20ab;	É manipulado como “algo que atua sobre uma quantidade” e a modifica produzindo uma nova quantidade.

Quadro 1: Gabarito das Concepções Científicas

Concepção	Gabarito	Definição
Frações são Unitárias	2be; 7ae; 15bc; 17ba;	Dificuldade em aceitar frações não unitárias, optando pelo uso destas nas representações.
Frações são apenas partes de um todo	5de; 5ee; 9dd; 10aa; 8aa;	Por vezes as frações são vistas como sendo apenas parte de um todo, desconsiderando suas outras concepções.
As partes que compõe o todo não são iguais	1ad; 3ca; 5ba; 6cb; 11cd; 16ba; 19aa; 19ba; 19ca; 19ea;	A contagem das partes que compõe o todo é enfatizada deixando de se considerar o tamanho das mesmas.
Frações são compostas por dois números	14aa; 14cb; 16cb; 23cc; 18ba; 20ba; 22bb	As frações são vistas como dois números separados por um traço o que leva a operar com estes números separadamente.
Há apenas uma representação fracionária para determinada quantia	9ec; 11dc; 12db; 19fb; 13aa; 13bb;	Os estudantes não aceitam diferentes representações - frações equivalentes - para quantidades iguais.

Só existem números Naturais	2da; 2db; 7eb; 15db	Acostumados a trabalhar com os números naturais, alguns estudantes apresentam dificuldade em aceitar outras representações como números.
Não há números entre dois inteiros	4gd; 17ab;	Entre dois números inteiros não existem outros números, “há uma buraco entre dois números inteiros”.
Frações não são números		Aceitar frações como sendo somente a parte de um todo, uma relação entre dois números, um operador, mas não como um número por si só.

Quadro 2: Gabarito das Concepções Alternativas

1cc; 1db; 2cc; 3ad; 3bc; 4ac; 4ba; 4ce; 4ea; 4fb; 5df; 5db; 5ac; 5ca; 6bb; 7da; 8dx; 9ab; 9bb; 9ca; 9df; 10bc; 11aa; 12ba; 12cc; 14bd; 14ee; 14fg; 14gg; 15ca; 18cc; 18db; 21ba; 21ce; 21db; 21ec; 22aa; 23ax; 23cb.

Quadro 3: Gabarito - Ausência de Concepção

De acordo com esse gabarito, cada teste teve uma nota correspondente, usada para calcular a média das turmas no pré e pós-teste.

A avaliação do teste foi feita da seguinte forma:

- as respostas e justificativas corretas foram equivalentes a 2 pontos,
- as repostas corretas sem justificativa foram equivalentes a 1 ponto,
- as demais respostas não somaram pontos.

3.2.2 Guia para a execução

A turma experimental teve as aplicações das simulações, para as quais foram usados guias, de acordo com a técnica P.O.E., que significa predizer-observar-explicar (do inglês *predict-observe-explain*) (WHITE; GUSTONE, 1992 apud TAO; GUSTONE, 1999). Tao e Gustone (1999, p.863) propõem a metodologia P.O.E. para “promover conflitos conceituais que facilitam a mudança conceitual”.

Nesta, os alunos devem predizer o que eles acreditam que irá ocorrer no ambiente de simulação, após isso, observar o que de fato acontece e, finalmente, comparar o previsto com o observado, tendo de justificar as eventuais diferenças observadas. Segundo Reis (2003), tal metodologia promove conflitos conceituais, levando o estudante a refletir sobre o fenômeno simulado frente a suas concepções anteriores (utilizadas durante a fase de previsão). Foram escolhidos 6 applets para as aplicações e, para cada um destes, foi construído um guia (Apêndices C a H).

A turma controle, como já foi colocado, teve o mesmo período de aulas da turma experimental, onde foram abordados os mesmos conteúdos trabalhados nas simulações, sendo, no entanto, de forma tradicional, ministradas pelo professor titular da turma. As atividades dadas como reforço para a turma controle (Apêndice B) foram retiradas dos livros, indicados pelo MEC - PNLD 2008 (Programa Nacional do Livro Didático): Matemática: Idéias e Desafios (2005), Matemática e Realidade (2005)) e do site Só Matemática (www.somatematica.com.br).

3.2.3 Cronograma das Aplicações

Segue o cronograma das aulas das turmas experimental (171) e controle (172).

21/08/2007 - 3ª f. - 171 - 2 períodos - Apresentação da Pesquisa aos alunos e Pré - Teste.
172 - 2 períodos - Apresentação da Pesquisa aos alunos e Pré - Teste.

22/08/2007 - 4ª f. - 171 - 2 períodos - Aplicações dos Applets:
Fractions Pieces (Apêndice C)
Fractions Bars Applet (Apêndice D)
Fraction Model Applet (Apêndice E)
172 - 2 períodos - Revisão

28/08/2007 - 3ª f. - 171 - 2 períodos - Aplicações
Equivalent Fractions (Apêndice F)
Fraction - Comparing (Apêndice G)

Fraction - Adding (Apêndice H)
172 - 2 períodos - Revisão
05/09/2007 - 4ª f. - 171 - 1 período - Término das aplicações
171 - 1 período - Pós - Teste
172 - 1 período - Pós - Teste

3.3 CARACTERÍSTICAS DA AMOSTRA

As aplicações aconteceram em uma escola particular - Instituto Sinodal Dorothea Schäfke - da cidade de Taquara/RS, com alunos de 7ª série do Ensino Fundamental. A escolha da escola se deu pela disponibilidade da direção e do professor titular das turmas, e pelo laboratório de informática, bem equipado com máquinas e Internet de qualidade, que funcionaram perfeitamente com os applets. Em outra escola, os applets foram testados, mas não apresentaram o desempenho necessário.

A intenção era aplicar as simulações a alunos de 7ª ou 8ª série, por serem turmas onde se considera que o conceito de fração já esteja concretizado e os estudantes já dominem todas as idéias relacionadas a esta concepção. Como a escola tinha apenas uma turma de 8ª série, as aplicações foram feitas com as duas turmas de 7ª série.

Ambas as turmas tinham aulas pela manhã e o professor titular era o mesmo. A turma experimental (171) era composta por 26 alunos, sendo que um deles não esteve presente no pré e pós-teste e, assim, foram analisados apenas os resultados dos outros 25 alunos. A turma controle (172) era composta por 21 alunos, dos quais 19 fizeram tanto o pré como o pós-teste, cujos resultados foram analisados.

De acordo com a metodologia exposta, foram feitas as aplicações. Os resultados e análise dos mesmos frente aos objetivos expostos inicialmente foram feitos conforme o capítulo 4.

4 ANÁLISE DOS DADOS E RESULTADOS

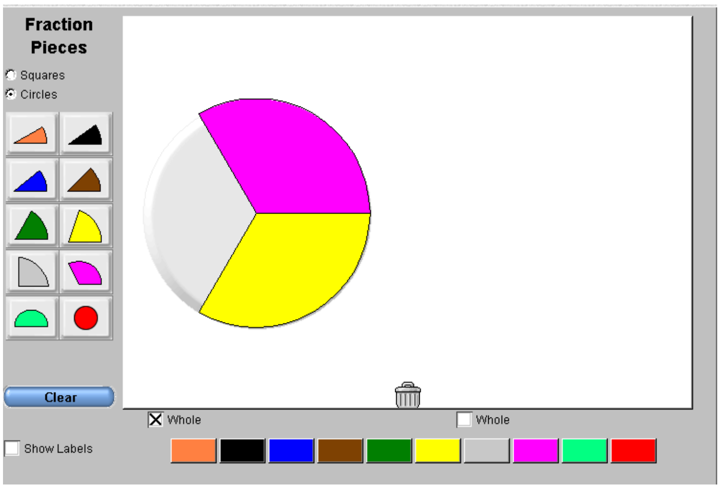
Com os dados em mãos passou-se a análise dos mesmos, tabelando, relacionando com as pesquisas bibliográficas feitas, fazendo suposições e tirando conclusões, que estão descritas neste capítulo.

4.1 SIMULAÇÕES ANALISADAS

De acordo com a proposta inicial, as simulações usadas seriam elaboradas pela autora. No entanto, através de artigos e pesquisa na Internet chegamos a um número bastante expressivo de applets já disponíveis na Internet que abordavam conceitos fracionários, não havendo assim necessidade de criar novos. Esses applets foram classificados de acordo com as concepções alternativas que cada um abordava.

Segue nossa análise de cada um deles, descrevendo como cada um funciona, bem como as concepções científicas trabalhadas e as concepções alternativas que podem ser trabalhadas com seu auxílio:

1. *Fraction Pieces* (Partes da Fração)
http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_274_g_3_t_1.html?open=activities



Concepções Científicas e tópicos abordados:

- Parte-todo

Concepções Alternativas abordadas:

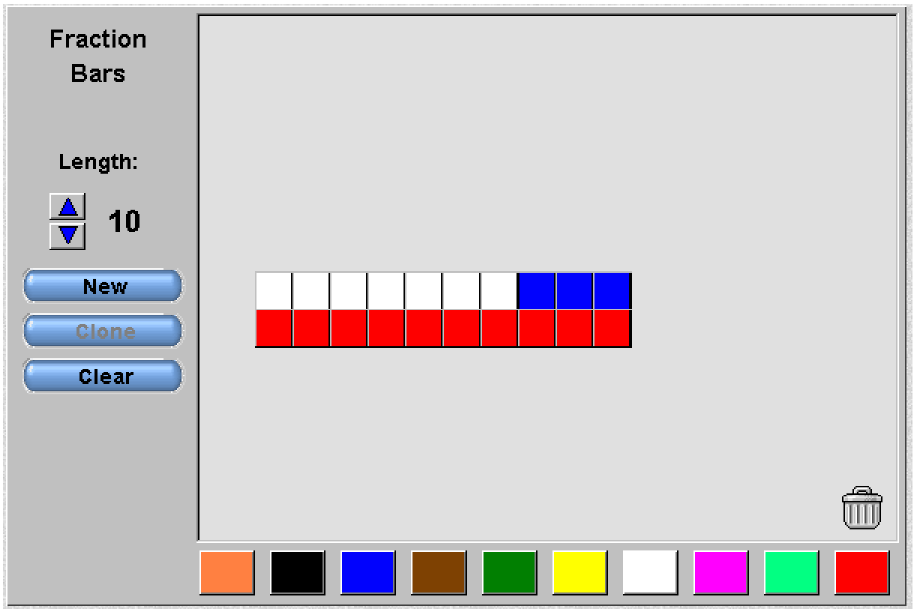
- As partes que compõe o todo não são iguais

Descrição:

Com círculos ou quadrados, tendo a opção para um ou dois inteiros, pedaços de diferentes tamanhos são fornecidos para que se possa completar os inteiros. A opção "mostrar partes" pode ser ativada ou desativada, a qual mostra a fração do todo que cada parte representa ao passar o mouse por cima dela.

2. *Fraction Bars* (Barras de Fração)

http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_203_g_2_t_1.html



Concepções Científicas e tópicos abordados:

- Parte-todo

Concepções Alternativas abordadas:

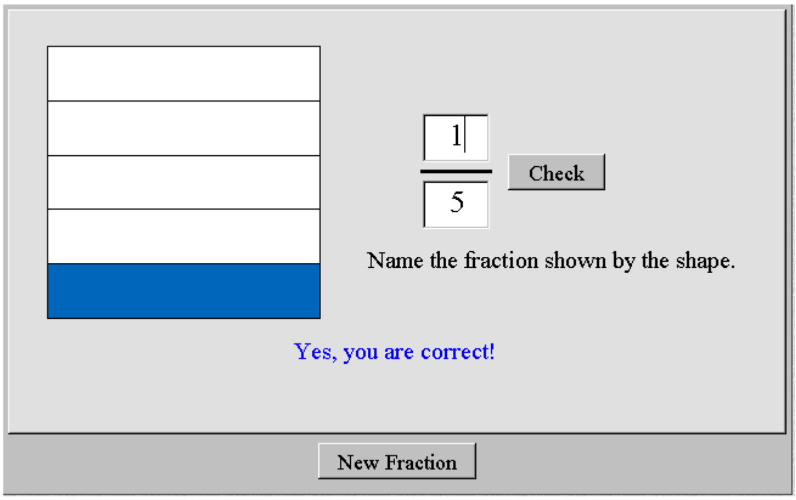
- As partes que compõe o todo não são iguais

Descrição:

Permite que barras de diferentes cores e tamanhos sejam criadas.

3. ***Fractions - Naming*** (Nomear Frações)

http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_104_g_2_t_1.html



Concepções Científicas e tópicos abordados:

- Parte-todo

Concepções Alternativas abordadas:

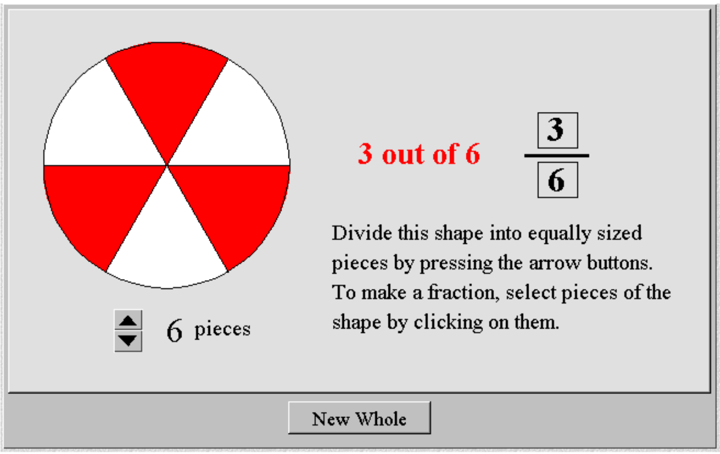
- As partes que compões o todo não são iguais

Descrição:

Uma figura, dividida em partes iguais, com algumas delas pintadas é apresentada ao estudante, que deve responder qual fração da figura está pintada.

4. *Fractions - Parts of a Whole* (Frações - Partes de um todo)

http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_102_g_2_t_1.html



Concepções Científicas e tópicos abordados:

- Parte-todo

Concepções Alternativas abordadas:

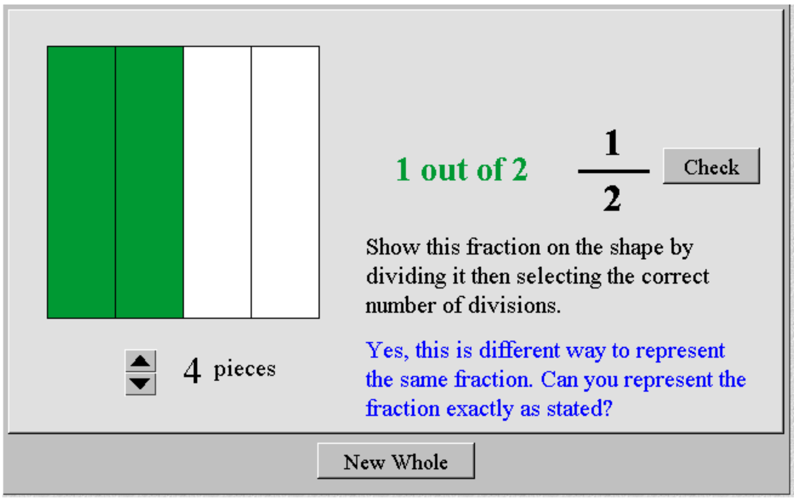
- As partes que compões o todo não são iguais

Descrição:

O estudante pode dividir o inteiro fornecido (círculo ou retângulo) em quantas partes desejar e pintar o número de partes conveniente, a fração correspondente aparecendo ao lado.

5. ***Fractions - Visualizing*** (Visualizar frações)

http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_103_g_2_t_1.html



Concepções Científicas e tópicos abordados:

- Parte-todo

Concepções Alternativas abordadas:

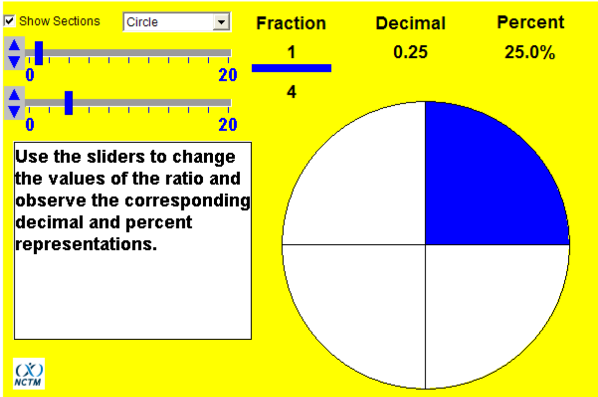
- As partes que compõe o todo não são iguais

Descrição:

O estudante deve representar no inteiro fornecido a fração dada.

6. ***Fraction Model Applet*** (Modelo de Frações)

http://my.nctm.org/eresources/repository/2071/applet/FractionPie/index.html



Concepções Científicas e tópicos abordados:

- Parte-todo
- Representação fracionária
- Representação decimal
- Porcentagem
- Frações impróprias

Concepções Alternativas abordadas:

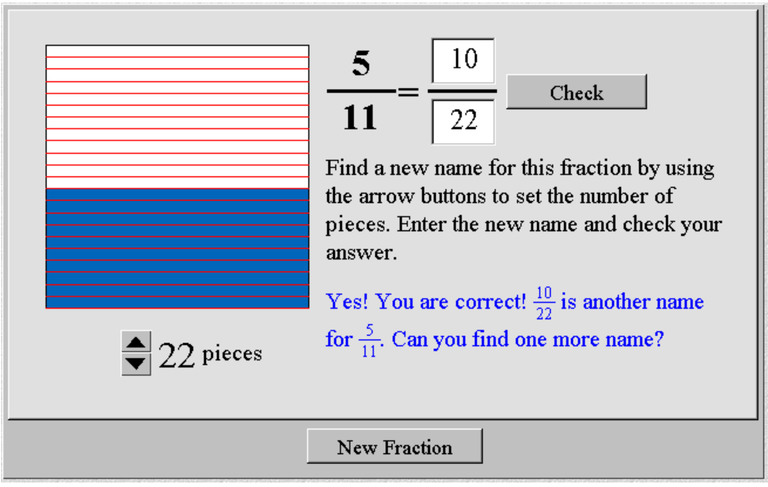
- As partes que compõe o todo não são iguais
- Só existem números naturais
- Frações não são números

Descrição:

Há três versões: na primeira, o denominador pode ser alterado variando entre 1, 2, 4, 5, 8, 10, e 20 e o numerador de 1 a 20, incluindo todos os inteiros; na segunda, ambos podem variar de 1 a 20 incluindo todos os inteiros entre eles; e na terceira podem ser alterados de 1 a 100. Fornece opções de círculo, retângulo e conjunto para as representações, mostrando ou não as divisões em que o todo foi dividido.

7. *Fractions - Equivalent* (Frações Equivalentes)

http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_105_g_3_t_1.html



Concepções Científicas e tópicos abordados:

- Equivalência de frações

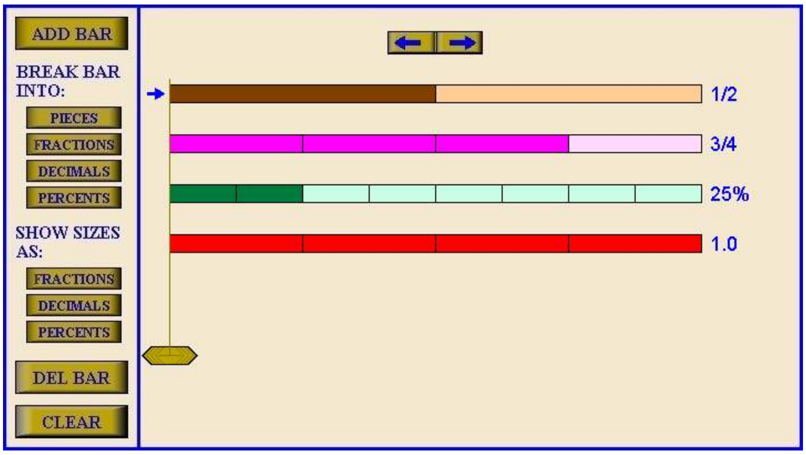
Concepções Alternativas abordadas:

- As partes que compõe o todo não são iguais
- Há apenas uma representação fracionária para determinada quantia.

Descrição:

Uma fração e um desenho que representa esta são mostrados inicialmente. O aluno deve, então, dividir novamente a figura em mais ou menos partes até que as novas partes se encaixem na parte já pintada e, então, escrever a fração correspondente ao lado da fração inicial.

8. *Fraction Bars Applet* (Barras de Fração)
(http://arcytech.org/java/fractions/fractions.html)



Concepções Científicas e tópicos abordados:

- Equivalência de frações
- Diferentes sistemas de representação dos números racionais (fracionário, decimal, porcentagem)
- Relação de maior ou menor entre as frações

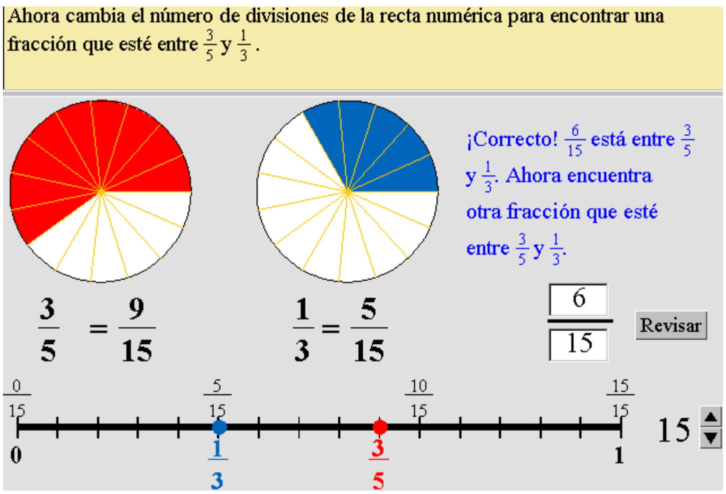
Concepções Alternativas abordadas:

- Frações são Unitárias
- As partes que compõe o todo não são iguais
- Há apenas uma representação fracionária para determinada quantia

Descrição:

Permite o uso de até 5 barras de tamanho unitário, que podem ser divididas em 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12 ou 16 partes, podendo pintar quantas partes desejar.

9. *Fractions - Comparing* (Frações - Comparação) (http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_159_g_3_t_1.html)



Concepções Científicas e tópicos abordados:

- Frações equivalentes
- Parte-todo
- Localização de frações na reta
- Relações entre frações (maior, menor, entre).

Concepções Alternativas abordadas:

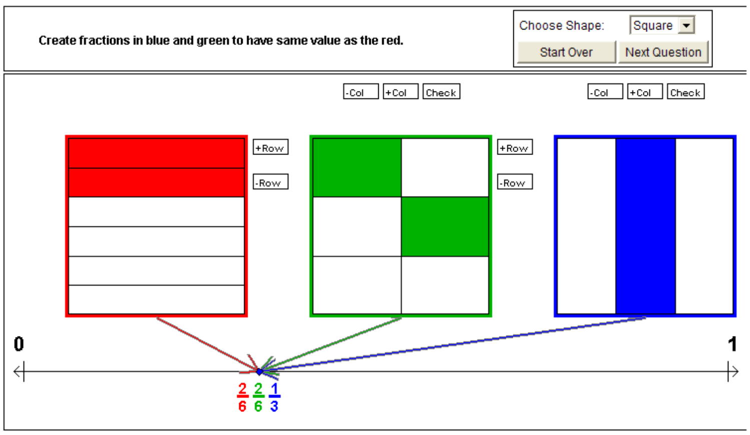
- Frações são apenas parte de um todo
- As partes que compõe o todo não são iguais
- Frações são compostas por dois números
- Há apenas uma representação fracionária para determinada quantia
- Não há números entre dois inteiros
- Frações não são números

Descrição:

Inicialmente, duas frações são dadas com seus respectivos desenhos e o estudante deve escrever frações equivalentes a estas com o mesmo denominador. Para isso, as figuras podem ser divididas em mais partes, até que ambas tenham a mesma quantia de partes, que será o denominador comum. Na seqüência, as frações devem ser localizadas em uma reta já dividida na quantia de partes correspondente ao denominador das frações, e, por fim, é solicitada uma fração que esteja entre as duas localizadas. Nesta parte, a reta pode ser dividida em mais ou menos partes, conforme for necessário.

10. *Equivalent Fractions* (Frações Equivalentes)

http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=80



Concepções Científicas e tópicos abordados:

- Parte-todo
- Localização na reta

- Equivalência de frações

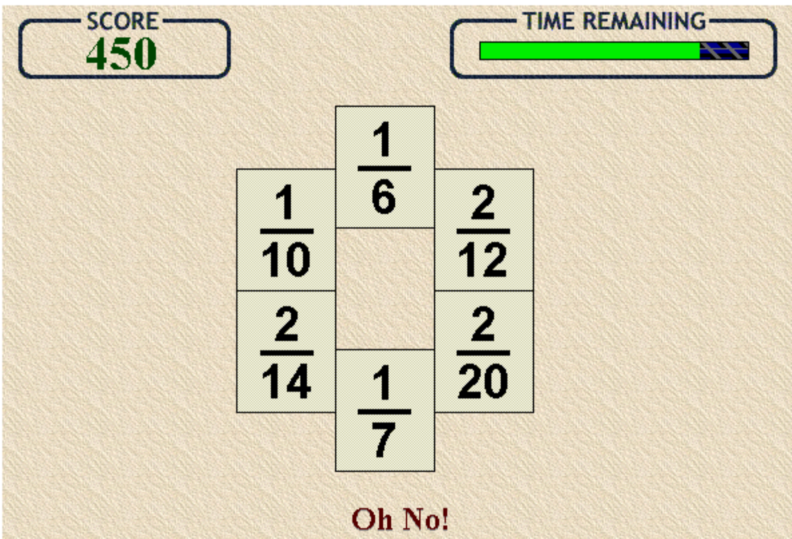
Concepções Alternativas abordadas:

- Frações são Unitárias
- São apenas parte de um todo
- As partes que compõe o todo não são iguais
- Há apenas uma representação fracionária para determinada quantia
- Não há números entre dois inteiros.

Descrição:

Inicialmente uma fração, localizada em uma reta é mostrada com seu respectivo desenho, cabendo ao estudante representar nos outros dois inteiros disponíveis (em forma de círculo ou retângulo) frações equivalentes àquela dada. Para isso, estes inteiros podem ser divididos em mais colunas ou linhas, conforme for necessário. Instantaneamente, a fração representada nos inteiros é localizada na reta. Por fim, o aluno pode verificar se sua solução está correta.

11. *Fraction Frenzy* (Frenesi de Frações) (http://www.learningplanet.com/sam/ff/index.asp)



Concepções Científicas e tópicos abordados:

- Frações Equivalentes

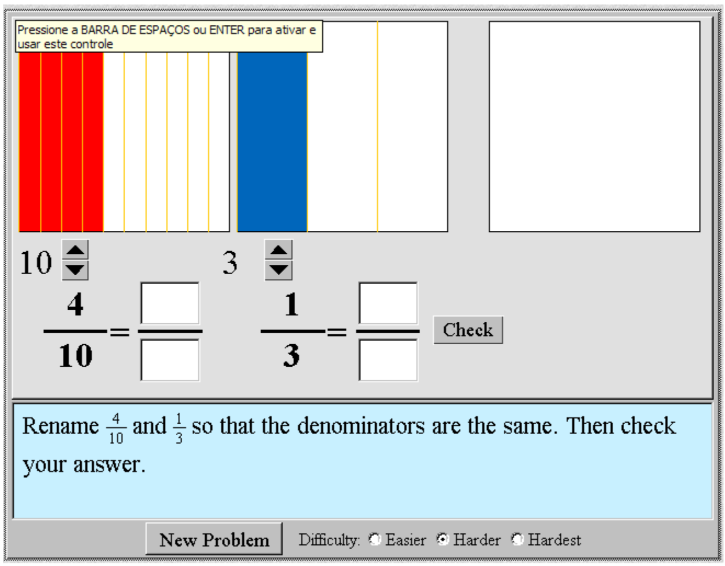
Concepções Alternativas abordadas:

- Há apenas uma representação fracionária para determinada quantia

Descrição:

Trata-se de um jogo, com objetivo de achar pares de frações equivalentes. A dificuldade vai crescendo e o tempo também é levado em consideração.

12. *Fractions - Adding* (Frações - Adição) (http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_106_g_3_t_1.html)



Concepções Científicas e tópicos abordados:

- Soma de frações
- Equivalência de frações
- Parte-todo.

Concepções Alternativas abordadas:

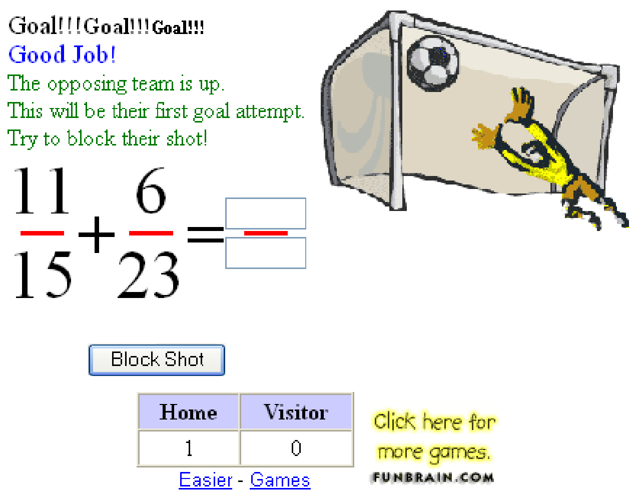
- As partes que compõe o todo não são iguais
- Há apenas uma representação fracionária para determinada quantia

Descrição:

Na primeira parte, o estudante deve escrever uma fração equivalente para cada uma dada pelo computador. Além disso, elas devem ter o mesmo denominador. Como auxílio para isso, as figuras que representam essas frações são mostradas, havendo a possibilidade de dividi-las em mais partes até que as duas tenham a mesma quantia. Após isso, deve-se somar essas frações. Se o resultado estiver correto, aparece um desenho mostrando a soma que foi feita.

13. *Soccer Shootout* (Futebol de Frações)

http://www.funbrain.com/fractop/index.html



Concepções Científicas e tópicos abordados:

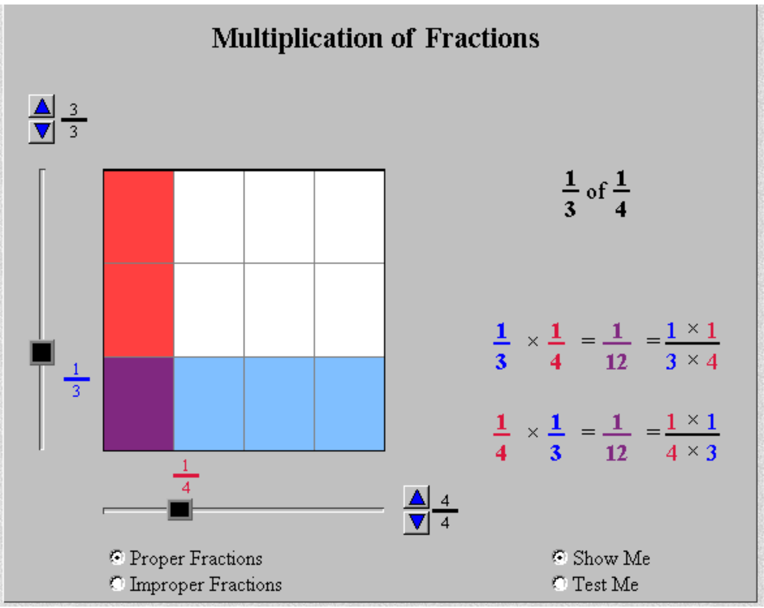
- As quatro operações
- Simplificação de frações

Descrição:

O estudante pode marcar gols ou defender bolas, caso acerte os cálculos. Com níveis fácil, médio e difícil.

14. ***Fractions - Rectangle Multiplication*** (Frações - Multiplicação no Retângulo)

http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_194_g_2_t_1.html



Concepções Científicas e tópicos abordados:

- Multiplicação de frações

Concepções Alternativas abordadas:

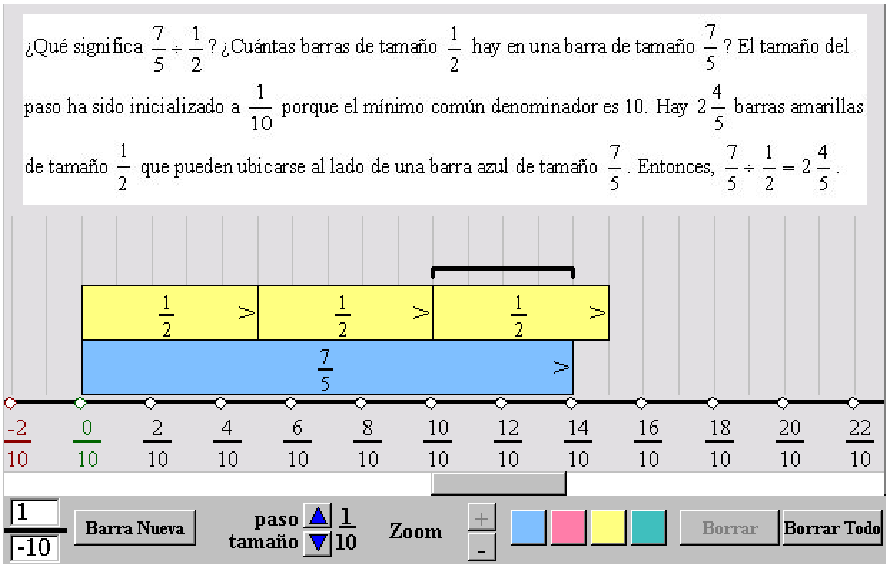
- As partes que compõe o todo não são iguais

Descrição:

Trabalha a multiplicação de frações através do cálculo e do desenho, mostrando as partes pintadas em cada caso. Permite o cálculo com frações impróprias até 2 inteiros. O denominador das frações pode variar de 1 a 8.

Tem a opção de mostrar o cálculo e de testar o estudante, dando um cálculo para ser resolvido. Uma das frações deve ser representada na vertical e outra na horizontal; as partes que estão pintadas pelas duas representam a solução.

15. ***Number Line Bars - Fractions*** (Barras de números em linhas - Frações)
http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_265_g_1_t_1.html?open=activities



Concepções Científicas e tópicos abordados:

- Divisão de frações

Concepções Alternativas abordadas:

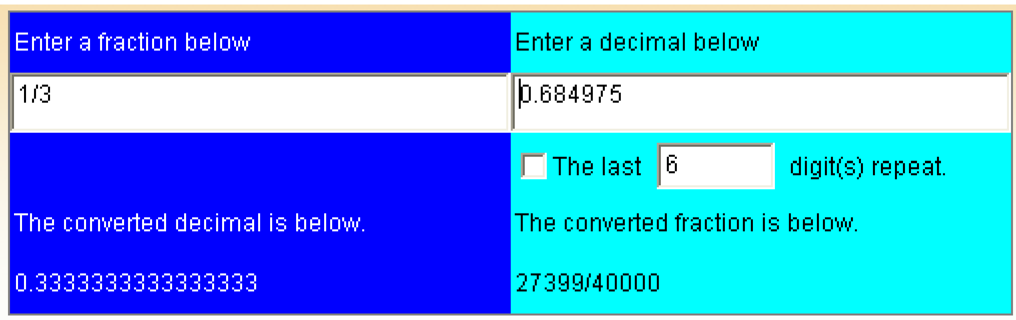
- Frações são compostas por dois números

Descrição:

Fornece recursos para o aluno trabalhar e visualizar como ocorre a divisão de frações. Ao iniciar o uso do applet, um exemplo de divisão de frações é mostrado e explicado. O estudante pode, então, limpar a tela e usar os recursos fornecidos para fazer outros cálculos que desejar, dividido a reta em mais ou menos partes, criando barras de frações e sobrepondo-as.

16. *Converter* (Conversor)

http://www.shodor.org/interactivate/activities/Converter/



Concepções Científicas e tópicos abordados:

- Relaciona a representação decimal e fracionária.

Descrição:

Ao entrar com uma fração, esta é convertida para um decimal e os decimais, por sua vez, são convertidos em frações.

4.2 ASSOCIAÇÃO DOS APPLETS ÀS CONCEPÇÕES

Após explorar cada um dos applets acima descritos, nos preocupamos em analisá-los com vistas a sanar as concepções alternativas anteriormente expostas e, assim, promover uma evolução conceitual.

Feita esta análise, dispomos esses dados em tabelas, relacionando os applets citados e as concepções alternativas que podem ser abordadas por eles.

Como vemos nos Quadros 4 e 5, algumas concepções alternativas podem ser abordadas por vários applets, assim como alguns destes não abordam concepções alternativas e outros abordam várias.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
A. Frações são Unitárias								X		X						
B. Frações são apenas partes de um todo									X	X						
C. As partes que compõe o todo não são iguais	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		X		X		
D. Frações são compostas por dois números									X						X	
E. Há apenas uma representação fracionária para determinada quantia							X	X	X	X	X	X				
F. Só existem números Naturais						X										
G. Não há números entre dois inteiros									X	X						
H. Frações não são números						X			X							

Quadro 4: Concepções Alternativas x Applets

	A	B	C	D	E	F	G	H
1. *Fraction Pieces*			X					
2. *Fraction Bars*			X					
3. *Fractions - Naming*			X					
4. *Fractions - Parts of a Whole*			X					
5. *Fractions - Visualizing*			X					
6. *Fraction Model Applet*			X			X		X
7. *Fractions - Equivalent*			X		X			
8. *Fraction Bars Applet*	X		X		X			

9. *Fractions - Comparing*		X	X	X	X		X	X
10. *Equivalent Fractions*	X	X	X		X		X	
11. *Fraction Frenzy*					X			
12. *Fractions - Adding*			X		X			
13. *Soccer Shootout*								
14. *Fractions - Rectangle Multiplication*			X					
15. *Number Line Bars - Fractions*				X				
16. *Converter*								

Quadro 5: Applets x Concepções Alternativas

4.3 RELATÓRIO DAS APLICAÇÕES

Turma Experimental

Segue a descrição das aplicações na turma experimental.

Pré-Teste - Em ambas as turmas, o projeto foi explicado e o pré-teste aplicado. Tudo correu da maneira esperada: os alunos realizaram todo o teste, embora extenso, eles se mantiveram concentrados e fizeram de maneira satisfatória.

1º dia de aplicações - Neste primeiro dia, foram utilizadas as seguintes aplicações, com os guias, conforme o apêndice indicado:

- *Fractions Pieces* (Apêndice C)
- *Fractions Bars Applet* (Apêndice D)
- *Fraction Model Applet* (Apêndice E)

À medida que as duplas, ou trios, terminavam um guia, seguiam com o próximo.

No primeiro período, a forma das aplicações e a maneira de usar os guias foram colocados aos alunos, enfatizando a importância de não pular etapas do guia, mas seguir a ordem da técnica P.O.E. (Capítulo 2)

O andamento das atividades foi tranqüilo até o final deste período. Todos os alunos estavam trabalhando, concentrados e empenhados em resolver da melhor forma, não pularam as etapas do guia, algumas dúvidas referentes ao manuseio das simulações surgiram e, na mesma medida, foram sendo solucionadas. Percebemos que os grupos trocavam idéias entre si, procurando achar a melhor resposta. Além do proposto, utilizaram as simulações conforme desejavam.

O segundo período de aula neste dia foi após o recreio. Os alunos voltaram naturalmente mais agitados, recomeçaram as atividades, mas estavam um pouco dispersos. Logo após o início desse segundo período, uma professora da turma pediu licença para lhes dar um recado: explicou então que eles teriam a possibilidade de participar de um projeto e possivelmente ganhar uma viagem à praia. Essa notícia os deixou eufóricos e muito agitados. Dois alunos seguiram com a professora para um sorteio e, após alguns minutos, retornaram com a informação de que a turma havia sido sorteada para participar do projeto. Foi outro momento de tumulto e comemoração. Alguns alunos foram terminando as aplicações propostas para aquele dia e começaram a caminhar pela sala e distrair os colegas. Quatro grupos não conseguiram terminar as atividades propostas para esses períodos. Com esse tumulto todo, muitos alunos perderam o interesse e começaram a fazer de forma displicente, algumas vezes pulando etapas do guia, usando a simulação antes de prever o que aconteceria. Estes acontecimentos prejudicaram o desempenho dos alunos e, assim, a sua aprendizagem também ficou comprometida no que diz respeito aos applets usados neste dia. Possivelmente, sem essas interferências, o interesse e empenho dos estudantes teria se mantido e, assim, a aprendizagem poderia ter sido maior.

As próximas aplicações estavam programadas para a próxima aula deles, mas, tendo em vista o grande tumulto e a perda do interesse pelas atividades, o professor da turma se dispôs a conversar com a turma neste dia e seguirmos com as aplicações na aula seguinte.

2º dia de aplicações - Para o segundo dia de aplicações, as seguintes simulações, juntamente com os guias conforme o apêndice indicado foram utilizadas:

Equivalent Fractions (Apêndice F)
Fraction - Comparing (Apêndice G)
Fraction - Adding (Apêndice H)

Antes de recomeçar as atividades, foi salientada novamente a importância de não pular etapas do guia. Alguns grupos não haviam terminado as atividades previstas para aula anterior e iniciaram a aula concluindo o que havia ficado para trás. Eram dois períodos de aula antes do recreio, os alunos estavam calmos, seguiram com as atividades de maneira satisfatória, usando o guia da maneira correta, com poucas exceções. Para estes foi solicitado que voltassem a fazer da maneira correta. Algumas dúvidas quanto ao uso das simulações surgiam e iam sendo solucionadas. Como na aula anterior, percebeu-se que outros “testes” eram feitos com as simulações, além do indicado, e os alunos comentavam entre si conclusões que tiravam ao observar o que acontecia.

À medida que o tempo ia passando, algumas duplas e trios se mostraram um pouco dispersos, cansados, outros foram terminando as atividades propostas e, em conseqüência disto, passaram a conversar, o que pode ter atrapalhado os outros grupos que ainda estavam trabalhando, e ainda houve alguns grupos que não conseguiram terminar as atividades. Ficou resolvido que esses alunos terminariam antes do pós-teste, enquanto os demais alunos ficariam na sala com o professor da turma.

Pós-Teste - No primeiro período de aula deste dia, os alunos que não conseguiram terminar as atividades propostas na aula anterior seguiram para o laboratório de informática a fim de terminá-las, os demais permaneceram na sua sala de aula com o professor.

No segundo período, o pós-teste foi aplicado, o qual correu de maneira tranqüila; os alunos já conhecendo a estrutura do teste o fizeram sem dúvidas quanto a isso.

Neste mesmo dia, o pós-teste foi aplicado na turma controle, que, concomitante as aplicações na turma experimental, teve aulas sobre os mesmos conteúdos em sala de aula com o seu professor.

Turma Controle

Pré-Teste - Em ambas as turmas o projeto foi explicado e o pré-teste aplicado. Tudo correu da maneira esperada, os alunos realizaram todo o teste, embora extenso, eles se mantiveram concentrados e fizeram de maneira satisfatória.

1º dia de revisões - Neste primeiro dia, iniciou-se com a revisão da simbologia usada na representação de frações, abordando as concepções quociente e parte-todo. Também se abordou a classificação das frações em: próprias, impróprias e aparentes. E ainda foram trabalhadas Frações Equivalentes. As atividades correram dentro do normal, com a realização das atividades programadas. Cabe relembrar que a turma controle é menor que a turma experimental, o que facilita o trabalho do professor que pode mais vezes dar um atendimento individualizado aos estudantes. A turma controle recebeu a divulgação do mesmo projeto que a turma experimental, porém não foi durante os períodos de Matemática, o que evitou tumulto durante as aulas de revisão.

2º dia de revisões - No segundo dia destinado às revisões dos conceitos fracionários, iniciou-se trabalhando a comparação de frações (relações de maior, menor ou igual), a adição de frações de denominadores iguais e diferentes e, por fim, a representação geométrica das frações, localizando-as na reta numérica. Neste dia também a aula transcorreu da maneira esperada, com a realização das atividades propostas por parte dos alunos.

Pós-Teste - A aplicação do Pós-teste foi feita, orientamos novamente os alunos em relação ao formato do teste que foi concluído antes do tempo previsto.

4.4 ANÁLISE DOS TESTES

Com a nota de todos alunos em mãos, calculou-se a média de cada turma para a posterior comparação dos resultados e análise do crescimento conceitual de cada turma.

Em uma primeira análise, calculamos a porcentagem de respostas em cada possibilidade conforme os quadros 1, 2 e 3. Agrupamos estas porcentagens de respostas de acordo com as concepções científicas ou alternativas em que se encaixavam, também de acordo com os quadros 1 e 2, e, em seguida, calculamos a média de cada uma.

Isso foi feito com os resultados dos dois testes, e então calculamos a diferença entre o pós-teste e o pré-teste para cada concepção científica e cada concepção alternativa identificada pelo mesmo.

Após analisar esses resultados, verificamos que, de fato, a turma experimental teve um crescimento conceitual maior que o da turma controle no que diz respeito as concepções científicas, podemos observar isso através da Tabela 1 e da Figura 1, que trazem o crescimento e Pontos Percentuais (PP) de cada turma em cada concepção científica.

Tabela 1

Evolução em PP das turmas nas Concepções Científicas

Concepção/Turma	Experimental (n=25)	Controle (n=19)
Parte-Todo	8,89%	3,33%
Medida	8,80%	-4,00%
Quociente	0,48%	0,00%
Razão	4,00%	5,00%
Operador	18,67%	11,67%

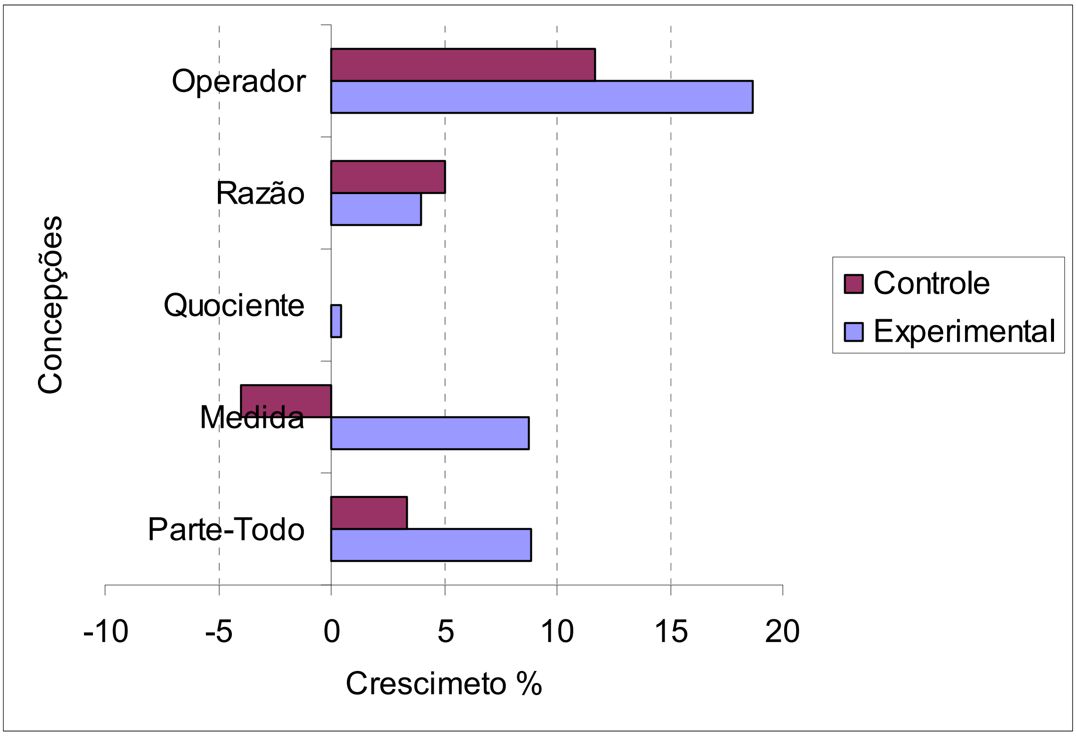


Figura 1 - Evolução em PP das turmas nas Concepções Científicas

Assim como as Concepções Científicas, avaliamos o desempenho das turmas nas Concepções Alternativas, conforme a Tabela 2. Cabe ressaltar que esperávamos, para as concepções alternativas, um decréscimo nos PP de respostas.

Tabela 2

Evolução em PP das turmas nas Concepções Alternativas

Concepções Alternativas/ Turmas	**Experimental (n=25)**	**Controle (n=19)**
São Unitárias	0,00%	3,75%
Frações são apenas partes de um todo	1,60%	-5,00%
As partes que compõe o todo não são iguais	-3,20%	-4,00%
Frações são compostas por dois números	-8,57%	-1,43%

Aceitar apenas uma representação fracionária para determinada quantia	4,67%	-1,67%
Só existem números Naturais	-6,00%	0,00%
Não há números entre dois inteiros	-4,00%	-7,50%

Observamos na Tabela 2 que nem todas as Concepções Alternativas tiveram um decréscimo na turma experimental e ainda que algumas concepções alternativas tiveram um decréscimo maior na turma controle.

Uma hipótese para este acontecido é o fato de termos usado applets que não foram construídos especificamente para trabalhar Concepções Alternativas, mas sim para trabalhar conteúdos relacionados à frações. Possivelmente, se os applets tivessem sido criados especificamente para este fim, tivessem características diferentes e teríamos então resultados mais positivos.

Na Figura 2, vemos a porcentagem de respostas que indicavam as Concepções Alternativas no pré-teste e no pós-teste da turma experimental. Já a Figura 3 traz essa porcentagem referente à turma controle.

As Figuras 4 e 5 trazem a porcentagem de respostas que indicavam as Concepções Científicas no pré-teste e no pós-teste da turma experimental e controle, respectivamente.

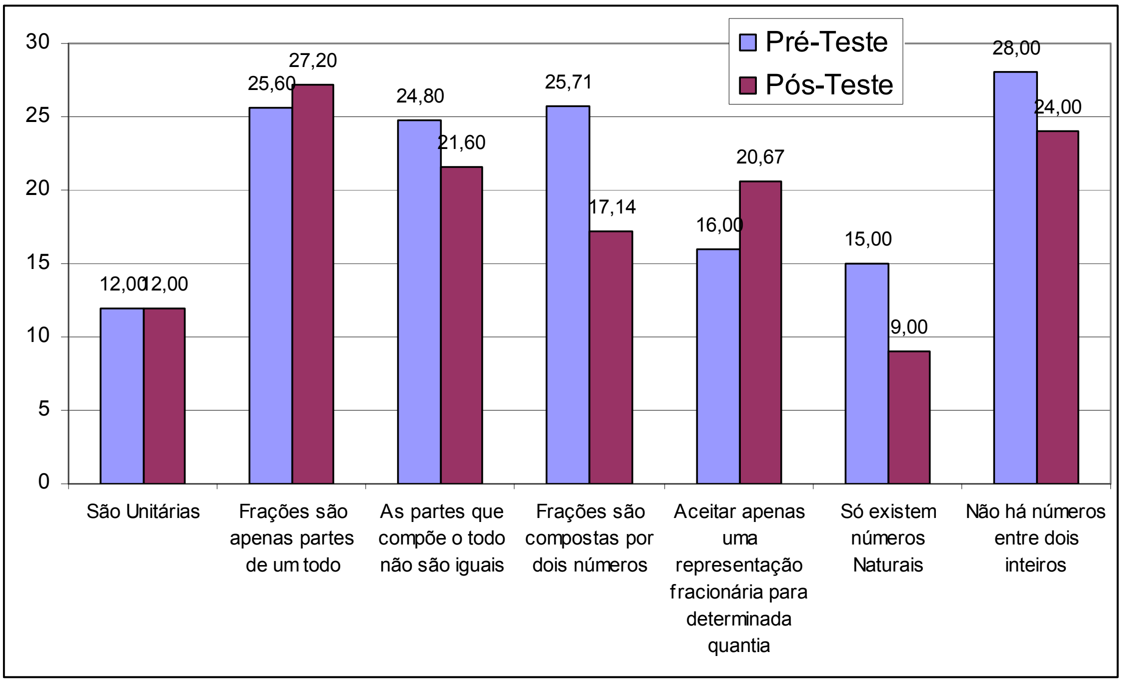


Figura 2 - Porcentagem de respostas referente às Concepções Alternativas da turma experimental

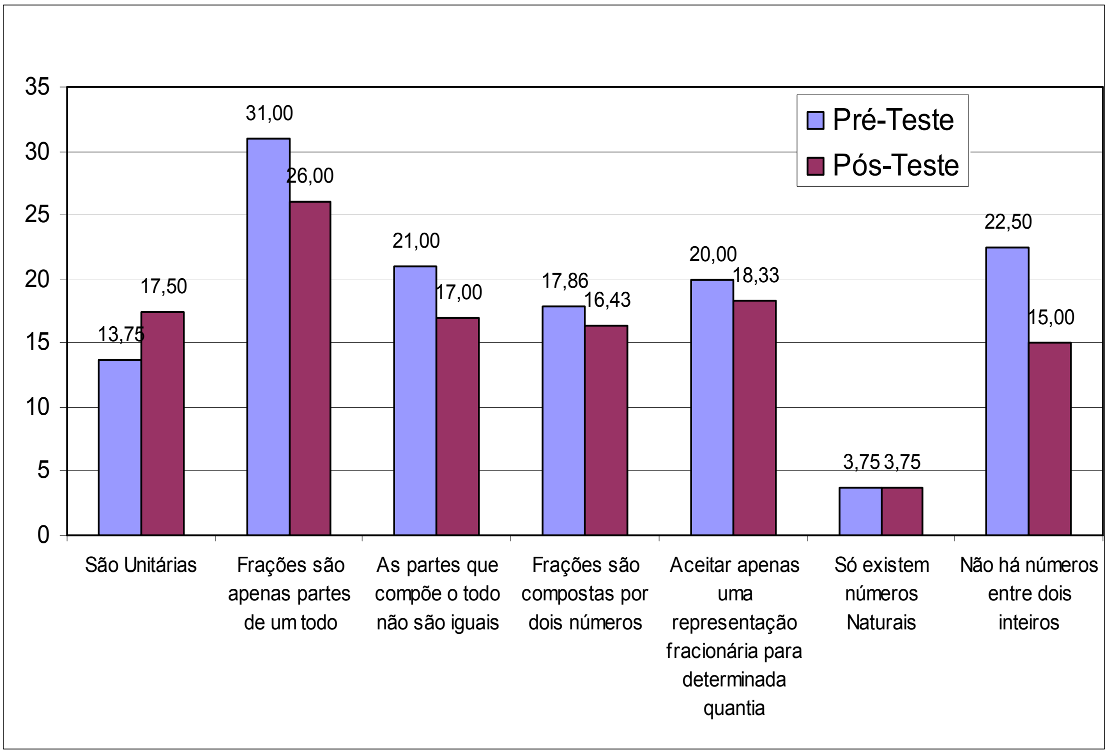


Figura 3 - Porcentagem de respostas referente às Concepções Alternativas da turma controle

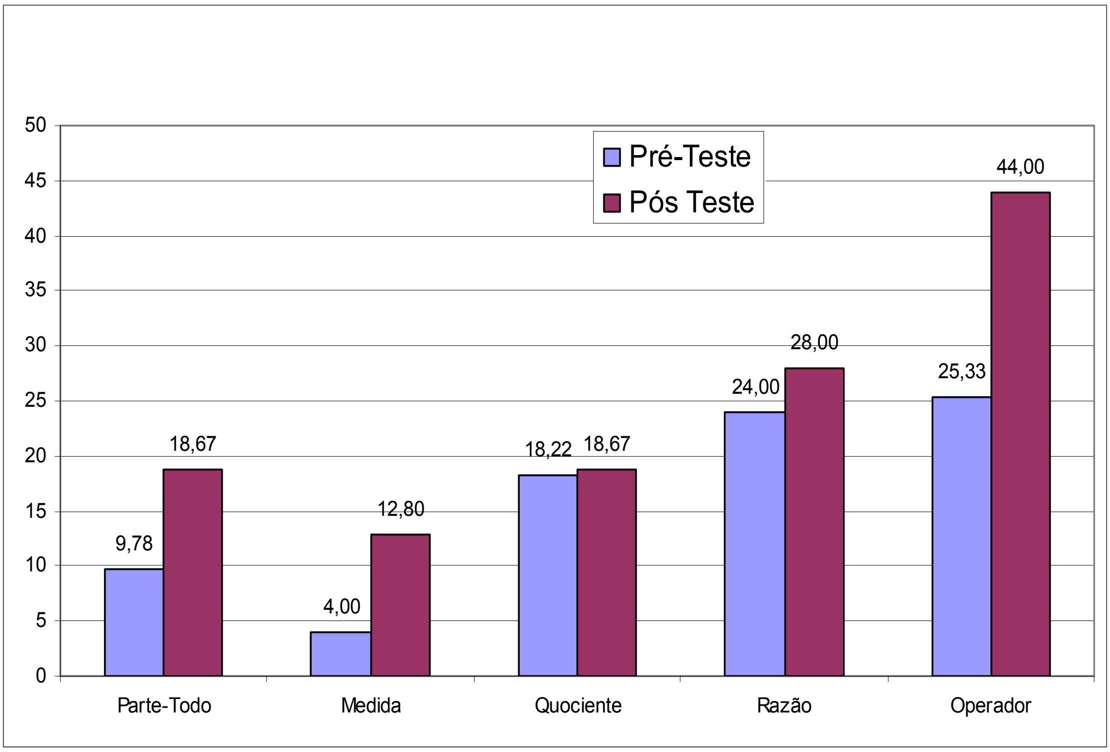


Figura 4 - Porcentagem de respostas referente às Concepções Científicas da turma experimental

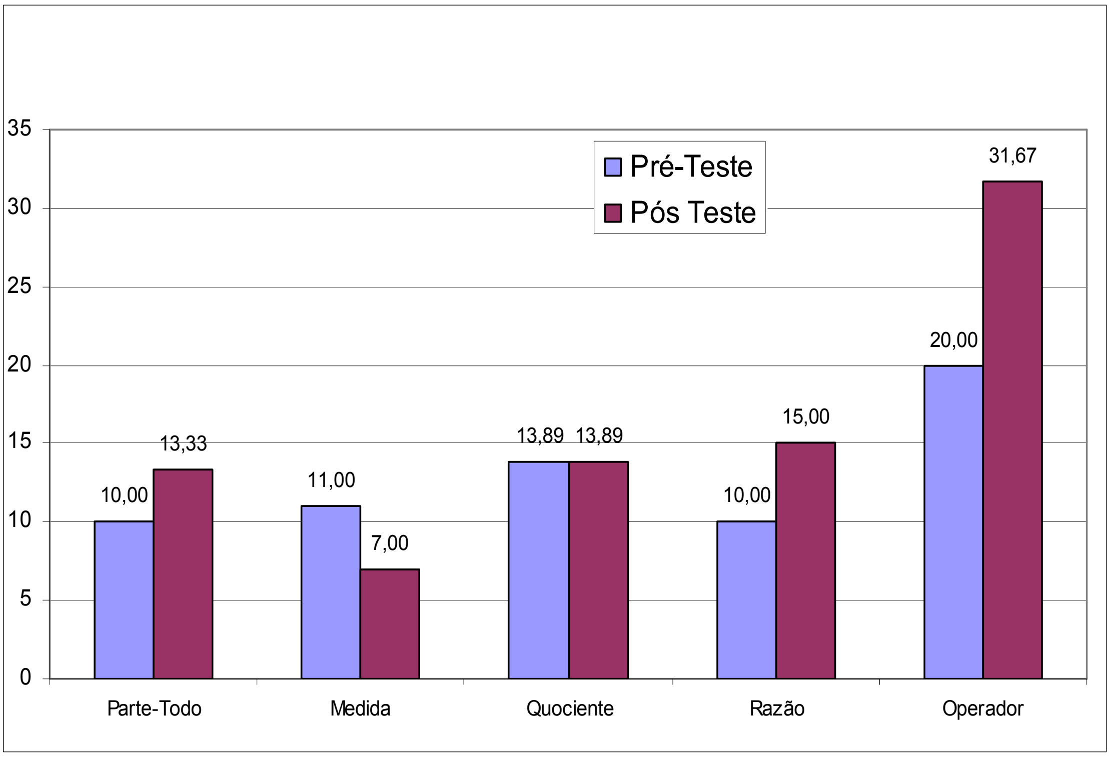


Figura 5 - Porcentagem de respostas referente às Concepções Científicas da turma controle

O Gabarito do teste, de acordo com a metodologia, identificava também Ausência de Concepções, respostas com justificativa coerente, mas que não se enquadravam dentro das Concepções Científicas nem das Concepções Alternativas. A evolução destes resultados está na Figura 6, onde percebemos que a ocorrência destas respostas continuou na mesma porcentagem na turma experimental e teve um decréscimo na turma controle.

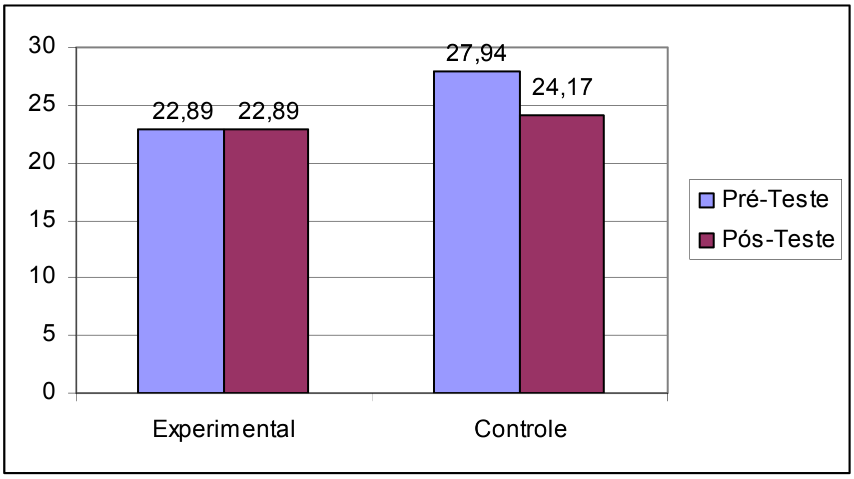


Figura 6 - Porcentagem de respostas com Ausência de Concepção

Durante a analise dos testes, identificamos também respostas incoerentes, que não estavam de acordo com o gabarito exposto na metodologia, ou seja, a justificativa não condizia com a reposta. Traçamos também a evolução das turmas nessas respostas, como vemos na Figura 7, que mostra um decréscimo na sua incidência na turma experimental e um crescimento na turma controle.

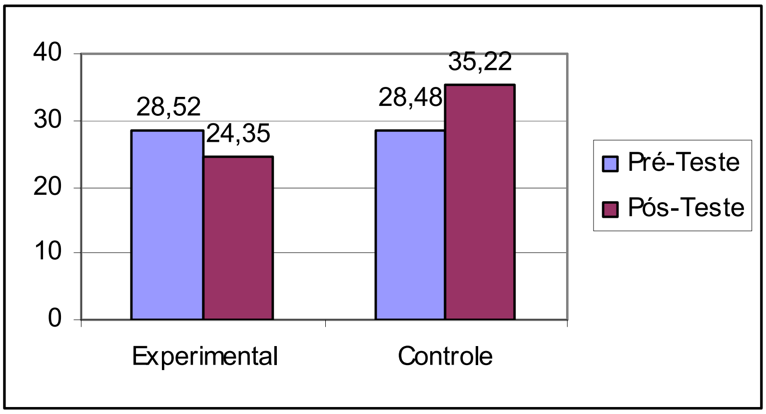


Figura 7 - Porcentagem de Respostas Incoerentes

Analisando os dados da turma experimental, percebemos que houve um crescimento nas Concepções Científicas. De um modo geral, as Concepções Alternativas diminuíram, a Ausência de Concepção se manteve estável e as Respostas Incoerentes diminuíram. Essas respostas, que antes eram incoerentes converteram-se em respostas que identificavam Concepções Científicas ou Alternativas (aquelas que tiveram crescimento). No entanto, mesmo se tornando Concepções Alternativas, consideramos isto um crescimento pois, antes, esses alunos nem sequer responderam de forma coerente as questões.

As Concepções Científicas, na turma experimental, tiveram todas um crescimento, como também a diferença entre as médias das notas do pós-teste e do pré-teste indicaram um resultado positivo em relação à turma experimental, como vemos a seguir.

Juntamente com o Laboratório de Estatística da ULBRA, fizemos uma análise dos resultados, usando o software SPSS, para verificar se o crescimento da turma experimental foi de fato significativo, e o mesmo com a turma controle, para então verificar se a metodologia adotada pôde realmente trazer melhores condições para a evolução conceitual dos alunos.

As Tabelas 3 e 4 trazem esses resultados. Lembramos que, ao referir à turma 171, estamos nos referindo à turma experimental, enquanto a turma 172 se refere à turma controle.

Tabela 3

Estatísticas Descritivas das Turmas

	n	*Média*	*Desvio-Padrão*
Turma 171 - Pré-teste	25	8,7	5,1
Turma 171 - Pós-teste	25	12,9	5,8
Turma 172 - Pré-teste	19	8,6	4,9
Turma 172 - Pós-teste	19	10,1	5,6

Na tabela 3 vemos as médias das turmas no pré-teste, que foram praticamente iguais; já no pós-teste, as duas tiveram certa melhora. Temos também o desvio padrão dos testes que se manteve semelhante.

Tabela 4

Resultados da comparação das notas do Pré-teste com o Pós-teste - Por turma

	Diferenças Pareadas			p
	Média	Desvio-	IC - 95% para a	

		padrão	diferença			
			Limite Inferior	Limite Superior		
171(Pré-teste - Pós-teste)	-4,20	3,14	-5,49	-2,91	0,000	*
172(Pré-teste - Pós-teste)	-1,47	3,08	-2,96	0,01	0,052	

* Resultado significativo para a diferença pelo Teste t de Student pareado, utilizando 5% de significância.

Observando a Tabela 4, podemos evidenciar no resultado para a diferença pelo Teste t de Student pareado, utilizando 5% de significância, que o nível de aprendizado da turma experimental foi maior e, embora a turma controle também tenha evoluído, a diferença da turma experimental foi muito significativa ($p<0,1\%$), indicando sucesso no uso dessa metodologia sempre que foi aplicada, o que não se pode garantir ao usar a metodologia tradicional aplicada na turma controle onde $p>5\%$.

Nesta pesquisa, comparamos dois tipos de tratamento, um tradicional, com aulas expositivas, e um com simulações computacionais. É importante ressaltar que é normal (já esperado) que a turma controle, que teve o tratamento tradicional, tenha um crescimento, pois também foi exposta aos itens abordados nos testes.

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Durante a pesquisa, alguns aspectos importantes relacionados ao tema foram levantados e merecem ser mencionados novamente. Um deles diz respeito à relação entre as concepções alternativas dos estudantes e a história das frações. Mencionamos aqui, como exemplo, a concepção alternativa de que Frações são Unitárias. Ela foi percebida em estudantes que adotam na resolução de problemas apenas frações unitárias ou mencionam apenas estas ao se referir às frações, assim como temos nos primeiros registros de frações, o uso apenas das frações unitárias, que se manteve por muito tempo, inclusive com o uso de tabelas de conversão para frações unitárias.

Sabe-se que o ensino de frações inicia já nas séries iniciais do Ensino Fundamental (3ª ou 4ª série) por professores com formação pedagógica, mas sem um conhecimento mais aprofundado da Matemática, adotando, portanto, como base para suas aulas os livros didáticos, que muitas vezes não cumprem seu papel de maneira satisfatória. Como vimos neste trabalho, muitos abordam as frações de forma que concepções alternativas podem estar sendo formadas ou fortalecidas.

Conforme exposto, o objetivo do trabalho foi o de investigar a evolução conceitual em frações com o uso de simulações computacionais e, para isso, todo um procedimento metodológico foi elaborado, para que pudéssemos avaliar de forma precisa essa evolução ou não dos conceitos relacionados.

De acordo com os resultados relatados, podemos observar que a turma com a qual as aplicações das simulações foram feitas teve um crescimento significativo (p=0,000), e, embora a turma controle também tenha tido certo crescimento (p=0,052), a turma experimental evoluiu mais em todas as concepções científicas analisadas, evidenciando assim que, de fato, as simulações computacionais auxiliaram a evolução conceitual em frações. No entanto, não creditamos esse sucesso unicamente às simulações, mas também ao guia, desenvolvido de acordo com a técnica P.O.E., onde os alunos puderam confrontar suas concepções iniciais com as concepções de frações abordadas pelas simulações, promovendo assim um conflito conceitual.

Observamos também que, mesmo nas concepções que não foram diretamente abordadas, houve um crescimento conceitual, mostrando assim que os conceitos relacionados às frações estão relacionados entre si e a atividade com as simulações fortaleceu essas ligações; ao abordarmos um conceito os demais também estavam sendo trabalhados de forma implícita.

No que diz respeito às concepções alternativas, observamos que nem todas diminuíram, havendo aquelas que até mesmo se fortaleceram, e ainda que a turma controle teve alguns bons resultados neste sentido, com a diminuição de algumas concepções alternativas. Isso talvez se dê pelo fato de que os applets usados não foram construídos com o propósito de trabalhar concepções alternativas, provavelmente ao usar simulações construídas especificamente com este fim os resultados teriam sido ainda mais satisfatórios.

De fato, alguns dos applets analisados não se enquadravam dentro das simulações computacionais: são apenas ilustrativos ou exercício/reforço, com características que podem até mesmo reforçar concepções alternativas, que foi o que aconteceu com algumas delas. Outra possibilidade para isto é a forma como foram encaminhadas as aplicações; possivelmente algumas mudanças na técnica P.O.E. nos conduziriam a outros resultados. Ou também, o simples fato de utilizar menos simulações e trabalhar mais tempo com cada uma delas. Quanto aos guias utilizados, percebeu-se, em alguns momentos, dificuldade na verificação ao usar o applet; uma simples sugestão para melhoria seria escrever os passos para verificação em tópicos.

Percebemos que a porcentagem de respostas incoerentes diminuiu bastante na turma experimental. Alunos que não tinham concepção alguma a respeito de frações e nem sequer responderam de forma satisfatória, passaram a ter Concepções Científicas ou Concepções Alternativas a esse respeito, o que também é considerado uma evolução positiva, pois passaram de um estágio onde não tinham concepções, para alguma concepção, que mesmo sendo alternativa é mais avançada do que o estágio onde se encontrava. De um modo geral, percebemos, então, que a metodologia adotada trouxe resultados muito satisfatórios e fica o incentivo ao uso da mesma.

Embora o teste e os guias das aplicações tenham sido longos, os alunos realizaram os mesmos respondendo ao teste quase integralmente. Um exemplo que mostra isso é o pré-teste na turma experimental, que foi feito por 25 estudantes, cada teste com 23 questões, e apenas 5 não foram respondidas. Os demais testes mantiveram este baixo nível de respostas em branco.

Algumas questões do teste eram, de fato, muito parecidas, identificando as mesmas concepções alternativas e científicas. Essas questões podem ser reanalisadas, e, para uma próxima aplicação, dispormos de um teste mais curto. Ainda referente ao teste, este está sendo encaminhado para 3 especialistas, que pesquisam o objeto em estudo, para que analisem e proponham melhorias para o mesmo.

Além das conclusões ligadas diretamente aos resultados que foram colocadas, achamos importante salientar que, tratando-se de uma metodologia promissora e prazerosa para os alunos, devemos buscar melhores recursos para as escolas, com laboratórios de informática bem equipados, acesso à Internet e disponibilidade para seu uso, além de programas de capacitação para professores trabalharem com essas metodologias. Observamos que há falta de laboratórios de informática bem equipados nas escolas; na maioria das escolas públicas ter um laboratório de informática ainda é um sonho, em outras, que possuem, as máquinas são obsoletas; o acesso à Internet é limitado ou não existe, o que impede a aplicação de atividades como estas. Outro fator que barra a aplicação de atividades desta natureza e que afeta tanto escolas públicas como privadas é o desconforto dos professores que tem pouca familiaridade com a informática e/ou não têm acesso a softwares, simulações, applets. E, ainda, é importante mencionar que aplicações desta natureza exigem uma seqüência de atividades que necessitam certo período de tempo, que muitas vezes não pode ser destinado no laboratório de informática das escolas a uma única turma ou a um único professor.

Durante o desenvolvimento do trabalho algumas questões surgiram e ficam abertas para futuros estudos:

As aplicações feitas neste trabalho foram com uma turma que já havia estudado frações, trabalhamos em nível de “revisão” identificando as concepções alternativas e trabalhando para que houvesse um crescimento conceitual. Quais seriam os resultados se o uso das simulações fosse feito já na introdução dos conceitos fracionários?

Esta introdução é feita nas séries iniciais, por professores sem muito conhecimento a respeito da abrangência do conceito de fração e das concepções alternativas que podem estar solidificando. Que estratégias poderiam ser usadas para atingir esses professores (utilizando as simulações computacionais) e assim refletir no ensino das crianças?

Simulações computacionais, criadas exclusivamente para trabalhar concepções alternativas, poderiam trazer melhores resultados no que diz respeito às concepções alternativas? Além de proporcionar um crescimento nas concepções científicas, sanar as concepções alternativas?

Incentivamos assim outros investigadores e professores a buscarem aperfeiçoamento através de uma educação continuada, grupos de estudo, debates, leituras, buscando cada vez mais o aperfeiçoamento da sua prática docente, no que diz respeito às frações, ao uso de simulações computacionais e novas tecnologias e por fim da Matemática como um todo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BEHR, M.; LESH, R.; POST, T.; SILVER E. **Rational Number Concepts**: Acquisition of Mathematics Concepts and Processes, New York: Academic Press, 1983. Disponível em: <http://education.umn.edu/rationalnumberproject/bib_alpha.html> Acesso em: 12 set. 2007

BELLEMAIN, F.; BELLEMAIN, P. M. B.; GITIRANA, V.. Simulação no Ensino da Matemática: Um Exemplo com Cabri-Géomètre para abordar os conceitos de área e perímetro. In: Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 3, Águas de Lindóia, 2006. **Anais…**, 2006.

BEZERRA, F. J. B.. **Introdução do Conceito de Número Fracionário e de suas representações**: Uma abordagem criativa para a sala de aula. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - PUC, São Paulo, 2001.

BRAZ DA SILVA, A.M.T. **Concepções Alternativas dos Conhecimentos Cientificos**: elementos para a determinação de sua gênese. In: IX EPEF - Encontro de Pesquisa em Ensino de Física, 9, 2004, Jaboticatubas/MG. **Anais …**, 2004. Disponível em: <http://www.sbf1.sbfisica.org.br/eventos/epef/ix/atas/comunicacoes/co32-1.pdf> Acesso em: 24 nov. 2007.

CARAÇA, B. J.. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa: Livraria Sá da Costa Ed., 1984.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Estudar Matemáticas**: O elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: Artmed, 2001.

D'AMORE, B.. **Elementos de Didática da Matemática**. Traduzido por: Maria Cristina Bonomi. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.

ESQUEMBRE, F.. Computers in Physics Education, **Computer Physics Communications,** Departamento de Matemáticas, Universidad de Murcia, 2001.

FREUDENTHAL, H. **Didactical phenomenology of mathematical structures.** Dordrecht, Holland: D. Reidel, 1983.

FODOR, J**. Da impossibilidade de aquisição de estruturas mais poderosas.** In Piattelli-Palmarini, M. (org.) **Teorias da Linguagem, Teorias da Aprendizagem**: O Debate entre Jean Piaget & Noam Chomsky. São Paulo, Cultrix. Traduzido de *Théories du langage/Théories de L apprentissage* (1979), por Álvaro Cabral, 1983.

GOTTLIEB, F. C.. A lógica do professor x A lógica do aluno**. Educação Matemática em Revista,** Universidade de Santa Úrsula - Instituto de Matemática, n. 7, ano 6, p. 27-30, 09 jul. 1999.

GROENWALD, C. L. O.; SILVA, C. K.; MORA, C. D.. Perspectivas em Educação Matemática. **Acta Scientiae.** Canoas, v. 6, n. 1, p. 37-55, jan./jun. 2004.

GUABIRABA, S. C. da S. **De pedaço a partes, de partes a relações, de relações a número**: A evolução conceitual do número fracionário, 2008. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Luterana do Brasil, Canoas, 2008.

HEWSON, M. G.; HEWSON, P. W. Effect of instruction using students' prior knowledge and conceptual change strategies on science learning. **Journal of Research in Science Teaching,** v. 20, n. 8, p. 731-743, 1983.

HEWSON, P. W.; HEWSON, M. G. An appropriate conception of teaching science: a view from studies of science learning. **Science Education**, v. 72, n. 5, p.597-614, 1988.

INDRUSIAK, L. S.. **Linguagem Java**. Grupo JavaRS JUG Rio Grande do Sul. 1996. Disponível em: <http://www.inf.ufrgs.br/tools/java/introjava.pdf> Acesso em: 06 jan. 2008.

IFRAH, G.. **Os números**: história de uma grande invenção. 4.ed. São Paulo: Globo, 1992.

KERSLAKE, D. **Fractions**: Children's strategies and errors. Windsor, England: Nfer-Nelson, 1986.

MAWATA, C. P. Uses of Java Applets in Mathematics Education. In: The Third Asian Technology Conference in Mathematics, August 24-28, 1998. **Proceedings...**, 1998. Diponível em: <http://www.atcminc.com/mPublications/EP/EPATCM98/ATCMP016/paper.pdf> Acesso em: 24 jul. 2007.

MOREIRA, M.A. A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área. **Investigações em Ensino de Ciências**, v. 7, n. 1, p. 7-29, jan. 2001. Diponível em: http://www.if.ufrgs.br/ienci/artigos/Artigo_ID80/v7_n1_a2002.pdf. Acesso em: 13 abr. 2007.

MORI, I.; ONAGA, D. S.. **Matemática**: Idéias e Desafios**, 5ª série.** 14 ed. Reform. São Paulo: Saraiva, 2005.

MORTIMER, E. F.. Construtivismo, Mudança Conceitual e Ensino de Ciências: Para Onde Vamos? **Investigações em Ensino de Ciências**, Porto Alegre, v. 1, n. 7, abr. 1996. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/N1/2artigo.htm> Acesso em: 20 abr. 2007.

NI, Y.; ZHOU, Y. Teaching and Learning Fraction and Rational Numbers: The Origins and Implications of Whole Number Bias. **Educational Psychologist**, v. 40, n. 1, p. 27-52, 2005. Disponível em: <http://www.leaonline.com/doi/pdf/10.1207/s15326985ep4001_3?cookieSet=1> Acesso em: 05 abr. 2007

NIEMI, D.. A Fraction Is Not a Piece of Pie: Assessing Exceptional Performance and Deep Understanding in Elementary School Mathematics. **Gifted Child Quarterly,** v. 40, n. 2, p. 70-80, 1996.

NUNES, T.. ET AL**.** Children's Understanding of Fractions. IN: ARDECO Symposium, PARIS, 2004. **Anais...**, 2004.

PIAGET, J.; GARCIA, R.. **Psicogênese e História das Ciências**. Lisboa: Publicações Dom Quixote, 1987

POZO, J.I. Sobre las relaciones entre el conocimiento cotidiano de los alumnos y el conocimiento científico: del cambio conceptual a la integración jerárquica. **Enseñanza de las Ciencias**, núm. extra, jun., p. 15-29, 1999.

POZO, J.I. **Humana mente**: el mundo, la conciencia y la carne. Madrid: Morata, 2001.

POZO, J.I.. La Adquisición de Conocimiento Cientifico como un Proceso de Cambio Representacional. **Investigações em Ensino de Ciências**, Porto Alegre, v. 7, n. 3, dez. 2002. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/vol7/n3/v7_n3_a5.htm> Acesso em: 13 abr. 2007.

POZO, J.I.; GÓMEZ CRESPO, M.A. **Aprender y enseñar ciencia**. Del conocimiento cotidiano al conocimiento científico. Madrid: Morata, 1998.

REIS, M. A. F.. **O uso de simulações computacionais no ensino de colisões mecânicas.** Canoas: ULBRA, 2003. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Luterana do Brasil, 2003.

REIS, M. A. F.; SERRANO, A.. Uma Análise do Uso de Simulações Computacionais no Ensino de Colisões Mecânicas. In: Encontro Nacional de Pesquisa em Ensino de Física, 9, Jaboticatubas, 2004. **Anais...**, 2004.

SALLÁN, J. M. G. Sistemas de representación de números racionales positivos. Un estudio con maestros en formación. **Contextos Educativos.** v. 4, p. 137-159, 2001. Disponível em: <http://dialnet.unirioja.es/servlet/fichero_articulo?articulo=209691&orden=47515> Acesso em: 13 abr. 2007.

SILVA, M. J. F.. **Sobre a introdução do conceito de número fracionário.** Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - PUC, São Paulo,1997

SILVA, M. J. F.. **Investigando saberes de professores do ensino fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - PUC, São Paulo, 2005

TAO, P. K.; GUNSTONE, R. F. A process of conceptual change in force and motion during computer-supported Physics instruction. **Journal of Research in Science Teaching**, v. 37, p. 859-882, 1999

TIROSH, D. et al. **Prospective Elementary Teachers' Conceptions of Rational Numbers**, 1998 Disponível em: <http://jwilson.coe.uga.edu/Texts.Folder/Tirosh/Pros.El.Tchrs.html> Acesso em: 13 abr. 2007.

TIROSH, D.. et al. **The Teaching Module on Rational Numbers for Prospective Elementary Teachers,** 1998 Disponível em: <http://jwilson.coe.uga.edu/Texts.Folder/Tirosh/Module.html> Acesso em: 13 abr. 2007.

TREAGUST, D. F. Development and Use of Diagnostic Tests to Evaluate Students' Misconceptions in Science. **International Journal of Science Education.** v. 10, n. 2, p. 159-169, 1988.

VINNER, S. From intuition to Exhibition Mathematics and Other Endangered Species**.** In: the 21st Conference of PME. University of Helsinki, Finland, 1997. **Proceedings…**, 1997.

VILLANI, A.; CABRAL, T. C. B.. Mudança Conceitual, Subjetividade e Psicanálise. **Investigações em Ensino de Ciências**, Porto Alegre, v. 2, n. 1, jul. 2001. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/vol2/n1/mudanca.htm> Acesso em: 13 abr. 2007.

YAMAMOTO, I.; BARBETA, V. B.. Simulações de Experiências como Ferramenta de Demonstração Virtual em Aulas de Teoria de Física. **Revista Brasileira de Ensino de Física,** v. 23, n. 2, p. 215-225, jun. 2001.

APÊNDICES

Apêndice A - Testes (Pré e Pós)

Apêndice B - Aulas da Turma Controle

Apêndice C - Guia 1 *Fractions Pieces*

Apêndice D - Guia 2 - *Fractions Bars Applet*

Apêndice E - Guia 3 - *Fraction Model Applet*

Apêndice F - Guia 4 - *Equivalent Fractions*

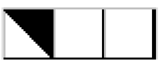
Apêndice G - Guia 5 - *Fraction - Comparing*

Apêndice H - Guia 6 - *Fraction - Adding*

APÊNDICE A - Testes (Pré e Pós)

Pré - Teste
Nome: ________________________________ Turma: _______
Data:____________

1 - Que parte da figura está pintada?



a) ¼
b) 1/6
c) 1/3
d) Não é possível identificar

Por quê?
a) Dividindo a figura em partes iguais teremos 6 partes, das quais uma está pintada.
b) A figura não está dividida em partes iguais.

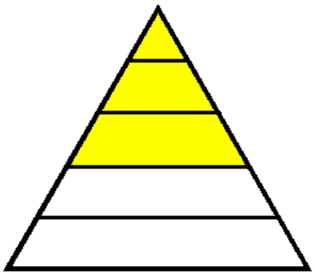
c) Uma parte está pintada e 3 partes não estão pintadas.
d) A figura está dividida em 4 partes e uma está pintada.

2 - Se temos três pizzas para distribuir igualmente entre quatro crianças, quanto cada uma vai receber?

a) ¾
b) ¼ de cada pizza.
c) Um pouco menos de uma pizza inteira.
d) Não é possível distribuir igualmente.

Por quê?
a) Não da para dividir 3 por 4 porque 3 é menor que 4.
b) 3 : 4 não é uma divisão exata.
c) Se fossem 4 pizzas seria uma inteira para cada criança.
d) Devemos dividir 3 por 4.
e) Cada pizza deverá se dividida em 4 partes.

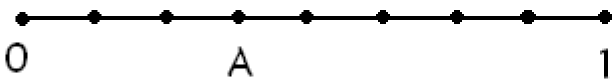
3 - Que parte da figura está pintada?



a) 6/10
b) 3/2
c) 3/5
d) Não é possível identificar

Por quê?
a) A figura está dividida em 5 partes, das quais 3 estão pintadas.
b) As partes em que a figura está dividida são diferentes.
c) Três partes da figura estão pintadas e duas partes não estão pintadas.
d) Se dividirmos a figura ao meio teremos 10 partes, sendo que 6 estarão pintadas.

4 - Qual a distância entre o zero e o ponto A?

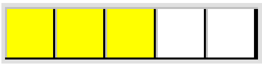


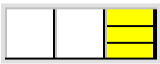
a) 3
b) 4/9
c) ½
d) 3/8
e) 4
f) Um pouco menos que 1.

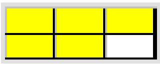
g) Não podemos determinar.

Por quê?
a) O A está na quarta marca.
b) O A está antes do 1.
c) Tem 3 espaços entre o zero e o A.
d) Não existem números entre 0 e 1.
e) O A está na metade do segmento de reta.

5 - Um desenho que representa a fração 5/3 é:

a) 

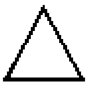
b) 

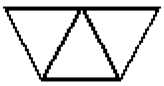
c) 

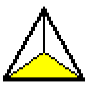
d) Não existe.
e) Nenhuma das alternativas.

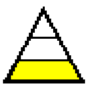
Por quê?
a) A figura deve ser dividida em 3 partes, como estas não são suficientes para pintar 5, dividimos novamente e pintamos.
b) É impossível dividir uma figura em cinco partes e pintar 3.
c) A figura deve ser dividida em 5 partes, das quais 3 devem ser pintadas.
d) Para representar esta fração é necessário mais de um inteiro/figura.
e) Esta não é uma fração, pois não representa a parte de uma figura.
f) Este tipo de fração não pode ser representada por desenho.

6 - Se a figura abaixo representa 1/3, a opção que representa um inteiro é:



a) 

b) 

c) 

Por quê?
a) Três figuras do tamanho de 1/3 formarão o inteiro.

b) A figura deve ser dividida em três partes e uma delas pintada.

7 - Se temos nove bolinhos para distribuir igualmente entre 5 crianças, quanto cada uma vai receber?

a) 1/5 de cada bolinho.
b) 9/5
c) 1 bolinho inteiro e 4/5 de outro.
d) Quase dois bolinhos.
e) Não é possível distribuir igualmente.

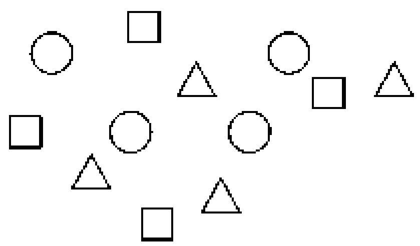
Por quê?
a) Se fossem 10 bolinhos seriam 2 para cada criança.
b) 9 dividido 5 não é uma divisão exata.
c) Depois que cada criança receber 1 restarão 4, que devem ser divididos entre as 5 crianças.
d) Devemos dividir 9 por 5.
e) Cada bolinho será dividido em 5 partes uma para cada criança.

8 - Que situação representa a fração 3/5?

a) Um chocolate foi dividido em 5 partes e comi 3 delas.
b) Três chocolates foram divididos entre 5 crianças.
c) As letras a e b estão corretas.
d) As letras a e b estão incorretas.

Por quê?
a) Uma fração é uma parte de um todo.
b) Uma fração é uma divisão.
c) Uma fração não é apenas uma parte de um todo.

9 - Determinar a fração das figuras que corresponde aos quadrados.



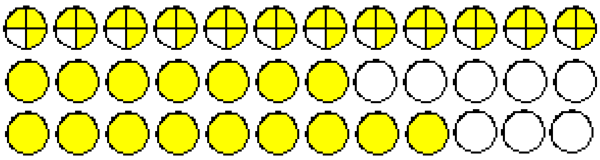
a) 4
b) 4/8
c) 1/3
d) Não é possível determinar.
e) Nenhuma das alternativas.

Por quê?
a) Temos três tipos de figuras e um tipo é o quadrado.

b) São quatro quadrados e oito figuras diferentes.
c) O total de figuras é 12, e são 4 quadrados, nenhuma alternativa expressa essa relação.
d) Os quadrados não estão divididos em partes.
e) Podemos dividir as figuras em 3 grupos com 4 figuras, dois quais 1 será formado por quadrados.
f) As figuras têm áreas diferentes.

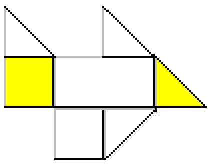
10 - Qual das alternativas mostra ¾ das bolinhas pintadas?

a)
b)
c)



Por quê?
a) Cada bolinha deve ser dividida em 4 partes e 3 delas devem ser pintadas.
b) Dividimos o conjunto de bolinhas em 4 e destes pintamos 3.
c) 3 + 4 = 7

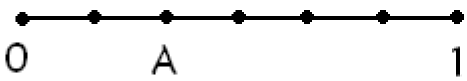
11 - A parte pintada corresponde a que fração da figura?



a) 2/5
b) ¼
c) 2/7
d) 3/12

Por quê?
a) Duas partes estão pintadas e cinco não estão.
b) Se a figura for dividida em 4 partes iguais, uma estará pintada.
c) Subdividindo as partes da figura em partes iguais teremos 12 partes, sendo 3 pintadas.
d) De um total de 7 partes duas estão pintadas.

12 - Qual a distância do zero até o ponto A?



a) 1/3
b) 2
c) 3
d) Nenhuma das alternativas.

Por quê?

a) O A está após 2 espaços.
b) O segmento está dividido em 6 partes.
c) O A está na terceira marcação.
d) O segmento pode ser dividido em 3 partes.

13 - Se para fazer uma jarra de refresco utilizamos 3 copos de suco para 12 de água, qual a razão de suco para água?

a) 3/12
b) ¼
c) As duas alternativas anteriores estão corretas.

Por quê?

a) Para 3 copos de suco são 12 de água.
b) Para cada copo de suco são 4 de água.
c) As duas frações representam a mesma relação.

14 - A metade de um quinto é:

a) 2/7
b) 4/5
c) 1/3
d) 1/10
e) ½
f) Não é possível determinar.
g) Nenhuma das alternativas.

Por quê?

a) ½ + 1/5 = 2/7
b) 1/5 - ½ = 1/3
c) 1/5 : 2 = 1/10
d) 2/5: ½ = 4/5
e) A metade de qualquer quantia é meio.
f) Não existe fração de uma fração.
g) 5 é ímpar, não pode ser dividido por 2.

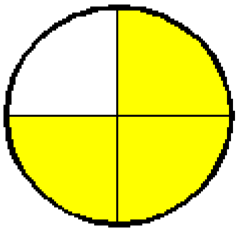
15 - Ao dividir igualmente 5 pizzas entre 4 crianças cada uma receberá:

a) Uma pizza inteira e ¼ de outra.
b) ¼ de cada uma das 5 pizzas.
c) Um pouco mais de uma pizza.
d) Não é possível dividir igualmente.

Por quê?

a) Após cada criança receber uma pizza receberá uma pedaço da pizza que sobrou.
b) 5 : 4 não é uma divisão exata.
c) Cada pizza deve ser dividida em 4 partes, uma para cada criança.

16 - Pintando de azul 1/6 da parte já pintada do disco, que fração do disco ficará azul?



a) 1/8
b) 1/7
c) 4/10
d) Nenhuma das alternativas.

Por quê?
a) A parte pintada se dividirá em seis, mais a parte que não está pintada, serão 7, e uma azul.
b) Já temos ¾ pintados, mais 1/6, fica: ¾ + 1/6.
c) Fazendo o que se pede o disco ficará com 8 partes de mesmo tamanho e apenas uma pintada de azul.
d) Não podemos dividir uma fração em outra.

17 - Quantos números existem entre 0 e 1?

a) Nenhum
b) 10
c) Vários
d) Infinitos

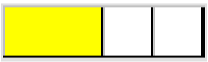
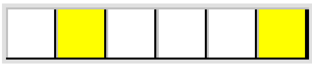
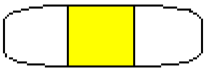
Por quê?
a) São as frações com denominador de 1 a 10.
b) Não há números entre dois inteiros.
c) Assim como os números naturais não acabam, os números entre dois inteiros também não.
d) São muitos, mas não podemos determinar a quantia exata.

18 - Carlos é caminhoneiro, andou ¼ de determinada viagem de manhã, 2/3 à tarde e o restante a noite. Que fração do caminho ele andou de manhã e de noite?

a) 11/12
b) 3/7
c) Muito pouco.
d) Não é possível determinar.

Por quê?
a) Devemos somar ¼ + 2/3
b) Não sabemos a distância total da viagem.
c) Frações são números pequenos.

19 - Quais das figuras abaixo têm um terço pintado?

I)  II)  III) 

a) As figuras I e II
b) As figuras I, II e III
c) A figura I
d) A figura II
e) A figura III
f) Nenhuma

Por quê?
a) É(são) a(s) figura(s) que está(ão) dividida(s) em 3 partes iguais e uma está pintada.
b) Nenhuma está dividida igualmente em 3 partes.
c) Se dividir estas figuras igualmente em 3 partes, uma dessas corresponderá a região pintada.

20 - Numa festa uma criança comeu 3/8 dos doces de uma bandeja e outra criança comeu 3/7 de outra bandeja igual à primeira. Quem comeu mais?

a) A criança que comeu 3/7
b) A criança que comeu 3/8

Por quê?
a) 8 é maior que 7.
b) 3 partes de 7 é mais que 3 partes de 8.

21 - Tenho 3 pizzas e quero dar meia para cada criança, quantas crianças ganharão pizza?

a) 6
b) 3
c) 9
d) 3/2
e) Não é possível saber.

Por quê?

a) São 3 pizzas.
b) Devemos dividir 3 por 2.
c) Depende do número de crianças.
d) Cada pizza é suficiente para duas crianças.
e) Cada pizza dividida em 3 partes é suficiente para 3 crianças.

22 - Quem é maior 5/8 ou 7/10?

a) 5/8
b) 7/10

Por quê?

a) Foi dividido em menos partes.
b) 7 é maior que 5 e 10 é maior que 8.
c) A representação decimal deste número é maior.

23 - Quantas metades cabem em um inteiro?

a) Uma.
b) Duas.
c) Várias.

Por quê?

a) ½ + ½ = 1
b) Depende do tamanho de cada parte.
c) ½ +1/2 = ¼, ¼ + ½ = 1/6, 1/6 + ½ = 1/8, ... sempre podemos ter mais uma metade.

APÊNDICE B - Aulas da Turma Controle

Revendo Frações

O símbolo $\frac{a}{b}$ significa a:b, sendo ***a*** e ***b*** números naturais e b *diferente de zero*.

Chamamos:

$\frac{a}{b}$ de fração;

a de numerador;

b de denominador.

Se ***a*** é múltiplo de ***b***, então $\frac{a}{b}$ é um número natural.

Veja um exemplo:

A fração $\frac{8}{2}$ é igual a 8:2. Neste caso, 8 é o numerador e 2 é o denominador. Efetuando a divisão de 8 por 2, obtemos o quociente 4. Assim, $\frac{8}{2}$ é um número natural e 8 é múltiplo de 2.

Durante muito tempo, os números naturais foram os únicos conhecidos e usados pelos homens. Depois começaram a surgir questões que não poderiam ser resolvidas com números naturais. Então surgiu o conceito de número fracionário.

Algumas vezes, $\frac{a}{b}$ é um número natural. Outras vezes, isso não acontece. Neste caso, qual é o significado de $\frac{a}{b}$?

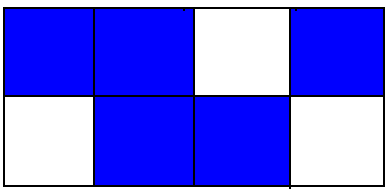
Uma fração envolve a seguinte idéia: **dividir algo em partes iguais**. Dentre essas partes, consideramos **uma** ou **algumas**, conforme nosso interesse.

Exemplo: Roberval comeu $\frac{3}{4}$ de um chocolate. Isso significa que, se dividíssemos o chocolate em 4 partes iguais, Roberval teria comido 3 partes:

Na figura acima, as partes pintadas seriam as partes comidas por Roberval, e a parte branca é a parte que sobrou do chocolate.

Atividades

1) Observe a figura:

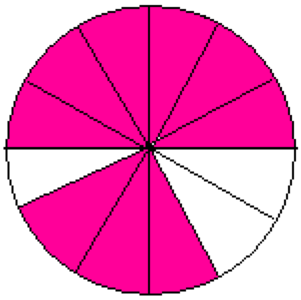
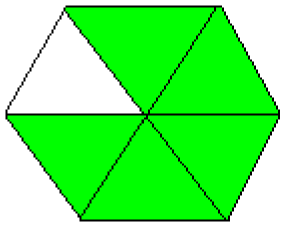
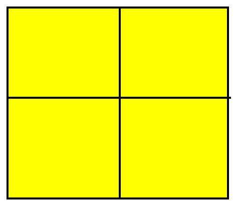


a) Em quantas partes iguais o retângulo foi dividido?

b) Cada uma dessas partes representa que fração do retângulo?

c) A parte pintada representa que fração do retângulo?

2) Observe as figuras e diga quanto representa cada parte da figura e a parte pintada:

a)  b)  c) 

3) Faça desenhos que representem as quantias:

a) 3/8 b) 8/11 c)3/6

Classificação das frações

Fração **própria**: o numerador é menor que o denominador: $\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{5}$

Fração **imprópria**: o numerador é maior ou igual ao denominador. $\frac{4}{3}, \frac{5}{5}, \frac{6}{4}$

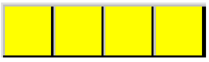
Fração **aparente**: o numerador é múltiplo do denominador. $\frac{6}{3}, \frac{24}{12}, \frac{8}{4}$

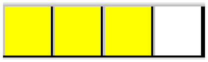
__Atividades__

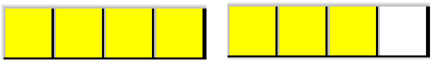
1) Classifique as seguintes frações como próprias, impróprias ou aparentes:

2/8   8/2   5/6   6/5   4/4   1/9   9/1

2) Observe as três figuras:

I. 

II. 

III. 

a) Que fração representa as partes coloridas em cada figura?

b) Classifique essas frações como próprias, impróprias ou aparentes?

c) Quantas unidades inteiras a fração 4/4 representa?

d) Complete a sentença: 7/4 = 1 inteiro + _____

Frações equivalentes

Frações equivalentes são frações que representam a mesma parte do todo.

Exemplo: $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{4}{8}$ são equivalentes

Para encontrar frações equivalentes devemos multiplicar o numerador e o denominador por um mesmo número natural, diferente de zero.

Exemplo: obter frações equivalentes à fração $\frac{1}{2}$.

$\frac{1.2}{2.2} = \frac{2}{4}$ $\frac{1.3}{2.3} = \frac{3}{6}$ $\frac{1.4}{2.4} = \frac{4}{8}$ $\frac{1.5}{2.5} = \frac{5}{10}$

Portanto as frações $\frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}$ são algumas das frações equivalentes a $\frac{1}{2}$.

Atividades

1) Classifique como certo ou errado.

a) ½ = 3/6   b) 1/3 = 4/9

2) Para cada fração abaixo encontre duas equivalentes:

a) 1/3   b) 3/5   c) 7/11   d) 2/4   e) 100/200

3) Complete:

a) 1/3 = ?/12 b) 35/28 = ?/4 c) 5/4 = 15/? d) 7/5 = 42/? e)11/2 = ?/10

Comparação de Frações

Assim como ao trabalhar com números naturais podemos estabelecer relações de maior, menor ou igual, com as frações podemos fazer o mesmo. Quando os denominadores das frações em questão são iguais isto é simples, caso contrário, primeiramente achamos frações equivalentes de mesmo denominador.

Veja: 6 /9 e 3/5

mmc(9, 5) = 45

6/9 = 30/45 e 3/5 = 27/45

Como 30/45 > 27/45, então 6/9 > 3/5

Agora é com você: coloque os sinais <, > ou = entre as frações:

a) 2/3 ? 1/3
b) 7/4 ? 11/4
c) ½ ? 1/3
d) 2/5 ? 2/7
e) 5/7 ? 5/12
f) 3/11 ? 9/11
g) ¾ ? 4/5
h) 7/4 ? 8/5
i) 1/7 ? 2/14
j) 3/2 ? 4/3
k) 2/5 ? 3/7
l) 10/4 ? 15/6
m) 11/4 ? 4/3

Adição e subtração de números fracionários

Temos que analisar dois casos:

1º) denominadores iguais

Para somar frações com denominadores iguais, basta somar os numeradores e conservar o denominador.

Para subtrair frações com denominadores iguais, basta subtrair os numeradores e conservar o denominador.

Observe os exemplos:

$$\frac{4}{7} + \frac{2}{7} = \frac{6}{7}$$

$$\frac{5}{7} - \frac{2}{7} = \frac{3}{7}$$

2º) denominadores diferentes

Para somar frações com denominadores diferentes, uma solução é obter frações equivalentes, de denominadores iguais ao mmc dos denominadores das frações. Exemplo: somar as frações $\frac{4}{5}$ e $\frac{5}{2}$.

Obtendo o mmc dos denominadores temos mmc(5,2) = 10.

$\frac{4}{5} = \frac{?}{10}$ (10:5).4 = 8 $\frac{5}{2} = \frac{?}{10}$ (10:2).5 = 25

$$\frac{8}{10} + \frac{25}{10} = \frac{33}{10}$$

Resumindo: utilizamos o mmc para obter as frações equivalentes e depois somamos normalmente as frações, que já terão o mesmo denominador, ou seja, utilizamos o caso 1.

<u>Atividades</u>

1) Calcule:

a) 3/2 + 2/3
b) 3/2 - 2/3
c) ½ + 1/3
d) 3/2 - ¼
e) 7/12 + 11/20
f) 1/6 + 5/4 + 2/3
g) 7/12 + 5/18
h) 2/5 + 11/2 + 1/3
i) (3/2 - 2/5) + (5/4 - 2/3)
j) (7/8 - 5/6) + (8/9 - 7/9)

2) Um caminhoneiro andou 1/3 do seu percurso no primeiro dia de viagem, ¼ no segundo, 2/6 no terceiro e o restante no quarto. Que fração da viagem o caminhoneiro andou no quarto dia?

3)Em uma festa Josué comeu a metade de uma bandeja de doces, Evandro comeu 2/5 dos doces de uma bandeja do mesmo tamanho.

a) Qual dos dois comeu mais?

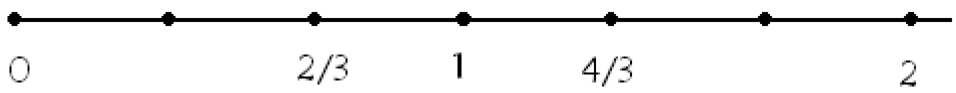
b) Se os dois tivessem comido da mesma bandeja, que fração indicaria a quantia comida desta bandeja?

c) Sobraria algum doce nessa bandeja? Se sim, que fração da quantia total?

Representação Geométrica

As frações podem ser representadas por pontos em uma reta. Dividimos o segmento que representa a unidade em partes iguais, conforme o denominador da fração:

Veja: Para localizar as frações 2/3 e 4/3 dividimos a unidade em três partes:



Desenhe uma reta em cada item, e usando o mesmo procedimento, encontre as frações:

a) 2/6, 3/6 e 7/6

b) 1/8, 3/8, 4/8, 8/8, 16/8

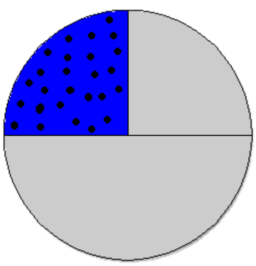
APÊNDICE C - Guia 1 *Fractions Pieces*

Nomes :_____________________________ **Turma :** _____ **Data :** ____________
____

1º- Fractions Pieces (Modelo de Frações)
http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_274_g_3_t_1.html?open=activities

Questão 1

Previsão
A parte com pontinhos representa que fração da figura? Por quê?



____
____

Verificação

Deixe marcadas as duas opções Inteiro (Whole). Use as peças da lateral esquerda.
No primeiro círculo monte uma figura igual a do desenho acima.
No outro, complete o círculo com quatro partes de mesmo tamanho.
Observe que a parte verde do primeiro círculo é do mesmo tamanho de duas partes cinza.
No canto inferior esquerdo marque a opção mostrar rótulos (Show Labels) e passe o mouse sobre as partes do círculo e verifique a fração que representa cada uma das partes.
Que fração representa a parte de mesmo tamanho da parte com pontinhos no desenho acima?

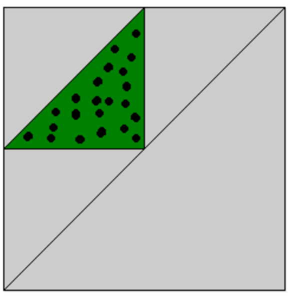
Comparação

A resposta que você deu na previsão estava correta? Explique por quê?

Questão 2

Previsão

A parte com pontinhos do desenho abaixo representa que fração da figura? Por quê?



<u>Verificação</u>
Escolha a opção <u>quadrados</u> (<u>Squares</u>).
Marque as duas opções <u>Inteiro</u> (<u>Whole</u>).
No primeiro monte uma figura igual a do desenho.
Complete o segundo com partes de mesmo tamanho, iguais as partes menores da figura.
Verifique o tamanho de cada parte.
Escreva o tamanho da parte com pontinhos do desenho acima.

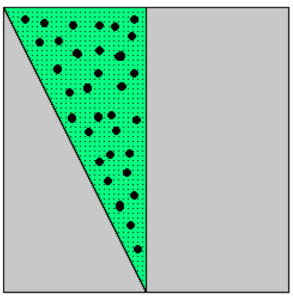
____
____

<u>Comparação</u>
A resposta que você deu na previsão estava correta? Explique por quê?

____
____
____
____
____

Questão 3

<u>Previsão</u>
A parte com pontinhos do desenho abaixo representa que fração da figura? Por quê?



____
____
____
____
____

<u>Verificação</u>
No primeiro quadrado monte uma figura igual a do desenho.
Complete o segundo com partes de mesmo tamanho, iguais as partes menores da figura.
Verifique o tamanho de cada parte.
Escreva o tamanho da parte com pontinhos do desenho acima.

____
____

<u>Comparação</u>
A resposta que você deu na previsão estava correta? Explique por quê?

____
____
____
____
____

APÊNDICE D - Guia 2 - *Fractions Bars Applet*

Nomes :____________________________ **Turma :** _____ **Data :** ____________
____

2º - Fractions Bars Applet (Barras de Fração)
http://arcytech.org/java/fractions/fractions.html

Questão 1

Previsão
Qual das frações é maior: 1/6 ou 1/5? Por quê?

Verificação
Clique no botão criar barra (ADD BAR) criando assim uma barra.
Clique sobre ela e divida em 6 partes, usando o botão pedaços (PIECES).

Usando a seta superior esquerda (←) deixe apenas uma das partes selecionada, obtendo assim a fração 1/6.
Crie uma nova barra (ADD BAR), divida-a em 5 partes e deixe só uma seleconada, obtendo a fração 1/5.
Qual das frações é maior (Tem a maior parte pintada)?

____
____

Comparação
A sua resposta na previsão e o que você observou na verificação estão de acordo? Por quê?

____
____
____
____
____

Questão 2

Previsão
Qual das frações é maior: 2/4 ou 3/6? Por quê?

____
____
____
____
____

Verificação
Seguindo os passos da questão anterior represente as frações e observe qual é maior.

____
____

Comparação
A sua resposta na previsão e o que você observou na verificação estão de acordo? Por quê?

____
____
____
____
____

Questão 3

Previsão

Coloque as frações em ordem crescente: ½, 1/8, 1/16, 1/10, 1/5. Explique por que cada uma está na posição colocada.

____
____
____
____
____

<u>Verificação</u>
Represente as cinco frações em barras seguindo os passos anteriores.
O que você observou em relação ao tamanho das frações? Coloque-as em ordem crescente observando o tamanho das partes pintadas.

____
____

<u>Comparação</u>
A sua resposta na previsão e o que você observou na verificação estão de acordo? Por quê?

____
____
____
____
____

Questão 4

<u>Previsão</u>
Ana comeu 4/6 de uma barra de chocolate, Marcos comeu 6/8 de outra barra do mesmo tamanho e Jéssica comeu ¾ de outra barra, também do mesmo tamanho. Qual das crianças comeu mais? Explique como chegou a esta conclusão.

____
____
____
____
____

<u>Verificação</u>
Imagine que as barras sejam barras de chocolate e represente a quantia que cada criança comeu. O que você pode observar em relação à quantia que cada criança comeu? Responda novamente qual criança comeu mais e explique por que.

____
____

Comparação
A sua resposta na previsão e o que você observou na verificação estão de acordo? Por quê?

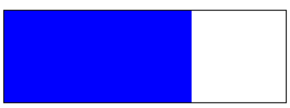
APÊNDICE E - Guia 3 - *Fraction Model Applet*

Nomes :______________________________ **Turma :** _____ **Data :** ____________

____

3º - Fraction Model Applet
http://my.nctm.org/eresources/repository/2071/applet/FractionPie/ver3.html

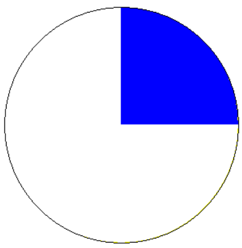
Questão 1
<u>Previsão</u>
A parte pintada do desenho abaixo representa qual fração da figura? Por quê?



Verificação
Selecione a opção retângulo (Rectangle Model)
Altere o valor do numerador e denominador da fração até obter 2/3 usando as barras à esquerda.
No canto superior esquerdo marque e desmarque a opção mostrar partes (show selections), observe que a parte pintada da figura e a fração que a representa permanecem inalteradas.
Explique por que isso acontece.

Comparação
Comparando sua resposta na previsão com o que você observou na verificação o que pode concluir? Você estava certo? Por quê?

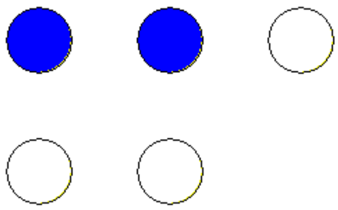
Questão 2
Previsão
A parte pintada do desenho abaixo representa qual fração da figura? Por quê?



Verificação
Selecione a opção círculo (circle).
Altere o valor do numerador e denominador da fração até obter 1/4 usando as barras à esquerda.
No canto superior esquerdo marque e desmarque a opção mostrar partes (show selections), observe que a parte pintada da figura e a fração que a representa permanecem inalteradas.
Explique por que isso acontece.

Comparação
Comparando sua resposta na previsão com o que você observou na verificação o que pode concluir? Você estava certo? Por quê?

Questão 3
Previsão
Que fração das figuras abaixo está pintada? Por quê?



Verificação
Selecione a opção conjunto (set model).
Altere o valor do numerador e denominador da fração até obter 2/5, usando as barras à esquerda.
No canto superior esquerdo marque e desmarque a opção mostrar partes (show selections), observe que a parte pintada da figura e a fração que a representa permanecem inalteradas.
Explique por que isso acontece.

____
____

Comparação
Comparando sua resposta na previsão com o que você observou na verificação o que pode concluir? Você estava certo? Por quê?

____
____
____
____
____

Questão 4
Previsão
Faça um desenho da fração 6/5.

Verificação
Agora represente essa fração no computador. Mude as formas de representação. O desenho resultante é igual ao seu? Por quê?

____
____
____
____

Comparação
Comparando sua resposta na previsão com o que você observou na verificação o que pode concluir? Você estava certo? Por quê?

Questão 5
Previsão
Faça um desenho da fração 10/3.

Verificação
Agora represente essa fração no computador. Mude as formas de representação. O desenho resultante é igual ao seu? Por quê?

Comparação
Comparando sua resposta na previsão com o que você observou na verificação o que pode concluir? Você estava certo? Por quê?

APÊNDICE F - Guia 4 - *Equivalent Fractions*

Nomes :_____________________________ **Turma :** _____ **Data :** ____________
____

4º - Equivalent Fractions (Frações Equivalentes)
http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=80

Questão 1
Previsão
Na tela do computador há uma fração localizada em uma reta. Escreva duas frações equivalentes a esta fração. (Lembre-se: Frações equivalentes são aquelas que representam a mesma quantia, tem o mesmo valor.)
____
____
____
____

Localize as três frações anteriores na reta abaixo.

Explique com suas palavras porque localizou as frações no lugar onde estão.

Verificação

Usando os botões linhas (+Row -Row) e colunas (+Col -Col) divida a área das figuras em linhas e colunas e clique nas áreas desejadas para 'pintá-las' até representar as frações que você propôs como equivalentes.

Use o botão verificar (check) para confirmar se, de fato, são equivalentes à fração dada. Caso não sejam, acrescente ou retire linhas ou colunas para achar frações equivalentes.

Observe que as frações equivalentes têm a mesma área pintada e ficam localizadas no mesmo local na reta, isso por que representam a mesma quantia.

Além disso as frações estão localizadas entre 0 e 1, são números/quantias/tamanhos, maiores que 0 e menores que 1, pois todas têm área, no máximo, igual à de um inteiro.

Escreva as frações equivalentes que você achou usando o computador:

Comparação

Se houve diferença entre sua previsão e o que você verificou, explique por quê.

Questão 2

Previsão

Clique no botão próxima questão (next question) e proceda da mesma forma para a nova fração dada.

Escreva duas frações equivalentes a esta fração.

Localize as 3 frações anteriores na reta abaixo.

Explique com suas palavras porque localizou as frações no lugar onde estão.

Verificação
Agora represente as frações que você sugeriu como equivalentes no computador e verifique se, de fato, são equivalentes a fração dada. Caso não sejam, ache frações equivalentes (que estejam igualmente localizadas/tenham a mesma área, mesmo valor).
Escreva as frações equivalentes que você achou usando o computador:

Comparação
Se houve diferença entre sua previsão e o que você verificou, explique por quê.

Questão 3
Previsão
Clique no botão próxima questão (next question) e proceda da mesma forma para a nova fração dada.
Escreva duas frações equivalentes a esta fração.

Localize as 3 frações anteriores na reta abaixo.

Explique com suas palavras porque localizou as frações no lugar onde estão.

Verificação
Agora represente as frações que você sugeriu como equivalentes no computador e verifique se, de fato, são equivalentes a fração dada. Caso não sejam, ache frações equivalentes (que estejam igualmente localizadas/tenham a mesma área, mesmo valor).
Escreva as frações equivalentes que você achou usando o computador:

Comparação
Se houve diferença entre sua previsão e o que você verificou, explique por quê.

Questão 4
Previsão
Além da fração dada pelo computador, escreva mais duas, diferentes e *não equivalentes*.

Localiza-as na reta abaixo.

Explique com suas palavras porque localizou as frações no lugar onde estão.

Verificação
Agora represente as frações que você escolheu no computador e verifique se, de fato, estão no lugar correto.

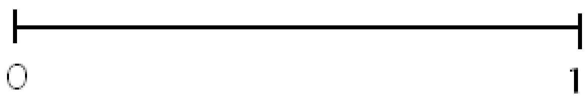
Comparação
Se as frações que você escreveu não foram localizadas no lugar correto, explique por quê.

Questão 5

Previsão

Além da fração dada pelo computador, escreva mais duas, diferentes e *não equivalentes*.

Localiza-as na reta abaixo.



Explique com suas palavras porque localizou as frações no lugar onde estão.

Verificação

Agora represente as frações que você escolheu no computador e verifique se, de fato, estão no lugar correto.

Comparação

Se as frações que você escreveu não foram localizadas no lugar correto, explique por quê.

APÊNDICE G - Guia 5 - *Fraction - Comparing*

Nomes :_____________________________ Turma : _____ Data : ____________
____

5º - Fraction - Comparing (Frações - Comparação)
http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_159_g_3_t_1.html

Questão 1

Previsão
Escreva as frações que estão aparecendo no computador e uma fração equivalente para cada uma. As frações equivalentes devem ter denominador igual.

____
____
____

Localize na reta abaixo as frações equivalentes:

Escreva uma fração que esteja entre as duas localizadas na reta.

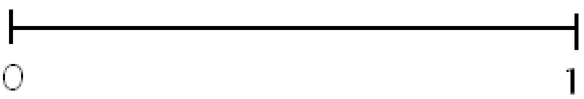
Verificação
No computador, digite ao lado de cada fração as que você propôs como equivalentes no item anterior.
Clique no botão verificar (check), se não estiver correto, use as setas abaixo de cada retângulo (ou círculo), divida-os de formas diferentes até obter frações equivalentes de denominadores iguais.
A reta que apareceu está dividida na quantia de partes do denominador das frações equivalentes que você achou.
Localize nessa reta a primeira fração (você pode pensar na sua fração equivalente para isso).
Depois localize a segunda fração na reta.
Escreva no espaço que apareceu uma fração que esteja entre as duas que você localizou (se for necessário, divida a reta em mais partes, usando as setas a direita).
Finalize verificado se está correto no botão check

Comparação
Explique as diferenças (quanto as frações equivalentes, a localização na reta e a fração entre as duas localizadas), se houveram, entre sua previsão e a verificação.

Questão 2

Previsão
Clique em novas frações (New Fractions) e siga novamente as instruções abaixo.
Escreva uma fração equivalente a cada fração dada pelo applet. As novas frações devem ter denominador igual.

Localize-as na reta abaixo:



Escreva uma fração que esteja entre as duas localizadas na reta.

<u>Verificação</u>
Seguindo os passos da questão anterior verifique se sua previsão estava correta.

<u>Comparação</u>
Explique as diferenças (quanto as frações equivalentes, a localização na reta e a fração entre as duas localizadas), se houveram, entre sua previsão e a verificação.

Questão 3

<u>Previsão</u>
Clique em <u>novas frações</u> e siga novamente as instruções abaixo.
Escreva uma fração equivalente a cada fração dada pelo applet. As novas frações devem ter denominador igual.

Localize-as na reta abaixo:

Escreva uma fração que esteja entre as duas localizadas na reta.

<u>Verificação</u>
Seguindo os passos da questão anterior verifique se sua previsão estava correta.

<u>Comparação</u>
Explique as diferenças (quanto as frações equivalentes, a localização na reta e a fração entre as duas localizadas), se houveram, entre sua previsão e a verificação.

APÊNDICE H - Guia 6 - *Fraction - Adding*

Nomes :______________________________ Turma : _____ Data : ____________
____

6º - Fraction - Adding (Frações - Adição)
http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_106_g_3_t_1.html

Questão 1

Previsão
Escreva uma fração equivalente para cada fração dada pelo computador. Além de serem equivalentes às frações dadas pelo computador, as duas novas frações devem ter o mesmo denominador.

____

____

Some as frações equivalentes que você escreveu:

Verificação

No computador, digite ao lado de cada fração as que você propôs como equivalentes no item anterior.
Clique no botão verificar (check), se não estiver correto, use as setas abaixo de cada retângulo (ou círculo), divida-os de formas diferentes até obter frações equivalentes de denominadores iguais.
Termine fazendo a soma solicitada e verifique sua resposta com o botão verificar (check).

Comparação

Caso sua previsão não tenha se confirmado, explique por que ela não estava correta.

Questão 2

Previsão

Clique em Novo Problema (New Problem) e repita o processo anterior, como segue.
Escreva uma fração equivalente para cada fração dada pelo computador, além de serem equivalentes, as novas frações devem ter o mesmo denominador.

Some as frações equivalentes que você escreveu:

Verificação

Seguindo os mesmos passos da questão anterior verifique se sua previsão estava correta.

Comparação
Caso sua previsão não tenha se confirmado, explique por que ela não estava correta.

Questão 3

Previsão
Some as duas frações dadas pelo applet.

Verificação
Seguindo os passos indicados faça a soma das frações usando o computador e compare ao resultado que você encontrou inicialmente.

Comparação
Explique as diferenças, se houveram, entre sua previsão e sua verificação.

Questão 4

Previsão
Some as duas frações dadas pelo applet.

Verificação
Seguindo os passos indicados faça a soma das frações usando o computador e compare ao resultado que você encontrou inicialmente.

Comparação
Explique as diferenças, se houveram, entre sua previsão e sua verificação.