UNIVERSIDADE LUTERANA DO BRASIL
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
DIRETORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO ENSINO DE
CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

DANIELA DE CÁSSIA MORAES TORRESAN

# O USO DO SOFTWARE DE SIMULAÇÃO *MODELLUS* NA CONCEITUALIZAÇÃO DE DERIVADA: EXPERIÊNCIAS DE ENSINO-APRENDIZAGEM COM BASE EM VERGNAUD

Orientador: Prof. Agostinho Serrano de Andrade Neto

CANOAS
2008

DANIELA DE CÁSSIA MORAES TORRESAN

# O USO DO SOFTWARE DE SIMULAÇÃO *MODELLUS* NA CONCEITUALIZAÇÃO DE DERIVADA: EXPERIÊNCIAS DE ENSINO-APRENDIZAGEM COM BASE EM VERGNAUD

Dissertação apresentada ao Programa de Pós - Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil para obtenção do título de mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Agostinho Serrano de Andrade Neto

CANOAS

2008

DANIELA DE CÁSSIA MORAES TORRESAN

**O USO DO SOFTWARE DE SIMULAÇÃO *MODELLUS* NA CONCEITUALIZAÇÃO DE DERIVADA: EXPERIÊNCIAS DE ENSINO-APRENDIZAGEM COM BASE EM VERGNAUD**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós - Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil para obtenção do título de mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Agostinho Serrano de Andrade

Aprovada em ____ de ______________ de 2008.

BANCA EXAMINADORA:

______________________________________

______________________________________

______________________________________

## AGRADECIMENTOS

Agradeço ao apoio e à orientação do professor Agostinho Serrano de Andrade, que com toda sua sabedoria e competência me ajudou a concluir este trabalho.

Registro meu reconhecimento à ULBRA e aos professores desta Universidade por terem me acolhido e acreditado em meu potencial. Agradeço ao UNILASALLE e à FACENSA por oportunizarem a realização deste estudo.

Um sincero agradecimento aos meus amigos Alexandre Almeida, Lúcia Rosa, Ir. Marcos Corbellini, Marlise Moraes Vescovi, Patrícia Fantinel, Rute Henrique Ferreira e Sandra Vidal Nogueira, pelo incentivo, pelo apoio e pelas sugestões que foram de grande valia para que esta pesquisa pudesse ser concluída.

Agradeço especialmente à minha cunhada Anna Torresan pela dedicação em me acompanhar nos últimos momentos, cuja ajuda foi de fundamental importância para a conclusão deste trabalho.

Deixo um muito obrigada para meu marido, Dennis Torresan, que foi capaz de compreender e de me apoiar em todos os momentos de dificuldade. Agradeço também aos demais familiares que torceram pela conclusão desta pesquisa.

Também agradeço àqueles amigos que de forma direta ou indireta colaboraram na elaboração e na execução deste trabalho

**RESUMO**

A utilização do computador na educação científica e matemática vem aumentando significativamente nos últimos anos. Paralelamente, se assiste a uma crescente preocupação com o desenvolvimento de novas práticas metodológicas que fazem uso de ferramentas computacionais que favorecem o processo de ensino-aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral. Este trabalho de pesquisa tem como objetivo identificar a influência das diferentes representações oferecidas pelo *software* de simulação *Modellus* na conceitualização de derivada, baseado da Teoria dos Campos Conceituais de Gèrard Vergnaud. A metodologia de pesquisa utilizada foi do tipo qualitativa, onde se aplicou um pré-teste, uma aula em laboratório de informática, um pós-teste e entrevistas para análise da freqüência de uso das múltiplas representações oferecidas pelo *software Modellus,* na comparação da resolução dos pré e pós-teste. Observou-se que a freqüência de uso da representação algébrica foi maior no pré-teste, enquanto que a representação gráfica e numérica passou a fazer parte do repertório de invariantes operatórios correspondentes apresentados no pós-teste, fato este identificado nas entrevistas. Esta evolução potencializa a criação de esquemas de assimilação mais ricos, onde todas estas representações estão presentes, auxiliando assim na resolução de situações-problema. Dessa forma, concluímos que o uso de *softwares* em que múltiplas representações são utilizadas pode, seguramente, ser incentivado para uso em sala de aula, uma vez que a utilização destas representações possibilita a ampliação de um campo conceitual e, conseqüentemente, favorecem o processo de conceitualização.

**Palavras-chave**: Conceitualização, derivada, representações, *Modellus*.

**ABSTRACT**

The use of the computer in scientific and mathematical education has increased significantly in the past years. At the same time, we have witnessed a growing interest in the development of new methodological practices which make use of computational tools and favor the teaching and learning process of Calculus**.** This work aims at identifying the influence of the different representations offered by the simulation software *Modellus* in the conceptualization of derivative based on Gèrard Vergnaud´s Theory of Conceptual Fields. It is adopted a qualitative method of data gathering, which includes a pre-test, a class in a computer laboratory, a post-test and subsequent interviews. The interviews were conducted to analyze the frequency of use of the multiple representations inherited by the use of the software *Modellus*, when comparing the student’s answers to the pre and post tests problems. It was noticed that the usage frequency of the algebraic representation was higher in the pre-test whereas the graphic and numeric representation became part of the repertoire of the representations subset contained in the concept set that would serve to define Derivative in the student’s mind, as presented in the post-test and also observed in the interviews. This evolution potentializes the creation of assimilation schemes in which all these representations are present, as they help the solution of problem-situations. Therefore, we conclude that the use of software on which multiple representations are used can undoubtedly be recommended for classroom use, as the use of these representations eases the enrichment of a conceptual fields, as well as it favors the process of conceptualization.

**Key-words:** Conceptualization, derivative, representations, *Modellus.*

## LISTA DE FIGURAS, GRÁFICOS, QUADROS E TABELAS

**Figura 01**: Mostra o nível de representação “idealização do real” 44
**Figura 02**: Mostra o nível de representação gráfica 45
**Figura 03**: Mostra o nível de representação numérica 45
**Figura 04**: Mostra o nível de representação algébrica 46
**Figura 05**: Mostra o nível de representação gráfica 60

**Gráfico 01**: Questão 4 do pré-teste 48
**Gráfico 02**: Questão 5 do pós-teste 50

**Quadro 01**: Questão 2 do pós-teste 48

**Tabela 01**: Questões referentes à área da Matemática 115
**Tabela 02**: Questões referentes à área da Física 115

## SUMÁRIO


**INTRODUÇÃO** .......... 10
**1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA** .......... 14
1.1 APROXIMAÇÕES À TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS .......... 14
**1.1.1 Situações** .......... 17
**1.1.2 Invariantes Operatórias** .......... 19
**1.1.3 Esquema** .......... 21
**1.1.4 Representação** .......... 24
1.2 A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS NO ENSINO DE MATEMÁTICA .......... 28
**2 MÉTODO, MATERIAIS E INSTRUMENTOS** .......... 34
2.1 CARACTERÍSTICAS GERAIS DA PESQUISA .......... 34
2.2 TRAJETÓRIA .......... 35
2.3 PRIMEIRO EXPERIMENTO PILOTO .......... 37
2.4 SEGUNDO EXPERIMENTO PILOTO .......... 38
2.5 EXPERIMENTO .......... 39
**2.5.1 Primeira Etapa** .......... 40
**2.5.2 Segunda Etapa** .......... 41
**2.5.3 Terceira Etapa** .......... 41
**2.5.4 Quarta Etapa** .......... 45
**2.5.5 Quinta Etapa** .......... 45
2.6 INSTRUMENTOS UTILIZADOS NA COLETA DE DADOS .......... 46
**2.6.1 Pré–teste** .......... 46
**2.6.2 Pós-teste** .......... 47
2.7 COMENTÁRIOS DAS QUESTÕES DOS PRÉ E PÓS-TESTES .......... 48
**2.7.1 Questões Relacionadas à Área da Matemática** .......... 49
**2.7.2 Questões Relacionadas à Área da Física** .......... 50
2.8 *MODELLUS* .......... 51
**3 RESULTADOS E ANÁLISE DOS RESULTADOS** .......... 57
3.1 SITUAÇÕES – PROBLEMA RELACIONADO À ÁREA DA MATEMÁTICA .......... 58
**3.1.1 Estudante A.F.** .......... 58
**3.1.2 Estudante D.A.** .......... 66
**3.1.3 Estudante G.E.** .......... 72
**3.1.4 Estudante M.P.** .......... 78
**3.1.5 Estudante R.M.** .......... 85
3.2 SITUAÇÕES – PROBLEMA RELACIONADAS À ÁREA DA FÍSICA .......... 91
**3.2.1 Estudante A.F.** .......... 92
**3.2.2 Estudante D.A.** .......... 95
**3.2.3 Estudante G.E.** .......... 101
**3.2.4 Estudante M.P.** .......... 105
**3.2.5 Estudante R.M.** .......... 111
**CONCLUSÃO** .......... 116

**REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS** ........................................................ 121
**APÊNDICE A.1** ........................................................................................ 127
**APÊNDICE A.2** ........................................................................................ 129
**APÊNDICE A.3** ........................................................................................ 136
**APÊNDICE B.1** ........................................................................................ 138
**APÊNDICE B.2** ........................................................................................ 140
**APÊNDICE B.3** ........................................................................................ 148
**APÊNDICE C** .......................................................................................... 150

# INTRODUÇÃO

Esta dissertação identifica as diferentes representações e quais as conseqüências deste uso na compreensão do conceito matemático de derivada bem como a decorrente capacidade de resolução de problemas associados. Tais representações foram expostas por meio de atividades de simulação computacional durante o processo de conceitualização da derivada por estudantes da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral da Faculdade Cenecista Nossa Senhora dos Anjos, em Gravataí/RS. Os dados obtidos foram analisados com base na Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud.

O interesse em desenvolver esta pesquisa se originou em minha trajetória como professora, ao constatar a grande dificuldade dos alunos em compreender os conceitos envolvidos no Cálculo Diferencial Integral. Optou-se em trabalhar com o operador derivada pois ele é o ponto de partida para a construção dos conceitos do Cálculo Diferencial e Integral e pela dificuldade de compreensão desse conceito por parte dos alunos, que em sua grande maioria, domina apenas habilidades nos procedimentos algébricos.

Atualmente há um crescente interesse de diversos autores no estudo do processo de ensino-aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral, visto que observa-se grande dificuldade de aprendizagem do conceito de derivada, verificando-se um alto índice de desistências, reprovações e falta de motivação por parte dos alunos nesta disciplina. Esses autores afirmam que esta dificuldade advém da falta de compreensão do conceito de limite que possui como seu integrante a noção de infinitésimos (DALL'ANESE, 2002; MILANI, 2002; COSTA, 2007; GIRALDO e CARVALHO, 2002a).

Além do problema de compreensão conceitual de temas inerentes à disciplina (TUCKER e LEITZEL, 1995), outros motivos que explicam o alto índice de reprovação nesta, apresentados pelos professores se referem à grande quantidade de alunos por turma e à formação pré-universitária inadequada destes. Em contrapartida, os estudantes apontam a metodologia do professor como a principal causa neste notório fracasso do processo de ensino-aprendizagem da derivada (VARGAS e SILVA, 2008).

Muitas vezes, o ensino dos conceitos envolvidos no Cálculo Diferencial Integral é trabalhado em sala de aula de forma expositiva apresentando suas definições, propriedades e exemplos seguidos pela resolução de uma lista de exercícios. Esta metodologia de trabalho com freqüência apresenta lacunas na aprendizagem reafirmando o quadro acima apresentado, relacionado ao processo de ensino- aprendizagem da derivada, sinalizando a dificuldade do mesmo.

Objetivando contribuir com uma mudança deste quadro e tornar o processo de ensino-aprendizagem mais proveitoso e interessante, introduzi a utilização de novas tecnologias para abordar o conceito de derivada, uma vez que já se reconhece a importância do uso do computador na educação científica e matemática como forma de melhorar substancialmente as práticas pedagógicas em disciplinas matemáticas.

O computador oferece a possibilidade de se trabalhar com *softwares* de simulação, os quais permitem que os estudantes manipulem conceitos formais. Dessa forma, é facilitada a criação de adequados ambientes de aprendizagem fazendo com que a abordagem construtivista seja dominante, contribuindo para o desenvolvimento cognitivo em geral (TEODORO, 1997).

Na tentativa de contribuir com as novas e diversas práticas metodológicas as quais visam diagnosticar e minimizar este problema, verificado no processo de ensino-aprendizagem da derivada, realizei esta pesquisa utilizando o *software* de simulação *Modellus* tendo como base a Teoria dos Campos Conceituais de Gerard Vergnaud..

A escolha de trabalhar com essa teoria se deu pelo fato de que a estrutura de campos conceituais e a definição de um conceito são direcionadas a habilitar pesquisadores e professores à melhor compreensão das seguintes observações, descritas por Vergnaud (1988):

- Os conceitos matemáticos são enraizados em situações e problemas;

- Análise e classificação de situações e procedimentos utilizados pelos alunos a fim de lidar com elas;

- O conhecimento dos estudantes e suas competências desenvolvidas durante um longo período de tempo;

- Símbolos (significante) não se referem diretamente à realidade mas aos componentes cognitivos (significado), estando sujeitos aos procedimentos comportamentais dos estudantes. Os invariantes são categorias, objetos, propriedades, relações, teoremas-em-ação bem como os componentes cognitivos. É necessário fazer distinções entre situações, invariantes e símbolos[1].

A metodologia de trabalho utilizada para desenvolver esta pesquisa abrangeu levantamento bibliográfico do tema referente ao uso do computador no processo de ensino-aprendizagem, especialmente quando este está relacionado à derivada; estudo da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud; desenvolvimento de estudos piloto e um experimento baseado neles, que consistiram de aulas expositivas, pré-teste, tratamento (aula no laboratório de informática), pós-teste e entrevistas, respectivamente.

Este trabalho de pesquisa tem como objetivo identificar as diferentes representações oferecidas pelo *software* de simulação *Modellus* na conceitualização de derivada. Para tanto, apresento aspectos favoráveis à escolha deste *software*; investigo, baseado na Teoria dos Campos Conceituais, se este *software* é um facilitador da conceitualização da derivada enquanto taxa de variação instantânea e inclinação da reta tangente a uma função, bem como, identifico representações específicas que potencializam o aprendizado de derivada.

No capítulo 1 será apresentado a fundamentação teórica e serão abordados alguns aspectos da Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud e sua influência na aprendizagem e no desenvolvimento dos conceitos matemáticos.

No capítulo 2 será abordado o método, os instrumentos e os materiais utilizados na coleta de dados bem como a descrição do universo envolvido na experimentação durante a investigação..

---

[1] Para Vergnaud (1998) um objeto não pode ser representado mentalmente de maneira não ambígua através de símbolos. Por maior que seja o papel dos símbolos no pensamento, o conhecimento não é, em essência, simbólico.

No capítulo 3 descrevemos os resultados e a discussão as quais apresentam os aspectos abordados pelos estudantes no desenvolvimento da resolução das questões do pós–teste, no que tange à relação entre o conceito de derivada e o significado de velocidade instantânea com os níveis de representação utilizados durante o experimento, por meio do *software* de simulação *Modellus.*

# 1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo são abordados alguns aspectos da Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud e sua influência na aprendizagem e no desenvolvimento dos conceitos matemáticos.

## 1.1 APROXIMAÇÕES À TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

Gérard Vergnaud é Doutor em Psicologia Cognitiva, pesquisador e diretor do Conselho Nacional de Pesquisa Científica (CNRS) da França (MOREIRA, 2004). Durante quinze anos dirigiu o grupo de investigação “Didática”, rede nacional de investigadores em matéria de Didática de Matemática e de Física. Foi aluno de Jean Piaget, se interessou pela investigação sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática, pelas análises da competência profissional dos adultos e pelo estudo das condições em que se formam essas competências (VERGNAUD, 1996c).

A Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud é uma teoria cognitivista neopiagetiana, do processo de conceitualização do real, que tem por objetivo oferecer uma estrutura e alguns princípios básicos às pesquisas sobre atividades cognitivas, principalmente àquelas que dependem da ciência e da técnica, mas não é específica da área da matemática (VERGNAUD, 1993).

O objetivo da Teoria dos Campos Conceituais é dar importância ao conteúdo do conhecimento na maior parte das ações ordinárias, àquelas realizadas dentro e fora de sala de aula. É falsa a idéia de que ela se refere ao ensino e aprendizagem de conceitos formais e explícitos. Esta teoria também se refere ao conhecimento envolvido na resolução de problemas (VERGNAUD, 1994).

Essa teoria, apesar de proporcionar uma estrutura à aprendizagem e envolver a didática, não é uma teoria didática. A principal finalidade é “propor uma estrutura que permita compreender as filiações e rupturas entre conhecimentos, do ponto de vista de seu conteúdo conceitual” (VERGNAUD, 1993).

> A teoria dos campos conceituais afirma que uma abordagem mais frutífera para o desenvolvimento cognitivo das crianças seria promovido pela utilização de uma estrutura que se refere aos conteúdos do conhecimento em si próprio e à análise conceitual do domínio (VERGNAUD, 1994, p. 41).

A classificação hierárquica de um conteúdo de um campo conceitual leva em consideração a estrutura conceitual, o domínio da experiência utilizada e os valores numéricos, quando necessário, os quais são importantes para o estudo do crescimento da complexidade cognitiva (VERGNAUD, 1994).

A motivação para a construção da Teoria dos Campos Conceituais deu-se a partir da identificação de um dos maiores problemas do ensino, o de desenvolver simultaneamente a forma operatória do conhecimento e a forma predicativa do conhecimento ou enunciação, isto é, o “saber-fazer” e o “saber-explicitar” os objetos e suas propriedades (VERGNAUD, 1996b).

Três argumentos levaram Gérard Vergnaud à construção do conceito de campo conceitual (VERGNAUD, 1983a, p. 393). Primeiro, um conceito não pode se formar a partir de um único tipo de situação. Segundo, o autor relata ser necessário mais de um conceito para se analisar uma única situação. E por último, o autor cita que a construção e a apropriação de todas as propriedades em um conceito é um processo bastante demorado, com analogias e mal-entendidos entre situações, concepções, procedimentos ou significantes.

Um campo conceitual é definido por Vergnaud (1982, p. 40) como “um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento, conectados uns aos outros e, provavelmente, entrelaçados durante o processo de aquisição”.

Os interesses dos estudos de Gérard Vergnaud estão voltados para dois principais campos conceituais: o das estruturas aditivas e o das estruturas multiplicativas. A teoria em questão também pode ser utilizada em diversas áreas como a Física, Geografia, Biologia, História entre outras áreas do conhecimento, onde há diversos campos conceituais em que os estudantes precisam desenvolver esquemas e concepções específicas (MOREIRA, 2004).

De acordo com Vergnaud (1983b, p. 128), outros campos conceituais importantes, que interferem com estes dois, são: (a) deslocamentos e transformações no espaço; (b) classificações de objetos discretos e operações Booleanas; (c) movimentos e relações entre tempo, velocidade, distância, aceleração e força; (d) relações de paternidade; e (e) medida de quantidades físicas e espaciais. Outros exemplos de campos conceituais incluem a Geometria Euclidiana e Geometria Descritiva, Lógica de Classes e Álgebra Elementar (VERGNAUD *et al*., 1990).

Apesar da definição de campo conceitual ser bem clara, a linha de fronteira cognitiva está entre campos conceituais não necessariamente bem definidos. A principal razão para isto é que há uma ruptura no conhecimento humano. Por exemplo, há uma filiação entre as estruturas aditivas e multiplicativas. Apesar disso, há especificidade suficiente nos problemas cognitivos gerados pelas estruturas aditivas de um lado e, gerados pelas estruturas multiplicativas de outro lado, que nos permitem estudar estes dois campos conceituais separadamente (VERGNAUD, 1988). Vergnaud enxerga estas duas estruturas como conjuntos de problemas envolvendo operações aritméticas e noções de tipo aditivo (como a adição, subtração, diferença, intervalo, translação) ou do tipo multiplicativo (como multiplicação, divisão, fração, razão, similaridade). Assim fica claro que as estruturas multiplicativas contam parcialmente com as estruturas aditivas: mas elas também têm sua organização própria e intrínseca as quais não são redutíveis aos aspectos aditivos (Vergnaud, 1983b).

A compreensão do processo de conceitualização é essencial para o entendimento do que é um conceito. A identificação ou descoberta de diferentes propriedades de um mesmo conceito nem sempre toma seu lugar de forma simultânea, mas geralmente leva muitos anos. Isto é observado não somente para estruturas aditivas e multiplicativas, mas também para álgebra, geometria ou cálculo (VERGNAUD, 1997).

Vergnaud (1983a, p. 393 e 1988, p. 141) diz que para estudar e compreender como os conceitos evoluem na mente de um sujeito por meio de suas experiências é preciso considerar o conceito (C) como uma terna de conjuntos, ou seja, C = (S, I, R), onde:

**S** é o conjunto de situações que dão significado e utilidade ao conceito;

**I** é o conjunto de invariantes operatórias associadas ao conceito (objetos, propriedades e relações) que podem ser reconhecidas e usadas pelos sujeitos de forma a analisar e dominar aquelas situações;

**R** é o conjunto de significantes, isto é representação simbólica, lingüística, gráfica ou gestual que podem ser utilizadas para representar aquelas invariantes, e, desta forma, representar as situações e os procedimentos para lidar com eles.

Em termos psicológicos, poderíamos dizer que S, o referente, é a realidade e (I, R) representam os dois aspectos integrantes do pensamento, o significado (I) e o significante (R).

É fundamental considerar esses três conjuntos simultaneamente – situações, invariantes operatórias e representações simbólicas ao longo da aprendizagem para estudar o desenvolvimento e o uso de um conceito (VERGNAUD, 1983a). Um conceito não é uma mera definição. Refere-se a um conjunto de situações envolvidas em um conjunto de diferentes invariantes operatórias, e suas propriedades podem ser expressas através de diferentes representações lingüísticas e simbólicas (VERGNAUD, 1998).

### 1.1.1 Situações

O conceito de situação na Teoria dos Campos Conceituais não tem o mesmo significado que na Teoria das Situações Didáticas de Brousseau, mas o de tarefa, de forma que toda situação complexa pode ser analisada como uma combinação de tarefas. Para Vergnaud *et al*. (1990), a elaboração de uma situação didática deve apoiar-se necessariamente sobre o conhecimento da dificuldade relativa das tarefas cognitivas, dos obstáculos habitualmente encontrados, do repertório de procedimentos disponíveis e das representações possíveis.

Segundo Brousseau (1996), uma situação didática representa um conjunto de múltiplas relações estabelecidas, implícita ou explicitamente, entre o professor, o aluno e o saber, a fim de, pelo menos em parte, reproduzir características do trabalho científico, propriamente dito, como garantia de uma construção efetiva de um conhecimento específico.

Conforme Vergnaud *et al*. (1990, p. 50), para diferenciar o significado do termo “situação” em sua teoria com a teoria de Brousseau, ele afirma que: “limitar-nos-emos ao sentido que lhe atribui usualmente o psicólogo, ou seja, os processos cognitivos e as respostas do sujeito são funções das situações com as quais são confrontadas”.

Na Teoria dos Campos Conceituais, para organizar uma situação didática, consideram-se as funções epistemológicas de um conceito, a significação social dos domínios de experiência aos quais esse conceito se refere e as ressonâncias do jogo do contrato didático e da transposição (FRANCHI, 1999).

Existem duas classes de situações: uma em que o sujeito dispõe das competências necessárias ao tratamento relativamente imediato da situação e a outra em que o sujeito não dispõe de todas as competências necessárias, onde ele hesita e tenta várias abordagens, levando-o, eventualmente, ao sucesso ou ao fracasso (VERGNAUD, 1993).

A complexidade de uma tarefa privilegia modelos que atribuem papel essencial aos conceitos matemáticos em si mesmos; ficando com papel secundário, a forma dos enunciados e o número de elementos em jogo na tarefa (VERGNAUD *et al*., 1990).

A dificuldade de uma tarefa não representa nem a soma nem o produto da dificuldade das diferentes subtarefas, mas com certeza, o desempenho em cada subtarefa afeta o desempenho global (VERGNAUD, 1993).

Os problemas das situações didáticas, que a partir de agora, serão chamados de situações-problemas, podem ser tanto de natureza teórica como de natureza prática, não precisam ser necessariamente empíricos, mesmo para as crianças (VERGNAUD, 1994).

### 1.1.2 Invariantes Operatórias

As invariantes operatórias possuem duas categorias, os conceitos-em-ação e os teoremas-em-ação (VERGNAUD, 1996c).

Com a finalidade de analisar o conhecimento que é intuitivo e amplamente implícito foram introduzidas a idéia de teorema-em-ação e de conceitos-em-ação (VERGNAUD, 1994). Ambos auxiliam na transformação do conhecimento intuitivo em conhecimento explícito (VERGNAUD, 1988). A expressão "conhecimento intuitivo" é quando o sujeito usa seu conhecimento espontaneamente, sem refletir muito sobre seus conteúdos e bases (VERGNAUD, 1994).

Um teorema-em-ação é uma proposição considerada como verdadeira sobre o real, apesar de que eles possam estar totalmente implícitos, parcialmente verdadeiros ou mesmo falsos; enquanto que um conceito-em-ação é uma categoria do pensamento considerada como pertinente na identificação e seleção de informação (VERGNAUD, 1996c).

Teoremas-em-ação são definidos como relações matemáticas que são levadas em consideração pelos estudantes na resolução de um problema, sejam na escolha de operações ou de uma seqüência de operações. Essas relações usualmente não são expressas verbalmente pelos estudantes, o que faz com que esses teoremas-em-ação não sejam considerados teoremas de formas convencionais, uma vez que a maior parte deles não são explícitas (VERGNAUD, 1988).

O processo de transformar um conceito e teoremas explícitos auxilia na identificação de invariantes relevantes ou irrelevantes, sendo a explicação e simbolização importantes padrões através dos quais a complexidade cognitiva é garantida (VERGNAUD, 1994).

> O conceito de "teoremas-em-ação" é de que esta é a melhor ferramenta para descrever o desenvolvimento das competências dos estudantes em longo prazo em um determinado campo conceitual, e para traçar as filiações e rupturas. É também a melhor ferramenta para analisar as relações entre o conhecimento intuitivo, teoremas matemáticos explícitos e simbolismos (VERGNAUD, 1988, p. 160).

A percepção, a busca e a seleção de informação baseiam-se inteiramente no sistema de conceitos-em-ação disponíveis no sujeito (objetos, atributos, relações, condições, circunstâncias...) e nos teoremas-em-ação subjacentes a sua conduta (VERGNAUD, 1996c).

Um conceito-em-ação é um objeto ou predicado implicitamente tido por pertinente e é representado por meio de propriedades e relações explicitados na forma de funções proposicionais (VERGNAUD, 1995). Sendo assim, conceitos-em-ação são relevantes ou não relevantes, ou mais ou menos relevantes na identificação e seleção de informação (VERGNAUD, 1998).

Conceitos-em-ação são ingredientes dos teoremas, e teoremas são propriedades que fornecem aos conceitos seus conteúdos, havendo, dessa forma, uma relação dialética entre os dois. Entretanto seria equivocado tomar um pelo outro (VERGNAUD, 1998).

É importante também não confundir teoremas-em-ação e conceitos-em-ação, definidos por Vergnaud, com a definição científica mais ampla de conceitos e teoremas. Ambos, nesta abordagem (científica), são considerados explícitos o que possibilita discutir sua pertinência e veracidade, podendo assim, ser comunicado e debatido. Ao contrário, os teoremas-em-ação e conceitos-em-ação permanecem implícitos. O papel do professor, nesta abordagem, consiste exatamente em auxiliar seu aluno a construir conceitos e teoremas explícitos e cientificamente aceitos, a partir de conceitos e teoremas implícitos. Dessa maneira, para que os conceitos-em-ação e teoremas-em-ação venham a ser verdadeiros conceitos e teoremas científicos, pode demandar muito tempo (VERGNAUD, 1998).

Ainda, segundo Vergnaud (1993), as invariantes operatórias podem dividir-se em três tipos lógicos:

- Invariantes do tipo “proposição”, as quais podem ser verdadeiras ou falsas, como os teoremas-em-ação;

- Invariantes do tipo “função proposicional”, as quais não são suscetíveis de serem verdadeiras ou falsas, mas são indispensáveis à construção das proposições, como os conceitos-em-ação;

- Invariantes do tipo “argumento”, as quais representam os valores das variáveis; elas podem ser objetos materiais, personagens, números, relações ou mesmo proposições.

> A transformação das invariantes operacionais em palavras e textos não é direta. Primeiro de tudo necessita o aprendizado e prática da linguagem natural (e de diversos outros sistemas semióticos). Além disso, esses sistemas lingüísticos e semióticos não objetivam expressar exatamente o quê cada indivíduo tem em mente quando ele se depara a uma situação, seleção e processamento de informação (VERGNAUD, 1988, p. 176).

Teoremas-em-ação e conceitos-em-ação são invariantes operatórias e assim sendo componentes essenciais dos esquemas (VERGNAUD, 1998).

### 1.1.3 Esquema

Vergnaud utiliza o conceito de esquema de Piaget. A definição de esquema na Teoria dos Campos Conceituais é tão forte que Vergnaud sugere a utilização da expressão interação esquema-situação, ao invés da interação sujeito-objeto, proposta por Piaget (VERGNAUD, 1996b).

O conceito de esquema é essencial para qualquer teoria de cognição, uma vez que articula sobre uma unidade de características comportamentais e representacionais: regras de ação e invariantes operatórias. Regras de ação também são proposições normalmente implícitas, e inevitavelmente concisas. Elas dizem algo sobre apropriação da ação do sujeito, e não diretamente sobre o mundo dos objetos, como fazem os teoremas-em-ação (VERGNAUD, 1997).

Esquemas são o coração da cognição, e o coração do processo de assimilação-acomodação (VERGNAUD, 1997). Para Vergnaud, um esquema pode ser definido como uma organização invariante da ação para uma determinada classe de situações, nas quais o sujeito pode descobrir uma possível finalidade de sua atividade. Esta organização baseia-se em quatro classes de elementos principais (VERGNAUD, 1993 e 1996c):

**Antecipações e objetivos**: é o que se espera alcançar em eventuais etapas intermediárias;

**Regras de ação, de busca e controle da informação**: é o que permite gerar as seqüências de ações do sujeito, formando a parte geradora do esquema e permitindo garantir o êxito da atividade em um contexto que pode estar em constante evolução;

**Invariantes operatórias**: é o que orienta o reconhecimento, pelo sujeito, dos elementos pertinentes da situação e a tomada da informação sobre a situação a tratar;

**Possibilidade de inferências ou raciocínio**: é o que permite "calcular" as regras e as antecipações a partir das informações e das invariantes operatórias de que o sujeito dispõe.

Esquemas constituem a maior parte da atividade cognitiva, sendo esquemas totalidades dinâmicas funcionais. Pensar é um gesto, metaforicamente, com todo o amplo significado da produção de uma seqüência de ações ou operações sob certas circunstâncias; com metas, submetas, reunião de informação e processamento, controle, prazer ou desprazer (VERGNAUD, 1988).

Há esquemas perceptivo-gestuais (contar objetos ou fazer gráficos), esquemas verbais (fazer um discurso) e esquemas sociais (gerenciar um conflito ou seduzir uma pessoa) (MOREIRA, 2004). O conceito de esquema normalmente é proveitoso para descrever comportamentos familiares e para descrever e entender o processo de resolução dos problemas (VERGNAUD, 1988). Mas ele não é um esteriótipo, como uma seqüência de ações que dependem dos parâmetros da situação (VERGNAUD, 1994).

O comportamento é usualmente organizado em esquemas que podem ser repetidamente utilizados em situações similares, e estes esquemas freqüentemente sugerem que os estudantes trabalham com significados lingüísticos ou outras representações simbólicas, como palavras na contagem, símbolos algébricos e sentenças na resolução de equações, entre outros. Além disso, outra finalidade da linguagem e símbolos é a de expressar conceitos e teoremas para a comunicação ou para eventualmente gerar uma solução. Utilizando-se de palavras, símbolos ou desenhos de algum tipo, estudantes identificam objetos relevantes e relações, podendo também o professor utilizar-se desses recursos a fim de auxiliar os estudantes (VERGNAUD *et al*., 1990).

Um esquema é relevante para uma classe de situações e não para uma situação somente. Quando um esquema funciona para um certo conjunto de situações, ele necessariamente contém algum homomorfismo a esta classe de situações (VERGNAUD, 1995).

> O conceito de esquema é particularmente bem adaptado para designar e analisar classes de situação para as quais o sujeito dispõe em seu repertório, a um momento dado de seu desenvolvimento e sob certas circunstâncias, de competências necessárias ao tratamento relativamente imediato da situação. Mas ele é igualmente válido para a descoberta e invenção em situação de resolução de problemas. Muitos esquemas são evocados sucessivamente e mesmo simultaneamente em uma situação nova para o sujeito (VERGNAUD, 1995, p. 176).

A eficiência de um esquema conta com a adequação das invariantes, a "verdade" da análise implícita da realidade subjacente aos esquemas. Sua ineficiência pode ser atribuída tanto à falha da análise quanto a invariantes erradas As invariantes estão implícitas aos esquemas, entretanto podemos descrevê-las em termos de objetos, propriedades e relações, sendo a descrição em termos de regras radicalmente insuficiente. Isso é explicado pelo fato de que regras pressupõem categorias, objetos e relações. Invariantes são componentes essenciais dos esquemas, e além disso, constituem o *link* às concepções dos estudantes, podendo ser expressos por palavras e outras representações simbólicas. Dessa forma pode-se observar que a eficiência dos esquemas pode ser melhorada pelo uso paralelo dessas representações simbólicas (VYGOTSKY *et al*. *apud* VERGNAUD, 1987).

Toda vez que as invariantes operatórias são expressas e envolvidas em sistemas de conceitos e símbolos, o *status* cognitivo dos estudantes muda, a ponto de que os esquemas algumas vezes podem se tornar algoritimos. Ao tornar explícitas as propriedades relevantes dos objetos matemáticos e operações envolvidas na ação, é possível analisar suas conexões e, eventualmente demonstrar que uma certa classe de regras é efetiva para uma certa classe de situações (VERGNAUD, 1998).

Todo algoritmo é um esquema, porque os algoritimos matemáticos são a forma de organização da atividade, mas nem todos os esquemas são algoritimos (VERGNAUD, 1996b). E, quando os algoritimos são utilizados para lidar repetidamente com as mesmas situações, eles tornam-se esquemas ordinários, ou hábitos. Isso faz com que o controle das condições que garantem a efetividade do algoritmo possa então ser perdido (VERGNAUD, 1998).

Teoricamente, o conceito de esquema proporciona o vínculo entre a ação e a representação. No entanto, são as invariantes operatórias que fazem a articulação essencial entre a teoria e a prática, porque são eles que levam o sujeito a reconhecer os elementos que são relevantes à situação e às informações a serem tratadas (VERGNAUD, 1996c). Segundo Vergnaud (1987, p. 6), “esquemas estão no nível de representação dos significados, enquanto que a linguagem e outros símbolos estão no nível dos significantes”.

### 1.1.4 Representação

Gerard Vergnaud considera a existência de uma mediação entre a maneira de representação (os significantes) e a realidade (objetos do mundo material), ou seja, para ele, o conhecimento não representa apenas simbolicamente a realidade que se conhece, mas, ao mesmo tempo, a realidade sobre a qual se está inserido e agindo (FRANCHI, 1999). Sendo que, os significantes (símbolos e sinais) representam significados que são de ordem cognitiva e psicológica (VERGNAUD, 1981).

A gradual construção das representações mentais implícitas ou explícitas, homomórficas à realidade, para alguns aspectos, é responsável pela formação da construção do conhecimento (VERGNAUD *et al*., 1990).

Em sua teoria, o termo representação não se reduz a um sistema simbólico: um conjunto de sinais, sintaxe ou operações nos elementos do sistema,

> a representação é um conjunto de imagens internas, gestos e palavras experienciadas. Essas palavras e símbolos utilizados na comunicação não se referem diretamente à realidade mas sim à representação de entidades: objetos, propriedades, relações, processos, ações e construções sobre as

> quais não há concordância automática entre duas pessoas (VERGNAUD, 1998, p. 167).

A visão de que um objeto pode ser representado sem ambigüidade, e de que a representação é adequadamente descrita por símbolos está longe da visão apresentada pela Teoria dos Campos Conceituais, uma vez que o papel dos símbolos pode ser no pensamento e o conhecimento não é em essência simbólico. Os aspectos essenciais do conhecimento são a recognição das invariantes em ação e percepção, e a progressiva construção de objetos de níveis mais altos e predicados (VERGNAUD, 1998).

O papel da linguagem e de outros modos de representação simbólica, no processo de conceitualização do real, não representa apenas um papel de comunicação mas o de instrumento de organização de experiências (VERGNAUD, 1996b).

> O conceito de representação simbólica pode ser estudado sob o ponto de vista da funcionalidade, cujo pensamento está em tal representação, e sob o ponto de vista estrutural, cujas operações do pensamento estão sob o uso de sistemas de significantes: gráficos, tabelas, expressões algébricas etc... (VERGNAUD, 1983a, p. 392).

As representações simbólicas, por sua vez, têm a função de auxiliar na resolução de certos problemas, facilitando a identificação de certos objetos matemáticos através de notações (símbolos) historicamente construídos. Obviamente que os alunos conseguem expressar seu pensamento por meio de linguagem natural (verbos, formas atributivas, advérbios,...), porém cabe ao professor facilitar para que a simbologia matemática seja gradativamente conhecida e empregada pelos alunos, o que facilita a expressão de ambas as partes (educando e educador) (VERGNAUD, 1993). Sendo assim, a função dos significados é identificar, selecionar e articular a informação (VERGNAUD *et al*., 1990).

Assim dois critérios são propostos por Vergnaud para a eficiência das representações simbólicas. No primeiro critério, as representações simbólicas auxiliam os estudantes a resolver problemas que de outra forma eles falhariam em resolvê-lo, o que pode ser útil quando há muitas informações ou grandes quantidades de diferentes estruturas envolvidas no problema. No segundo critério, as representações simbólicas devem ajudar os estudantes na diferenciação de classes de problemas, sendo este critério uma conseqüência direta do primeiro (VERGNAUD, 1982).

A função específica dos símbolos na álgebra é o de extrair relações funcionais como modelo de situações, a fim de operar com este modelo sem prestar atenção ao significado externo de tais operações, e consequentemente, interpretar o resultado dessas operações. Essa função também aparece em outros sistemas simbólicos como tabelas, diagramas e gráficos e, por sua vez, não fornecem um valor total da parte executada pela linguagem e símbolos no pensamento, denominado conceitualização (VERGNAUD *et al*., 1990).

O processo de conceitualização pode ser visto como um processo no qual os estudantes progressivamente entendem o que fazer, como proceder em situações matemáticas e o que as sentenças matemáticas e símbolos significam, mas isto não se faz por simples generalização, a qual somente é possível devido a certas operações de pensamento (VERGNAUD, 1996b). Para tanto, de acordo com Vergnaud (1997, p. 9), devem ser levados em consideração três principais problemas teóricos:

- a relação entre a representação necessária para os procedimentos matemáticos e a representação contida em palavras, diagramas e símbolos;

- o longo processo do desenvolvimento conceitual em um dado domínio a emergência de novos conceitos e a mudança de seu *status* cognitivo e, que;

- um esquema é a organização invariante do comportamento para uma certa classe de situações.

As formas lingüísticas são denominadas, por Vergnaud (1993), de "instrumentos do pensamento", tendo em vista que toda conceitualização matemática ultrapassa a compreensão das relações e das propriedades como instrumentos, abrangendo a transformação desses instrumentos em objetos do pensamento.

A primeira fonte da representação é a relação entre situações e esquemas, e por conseqüência também da conceitualização. A formação dos conceitos implica na identificação de objetos, com suas propriedades, relações e transformações (VERGNAUD, 1998).

De acordo com Vergnaud (1993, p. 8), "a transformação dos conceitos-instrumentos em conceitos-objetos é um processo decisivo na conceitualização do real, de forma que a denominação é uma operação lingüística essencial nessa transformação".

Para um conceito funcionar como instrumento, ele não precisa ser tomado como objeto de pensamento, é suficiente que ele seja uma relação ou uma propriedade de objetos já construídos. E, um conceito se tornará objeto quando ele puder ser tomado como argumento de outra proposição tida por verdadeira (VERGNAUD, 1995).

> Se a linguagem é vista hoje como um dos processos fundamentais de representação e estruturação das experiências e, em particular, a linguagem matemática é vista como um instrumento de elaboração de um conhecimento específico, acompanhando a atividade matemática ao mesmo tempo em que nela se constrói, ela deve integrar-se a esse processo de construção e reconstrução, expressá-lo enquanto este se desenvolve e não ser tomada apenas como um ato de comunicação posterior ou apenas a finalização verbal da atividade (FRANCHI, 1999, p. 192-193).

Assim, expressões simbólicas e lingüísticas possuem um importante papel na matemática e na educação matemática. Como conseqüência, muitos pesquisadores consideram a matemática como sendo uma linguagem, visão essa equivocada. Isto porque a matemática é um sistema de conhecimento, não uma linguagem, onde as verdades matemáticas são independentes da linguagem nas quais elas são expressas. A interpretação equivocada do papel da linguagem na matemática nos força a uma tentativa de tornar as coisas mais claras (VERGNAUD, 1998).

A fim de tentar descobrir em que momento se produzem as filiações e rupturas no processo de conceitualização, deve-se analisar os procedimentos dos alunos frente a uma variedade organizada de situações, e este processo prolonga-se por vários anos e depende em grande parte do ensino oferecido a eles (VERGNAUD, 1996c).

## 1.2 A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS NO ENSINO DE MATEMÁTICA

A história da matemática mostra que a maioria dos conceitos matemáticos surgiu de esforços para resolver problemas teóricos e práticos. Uma das principais dificuldades de ensinar Matemática é encontrar uma maneira compreensível e interessante para o estudante relacionar o conceito matemático com a solução de um problema (VERGNAUD, 1987).

Com finalidade de atingir essa meta deve-se considerar a resolução de problemas como a fonte do conhecimento, onde o conhecimento conceitual deve imergir dentro da resolução de problemas (VERGNAUD, 1987). Na sala de aula, isto significa escolher situações didáticas adequadas (BROUSSEAU, 1981) a fim de auxiliar os estudantes a desenvolver novos conceitos, bem como escolher debates adequados, explicações, representações e formulações com a mesma finalidade. Ou seja, escolher problemas adequados para estimar o conhecimento dos estudantes, ou problemas com um alcance adequado, uma vez que diferentes competências contam com diferente conhecimento, explícito ou implícito. Essa visão foi resumida por VERGNAUD (1987) como:

*problemas práticos e teóricos → conceitos*

*conhecimentos explícitos e conhecimento implícito → competências*

O conhecimento dos estudantes pode ser implícito ou explícito. É considerado explícito quando este é expresso na forma simbólica (linguagem natural, esquema, diagramas, sentenças formais, etc.) e implícito no caso dos estudantes utilizarem uma ação, através da escolha de uma operação adequada, sem serem capazes de expressar a razão para esta adequação (VERGNAUD, 1988).

É possível observar dois diferentes ensinamentos na psicologia e na epistemologia. A primeira ensina que a maioria do conhecimento consiste de competências, nas quais os conceitos são normalmente implícitos. Enquanto que a segunda ensina que a matemática é feita de conceitos específicos, os quais possuem suas próprias funções, dificuldades e armadilhas (VERGNAUD, 1997).

Dessa forma a abordagem psicológica e educacional da natureza dos conceitos matemáticos possui duas necessidades básicas: que esses conceitos sejam traçados pelas competências dos estudantes e a forma como eles progressivamente dominam essas situações; e que essas competências sejam analisadas cuidadosamente com a ajuda de conceitos matemáticos bem definidos e de teoremas (VERGNAUD, 1997).

Vergnaud esclarece em sua teoria que o “conhecimento” se refere tanto às competências quanto às concepções. Competências e concepções são ferramentas essenciais para a descrição e análise da lenta conquista da complexidade feita pelos estudantes, o que de certa forma são dois lados de uma mesma moeda. Entretanto também é verdadeiro que a competência dos estudantes pode ser traçada através de suas ações julgadas adequadas para tratar uma situação (resolução de problemas), enquanto que concepções são normalmente expressas por uma seqüência de enunciados, traçadas através das expressões simbólicas dos estudantes, sejam elas verbais ou outras (VERGNAUD, 1987).

> [...] Saber como a simbolização matemática ajuda os estudantes a resolver problemas é o melhor critério da aquisição de conceitos, considerando que conceitos e símbolos são dois lados da mesma moeda (VERGNAUD, 1982, p. 57).

Pode-se dizer que cada aluno dispõe de um conjunto de competências. Essas competências permitem aos alunos avaliar positivamente uma gama de situações, havendo um equilíbrio entre a complexidade dos recursos cognitivos e a complexidade das situações a serem tratadas. Frente a situações nas quais o aluno não está em condições de avaliar utilizando apenas os conceitos já adquiridos em situações anteriores, faz com que ele necessite criar novos recursos. Dessa forma também são criados novos conceitos e descobertas que serão utilizados em classes de situações semelhantes que virão posteriormente (VERGNAUD, 1996c).

Muitos esquemas podem ser utilizados sucessivamente ou até mesmo simultaneamente em uma situação nova para o sujeito. Ao utilizar um esquema ineficaz para determinada situação, a experiência leva o sujeito a modificá-lo ou a mudar de esquema e, por isto, pode-se afirmar que esse processo é sempre acompanhado de novas descobertas. Mesmo numa nova situação, o comportamento do sujeito abrange uma parte de automatismo e outra de decisão consciente (VERGNAUD, 1993). Cabe ao professor auxiliar os estudantes a desenvolver seus repertórios de esquemas e representações, fazendo com que os estudantes se tornem capazes de se deparar com situações cada vez mais complexas (VERGNAUD, 1998).

Gérard Vergnaud desaprova a maneira como a literatura considera os termos solução de problemas, porque subestima a parte da representação e conceitos. Considera errada também a maneira como a literatura vê a formação de conceitos ou desenvolvimento de conceitos, porque subestima a parte da solução de problemas[2] (VERGNAUD, 1987).

Os conceitos se tornam significativos para o aluno por meio das situações com que ele se depara, pode-se afirmar que as situações e não exclusivamente os conceitos são a principal entrada de um campo conceitual. Existe, pois, uma grande variedade de situações em um mesmo campo conceitual e daí reside o entendimento de que os conhecimentos dos alunos são construídos exatamente pelas situações confrontadas que são progressivamente dominadas (VERGNAUD, 1998). Dessa forma, “a evolução dos conceitos do aluno precede em grande parte de sua própria ação e de sua experiência e reflexão pessoal” (VERGNAUD, 1996c).

Vergnaud, em sua teoria, toma como referência o próprio conteúdo do conhecimento e a análise conceitual desse conhecimento. Desse ponto de vista,

> [...] é necessário que os conhecimentos que adquire o aluno sejam construídos por ele mesmo, em relação direta com as operações da qual é capaz de fazer sobre a realidade; com as relações que está em condições de captar, compor e transformar; com os conceitos que constrói progressivamente (1991, p. 9).

Segundo Vergnaud *et al*. (1990), os conceitos matemáticos têm seu significado representado a partir de várias situações e que cada situação não pode

---

[2] Segundo Vergnaud (1987), na literatura, “solução de problemas é visto como uma nova combinação de ações e regras confiáveis sobre o que já é conhecido, enquanto que formação de conceitos ou desenvolvimento de conceitos é visto como o surgimento de uma nova categoria, nova maneira de conceitualização da palavra, novos objetos e novas propriedades de seus objetos”.

freqüentemente ser analisada com ajuda de um único conceito, mas requer um conjunto de vários conceitos. E, a construção de um conceito consiste na construção progressiva de representações mentais, implícitas ou explícitas, que são homomórficas da realidade para alguns aspectos e não para outros.

Diferentes campos conceituais não são independentes e uns podem ser importantes para a compreensão de outros, sendo necessário ater-se aos aspectos conceituais envolvidos nas situações nas quais os estudantes desenvolvem seus esquemas na escola ou na vida real (VERGNAUD, 1983b). Nesse sentido,

> [...] um dos problemas mais importantes da didática é conhecer a ordem com a qual as noções podem ser adquiridas pelo aluno, tendo quanto à ordem de complexidade assim determinada não podendo ser mais que uma ordem parcial, que dará lugar eventualmente à aprendizagem simultânea de noções relativamente independentes (VERGNAUD, 1991, p. 11).

Assim como na psicogenética, a estrutura de campo conceitual também permite estudar o desenvolvimento e aquisição de idéias específicas na mente do estudante em um período longo de tempo. Isto é, essa conceitualização vem ocorrer a partir do domínio, por parte do estudante, de uma grande diversidade e de tipos diferentes de situações (VERGNAUD, 1983b.)

A estrutura de campos conceituais proporciona para os professores uma variedade de situação e análises de diferentes níveis que os ajuda a fazer os estudantes progredir, lenta mas operacionalmente. Além de tornar possível o estudo da organização de idéias interconectadas, pois embora os campos conceituais possam ser descritos para delinear domínios distintos, esses domínios não são independentes. Ainda, a partir da estrutura de campo conceitual, as representações simbólicas usadas pelos estudantes, nos procedimentos de resolução das situações-problema, podem ser úteis para subdivisões de classe elementares de problemas e para o aparecimento de soluções universais (VERGNAUD, 1983b).

Podem ser observados, de duas formas diferentes, os obstáculos apresentados na educação matemática: a ilusão pedagógica de que se “ensinar corretamente” os estudantes conhecerão isto, e a espera do “desenvolvimento natural”, ou seja, esperar até que o estudante alcance esta fase. Vergnaud afirma que, “não há uma razão do que por que os estudantes podem desenvolver conceitos complexos se eles não conhecem situações complexas" (1983b, p. 172).

Contudo, a estrutura de campo conceitual torna possível o estudo da organização de idéias interconectadas, da conceitualização e de representações. E, isso sobre um longo período de tempo é suficiente para fazer uma aproximação significativa da psicogenética (VERGNAUD, 1983b).

No desenvolvimento de um campo conceitual não é possível identificar o limite entre o estágio formal e o estágio concreto, da teoria de Piaget (VERGNAUD, 1983b). É necessário que novos problemas e novas propriedades sejam progressivamente propostos aos alunos para que esses possam vir a dominá-los, uma vez que a aquisição de um campo conceitual não possui um período de tempo determinado (VERGNAUD, 1993).

> Estudando a aprendizagem e desenvolvimento dos conceitos matemáticos em crianças, podemos ficar chocados com o fato de que a identificação (ou descoberta) de diferentes propriedades de um mesmo conceito nem sempre toma seu lugar de forma simultânea, mas geralmente leva diversos anos. Não somente para o conceito de número, o qual tem sido extensivamente estudado pelos psicólogos, mas também para as estruturas aditivas e multiplicativas, álgebra, geometria ou cálculo (VERGNAUD, 1997, p. 5-6).

Deve-se levar em consideração uma simples e compreensível visão do processo de conceitualização pelo quais os estudantes progressivamente entendem o que fazer e como proceder em situações matemáticas, e o que as sentenças matemáticas e símbolos significam. O principal problema teórico a ser lidado, refere-se à relação entre a representação necessária para os procedimentos matemáticos e a representação contida em palavras, diagramas e símbolos. Refere-se também ao longo processo do desenvolvimento conceitual em um dado domínio onde há a emergência de novos conceitos e a mudança de seu status cognitivo (VERGNAUD, 1997).

> Ao estudar o desenvolvimento e o funcionamento de um conceito, no decorrer da aprendizagem ou quando de sua utilização, é preciso considerar necessariamente ao mesmo tempo, as situações, as invariantes operatórias e as representações. Geralmente não há bijeção entre significantes e significados, nem entre invariantes e situações, não sendo possível reduzir o significado aos significantes nem às situações (VERGNAUD, 1993, p. 9).

A transformação dos conceitos em diferentes níveis conceituais através de diferentes aspectos lingüísticos pode ser vista, por exemplo, na modificação do *status* de “adjetivo” para o *status* de “substantivo”; na modificação de um predicado de um argumento para um predicado de dois ou três argumentos (de propriedades unárias para relações multinomeadas); bem como na modificação de objetos singulares *hic et nunc* a objetos que representam uma classe total de.transformação (VERGNAUD, 1997).

A função dos componentes léxicos e sintáticos da língua natural é o de contribuir com a transformação das invariantes operatórias em conceitos explícitos e teoremas; e assim sendo, o de modificar o status do conhecimento. Isso porque as palavras utilizadas nos textos matemáticos têm a importante função de qualificar as invariantes operatórias essenciais dos esquemas, bem como os símbolos algébricos. Como visto anteriormente, o *status* de explicidade dos conceitos também pode ser modificado, uma vez que a utilização de conceitos de níveis maiores usualmente ocorre junto com essas operações lingüísticas, com o processo da substantivação e com o aumento da complexidade dos predicados e argumentos (VERGNAUD, 1997).

A Teoria dos Campos Conceituais tem produzido resultados esclarecedores para o processo de aquisição de conhecimento em diferentes áreas do conhecimento (FRANCHI, 1999). Tem permitido também estabelecer, em domínios de conhecimento específicos, além de uma psicogênese a longo prazo (como para a conservação de quantidade), uma psicogênese a curto prazo que se refere “à evolução de concepções e práticas do indivíduo ou de um grupo de indivíduos face a novas situações” (VERGNAUD, 1983a).

# 2 MÉTODO, MATERIAIS E INSTRUMENTOS

Este capítulo apresenta a descrição do universo envolvido na experimentação durante a investigação, do método, dos procedimentos e dos instrumentos utilizados para coleta de dados.

## 2.1 CARACTERÍSTICAS GERAIS DA PESQUISA

O presente estudo é caracterizado como sendo do tipo qualitativo. Segundo Bogdan e Biklen (1982), este delineamento é definido quando há contato direto e prolongado da pesquisadora com o ambiente e a situação que está sendo investigada; quando os dados coletados, a partir dos pré e pós–testes são predominantemente descritivos; bem como, quando o interesse da pesquisadora em estudar tal problema de pesquisa é o de verificar como ele se manifesta nas atividades e instrumentos construídos. Outra característica deste tipo de investigação, descrito pelos mesmos autores, é relacionado ao foco de atenção do pesquisador, buscando o significado apresentado pelas ações dos estudantes, isto é, preocupando-se em retratar as perspectivas destes; e quando a análise dos dados consolida-se a partir da inspeção dos dados num processo indutivo, de baixo para cima.

Esta pesquisa busca, a partir da identificação dos significados contidos nas ações dos estudantes, apontar evidências do uso dos diferentes tipos de representação abordados com o *software* de simulação *Modellus* na conceitualização de derivada e foi baseado nos princípios descritos por Bogdan e Biklen (1982).

## 2.2 TRAJETÓRIA

A autora ingressou no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática – PPGECIM na Universidade Luterana do Brasil – ULBRA/Canoas vinculando-se à linha de pesquisa Novas Tecnologias para o Ensino de Ciências e Matemática com objetivo de estudar, com base em alguma teoria de aprendizagem, as influências do uso de uma ferramenta computacional no auxílio do processo de ensino-aprendizagem da Matemática.

Foi tomado como base teórica deste trabalho de pesquisa a Teoria dos Campos Conceituais de Gèrard Vergnaud (1993), pois particularmente foi esta a teoria que foi ao encontro dos ideais de educação da autora. A teoria escolhida para fundamentar a investigação foi estudada inicialmente pela autora, quando aluna, durante o primeiro ano na disciplina Teorias de Ensino e Aprendizagem para o Ensino de Ciências e Matemática.

A escolha de trabalhar com o *software* de simulação *Modellus,* num primeiro momento, foi devido ao fato deste ser um *software* livre e em segundo, por encontrar várias pesquisas na área de Física e Química que o envolviam, como observado em Carson (2000); Araújo (2002) e Balen (2005). Entretanto é observável certa precariedade de pesquisas que relacionam esse *software* com a área de Matemática, apesar dele apresentar uma estrutura compatível para adaptação da base teórica dos campos conceituais.

Optou-se em trabalhar com o operador derivada pois ele é o ponto de partida para a construção dos conceitos do Cálculo Diferencial e Integral e pela dificuldade de compreensão desse conceito por parte dos alunos, que em sua grande maioria domina apenas habilidades nos procedimentos algébricos. Foram encontradas pesquisas utilizando algum tipo de tecnologia para o ensino e aprendizagem do conceito de derivada como descrito por Dall'Anese (2000); Milani (2002); Guimarães (2002). Entretanto a abordagem do papel da utilização de um *software* de simulação neste processo não foi profundamente investigado, reforçando a justificativa para realização deste trabalho.

Neste trabalho de pesquisa foi explorado o conceito de derivada como taxa instantânea de variação, a partir de situações da Física, esta escolha foi realizada com base no que diz Gérard Vergnaud (1983a), de que os conceitos se tornam significativos para o aluno por meio das situações com que ele se depara. Dentro desse contexto, apliquei situações na área da física pois são as que fazem parte do cotidiano do indivíduo; além disso, os livros de matemática oferecem uma gama de situações que envolvem o conceito de derivada relacionadas à área da física.

Utilizou-se a interpretação gráfica do conceito de derivada, como a inclinação da reta tangente, para analisar de que maneira o uso do *software* de simulação *Modellus* pode contribuir na conceitualização de derivada no processo de ensino-aprendizagem, considerando que, segundo Vergnaud, o uso de representação auxilia na mudança do status do conhecimento, uma vez que esta permite a recognição das ações do estudante. Para tanto foram realizados dois experimentos piloto antes do próprio experimento de investigação. Nos estudos piloto foram envolvidos dois cursos, Sistemas de Informação e Ciências Contábeis, uma vez que eram os cursos com disciplinas que abordavam o conteúdo de derivada, com disponibilidade de turma para a autora.

O experimento não foi desenvolvido em demais cursos ou em outras instituições pois necessitava de no mínimo 4 (quatro) dias do cronograma da disciplina para ser aplicado, dificultando assim a liberação dos alunos pelo professor responsável para a realização do método de pesquisa proposto pela autora. Método este considerado longo, uma vez que o semestre letivo é composto de aproximadamente 18 (dezoito) semanas, dentre as quais estão incluídos, no mínimo, 3 (três) dias de avaliação, conforme regulamento da instituição e cronograma do professor. Conseqüentemente, os professores que possuíam disciplinas que envolviam o conteúdo de derivada justificavam a inviabilidade da aplicação de tal experimento, pois a gama de conteúdos que a disciplina propunha não seria possível desenvolver em apenas 11 (onze) semanas.

## 2.3 PRIMEIRO EXPERIMENTO PILOTO

O primeiro piloto ocorreu no segundo semestre do ano de 2004, com uma turma de 29 alunos, da disciplina de Matemática II do curso de Ciências Contábeis do Centro Universitário La Salle – UNILASALLE, em Canoas.

Durante as três primeiras aulas foi trabalhado o conteúdo de derivada e na aula seguinte foi aplicado um pré-teste. O pré-teste é dividido em duas partes, a primeira solicita que os alunos em uma folha respondessem a pergunta “o que é derivada?” sem consultar o caderno, e na segunda etapa, foi aplicado um teste (Apêndice A.1) que serviria como parte da primeira avaliação da disciplina.

Na aula seguinte a turma toda foi participar da aula de laboratório, onde os alunos, a partir de um estudo dirigido (Apêndice A.2), construíram no *software* de simulação *Modellus* uma situação-problema da Física sobre Movimento Vertical.

Junto com o estudo dirigido também havia questões, que deveriam ser respondidas pelos alunos referente à situação criada, objetivando o estabelecimento de alguma relação entre a velocidade instantânea do móvel e o coeficiente angular de uma reta tangente, com base nos diferentes níveis de representação construídos no *software*. A aula de laboratório foi filmada, porém ineficiente, uma vez que o papel da professora-pesquisadora como mediadora cedeu lugar para o de auxíliar na construção da simulação.

Sendo um Curso de Ciências Contábeis, a autora ficava restrita a não prolongar o experimento com aplicações em Física, uma vez que a abordagem da derivada seria mais adequada em situações com funções marginais como custo, receita e lucro marginal. Entretanto, como já mencionado, esta era a turma disponível para a autora realizar o projeto de pesquisa que, por sua vez, já estava estruturado, abordando a derivada através de situações da área da física. Por esse motivo, o pré-teste representava parte da primeira avaliação da disciplina, a qual era composta por duas áreas. O pós-teste (Apêndice A.3) representaria um teste de recuperação da primeira área.

Esse primeiro experimento foi descartado por diversas razões. A primeira foi a insuficiência de dados a serem analisados, visto que apenas um aluno ficou em recuperação na primeira área da disciplina. Outra explicação foi a função inesperada que o estudo dirigido proporcionou aos alunos, isto é, ele serviu principalmente para que eles conhecessem o *software* de simulação a partir da construção da atividade, o que não constitui o objetivo da investigação. Foi constatado também a possibilidade de o estudo dirigido ter mascarado as dúvidas dos alunos por ser tão minucioso, já que a interação professor-aluno foi baixa e eles demoraram praticamente 3 horas ininterruptas, ficando exaustos, segundo comentários ao final da atividade. Além da questão cognitiva, pois a atividade com movimento vertical fez aflorar nos estudantes concepções alternativas de conceitos de Física, desvirtuando a atenção deles do objetivo do trabalho e conseqüentemente dificultando o domínio do conceito de derivada na situação proposta.

## 2.4 SEGUNDO EXPERIMENTO PILOTO

O segundo piloto ocorreu no primeiro semestre do ano de 2005, a turma era composta de 28 alunos da disciplina de Matemática II, do curso de Ciências Contábeis do Centro Universitário La Salle – UNILASALLE, em Canoas.

O método usado para este trabalho foi a aplicação de um teste antes (pré-teste) (Apêndice B.1) e um após (pós-teste) (Apêndice B.3) ao tratamento (Apêndice B.2) (aula de laboratório com uso do *software* de simulação).

Uma vez que já havia sido verificada a inviabilidade de desenvolver os procedimentos necessários para realizar a investigação apenas nos dias letivos, foi exposto para a turma os objetivos da pesquisa realizada pela autora. A mesma solicitou a colaboração de alguns alunos como voluntários, a participar de uma atividade a realizar-se no sábado, no laboratório de informática, com o conteúdo que estava sendo trabalhado em sala de aula.

Entretanto, apenas 8 (oito) alunos prontificaram-se em participar da atividade ao sábado, comparecendo neste dia somente 6 (seis) dos mesmos.

Devido aos obstáculos encontrados no primeiro piloto com a utilização de um estudo dirigido, as atividades apresentadas aos alunos no sábado já estavam construídas no *software* de simulação, durante a execução do segundo piloto. As atividades construídas no *software* de simulação abordavam questões do Movimento Retilíneo Uniforme e Movimento Retilíneo Uniformemente Variado, visto que o movimento de queda livre utilizado no primeiro piloto provocou desequilíbrios cognitivos, provenientes de concepções alternativas. Possuía questões amplas com o objetivo de mediar uma discussão a fim de obter o máximo de informações na filmagem.

Apesar de ter conseguido aplicar o pré-teste, este segundo piloto também foi descartado devido à rapidez com que o conteúdo foi apresentado aos alunos, frente a dificuldade de cumprir o cronograma da disciplina e por dificuldades inesperadas apresentadas na filmagem. Além disso, alguns dos alunos voluntários submetidos ao tratamento não precisaram realizar a recuperação, e portanto, não foi obtido o pós-teste dos mesmos, tornando os dados insuficientes.

## 2.5 EXPERIMENTO

O experimento ocorreu no segundo semestre do ano de 2005, com uma turma de 13 alunos, da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, do curso de Sistemas de Informação da Faculdade Cenecista Nossa Senhora dos Anjos – FACENSA, em Gravataí, totalizando 6 (seis) aulas.

Foi utilizado para coleta um pré e um pós-teste ao tratamento (Apêndice B.2), sendo este caracterizado por uma aula de laboratório com uso do *software* de simulação e entrevistas. O pré e pós-teste estarão descritos a seguir no subitem 2.6.

Os resultados dos dois estudos piloto realizados anteriormente não foram contabilizados, a fim de impedir que os viéses detectados não interferissem nos resultados desta pesquisa. É importante salientar que as questões do pré e pós-teste, descritas a seguir, aplicados na pesquisa diferem daquelas utilizadas nos dois experimentos pilotos.

### 2.5.1 Primeira Etapa

**Sala de aula**

Explanação do conteúdo de derivada em sala de aula durante três aulas, por meio de encontros semanais.

Na primeira aula, abordou-se o conceito de limite, a partir de idéias intuitivas, via tabelas numéricas e gráficos. Após, foram utilizados exemplos analíticos, onde o limite da função em $x_0$ é indeterminado possibilitando sua resolução a partir de uma simplificação da expressão analítica da função.

Em seguida foi trabalhada a diferença entre coeficiente angular de reta secante e coeficiente angular de reta tangente, utilizando, neste caso, o conceito de limite.

Finalizou-se a aula com exercícios que solicitavam a equação da reta tangente a uma função em um determinado ponto e em um ponto qualquer da curva.

Na segunda aula, foi trabalhada a definição de função derivada e de diferenciabilidade. Inicialmente, foram expostos os tipos de notações mais usados para representar a derivada de uma função e escrito no quadro:

> a derivada de uma função pode ser interpretada ou como uma função cujo valor em x é a inclinação da reta tangente ao gráfico de f(x) = y em x ou, alternativamente, como uma função cujo valor em x é a taxa instantânea da variação de y em relação a x (ANTON, 2000, p. 179).

Após algumas discussões e exemplos gráficos que relacionassem a primeira parte dessa citação com a primeira aula, foi apresentada a expressão analítica que define a derivada $\left( f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right)$ e, informalmente, que os pontos de não diferenciabilidade geometricamente mais comumente encontrados, podem ser classificados da seguinte forma: picos, pontos de tangência vertical e pontos de descontinuidade.

Na terceira aula, foi trabalhada a segunda parte da citação descrita acima “[...] como uma função cujo valor em x é a taxa instantânea da variação de y em relação a x”, a partir de situações da Física. Inicialmente, foram abordadas as regras de derivação de funções polinomiais e, em seguida, exemplos que envolvessem os conceitos de velocidade (instantânea) e de aceleração (instantânea) de uma partícula.

### 2.5.2 Segunda Etapa

**Pré-teste**

Na quarta aula, foi aplicado um teste com quatro questões, este servia como pré-teste da investigação o qual fazia parte do processo de avaliação da disciplina e, por isso, apenas três questões desse teste serviram como instrumento de coleta dos dados.

### 2.5.3 Terceira Etapa

**Tratamento**

Como a aula de laboratório seria realizada no sábado seguinte à aplicação do pré-teste, a seleção dos alunos, que ficariam expostos ao tratamento, foi feita mediante a disponibilidade de quem poderia comparecer no dia. Dessa forma, dos 13 alunos inicialmente envolvidos na pesquisa, 8 não puderam comparecer na aula de laboratório, restando apenas 5 alunos incluídos na análise dos dados.

Foi solicitado a eles que não fizessem nenhum tipo de comentário a respeito da aula no laboratório com os outros colegas antes de realizarem o teste de recuperação (pós-teste).

Foram elaboradas quatro atividades para serem desenvolvidas no *software* de simulação *Modellus* que representavam situações da Física referente ao Movimento Retilíneo Uniforme e Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (MRU e MRUV, respectivamente).

As atividades desenvolvidas na aula de laboratório tinham por objetivo levar os estudantes a compreender a relação entre o significado de velocidade instantânea e inclinação da reta tangente à função a partir dos diferentes níveis de representação oferecidos pelo *software*, por meio da: visualização da animação do fenômeno físico, da visualização das retas tangentes ao gráfico da função posição e da tabela numérica com três colunas, sendo elas, tempo, posição e velocidade.

O fenômeno físico simulado foi o deslocamento de um móvel ao longo de uma linha horizontal. Durante a aula de laboratório foram desenvolvidas quatro atividades, nas quais o estudante teria que descrever o comportamento da velocidade do móvel ao longo do percurso com base nos diferentes níveis de representação abordados em cada atividade.

A primeira atividade mostrava o deslocamento de um móvel com velocidade constante, a segunda com velocidade crescente, a terceira com velocidade decrescente e a última com velocidade crescente e decrescente.

Cada atividade representa um arquivo que apenas pode ser explorado a partir do *software* de simulação *Modellus*. A situação e as questões que cada atividade propõe foram descritas na janela “notas” do próprio *software*.

Com o uso do *software* de simulação *Modellus* foi possível utilizar quatro níveis de representação para trabalhar com o conceito velocidade. O primeiro nível é a “idealização do real”, isto é, a própria “animação”, simulação do fenômeno físico que apresenta a situação problema. A figura abaixo mostra que esse nível de representação é explorado a partir da janela “Animação 1” do *software*.

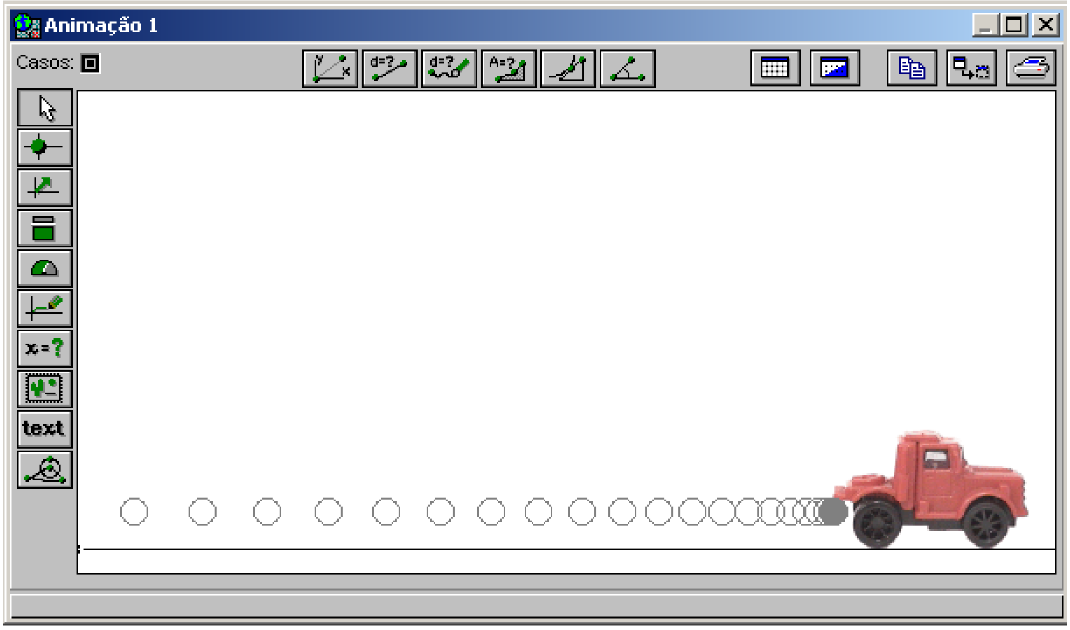



**Figura 01**: Mostra o tipo de representação "idealização do real"
**Fonte**: *Software Modellus*

O segundo tipo de representação é a "gráfica", onde é possível a visualização do movimento das retas tangentes ao longo da função posição. A figura abaixo mostra que esse nível de representação é explorado a partir da janela "Gráfico 01" do *software*.

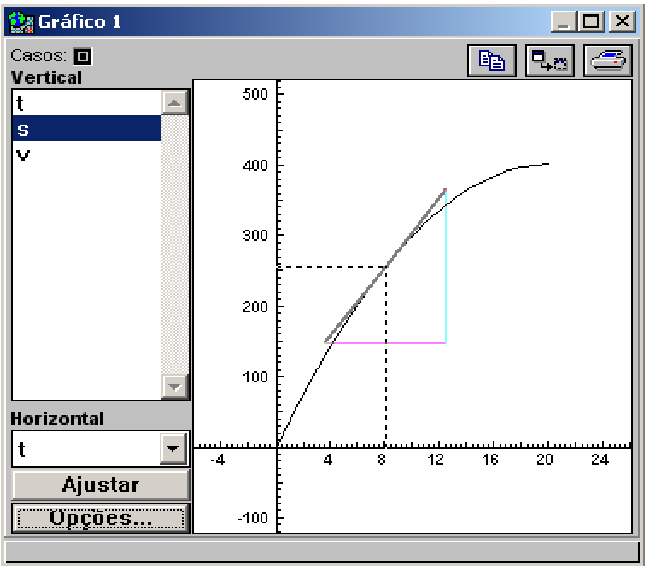



**Figura 02**: Mostra o tipo de representação gráfica
**Fonte**: *Software Modellus*

O terceiro é a “numérica”, que em forma de uma tabela era apresentado o valor da posição e da velocidade instantânea do móvel em cada instante de deslocamento.

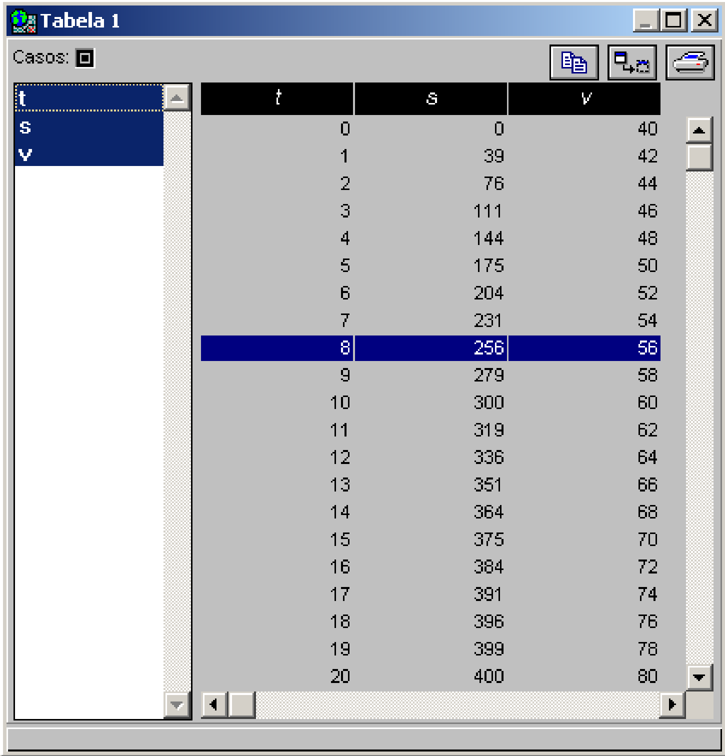



**Figura 03**: Mostra o tipo de representação numérica
**Fonte**: *Software Modellus*

E o último tipo de representação é a “algébrica”, na qual é expressa a função que fornece velocidade instantânea do móvel a partir da derivada da função posição, sendo descrita na janela “Modelo”.

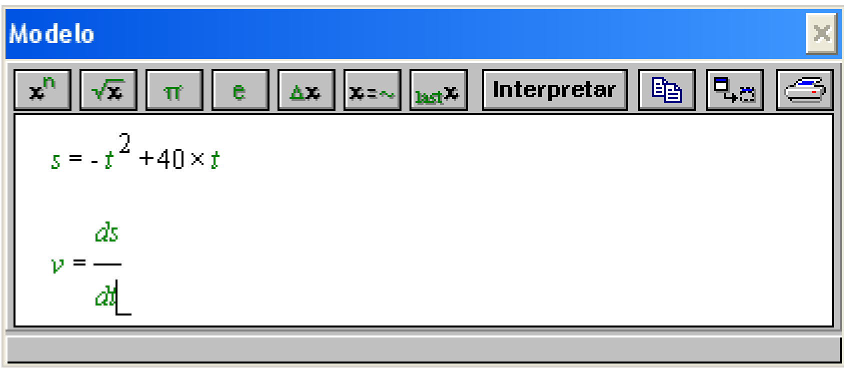



**Figura 04**: Mostra o tipo de representação algébrica
**Fonte**: *Software Modellus*

### 2.5.4 Quarta Etapa

#### Pós-teste

O pós-teste foi aplicado na aula seguinte, que além de servir como instrumento de pesquisa, fez parte também do processo de avaliação da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral como teste de recuperação, com cinco questões. Todos alunos voluntários que participaram do tratamento no sábado se prontificaram em realizar o teste de recuperação, mesmo não necessitando deste para conclusão da disciplina. Este procedimento foi adotado objetivando evitar o viés detectado no segundo piloto.

### 2.5.5 Quinta Etapa

#### Coleta de dados e entrevista

Após a coleta e classificação dos dados, a partir do pré e pós-teste, foi estruturada uma entrevista a fim de registrar, compreender e explorar de que maneira os alunos fizeram uso da aula de laboratório para desenvolver as questões do pós-teste. Essa entrevista (Apêndice C) foi realizada individualmente na semana seguinte à aplicação do pós-teste.

Na aula posterior, um dia depois da entrevista, foi feita a correção do pós-teste em sala de aula, visando a obtenção de mais informações dos alunos. Quando pertinentes à investigação, esses comentários eram registrados pela autora juntamente com o nome do aluno, possibilitando identificar se o mesmo estivera sob efeito do tratamento ou não.

## 2.6 INSTRUMENTOS UTILIZADOS NA COLETA DE DADOS

Os instrumentos utilizados na coleta de dados foram o pré-teste e o pós-teste, que têm como função identificar as possíveis invariantes operatórias, expressas na forma de algoritmos aplicados antes e após o tratamento, e as entrevistas, que objetivavam confirmar os resultados obtidos no pré e pós-teste.

Tanto o pré-teste quanto o pós-teste serviram como avaliação para a disciplina e as questões envolviam o conceito de derivada, seja por meio da interpretação como a inclinação de reta tangente, seja por meio da interpretação como taxa instantânea de variação, estando presentes em ambos os casos, algum dos tipos de representação numérica, algébrica ou gráfica.

### 2.6.1 Pré–teste

**Questão 1**: Ache a equação da reta tangente a função $f(x) = 2x - x^3$ no ponto $P(-2, f(-2))$ e verifique se a reta tangente é crescente ou decrescente, justificando sua resposta.

**Questão 3**: Uma partícula move-se ao longo de uma reta horizontal, de modo que a equação $S = 2t^3 - 3t^2 - 12t + 8$.

a) Ache a velocidade instantânea, $V(t)$ cm/s, da partícula em 3s;

b) Determine os intervalos de tempo em que a partícula move-se para a direita, para a esquerda e quando a partícula inverte o sentido do movimento.

**Questão 4**: Associe a função representada graficamente, no primeiro quadro, com o gráfico (a) ou (b) de sua respectiva função derivada.

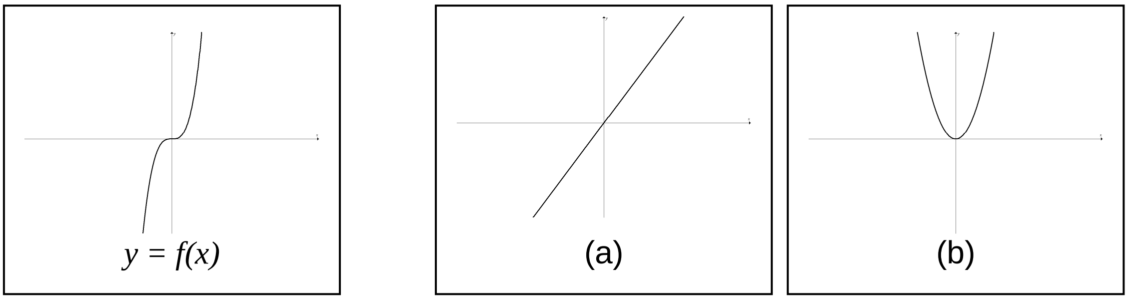



**Gráfico 01**: Questão 4 do pré-teste
**Fonte**: Elaborado pela autora no *Software Graphmatica*

Como o pré-teste também serviu no processo de avaliação da disciplina, a questão 2 dele não tem fins para a análise dessa investigação.

### 2.6.2 Pós-teste

**Questão 1**: Uma partícula move-se ao longo de uma reta horizontal, de modo que a equação $S = \frac{1}{3}t^3 - 8t^2 + 60t + 20$.

a) Ache a velocidade instantânea, $V(t)$ cm/s, da partícula em 4s;

b) Determine os intervalos de tempo em que a partícula move-se para a direita, para a esquerda e quando a partícula inverte o sentido do movimento.

**Questão 2**: Duas partículas A e B movem-se ao longo de uma reta horizontal. O movimento da partícula A é expresso de acordo com a equação $S_A = \frac{1}{3}t^3 - 4t^2 + 64t$ e o movimento da partícula B, de acordo com a equação $S_B = -\frac{1}{3}t^3 + 32t^2$, onde *S* representa a posição da partícula, é medido em metros e *t*, em segundos. Sabendo que a tabela abaixo mostra a posição das partículas nos primeiros oito segundos de movimento, descreva o comportamento da velocidade de cada uma das partículas nos primeiros oito segundos de movimento.

| $t$ (s) | $S_A$ | $S_B$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 31,67 | 60,33 |
| 2 | 125,33 | 114,67 |
| 3 | 270,00 | 165,00 |
| 4 | 490,67 | 213,33 |
| 5 | 758,33 | 261,67 |
| 6 | 1080,00 | 312,00 |
| 7 | 1453,67 | 366,33 |
| 8 | 1877,33 | 426,67 |

**Quadro 01**: Questão 2 do pós-teste
**Fonte**: Elaborado pela autora

**Questão 3**: Para quais valores de *x* a reta tangente à função $f(x) = 2x - x^2$ é crescente e decrescente?

**Questão 4**: Esboce o gráfico de uma função *f* para a qual $f(1) = -1,\ f'(1) = 0,\ f'(x) < 0$ se $x < 1$ e $f'(x) > 0$ se $x > 1$.

**Questão 5**: Esboce o gráfico da função derivada do gráfico abaixo.

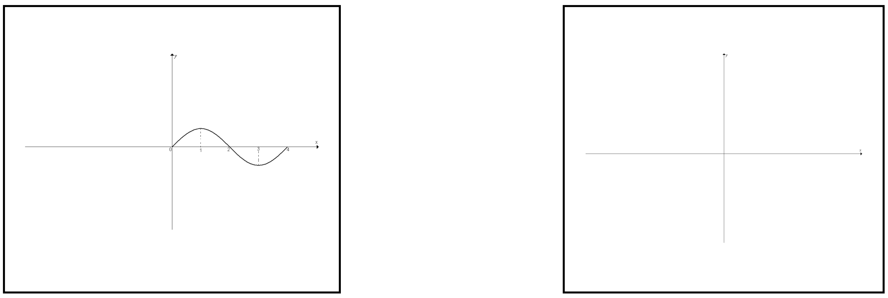


**Gráfico 02**: Questão 5 do pós-teste
**Fonte**: Elaborado pela autora no *Software Graphmatica*

## 2.7 COMENTÁRIOS DAS QUESTÕES DOS PRÉ E PÓS-TESTES

Segundo Vergnaud (1996b, p. 12-13), em *A trama dos campos conceituais na construção do conhecimento*, um conceito apresenta diferentes níveis de complexidade dependendo da forma de como ele é enunciado em uma situação. O nível mais simples é quando ele é expresso na forma de adjetivo e pode-se dizer que é predicado num lugar. O próximo nível é quando ele representa um predicado com mais de uma posição, outro nível mais complexo de um campo conceitual é quando o conceito é um substantivo e por fim quando se utiliza “a mesma operação lingüística de nomeação para transformar o status cognitivo conceitual de um predicado ou dois predicados”.

A seguir, será apresentada uma justificativa da escolha de cada questão dos pré e pós-testes.

Não é possível identificar os conceitos-em-ação ou teoremas-em-ação envolvidos em cada uma das questões do pré e do pós-teste, visto que, ao fazê-lo, estarei abordando a forma de construção do pensamento da autora, quando na resolução de cada situação-problema. Ao elencar apenas alguns conceitos-em-ação e teoremas-em-ação, pode-se pecar  por reducionismo, visto que uma situação-problema pode ser resolvida por diferentes esquemas, permitindo que a autora realize somente inferências a respeito das invariantes operatórias pertinentes a sua classe de esquema. Dessa forma, cabe salientar que os conceitos-em-ação e os teoremas-em-ação são próprios de cada indivíduo e não das situações-problema. As situações-problema apresentam teoremas matemáticos, os quais podem ser expressos pelo indivíduo na forma de teoremas em ação cientificamente corretos, tornando assim o conhecimento implícito do estudante em explícito.

### 2.7.1 Questões relacionadas à área da matemática

A questão 1 do pré-teste é semelhante à questão 3 do pós-tese. Para resolver parte da questão 1 do pré-teste é preciso conhecer a definição matemática de que o coeficiente angular da reta tangente à função é a derivada da função em $x = -2$, se $f(x)$ é contínua em $x = -2$. Sabendo disso, a expressão derivada da função é usada na forma de um adjetivo. Já na questão 3 do pós-teste, a expressão derivada da função também representa um adjetivo, pois para resolvê-la é preciso, se utilizar da mesma deinição da questão 1 do pré-teste, isto é que o coeficiente angular da reta tangente à uma função em x = $x_0$ é a derivada da função para algum valor de $x_0$. Nesse caso, como o valor de $x_0$ não é conhecido, a questão torna-se um pouco mais complexa.

A questão 4 do pré-teste é semelhante às questões 4 e 5 do pós-teste. Para resolver estas questões, é preciso conhecer a definição de que a derivada é uma função cujo valor em *x* é a inclinação da reta tangente ao gráfico de *y = f(x)* em *x*. Também nesse caso, a expressão derivada da função representa um adjetivo. Porém a diferença entre a questão 4 do pré-teste e a questão 5 do pós-teste é que esta solicitava que o aluno representasse geometricamente a função derivada, enquanto que a primeira pedia apenas para indicar a função derivada correspondente, tornando assim a questão 5 um pouco mais elaborada em relação à questão 4 do pré-teste. Já a questão 4 do pós-teste é mais complexa, pois solicitava a construção da função a partir de dados da função derivada correspondente.

Para resolver as questões 4 e 5 do pós–teste, além de ter conhecimento de que a derivada de uma função pode ser interpretada como uma função cujo valor em *x* é a inclinação da reta tangente ao gráfico de *f(x) = y* em *x*, é preciso relacionar que se a reta tangente à função é decrescente, então a derivada representa um valor negativo e se a reta tangente à função é crescente, então a derivada representa um valor positivo. O aluno precisa levar em consideração essas duas informações ao esboçar o gráfico de uma função derivada a partir do gráfico da função.

### 2.7.2 Questões relacionada à área da física

A questão 3 do pré-teste é igual à questão 1 do pós-teste e semelhante à questão 2 do pós-teste. Tanto para resolver a questão 3 do pré-teste ou a questão 2 do pós-teste é preciso saber que a velocidade é a derivada da função posição e, em ambas situações, a derivada é considerada como um adjetivo. Porém devido a questão 2 apresentar uma tabela com o valor das posições de cada partícula nos oito primeiros segundos de deslocamento, ela pode levar o aluno a um desequilíbrio cognitivo, de modo que ele não utilize a definição acima citada para descrever o comportamento da velocidade da partícula a partir da derivada da função posição.

## 2.8 *MODELLUS*

Há uma crescente e generalizada aceitação da importância da utilização do computador na educação científica e matemática, sendo este uma ferramenta essencial na investigação e no desenvolvimento em quase todos os campos científicos e tecnológicos (TEODORO, 2002).

Na década passada, já se reconhecia a importância da utilização do computador como forma de poder melhorar significativamente as práticas pedagógicas em física, com sua aplicação no laboratório; e na matemática, na representação de objetos matemáticos como, por exemplo, funções e figuras geométricas (TEODORO, 1997).

Segundo Medeiros *et al*. (*apud* RIBEIRO, 2005, p. 2), a utilização do computador no ensino proporciona a formação e acentuação de conceitos, além de promover a mudança conceitual (RIBEIRO, 2005).

Acredita-se que dentre as várias possibilidades de uso da informática no ensino, a modelagem computacional é a que melhor possibilita a interação dos estudantes com o processo de construção e análise do conhecimento científico, permitindo que compreendam melhor modelos físicos e matemáticos (ARAÚJO, 2004).

Nos ambientes de aprendizagem, em que a perspectiva construtivista seja dominante, a utilização do *software* de modelação pode facilitar seu fortalecimento, apresentando simultaneamente potencialidades de abordagem integrada das ciências e da matemática (TEODORO, 1997).

O uso de simulação computacional facilita a aprendizagem dos estudantes, sendo esta a ferramenta-chave neste processo, uma vez que possibilita aos alunos trabalhar com modelos matemáticos, por meio de exploração de funções, equações diferenciais e iterações com objetos. Estas diferentes funções permitem a construção de modelos de fenômenos físicos, como objetos-para-pensar-com, tornando concretos os objetos formais utilizados pela física, por exemplo:

> Esta nova perspectiva, fundamentada na investigação sobre a aprendizagem das ciências e da matemática, e na investigação em interfaces entre o computador e o utilizador, assume que: (1) a aprendizagem é um processo activo de criação de significados a partir de representações; (2) a aprendizagem decorre numa comunidade de prática em que os estudantes aprendem a partir do seu próprio esforço e a partir de orientação externa; (3) a aprendizagem é um processo de familiarização com conceitos, com ligações entre conceitos e com representações; (4) os interfaces baseados na manipulação directa permitem aos estudantes explorar conceitos concreto-abstractos, como é o caso dos conceitos físicos, mesmo quando possuem uma competência reduzida na utilização de computadores (TEODORO, 2002, p. 15).

O ponto mais importante do desenvolvimento e da utilização de computadores na matemática e física, nos últimos anos, refere-se à criação de *software* educacional que possibilita aos alunos a manipulação de conceitos formais, os quais constituem a maior parte dos conceitos matemáticos e científicos, sem necessidade de recursos a complexas linguagens de programação (TEODORO, 1997).

Com o advento dos *softwares* educacionais e o crescente uso de novos recursos de informática no ensino, faz-se necessário investigar sua contribuição ao processo de aprendizagem do aluno (ARAÚJO, 2004). Entretanto poucos trabalhos de pesquisa foram realizados com este propósito, sendo este um dos fatores estimulantes para realização do presente trabalho. Outra razão para isto é a possibilidade de melhor compreensão de conceitos oferecidos pela utilização desses *softwares,* como citado por Ogborn (*apud* GRAVINA, 1998, p. 12) “[...] a análise de um o modelo matemático, pode levar a compreensão de conceitos profundos, como por exemplo a noção fundamental de taxa de variação [...]”.

> Um modelo tem o papel de criar uma ponte entre teoria e real e será viabilizado por métodos que passam pela observação do fenômeno, formulação de hipóteses, verificação da validade dessas hipóteses, novos questionamentos e, finalmente, o enunciado (RIBEIRO, 2005, p. 2).

Diversos autores como Veit e Teodoro (2002), Esquembre (2002) e Balen (2005) relatam que o estudo de fenômenos, processos físicos e químicos, os quais podem ser descritos através de modelos matemáticos que traduzem o fenômeno, são possibilitados através da utilização do *software Modellus*[3]. Este, por sua vez, é classificado como uma ferramenta de modelagem, simulação e cálculo e visa proporcionar a construção e manipulação de modelos dinâmicos quantitativos matematicamente de modo que estes possam ser analisados de forma mais clara e concisa (VICTOR, 2002).

O programa *Modellus* é um *software* livre, distribuído gratuitamente na *Internet*, o qual permite ao aluno realizar e construir experimentos conceituais utilizando modelos matemáticos definidos a partir de funções, derivadas, taxas de variação, equações diferenciais e equações a diferenças finitas, escritos de forma direta, ou seja, assim como o aluno aprendeu na sala de aula, muito semelhante ao uso que faria com papel e lápis (VIET e ARAÚJO, 2005; COSTA *et al*., 2007 e ARAÚJO, 2004).

Até onde se conhece, o *Modellus* é o único programa de autoria para a criação de modelos matemáticos, que prescinde do uso de metáforas ou linguagens de programação, ao contrário do que ocorre com excelentes ferramentas de modelagem, como o PowerSim, Visq, STELLA e outras. Característica esta proposital do programa, uma vez que ele foi concebido sob a premissa de que se o estudante não domina a linguagem matemática, o próprio *software* pode se constituir em uma ferramenta para auxiliá-lo na aprendizagem de conceitos matemáticos (ARAÚJO, 2005).

> Para Pierre Lévy, a simulação por computador trata-se de uma tecnologia intelectual que amplifica a imaginação individual e permite aos grupos que compartilhem, negociem e refinem modelos mentais comuns, qualquer que seja a complexidade deles (LÉVY, 1999 *apud* SANTOS, 2006, p. 5).

---

[3] Pode ser encontrado no *site* <http://phoenix.sce.fct.unl.pt/modellus> é de origem portuguesa da Universidade Federal de Lisboa. Construído em linguagem C++, o *software* possui interface de janelas das quais possui sete tipos de distintas funções, integradas pelo mesmo modelo matemático (COSTA *et al*., 2007).

O maior interesse da simulação não é o de substituir a experiência, nem o de tomar o lugar da realidade, mas sim o de permitir a formulação e a exploração rápida de grande quantidade de hipóteses, uma vez que ela constitui um modo especial de conhecimento. Dessa forma, o efeito da simulação, dentro de uma ótica construtivista, é o de fornecer aos alunos uma experiência direta, fazer hipóteses e observar os efeitos destas hipóteses, permitindo ao estudante executar seu modelo de simulação e observá-lo, modificando os parâmetros como desejar, e realizando novas predições (SANTOS, 2006).

A interatividade nas animações podem ser usadas para ressignificar o conhecimento mediante significados claros, estáveis e diferenciados, previamente existentes na estrutura cognitiva do aprendiz. Elas são capazes de auxiliar na construção do conhecimento, uma vez que permite ao aluno fazer representações, explorando-as sobre as mais diversas perspectivas (SANTOS, 2006).

O *Modellus* possui diferentes passos de construção e exploração de modelos, os quais podem ser feitos quer a partir de dados e registros físicos de experiências reais, quer apenas a partir de um ponto de vista exclusivamente matemático (TEODORO, 2002). As atividades com este programa evidenciam a unidade da matemática e da física, algo que é muito difícil de evidenciar nas abordagens tradicionais, sendo que os modelos matemáticos são tratados como objetos concreto-abstratos: concretos no sentido de que podem ser manipulados diretamente com um computador e abstratos no sentido de que são representações de relações entre variáveis (TEODORO, 2002).

A aplicação de atividades de modelagem exerce uma influência positiva na predisposição do indivíduo para aprender, pois, permite que o conteúdo visto anteriormente por ele, e que até então estava muito abstrato, passe a ter um referencial mais concreto. Isto ocorre na medida em que a relevância de determinadas relações matemáticas e conceitos sejam percebidos pelo aluno durante o processo de interação com os modelos conceituais (ARAÚJO, 2004).

O *Modellus* possui duas características básicas: a de representações múltiplas e a de manipulação direta. Na primeira, o usuário pode criar, ver e interagir com representações analíticas e gráficas de objetos matemáticos; já na segunda, ele pode trabalhar com todos os tipos de objetos que aparecem na tela do computador sem a mediação de qualquer linguagem de programação. Outra característica do programa é de que ele oferece a possibilidade de se trabalhar como um sistema tutorial, onde o professor pode preparar a representação de uma situação física a qual os alunos ainda não possuam os conhecimentos necessários para a compreensão de sua natureza matemática (VICTOR, 2002).

É necessário distinguir entre os diferentes níveis de interação do aluno com o comutador que dependem da forma como os estudantes têm acesso a esta ferramenta e do tipo de atividade exercida nele: atividades de simulação computacional e de modelagem computacional. Nas atividades denominadas simulação computacional, “o aluno tem autonomia para inserir valores iniciais para variáveis, alterar parâmetros e, eventualmente, modificar relações entre as variáveis” (DORNELLES, 2006, p. 6), entretanto ele é impedido de modificar a base do modelo computacional. Nas atividades denominadas modelagem computacional, o estudante “além de poder atuar sobre a variação de parâmetros e valores iniciais” (DORNELLES, 2006, p. 6), ele tem acesso aos elementos básicos, podendo, em ambos os casos, explorar um modelo computacional já construído, sendo desta forma, denominado modo de exploratório. Na modelagem computacional, o aluno pode também construir seu próprio modelo, desde sua estrutura matemática até a análise dos resultados gerados por ele, ou fazer alterações em modelos computacionais previamente construídos, sendo que neste caso, o modo de uso é chamado de expressivo ou de criação. Classifica-se como atividade de modelagem toda aquela em que o aluno foi solicitado a trabalhar na janela Modelo, as demais atividades são consideradas como de simulação (DORNELES, 2006).

Como já comentadas anteriormente, as dificuldades apresentadas pelos alunos na integração e compreensão dos conceitos associados aos fenômenos físicos podem ter como causa: as interpretações pessoais dos fenômenos; as concepções alternativas dos alunos, que resultam de suas experiências no cotidiano e a inabilidade de compreender o modelo e passar de um nível de representação a outro quando busca interpretar o processo que descreve o fenômeno (BALEN, 2005).

Na busca de um melhor aproveitamento do desempenho dos alunos, alguns aspectos se mostram relevantes no processo de ensino-aprendizagem, como: metodologias de ensino que visam à construção do conhecimento, utilização de objetos interativos que promovam o desenvolvimento cognitivo dos alunos, articulação dos conhecimentos prévios e a formação contínua dos professores (SANTOS, 2006).

Apesar do crescente interesse na introdução das novas tecnologias de informação e comunicação (NTICs) no processo de ensino-aprendizagem, tem que se ter o cuidado para não levar a uma visão distorcida do papel da educação na sociedade da informação, ou seja:

> Educar para uma sociedade da informação significa muito mais que treinar as pessoas para o uso das tecnologias da informação e comunicação: trata-se de investir o mais precocemente possível na criação de competências suficientemente amplas que permitam uma atuação efetiva e crítica, tomando decisões fundamentadas no conhecimento utilizando com fluência os novos meios e ferramentas em seu trabalho (COSTA *et al*., 2002, p. 1).

Para tanto, é necessário que o professor tenha conhecimento sobre as novas tecnologias de informação e comunicação, visando adquirir a capacidade de reformular conhecimentos, expressar-se criativamente, utilizar essas tecnologias na sua prática pedagógica, além de produzir e gerar informação (COSTA *et al*., 2002).

Além disso, *softwares* educacionais, como o *Modellus*, enquadram-se no conceito de ferramentas computacionais as quais são capazes de auxiliar na construção do conhecimento que podem promover uma abordagem construtivista e podem ser usadas para dar sentido ao novo conhecimento (VEIT e TEODORO, 2002).

O próximo capítulo pretende apontar a identificação dos significados das ações dos estudantes a partir de trechos das entrevistas e dos procedimentos descritos pelos estudantes na resolução das questões dos pré e pós–testes.

# 3 RESULTADOS E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Neste capítulo serão apresentados os aspectos abordados pelos estudantes no desenvolvimento da resolução das questões do pré e pós–teste, no que tange à relação entre o conceito de derivada como inclinação da reta tangente e como taxa instantânea de variação com os tipos de representação utilizados durante o experimento, por meio do *software* de simulação *Modellus.*

A seguir serão descritos, na forma de quadros, os procedimentos utilizados pelos estudantes no desenvolvimento das questões dos pré e pós-testes relacionadas às situações que envolvem a área da Matemática e a área da Física.

A partir desses dados e das entrevistas pretende-se retratar as perspectivas dos estudantes que apontam evidências da influência dos diferentes tipos de representação abordados com o *software* de simulação *Modellus* na conceitualização de derivada.

Dessa forma, estabeleci os seguintes critérios de análise:

- Analisar individualmente o quadro de procedimentos de cada aluno para cada questão;
- Inferir ou identificar possíveis conceitos-em-ação e teoremas-em-ação envolvidos nos procedimentos e nas entrevistas;
- Apontar os tipos e a frequência de uso das diferentes representações utilizadas na resolução das questões;
- Comparar os esquemas desenvolvidos nas questões do pré em relação aos esquemas do pós-teste a fim de identificar possíveis rupturas e ampliação do campo conceitual da derivada;

## 3.1 SITUAÇÕES – PROBLEMA RELACIONADO À ÁREA DA MATEMÁTICA

As questões 1 e 4 do pré–teste e as questões 3, 4 e 5 do pós–teste estão relacionadas às situações–problema da área da Matemática, já relacionadas e justificadas no capítulo anterior. Para resolver essas questões deve-se ter o conhecimento da interpretação geométrica do conceito de derivada.

### 3.1.1 Estudante A.F.

Os quadros abaixo mostram as questões e os procedimentos usados pelo estudante A.F. no desenvolvimento das questões semelhantes do pré e do pós-teste.

Questão 1 do pré–teste:

| |
|---|
| Ache a equação da reta tangente à função $f(x) = 2x - x^3$ no ponto $P(-2, f(-2))$ e verifique se a reta tangente é crescente ou decrescente, justificando sua resposta. |

Procedimentos do estudante A.F.

| |
|---|
| Encontrou o valor de *y* substituindo o valor de *x* na função $f(x) = 2x - x^3$; |
| Identificou que o número 2, coeficiente do primeiro termo da função $f(x) = 2x - x^3$, era o coeficiente angular da reta; |
| Substituiu o valor de *y* encontrado e o valor de *x* dado na expressão *y=ax+b* para calcular o valor do coeficiente linear da equação da reta; |
| Montou a equação da reta. |

Na resolução da questão 1 do pré–teste, A.F. tem como conceito-em-ação que o coeficiente angular representa o coeficiente do termo cuja variável da parte literal apresenta expoente igual a um, independente do grau da função. Nesse caso, ele não está associando o conceito de derivada como sendo a inclinação da reta tangente à função em um determinado valor de *x*. Por enquanto, o estudante está utilizando a representação algébrica para resolução da situação-problema proposta.

Questão 3 do pós–teste:

| |
|---|
| Para quais valores de *x* a reta tangente à função $f(x) = 2x - x^2$ é crescente e decrescente? |

Procedimentos do estudante A.F.

| |
|---|
| • Derivou a função $f(x) = 2x - x^2$; <br> • Resolveu a equação $f´(x) = 0$; <br> • Fez o estudo dos sinais da $f´(x)$ e o gráfico da função no mesmo sistema de eixos; <br> • Identificou corretamente que os intervalos quando $f´(x) > 0$ a reta tangente seria crescente e quando $f´(x) < 0$ a reta tangente seria decrescente. |

Já na resolução da questão 3 do pós–teste, conforme os procedimentos descritos e os comentários a seguir, transcritos da entrevista, ele conseguiu relacionar o conceito de derivada com inclinação da reta tangente, a partir da aplicação do teorema-em-ação: se $f´(x) > 0$ a reta tangente seria crescente e quando $f´(x) < 0$ a reta tangente seria decrescente.

*Professora: [...] Como é que você começou fazendo essa questão 3? Quando você viu essa questão, o que lembrou?*

*A.F.: Eu lembrei que tinha que fazer a derivada.*

*Professora: Por quê?*

*A.F.: Pra achar a [...] inclinação. Depois eu fiz [...] O ponto em que ia cortar.*

Além disso, também se pode observar, com os comentários abaixo, que a aula de laboratório o auxiliou na resolução desta questão e na relação entre derivada e inclinação da reta tangente a partir das representações gráfica e algébrica.

*Professora: Se a derivada é zero, como é que seria a inclinação da reta tangente?*

*A.F.: A inclinação seria paralela ao eixo x.*

*Professora: [...] E isso aqui teve alguma relação ou não com o computador, na aula de laboratório?*

*A.F.: Na hora de fazer o teste? E encontrar ali [...] quando aparecer o triângulo ali. Quando chega ao final da tabela era o valor zero.*

Nesses comentários, fica claro que quando o estudante menciona a palavra "triângulo" ele relaciona e utiliza a representação gráfica oferecido pelo *software*. Visto que durante o movimento da reta tangente à função, o *software Modellus* se utiliza de um triângulo retângulo no auxílio da visualização da inclinação da reta tangente. Assim, do pré ao pós-teste, o estudante passa a utilizar de forma mais consistente a representação gráfica tal qual utilizada no *Modellus*.

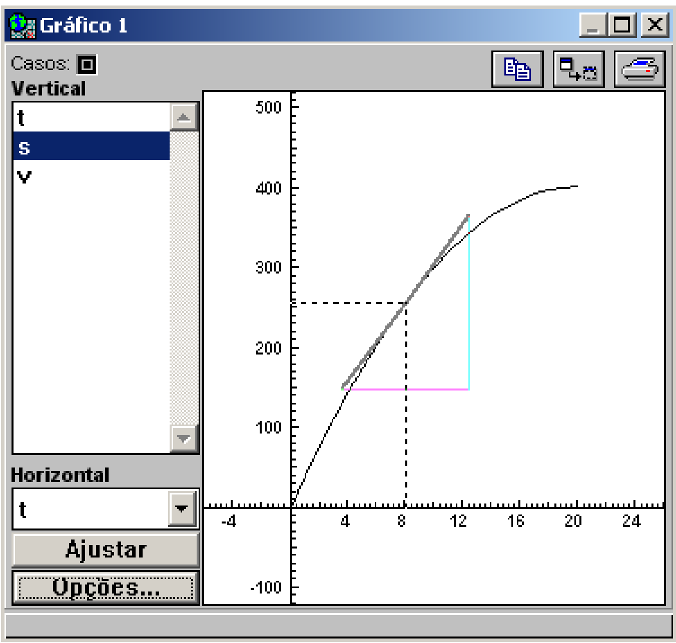



**Figura 05**: Mostra o tipo de representação gráfica
**Fonte**: *Software Modellus*

O aprendizado da derivada, como a inclinação da reta tangente à função em um dado valor de *x*, pelo aluno A.F. pode ser observado na coerência e clareza dos procedimentos utilizados pelo estudante na resolução da questão 3 do pós-teste, em que mostra que o teorema-em-ação utilizado é válido. Essa coerência também pode ser observada na interpretação oferecida pelo estudante quando questionado a respeito de qual seria o valor da inclinação da reta tangente no momento em que *x* for igual a 1, conforme o trecho da entrevista citado abaixo.

*Professora: [...] Quando você viu essa questão (questão 3 do pós–teste), o que você lembrou?*

*A.F.: Eu lembrei que tinha que fazer a derivada.*

*Professora: Por quê?*

*A.F.: Pra achar a [...] inclinação. Depois eu fiz [...] O ponto em que ia cortar.*

*Professora: E esse ponto que corta aqui o x. Qual é o valor da inclinação?*

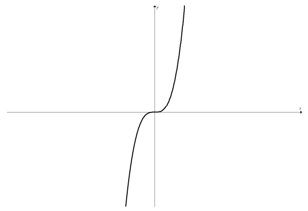
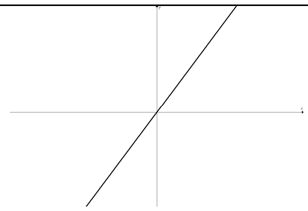
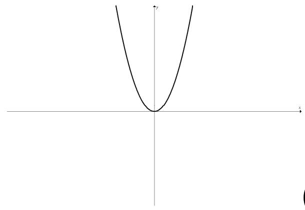
*A.F.: Teria que substituir aqui na derivada.*

Apesar de o aluno conseguir interpretar a derivada como a inclinação da reta tangente à função em um dado valor de *x*, ele ainda é incapaz de aplicar a propriedade transitiva adequadamente em se $f'(x) = -2x + 2$ e $f'(x) = 0$ então $-2x + 2 = 0$ logo $x = 1$. Isto fica claro na justificativa oferecida pelo aluno no diálogo acima, quando questionado a respeito de qual seria o valor da inclinação da reta tangente se *x* for igual a 1. Dessa forma, ao ser questionado sobre o cálculo da derivada, quando não está na presença do *software*, o estudante utiliza a representação algébrica, tal qual durante o pré-teste.

Esse diálogo também pode mostrar que, apesar da dificuldade de reversibilidade, o início das organizações em nível espaço-temporal e causal, é construído pelo estudante, pois nesse momento ele está diferenciando o significante do significado.

Questão 4 do pré–teste:

| |
|---|
| Associe a função representada graficamente, no primeiro quadro, com o gráfico (a) ou (b) de sua respectiva função derivada. |

| | | |
|---|---|---|
|  $y = f(x)$ |  (a) |  (b) |

Procedimentos do estudante A.F.

- Selecionou, incorretamente, o item (a).

Para resolver a questão 4 do pré–teste, o aluno marcou aleatoriamente qualquer item apenas para não deixar em branco a questão, sabendo que tinha 50% de chance de acertá-la, essa informação foi coletada do estudante durante a correção do instrumento em sala de aula. Com isso, pode-se verificar que ele não apresentava conhecimento algum referente à representação gráfica da derivada ou seja, nenhuma invariante operatória é passível de identificação, nem mesmo o uso de alguma forma de representação.

Questão 4 do pós–teste:

Esboce o gráfico de uma função *f* para a qual $f(1) = -1,\ f'(1) = 0,\ f'(x) < 0$ se $x < 1$ e $f'(x) > 0$ se $x > 1$.

Procedimentos do estudante A.F.

- Marcou o ponto (1, -1) no plano cartesiano;
- Traçou uma reta paralela ao eixo *x* passando pelo ponto (1, -1);
- Circulou a sentença $f´(x) < 0$ se $x < 1$ e $f´(x) > 0$ se $x > 1$, do enunciado, e escreveu sob elas "*y*";
- Traçou uma curva crescente com concavidade para cima para valores de *x* maiores que 1;
- Traçou uma curva crescente com concavidade para baixo para valores de *x* menores que 1.

Já na questão 4 do pós–teste, ele mostra o conceito-em-ação de que a derivada representa geometricamente a inclinação da reta tangente ao gráfico de *f(x) = y* em *x* apenas quando representou uma reta paralela ao eixo *x* passando pelo ponto (1, -1). Assim, nota-se que o estudante relaciona e utiliza a representação algébrica de coordenada cartesiana à respectiva representação gráfica de ponto.

Porém, ao traçar as outras partes da função, ele confunde a notação $f'(x)$ com os valores que *y* poderia assumir para cada intervalo de *x*, isso pode ser verificado tanto nos procedimentos descritos acima, na coluna do meio, quanto no diálogo a seguir.

*Professora: Como é que deveria estar a função?*

*A.F.: A função deveria estar côncava para cima descendo até o ponto 1.*

*Professora: E o que te fez marcar aqui embaixo? Eu vou te dizer o que eu pensei que você pensou. Você me confirma ou não. Eu achei que você pensou que como era negativo, tinha que botar valores para baixo.*

*A.F.: Sim, foi. Eu confundi a derivada com o valor de y.*

*Professora: Porque assim [...] Olhando essa questão agora, eu verifico que você marcou certinho o ponto (1, -1). Mas esse pedaço aqui você fez só porque estava positivo. E esse aqui tu fez porque estava negativo. Não pensou na inclinação das retas tangentes.*

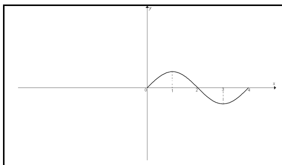
*A.F.: É [...] foi.*

Com isso, pode-se inferir que o teorema-em-ação utilizado por A.F. na resolução de parte desta questão é que a função derivada tem o mesmo comportamento da própria função, para os respectivos valores de *x.* Ainda pode-se observar que a definição de derivada é aplicada corretamente somente quando o enunciado refere-se a valores numéricos, porém quando o enunciado envolve outros símbolos, a mesma não é aplicada corretamente.

Porém a interpretação da representação algébrica para a representação gráfica ainda está limitada, conforme a resolução da questão 4 do pós–teste apresentada pelo aluno.

Questão 5 do pós–teste:

| |
|---|
| Esboce o gráfico da função derivada do gráfico abaixo: |



Procedimentos do estudante A.F.

- Para valores de *x* entre 0 e 1 foi traçada uma curva com concavidade para cima, iniciando em *y*=1 e terminando em *y* =0;
- Para valores de *x* entre 1 e 1,5 foi traçada uma curva com concavidade para cima, iniciando em *y*=0 e terminando em *y* = 0,5;
- Para valores de *x* entre 1,5 e 2,5 foi traçada uma curva com concavidade para baixo, iniciando em *y*=0,5, em *x*=2 *y*=1, e terminando em *y* =0;
- Para valores de *x* entre 2,5 e 3 foi traçada uma curva com concavidade para cima, iniciando em *y*=0,5 e terminando em *y* =0.
- Para valores de *x* entre 3 e 4 foi traçada uma curva com concavidade para cima, iniciando em *y*=0 e terminando em *y* =1

Para resolver a questão 5 do pós–teste, o estudante apenas aplicou a interpretação de que se o ângulo das retas tangentes aumentam, então a derivada aumenta e se o ângulo das retas tangentes diminuem, então a derivada diminui. Assim, ele aplica o seguinte teorema-em-ação: inclinação da reta tangente a uma função em um determinado valor de x é diretamente proporcional ao comportamento da função derivada para estes valores de x. Isso pode ser observado nos procedimentos descritos utilizados por ele na resolução dessa questão, principalmente nos segundo e terceiro itens.

Para os valores de *x* entre 1 e 2 as retas tangentes à função são decrescentes e o ângulo de inclinação delas está aumentando, portanto, o gráfico da função deveria estar abaixo do eixo das abscissas com concavidade para cima. Entretanto, o estudante traçou a função derivada entre 1 e 2 como uma função acima do eixo das abscissas, com a concavidade para cima no intervalo [1, 1.5] aproximadamente e concavidade para baixo no intervalo [1.5, 2].

Para os valores de *x* entre 2 e 3 as retas tangentes à função são decrescentes e o ângulo de inclinação delas está diminuindo, portanto, o gráfico da função deveria estar abaixo do eixo das abscissas com concavidade para cima. Entretanto, o estudante traçou a função derivada entre 2 e 3 como uma função acima do eixo das abscissas, com a concavidade para baixo no intervalo [2, 2.5], aproximadamente, e concavidade para baixo no intervalo [2.5, 3].

Durante a entrevista foi possível verificar que o aluno retificou a resolução dessa questão, a partir dos seguintes comentários:

*Professora: Mas agora vai dar um problema. O que está acontecendo entre 2 e 3? O que vai acontecer com as retas tangentes à função de 2 até 3?*

*A.F.: A função está decrescente, só que vai se aproximando do zero.*

*Professora: O que vai se aproximando do zero?*

*A.F.: A derivada.*

*Professora: E como vai ficar o teu gráfico?*

*A.F.: Ela [...] do 2 até o 3 começava a crescer até o zero.*

*Professora: Isso aí.*

*A.F.: Tá! Daí depois do 3 é uma reta crescente [...] aumenta.*

*Professora: Beleza. Isso lembrou você da aula de laboratório?*

*A.F.: É.*

*Professora: Qual parte?*

*A.F.: Eu lembrei da aula do laboratório a parte que as retas crescentes ficavam pra cima.*

Para resolver esta questão, são duas as informações que o estudante tem que representar ao esboçar o gráfico de uma função derivada a partir do gráfico da função, porém, o aluno A.F. conseguiu lidar parcialmente com essas duas informações.

Além disso, ele se apropriou mais da representação gráfica e da idealização do real do que as representações algébrica e numérica para desenvolver as situações-problema relacionadas à área da Matemática.

### 3.1.2 Estudante D.A.

Os quadros abaixo mostram as questões e os procedimentos usados pelo estudante D.A. no desenvolvimento das questões semelhantes do pré e do pós-teste.

Questão 1 do pré–teste:

| |
|---|
| Ache a equação da reta tangente à função $f(x) = 2x - x^3$ no ponto $P(-2, f(-2))$ e verifique se a reta tangente é crescente ou decrescente, justificando sua resposta. |

Procedimentos do estudante D.A.

| |
|---|
| • Derivou, corretamente, a função. |

Na resolução da questão 1 do pré–teste, ele apenas encontrou a derivada da função porque era o conteúdo que estava sendo abordado na respectiva avaliação.

Neste caso, o estudante não apresentou nenhum conceito-em-ação relacionado à interpretação gráfica da derivada envolvido em tal situação-problema, consequentemente não se pode inferir nenhum teorema-em-ação, visto que os conceitos-em-ação são parte integrante dos teoremas-em-ação.

Questão 3 do pós–teste:

| |
|---|
| Para quais valores de *x* a reta tangente à função $f(x) = 2x - x^2$ é crescente e decrescente? |

Procedimentos do estudante D.A.

| |
|---|
| • Derivou a função $f(x) = 2x - x^2$;<br>• Resolveu a equação $f'(x) = 0$;<br>• Fez o estudo dos sinais da $f'(x)$; |

- Identificou corretamente que os intervalos quando $f'(x) > 0$ a reta tangente seria crescente e quando $f'(x) < 0$ a reta tangente seria decrescente.

Já na resolução da questão 3 do pós–teste, o estudante utilizou o teorema-em-ação: se *f´(x)*>0, então a reta tangente é crescente e, se *f´(x)*<0, então a reta é decrescente. O estudante conseguiu relacionar a definição de derivada com velocidade e inclinação da reta tangente, o que pode ser observado com os seguintes comentários transcritos da entrevista:

*Professora: Por que você derivou?*

*D.A.: Pra achar o ponto onde inverte, não é?*

*Professora: Inverte o quê?*

*D.A.: O sentido.*

*Professora: Mas aí você está trabalhando com a velocidade?*

*D.A.: Não, Não [...] Pra saber em que ponto ela é crescente e em que ponto ela é decrescente.*

*Professora: Mas por que você derivou para saber isso? Precisava derivar?*

*D.A.: Precisava.*

*Professora: Por quê?*

*D.A.: Por quê? Para achar a reta tangente tem que derivar!*

*Professora: Mas qual a relação que tem entre a derivada e a reta tangente que está nessa questão? Como você vê isso aí?*

*D.A.: Não são iguais?*

No trecho descrito acima, é nítida a associação realizada pelo aluno entre os dois diferentes tipos de representação trabalhados na aula de laboratório: a "idealização do real", ou seja, a simulação do fenômeno e a "representação gráfica". Ao fornecer a razão pela qual foi efetuada a derivada, o aluno responde "Pra achar o ponto onde inverte, não é?", isto mostra a utilização da representação "idealização do real", pois o aluno D.A. recorda o movimento do caminhão, na janela Animação do *software Modellus*, na atividade de um MRUV. Já a utilização da representação gráfica é verificada pelos conceitos-em-ação: crescente e decrescente, utilizado pelo aluno ao justificar a referência à velocidade, quando traz à memória o movimento da reta tangente à função que descreve a atividade do MRUV.

Pode-se observar também com os trechos da entrevista que o estudante não consegue distinguir entre as duas interpretações do conceito de derivada. Fato este observado em sua resposta, ao ser questionado sobre a relação entre a derivada e a reta tangente. Dessa forma, o aluno D.A. constitui o conceito-em-ação: derivada é igual a reta tangente, sendo esta informação equivocada, uma vez que o aluno confunde reta tangente com coeficiente angular. Esta análise pode ser ratificada no seguinte diálogo:

*Professora: Tá. Uma reta para ser crescente ou decrescente depende do quê?*

*D.A.: Da reta tangente!*

*Professora: Uma reta, ela tem [...] eu sei se ela é crescente ou decrescente. O que me diz se eu tenho que desenhar ela assim ( / ) ou assim ( \ )?*

*D.A.: A derivada.*

*Professora: O que a derivada me fornece?*

*D.A.: A derivada não é igual à reta tangente?*

O aluno D.A. atribui o conceito de inclinação da reta tangente a uma função com o de reta tangente, porém ele consegue interpretar o significado da igualdade na expressão $f'(x) = -2x + 2$, ou seja, ele é capaz de aplicar a propriedade transitiva e de reversibilidade, pois quando lhe é questionado como seria a reta tangente à função quando *x* for igual a 1, ele responde "a reta tangente vai ser paralela ao eixo *x",* isso pode ser observado nos comentários a seguir.

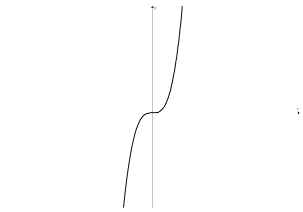
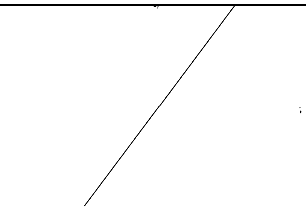
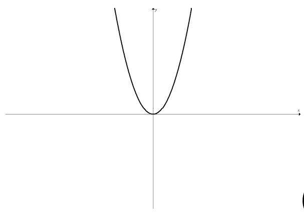
*Professora: Como é que a reta tangente em x=1? [...].*

*D.A.: No 1 a reta tangente vai ser paralela ao eixo x.*

Esse aparente equívoco mostra um conhecimento implícito, pois ele interpreta corretamente a situação, apesar de estar utilizando inadequadamente os significantes.

Sendo assim, a representação gráfica mostra-se fortemente imbricada na confusão que o aluno D.A. faz entre velocidade e reta tangente e de derivada com coeficiente angular, principalmente nos procedimentos utilizados para resolver a questão 3 do pós–teste.

Questão 4 do pré–teste:

<table>
<tr><td colspan="3">Associe a função representada graficamente, no primeiro quadro, com o gráfico (a) ou (b) de sua respectiva função derivada.</td></tr>
<tr><td><br>y = f(x)</td><td><br>(a)</td><td><br>(b)</td></tr>
</table>

Procedimentos do estudante D.A.

- Marcou dois pontos na função: $x_1$, representando os valores de $x$ menores que zero, e $x_2$ representando os valores de $x$ maiores que zero;
- Selecionou, corretamente, o item (b).

Para resolver a questão 4 do pré–teste, o aluno utilizou o conceito-em-ação de que a derivada de uma função pode ser interpretada como uma função cujo valor em $x$ é a inclinação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = y$ em $x$, fato este observado na marcação realizada por ele dos pontos $x_1$ e $x_2$ no gráfico da função, mostrando dessa forma o uso da representação gráfica.

Questão 4 do pós–teste:

| |
|---|
| Esboce o gráfico de uma função $f$ para a qual $f(1) = -1,\ f'(1) = 0,\ f'(x) < 0$ se $x < 1$ e $f'(x) > 0$ se $x > 1$. |

Procedimentos do estudante D.A.

- Marcou o ponto (1, -1) no plano cartesiano;
- Escreveu:

- $f'(x) < 0 = -$ if $x < 1$;
- $f'(x) > 0 = +$ if $x > 1$;
- Traçou uma reta que passa pelo pontos (1, 0) e (0, -1).

Já na resolução da questão 4 do pós–teste, o estudante encontrou dificuldades para interpretar a representação algébrica contida no enunciado da mesma. Ele confundiu a notação $f'(x)$ com os valores que *y* poderia assumir para cada intervalo de *x.* Assumindo como teorema-em-ação de que a função derivada tem o mesmo comportamento da própria função, para os mesmos valores de x.

Isso pode ser identificado no esquema expresso na resolução da prova, pelas expressões " $f'(x) < 0 = -$ if $x < 1$ e $f'(x) > 0 = +$ if $x > 1$, no traçado da reta que passa pelos pontos (1,0) e (0,-1) e pelo diálogo a seguir:

*Professora: f´(1)= 0, o que quer dizer isso?*

*D.A.: Quer dizer que na posição do x =1 y é 0.*

*Professora: y é 0. Não é a derivada aqui?*

*D.A.: É, na posição 1 a reta vai ser paralela ao eixo x. Quer dizer que antes de [...] x quando for menos que zero, ele é decrescente.*

*Professora: Quando x for menor que 1, não é? O que é menor que 0?*

*D.A.: A derivada.*

*Professora: O que representa a derivada?*

*D.A.: O sinal.*

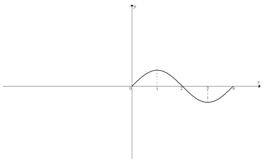
*Professora: De quem?*

*D.A.: Do x, né? Do ângulo.*

Observa-se que o aluno utiliza representação gráfica trabalhada no software quando comenta "Do ângulo", porém confunde o valor de derivada, como inclinação da reta tangente a um valor específico de x, com valor de *x* quando fala "Do *x*, né?"

Questão 5 do pós–teste:

Esboce o gráfico da função derivada do gráfico abaixo:



Procedimentos do estudante D.A.

- Para valores de *x* entre 0 e 1 foi traçada uma curva com concavidade para baixo, iniciando em um valor de *y*>0 e terminando em *y* =0;
- Para valores de *x* entre 1 e 2 foi traçada uma curva com concavidade para cima, iniciando em *y*=0 e terminando em um valor de *y* <0;
- Para valores de *x* entre 2 e 3 foi traçada uma curva com concavidade para cima, iniciando no valor anterior de *y* e terminando em *y* =0;
- Para valores de *x* entre 3 e 4 foi traçada uma curva com concavidade para baixo, iniciando em *y*=0 e terminando em *y = 1.*

O aluno D.A. conseguiu trabalhar com os dois adjetivos vinculados ao conceito de derivada necessários para resolver esta questão. Ele utilizou um conjunto de teoremas-em-ação que podem ser descritos como:

- se o ângulo das retas tangentes diminuem e se elas são crescentes, então a derivada diminuiu e a função é desenhada para valores positivos;
- se o ângulo das retas tangentes aumentam e se elas são decrescentes, então a derivada aumenta, em módulo, e a função é desenhada para valores negativos;
- se o ângulo das retas tangentes diminuem e se elas são decrescentes, então a derivada diminui, em módulo, e a função é desenhada para valores negativos;
- se o ângulo das retas tangentes aumentam e se elas são crescentes, então a derivada aumenta e a função é desenhada para valores positivos.

Isto pode ser observado nos procedimentos descritos na tabela acima utilizados por ele na resolução dessa questão. Esta clareza de interpretação também pode ser notada na entrevista:

*Professora: E essa questão aqui (questão 5 do pós-teste)?*

*D.A.: Essa eu me lembrei da aula de laboratório quando você fez no quadro branco alguns exemplos.*

*Professora: Como você pensou para resolver isso aí?*

*D.A.: Em x=1 e x=3 está dizendo que a reta tangente aqui é 0, né? Então eu botei aqui 0, aí eu tenho que cruzar ali (desenhou com o dedo uma curva interceptando em x=1 e x=3).*

*Professora: Mas podia cruzar assim também?*

*D.A.: Podia. Depois que o ângulo aqui é maior do que este daqui e aí como o ângulo é maior, deduzi que no 2 seria um ponto mínimo.*

Ainda pode-se verificar o uso da representação gráfica utilizada na aula de laboratório por meio do *software Modellus.*

### 3.1.3 Estudante G.E.

Os quadros abaixo mostram as questões e os procedimentos usados pelo estudante G.E. no desenvolvimento das questões semelhantes do pré e do pós-teste.

Questão 1 do pré–teste:

| |
|---|
| Ache a equação da reta tangente à função $f(x) = 2x - x^3$ no ponto $P(-2, f(-2))$ e verifique se a reta tangente é crescente ou decrescente, justificando sua resposta. |

Procedimentos do estudante G.E.

- Derivou incorretamente a função, expressando a função derivada por $f(x) = 3x^2 - 2$;
- Encontrou o valor de *y* substituindo o valor de *x* na função derivada encontrada;
- Identificou que o número 3, coeficiente do termo da função derivada encontrada, como o coeficiente angular da reta;
- Substituiu o valor de *y* encontrado e o valor de *x* dado na equação *y*=*ax*+*b* para calcular o valor do coeficiente linear da reta;
- Montou a equação reduzida da reta.

De acordo com os procedimentos da resolução da questão 1 do pré–teste, descritos na tabela acima, pode-se observar que o estudante tem como conceito-em-ação que o coeficiente angular de uma reta representa o coeficiente do termo, da função derivada encontrada, com parte literal, isso pode ser devido à associação feita com a equação reduzida da reta (*y*=*ax*+*b*). Com isso, fica evidente que ele não aplica o conceito de derivada como sendo a inclinação da reta tangente à função em um determinado valor de *x.* O tipo de representação utilizado pelo estudante é a algébrica.

Continuando a análise dos procedimentos da resolução desta questão, nota-se que o aluno conhece os passos que devem ser seguidos para montar uma equação de reta, porém emprega-os incorretamente. Por exemplo, G.E. sabe que precisa calcular o valor de *f(-2)* mas calcula o valor de *f'(-2)*, demonstrando com isso que o aluno não tem noção da diferença desses conceitos e da diferença entre as notações $f(x)$ e $f'(x)$. O que corrobora com isto é o fato dele ter expressado a função derivada como sendo $f(x) = 3x^2 - 2$.

Questão 3 do pós–teste:

| |
|---|
| Para quais valores de *x* a reta tangente à função $f(x) = 2x - x^2$ é crescente e decrescente? |

Procedimentos do estudante G.E.

- Derivou, corretamente, a função $f(x) = 2x - x^2$;
- Resolveu a equação $f'(x) = 0$;
- Fez o estudo dos sinais da $f'(x)$;
- Identificou os intervalos quando $f'(x) > 0$ a reta tangente seria crescente e quando $f'(x) < 0$ a reta tangente seria decrescente.

A partir dos procedimentos descritos acima, é possível representar os esquemas utilizados pelo estudante e identificar os teoremas-em-ação: quando $f'(x) > 0$, a reta tangente seria crescente e quando $f'(x) < 0$, a reta tangente seria decrescente. Apesar disso, o aluno G.E. consegue relacionar parcialmente a interpretação de derivada com a inclinação de reta, pois ele confunde a representação gráfica da função derivada com a representação gráfica de uma reta, provavelmente devido a função derivada resultar em uma função linear. Isso pode ser observado nos procedimentos usados e nos seguintes comentários da entrevista:

*Professora: No teste 1 é pedida a equação da reta tangente e no teste 2 ele pede para quais valores de x a reta tangente é crescente e decrescente. Por que tu derivou e igualou a zero aqui no teste 2?*

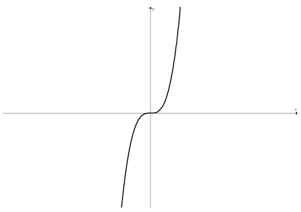
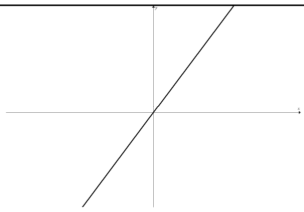
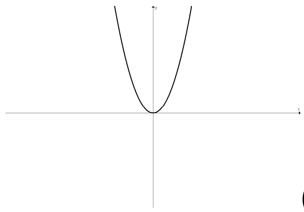
*G.E.: Pra achar esse valor, o 1.*

*Professora: O que esse valor representa?*

*G.E.: É onde a reta tangente passa, corta?*

Fica claro que, para o estudante, o uso da representação gráfica trabalhada no *software* ainda não tem a função de auxiliar na compreensão da interpretação da derivada como inclinação da reta tangente. Isso pode ser verificado nos comentários da entrevista em que se observa o uso adequado da representação algébrica sem que o aluno possa justificar esse conhecimento verbalmente por meio da representação gráfica..

Questão 4 do pré–teste:

<table>
<tr><td colspan="3">Associe a função representada graficamente, no primeiro quadro, com o gráfico (a) ou (b) de sua respectiva função derivada.</td></tr>
<tr><td><br>y = f(x)</td><td><br>(a)</td><td><br>(b)</td></tr>
</table>

Procedimentos do estudante G.E.

| |
|---|
| • Selecionou, corretamente, o item (b). |

Para resolver a questão 4 do pré–teste, o aluno marcou aleatoriamente qualquer item apenas para não deixar em branco a questão, sabendo que tinha 50% de chance de acertar a questão.

Essa informação foi coletada do estudante durante a correção do instrumento em sala de aula. Com isso, pode-se verificar que ele não apresentava conhecimento algum referente à representação gráfica da derivada, ou seja, nenhuma invariante operatória é passível de identificação, nem mesmo o uso de alguma forma de representação.

Questão 4 do pós–teste:

Esboce o gráfico de uma função *f* para a qual $f(1) = -1,\ f'(1) = 0,\ f'(x) < 0$ se $x < 1$ e $f'(x) > 0$ se $x > 1$.

Procedimentos do estudante G.E.

- Marcou o ponto (1, -1) no plano cartesiano;
- Traçou uma reta paralela ao eixo *x,* passando pelo ponto (1, -1);
- Escreveu:

$f'(x) < 1$ e $f'(x) > 1$

- Traçou uma curva crescente com concavidade para cima para valores de *x* maiores que 1;
- Traçou uma curva crescente com concavidade para baixo para valores de *x* menores que 1.

Já na questão 4 do pós–teste, ele mostra o conceito-em-ação de que a derivada representa geometricamente a inclinação da reta tangente ao gráfico de *f(x) = y* em *x* apenas quando representou uma reta paralela ao eixo *x* passando pelo ponto (1, -1). Nota-se que o estudante relaciona e utiliza a representação algébrica de coordenada cartesiana à respectiva representação gráfica de ponto. Ao desenhar uma reta decrescente junto à expressão "$f'(x) < 1$" e uma reta crescente junto à expressão "$f'(x) > 1$" pode-se inferir o conceito-em-ação: símbolo de desigualdade "<" relaciona-se com reta decrescente e o contrário também é verdadeiro., símbolo de desigualdade ">" relaciona-se com a reta crescente.  Com isso, pode-se verificar que a interpretação da derivada como inclinação da reta tangente, através do uso de representação algébrica, não está construído, uma vez que ele reconhece apenas o símbolo de desigualdade como meio para se inferir o sinal da função derivada. Isso também pode ser observado na entrevista:

*Professora: Como você resolveu a questão 4 do teste 2?*

*G.E.: Conforme os dados que foram passados na questão, onde x valeria 1 e y -1 eu tracejei ali no próprio gráfico e achei onde seria o ponto que a reta passaria. Que seria a reta tangente limite dos dois.*

*Professora: Por que tu esboçou uma curva com a concavidade pra cima depois desse ponto (1, -1) e também antes desse ponto?*

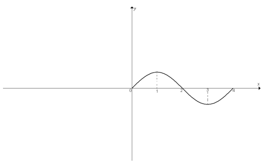
*G.E.: Porque aqui (apontou para a expressão* $f'(x) > 0$ *se* $x > 1$*) x é maior que zero e depois seria o contrário.*

*Professora: A primeira derivada é maior que zero se x é maior que 1. Então, lá no gráfico, nós vamos ter o quê?*

*G.E.: Um reta a partir do ponto 1 pra cima, crescente.*

Questão 5 do pós–teste:

Esboce o gráfico da função derivada do gráfico abaixo:



Procedimentos do estudante G.E.

- Fez várias retas tangentes à função nos intervalos [0,1], [1, 2], [2, 3] e [3, 4];
- No intervalo [2,3] construiu triângulos retângulos cuja hipotenusa representa um segmento de reta tangente à função;
- Para valores de *x* entre 0 e 1 foi traçada uma reta, iniciando em *y*=1 e terminando em *y* =0;
- Para valores de *x* entre 1 e 2 foi traçada uma reta, iniciando em *y*=0 e terminando em *y* = -1;
- Para valores de *x* entre 2 e 3 foi traçada uma reta, iniciando em *y*= -1 e terminando em *y* = 0;
- Para valores de *x* entre 3 e 4 foi traçada uma reta, iniciando em *y*=0 e terminando em *y* =1.

De acordo com a descrição dos procedimentos que o estudante G.E. usou para resolver a questão 5 do pós–teste, ele baseou-se na representação gráfica que o *software* de simulação oferecia, pois a variação da inclinação das retas tangentes à função a partir do deslocamento de um segmento de reta tangente ao longo da função eram claramente identificadas com a mudança na forma dos triângulos retângulos, visto que o segmento da reta tangente estava sendo representado pela hipotenusa do triângulo retângulo.

Pode-se inferir os mesmos teoremas-em-ação utilizados pelo aluno D.A. na resolução dessa questão.

### 3.1.4 Estudante M.P.

Os quadros abaixo mostram as questões e os procedimentos usados pelo estudante M.P. no desenvolvimento das questões semelhantes do pré e do pós-teste.

Questão 1 do pré–teste:

| |
|---|
| Ache a equação da reta tangente à função $f(x) = 2x - x^3$ no ponto $P(-2, f(-2))$ e verifique se a reta tangente é crescente ou decrescente, justificando sua resposta. |

Procedimentos do estudante M.P.

- Identificou o valor de *x* no enunciado, escrevendo “$x \to -2$”;
- Calculou, corretamente, o valor de *y*;
- Identificou o coeficiente angular, como sendo a derivada da função quando *x* = -2, escrevendo “$a \to f'(x)$”;
- Calculou o valor do coeficiente angular substituindo os valores de *y, x* e *a*, na equação reduzida da reta.

- Montou a equação reduzida da reta;

Na resolução da questão 1 do pré–teste, o estudante apenas aplicou os procedimentos de acordo com os que foram trabalhados em sala de aula para resolver exercícios semelhantes a esse. O aluno M.P. utiliza como teorema-em-ação a relação matemática "$a \to f'(x)$".

Mas, o que chama a atenção, nas expressões matemáticas escritas, é para o fato de ele representar o símbolo de igualdade pelo símbolo da condicional, isso pode identificar uma incerteza naquilo que está explicitando. Outra razão para isso pode ser devido ao fato de que o aluno pertence ao curso de Sistemas de Informação em que nas disciplinas de algoritmos o símbolo $\to$ é tratado como "recebe".

Nesta questão M.P. faz uso predominante da representação algébrica.

Questão 3 do pós–teste:

Para quais valores de *x* a reta tangente à função $f(x) = 2x - x^2$ é crescente e decrescente?

Procedimentos do estudante M.P.

- Escreveu "$a = f'(x)$";
- Derivou, corretamente, a função $f(x) = 2x - x^2$;
- Resolveu a equação $f'(x) = 0$;
- Fez o estudo dos sinais da $f'(x)$;
- Identificou corretamente que os intervalos, quando $f'(x) > 0$ a reta tangente seria crescente e quando $f'(x) < 0$ a reta tangente seria decrescente.

Já na resolução da questão 3 do pós–teste, o símbolo de igualdade ocupa o lugar do símbolo da condicional apresentado na resolução da questão 1 do pré-teste.

De acordo com os procedimentos realizados e com o trecho da entrevista, o aluno M.P. consegue expressar, algébrica e verbalmente, respectivamente, o conceito-em-ação de que a derivada pode ser interpretada como a inclinação de uma reta tangente à função para um determinado valor de *x.*

*Professora: Na questão 3. Essa você lembrou da aula de laboratório, ou não?*

*M.P.: Essa aqui eu fiz mais pela derivada mesmo. Eu sabia que para saber se a reta é crescente ou decrescente, eu tenho que ver se a derivada é maior ou menor que zero.*

*Professora: Por que a derivada?*

*M.P.: Porque a reta tangente é a derivada. A inclinação da reta tangente. A inclinação vai me dizer se ela [...] se a inclinação dela for para cima é porque ela é crescente [...] positiva. Ou se ela é decrescente, negativa, menor que zero.*

O aluno M.P. utiliza os teoremas-em-ação: se $f'(x) > 0$, a reta tangente seria crescente e se $f'(x) < 0$, a reta tangente seria decrescente.

Entretanto, ele ainda não relaciona os procedimentos utilizados com essa maneira de interpretar o conceito de derivada e não tem o domínio do significado da igualdade numa equação, isso pode ser observado no diálogo a seguir, mostrando assim apenas a reprodução de um conhecimento.

*Professora: E a reta tangente no valor de x=1, como é que vai ser?*

*M.P.: A reta tangente?*

*Professora: É! A reta tangente à função em x=1.*

*M.P.: Ela é assim (faz um gesto com a mão, inclinando-a em relação ao chão num ângulo menor que 90°) crescente.*

Depois da retomada na resolução dessa questão 3, relacionando os resultados do estudo dos sinais da função derivada com o coeficiente angular de uma reta e com os seguintes comentários, ficou mais claro que M.P. resolveu mecanicamente a questão.

*Professora: [...] e no 1, como é que vai ser a reta tangente?*

*M.P.: Zero, com inclinação horizontal.*

*Professora: Certo. Antes você conseguia ver isso?*

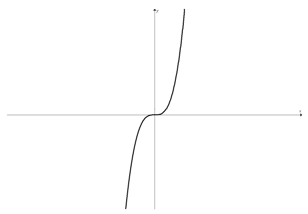
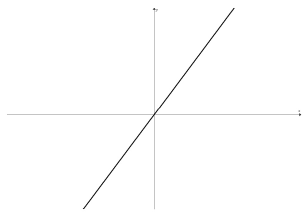
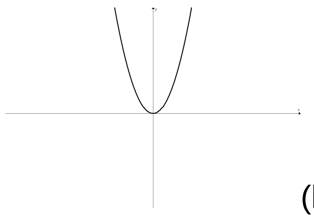
*M.P.: Não!*

*Professora: O que você pensava antes que eu não entendi.*

*M.P.: [...] foi só pela regra dos sinais e deu! Aqui eu não enxerguei, não visualizei isso.*

Conforme diálogo acima, pode-se verificar também neste estudante que o uso das representações algébrica e gráfica não estão sendo complementares na resolução da situação-problema.

Questão 4 do pré–teste:

<table>
<tr><td colspan="3">Associe a função representada graficamente, no primeiro quadro, com o gráfico (a) ou (b) de sua respectiva função derivada.</td></tr>
<tr><td><br>$y = f(x)$</td><td><br>(a)</td><td><br>(b)</td></tr>
</table>

Procedimentos do estudante M.P.

| |
|---|
| • Selecionou, corretamente, o item (b). |

Para resolver a questão 4 do pré–teste, o aluno marcou aleatoriamente qualquer item apenas para não deixar em branco a questão. Sabendo que tinha 50% de chance de acertar a questão, essa informação foi coletada do estudante durante a correção do instrumento em sala de aula. Com isso, pode-se verificar que ele não apresentava conhecimento algum referente à representação gráfica da derivada, ou seja, nenhuma invariante operatória é passível de identificação, nem mesmo o uso de alguma forma de representação.

Questão 4 do pós–teste:

| |
|---|
| Esboce o gráfico de uma função *f* para a qual $f(1) = -1,\ f'(1) = 0,\ f'(x) < 0$ se $x < 1$ e $f'(x) > 0$ se $x > 1$. |

Procedimentos do estudante M.P.

- Marcou o ponto (1, -1) no plano cartesiano;
- Escreveu:

$f'(1) = 0$ ponto crítico;

$f'(x) < 0$ crescente para $x > 1$;

$f'(x) > 0$ decrescente para $x < 1$;

- Esboçou o gráfico da função corretamente.

Para resolver a questão 4 do pós–teste, o estudante utilizou o conceito-em-ação de que a derivada de uma função pode ser interpretada como uma função cujo valor em *x* é a inclinação da reta tangente ao gráfico de *f(x) = y* em *x*, isso pôde ser observado devido aos comentários apresentados a seguir, discutidos a respeito da resolução da questão:

*Professora: E pra resolver a questão 4, você lembrou da aula de laboratório?*

*M.P.: Sim.*

*Professora: Como?*

*M.P.: Ali eu me lembrei da reta tangente mesmo. Quando a gente simulava no gráfico, o risco ali (reta tangente à função para um determinado valor de x) quando ela forma o grau. Quando ela vai fechando ou diminuindo o grau.*

*Professora: O pessoal tem dificuldade, eles sabem que a reta tangente aqui é crescente mas não conseguem desenhar a função. Como é que você faz isso?*

*M.P.: Tem que visualizar assim. Vendo que aqui [...] e simula o x embaixo (simular o x embaixo significa fazer a reta suporte paralela ao eixo x para identificar a abertura do ângulo). Aí depois vai num ponto mais longe. Desenha outra reta tangente e simula o x de* *novo. Aí vejo que esse grau é bem maior que esse aqui embaixo. Então o que [...] que ela é crescente [...] começa grande e termina pequeno. Isso aqui eu me lembrei lá do vídeo. Vendo a reta acompanhando a função.*

*Professora: Isso aqui você conseguia fazer antes da aula de laboratório?*

*M.P.: Não.*

*Professora: Não conseguia visualizar?*

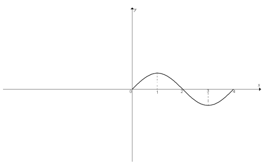
*M.P.: Não. Eu via um monte de risquinho só. Para mim, a reta tangente era quase igual à função. Eu não consegui desenhar.*

Esse comentário “[...] a reta tangente é quase igual à função”, rememora a representação gráfica de várias retas tangentes à função apresentadas em sala de aula, o que corrobora com a declaração de M.P., onde o estudante diz que vê a velocidade na forma do gráfico da função posição, reforçando a idéia de um conhecimento implícito de que o valor da inclinação das retas tangente à função fornecem o crescimento e o decrescimento da mesma ao longo do seu domínio.

Até este ponto tudo está muito confuso, ainda não há um discernimento da relação existente entre inclinação de reta tangente com velocidade. Pode-se perceber que o aluno M.P. interpreta a derivada como a inclinação de reta tangente para exercícios aplicados na área da Matemática dissociados da aplicação de física e interpreta a derivada como taxa de variação instantânea para situação de aplicação de Física.

Questão 5 do pós–teste:

Esboce o gráfico da função derivada do gráfico abaixo:



Procedimentos do estudante M.P.

- Para valores de $x$ entre 0 e 1 foi traçada uma curva com concavidade para cima, iniciando em um valor de $y>0$ e terminando em $y=0$;
- Para valores de $x$ entre 1 e 2 foi traçada uma curva com concavidade para cima,

iniciando em $y$=0 e terminando em um valor de $y$ >0;

- Para valores de $x$ entre 2 e 3 foi traçada uma curva com concavidade para cima, iniciando no valor anterior de $y$ e terminando em $y$ =0;
- Para valores de $x$ entre 3 e 4 foi traçada uma curva com concavidade para cima, iniciando em $y$=0 e terminando em $y$>0.

Para resolver a questão 5 do pós–teste, como já foi comentado anteriormente, o conceito de derivada está relacionado com dois predicativos, um que a derivada é interpretada como a inclinação da reta tangente e o outro é que seu sinal depende do tipo de reta, se a reta for crescente, a derivada será positiva e ser for decrescente, a derivada será negativa.

Nessa questão, segundo diálogo abaixo, o estudante utilizou parte destes predicativos, levando em consideração apenas o valor absoluto da inclinação da reta tangente. Ou seja, pode-se inferir o conceito-em-ação: a derivada é o valor absoluto da inclinação da reta tangente à função para cada valor de $x$.

*Professora: Mas essas retas tangentes não são decrescentes do 1 até o 2?*

*M.P.: São decrescentes, mas o que importa é o grau que ela está.*

Entretanto após o aluno M.P. ser auxiliado a desenvolver a questão 5, ele concluiu:

*M.P.: É isso que eu vejo, no y, eu vejo a inclinação da reta tangente, o ângulo, né?*

*Professora: Tá, então resume pra mim, em curtas palavras, a aula de laboratório te ajudou pra [...].*

*M.P.: Visualizar a inclinação da reta tangente, pra visualizar o que é taxa de variação. Enxergar o abstrato, eu gostei.*

Com isso, pode-se notar que o uso da representação gráfica auxiliou na melhor compreensão da definição de derivada.

### 3.1.5 Estudante R.M.

Os quadros abaixo mostram as questões e os procedimentos usados pelo estudante R.M. no desenvolvimento das questões semelhantes do pré e do pós-teste.

Questão 1 do pré–teste:

| |
|---|
| Ache a equação da reta tangente à função $f(x) = 2x - x^3$ no ponto $P(-2, f(-2))$ e verifique se a reta tangente é crescente ou decrescente, justificando sua resposta. |

Procedimentos do estudante R.M.

| |
|---|
| • Não resolveu. |

O aluno foi incapaz de resolver a questão 1 do pré-teste, apenas com o que foi trabalhado em sala de aula, de forma expositiva-dialogada, sendo impossível identificar alguma invariante operatória.

Questão 3 do pós–teste:

| |
|---|
| Para quais valores de *x* a reta tangente à função $f(x) = 2x - x^2$ é crescente e decrescente? |

Procedimentos do estudante R.M.

| |
|---|
| • Derivou a função $f(x) = 2x - x^2$; <br> • Resolveu a equação $f'(x) = 0$; <br> • Esboçou, incorretamente, o gráfico da função derivada; |

- Fez o estudo dos sinais da $f'(x)$;
- Escreveu:

" $f(x)$ é crescente $x > 1$;

$f(x)$ é decrescente $x < 1$".

Para resolver a questão 3 do pós–teste, o aluno R.M. utilizou os procedimentos desenvolvidos em sala de aula para resolver questões semelhantes a essa, sem possuir grande domínio do que estava realizando. Fato este verificado nos seguintes aspectos:

- o primeiro passo dele para resolução dessa questão foi derivar a função e igualar a zero. Quando isso lhe foi questionado, o aluno não fez menção de relacionar a derivada com a inclinação de uma reta.

*Professora: Tudo bem! E para vocêi resolver esta questão, por que você derivou?*

*R.M.: Eu derivei pra pegar o valor (x=1).*

- o segundo passo dele foi esboçar o gráfico da função derivada, mas identificando se a função derivada, que nesse caso é uma função linear, seria crescente ou decrescente pelo primeiro termo da função do enunciado. Isso pode ser verificado no trecho da entrevista:

*Professora: Então este gráfico que você fez foi desta função aqui, da função derivada?*

*R.M.: Isto.*

*Professora: Daí você viu que o número que está junto do x é negativo (coeficiente do termo da função derivada)?*

*R.M.: Não. Eu me baseei pelo número que está junto com o x da função e não com o da derivada.*

*Professora: Ah! Entendi!*

*R.M.: Eu peguei o sinal da função e deveria ter pego o sinal da derivada. A derivada muda o sinal.*

*Professora: Então você pegou o + 2 da função?*

*R.M.:Isto, pra dizer se é crescente ou decrescente.*

*Professora: Por que isso?*

*R.M.: Foi uma rateada mesmo, porque estava na frente e como era positivo [...].*

*Professora: E se o termo -* $x^2$ *estivesse na frente tu teria colocado decrescente?*

*R.M.: Sim.*

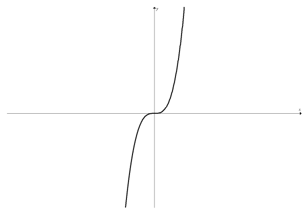
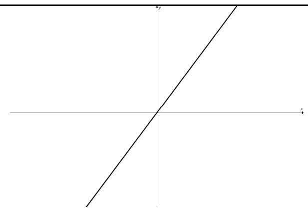
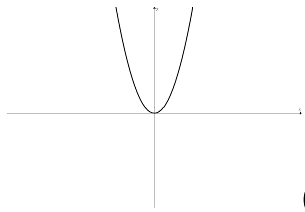
*Professora:Tá.*

Nesses comentários também se pode notar que o aluno não relaciona a representação algébrica de uma função polinomial com sua representação gráfica. Para ele, sempre quando se deriva uma função, o esboço da função derivada é uma reta. Isso mostra que a primeira interpretação da derivada, trabalhada em sala de aula, quanto a sua representação da inclinação da reta tangente ao gráfico de uma função em um determinado valor de *x*, não ficou registrado, motivo pelo qual o aluno, ao derivar a função, obteve o esboço do seu gráfico como uma reta, ou seja, ele ainda não apresenta invariantes operatórias relacionadas à interpretação da derivada..

- o terceiro passo foi expressar algebricamente o estudo dos sinais realizado. Apesar de ele identificar corretamente os intervalos em *x* de acordo com o estudo dos sinais, R.M. fez essa interpretação para concluir quando a função seria crescente ou decrescente, ao invés de fazer inferência sobre a inclinação da reta tangente. Isso pode ser observado pelas expressões escritas no pós–teste ( $f(x)$ é crescente $x > 1$ , $f(x)$ é decrescente $x < 1$), podendo dessa forma identificar os teoremas-em-ação: a) se $f'(x) > 0$, então $f(x)$ é crescente, b) se $f'(x) < 0$, então $f(x)$ é decrescente.

Entretanto, o estudante R.M. também não utiliza a representação gráfica como complemento para auxiliar na visualização da interpretação da derivada como inclinação da reta tangente a uma função em determinado valor de *x*.

Questão 4 do pré–teste:

| Associe a função representada graficamente, no primeiro quadro, com o gráfico (a) ou (b) de sua respectiva função derivada. | | |
|---|---|---|
|  y = f(x) |  (a) |  (b) |

Procedimentos do estudante R.M.

- Selecionou, incorretamente, o item (a), justificando que "tanto na função quanto no gráfico "A", os valores de x e y em relação a menos infinito são negativos".

Para resolver a questão 4 do pré–teste, o aluno R.M. não aplica à interpreação de que a derivada representa geometricamente a inclinação da reta tangente ao gráfico de *f(x)* = *y* em *x*, ele apenas identificou as semelhanças no comportamento da função ao longo do seu domínio, o que pode ser justificado pelos comentários escritos na avaliação "tanto na função quanto no gráfico " A" os valores de x e y em relação a menos infinito são negativos".

Questão 4 do pós–teste:

Esboce o gráfico de uma função *f* para a qual $f(1) = -1,\ f'(1) = 0,\ f'(x) < 0$ se $x < 1$ e $f'(x) > 0$ se $x > 1$.

Procedimentos do estudante R.M.

- Acima das informações do enunciado $f(1) = -1$ escreveu "*x* = - 1" e acima de $f'(1) = 0$, "y = 1";
- Traçou uma reta passando pelos pontos (0, -1) e (1, 0).

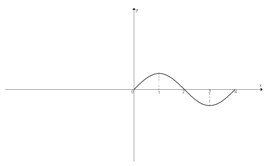
Já na resolução da questão 4 do pós–teste, o aluno traçou a reta que passa pelos pontos (0, -1) e (1, 0) e de acordo com o diálogo abaixo, ele ainda não apresenta domínio da interpretação geométrica do conceito de derivada. Nenhum esquema relacionado ao campo conceitual da derivada foi perceptível, nem mesmo algum tipo de representação simbólica.

*Professora: E o que representa a derivada numa interpretação geométrica?*
*R.M.: Não consigo te responder isso.*

O estudante também apresenta dificuldades em interpretar as informações fornecidas pelas expressões matemáticas do enunciado, visto que acima da expressão $f(1) = -1$ escreveu "*x* = -1" , acima de $f'(1) = 0$, "y = 1" e a partir da expressão $f(1) = -1$ marcou, no plano cartesiano, os pontos (0, -1) e (1, 0). Na entrevista, quando o aluno diz "o 1 representa um ponto e o -1 outro ponto, um no eixo x e outro no eixo y", fica bem clara uma ruptura, pois apesar de ele escrever que *x* = -1, ele marca o ponto (1, 0). Ele não sabe interpretar a representação de coordenada cartesiana, não tem o conhecimento da expressão y = f(x) para poder identificar corretamente um ponto. Apenas tem o conceito-em-ação de que estas expressões do enunciado representam pontos.

Questão 5 do pós–teste:

Esboce o gráfico da função derivada do gráfico abaixo:



Procedimentos do estudante R.M.

- Para valores de *x* entre 0 e 1 foi traçada uma reta, iniciando em *y*=1 e terminando em *y* =0;
- Para valores de *x* entre 1 e 2 foi traçada uma curva com concavidade para cima, iniciando em *y*=0 e terminando em *y* =-1;
- Para valores de *x* entre 2 e 3 foi traçada uma curva com concavidade para cima, iniciando em *y*= -1 e terminando em *y* =0;
- Para valores de *x* entre 3 e 4 foi traçada uma reta, iniciando em *y*=0 e terminando em *y* =1.

Para resolver a questão 5 do pós–teste, a professora auxiliou R.M., durante a avaliação, fornecendo a informação de que ele deveria proceder marcando no gráfico ao lado o comportamento do coeficiente angular das retas tangentes à função em cada um dos intervalos [0, 1], [1, 2], [2, 3] e [3, 4] e, que se as retas são crescentes, o valor da derivada deve estar acima do eixo x.

Após esses comentários, o aluno escreveu na avaliação: *“do 0 até o 1 coef. ang. cresc. Então a derivada deve estar acima do x; do 1 até o 3, coef. ang. decresc.; do 3 até o 4, coef. ang. cresc.”.* Com isso pode-se inferir o teorema-em-ação: se a reta tangente à função em determinado valor de *x* é crescente, então a derivada tem valor poisitivo.

De acordo com o trecho da entrevista a seguir, nota-se que o uso da representação gráfica por meio do *software Modellus* auxiliou o aluno na construção deste teorema-em-ação. O auxílio oferecido pela professora foi a conexão que o estudante necessitava para relacionar a aula de laboratório no desenvolvimento da questão.

*Professora: O que mais te chamou atenção na aula de laboratório [...].*

*R.M.: Tipo assim, neste do gráfico aqui (questão 5 do pós-teste), agora que eu estou me lembrando, e nesse aqui também, da questão 3 da recuperação, o que me recordo bastante é o movimento da reta tangente fazendo a animação no gráfico, abrindo e fechando o coeficiente angular, o ângulo.*

*Professora: Humhum.*

*R.M.: Que é a mesma coisa da aceleração e da velocidade, que está me mostrando o coeficiente angular. A reta está decrescente, mas o coeficiente angular está aumentando ou a reta está crescente e o coeficiente angular está cada vez maior ou menor. Essa animação do gráfico me ajudou muito.*

Além disso, ao final do diálogo acima, o aluno faz algum tipo de relação entre as situações de aplicação de Física com as de aplicação Matemática, porém ainda não está clara a interpretação geométrica do conceito de derivada como inclinação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = y$ em $x$.

## 3.2 SITUAÇÕES – PROBLEMA RELACIONADAS À ÁREA DA FÍSICA

A questão 3 do pré–teste é semelhante às questões 1 e 2 do pós–teste e todas estão relacionadas às situações–problema da área da Física, já relacionadas e justificadas no capítulo anterior. Para resolver essas questões deve-se ter o conhecimento da interpretação do conceito de derivada como uma taxa instantânea de variação.

### 3.2.1 Estudante A.F.

Os quadros abaixo mostram as questões e os procedimentos usados pelo estudante A.F. no desenvolvimento das questões semelhantes do pré e do pós-teste.

Questão 3 do pré–teste:

| |
|---|
| Uma partícula move-se ao longo de uma reta horizontal, conforme a equação $S = 2t^3 - 3t^2 - 12t + 8$.<br>a) Ache a velocidade instantânea, $V(t)$ cm/s, da partícula em 3s;<br>b) Determine os intervalos de tempo em que a partícula move-se para a direita, para a esquerda e quando a partícula inverte o sentido do movimento. |

Procedimentos do estudante A.F.

| |
|---|
| • Escreveu a expressão $s = v'(t)$;<br>• Aplicou as regras de derivação, adequadamente, sobre os termos da função posição;<br>• Sublinhou a resposta do item (a) como sendo $v'(t) = 6t^2 - 6t - 12$;<br>• Não resolveu o item (b) . |

Para a resolução desta questão, o estudante A.F. utilizu a representação algébrica e, a partir dos procedimentos descritos acima, podemos verificar o teorema-em-ação, cientificamente incorreto, através da proposição simbólica $s = v'(t)$. Com isso pode-se inferir o conceito-em-ação: velocidade é igual à primeira derivada. Talvez esta seja a razão pela qual o aluno tenha derivado a função posição e colocado a notação de derivada na letra “v”, a qual representa a função velocidade.

Questão 1 do pós–teste:

Uma partícula move-se ao longo de uma reta horizontal, conforme a equação $S = \frac{1}{3}t^3 - 8t^2 + 60t + 20$.

a) Ache a velocidade instantânea, $V(t)$ cm/s, da partícula em 4s;

b) Determine os intervalos de tempo em que a partícula move-se para a direita, para a esquerda e quando a partícula inverte o sentido do movimento.

Procedimentos do estudante A.F.

- Escreveu a expressão da função velocidade, derivando a função posição;
- Substituiu o valor de *t* dado na expressão da velocidade;
- Igualou a zero a expressão da velocidade e resolveu a equação do segundo grau;
- Fez o estudo dos sinais da função velocidade;
- Identificou corretamente que os intervalos, quando $v(t) > 0$,a partícula move-se para a direita, quando $v(t) < 0$, a partícula move-se para esquerda e quando $v(t) = 0$, a partícula inverte o sentido.

Já na resolução da questão 1 do pós–teste, o aluno é capaz de utilizar corretamente a representação algébrica para relacionar a derivada da função posição com a velocidade de uma partícula, por meio do teorema-em-ação, cientificamente correto, $s' = v$. Os procedimentos mostram uma ampliação do campo conceitual da derivada ao ser comparado com a questão 3 do pós-teste. Na aula de laboratório, o estudante pôde se utilizar das representações gráfica, numérica e algébrica a fim de interpretar a derivada como uma taxa de variação instantânea. Fato este observado pelos seguintes comentários:

*Professora: Na questão 1 do pós-teste fala sobre a velocidade de uma partícula ao longo de uma reta horizontal. Nessa questão, você derivou para encontrar a velocidade, você lembrou da aula de laboratório para resolver esta questão em algum momento?*

*A.F.: Sim.*

*Professora: Que parte você lembrou? Do gráfico? Da animação?*

*A.F.: Da diferença das curvas [...] da função.*

*Professora: Do gráfico?*

*A.F.: É! Dos valores. Em tabela*

Questão 2 do pós–teste:

| |
|---|
| Duas partículas A e B movem-se ao longo de uma reta horizontal. O movimento da partícula A é expresso de acordo com a equação $S_A = \frac{1}{3}t^3 - 4t^2 + 64t$ e o movimento da partícula B, de acordo com a equação $S_B = -\frac{1}{3}t^3 + 32t^2$, onde *S* representa a posição da partícula, é medido em metros e *t*, em segundos. Sabendo que a tabela abaixo mostra a posição das partículas nos primeiros oito segundos de movimento, descreva o comportamento da velocidade de cada uma das partículas nos primeiros oito segundos de movimento. |

Procedimentos do estudante A.F.

- Derivou, as funções posição;
- Derivou as funções velocidade;
- Substituiu os valores de *t* em cada uma das funções derivadas encontradas;
- Descreveu o comportamento da velocidade de cada partícula nos oito primeiros segundos de movimento, em função da aceleração de cada partícula.

Em relação à questão 2 do pós–teste, os teoremas-em-ação são identificados por meio das proposições simbólicas $v_A = s'_A$ e $v'_A = a_A$. Conforme o diálogo que segue, o estudante fez uso da aceleração para ratificar suas hipóteses em relação ao comportamento da velocidade das partículas, podendo assim inferir o conceito-em-ação: a aceleração fornece o quanto a velocidade da partícula aumenta ou diminui.

*Professora: E em que a aceleração ajudou você aqui?*
*A.F.: Aceleração? A quantidade que diminuía ou aumentava.*

O aluno A.F. se apropriou em maior parte das representações algébrica e numérica do que das representações gráfica e idealização do real para desenvolver as situações-problema relacionadas à área da Física.

A partir da aplicação dos teoremas-em-ação verificados nos procedimentos da resolução das questões do pós–teste, da coerência e harmonia dos procedimentos usados e dos comentários da entrevista, verifica-se que o estudante começa a diferenciar o significante do significado, indicando assim uma ampliação do domínio do conhecimento de derivada, em relação às situações aplicadas à Física. Pode-se então observar que, quando a questão proposta pode ser resolvida apenas com representações algébricas, todo conjunto de invariantes associados a esta representação são ativados e utilizados. Contudo, durante a entrevista, há evidência de um crescimento conceitual dentro do conjunto de representações gráficas e numéricas, advindo do uso do *software*.

### 3.2.2 Estudante D.A.

Os quadros abaixo mostram as questões e os procedimentos usados pelo estudante D.A. no desenvolvimento das questões semelhantes do pré e do pós-teste.

Questão 3 do pré–teste:

| |
|---|
| Uma partícula move-se ao longo de uma reta horizontal, conforme a equação $S = 2t^3 - 3t^2 - 12t + 8$.<br><br>a) Ache a velocidade instantânea, $V(t)$ cm/s, da partícula em 3s; |

| |
|---|
| b) Determine os intervalos de tempo em que a partícula move-se para a direita, para a esquerda e quando a partícula inverte o sentido do movimento. |

Procedimentos do estudante D.A.

Para resolução do item a:

- Encontrou, corretamente, $s'$ e $s''$;
- Representou $v'(t)$ como a segunda derivada da função posição e escreveu $a = v'(t)$ e $v(t)$ como a primeira derivada da função posição;
- Substituiu 3 para o valor de *t* na expressão $v(t)$.

Para resolução do item b:

- Disse que as raízes de $s'' = 12t - 6$ eram 0 e 2;
- Esboçou o gráfico de $s''$ como uma parábola com a concavidade para cima, passando por 0 e 2;
- Escreveu que se $t < 0$ e $t > 2$, então a partícula move-se para a direita e que se $t > 0$,então a partícula move-se para a esquerda.

Não resolveu o item c.

O conceito de derivada como taxa de variação instantânea durante a resolução da questão 3 do pré–teste ainda não faz sentido para este aluno, apesar de ele escrever cientificamente correto o teorema-em-ação , por meio da proposição matemática $a = v'(t)$, o aluno utiliza a aceleração para identificar os intervalos de deslocamento da partícula ao invés da velocidade, podendo-se inferir outros teoremas-em-ação: se o valor da função for positivo, a partícula move-se para direita e se o valor da função for negativa, a partícula move-se para a esquerda. Isso mostra que ele utiliza os algoritmos de derivação e o estudo dos sinais de uma função derivada sem saber a razão pela qual o faz, apresentando dessa maneira uma ruptura no campo conceitual de derivada. O uso da representação algébrica é predominante.

Os trechos a seguir complementam tais comentários:

*Professora: Por que fez 1° a derivada?*

*D.A.: Para achar a velocidade instantânea, certo? Fiz a 2° derivada também pra achar a aceleração. Certo? Só que faltou fazer a Bháskara da 1° derivada, aqui no teste 1.*

*Professora: Por quê? Precisava?*

*D.A.: Precisava. Pra achar os [...] Limites; é limites, né?*

*Professora: O tempo.*

*D.A.: Isso! O tempo de inversão que vai para a direita, para a esquerda e a posição de inversão.*

Uma possível justificativa para o aluno ter realizado o estudo dos sinais da segunda derivada é atribuir como conceito-em-ação de que a derivada é igual à reta tangente, comentário este já feito por ele em entrevista anterior.

Questão 1 do pós–teste:

| |
|---|
| Uma partícula move-se ao longo de uma reta horizontal, conforme a equação $S = \frac{1}{3}t^3 - 8t^2 + 60t + 20$. |
| a) Ache a velocidade instantânea, $V(t)$ cm/s, da partícula em 4s. |
| b) Determine os intervalos de tempo em que a partícula move-se para a direita, para a esquerda e quando a partícula inverte o sentido do movimento. |

Procedimentos do estudante D.A.

| |
|---|
| Para resolver o item a: |
| • Escreveu $s' = v(t)$; |
| • Derivou, corretamente, a função posição; |
| • Substituiu o valor de *t* dado na expressão da velocidade; |
| Para resolver o item b: |
| • Igualou a zero a expressão da velocidade e resolveu a equação do segundo grau; |

- Fez o estudo dos sinais da função velocidade;
- Identificou corretamente que os intervalos, quando $v(t) > 0$, a partícula move-se para a direita, quando $v(t) < 0$, a partícula move-se para a esquerda e quando $v(t) = 0$, a partícula inverte o sentido.

Já na resolução da questão 1 do pós–teste, o estudante possui conhecimento a respeito da derivada como taxa de variação instantânea, e isso pode ser observado a partir da representação algébrica descrita pelos procedimentos. A estrutura cognitiva dos esquemas referentes aos conceitos de velocidade e aceleração bem como a representação da animação do real podem ser observados também no trecho anterior da entrevista .

Questão 2 do pós–teste:

Duas partículas A e B movem-se ao longo de uma reta horizontal. O movimento da partícula A é expresso de acordo com a equação $S_A = \frac{1}{3}t^3 - 4t^2 + 64t$ e o movimento da partícula B, de acordo com a equação $S_B = -\frac{1}{3}t^3 + 32t^2$, onde *S* representa a posição da partícula, é medido em metros e *t*, em segundos. Sabendo que a tabela abaixo mostra a posição das partículas nos primeiros oito segundos de movimento, descreva o comportamento da velocidade de cada uma das partículas nos primeiros oito segundos de movimento.

Procedimentos do estudante D.A.

- Fez as diferenças entre um instante e o próximo para descrever o comportamento da velocidade de cada uma das partículas durante os oitos primeiros segundos de movimento.

Em relação à resolução da questão 2 do pós–teste, o aluno utilizou o conceito de velocidade média para descrever o comportamento da velocidade das partículas, segundo o diálogo:

*Professora: Como é que você pensou para dizer se a velocidade está aumentando ou diminuindo?*

*D.A.: É assim. Olhando aqui, né? No caso, era a "A", ela foi aumentando a distância, que não era proporcional, a velocidade deveria aumentar também em um certo grau, né?*

*Professora: Então você está trabalhando com a diferença?*

*D.A.: De espaço percorrido.*

Para ele, utilizar diferenças ou calcular a velocidade instantânea em cada instante para descrever o comportamento da velocidade da partícula durante os oitos segundos de movimento, seria a mesma coisa, uma vez que os intervalos eram a cada 1 segundo, mostrando dessa forma uma ruptura do campo conceitual da derivada referente ao conceito de taxa instantânea de variação.. Isso pode ser observado nos comentários que seguem:

*Professora: E se eu colocasse assim: Faça algum cálculo [...] Que cálculo você faria para mostrar que a velocidade está aumentando ou diminuindo?*

*D.A.: Eu ia através da derivada, ia achar a velocidade.*

*Professora: E por que você não fez derivada ali?*

*D.A.: Deste aqui? (apontou para a questão).*

*Professora: Por que usou a diferença e não a derivada?*

*D.A.: Porque no gráfico (no caso, a tabela do enunciado) estava bem claro que estava sendo feito o aumento de tempo e espaço.*

*Professora: Mas isso não é velocidade média?*

*D.A.: Seria velocidade média se não tivesse ponto a ponto e eu somasse todos e assim, acharia a velocidade média.*

Com isso, pode-se verificar que a noção de infinitésimo não existe. Além disso, segundo o diálogo abaixo, para ele, a diferença entre velocidade média e velocidade instantânea existe somente em relação à exatidão do valor da mesma.

*Professora: Outra pergunta. É diferente calcular a velocidade média em cada segundo aqui e de calcular a velocidade instantânea em cada segundo?*

*D.A.: É diferente.*

*Professora: Por quê?*

*D.A.: Porque se for calculada a velocidade média, tu não vai ter exata a velocidade naquele sendo ali. Mas o raciocínio que eu tive foi assim. Como ele pegou aqui de 0 a 1 segundo, ele percorreu 31 metros, né? E de 0 a 2 segundos ele percorreu 125 metros. A gente poderia fazer a relação se for fazer velocidade média vai dar bem maior, né? Mas o que eu fiz com a velocidade, se eu faço a derivada do 0 até 1, vai me dar um valor de velocidade. E se eu fizer no instante 2, ele vai me dar um valor maior porque ele percorreu um espaço maior.*

A representação gráfica utilizada na aula de laboratório auxiliou o estudante a resolver esta questão, e nesse caso, também se pode identificar um conhecimento implícito, por meio do conceito-em-ação: a taxa média de crescimento da função posição relaciona-se com o comportamento da velocidade do móvel. Isso pode ser observado pelos seguintes comentários:

*Professora: E nisso aqui, você lembrou de alguma coisa do laboratório quando foi fazer essa questão?*

*D.A.: Ela lembrou aquela que o gráfico tem a concavidade para baixo. Aquela que sobe, sobe, sobe, até 400 e depois desce, desce, desce, e o valor está sempre diminuindo. E ela troca de sentido, só que aumenta em módulo.*

*Professora: Ok.*

Sendo assim, mais uma vez, este estudante utiliza representações algébricas e suas invariantes associadas, contudo, transita facilmente dentro da representação gráfica após o uso do *software*, como evidenciado pelo diálogo acima. Pode-se, talvez, afirmar que o estudante não sente necessidade de incorporar a representação gráfica em sua construção do conceito de derivada, a não ser quando a situação-problema proposta envolver diretamente esta representação.

### 3.2.3 Estudante G.E.

Os quadros abaixo mostram as questões e os procedimentos usados pelo estudante G.E. no desenvolvimento das questões semelhantes do pré e do pós-teste.

Questão 3 do pré–teste:

Uma partícula move-se ao longo de uma reta horizontal, conforme a equação $S = 2t^3 - 3t^2 - 12t + 8$.

a) Ache a velocidade instantânea, $V(t)$ cm/s, da partícula em 3s;

b) Determine os intervalos de tempo em que a partícula move-se para a direita, para a esquerda e quando a partícula inverte o sentido do movimento.

Procedimentos do estudante G.E.

Para resolução do item a:

- Derivou, corretamente, a função posição e a nomeou de *v*;
- Substituiu 3 para o valor de *t* na expressão $v = 6t^2 - 6t - 12$

Para resolução do item b:

- Derivou a função velocidade, *v*, e a nomeou de *a*, de aceleração;
- Substituiu *t* por zero na expressão da função aceleração.

Para resolução do item c:

- Fez parcialmente o estudo dos sinais da função aceleração, escrevendo o seguinte:

“$12t - 6 > 2$ positivo (direita);

| |
|---|
| $12t-6<2$ negativo (esquerda);<br>$12t-6=0$ inverte direção”. |

O conceito de derivada como taxa de variação instantânea durante a resolução da questão 3 do pré–teste ainda não faz sentido para este aluno, apesar de o estudante ser capaz de expressar cientificamente correto os teoremas-em-ação: a função velocidade é encontrada a partir da primeira derivada da função posição e a aceleração é encontrada a partir da primeira derivada da função velocidade, visto que ele utilizou a aceleração para identificar os intervalos de deslocamento da partícula, ao invés da velocidade. Uma possível justificativa para o aluno ter realizado o estudo dos sinais da segunda derivada é atribuir como conceito-em-ação que a derivada é igual à reta tangente, comentário este já feito por ele em entrevista anterior.

Além disso, ele apresenta dificuldades em expressar seu raciocínio a partir da representação algébrica e utiliza os algoritmos de derivação e estudo dos sinais de uma função derivada sem saber o motivo, fato este verificado na resolução da questão quando ele escreve “$12t-6>2$ positivo (direita), $12t-6<2$ negativo (esquerda) e $12t-6=0$ inverte direção”.

Pode-se dizer que ele resolveu de forma incorreta e mentalmente a equação $12t-6=0$, para encontrar o valor 2.

Nesse caso, o teorema-em-ação que ele está utilizando é de que se *t* for maior que 2, então a partícula desloca-se para a direita, porque o valor da expressão $12t-6$ quando $t>2$ será positivo e que se *t* for menor que 2, então a partícula desloca-se para a esquerda, porque o valor da expressão $12t-6$ quando $t<2$ será negativo.

Apesar disso, o aluno não consegue utilizar adequadamente a representação algébrica para expressar esse conhecimento. Entretanto quando escreve “$12t-6=0$, inverte direção”, ele não se preocupa em fornecer um valor para *t*, além de confundir o conceito de direção com o conceito de sentido. Dessa forma, pode-se inferir o teorema-em-ação: igualando a zero uma função derivada de primeiro grau, encontra-se o instante em que a partícula inverte seu sentido.

Questão 1 do pós–teste:

Uma partícula move-se ao longo de uma reta horizontal, conforme a equação $S = \frac{1}{3}t^3 - 8t^2 + 60t + 20$.

a) Ache a velocidade instantânea, $V(t)$ cm/s, da partícula em 4s;

b) Determine os intervalos de tempo em que a partícula move-se para a direita, para a esquerda e quando a partícula inverte o sentido do movimento.

Procedimentos do estudante G.E..

Para resolver o item a:

- Derivou, corretamente, a função posição;
- Nomeou $s'$ de $v(t)$ e substituiu o valor de *t* dado na expressão da velocidade.

Para resolver o item b:

- Igualou a zero a expressão da velocidade e resolveu a equação do segundo grau;
- Fez o estudo dos sinais da função velocidade;
- Identificou corretamente que os intervalos quando $v(t) > 0$ a partícula move-se para direita, quando $v(t) < 0$ a partícula move-se para esquerda e quando $v(t) = 0$ a partícula inverte o sentido.

Já na resolução da questão 1 do pós–teste, o aluno é capaz de utilizar corretamente a representação algébrica para relacionar a derivada da função posição com a velocidade de uma partícula, por meio do teorema-em-ação, cientificamente correto, $s' = v$. Os procedimentos mostram uma ampliação do campo conceitual da derivada porque o conceito-em-ação: derivada = reta, usado na questão 3 do pré-teste, não aparece mais. O aluno fez uso da representação gráfica e numérica para resolver esta questão, o que pode ser verificado pelos seguintes comentários:

*Professora: Você usou alguma coisa da aula de laboratório para resolver a questão 1 do teste 2?*

*G.E.: O que ajudou bastante para resolver esta questão foi aquele princípio da utilização do gráfico na aula do laboratório, que conforme ia variando a reta tangente, eu conseguia visualizar realmente o quanto iria modificar.*

*Professora: Modificar o quê?*

*G.E.: O que variava assim no gráfico, né, os valores em si.*

*Professora: Especificamente pra essa questão, o que a reta tangente te dizia, que informações ela te dá?*

*G.E.: Ela me mostrava o momento em que a velocidade variava muito, então a reta em si também ia variando, foi com isso que eu me baseei pra resolver essa questão. Foi o que me esclareceu mais.*

Questão 2 do pós–teste:

| |
|---|
| Duas partículas A e B movem-se ao longo de uma reta horizontal. O movimento da partícula A é expresso de acordo com a equação $S_A = \frac{1}{3}t^3 - 4t^2 + 64t$ e o movimento da partícula B, de acordo com a equação $S_B = -\frac{1}{3}t^3 + 32t^2$, onde *S* representa a posição da partícula, é medido em metros e *t*, em segundos. Sabendo que a tabela abaixo mostra a posição das partículas nos primeiros oito segundos de movimento, descreva o comportamento da velocidade de cada uma das partículas nos primeiros oito segundos de movimento. |

Procedimentos do estudante G.E.

- Derivou as funções posição e as nomeou de *v*;
- Substituiu alguns valores de *t* (0, 4 e 8) em cada uma das funções derivadas encontradas;
- Descreveu o comportamento da velocidade de cada partícula de acordo com os valores encontrados quando *t* igual a 0, 4 e 8 segundos.

Em relação à questão 2 do pós–teste, os teoremas-em-ação: $v_A = s'_A$ e $v'_A = a_A$. Segundo o diálogo, o aluno utilizou as representações algébrica, gráfica e numérica para descrever o comportamento da velocidade das partículas. Além de mostrar claramente que a aula de laboratório o auxiliou a relacionar a derivada com inclinação da reta tangente e com velocidade.

*Professora: O que você fez pra resolver a questão 2 do teste 2?*

*G.E.: Eu fui imaginando, conforme o gráfico ia passando, os tempos; então eu ia imaginando conforme a reta tangente ia variando.*

*Professora: E por que derivou a posição de cada uma delas?*

*G.E.: Eu derivei justamente pra ver a variação da reta tangente a cada instante de tempo.*

*Professora: Mas a questão não pedia velocidade?*
*G.E.: Isso, mas com a variação da reta, eu consigo enxergar isso também, não é?*

### 3.2.4 Estudante M.P.

Os quadros abaixo mostram as questões e os procedimentos usados pelo estudante M.P. no desenvolvimento das questões semelhantes do pré e do pós-teste.

Questão 3 do pré–teste:

| |
|---|
| Uma partícula move-se ao longo de uma reta horizontal, conforme a equação $S = 2t^3 - 3t^2 - 12t + 8$. |
| a) Ache a velocidade instantânea, $V(t)$ cm/s, da partícula em 3s; |
| b) Determine os intervalos de tempo em que a partícula move-se para a direita, para a esquerda e quando a partícula inverte o sentido do movimento. |

Procedimentos do estudante M.P.

| |
|---|
| Para resolução do item a: |
| • Derivou a função posição e nomeou-a de $v$; |

- Substituiu 3 para o valor de *t* na expressão $v$.

Para resolução do item b:

- Calculou, incorretamente, as raízes da equação da velocidade;
- Construiu uma tabela de t x $v$;
- Construção do gráfico da velocidade em função dos pontos encontrados na tabela;
- Escreveu:

" Direita $\rightarrow$ velocidade positiva $\rightarrow$ $v > 0$ $\rightarrow$ $t < -1$ e $t > 2$;

Esquerda $\rightarrow$ velocidade negativa $\rightarrow$ $v < 0$ $\rightarrow$ $-1 < t < 2$";

Apesar de a questão 3 do pré–teste ser igual a questão 1 do pós–teste, o estudante utilizou algoritmos diferentes para resolvê-las. No pré-teste, o estudante procura as raízes utilizando a representação numérica por meio de uma tabela *t* x *v*, atribuindo valores para *t* até encontrar *v* = 0.

No pré-teste, o cálculo das raízes da equação da velocidade por meio da representação algébrica não lhe fizeram muito sentido, buscando outra forma de representação, a numérica, a fim de auxiliá-lo na resolução da questão.

A partir da tabela, ele consegue responder os teoremas-em-ação, cientificamente corretos, escritos por meio das proposições: direita $\rightarrow$ velocidade positiva e esquerda $\rightarrow$ velocidade negativa.

Questão 1 do pós–teste:

Uma partícula move-se ao longo de uma reta horizontal, conforme a equação $S = \frac{1}{3}t^3 - 8t^2 + 60t + 20$.

a) Ache a velocidade instantânea, $V(t)$ cm/s, da partícula em 4s;

b) Determine os intervalos de tempo em que a partícula move-se para a direita, para a esquerda e quando a partícula inverte o sentido do movimento.

Procedimentos do estudante M.P.

Para resolver o item a:

- Derivou a função posição e nomeou-a de $v(t)$;
- Substituiu o valor de *t* na expressão da velocidade.

Para resolver o item b:

- Igualou a zero a expressão da velocidade e resolveu a equação do segundo grau;
- Fez o estudo dos sinais da função velocidade;
- Identificou corretamente que os intervalos, quando $v(t) > 0$, a partícula move-se para a direita, quando $v(t) < 0$, a partícula move-se para a esquerda e quando $v(t) = 0$, a partícula inverte o sentido.

Na resolução da questão 1 do pós-teste, o estudante já não se utiliza da representação numérica e a algébrica é dominante em seus algoritmos. As raízes da equação da velocidade serviram para esboçar o gráfico da velocidade, bem como para responder ao item b, a partir do estudo dos sinais da respectiva função. Nesses algoritmos, pode-se inferir os teoremas-em-ação: $v(t) < 0$, a partícula move-se para a esquerda e quando $v(t) = 0$, a partícula inverte o sentido. Além disso, o diálogo abaixo reforça a idéia de que a aula de laboratório auxiliou o aluno na compreensão da razão pela qual se deve fazer o estudo dos sinais da função derivada.

*Professora: Mas, você tem uma idéia de como é a velocidade, mas, além do formato do gráfico, o que mais ele mostrava?*

*M.P.: A direção; se era positiva ou negativa. Eu me lembrei disso.*

O aluno M.P resolveu a questão 3 do pré–teste e a questão 1 do pós–teste aplicando mecanicamente o algoritmo utilizado nos exercícios resolvidos em sala de aula em questões semelhantes a essa, onde era observado que, derivando a função posição, obtinha-se a função velocidade. Entretanto o aluno não possuía o domínio de que isso representa uma taxa de variação instantânea. Tal hipótese pode ser verificada pelos seguintes comentários:

*Professora: Nesse caso aqui, em nenhum momento a reta tangente daquela função te ajudou em alguma coisa?*

*M.P.: Na questão 1? Não. É que essa questão 1 aqui eu já tinha pego bem na aula anterior.*

*Professora: Com minha explicação, em sala de aula?*

*M.P.: Isso.*

Também se pode verificar, com esses comentários, que o estudante não fez uso da representação gráfica para interpretar o conceito de derivada como taxa de variação instantânea.

Além disso, a aula de laboratório auxiliou M.P., como pode ser verificado, segundo a sua declaração: *“Me ajudou a visualizar o porquê que tem que derivar. O que é a derivação que tu me explicou. É a taxa de variação, me ajudou a enxergar a taxa de variação. Eu não enxergava isso. No laboratório, eu enxerguei a taxa de variação. A derivada, tudo bem! O ângulo da reta tangente, tá! Mas e a taxa de variação? É aquilo ali que eu enxerguei.”*

Para M.P., a taxa de variação foi verificada com o uso da representação do real, na janela “animação”, a partir do rastro do móvel a cada segundo, durante a simulação do movimento, podendo ser identificado pelo diálogo:

*Professora: A taxa de variação você conseguia ver onde?*

*M.P.: Nos intervalos a cada segundo. Nas bolinhas da animação.*

Questão 2 do pós–teste:

Duas partículas A e B movem-se ao longo de uma reta horizontal. O movimento da partícula A é expresso de acordo com a equação $S_A = \frac{1}{3}t^3 - 4t^2 + 64t$ e o movimento da partícula B, de acordo com a equação $S_B = -\frac{1}{3}t^3 + 32t^2$, onde *S* representa a posição da partícula, é medido em metros e *t*, em segundos. Sabendo que a tabela abaixo mostra a posição das partículas nos primeiros oito segundos de movimento, descreva o comportamento da velocidade de cada uma das partículas nos primeiros oito segundos de movimento.

Procedimentos do estudante M.P.

- Fez as diferenças entre um instante e o próximo para descrever o comportamento da velocidade de cada uma das partículas durante os oitos primeiros segundos de movimento.

Em relação à resolução da questão 2 do pós–teste, segundo o diálogo, o estudante utilizou o conceito de velocidade média para descrever o comportamento da velocidade das partículas mostrando, dessa forma, uma ruptura no campo conceitual da derivada referente ao conceito de taxa instantânea de taxa de variação.

*Professora: Essa questão dois, a da tabela, o que você fez? Pelo que eu analisei aqui, do que você resolveu, você fez a diferença entre [...].*

*M.P.: Cada intervalo.*

*Professora: E isso foi te dando o quê?*

*M.P.: Isso aqui eu me lembrei da aula de laboratório. Que a gente pegou cada intervalo e foi vendo a taxa de variação. É isso que eu tava vendo aqui, oh! Quanto que ele percorreu de segundo em segundo. Daí eu fiz o quê? A diferença em segundos, isso foi o que eu botei no gráfico (apontou para tabela que fez das diferenças) aqui.*

Apesar de o estudante fazer uso das diferenças das posições em intervalos de um segundo para descrever o comportamento da velocidade das partículas, inferindo assim o conceito-em-ação de que a taxa média de crescimento da função posição relaciona-se com o comportamento da velocidade do móvel. O estudante ainda confunde aceleração com velocidade, podendo ser observado no seguinte comentário *“[...] no B (coluna das diferenças da partícula B), eu percebi que ela foi diminuindo até os quatro segundos, que ela quase parou. Por que há uma diferença de um milésimo”.*

No diálogo abaixo,

*Professora: Mas qual é a velocidade de um carrinho quando está parado?*

*M.P.: Quando está parado é nula. Mas aqui ele não parou. Ele quase parou.*

*Professora: Mas então, não teria que estar próximo do zero?*

*M.P.: Sim.*

*Professora: E não está próximo do 0 e sim de 48,33.*

*M.P.: Tá bom mas assim ó [...].*

*Professora: Você está fazendo a diferença das velocidades?*

*M.P.: É*

*Professora: Está fazendo a taxa de variação da velocidade?*

*M.P.: É [...] eu acho que eu me confundi com a aceleração. É, foi isso que eu fiz aqui.*

De acordo com os comentários a seguir, pode-se verificar que a combinação da representação do real com a forma de apresentação do gráfico da função posição auxiliaram o estudante a ter noção do comportamento da velocidade, podendo assim, verificar um conhecimento implícito da relação entre a inclinação da reta tangente ao gráfico da função com a taxa de variação instantânea.

*Professora: O que no gráfico mostrava a velocidade?*

*M.P.: Ele mostrava o movimento que o carrinho ia fazendo, a distância que ele ia percorrendo, num determinado período. De tantos em tantos segundos, o quanto ele andava mais ou menos até que as bolinhas aquelas iam aumentando a distância.*

Podemos afirmar que este estudante apenas transita dentro do nível algébrico representacional. A atividade computacional pouco acrescentou em termos de representações e invariantes a este estudante, que demonstra preferir e, de fato, apresentou um crescimento conceitual apenas baseado em representações algébricas (vistas em sala de aula, sem auxílio do computador).

### 3.2.5 Estudante R.M.

Os quadros abaixo mostram as questões e os procedimentos usados pelo estudante R.M. no desenvolvimento das questões semelhantes do pré e do pós-teste.

Questão 3 do pré–teste:

| |
|---|
| Uma partícula move-se ao longo de uma reta horizontal, conforme a equação $S = 2t^3 - 3t^2 - 12t + 8$. |
| a) Ache a velocidade instantânea, $V(t)$ cm/s, da partícula em 3s; |
| b) Determine os intervalos de tempo em que a partícula move-se para a direita, para a esquerda e quando a partícula inverte o sentido do movimento. |

Procedimentos do estudante R.M.

| |
|---|
| • Não resolveu. |

O aluno foi incapaz de resolver a questão 1 do pré-teste, apenas com o que foi trabalhado em sala de aula, de forma expositiva-dialogada, sendo impossível, dessa forma, identificar alguma invariante operatória relacionada ao campo conceitual da derivada.

Questão 1 do pós–teste:

Uma partícula move-se ao longo de uma reta horizontal, conforme a equação $S = \frac{1}{3}t^3 - 8t^2 + 60t + 20$.

a) Ache a velocidade instantânea, $V(t)$ cm/s, da partícula em 4s;

b) Determine os intervalos de tempo em que a partícula move-se para a direita, para a esquerda e quando a partícula inverte o sentido do movimento.

Procedimentos do estudante R.M.

Para resolver o item a:

- Derivou a função posição;
- Substituiu o valor de *t* dado na função derivada.

Para resolver o item b:

- Igualou a zero a função derivada;
- Fez o estudo dos sinais da função derivada;
- Escreveu:

"$s'(t) < 6$ e $> 10$ move-se para a direita;

$s'(t) > 6$ e $< 10$ move-se para a esquerda;

$s'(t) = 6$ e $10$ inverte os sentidos".

Para resolver a questão 1 do pós–teste, o aluno R.M. fez uso da representação algébrica e dos procedimentos desenvolvidos em sala de aula, na resolução de questões semelhantes a esta. Entretanto a aula de laboratório foi capaz de auxiliar o aluno na identificação e na aplicação adequada dos mesmos. Ao discutir a resolução da questão 1 do pós–teste, o estudante mostrou que a resolução da mesma foi facilitada devido à semelhança da pergunta com as atividades desenvolvidas no *software* de simulação. Isso pode ser observado pelo diálogo:

*Professora: Beleza. Pra ti resolver essa questão, você usou a aula de laboratório?*

*R.M.: Com certeza, ajudou sim.*

*Professora: De que maneira ela te ajudou? Do que você lembrou?*

*R.M.: Já tinha uma idéia bem melhor, né. Antes de ter visto a aula de laboratório, eu não teria essa idéia tão clara, que nem eu tive no olhar a questão aqui.*

*Professora: Humhum.*

*R.M.: Porque quando se fala assim, uma partícula move-se ao longo de uma reta horizontal, eu imaginei aquela situação (atividades no laboratório).*

Em nenhum momento da entrevista ele fez alguma menção de interpretar o conceito de derivada como taxa de variação instantânea, tendo apenas apresentado os seguintes teoremas-em-ação escritos no pós–teste: $s'(t) < 6 \text{ e } > 10$ move-se para a direita; $s'(t) > 6 \text{ e } < 10$ move-se para a esquerda e $s'(t) = 6 \text{ e } 10$ inverte os sentidos. Isso também pode ter representado uma repetição do que foi trabalhado anteriormente, em sala de aula.

Durante a entrevista, foi discutida a resolução da questão 3 do pós–teste e o aluno mostrou que confunde a primeira derivada com função e a segunda derivada com a primeira derivada verificando-se assim uma ruptura no campo conceitual da derivada referente ao conceito de taxa de variação instantânea.

Dessa forma, pode-se levantar duas hipóteses: o aluno pode não saber o que é uma função e conseqüentemente isso pode interferir em conceitos afins, dificultando o domínio do conceito de derivada; ou o estudante tem dificuldades de interpretação dos enunciados e assim não aplica adequadamente os conceitos durante a resolução das questões.

O que corrobora com a hipótese de que ele não sabe o que é uma função, é o fato de ele ter expresso "$s'(t) < 6 \text{ e } > 10$ move-se para a direita, $s'(t) > 6 \text{ e } < 10$ move-se para a esquerda e $s'(t) \;\; 6 \text{ e } 10$ inverte os sentidos". Nessa situação, o aluno troca o significado de variável dependente com variável independente quando escreve $s'(t)$ ao invés de escrever *t.*

Questão 2 do pós–teste:

Duas partículas A e B movem-se ao longo de uma reta horizontal. O movimento da partícula A é expresso de acordo com a equação $S_A = \frac{1}{3}t^3 - 4t^2 + 64t$ e o movimento da partícula B, de acordo com a equação $S_B = -\frac{1}{3}t^3 + 32t^2$, onde *S* representa a posição da partícula, é medido em metros e *t*, em segundos. Sabendo que a tabela abaixo mostra a posição das partículas nos primeiros oito segundos de movimento, descreva o comportamento da velocidade de cada uma das partículas nos primeiros oito segundos de movimento.

Procedimentos do estudante R.M.

- Derivou, as funções posição;
- Substituiu alguns valores de *t* (1, 2 e 3) em cada uma das funções derivadas encontradas;
- Descreveu o comportamento da velocidade de cada partícula.

Na resolução da questão 2 do pós–teste, é observado que o aluno foi capaz de utilizar os algoritmos de forma adequada, podendo assim inferir o teorema-em-ação: $v = s'$, porém ele, de acordo com a entrevista, não os utiliza para responder a questão mas sim para comprovar sua interpretação da tabela a partir da diferença entre as posições a cada instante.

*Professora: E por que você fez isso? (resolveu a derivada de A e de B para cada segundo).*

*R.M.: Para tentar achar alguma coisa, né!*

*Professora: Humhum.*

*R.M.: Eu fiz aqui a conta só pra confirmar mesmo se estava crescendo mais ou menos.*

A seguir, serão apresentadas duas tabelas que resumem a frequência de uso dos diferentes tipos de representação utilizados pelos alunos na resolução dos pré e pós-teste.

**TABELA 1 - QUESTÕES REFERENTE À AREA DA MATEMÁTICA**

| Alunos | Representações Preferenciais | | Transição | | Derivada |
|---|---|---|---|---|---|
| | Pré-teste | Pós-teste | Pré-teste | Pós-teste | |
| A.F. | Algébrica + + | Algébrica + + | Algébrica | Algébrica | Algébrica + + |
| | Numérica 0 | Numérica + | Numérica | Numérica | Numérica + |
| | Gráfica 0 | Gráfica + | Gráfica | Gráfica | Gráfica + + |
| D.A. | Algébrica + + | Algébrica + + | Algébrica | Algébrica | Algébrica + + |
| | Numérica 0 | Numérica 0 | Numérica | Numérica | Numérica 0 |
| | Gráfica + | Gráfica + + | Gráfica | Gráfica | Gráfica + + |
| G.E. | Algébrica + | Algébrica+ + | Algébrica | Algébrica | Algébrica + + |
| | Numérica 0 | Numérica 0 | Numérica | Numérica | Numérica 0 |
| | Gráfica 0 | Gráfica + + | Gráfica | Gráfica | Gráfica + + |
| M.P. | Algébrica + + | Algébrica + + | Algébrica | Algébrica | Algébrica + + |
| | Numérica 0 | Numérica 0 | Numérica | Numérica | Numérica 0 |
| | Gráfica 0 | Gráfica + | Gráfica | Gráfica | Gráfica + |
| R.M. | Algébrica + | Algébrica + | Algébrica | Algébrica | Algébrica + |
| | Numérica 0 | Numérica 0 | Numérica | Numérica | Numérica 0 |
| | Gráfica 0 | Gráfica + | Gráfica | Gráfica | Gráfica + |

**TABELA 2 - QUESTÕES REFERENTE À AREA DA FÍSICA**

| Alunos | Representações Preferenciais | | Transição | | Velocidade |
|---|---|---|---|---|---|
| | Pré-teste | Pós-teste | Pré-teste | Pós-teste | |
| A.F. | Algébrica + + | Algébrica + + | Algébrica | Algébrica | Algébrica + + |
| | Numérica 0 | Numérica + | Numérica | Numérica | Numérica + |
| | Gráfica 0 | Gráfica + | Gráfica | Gráfica | Gráfica + |
| D.A. | Algébrica + + | Algébrica + + | Algébrica | Algébrica | Algébrica + + |
| | Numérica 0 | Numérica + | Numérica | Numérica | Numérica + |
| | Gráfica 0 | Gráfica + | Gráfica | Gráfica | Gráfica + |
| G.E. | Algébrica + + | Algébrica + + | Algébrica | Algébrica | Algébrica + + |
| | Numérica 0 | Numérica + | Numérica | Numérica | Numérica + |
| | Gráfica 0 | Gráfica + | Gráfica | Gráfica | Gráfica + |
| M.P. | Algébrica + + | Algébrica + + | Algébrica | Algébrica | Algébrica + + |
| | Numérica 0 | Numérica + | Numérica | Numérica | Numérica + |
| | Gráfica 0 | Gráfica + | Gráfica | Gráfica | Gráfica + |
| R.M. | Algébrica + + | Algébrica + + | Algébrica | Algébrica | Algébrica + + |
| | Numérica 0 | Numérica + | Numérica | Numérica | Numérica + |
| | Gráfica 0 | Gráfica + | Gráfica | Gráfica | Gráfica + |

*+ indica a frequência de uso da respectiva representação*
*0 indica a não utilização da respectiva representação*
*→ indica a transição do tipo de representação*

## CONCLUSÃO

Conforme relatamos no primeiro capítulo, o objetivo principal desta pesquisa era identificar as diferentes representações oferecidas pelo *software* de simulação *Modellus* na conceitualização de derivada. Para tanto, foram executadas uma série de procedimentos metodológicos, incluindo a realização de dois estudos pilotos a fim de minimizar falhas neste processo.

Nesta pesquisa, a forma de interação entre o aluno e o *software Modellus* ocorreu através de atividades de simulação de modo exploratório. Neste, o aluno é impedido de modificar a base do modelo computacional, entretanto, é capaz de inserir valores iniciais para variáveis, alterar parâmetros e, eventualmente, modificar relações entre as variáveis . Com isso, as atividades realizadas durante o tratamento permitiram, sob a ótica construtivista, que o aluno, ao executar seu modelo de simulação e ao observá-lo, explorasse grande quantidade de hipóteses, possibilitando assim, a realização de novas predições . A interatividade com animações possibilitou ressignificar este conhecimento de forma mais clara e estável. Isto porque as simulações permitiram que os estudantes realizassem representações, explorando-as sob diversas perspectivas.

Os resultados foram animadores em relação ao uso de atividades de simulações computacionais que abordavam diferentes representações no ensino de derivada. A nossa interpretação dos dados analisados indicam que a representação gráfica favoreceu uma melhor compreensão do conceito da derivada, bem como o uso de representações algébricas mais conscientes após a manipulação do *software* na aula de laboratório.

Situações-problema dos instrumentos de análise relacionadas à área da matemática tinham como objetivo principal identificar se os estudantes interpretavam o conceito de derivada como inclinação da reta tangente ao gráfico de uma função.

Foi observado no pré-teste que a maioria dos alunos apresentaram invariantes operatórias relacionadas ao campo conceitual da derivada, entretanto grande parte dos conceitos-em-ação identificados mostraram-se irrelevantes. Além disso, a representação mais frequentemente utilizada por eles no pré-teste foi a representação algébrica. Em contrapartida, observa-se no pós-teste que os conceitos-em-ação apresentados tornaram-se relevantes, podendo-se inferir muitas vezes teoremas-em-ação cientificamente corretos. O uso da representação gráfica tornou-se mais frequente e foi utilizada de forma complementar ao uso da representação algébrica.

Os instrumentos de análise relacionados à área da física apresentavam situações-problema as quais objetivavam verificar se os estudantes interpretavam o conceito de derivada como taxa instantânea de variação.

Observou-se no pré-teste que a maioria dos alunos apresentaram teoremas-em-ação cientificamente incorretos, identificados a partir de proposições simbólicas, porém grande parte dos conceitos-em-ação apresentados era relevante. A representação predominante apresentada pelos alunos foi a representação algébrica. Já no pós-teste, as proposições simbólicas inadequadas apresentadas anteriormente cederam lugar a teoremas-em-ação cientificamente corretos. O uso da representação gráfica e numérica tornou-se mais frequente e foi utilizada de forma complementar ao uso da representação algébrica. Entretanto alguns alunos mostraram uma ruptura no campo conceitual da derivada referente ao conceito de taxa instantânea de variação no que diz respeito ao domínio de infinitésimos, uma vez que utilizaram diferenças para calcular a velocidade instantânea da partícula em cada instante.

Ainda pode-se observar uma plurariladade maior no uso de diferentes representações, com especial atenção à representação numérica em situações da área da física. Atribuímos este fato à natureza da questão 2 do pós-teste. Embora se faça necessário acrescentar questões deste tipo, são frequentemente escolhidas em cálculo justamente com o propósito de se trabalhar com números.

No pré-teste, a representação algébrica é ressaltada pelos alunos, mas eles não sabem a razão de fazê-lo, constituindo dessa forma o conhecimento implícito. A representação algébrica é a forma de representação mais utilizada pela professora, fato este natural em sala de aula até mesmo em questões com forte vínculo com o campo conceitual da cinemática em física.

No pós-teste, a representação algébrica é igualmente "prevalecida", mas estudantes apresentam invariantes reformulados para este tipo de representação, tendo alterado seu status cognitivo apresentando um conhecimento explícito. Assim, sua capacidade de resolução de situações-problemas apresenta-se melhor dentro deste tipo de representação. Não apenas isto, sua capacidade de conceitualização de derivada apresenta uma melhoria perceptual nas entrevistas e pós-teste.

Com base nisto, podemos observar uma mudança no status cognitivo dos alunos levando a uma ampliação do campo conceitual da derivada, visto que a maioria dos alunos se utilizaram dos diferentes tipo de representação simbólica para justificar seus esquemas quando na resolução das situações-problema.

Pode-se questionar por que o uso do *Modellus* resultou em uma melhoria da capacidade do estudante de utilizar representações gráficas. Nossas observações, como já discutido, indicam uma melhora também no uso e domínio de outras representações.

Contudo, ao se analisar a evolução correspondente no uso e freqüência das representações numéricas e gráficas percebe-se um substancial aumento na capacidade do estudante de utilizar estas representações. Esta constatação, por si só, justifica o uso de uma metodologia de ensino semelhante à implementada. Durante a entrevista, percebeu-se que muitas das explanações proferidas pelos estudantes giraram em torno da sua recente apropriação de representações numéricas, e, principalmente gráficas e seus correspondentes invariantes.

Vários estudos já foram realizados discutindo este fato onde aparentemente, um melhor domínio de um tipo de representação, em geral gráfica, pode resultar até mesmo no domínio de outras representações. Diversos autores também concordam sobre a importância do papel da representação na resolução de problemas, pois, segundo eles, os diagramas têm o potencial de transmitir informações eficientemente auxiliando os estudantes a organizar-se espacialmente e representar a informação conceitual oferecida por uma situação-problema.

De forma sucinta, todos estes resultados apontam para as vantagens de se utilizar representações de forte conteúdo viso-espacial no ensino de campos variados da matemática e das ciências em geral. Este conteúdo viso-espacial na realidade é constituído de representações construídas pelo meio sócio-histórico-cultural durante o processo de discussão e refino histórico e de conceitos específicos e transmitidos pelo processo de ensino - como a noção gráfica da derivada e sua associação com a reta tangente ao gráfico de uma função. Vergnaud vê estas representações como sendo parte da terna que constitui, em essência, sua própria definição do que é um conceito matemático (ou de ciência). Assim, o uso de diferentes representações, em especial, representações gráficas, deve potencializar a criação de esquemas mais ricos onde todas estas representações estejam presentes, auxiliando, assim, na resolução de situações-problema. Não apenas isto, pois é parte integrante do processo de assimilação dessas representações pelos estudantes, há a recognição das invariantes operatórias que também são introduzidas dentro do *software* computacional, durante a programação da atividade didática. Essencialmente, estes invariantes irão formar o que pode ser identificado como a parte automatizada do esquema (referente a uma representação específica), dentro da teoria de Campos Conceituais.

Dessa forma, concluímos que o uso destes *softwares* em que múltiplas representações são utilizadas pode, seguramente, ser incentivado para uso em sala de aula.

Este trabalho deixa algumas questões em aberto que poderiam ajudar a estabelecer conclusões mais abrangentes em estudos futuros. Acredito que deveria ser estabelecido mais claramente o processo pelo qual o estudante constrói seu conhecimento a partir do uso de múltiplas representações, para que dessa forma, conhecendo este processo possamos estabelecer estratégias de ensino e práticas metodológicas adequadas no ensino de derivada. As respostas dessas questões permitem impedir que os vícios e concepções alternativas dos estudantes, implícitos neste processo de conceitualização da derivada sejam reforçadas através de atividades de simulação computacional. Assim possuindo clareza na forma com a qual os estudantes constroem seu conhecimento, os educadores serão capazes de garantir que a simulação não represente uma ferramenta de ensino detrimental e sim uma aliada, uma vez que será aplicada de forma adequada.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS


ANTON, H. (Trad). Cyro de Carvalho Patarra e Márcia Tamanaha. **Cálculo: um novo horizonte**. 6. ed. v. 1. Porto Alegre: Bookman, 2000.

ARAUJO, Ives S. Atividades de modelagem computacional no auxílio à interpretação de gráficos da Cinemática. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 26, n. 2, p. 179-184, 2004. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S0102-7442004000200013&script=sci_arttext>.

___. **Simulação e modelagem computacionais como recursos auxiliares no ensino de Física geral.** Tese (Doutorado em Ciências) - Instituto de Física. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2005.

___; VEIT, Eliane A. Modelagem Computacional no Ensino de Física. In: Anais do XXIII Encontro de Físicos do Norte e Nordeste, Maceió, Alagoas, 2005. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/cref/ntef/producao/modelagem_computacional_Maceio.pdf>.

___; MOREIRA, Marco A.. **Um estudo sobre o desempenho de alunos de Física usuários da ferramenta computacional *Modellus* na interpretação de gráficos da cinemática.** Dissertação (Mestrado em Física). Porto Alegre: Instituto de Física da UFRGS - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2002.

BALEN, Osvaldo; NETZ, Paulo Augusto. Aplicação da modelagem e simulação no ensino de modelos de sistemas gasosos. **Acta scientiae**, Canoas, RS, v. 7, n. 2, p. 29-39, 2005.

___. Utilizando a modelagem e a simulação computacional no estudo do comportamento dos gases. In: **Anais do XVI Simpósio Nacional de Ensino de Física**, Rio de Janeiro: CEFET, 2005. Disponível em: <http://www.sbf1.sbfisica.org.br/eventos/snef/xvi/cd/resumos/T0506-1.pdf>.

BARAIS, A. W.; VERGNAUD, G. Students´conceptions in physics and mathematics: biases and helps. In: CAVERNI, J. P.; FABRE, J. M. CONZALEZ, M. (Eds.). **Cognitive bisaes.** North Holland: Elsevier Science Publishers, 1999, p. 69-84.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. São Paulo: Contexto, 2002.

BODGAN, R.; BIKLEN, S. **Qualitative research for education: An introduction to theory and methods.** Boston: Allyn and Bacon, Inc, 1982.

BROUSSEAU, G. Fondements et méthodes de la Didactique des Mathématiques. In: BRUN, J. *et al*. **Didactique des Mathématiques**. Paris: Delachaux et Niestlé S. A, 1996.

___. **Problemes de Didatique des Decimaux.** Recherches em Didactique dês Mathematiques. v. 2, n. 3, p. 38-128, 1981.

CARSON, S. **Modelling and Models in Advancing Physics**. Workshop at the ASE Meeting, Leeds, UK. jan. 2000.

COSTA, Patrícia Oliveira; JÚNIOR, Arlindo José de Souza. Mídia e Informática no Ensino de Cálculo. In: **Anais do XXX Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional**, Florianópolis, Santa Catarina, 2007. Disponível em: <http://www.sbmac.org.br/eventos/cnmac/xxx_cnmac/PDF/531.pdf>.

COSTA, Macário *et al*. Aplicação de *Softwares* para Educação Matemática numa turma de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ. In: **Anais do 1º Simpósio Sul-Brasileiro de Matemática e Informática**, Curitiba, 2002. Disponível em: <http://www.uniandrade.br/simposio/pdf/mat111.pdf>.

D'ESPOSITO, M. *et al*. Functional MRI studies of spatial and nonspatial working memory. **Cognitive Brain Research**, v. 7, n. 1, p. 1-13, jul. 1998.

DALL'ANESE, Cláudio. **Conceito de Derivada: uma proposta para seu ensino e aprendizagem**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo: PUC-SP, 2000.

DORNELES, Pedro F. T.; ARAÚJO, Ives S.; VEIT, Eliane A. Simulação e modelagem computacionais no auxílio à aprendizagem significativa de conceitos básicos de eletricidade: parte I - circuitos elétricos simples. **Revista Brasileira de Ensino de Física,** v. 28, n. 4, p. 487-496, 2006. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/rbef/v28n4/a11v28n4.pdf>.

ESCUDERO, C.; MOREIRA, M. A.; CABALLERO, M. C. Teoremas-en-acción y conceptos-en-acción en clases de física introductoria en secundaria**. Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciências.** v. 2, n. 3, 2003.

ESQUEMBRE, F. Computers in Physics Education. **Computer physics communications**. v. 147, p. 13-18, 2002.

FERRACIOLI, Laércio; VICTOR, Rodolfo. A Utilização da Modelagem Computacional no Laboratório de Física Básica. In: **Anais do Encontro de Pesquisa em Ensino de Física**, São Paulo: EPEF, 2002. Disponível em: <http://www.sbf1.sbfisica.org.br/eventos/epef/viii/trabalhos/autores_L.htm>.

FRANCHI, A. Considerações sobre a teoria dos campos conceituais. In: ALCÂNTARA MACHADO, S. D. *et al*. **Educação Matemática: uma introdução.** São Paulo. EDUC, 1999, p. 155-195.

GIRALDO, V.; CARVALHO, L. M.. Magnificação e Linearidade Local: Novas Tecnologias no Ensino de Conceito de Derivada. **Tendências em Matemática Aplicada e Computacional**, v. 3, n. 2, p. 101-110, 2002a.

___. Funções e Novas Tecnologias. **Tendências em Matemática Aplicada e Computacional**, v. 3, n. 1, p. 111-119, 2002b.

GRAVINA, Maria Alice. **Informática nas diferentes áreas curriculares: Ensino de Matemática**. Disponível em: <http://www.niee.ufrgs.br/cursos/topicos-ie/malice/caract.htm>.

___; SANTAROSA, L. M. A Aprendizagem da Matemática em Ambientes Informatizados.In: **IV Congresso RIBIE**, Brasilia 1998. Disponível em: <http://penta.ufrgs.br/edu/telelab/mundo_mat/tecmat/artigos/a1.pdf>.

GUIMARAES, Oswaldo Luiz Cobra. **Cálculo Diferencial e Integral, uma Mudança de Foco: do algebrismo às representações múltiplas através de ambientes informatizados**. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção). Santa Catariana: UFSC - Universidade Federal de Santa Catarina, 2002.

HAETINGER, Claus; MARIANI, Mateus. Uma abordagem diferenciada no ensino de funções. In: **Anais do IX Encontro Gaúcho de Educação Matemática**, Caxias do Sul: UCS, 2006. Disponível em: <http://ccet.ucs.br/eventos/outros/egem/relatos/re35.pdf>.

JOHNSON-LAIRD, P. N. Imagery, visualization, and thinking. In: J. Hochberg (Ed.), **Perception and cognition ar century end**. San Diego, CA: Academuc Press, 1998, p. 441-467.

LARKIN, J.; SIMON, H. A. Why a diagram is (sometimes) worth ten thousand words. **Cognitive Science: A Multidisciplinary Journal**, v. 11, n. 1, p. 65-100, jan-mar, 1987.

MATTAR, F. N. **Pesquisa de marketing: metodologia, planejamento**. São Paulo: Atlas, 1996.

MILANI, Raquel. **Concepções Infinitesimais em um Curso de Cálculo**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: UNESP - Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, 2002.

MOREIRA, M. A. **A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área.** Porto Alegre: Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2004.

___. A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área. **Investigações em Ensino de Ciências**. v. 7, n. 1, mar. 2002. Porto Alegre: Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil.

___. **Teorias da Aprendizagem**. São Paulo: EDU, 1999.

___. Pesquisa básica em educação em ciências: uma visão pessoal. In: **I Congresso Ibero-Americano de Educação em Ciências Experimentais**, La Serena, Chile, 1998.

OESTERMEIER, U.; HESSE, F. W. Verbal and visual causal arguments. **Cognition,** v. 75, n. 1, p. 65-104, apr. 2000.

PATTISON, P.; GRIEVE, N. Do spatial skills contribute to sex differences in different types of mathematical problems? **Journal of Educational Psychology**, v. 76, n. 4, p. 678-89, aug. 1984.

PRIBYL, J. R.; BODNER, G. M. Spatial ability and is role in organic chemistry: A study of four organic course. **Journal of Research in Science Teaching**, v. 24, n. 3, p. 229-240, mar. 1987.

RIBEIRO, Yuri Hamayano Lopes; JESUS, José Carlos Oliveira de; ALVES, Álvaro Santos. Utilização do *Modellus* na Construção de Conceitos Físicos. In: **Anais do XVI Simpósio Nacional de Ensino de Física**, Rio de Janeiro: CEFET-RJ, 2005. Disponível em: <http://www.sbf1.sbfisica.org.br/eventos/snef/xvi/cd/resumos/T0089-1.pdf>.

RICHIT, Adriana; TOMKELSKI, Mauri Luís. Investigando Conceitos Matemáticos por meio de Situações Físicas com o *Software Modellus*. In: Encontro Gaúcho de Educação Matemática - EGEM, Caxias do Sul, RS. Anais do IX EGEM. Caxias do Sul: UCS, 2006. v. 1. p. 1-6. Disponível em: <http://ccet.ucs.br/ eventos/outros/egem/minicursos/mc52.pdf>. Acesso em: 28 mai. 2008.

SANTOS, Gustavo H.; ALVES, Lynn; MORET, Marcelo A. ***Modellus***: **Animações Interativas mediando a Aprendizagem Significativa dos Conceitos de Física no Ensino Médio**. 2006. Disponível em: <http://www.ensino.eb.br/docs_pdf/artigo_animacoes_fisica.pdf>.

SCHEFFER, Nilce Fátima. Modelagem matemática: uma alternativa para resolver problemas a partir de dados da realidade na 3ª série do 1º grau. **Perspectiva,** Erexim, v. 14, n. 47, p. 53-81, jul./set. 1990.

TALL, D.; VINNER, S. Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Contunity. **Educational Studies in Mathematics**, n. 12, p. 151-169, 1981.

TEODORO, V. D.. Modelação Computacional em Ciências e Matemática. **Informática Educativa**, Colômbia: Uniandes-Lidie, v. 10, n. 2, p. 171-182, 1997. Disponível em: <http://www.colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/articles-112586_archivo.pdf>.

___. ***Modellus***: **Learning Physics With Mathematical Modelling**. Tese (Doutorado em Ciências da Educação). Lisboa: Faculdade de Ciências e Tecnologia - Universidade Nova de Lisboa, 2002. Disponível em: <http://www.google.com.br/search?hl=pt-BR&q=%22MODELLUS%3A+LEARNING+ PHYSICS+WITH+MATHEMATICAL+MODELLING%22&meta=>.

TUCKER, A. C.; LEITZEL, J. R. C. (Eds). **Assessing Calculus Reform Efforts: A Report to the Community, Mathematical Association of America**. Washington, DC, 1995.

VARGAS, Dênis Emanuel da Costa; SILVA, Natalia Moura Proença da. O ensino do conceito de derivada através do *software winplot*: um estudo de caso no CEFET Rio Pomba. In: **I Seminário Nacional de Educação Profissional e Tecnológica**, Belo Horizonte - Minas Gerais. Anais *on-line*. Minas Gerais: SENEPT, 2008. Disponível em: <http://www.senept.cefetmg.br/galerias/Arquivos_senept/anais/terca_tema5/TerxaTema5Poster3.pdf>. Acesso em: 28 mai. 2008.

VEIT, E. A.; TEODORO, V. T. Modelagem no ensino/aprendizagem de física e os novos parâmetros curriculares nacionais para o ensino médio. **Revista Brasileira de Ensino de Física.** v. 24, n. 2, p.87-96, jun. 2002.

VERGNAUD, G. Quelques orientations théoriques et methodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 2, n. 2, p. 215-232, 1981.

___. A clasification of cognitive tasks and operations of thought envolved in addition subtraction problems. In: CARPENTER, T.; MOSER, J.; ROMBERG, T. **Addition and subtraction. A cognitive perspective.** Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum, 1982.

___. Multiplicative conceptual field: what and why? In: Guershon, H. and Confrey, J. (Eds.) **The development of multiplicative reasoning in learning of mathematics.** Albany, N.Y.: State Universty of New York Press, 1994. p. 41-59.

___. Évolution du travail et formation des compétences. In: **Le Monde**, 20 dec. 1995.

___. A comprehensive theory of representation for mathematics education. **Journal of Mathematical Behavioral**, v. 17, n. 2, p. 167-181, 1998.

___. A trama dos campos conceituais na construção dos conhecimentos. **Revista do GEMPA,** Porto Alegre, n. 4, p. 9-19, 1996b.

___. **Algunas ideas fundamentales de Piaget en torno a la didáctica. Perspectivas**. v. 26, n. 10, p. 195-207, 1996c.

___. G. Évolution du travail et formation des compétences. In: **Le Monde**, 20 dec. 1995.

___. Multiplicative conceptual field: what and why? In: Guershon, H. and Confrey, J. (Eds.) **The development of multiplicative reasoning in learning of mathematics.** Albany, N.Y.: State Universty of New York Press, 1994, p. 41-59.

___. **El nino, las matemáticas y la realidad: Problemas de la ensenanza de las matemáticas en la escuela primaria**. México: Trillas, 1991.

___ *et al*. Epistemology and psychology of mathematics education. In: NESHER, P.; KILPATRICK, J. (Eds.). **Mathematics and cognition: A research síntesis by Internacional Group for the Psychology of Mathematics Education.** Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

___. Multiplicative structures. In: HIEBERT, H.; BEHR, M. (Eds.). **Research Agenda In Mathematics Education. Number Concepts and Operations in the Middle Grades.** Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum, 1988.

___. Multiplicative sturctures. In: LESH, R.; LANDAU, M. (Eds.). **Acquisition of Mathematics Concepts and Processes.** New York: Academic Press inc., 1983b.

___. **Problem solving and concepts development in the learning of mathematics.** E.A.R.L.I. Second Meeting. Tübingen, 1987.

___. Quelques problèmes théoriques de la didactique a propos d´um exemple: les structures additives. **Atelier Internacional d´Eté: Récherche em Didactique de la Phyque.** La Londe les Maures, França, 26 de junho a 13 de julho de 1983a.

___. Teoria dos campos conceituais. In: NASSER, L. (Ed.). **Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática**. Rio de Janeiro, 1993, p. 1-26.

___. The nature of mathematics concepts. In: NUNES, T.; BRYANT, T. (Eds.). **Learning and teaching mathematics, an international perspective.** Hove (East Sussex), Psychology Press Ltd, 1997.

VICTOR, Rodolfo; FERRACIOLI, Laércio. A Utilização da Modelagem Computacional no Laboratório de Física Básica. In: **Anais do VIII Encontro de Pesquisa em Ensino de Física**, Águas de Lindóia, SP, 2002. Disponível em: <http://www.sbf1.sbfisica.org.br/eventos/epef/viii/PDFs/PA1_10.pdf >.

WU, H. K.; SHAH, P. Exploring visuospatial thinking in chemistry learning. **Science Education**, v. 88, n. 3, p. 465–492, may. 2004.

## APÊNDICE A.1

UNILASALLE
CENTRO UNIVERSITÁRIO LA SALLE

CIÊNCIAS CONTÁBEIS - MATEMÁTICA II **TESTE 2** Daniela C. M. Torresan

Nome:_______________________________________________

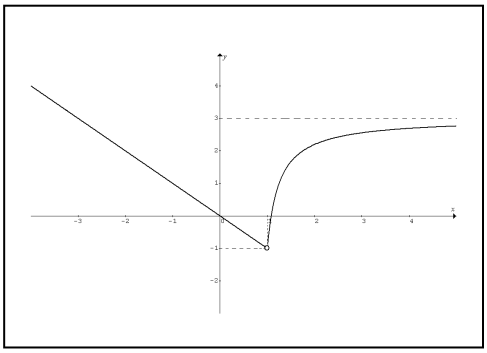
**Questão 1 (1,2 pontos)**

Observe o gráfico e responda:

$a) Dom f(x) =$ $b) \lim_{x \to 1^+} f(x) =$

$c) \lim_{x \to 1^-} f(x) =$ $d) \lim_{x \to 1} f(x) =$

$e) \lim_{x \to +\infty} f(x) =$ $f) \lim_{x \to -\infty} f(x) =$



**Questão 2 (0,8 ponto)**

Determine o coeficiente angular da reta tangente à função $f(x) = 3x - \frac{1}{2}x^3$ em $x = 2$. A reta é crescente ou decrescente?

**Questão 3 (1,6 pontos)**

Uma bola é solta de cima de um prédio de 100 m de altura. A distância da bola, em relação ao solo, t segundos após ela ser solta, é dada pela expressão $s(t) = 100 - 5t^2$.

a) (0,3) Qual a distância da bola, em relação ao chão, após 2 segundos de descida?
b) (0,5) Quanto tempo a bola leva, aproximadamente, para atingir o solo?
c) (0,5) Qual a velocidade inicial da bola?
d) (0,3) Qual a velocidade da bola no momento do impacto com o solo?

**Questão 4 (1,4 pontos)**

Uma bola move-se ao longo de uma reta horizontal, de acordo com a equação

$s(t) = 2t^3 - 4t^2 + 2t - 1$

a) Determine em que instantes a velocidade da bola é zero.
b) Determine o valor da aceleração nos instantes em que a velocidade é zero.

# APÊNDICE A.2

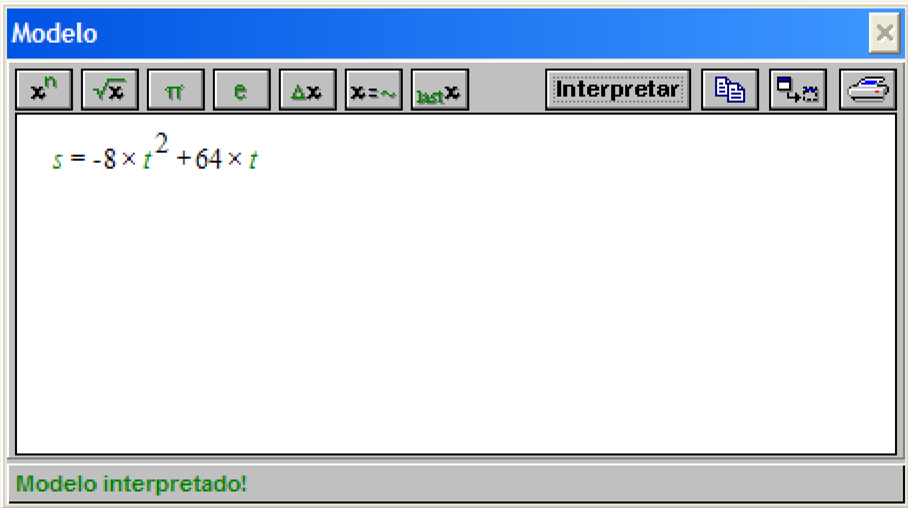
## ATIVIDADE REALIZADA COM AUXÍLIO DO SOFTWARE MODELLUS NA RESOLUÇÃO DE UMA SITUAÇÃO-PROBLEMA DE UMA APLICAÇÃO EM FÍSICA PARA ABORDAR O CONTEÚDO DE DERIVADA.

<u>Situação – problema</u>:

Uma bola é atirada verticalmente para cima a partir do chão, com uma velocidade inicial de 64m/s. Se o sentido positivo da distância do ponto de partida for para cima, a equação do movimento será $s = -8t^2 + 64t$. Seja *t* o número de segundos (s) decorridos desde que a bola foi atirada e *s* o número de metros (m) da distância pela bola a partir do ponto inicial em *t* s.

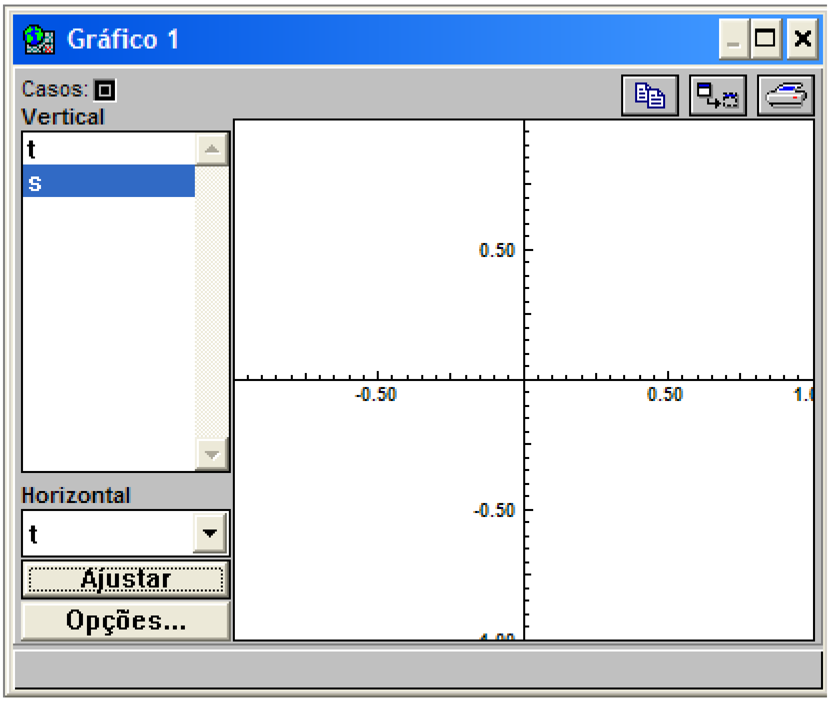
CONSTRUA A SIMULAÇÃO DA SITUAÇÃO-PROBLEMA, SEGUINDO OS PROCEDIMENTOS ABAIXO.

1) Na janela **Modelo** digite a equação do movimento da bola e clique no botão **Interpretar**;

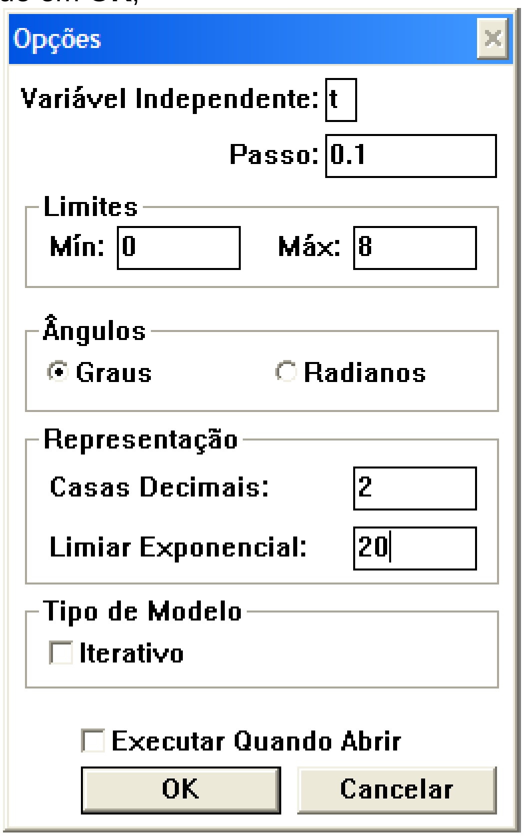


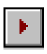

Observação: A multiplicação é feita por meio do símbolo * e para fazer a potência, clique no ícone .

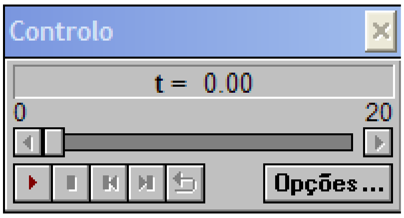
2) Na janela **Gráfico 01** selecione **s** para **vertical**, **t** para **horizontal** e clique no botão **Ajustar**;




3) Na janela **Controlo** selecione o ícone **Opções...**, preencha os campos conforme a figura abaixo e clique em **OK**;

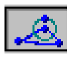


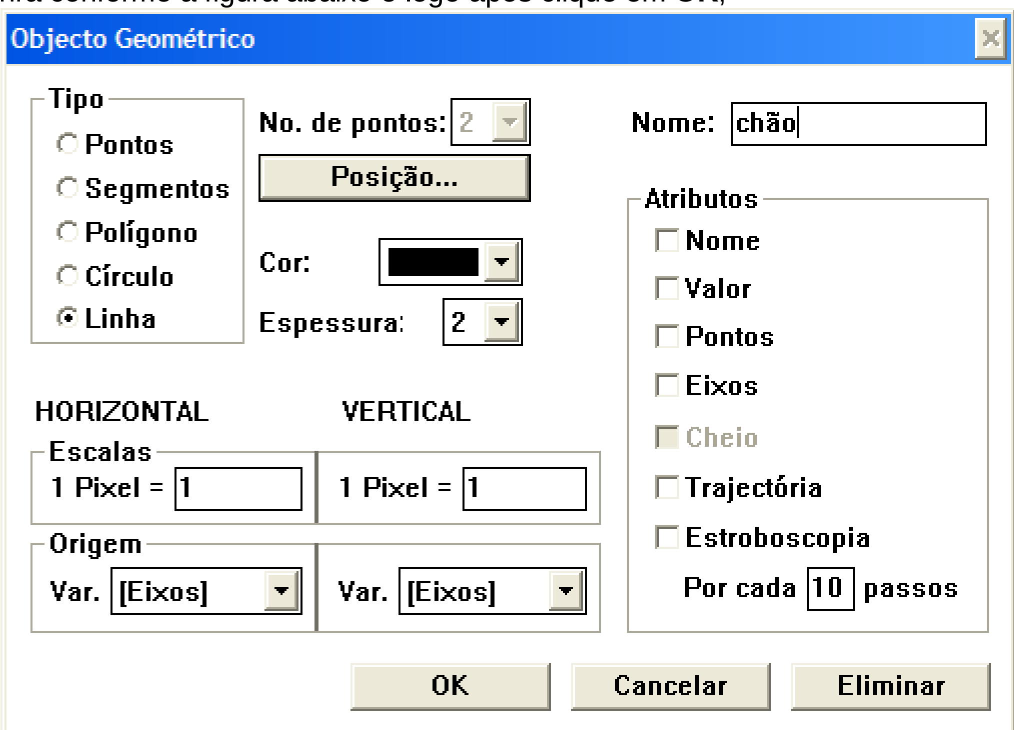

4) Ainda na janela **Controlo**, clique no botão  e visualize a construção do gráfico na janela **Gráfico 01**;

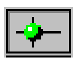


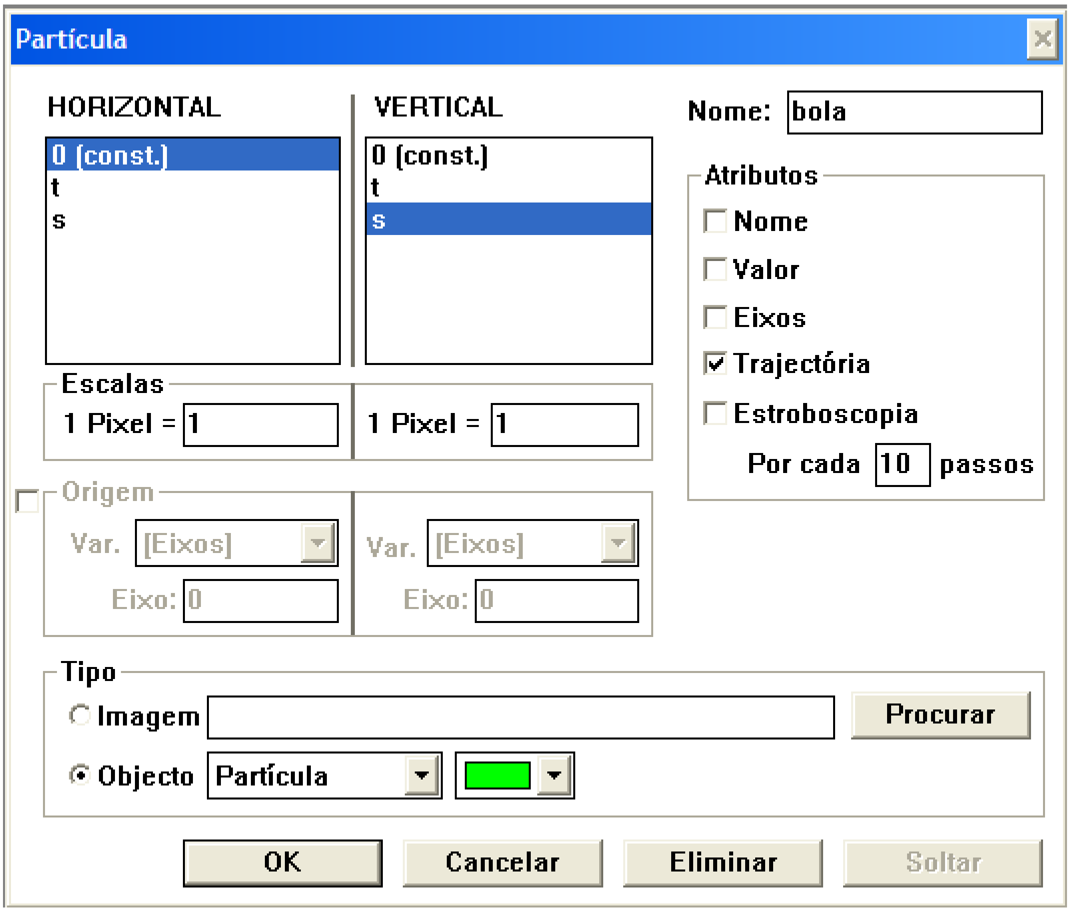

Responda:
**Questão 1: O que o gráfico dessa função mostra a cada instante?**

5) Na janela **Animação 1**, construa a simulação da trajetória da bola, seguindo os passos abaixo:

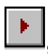
5.1) Construa uma reta para representar o chão. Para isso selecione o ícone  e clique no espaço branco dessa janela, em seguida, preencha os campos da janela que se abrirá conforme a figura abaixo e logo após clique em **OK**;




5.2) Crie a bola para a simulação da situação-problema, selecionando o ícone  e clique sobre a reta construída no item 5.1, em seguida, preencha os campos da janela que se abrirá conforme a figura abaixo e logo após clique em **OK**;




A animação construída a é a simulação do deslocamento da bola, da situação-problema em questão, quando atirada verticalmente para cima, a partir do chão.

6) Na janela **Controlo**, clique no botão , observe na janela **Animação 1** a simulação construída responda as seguintes questões:

**Questão 2: Identifique de quanto em quantos segundos ocorre a marcação na trajetória da bola nesta simulação.**

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

**Questão 3: Qual o deslocamento da bola durante cada segundo percorrido?**

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

**Questão 4: Qual a altura máxima atingida pela bola?**

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

**Questão 5: Quantos segundos a bola leva para atingir o seu ponto mais alto?**

**Questão 6: Decorridos quantos segundos a bola atinge o solo?**

**Questão 7: Qual a posição da bola no início e no final do movimento?**

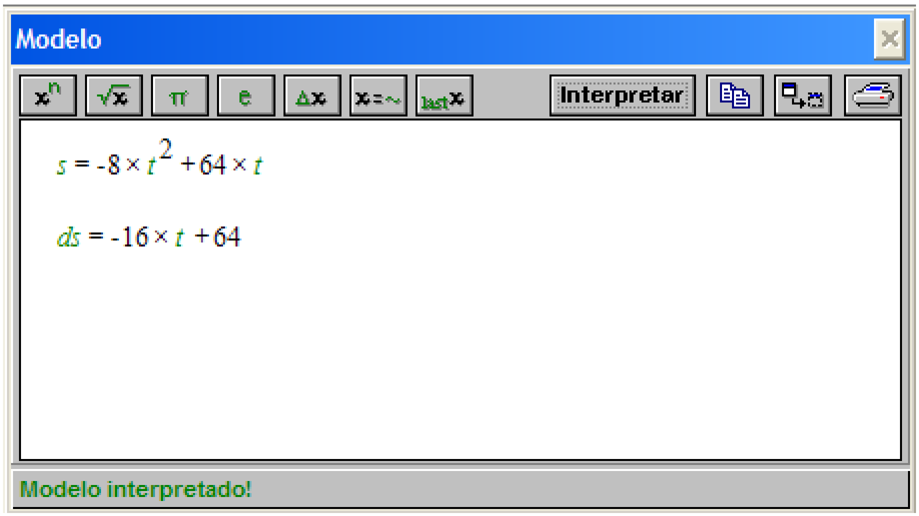
**Questão 8: O que se pode dizer a respeito da velocidade da bola ap longo da subida? Justifique sua resposta com base na animação.**

**Questão 9: O que se pode dizer a respeito da velocidade da bola ap longo da descida? Justifique sua resposta com base na animação.**

**Questão 10: Qual a velocidade da bola quando ela atinge seu ponto mais alto? Justifique sua resposta com base na animação.**

**Questão 11: Qual a velocidade da bola no início do movimento? E no final? Justifique sua resposta com base na animação.**

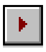
7) Na janela **Modelo** digite a equação $ds = -16t + 64$, conforme figura abaixo, a qual representa a derivada da função que expressa o movimento da bola e clique no botão **Interpretar**;




Obs. Posicione o mouse no final da 1ª equação e aperte “Enter” para iniciar a digitação da 2ª equação.

8) No menu **Janela** selecione **Nova Tabela** e marque as variáveis **t** e **ds**. Arraste a janela **Tabela 1**, pela barra horizontal azul, posicionando-a abaixo da janela **Gráfico 01**;

9) Na janela **Gráfico 01** selecione **s** e **ds** para **Vertical** e **t** para **Horizontal**.

10) Clique no botão  da janela **Controlo**, observe a construção dos gráficos e da tabela e responda as questões abaixo:

**Questão 12: O que representa os valores de s em 0s e 8s?**

**Questão 13: O que representa os valores de ds em 0s e 8s?**

**Questão 14: O que acontece com os valores de ds, em módulo, nos 4 primeiros segundos de movimento?**

**Questão 15: O que acontece com os valores de ds, em módulo, nos 4 últimos segundos de movimento?**

________________________________________________________________________________

________________________________________________________________________________

________________________________________________________________________________

**Questão 16: O que acontece com o valor de ds quando *t* é igual a 4 segundos?**

________________________________________________________________________________

________________________________________________________________________________

________________________________________________________________________________

**Questão 17: O que acontece com o valor de ds quando *t* é igual a 8 segundos?**

________________________________________________________________________________

________________________________________________________________________________

________________________________________________________________________________

**Questão 18: Qual o valor da velocidade instantânea da bola em 3s? E em 5s?**

________________________________________________________________________________

________________________________________________________________________________

________________________________________________________________________________

**Questão 19: Qual a relação que se pode fazer entre a velocidade da bola e o instante que ela atinge seu ponto mais alto?**

________________________________________________________________________________

________________________________________________________________________________

________________________________________________________________________________

**Questão 20: Qual a relação que se pode fazer entre a velocidade da bola e nos instantes inicial e final do movimento?**

________________________________________________________________________________

________________________________________________________________________________

________________________________________________________________________________

## APÊNDICE A.3

**UNILASALLE**
**CENTRO UNIVERSITÁRIO LA SALLE**

CIÊNCIAS CONTÁBEIS - MATEMÁTICA II **RECUPERAÇÃO TESTE 2** Daniela C. M. Torresan

Nome:_______________________________________________

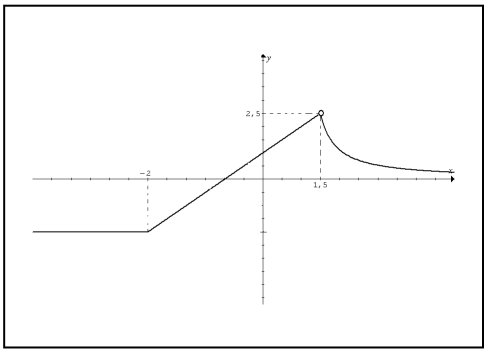
**Questão 1 (1,2 pontos)**

Observe o gráfico e responda:

$a) Dom f(x) =$ $\qquad$ $b) \lim_{x \to 1^+} f(x) =$

$c) \lim_{x \to 1^-} f(x) =$ $\qquad$ $d) \lim_{x \to 1} f(x) =$

$e) \lim_{x \to +\infty} f(x) =$ $\qquad$ $f) \lim_{x \to -\infty} f(x) =$




**Questão 2 (0,8 ponto)**

Determine o coeficiente angular da reta tangente à função $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2$ em *x* = 1. A reta é crescente ou decrescente?

**Questão 3 (1,8 pontos)**

Uma bola é atirada verticalmente para cima a partir do chão, com uma velocidade inicial de 24 m/s. Se o sentido positivo da distância do ponto de partida for para cima, a equação do movimento será $s = -2t^2 + 24t$ . Seja *t* o número de segundos (s) decorridos desde que a bola foi atirada e *s* o número de metros (m) da distância percorrida pela bola a partir do ponto inicial em *t* s.

a) Qual a velocidade instantânea da bola ao fim de 3s? A bola está subindo ou descendo?
b) Qual a velocidade instantânea da bola ao fim de 5s? A bola está subindo ou descendo?
c) Quantos segundos a bola leva para atingir seu ponto mais alto?
d) Qual a altura máxima atingida pela bola?

e) Decorridos quantos segundos a bola atinge o solo?

f) Qual a velocidade instantânea da bola quando ela chega ao chão?

**Questão 4 (1,2 pontos)**

Uma bola move-se ao longo de uma reta horizontal, de acordo com a equação

$s(t) = 2t^3 - 6t^2 - 18t + 8$

c) Determine em que instantes a velocidade da bola é zero.

d) Determine o valor da aceleração nos instantes em que a velocidade é zero.

**APÊNDICE B.1**

**UNILASALLE**
**CENTRO UNIVERSITÁRIO LA SALLE**

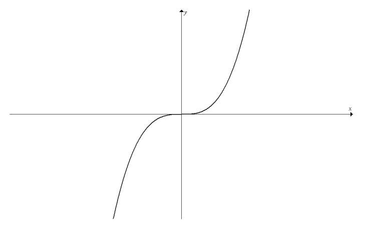
Ciências Contábeis - Matemática II **Teste 2** Daniela C. M. Torresan

Nome:______________________________________________

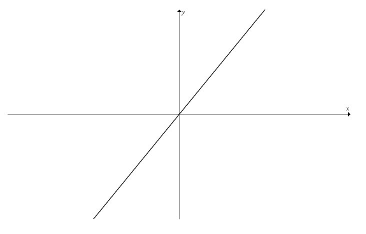
**Questão 1 (1,0 ponto)**
A reta tangente à função $f(x) = 2x - x^3$ no ponto P(-2, *f* (-2)) é crescente ou decrescente?

**Questão 2 (1,0 ponto)**
Esboce o gráfico de uma função *f* para a qual *f(1) = 2, f ´(1) = 0, f ´(x) > 0* se *x<1* e *f ´(x) < 0* ou *x >1.*

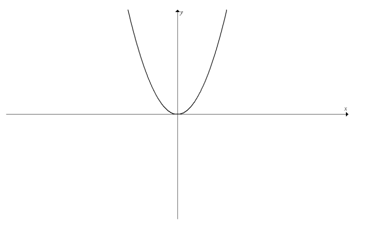
**Questão 3 (1,0 ponto)**
Associe a função representada graficamente com o gráfico (a) ou (b) de sua respectiva função derivada.



*y = f(x)*



(a)



(b)

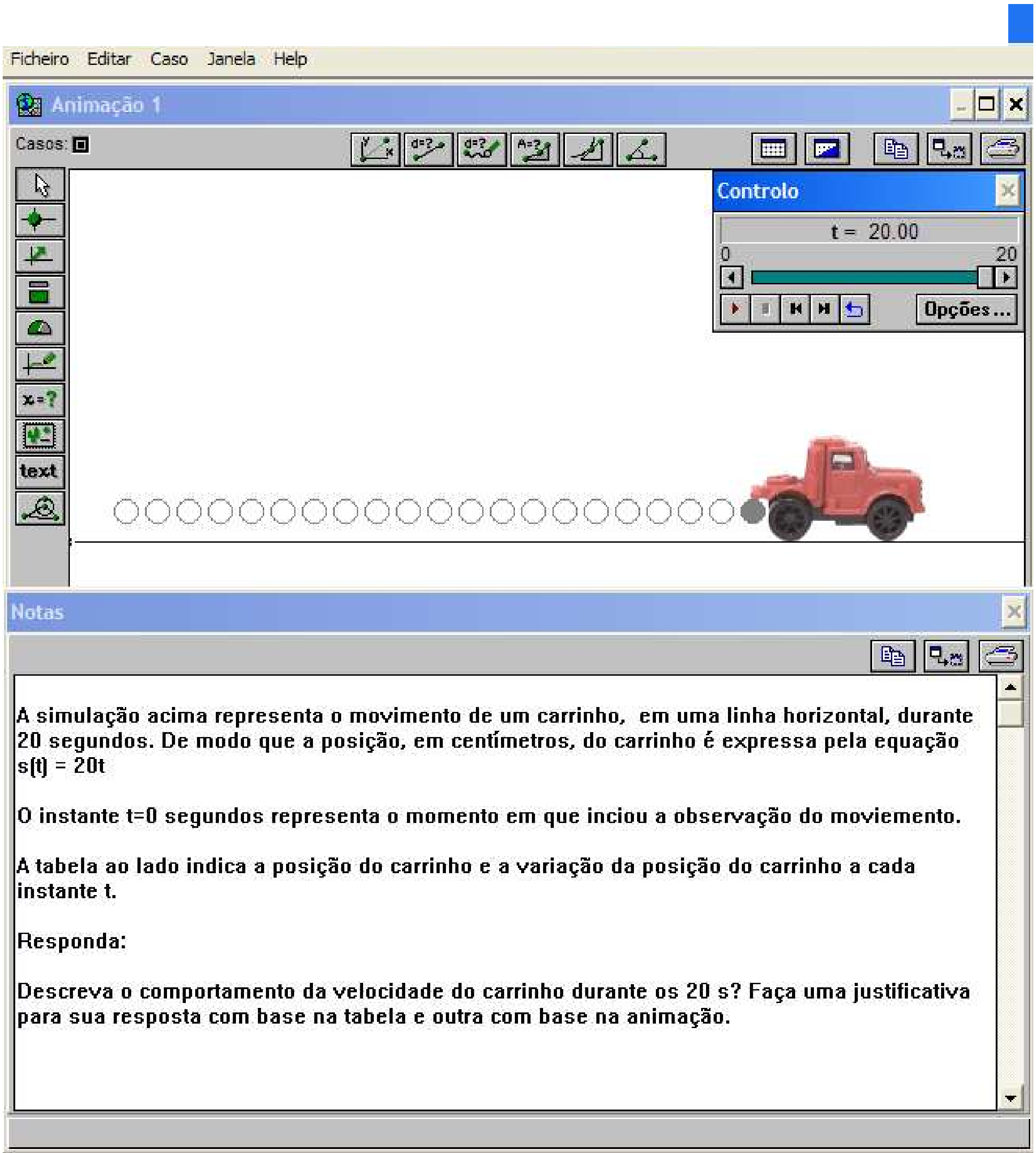
**Questão 4 (1,0 ponto)**
Duas partículas movem-se ao longo de uma reta horizontal, de acordo com as equações $s_1 = t^4 - 4t^3 + 2t^2 - 12t$ e $s_2 = -2t^5 + 15t^4 - 90t$, onde *s* representa a posição da partícula e é medida em metros e *t,* o tempo, em segundos.

a) Qual o valor da derivada de $s_1$ e $s_2$ em *t* = 3s?
b) Quais das partículas têm maior velocidade (instantânea) entre os instantes *t* = 3s e *t* = 4s?

**Questão 5 (1,0 ponto)**
Uma partícula move-se ao longo de uma reta horizontal, de acordo com a equação $s = 2t^3 - 3t^2 - 12t + 8$, onde *s* representa a posição da partícula e é medida em metros e *t,* o tempo, em segundos. Ache a velocidade instantânea, *v*(*t*) cm/s, da partícula em 3s.

# APÊNDICE B.2

## Atividade 1:



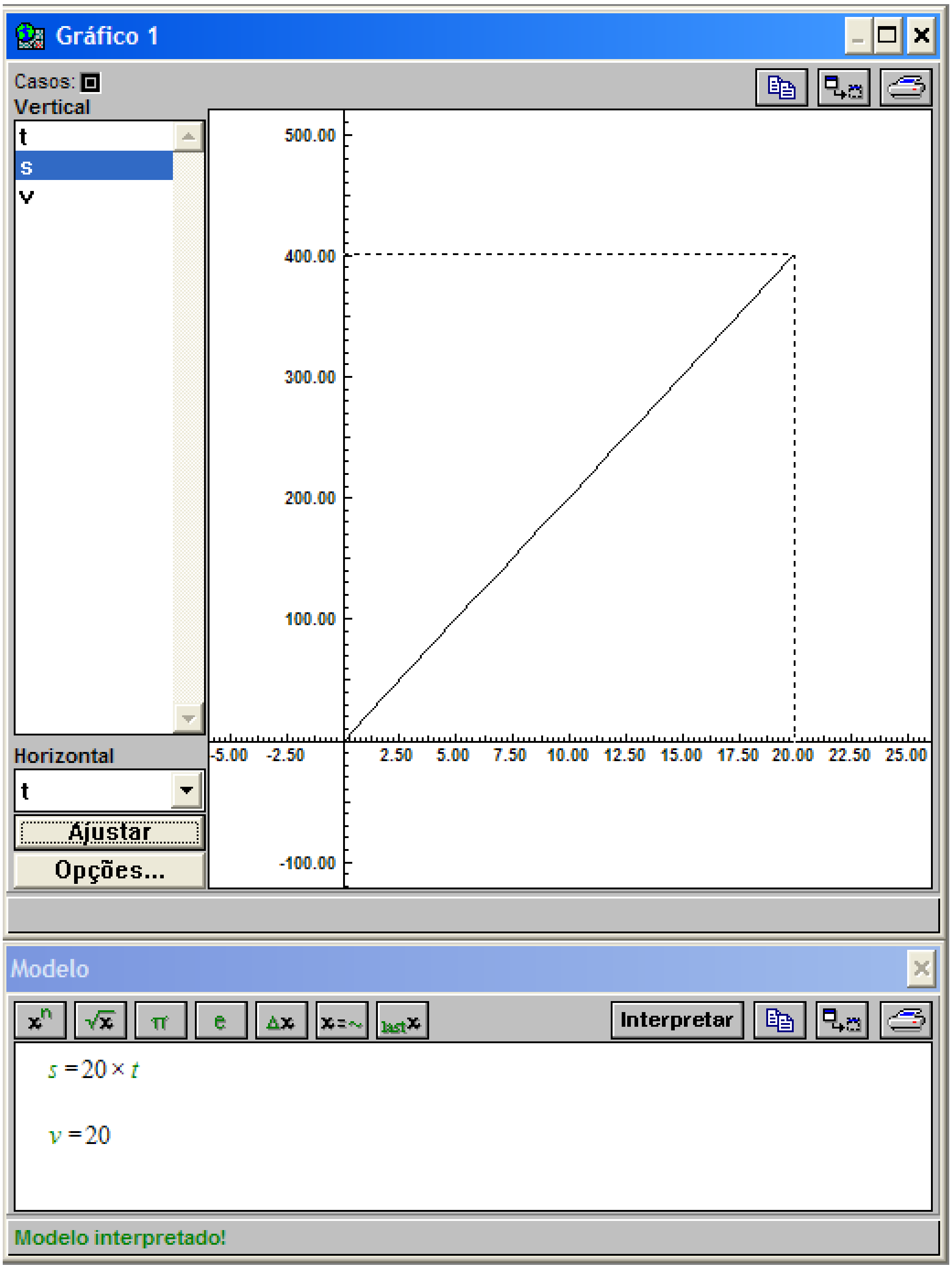
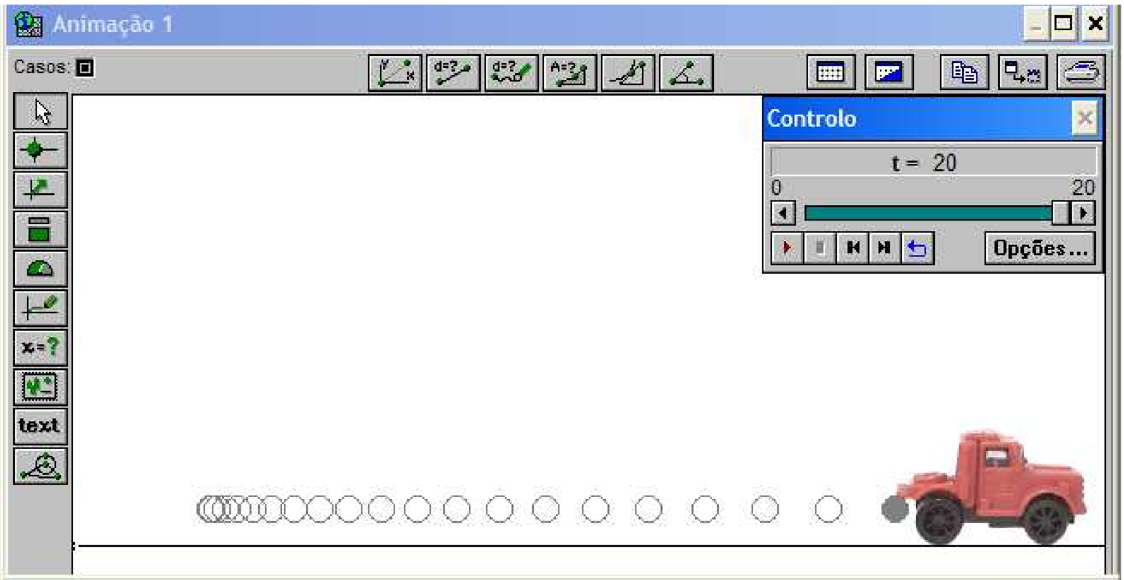


Gráfico 1
Casos:
Vertical
t
s
v
500.00
400.00
300.00
200.00
100.00
-100.00
-5.00 -2.50 2.50 5.00 7.50 10.00 12.50 15.00 17.50 20.00 22.50 25.00
Horizontal
t
Ajustar
Opções...
Modelo
Interpretar
s = 20 × t
v = 20
Modelo interpretado!

## Atividade 2:




A simulação acima representa o movimento de um carrinho, em uma linha horizontal, durante 20 segundos. De modo que a posição, em centímetros, do carrinho é expressa pela equação s(t) = t ^ 2

O instante t=0 segundos representa o momento em que inciou a observação do moviemento.

O gráfico ao lado indica a posição do carrinho, em centímetros, a cada instante t.

A tabela ao lado indica a posição do carrinho e a variação da posição do carrinho a cada instante t.

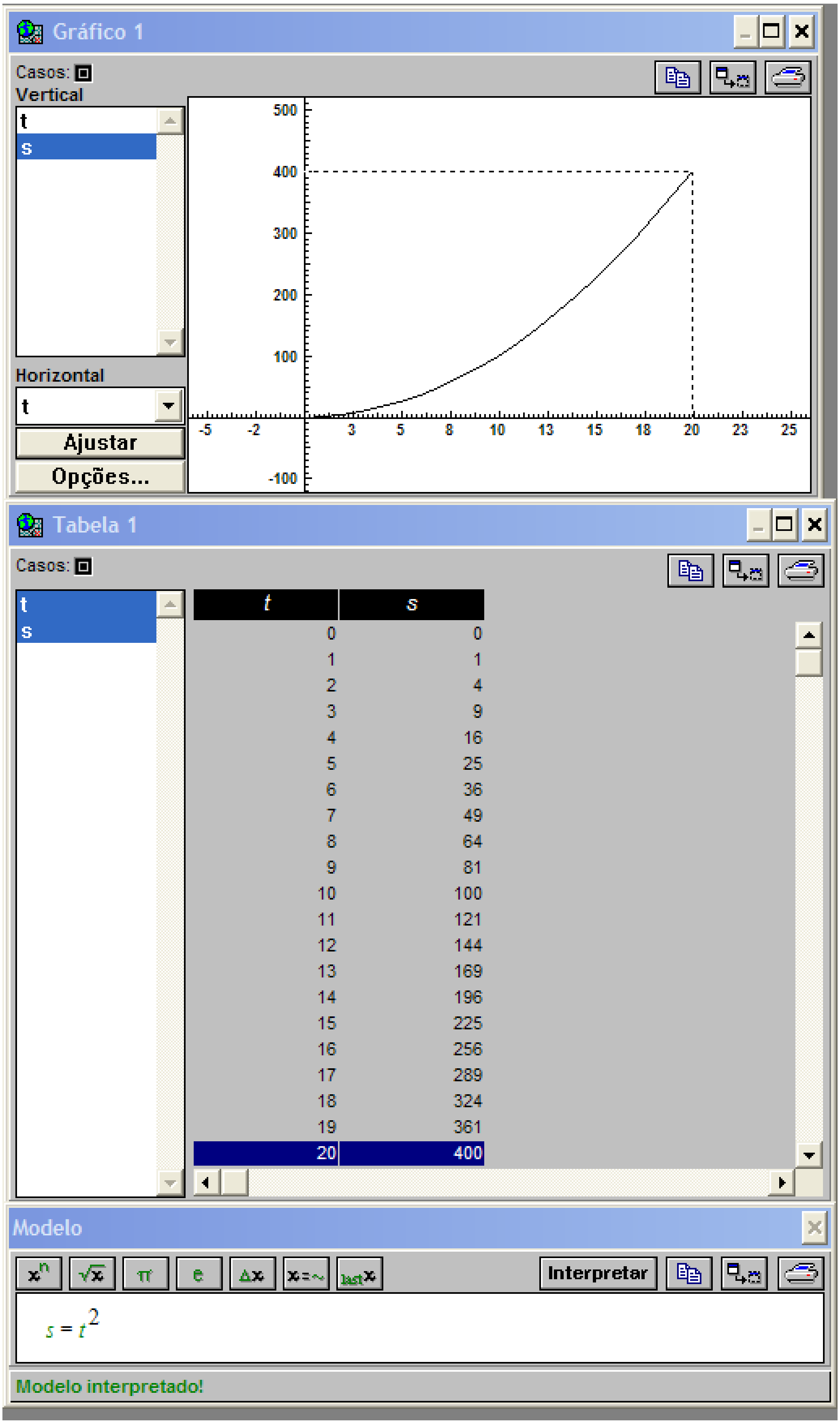
Responda:

a) Descreva a velocidade do carrinho durante o percurso? Faça 3 justificativas para sua resposta. A primeira tendo como base a animação, a segunda tendo como base a tabela e a última tendo como base a inclinação das retas tangentes ao gráfico.

b ) A partir da equação que representa o movimento do carrinho, encontre uma expressão que forneça a velocidade do carrinho a cada instante.

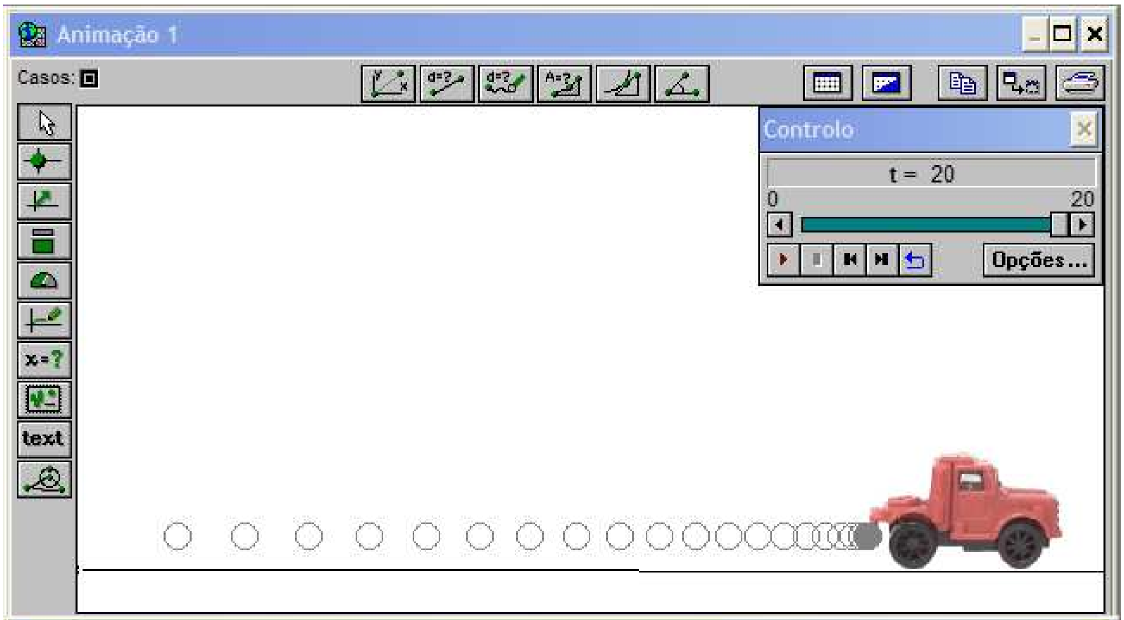
c) Em que instante a velocidade é mínima? Qual é esse valor? Faça 3 justificativas para sua resposta. A primeira tendo como base a animação, a segunda tendo como base a tabela e a última tendo como base o gráfico.

d) Em que instante a velocidade é máxima? Qual é esse valor? Faça 3 justificativas para sua resposta. A primeira tendo como base a animação, a segunda tendo como base a tabela e a última tendo como base o gráfico.




| $t$ | $s$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 2 | 4 |
| 3 | 9 |
| 4 | 16 |
| 5 | 25 |
| 6 | 36 |
| 7 | 49 |
| 8 | 64 |
| 9 | 81 |
| 10 | 100 |
| 11 | 121 |
| 12 | 144 |
| 13 | 169 |
| 14 | 196 |
| 15 | 225 |
| 16 | 256 |
| 17 | 289 |
| 18 | 324 |
| 19 | 361 |
| 20 | 400 |

## Atividade 3:




Notas

A simulação acima representa o movimento de um carrinho, de controle remoto, em uma linha horizontal, durante 20 segundos. De modo que a posição, em centímetros, do carrinho é expressa pela equação
s(t) = 40t - t ^ 2

O instante t=0 segundos representa o momento em que inciou a observação do moviemento.

O gráfico ao lado indica a posição do carrinho, em centímetros, a cada instante t.

A tabela ao lado indica a posição do carrinho e a variação da posição do carrinho a cada instante t.

Responda:
a) Descreva o comportamento da velocidade do carrinho durante o percurso? Faça 3 justificativas para sua resposta. A primeira tendo como base a animação, a segunda tendo como base a tabela e a última tendo como base a inclinação das retas tangentes ao gráfico.

b ) A partir da equação que representa o movimento do carrinho, encontre uma expressão que forneça a velocidade do carrinho a cada instante.

c) Em que instante a velocidade é mínima? Qual é esse valor? Faça 3 justificativas para sua resposta. A primeira tendo como base a animação, a segunda tendo como base a tabela e a última tendo como base o gráfico.

d) Em que instante a velocidade é máxima? Qual é esse valor? Faça 3 justificativas para sua resposta. A primeira tendo como base a animação, a segunda tendo como base a tabela e a última tendo como base o gráfico.

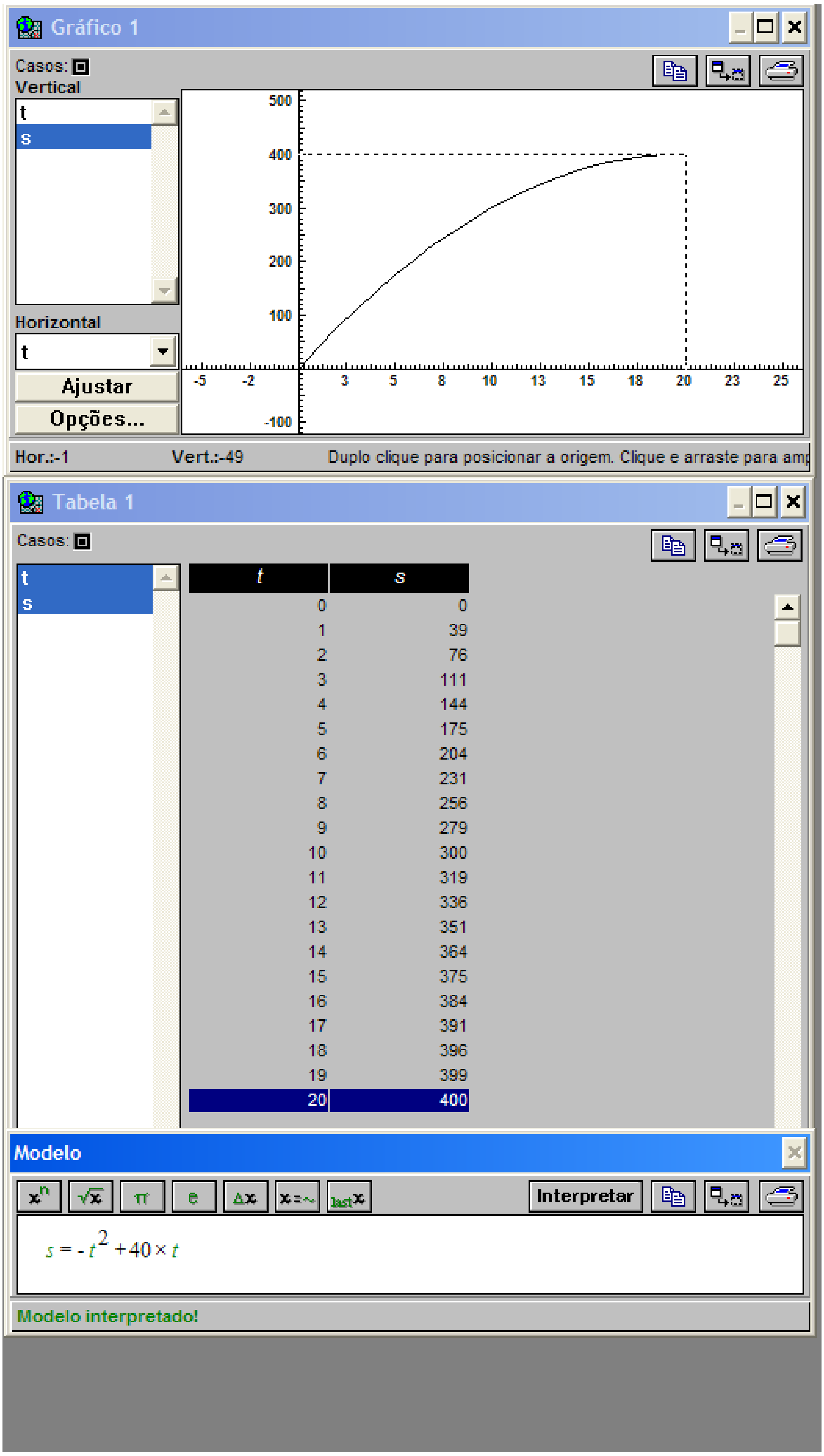
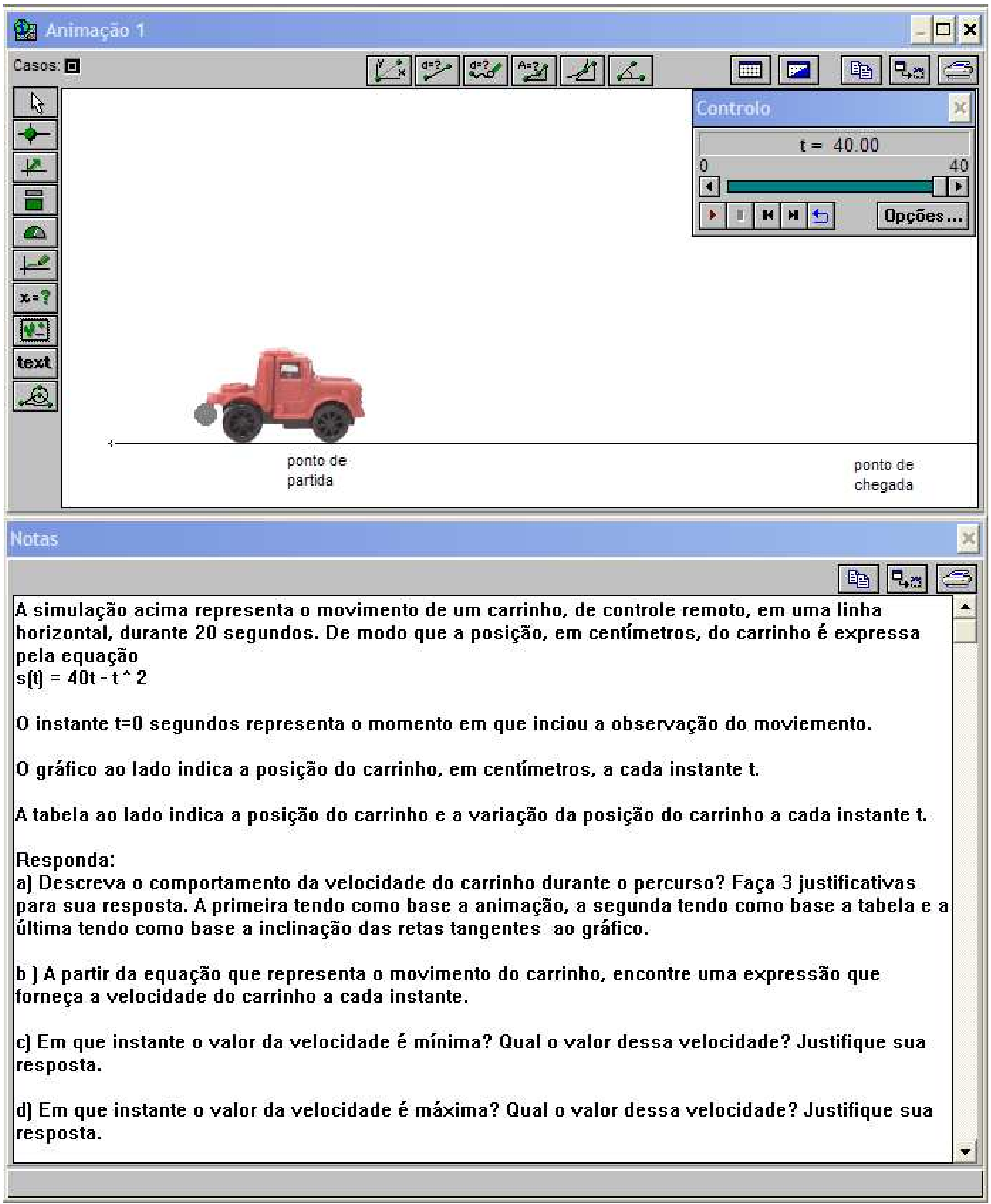


Gráfico 1
Casos:
Vertical
t
s
Horizontal
t
Ajustar
Opções...
500
400
300
200
100
-100
-5 -2 3 5 8 10 13 15 18 20 23 25
Hor.:-1
Vert.:-49
Duplo clique para posicionar a origem. Clique e arraste para amp
Tabela 1
Casos:
t
s
t s
0 0
1 39
2 76
3 111
4 144
5 175
6 204
7 231
8 256
9 279
10 300
11 319
12 336
13 351
14 364
15 375
16 384
17 391
18 396
19 399
20 400
Modelo
Interpretar
$s = -t^2 + 40 \times t$
Modelo interpretado!

## Atividade 4:


Animação 1
Casos:
text
Controlo
t = 40.00
0
40
Opções ...
ponto de partida
ponto de chegada
Notas
A simulação acima representa o movimento de um carrinho, de controle remoto, em uma linha horizontal, durante 20 segundos. De modo que a posição, em centímetros, do carrinho é expressa pela equação
s(t) = 40t - t ^ 2
O instante t=0 segundos representa o momento em que inciou a observação do moviemento.
O gráfico ao lado indica a posição do carrinho, em centímetros, a cada instante t.
A tabela ao lado indica a posição do carrinho e a variação da posição do carrinho a cada instante t.
Responda:
a) Descreva o comportamento da velocidade do carrinho durante o percurso? Faça 3 justificativas para sua resposta. A primeira tendo como base a animação, a segunda tendo como base a tabela e a última tendo como base a inclinação das retas tangentes ao gráfico.
b ) A partir da equação que representa o movimento do carrinho, encontre uma expressão que forneça a velocidade do carrinho a cada instante.
c) Em que instante o valor da velocidade é mínima? Qual o valor dessa velocidade? Justifique sua resposta.
d) Em que instante o valor da velocidade é máxima? Qual o valor dessa velocidade? Justifique sua resposta.

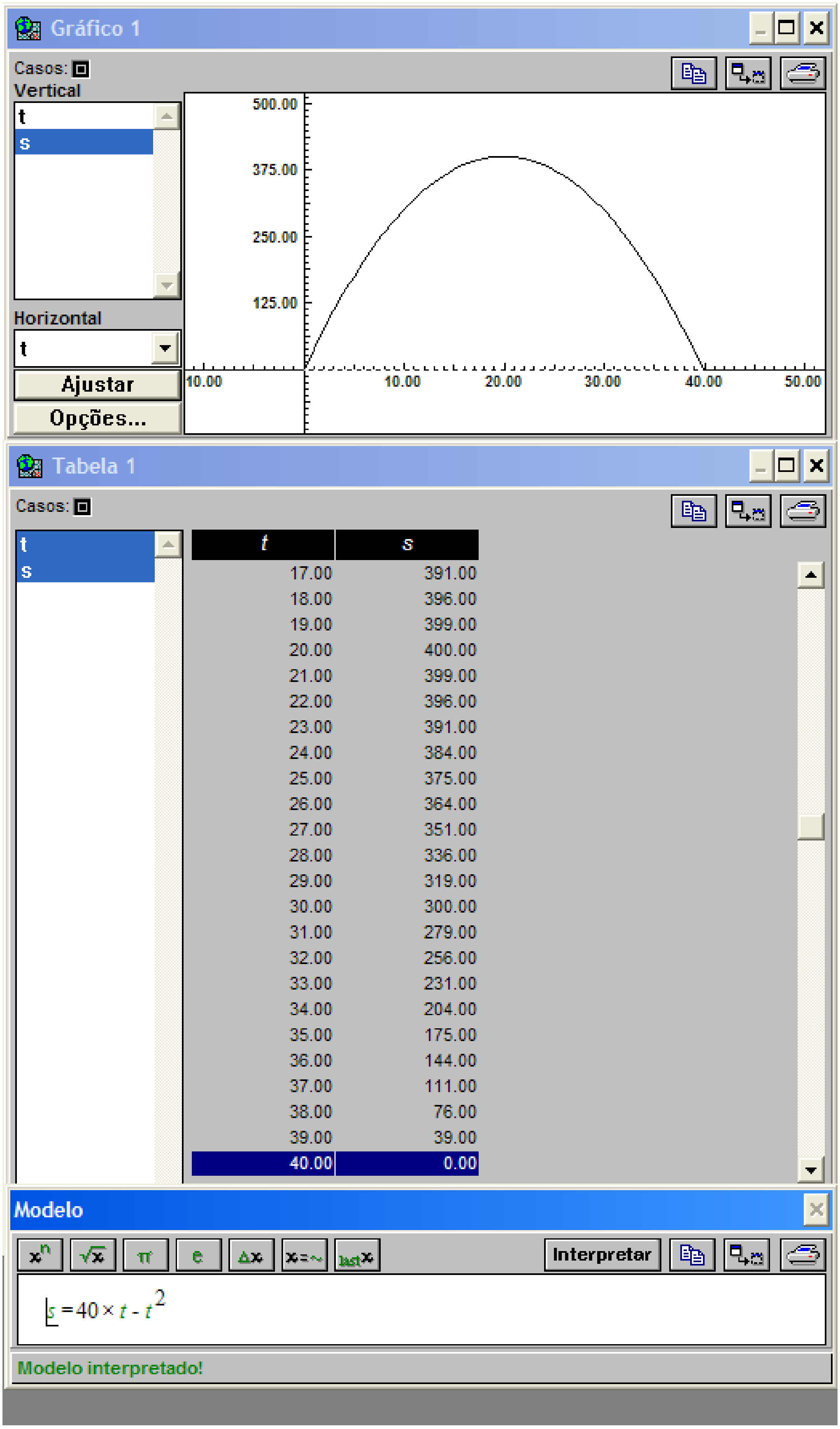


Gráfico 1
Casos:
Vertical
t
s
Horizontal
t
Ajustar
Opções...
500.00
375.00
250.00
125.00
10.00
10.00
20.00
30.00
40.00
50.00
Tabela 1
Casos:
t
s
t s
17.00 391.00
18.00 396.00
19.00 399.00
20.00 400.00
21.00 399.00
22.00 396.00
23.00 391.00
24.00 384.00
25.00 375.00
26.00 364.00
27.00 351.00
28.00 336.00
29.00 319.00
30.00 300.00
31.00 279.00
32.00 256.00
33.00 231.00
34.00 204.00
35.00 175.00
36.00 144.00
37.00 111.00
38.00 76.00
39.00 39.00
40.00 0.00
Modelo
Interpretar
$s = 40 \times t - t^2$
Modelo interpretado!

## APÊNDICE B.3

UNILASALLE
CENTRO UNIVERSITÁRIO LA SALLE

CIÊNCIAS CONTÁBEIS - MATEMÁTICA II **RECUPERAÇÃO TESTE 2** Daniela C. M. Torresan

Nome:_______________________________________________

**Questão 1 (1,0 ponto)**
Uma partícula move-se ao longo de uma reta horizontal, de acordo com a equação
$s = \frac{1}{3}t^3 - 8t^2 + 60t + 20$

a) Ache a velocidade instantânea, *v*(*t*) cm/s, da partícula em 4s.
b) Determine os intervalos de tempo em que a partícula move-se para direita, para esquerda e quando a partícula inverte o sentido do movimento.

**Questão 2 (1,0 ponto)**
Duas partículas A e B movem-se ao longo de uma reta horizontal. O movimento da partícula A é expresso de acordo com a equação $s_A = \frac{1}{3}t^3 - 4t^2 + 64t$ e o movimento da partícula B, de acordo com a equação $s_B = -\frac{1}{3}t^3 + 32t^2$, onde *s* representa a posição da partícula, é medido em metros e *t*, em segundos. Sabendo que a tabela ao lado mostra a posição das partículas nos primeiros oito segundos de movimento, descreva o comportamento da velocidade de cada uma das partículas nos primeiros oito segundos de movimento.

| t (*s*) | $s_A$ (*m*) | $s_B$ (*m*) |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 31,67 | 60,33 |
| 2 | 125,33 | 114,67 |
| 3 | 270,00 | 165,00 |
| 4 | 490,67 | 213,33 |
| 5 | 758,33 | 261,67 |
| 6 | 312,00 | 1080,00 |
| 7 | 366,33 | 1453,67 |
| 8 | 426,67 | 1877,33 |

**Questão 3 (1,0 ponto)**

Para quais valores de *x* a reta tangente à função $f(x) = 2x - x^2$ é crescente e decrescente?

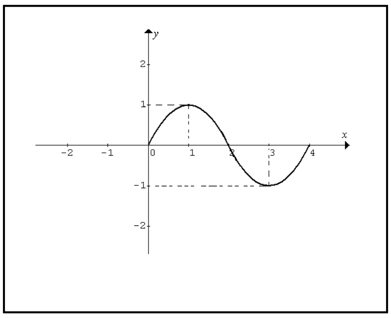
**Questão 4 (1,0 ponto)**

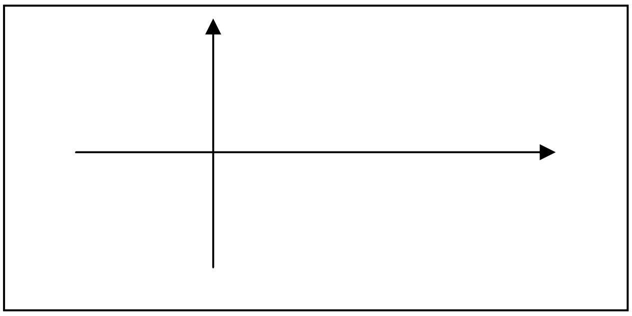
Esboce o gráfico de uma função *f* para a qual

$f(1) = -1,\ \ f'(1) = 0,\ \ \ f'(x) < 0 \ \text{ se } \ x < 1 \ \text{ e } \ f'(x) > 0 \ \text{ se } \ x > 1$

**Questão 5 (1,0 ponto)**

Esboce o gráfico da função derivada do gráfico abaixo.



Bom Trabalho!

# APÊNDICE C

## 1. Estudante D.A.:

**Professora:** A 1ª questão do teste 2 (pós-teste) era semelhante a qual do teste 1 (pré-teste)?
**D.A.:** Igual a 3?
**Professora:** Por quê? O que você fez na 3?
**D.A.:** Fiz primeiro a derivada.
**Professora:** Por que fez 1° a derivada?
**D.A.:** Pra achar a velocidade instantânea, certo? Fiz a 2° derivada também pra achar a aceleração. Certo? Só que faltou fazer a Bháskara da 1° derivada, aqui no teste 1.
**Professora:** Por quê? Precisava?
**D.A.:** Precisava. Pra achar os... Limites, é limites, né?
**Professora:** O tempo.
**D.A.:** Isso! O tempo de inversão que vai para direita, para esquerda e a posição de inversão.
**Professora:** Essa questão dois da tabela, o que você fez... Como é que você pensou para dizer se a velocidade está aumentando ou diminuindo, ou ela pára em 5?
**D.A.:** É assim. Olhando aqui, né? No caso, era a "*a",* ela foi aumentando a distância, que não era proporcional, a velocidade deveria aumentar também em um certo grau, né?
**Professora:** Então você está trabalhando com a diferença?
**D.A.:** De espaço percorrido.
**Professora:** Tá.
**Esvocêdante_1:** Aí o que aconteceu depois, como do espaço 5 até o 6 segundos ele diminui o espaço percorrido aqui; então quer dizer o seguinte, que teve uma diminuição da velocidade. A velocidade diminui e aí ele só conseguiu percorrer nesse segundo aqui, só 312 e não 758.
**Professora:** E se eu colocasse assim: Faça algum cálculo. Que cálculo você faria para mostrar que a velocidade está aumentando ou diminuindo?
**D.A.:** Eu ia através da derivada, ia achar a velocidade.
**Professora:** E por que você não fez derivada ali?
**D.A.:** Deste aqui? (apontou para a questão)
**Professora:** Por que você usou a diferença e não a derivada?
**D.A.:** Porque no gráfico (no caso a tabela do enunciado) estava bem claro que estava sendo feito o aumento de tempo e espaço.
**Professora:** Mas isso não é velocidade média?
**D.A.:** Seria velocidade média se não tivesse ponto a ponto e eu somasse todos e assim a acharia a velocidade média.
**Professora:** Mas de 1 a 2 segundos...
**D.A.:** Ele percorreu de 1 a 2 segundos ele percorreu 30 metros né?
**Professora:** Tá.
**D.A.:** De 1 a 2 segundos ele percorreu 125, entendeu? De 1 a 2! E se você for diminuir este por ele, você vai ver que o que ele percorreu foi bem maior. O tempo que ele percorreu de1 até 2 foi bem maior que de 0 até 1.

**Professora:** Tá eu entendo isto! Mas você fez essa diferença do 125 pelo 31?
**D.A.:** Isto aqui é para eu ver o quanto ele andou naquele segundo a mais.
**Professora:** Mas quanto que ele percorreu no instante 1 e no instante 2 segundos? Em 1 segundo e em 2 segundos será que realmente está...
**D.A.:** Em 1 segundo aqui tá dizendo que percorreu 30,67.
**Professora:** Não, mas a velocidade do carro em 1 segundo, a velocidade do carro em 2 segundos... Porque fazendo isso você não esta fazendo a velocidade média entre 1 e 2 segundos? Entre o 2 e 3 segundos?
**D.A.:** Ahan!
**Professora:** Outra pergunta. É diferente calcular a velocidade média em cada segundo aqui e de calcular a velocidade instantânea em cada segundo?
**D.A.:** É diferente.
**Professora:** Por quê?
**D.A.:** Porque se for calculada a velocidade média você não vai ter exata a velocidade naquele segundo ali. Mas o raciocínio que eu tive foi assim. Como ele pegou aqui de 0 a 1 segundo, ele percorreu 31 metros, né? E de 0 a 2 segundos ele percorreu 125 metros. A gente poderia fazer a relação se for fazer velocidade média vai dar bem maior né? Mas o que eu fiz... como a velocidade se eu faço a derivada do 0 até 1, vai me dar um valor de velocidade. E se eu fizer no instante 2 ele vai me dar um valor maior porque ele percorreu um espaço maior.
**Professora:** Só um pouquinho. Deixa-me ver se eu entendi. A velocidade média entre 1 e 2 é menor que a velocidade instantânea em 1 segundo? É isso aí que você falou?
**D.A.:** Não. Assim oh! Se eu for fazer o cálculo de velocidade média, ela vai dar um valor, né? Diferente da velocidade instantânea!
**Professora:** Certo.
**D.A.:** Tá! Como eu fiz assim, oh! A que ele percorreu num espaço de 0 a 1 segundo, ele percorreu 31 metros, e de 0 a 2 segundos, ele percorreu 125 metros, certo? Tá. Daí o que aconteceu? Como de 0 a 1 segundos a distância que ele percorreu, a distância é bem menor de 1 a 2, então quer dizer o seguinte. A velocidade no instante de 125 teve um aumento em relação ao 1.
**Professora:** Sim, mas aumentou a velocidade média ou a instantânea?
**D.A.:** A instantânea.
**Professora:** Mas como você sabe se a velocidade instantânea se você esta fazendo entre 1 e 2 segundos. Ou você deduz que é?
**D.A.:** É...em termos, por que se eu for fazer o cálculo vai dar maior.
**Professora:** Que cálculo?
**D.A.:** De derivar o espaço para achar a velocidade.
**Professora:** Você vai derivar e aplicar em que valor?
**D.A.:** Como assim? Ta, vou derivar este aqui que vai me dar a 1° derivada, seria velocidade, né? Daí eu vou substituir os tempos, no tempo 1 e no tempo 2 e daí ele vai me dar a velocidade naqueles instantes ali.
**Professora:** E nisso aqui, você se lembrou de alguma coisa do laboratório quando foi fazer essa questão?
**D.A.:** Ela lembrou aquela que o gráfico tem a concavidade para baixo. Aquela que, sobe, sobe, sobe, até 400 e depois desce, desce, desce, e o valor tá sempre diminuindo. E ela troca de sentido só que aumenta em módulo.
**Professora:** Ok.
**Professora:** Vamos ver a questão 3 do teste 2 (pós-teste) é igual a qual questão do teste 1 (pré-teste)?

**D.A.:** Igual a 1.
**Professora:** E essa questão do pós-teste o que te lembrou da aula do computador ou não te lembrou nada, só da sala de aula?
**D.A.:** É...Acho que não.
**Professora:** Por que você derivou?
**D.A.:** Pra achar o ponto onde inverte não é?
**Professora:** Inverte o quê?
**D.A.:** O sentido.
**Professora:** Mas aí você ta trabalhando com a velocidade?
**D.A.:** Não, não...
**Professora:** É a mesma coisa, só que você igualou a zero para ver onde inverte o sentido, mas isso se faz na velocidade. Mas qual a relação que você fez disso com...
**D.A.:** Pra saber em que ponto ela é crescente e em que ponto ela é decrescente.
**Professora:** Mas porque você derivou para saber isso? Precisava derivar?
**D.A.:** Precisava.
**Professora:** Por quê?
**D.A.:** Porque para achar a reta tangente tem que derivar!
**Professora:** E isso te lembra do laboratório? De reta tangente que tem que derivar?
**D.A.:** Não me lembro.
**Professora:** Então foi algo meio mecânico assim, falou reta tangente, deriva?
**D.A.:** Não! To tentando me lembrar qual foi dos exemplos do laboratório. Teve um exemplo que mostrou isso aqui.
**Professora:** Ta, não precisa lembrar do exemplo. Lembra do que a gente fez que te ajudou a lembrar. Qual exemplo que te deu a luz para fazer isso?
**D.A.:** É que assim oh! Se eu for fazer pela função, a função você só tem as posições no gráfico, e o único jeito de você achar o ponto mesmo, aonde você vai saber como é crescente e decrescente, é derivando, não é?
**Professora:** É! Mas qual a relação que tem entre a derivada e a reta tangente que está nessa questão? Como você vê isso aí?
**D.A.:** Não são iguais? Não estou entendendo o que você quer perguntar.
**Professora:** Tá. Uma reta para ser crescente ou decrescente depende do quê?
**D.A.:** Da reta tangente!
**Professora:** Uma reta, independente se ela for tangente ou não, pra eu identificar se ela é crescente ou decrescente, onde que você olha?
**D.A.:** O sinal né?
**Professora:** O sinal de quem?
**D.A.:** O sinal onde a reta tangente corta.
**Professora:** Não entendi
**D.A.:** Nem eu. Não consegui entender sua pergunta ainda.
**Professora:** Uma reta, ela tem... eu sei se ela é crescente ou decrescente. O que me diz se eu tenho que desenhar ela assim ( / ) ou assim ( \ )?
**D.A.:** A derivada.
**Professora:** O que a derivada me fornece?
**D.A.:** A derivada não é igual a reta tangente?
**Professora:** A derivada é igual ao coeficiente angular da reta tangente.
**D.A.:** Tá! Isso.
**Professora:** Ok! E você igualou a 0, por quê?
**D.A.:** Oh! Pra eu conseguir achar um valor de x.
**Professora:** Como é que a reta tangente em $x$=1? Você disse que antes de 1 ela era crescente e depois do 1 ela é decrescente e no 1 como que ela é?

**D.A.:** No 1 a reta tangente vai ser paralela ao eixo *x*.
**Professora:** Beleza!
**Professora:** Questão 4 de 2º teste (pós-teste) é semelhante a qual questão do pré-teste?
**D.A.:** É pra ser, não sei se é. É parecida com a 4.
**Professora:** Isso mesmo é semelhante, mas nós tínhamos igual no caderno, não tinha?
**D.A.:** Isso, tinha.
**Professora:** Então vamos ver juntos. O que nós temos aqui *f(1)= -1*. O que quer dizer isso? Quando *x* =1, *y* vale...
**D.A.:** –1
**Professora:** *f´*(1)= 0, o que quer dizer isso?
**D.A.:** Quer dizer que na posição do *x* =1 e *y* é 0.
**Professora:** *y* é 0. Não é a derivada aqui?
**D.A.:** É, na posição 1 a reta vai ser paralela ao eixo *x*.
**Professora:** Beleza. Então quando o *x* =1 a reta vai ser paralela ao eixo *x*. Só que a função passa no 1 e –1. Então no 1 e –1 temos um ponto e a função vai passar por aqui.
**D.A.:** Puxa!!! Fiz ao contrário!
**Professora:** O que você fez que eu não entendi?
**D.A.:** Eu achei que era pra fazer entre o *x* e o –1, mas era sobre o ponto dele. E esse aqui eu fiz certo ainda (questão 4 do pré – teste).
**Professora:** O que é que é isso *f´(x)*<0 se *x* <1?
**D.A.:** Quer dizer que antes de... *x* quando for menos que zero ele é decrescente.
**Professora:** Quando *x* for menor que 1 não é? O que é menor que 0?
**D.A.:** A derivada.
**Professora:** O que representa a derivada?
**D.A.:** O sinal.
**Professora:** De quem?
**D.A.:** Do *x* né? Do ângulo.
**Professora:** Do ângulo de inclinação! Então nós vamos desenhar uma função antes do 1 cujo ângulo seja....
**D.A.:** Menor.
**Professora:** Na verdade uma reta crescente ou decrescente.
**D.A.:** Decrescente.
**Professora:** Desenha pra mim. Isso te lembra alguma coisa da aula de laboratório, ou não?
**D.A.:** Não.
**Professora:** Tem que desenhar uma função cuja reta tangente a ela seja decrescente.
**D.A.:** Decrescente é assim (o aluno faz o desenho de uma reta decrescente).
**Professora:** Isso é a reta tangente, e como vai ser a função?
**D.A.:** A função é a reta tangente, não é?
**Professora:** Não a função é *f(x)* a reta tangente é a derivada da função em um ponto.
**D.A.:** Então ela vai ser assim?
**Professora:** Mas aí você tá dizendo que antes do 1 também é 0.
**D.A.:** Ah! Então ela só vai cortar!
**Professora:** Isso, isso.
**D.A.:** Mas não diz em que ponto!

**Professora:** Não, não fala, é só pra ti esboçar.
**D.A.:** Ah! Então quando ela corta aqui daí ela vai ser 0!
**Professora:** Isso. E se for maior que 1 o *x, f´(x)*>0. Como que você vai desenhar isso? f´(x)>0? O que quer dizer?
**D.A.:** f´(x)>0 quer dizer que ela é crescente.
**Professora:** Quem é crescente?
**D.A.:** A função.
**Professora:** Então desenha uma função crescente depois do 1.
**D.A.:** Depois do 1? Pra cima assim?
**Professora:** Isso. Mas isso aqui não começa no 1, né?
**D.A.:** Ah tá! Aqui então!
**Professora:** Mas aqui não tem um bico?
**D.A.:** Tem.
**Professora:** Existe derivada em um bico?
**D.A.:** Não.
**Professora:** Não! E ali esta dizendo que você tem derivada no 1 e ainda em 0, então como é que fica o gráfico dessa função?
**D.A.:** Então ela não é um bico é uma voltinha assim.
**Professora:** Parecido com uma parábola não é?
**Professora:** E essa questão aqui (questão 5 do pós-teste)?
**D.A.:** Essa eu me lembrei da aula de laboratório quando você fez no quadro branco alguns exemplos.
**Professora:** Como você pensou para resolver isso aí?
**D.A.:** Em *x*=1 e *x*=3 esta dizendo que a reta tangente aqui é 0 né? Então eu botei aqui 0 e aí eu tenho que cruzar ali (desenhou com o dedo uma curva interceptando em *x*=1 e *x*=3 ).
**Professora:** Mas podia cruzar assim também?
**D.A.:** Podia. Depois que o ângulo aqui é maior do que este daqui, e aí como o ângulo é maior, deduzi que no 2 seria um ponto mínimo.

---

**2. Estudante M.P.:**

**Professora:** A questão 1 do teste 2, pós-teste, é igual a qual questão do teste 1?
**M.P.:** É igual a questão 3?
**Professora:** Isso! Pra você resolver essa questão (questão 1 do teste 2), você lembrou de alguma coisa da aula de laboratório?
**M.P.:** Com certeza!
**Professora:** Do que você lembrou?
**M.P.:** Eu consegui visualizar o carrinho fazendo todo o percurso... e me lembrei de todos os pontos que você falou: a velocidade instantânea na partícula em 4 segundos, o gráfico na tela e no instante de 4 segundos que a gente parou, pra ver.
**Professora:** O que no gráfico mostrava a velocidade?
**M.P.:** Ele mostrava o movimento que o carrinho ia fazendo, a distância que ele ia percorrendo, num determinado período. De tantos em tantos segundos o quanto ele andava, mais ou menos até que as bolinhas aquelas iam aumentando a distância.

**Professora:** Mas a velocidade, quando você falou do gráfico. O gráfico geralmente era uma parábola, ou com a boca para cima, ou com a boca para baixo... Você derivou aí, né? Pra calcular a velocidade?
**M.P.:** Sim!
**Professora:** E o que o gráfico lá da aula de laboratório te lembrou pra fazer essa questão? Porque lá na aula de laboratório a gente não precisou derivar. Você só visualizava.
**M.P.:** Foi justamente isso, né? É que eu ia vendo, entendendo o gráfico da derivada, que até então eu só entendia o gráfico da função.
**Professora:** Na aula de laboratório... Fizemos só o da velocidade...
**M.P.:** Que seria o gráfico da derivada.
**Professora:** Aquela curvinha?
**M.P.:** Isso!
**Professora:** Aquela curvinha, não era o gráfico da velocidade era o gráfico da posição.
**M.P.:** Do ponto que ele ia percorrer num determinado tempo?
**Professora:** Isso.
**Professora:** Tá, mas não é velocidade isso?
**M.P.:** Não, se eu pegar aqui oh... o tempo 1 e substituir nessa fórmula aqui do “*s”* eu vou ter o valor de “*s”*.
**Professora:** Daí eu vou ligar o *t*1 com o valor de “*s”* que está no eixo *y*. Então o que mostrava que ela estava indo com a concavidade pra baixo era que ela estava diminuindo a velocidade. Mas porque a distância entre os distantes ia...
**M.P.:** Ia diminuindo...
**Professora:** Mas, você tem uma idéia de como é a velocidade, mas além do formato do gráfico, pra ter certeza do que estava acontecendo com o valor da velocidade, o que mais ele te mostrava?
**M.P.:** A direção: se era positiva ou negativa. Eu me lembrei disso.
**Professora:** Nesse caso aqui, em nenhum momento a reta tangente daquela função te ajudou em alguma coisa?
**M.P.:** Na questão 1? Não. É que essa questão 1 aqui eu já tinha pegado bem na aula anterior.
**Professora:** Como minha explicação, em sala de aula?
**M.P.:** Isso.
**Professora:** Então o que mais te ajudou foi a minha explicação, do que a aula de laboratório?
**M.P.:** É! Fixou. A aula de laboratório fixou é pra ver o abstrato.
**Professora:** E por que tinha que derivar?
**M.P.:** Eu só tava aceitando o que você tava falando. Porque você é a professora então eu tenho que aceitar. Mas ali, no laboratório, você provou. Aí eu acreditei. Então eu realmente aprendi o porquê.
**Professora:** Mas como é que você aprendeu se nós não derivamos na aula de laboratório? É isso que eu quero saber se valeu mesmo. Porque aqui você derivou... Você viu os sinais, e lá a gente não derivou...
**M.P.:** Mas lá eu vi... Como é que é na prática. Eu não usei a aula de laboratório pra resolver essa questão em específico, eu usei na outra lá...
**Professora:** Te ajudou pra compreender o porque você tem que derivar? Ou que te ajudou a aceitar que você tem que derivar?
**M.P.:** Me ajudou a visualizar o porquê que tem que derivar. O que é a derivação que você me explicou. É a taxa de variação, me ajudou a enxergar a taxa de variação.

Eu não enxergava isso. No laboratório eu enxerguei a taxa de variação. A derivada tudo bem! O ângulo da reta tangente tá! Mas e a taxa de variação? É aquilo ali que eu enxerguei?
**Professora:** Só que a taxa de variação você consegue ver nos intervalos, a cada segundo. A taxa de variação você conseguia ver aonde?
**M.P.:** Nos intervalos a cada segundo. Nas bolinhas da animação.
**Professora:** Na questão 3 (pós-teste). Essa você lembrou da aula de laboratório, ou não?
**M.P.:** Essa aqui eu fiz mais pela derivada mesmo. Eu sabia que para saber se a reta é crescente ou decrescente eu tenho que ver se a derivada é maior ou menor que zero.
**Professora:** Por que a derivada?
**M.P.:** Porque a reta tangente é a derivada. A inclinação da reta tangente. A inclinação vai me dizer se ela... se a inclinação dela for para cima é por que ela é crescente...positiva. Ou se ela é decrescente, negativa, menor que zero.
**Professora:** E por que você igualou a 0?
**M.P.:** Pra isolar o *x* e achar o valor.
**Professora:** E a reta tangente no valor $x = 1$ como é que vai ser?
**M.P.:** A reta tangente?
**Professora:** É. A reta tangente da função em $x$=1?
**M.P.:** Ela é assim crescente.
**Professora:** No $x$=1 ela é crescente?
**M.P.:** Aqui é +1, né? Aonde ela corta o 1? Sim! Eu enxergo assim (fez um gesto com a mão mostrando a inclinação de uma reta tangente).
**Professora:** Tá. Aqui (no gráfico do estudo dos sinais da função derivada) você diz que depois do 1...
**M.P.:** Ela é positiva.
**Professora:** Quem é positiva?
**M.P.:** Todos os valores que se incluem naquela função... Maiores do que 1.
**Professora:** Maiores do que 1, a reta tangente é crescente?
**M.P.:** Huhum...
**Professora:** Então, imagina... Eu tenho uma função, que eu não sei como é que é o gráfico dela, mas depois de 1 a reta tangente é sempre crescente. Certo? E antes do 1?
**M.P.:** Eu tenho valores menores do que 0.
**Professora:** Menores do que 0. Então quer dizer que as retas tangentes na minha função são o quê?
**M.P.:** Decrescentes.
**Professora:** E no 1 como é que vai ser a reta tangente?
**M.P.:** Zero, com inclinação horizontal.
**Professora:** Certo. Antes você conseguia ver isso?
**M.P.:** Não.
**Professora:** O que você estava pensando antes que eu não entendi?
**M.P.:** Nessa questão eu não pensei isso.
**Professora:** Não?
**M.P.:** Não. Foi só pela regra dos sinais e deu! Aqui eu não enxerguei, não visualizei isso aí.
**Professora:** A gente vai discutir isso nessa aqui. Oh!
**M.P.:** Ah! Só na questão 5. Aí que a reta tangente pegou...

**Professora:** Então como a derivada tem duas interpretações? Taxa de variação instantânea e inclinação da reta tangente. Então se no $x$=1 você igualou a 0 sua derivada é porque a sua derivada é zero quando $x$=1. Então derivada é 0 quando a inclinação da reta tangente...
**M.P.:** É 0.
**Professora:** Isso aí!
**M.P.:** Horizontal.
**Professora:** Essa questão dois da tabela, o que você fez? Pelo que eu analisei aqui, do que você resolveu, você fez a diferença entre...
**M.P.:** Cada intervalo.
**Professora:** E isso foi te dando o quê?
**M.P.:** Isso aqui eu me lembrei da aula de laboratório. Que a gente pegou cada intervalo e foi vendo a taxa de variação. É isso que eu tava vendo aqui oh! Quanto que ele percorreu de segundo em segundo. Daí eu fiz o quê? A diferença em segundos, isso foi o que eu botei no gráfico (apontou para tabela que fez das diferenças) aqui. Pra mim isso aqui é a taxa de variação. Então analisei aqui no primeiro (coluna das diferenças da partícula A), como a taxa de variação foi sempre crescente, foi sempre aumentando, ele teve uma velocidade crescente de 0 a 8 segundos. Foi isso que eu percebi. E no B eu percebi que ela foi diminuindo até os 4 segundos, que ela quase parou. Porque há uma diferença de um milésimo.
**Professora:** Esse teu negócio de quase parar... Esses valores são valores de quem?
**M.P.:** Daqui da velocidade, da taxa de variação!
**Professora:** Mas qual é a velocidade de um carrinho quando está parado?
**M.P.:** Quando tá parado é nula. Mas aqui ele não parou. Ele quase parou.
**Professora:** Mas então, não teria que estar próximo do 0?
**M.P.:** Sim.
**Professora:** E não tá próximo do 0 e sim de 48,33.
**M.P.:** Tá bom, mas assim oh...
**Professora:** Você tá fazendo a diferença das velocidades?
**M.P.:** É.
**Professora:** Tá fazendo a taxa de variação da velocidade.
**M.P.:** É, eu acho que eu me confundi com a aceleração. É foi isso que eu fiz aqui.
**Professora:** Tá e essa velocidade aqui que você tá calculando, diz o valor que o carrinho tem no 1º segundo, 2º segundo, no 3º segundo...?
**M.P.:** Não, não, dá uma velocidade média. Não é uma velocidade instantânea.
**Professora:** Você sabe uma tendência, um valor aproximado?
**M.P.:** Isso. Agora eu entendi o que você quis me dizer. Ele aumentou! Realmente, 48,33 e 48,34.
**Professora:** Então no *b* a velocidade tá sempre...
**M.P.:** Aumentando...
**Professora:** Qual seria a velocidade do carrinho em 8 segundos? O que eu teria que fazer para descobrir a velocidade dele em 8 segundos?
**M.P.:** Dividindo a distância pelo tempo, pela fórmula!
**Professora:** Mas a fórmula da velocidade média ou instantânea? Por que sempre que eu quero saber a velocidade instantânea, é a velocidade do carro em 8 segundos.
**M.P.:** Então eu tenho que pegar a fórmula dele, derivar, achar a fórmula da derivada em qualquer ponto, e aplicar 8 no *t*.

**Professora:** Tá. Então, quando eu falo velocidade você fica sempre pensando em taxa de variação. Você não pensa direto na derivada?
**M.P.:** Não. Automático, para resolver uma questão vai direto na derivada. Olho a velocidade, se a função não tá derivada vou derivar automático.
**Professora:** Tá e aqui por que você não derivou?
**M.P.:** Porque eu imaginei a taxa de variação.
**Professora:** Eu sei que você compreendeu que o comportamento da derivada aqui no B esta sempre aumentando. Mas será que realmente ela aumenta? Por que se eu for fazer a derivada... Vamos olhar essa questão aqui.... Vamos pegar o *s* da partícula *a*. E vamos derivar. Então o que vai dar?
**M.P.:** Zero.
**Professora:** O que é 0?
**M.P.:** Velocidade parada.
**Professora:** A velocidade do carrinho em 8 segundos. Então em 8 segundos a velocidade é zero. Quanto é a velocidade em 0 segundos?
**M.P.:** A velocidade em 0 segundos é parado. Está nula. A velocidade...
**Professora:** Você está olhando aqui, mas bota na fórmula. Pra ver se vai dar. Aqui ela tá na posição 0. Aqui a velocidade de 8. E a velocidade em 0. Tem que botar 0 aqui.
**M.P.:** Vai dar 64.
**Professora:** Vai dar 64. Então a tabela. Ela mostra a posição do carro a cada instante. Mas a velocidade dele é 0. O que isso quer dizer? Que ele tá vindo com um velocidade e eu bati uma foto. Daí naquela foto onde eu bati, eu vou contar meu instante 0 e ali vai ser minha posição inicial. Por isso a posição esta 0. Mas ele já tava vindo com uma velocidade. Conforme passa o tempo esta indo pra 0.
**M.P.:** Então para resolver essa questão eu teria que fazer a derivada.
**Professora:** A derivada.
**M.P**.: A derivada e ir substituindo.
**Professora:** Sim. Por quê? Porque essa diferença aqui que você me mostra. É uma diferença entre o 7º e o 8º segundo de movimento. Você não sabe o que está acontecendo, pode ser que dê uma queda brusca e a velocidade fique 0.
**M.P.:** É nesse aqui eu me lembrei da aula. Que agente viu essa diferença.
**Professora:** Sim. Por quê? Porque essa diferença aqui que você me mostra. É uma diferença entre o 7º e o 8º segundo de movimento. Você não sabe o que está acontecendo, pode ser que dê uma queda brusca e a velocidade fique 0.
**M.P.:** É nesse aqui eu me lembrei da aula. Que agente viu essa diferença.
**Professora:** Mas daí na aula a gente fez a diferença pra verificar o quê? Velocidade média ou velocidade instantânea?
**M.P.:** A média.
**Professora:** A média para introduzir a taxa de variação. E daí a taxa de variação é uma diferença. Agora a taxa de variação instantânea é o que esta acontecendo naquele ponto. Entendeu? Você consegue visualizar o comportamento da velocidade, mas quando fala velocidade a sua primeira idéia ainda é ver a diferença porque velocidade é taxa de variação.
**M.P.:** É que esse aqui eu peguei... Ele andou 60 metros, depois mais 54, depois ele andou mais 50, depois mais 48, e a tendência da velocidade era ir diminuindo. E aqui como ele andou 48.34 ele aumentou um pouquinho... aí depois ele ficou aumentando.
**Professora:** Então no teu ele diminui até aqui (4s). E aumenta pra baixo (de 5 a 8s). Então vamos fazer a diferença aqui. Será que vai dar a mesma coisa? A diferença

entre esse e esse aqui. É quase 0? É bem menor que a que você encontrou aqui. Não é?
**M.P.:** É.
**Professora:** Então se eu fosse fazendo a diferença, você só ia dizer a mesma coisa, que ela ia? Diminuir. Então. Não está errado descrever o comportamento da velocidade fazendo as diferenças. Por que você esta vendo só uma idéia. Mas você não sabe exatamente a velocidade do carrinho naqueles instantes. Pra poder comparar. Nesse instante o que esta acontecendo com a velocidade do primeiro e com a velocidade do segundo.
**M.P.:** Humhum.
**Professora:** Essa aí foi tranqüila, né?
**M.P.:** Humhum! Só interpretação.
**Professora:** Humhum! O que nós temos aí, nessa aí (questão 4 do pós-teste)? Depois do 1...
**M.P.:** Ela é crescente.
**Professora:** Antes do 1...
**M.P.:** Decrescente.
**Professora:** E no 1?
**M.P.:** Ela é 0. Porque ali esta dizendo que a derivada no ponto 1 é 0. Ou seja, horizontal, seria o ponto crítico.
**Professora:** Você viu que estas informações foram exatamente essas aqui que você encontrou? (mostrei que os dados do enunciado da questão 4, do pós-teste, eram as respostas que ela encontrou na questão 3, do pós-teste).
**M.P.:** É! Não tinha visto!
**Professora:** Então, antes do 1... É o mesmo gráfico. Decrescente.
**M.P.:** É esta certo! Depois do 1 reta crescente!
**Professora:** E isso te lembrou da aula de laboratório?
**M.P.:** Claro.
**Professora:** E pra resolver a questão 4 você te lembrou da aula de laboratório?
**M.P.:** Sim.
**Professora:** Como?
**M.P.:** Ali eu me lembrei da reta tangente mesmo. Quando a gente simulava no gráfico o risco ali (reta tangente à função para um determinado valor de *x*) quando ela forma o grau. Quando ela vai fechando ou diminuindo o grau.
**Professora:** O pessoal tem dificuldade, eles sabem que a reta tangente aqui é crescente mas não conseguem desenhar a função. Como é que você faz isso?
**M.P.:** Tem que visualizar assim. Vendo que aqui... e simula o *x* em baixo (simular o *x* em baixo significa fazer a reta suporte paralela ao eixo *x* para identificar a abertura do ângulo). Aí depois vai num ponto mais longe. Desenha outra reta tangente e simula o *x* de novo. Aí vejo que esse grau é bem maior que esse aqui embaixo. Então o que... que ela é crescente...começa grande e termina pequeno. Isso aqui eu me lembrei lá do vídeo. Vendo a reta acompanhando a função.
**Professora:** Isso aqui você conseguia fazer antes da aula de laboratório?
**M.P.:** Não.
**Professora:** Você não conseguia visualizar?
**M.P.:** Não. Eu via um monte de risquinho só. Para mim a reta tangente era quase igual à função. Eu não conseguia desenhar.
**Professora:** E a 5 (questão 5 do pós-teste)?
**M.P.:** A 5 eu me lembrava mas eu demorei muito pra desenvolver porque eu não me lembrei. Depois você me explicou como a inclinação da reta tangente aqui. Começa

grande a inclinação dela aqui e lá em cima, ela é quase horizontal bem pequenininho. Tem que enxergar que no gráfico começa grande aqui e a inclinação dela e vai até o 0.
**Professora:** O que esta acontecendo entre o 1 e o 2?
**M.P.:** É a mesma coisa só que ao contrário. Começa pequenininha e vai aumentando o grau... a inclinação da reta tangente.
**Professora:** Mas essas retas tangentes não são decrescentes do 1 até o 2?
**M.P.:** São decrescentes, mas o que importa é o grau que ela está.
**Professora:** Qual deve ser o valor da derivada se reta é decrescente? Positiva ou negativa? Numa reta crescente, como é que tem que ser a derivada? Foi aqui (voltou para a questão 3 do pós-teste) o que você disse, né? Você derivou... se é positiva....
**M.P.:** Ela é crescente.
**Professora:** Quem tem que ser positiva para a reta ser crescente?
**M.P.:** Todos os valores, neste caso aqui (na questão 3) maiores do que 1 pra colocar nessa função todos os valores maiores que 1. Menos o 1, né? São positivos. A reta é crescente a partir do 1 e reta decrescente... antes do 1.
**Professora:** Tá, mas esse estudo do sinal aqui é dessa função? Ou é da sua derivada?
**M.P.:** É... essa aqui é da.... da derivada.
**Professora:** Da derivada. Então isto aqui tem este gráfico. A derivada tem este gráfico, na questão 3. E se teu x é maior do que 1 o valor desta função derivada resulta em valores positivos. Ou seja se a derivada é positiva... Você tem valores...
**M.P.:** Crescentes.
**Professora:** Se a derivada é negativa você tem valores...
**M.P.:** Decrescentes.
**Professora:** Negativos. Se a derivada é positiva você tem valores positivos. Então assim na sua reta tangente a função entre 1 e 2 são retas crescentes ou retas decrescentes?
**M.P.:** Retas decrescentes, valores negativos.
**Professora:** Valores negativos. Então o que esta acontecendo, esta aumentando o valor do ângulo. Mas pra valores...
**M.P.:** Negativos.
**Professora:** Então onde é que teria que ficar?
**M.P.:** Abaixo.
**Professora:** Abaixo.
**M.P.:** Abaixo do eixo, na parte negativa.
**Professora:** Então você pensou certo. Está aumentando, mas esqueceu...
**M.P.:** Que é decrescente. Então teria que ter assim e depois...
**Professora:** Até o 2 ela fica onde?
**M.P.:** Até o 2...aqui... Essa parte está certa?
**Professora:** Vamos ver se está certa. Aqui o que está acontecendo? Tem este ângulo... O ângulo está aumentando. Mas são retas decrescentes?
**M.P.:** Humm!! Ta, são decrescentes. Então teria que vir daqui, pra baixo.
**Professora:** Até aonde?
**M.P.:** Pois é! Aí eu não sei! Até aonde aqui? Que ponto do *y*?
**Professora:** Essa função aqui não tem a mesma inclinação do 0 até o 1 e do 1 até o 2?
**M.P.:** Sim.
**Professora:** Então, a mesma distância que você colocou aqui.

**M.P.:** Você cria uma reta assim
**Professora:** Esse valor que você colocou aqui tem que ser o mesmo valor, só que negativo.
**M.P.:** Ahhh!!!
**Professora:** Daí o que vai acontecer do 2 até o 3?
**M.P.:** A reta continua decrescente e o ângulo vai diminuindo.
**Professora:** Então como é que eu vou continuar?
**M.P.:** Se a reta é decrescente eu continuo embaixo. E o ângulo vai diminuindo significa que eu vou... aí?!
**Professora:** Quanto que vai ser o valor da reta tangente no 3?
**M.P.:** Zero.
**Professora:** E onde é que está o 0 aí?
**M.P.:** Como é que eu vou diminuir pra cima? Se aqui a reta é decrescente em módulo?
**M.P.:** Tá, mas pra botar o 3 eu continuo vindo pra baixo.
**Professora:** Não. Até o 2 tá diminuindo, certo? Esquece o número. Você já sabe que é embaixo porque a derivada é negativa. Mas esquece o sinal. Se você tirar o sinal você não estará diminuindo?
**M.P.:** Humhum.
**Professora:** Não deu ainda? Você sabe que quando for 3 você tem que chegar aqui no 0.
**M.P.:** Sim.
**Professora:** Mas você tá na parte de baixo. Vamos supor aqui que é –5, -4, -3, -2, -1 e 0. O teu ângulo está no máximo aqui no -5. No máximo sem sinal. O sinal só vai servir pra saber se tem que colocar embaixo ou em cima. Dependendo se a reta é crescente ou decrescente. Agora aqui do 2 até o 3 as retas continuam decrescentes. Então eu tenho que continuar trabalhando aqui embaixo. Agora pra onde estão indo estes valores? Estão aumentando ou estão diminuindo?
**M.P.:** Eu sei que o 3 ali tem que ser 0.
**Professora:** Então está diminuindo. Então você ignora agora o sinal porque você já sabe que você vai trabalhar embaixo. Então, não tem que vim pra cá?
**M.P.:** Sim.
**Professora:** É isso aí.
**M.P.:** Então como aqui estão os pontos máximos e mínimos ele vai cortar o eixo no x que é o ponto crítico. Onde seria a derivada 0. Derivada 0 em 1 e 3, então tem que cortar no 1 e no 3. Então vem aqui no 1 e no 3, e aqui a reta é crescente, continua então!
**Professora:** Até aonde?
**M.P.:** Até o 4.
**Professora:** E você pára aonde, em que altura? Você parou aqui, por quê?
**M.P.:** Porque aqui é ponto *y*, começou aqui!
**Professora:** Humhum, mesma inclinação do 0.
**M.P.:** Sim, no mesmo ponto que começou o 0 termina o 4.
**Professora:** E a aula de laboratório em que te ajudou para resolver essa questão?
**M.P.:** Antes eu não conseguia ver a reta tangente, desenhar o ângulo, ver onde é grande e onde é pequeno.
**Professora:** Humhum.
**M.P.:** Com a aula de laboratório eu consegui ver onde é grande, onde é pequeno e onde é reto.
**Professora:** O que te ajudaria pra ti conseguir fazer esta parte aqui de baixo?

**M.P.:** Essa explicação que você acabou de me dar.
**Professora:** O que você não estava conseguindo visualizar para saber que tinha que desenhar em baixo?
**M.P.:** É esta confusão que eu tava fazendo assim, oh! Reta decrescente... Essa parte do 2 até o 4 estão abaixo do *x* (indica a função), estão com *y* negativo e pra mim *y* negativo seria reta decrescente, esta era a informação que eu tinha, só que daí eu olhando aqui é que confundiu, porque misturou positivo com negativo aí eu me perdi.
**Professora:** Sim, porque o que você tá desenhando é o gráfico da derivada e que não tem a ver com se a função está em baixo ou em cima. O gráfico da derivada é o valor do ângulo de inclinação.
**M.P.:** Hummm...
**Professora:** Mesmo função estando em baixo, entre o 3 e o 4, o ângulo de inclinação é positivo.
**M.P.:** Hummm...
**Professora:** Então entre o 3 e o 4 tem que estar em cima porque você está desenhando a ...
**M.P.:** Derivada.
**Professora:** O que você marca no eixo *y* quando você faz o gráfico da derivada?
**M.P.:** Se ele é positivo ou negativo!
**Professora:** Mas o que é positivo ou negativo?
**M.P.:** O *y*?
**Professora:** O que você marca ali, que eu não me lembro agora como é que você está pensando.
**M.P.:** A inclinação da reta tangente aqui é maior do que aqui, então o *y* a inclinação é grande lá e pequena aqui.
**Professora:** Perfeito. Então você marca no eixo y o valor da inclinação da reta tangente?
**M.P.:** Isto!
**Professora:** Isso aí!
**M.P.:** É isso que eu vejo, no y eu vejo a inclinação da reta tangente, o ângulo né?!
**Professora:** Tá, então resume pra mim em curtas palavras a aula de laboratório te ajudou para...
**M.P.:** Visualizar a inclinação da reta tangente, pra visualizar o que é taxa de variação. Enxergar o abstrato, eu gostei.

---

**3. Estudante R.M.:**

**Professora:** A questão 1 do teste 2, pós-teste, é igual a qual questão do teste 1?
**R.M.:** É igual à questão 3!
**Professora:** Beleza. Pra você resolver essa questão, você usou a aula de laboratório?
**R.M.:** Com certeza, ajudou sim.
**Professora:** De que maneira ela te ajudou? Do que você lembrou?
**R.M.:** Já tinha uma idéia bem melhor, né. Antes de ter visto a aula de laboratório eu não teria essa idéia tão clara, que nem eu tive no olhar a questão aqui.
**Professora:** Humhum.

**R.M.:** Porque quando se fala assim, uma partícula move-se ao longo de uma reta horizontal eu imaginei aquela situação.
**Professora:** Tá.
**R.M.:** E no achar a aceleração eu também fiquei imaginando que nem sempre que a velocidade abaixa a aceleração deve ser baixa, porque verificamos na aula de laboratório e deu pra ver lá que com a movimentação do carrinho.
**Professora:** Humhum.
**R.M.:** Uma velocidade baixa e no momento uma aceleração alta, isto demonstra que a gente raciocina de uma maneira diferente.
**Professora:** Hum...
**R.M.:** Ficou bem mais claro assim.
**Professora:** Tá e essa parte que você viu aí, mesmo a velocidade sendo baixa e a aceleração alta isto você visualizou na animação do carrinho ou no gráfico?
**R.M.:** Juntando, né, animação com o movimento do gráfico ao mesmo tempo no vídeo, (movimentação da reta tangente ao longo da curva) assim deu pra notar.
**Professora:** Humhum...
**R.M.:** Então aquela movimentação do carrinho baixando a aceleração e baixando a velocidade e a aceleração aumentando no gráfico mesmo descendo a velocidade.
**Professora:** Humhum...
**R.M.:** Deu pra visualizar.
**Professora:** Tá!
**R.M.:** Isto fez com que eu lembrasse que era possível mesmo com a velocidade baixa, a aceleração pode vir a ser alta.
**Professora:** Humhum, que bom, tá!
**Professora:** Na segunda questão da recuperação do teste 1 (pós-teste), tem alguma questão semelhante ao teste 1?
**R.M.:** Não!
**Professora:** Essa questão dois da tabela.
**R.M.:** Ah! Da tabela?
**Professora:** É tem alguma questão semelhante?
**R.M.:** Não!
**Professora:** Não, ok! E pra você resolver esta questão aqui você lembrou da aula de laboratório?
**R.M.:** Sim, a aula de laboratório só ajudou na hora,... deixa-me ver aqui.... eu só respondi essa questão mesmo, pelo raciocínio da aula de laboratório.
**Professora:** Humhum.
**R.M.:** Porque eu não fiz nenhum cálculo!
**Professora:** Esta tabela te diz alguma coisa ou não te diz nada!
**R.M.:** Não! Ela fala aqui da aceleração, né?
**Professora:** Da aceleração ou da posição?
**R.M.:** Aumento da velocidade.
**Professora:** Como você vê que está aumentando a velocidade, aí? É isso que eu preciso, entendeu, quando você olha esta tabela que está representando o tempo de 0 a 8 segundos.
**R.M.:** Humhum...
**Professora:** O *S* de *a* que é a posição da partícula *a*; e *S* de *b* que é a posição da partícula *b.* De que maneira que você vê que está aumentando a velocidade aí?
**R.M.:** Que a cada segundo ela está andando, né?
**Professora:** Humhum...
**R.M.:** Está aumentando as posições, né?

**Professora:** Humhum...
**R.M.:** Aumenta a velocidade.
**Professora:** Humhum. E você não chegou a fazer as diferenças?
**R.M.:** Não eu não fiz conta, eu fui só pelo raciocínio olhando os números.
**Professora:** Estava aumentando os números então a diferença entre eles estava aumentando?
**R.M.:** Isto!
**Professora:** Quer dizer então que...
**R.M.:** No *s* de *b* ela aumentava menos que no *s* de *a*, claro!
**Professora:** Humhum...
**R.M.:** Foi este o raciocínio que eu usei!
**Professora:** Sim!
**R.M.:** Não que eu fiz algum cálculo nele, eu só visualizei.
**Professora:** Certo. Você só usou a tabela pra responder, certo?
**R.M.:** Isto!
**Professora:** E por que você fez isso? (resolveu a derivada de *a* e de *b* para cada segundo).
**R.M.:** Pra tentar achar alguma coisa, né!
**Professora:** Humhum...
**R.M.:** Eu fiz aqui a conta só pra confirmar mesmo se tava crescendo mais ou menos.
**Professora:** E por que você derivou?
**R.M.:** Porque a derivada eu pego da segunda derivada, né?
**Professora:** Primeira.
**R.M.:** A primeira, derivando uma vez só.
**Professora:** Isto!
**Professora:** Essa aí foi tranqüila, né?
**R.M.:** Ahan! Só interpretação.
**Professora:** A questão 3 então. Para quais valores de *x* a reta tangente a função $f(x) = 2x - x^2$ é crescente e decrescente?
**R.M.:** Esta aqui não tem nenhuma igual no teste 1 (pré-teste), né?
**Professora:** Nem parecida?
**R.M.:** Não.
**Professora:** Tudo bem! E pra você resolver esta questão, porque você derivou?
**R.M.:** Eu derivei pra pegar o valor (*x*=1).
**Professora:** Humhum...
**R.M.:** Só botei aqui que ela é crescente, mas no fim ela não é crescente, porque eu pego o valor da segunda derivada pra saber se é crescente ou decrescente?
**Professora:** Não!
**R.M.:** Não. Eu derivei, peguei o valor de 1, era decrescente, porque o *x* aqui (da função) está ao quadrado.
**Professora:** Na verdade, tem que olhar isto na sua derivada não na função.
**R.M.:** Humhum...
**Professora:** Porque você derivou, igualou a zero, daí você encontrou o 1, o 1 é o que está cortando teu eixo *x* (aponto para o gráfico que ele fez da reta).
**R.M.:** Isto!
**Professora:** Pra você fazer o gráfico dessa reta, isso aqui não é reta – é parábola.
**R.M.:** Isto!
**Professora:** Então este gráfico que você fez foi desta função aqui, da função derivada.
**R.M.:** Isto!

**Professora:** Daí você viu que o número que está junto do *x* é negativo (coeficiente do termo da função derivada)?
**R.M.:** Não. Eu tomei como base o número que está junto com o *x* da função e não com o da derivada.
**Professora:** Ah! Entendi!
**R.M.:** Eu peguei o sinal da função e deveria ter pego o sinal da derivada. A derivada muda o sinal.
**Professora:** Então você pegou o +2 da função?
**R.M.:** Isto, pra dizer se é crescente ou decrescente.
**Professora:** Por que isso?
**R.M.:** Foi uma rateada mesmo, porque tava na frente e como era positivo...
**Professora:** E, se o termo - $x^2$ estivesse na frente você teria colocado decrescente?
**R.M.:** Sim.
**Professora:** Tá!
**R.M.:** Mas com certeza se $2x - x^2$ fosse a derivada, a minha função seria decrescente, né?
**Professora:** Não. Daí seria uma parábola.
**R.M.:** Com a concavidade para baixo, tá!
**Professora:** Por que você tem que derivar neste caso? Porque está falando aí em saber se a reta tangente é crescente ou decrescente. Por que veio a idéia de derivar? O que te lembrou do que nós trabalhamos, o que fez você derivar? Aqui, você me disse que você derivou porque a derivada da posição é a velocidade. E nesta situação aqui o que te fez derivar?
**R.M.:** Assim oh: o coeficiente angular, aliás, a reta tangente é a segunda derivada do coeficiente angular, né?
**Professora:** Não entendi!
**R.M.:** O coeficiente angular me dá o valor, me dá a derivada da reta tangente?! A reta tangente é o valor do coeficiente angular da função.
**Professora:** Tá, vamos por partes. A reta tangente você está pensando em expressão analítica ou em desenho?
**R.M.:** Desenho. Ponto.
**Professora:** A reta não é um ponto! A reta é uma reta!
**R.M.:** O ponto da reta tangente.
**Professora:** O ponto de tangência.
**R.M.:** O ponto de tangência da reta tangente, ele seria a derivada do meu coeficiente angular naquele ponto.
**Professora:** Tá agora vamos pra outra coisa. O que é coeficiente angular?
**R.M.:** Coeficiente angular ...
**Professora:** Na expressão reduzida da reta $y = ax + b$, o coeficiente angular é o *a* e ele representa... a inclinação da reta tangente. Se o *a* é positivo então a reta é crescente, se o *a* é negativo então a reta é decrescente. Então, o *a* é um número?
**R.M.:** Isto!
**Professora:** Agora vamos de novo para o que você tava pensando.
**R.M.:** Eu tenho o coeficiente angular. Pra eu achar o valor da derivada, não, pra eu achar o ponto de tangência da reta eu tenho que derivar o valor do coeficiente angular.
**Professora:** Mas você não derivou a função?
**R.M.:** Isso eu derivei a função.
**Professora**: Se você disse que você derivou o coeficiente angular, você tá dizendo que a função é o coeficiente angular, não é?

**R.M.:** Não, tô falando de um ponto!
**Professora:** Você está dizendo que esse 1 é o ponto de tangência?
**R.M.:** Isso! Da minha reta.
**Professora:** Humm...
**R.M.:** O 1é meu ponto de tangência, vamos supor: se fosse na parábola, eu tenho o 1 ali, é meu ponto de tangência de uma determinada reta, tá?
**Professora:** Mais ou menos?!
**R.M.:** O coeficiente dele, do ponto, vai ser a derivada da minha reta tangente.
**Professora:** Tá muito confuso ainda?
**R.M.:** Eu não estou conseguindo!
**Professora:** Eu te perguntei por que você derivou essa função inicial?
**R.M.:** Pra achar o ponto de tangência da reta tangente.
**Professora:** Tá! Então eu vou te dizer outra coisa. Quando você derivou e igualou a 0, você tá dizendo que a derivada vale 0 nesse ponto 1, o que quer dizer derivada igual a 0, no ponto 1?
**R.M.:** Que no ponto 1 onde eu vou traçar minha reta tangente o meu coeficiente angular é 0.
**Professora:** Ok! Agora estamos começando a falar a mesma língua. E como é o desenho dessa reta tangente no 1?
**R.M.:** Ela é horizontal, 100%.
**Professora:** Então se ela é horizontal no 1, depois do 1 ela pode ser crescente ou decrescente e isso ocorre também antes do 1?
**R.M.:** Isso! Tanto faz, pode ser crescente ou decrescente, tanto antes do 1 quanto depois do 1.
**Professora:** Então, sabendo disso, tenta formular uma nova resposta para a pergunta: qual a relação que tem entre a derivada e saber se a reta tangente é crescente ou decrescente?
**R.M.:** Se a derivada for um número positivo, a minha reta tangente é crescente. Se a derivada for um número negativo, a minha reta tangente é decrescente.
**Professora:** Tudo bem. Então você percebeu que em nenhum momento você derivou o coeficiente angular. Você deriva a função para encontrar o valor do coeficiente angular.
**R.M.:** Isso, porque eu tenho que encontrar um ponto, o ponto onde vai traçar a reta para eu calcular o coeficiente angular.
**Professora:** Ok, vamos para próxima questão.
**Professora:** Tem alguma questão parecida no teste 1 com essa questão 4 (do pós-teste)?
**R.M.:** Não!
**Professora:** Teve dificuldades em fazer essa questão 4?
**R.M.:** Não!
**Professora:** Mas como você pensou pra fazer essa questão?
**R.M.:** Essa questão aqui de botar os pontos no gráfico e tentar achar os pontos que ele traça aqui. Essa aqui a gente viu no laboratório, né? O gráfico lá, os pontos, o movimento do gráfico?
**Professora:** Humhum! A primeira informação do enunciado f(1) = -1...
**R.M.:** É a minha função
**Professora:** Isso, e quem é o *x* e quem é o *y*?
**R.M.:** O *x* é o –1 na derivada ...
**Professora:** Na verdade o *x* é o 1, o que está dentro do parênteses, porque *y* = *f(x)*, então dentro do parêntese é o +1 e o que está fora é o *y*.

**R.M.:** Seria o *y* na derivada.
**Professora:** Nesse caso aqui não tem linha (de *y´*), né? É só a função mesmo, então é o valor de *x* correspondente com o valor de *y*. Então seria esse ponto aqui (mostrei a localização do ponto no plano cartesiano). Você pegou o 1 e o -1 e marcou dois pontos, um em cada eixo.
**R.M.:** Isso, mas os dois pontos não são a mesma coisa.
**Professora:** O que quer dizer "não é a mesma coisa?" Como você vê isso?
**R.M.:** O 1 representa um ponto e o -1 outro ponto, um no eixo *x* e outro no eixo *y*.
**Professora:** Mas não está dizendo aqui *(f(1) = -1)* que se o *x* for 1 o *y* vale -1?
**R.M.:** Isso!
**Professora:** Então você tem que relacionar *x* com *y*.
**R.M.:** Tudo bem, aqui ele vai ter uma relação para eu poder montar o gráfico.
**Professora:** Mas quando você marca dois pontos, você está dizendo que o teu, neste aqui, o 1 é *x* e o teu *y* é 0, e quando você marca o -1 aqui, você tá dizendo que o *y* é -1 e o *x* é 0. Você está marcando dois pontos e na verdade isso aqui *(f(1) = -1)* é um ponto. O que representa um ponto? É o valor de *x* combinado com o valor de *y*. Sabe jogar batalha naval?
**R.M.:** Sei (relacionou a representação de um ponto no plano cartesiano com a identificação de um navio no jogo batalha naval).
**Professora:** Agora você consegue ver que eles não são dois pontos?
**R.M.:** Eles são dois pontos, né, mas eles vão ter que se relacionar para eu fazer o gráfico (Nesse momento ele usa a expressão ponto pra representar o valor de uma coordenada).
**Professora:** Tá, mas onde ficaria esse ponto *(f(1) = -1)*?
**R.M.:** Ele vai ficar aqui no meio (pertencente a um quadrante), eu tenho o ponto 1 e tenho que achar a relação com o ponto -1, então eu tenho só que baixar ali até o -1, eu não posso traçar em cima do *y*.
**Professora:** Você só conseguiu fazer isso depois que fizemos a relação com a batalha naval?
**R.M.:** Isso!
**Professora:** E essa segunda informação *f ´(1) = 0*, o que isso representa?
**R.M.:** Que a derivada em relação a 1 de *x*, né, é igual a 0. Então o meu *x* é 0 e o meu *y* é 0.
**Professora:** Não estou conseguindo acompanhar teu raciocínio. Quando você tem a derivada isso te fornece um valor de *y*?
**R.M.:** Fornece!
**Professora:** Ou te fornece um valor para derivada de *y*?
**R.M.:** É da derivada de *y*, né? No caso o 0 aqui é o valor da derivada de *y.*
**Professora:** E o que representa a derivada numa interpretação geométrica?
**R.M.:** Não consigo te responder isso.
**Professora:** Aqui na questão 3 (pré- teste) por que você usou a derivada?
**R.M.:** Pra achar o ponto onde a minha reta passa, pra calcular o meu coeficiente angular.
**Professora:** Tá, e daí, a reta que passa aí como que ela é?
**R.M.:** Ela é horizontal.
**Professora:** Por quê?
**R.M.:** Porque eu tenho só um ponto, só o ponto *x*.e não dá o valor de *y*.
**Professora**: E onde ela pode te dar um valor de *y*?
**R.M.:** Se eu a igualasse a um valor.
**Professora:** E você igualou a quem?

**R.M.:** A zero. Ao valor de *y*.
**Professora:** O *y* é 0 ou o *f* que é 0?
**R.M.:** Eu tenho que igualar a derivada a zero, né? pra encontrar um valor de *x*, o valor de tangência da minha reta.
**Professora:** Tá, então você disse que você igualou a derivada zero, encontrou o valor de *x* igual a 1 e que no *x*=1 a sua reta tangente é ...
**R.M.:** Horizontal.
**Professora:** E qual é o valor do coeficiente angular de uma reta quando ela é horizontal?
**R.M.:** É zero.
**Professora:** Voltando então pra questão 4.
**R.M.:** Aqui (apontou para a expressão f´(1)=0) então meu coeficiente angular é 0 também quando o *x* é 1 na derivada.
**Professora:** Então isso quer dizer que quando o *x* for 1 ...
**R.M.:** Meu coeficiente angular é 0.
**Professora:** Então isso quer dizer que a reta que passa no 1, ela é ...
**R.M.:** Zero.
**Professora:** Horizontal.
**R.M.:** Ah é! Horizontal.
**Professora:** Vamos para próxima informação a derivada é negativa se os valores de *x* são menores que 1. O que isso quer dizer?
**R.M.:** Se o meu *x* é menor que 1 todo o meu coeficiente angular é negativo.
**Professora:** Isso!
**R.M.:** Então a minha reta vai ser decrescente.
**Professora:** Humhum, até o 1, no 1 vai ser zero.
**R.M.:** Isso.
**Professora:** Então desenha pra mim, no ar, como seria o gráfico antes do 1.
**R.M.:** Assim.
**Professora:** Beleza.
**R.M.:** Todos antes do 1 eles são pra baixo, são decrescentes. Quando chegar no 1 é zero, depois do 1 ele começa ser crescente.
**Professora:** Será crescente ou continua decrescente, depende da próxima informação.
**R.M.:** Ah bom!
**Professora:** Aqui *(f´(x)>0 se x>1)* diz que a derivada é positiva se os valores de *x* são maiores que 1.
**R.M.:** Então está me confirmando que depois do 1 ele vai crescer mesmo.
**Professora:** Então como seria meu gráfico?
**R.M.:** Assim.
**Professora:** Pra fazer essa questão, você lembrou da aula de laboratório resolver essa questão?
**R.M.:** Não. Toda aquela aula de laboratório me ajudou depois da prova.
**Professora:** O que mais te chamou atenção na aula de laboratório...
**R.M.:** Tipo assim, neste do gráfico aqui (questão 5 do pós-teste), agora que eu estou me lembrando, e nesse aqui, da questão 3 da recuperação, o que me recordo bastante é o movimento da reta tangente fazendo a animação no gráfico, abrindo e fechando o coeficiente angular, o ângulo.
**Professora:** Humhum.
**R.M.:** Que é a mesma coisa da aceleração e da velocidade, que está me mostrando o coeficiente angular, a reta está decrescente, mas o coeficiente angular está

aumentando ou a reta está crescente e o coeficiente angular está cada vez maior ou menor. Essa animação do gráfico me ajudou muito.
**Professora:** E a questão 5?
**R.M.:** É outra coisa que me recordo da aula de laboratório é que foi o dia que eu entendi que $x$ é igual a uma reta, $x^2$ é igual a uma parábola e $x^3$ é igual a um gráfico deste daqui (apontou para a questão 4 do pré-teste). Na aula de laboratório eu consegui entender que $x^2$ é a derivada de $x^3$ e $x$ é a derivada de $x^2$, daí ficou muito claro, claro mesmo de como resolver essa questão aqui (questão 4 do pré-teste).

---

**4. Estudante A.F.:**

**Professora:** Na questão 1 do pós-teste que fala sobre a velocidade de uma partícula ao longo de uma reta horizontal. Nessa questão, você derivou para encontrar a velocidade, você lembrou da aula de laboratório para resolver esta questão em algum momento?
**A.F.:** Sim.
**Professora:** Que parte você lembrou? Do gráfico? Dá animação?
**A.F.:** Da diferença das curvas... da função.
**Professora:** Do gráfico?
**A.F.:** Sim! Dos valores.
**Professora:** Não estou entendendo... Não consigo visualizar a situação.
**A.F.:** Lembrei da diferença dos valores da função. Com os valores da derivada e da aceleração... da derivada.
**Professora:** Da derivada da velocidade?
**A.F.:** Sim.
**Professora:** Você tinha derivada já ali? Você tinha velocidade? Quando você fala em diferença dos valores, isso você está se lembrando da tabela?
**A.F.:** Em tabela.
**Professora:** Mas, nós tínhamos a primeira questão que tinha tabela, né? Tá, mas nessa aqui, onde é que você viu diferença de valores nessa aqui? O meu objetivo é saber como é que você pensou quando você olhou essa questão. O que você pensou? Quando você leu essa questão o que você pensou? A primeira coisa que te veio na cabeça?
**A.F.:** A velocidade num ponto do gráfico.
**Professora:** E isso na aula de laboratório você via aonde?
**A.F.:** Na curva.
**Professora:** Na curva. Então você tentou imaginar essa curva aqui? Você derivando? É que pra mim está difícil de entender. Mas eu ainda não entendi....
**Professora:** Vamos para questão 2 e depois você me explica melhor. Na questão 2, teria que descrever o comportamento da velocidade do carrinho. Por que você fez aceleração também? Se estava pedindo só a velocidade. Eu achei interessante, você foi o único que fez. E achei bem bom isso. Por quê?
**A.F.:** Porque na aula aquela de sábado você mostrou 3 gráficos no quadro como eles ficariam. E tinha uma reta descendo mostrando uma aceleração.
**Professora:** Então você fez uma tabelinha pra ver os valores?
**A.F.:** Fui fazendo de 2 em 2.

**Professora:** Me lembro. E a velocidade? Então você respondeu em função da aceleração?
**A.F.:** No final eu respondi em função da velocidade que diminuía.
**Professora:** Você encontrou a velocidade fazendo o quê aqui?
**A.F.:** Eu usei uma fórmula... Foi a derivada.
**Professora:** A derivada. Lembrei-me agora. E aqui? O que você disse?
**A.F.:** Que o ponto tal...
**Professora:** Ponto 1?
**A.F.:** Ele tinha uma velocidade que diminuía... Conforme iam passando os pontos.
**Professora:** Tempo!
**A.F.:** Em cada ponto ele diminuía ou aumentava. Conforme os resultados da velocidade.
**Professora:** E o que a aceleração te ajudou aqui?
**A.F.:** Aceleração? A quantidade que diminuía ou aumentava.
**Professora:** E isso você se lembrou então daquele gráfico que a gente fez da derivada que vai descendo?
**A.F.:** Sim.
**Professora:** Isso foi o que nós fizemos no computador ou que eu fiz no quadro?
**A.F.:** Esse era no quadro. Mas nós testávamos no computador também às vezes.
**Professora:** E para testar no computador já tinha a fórmula pronta, correto? Só selecionava...
**A.F.:** O colega do lado usou uma fórmula ali.
**Professora:** O Paulo*?
**A.F.:** É
**Professora:** Ah ta! Agora eu estou me lembrando... É aquela função que é uma parábola pra baixo... e daí a derivada era uma reta que ficava um pouco em cima e um pouco embaixo. Era essa?
**A.F.:** Sim.
**Professora:** Vamos para 3. A 3 você foi um dos poucos que acertou. Que conseguiu descrever perfeito da maneira, eu acho que você interpretou legal isso aqui... Mas eu quero que você me diga, como é que você começou fazendo essa questão? Quando você viu essa questão o que você lembrou?
**A.F.:** Eu lembrei que tinha que fazer a derivada.
**Professora:** Por quê?
**A.F.:** Pra achar a ... Inclinação. Depois eu fiz... O ponto em que ia cortar....
**Professora:** E esse ponto que corta aqui o *x*. Qual é o valor da inclinação?
**A.F.:** Teria que substituir aqui na derivada....
**Professora:** Vai dar 0. O que quer dizer a derivada 0?
**A.F.:** Que a inclinação seria o ponto extremo da função.
**Professora:** Se a derivada é 0. Como é que seria a inclinação da reta tangente?
**A.F.:** A inclinação seria paralela ao eixo *x*.
**Professora:** Daí sim, é o que você falou, o extremo da função. E isso aqui teve alguma relação com o computador, ou não, na aula de laboratório?
**A.F.:** Na hora de fazer o teste? E encontrar ali... quando aparecer o triângulo ali. Quando chega ao final da tabela era o valor zero.
**Professora:** E quando você fez essa questão você se lembrou do computador?
**Professora:** A maioria não lembrou. Por isso que eu estou super contente... Por que eu achava que o laboratório não ia ajudar nessa questão. Então quando você leu essa questão... você lembrou do triângulo?
**A.F.:** Sim.

**Professora:** Gostei. Então essa questão lembrou a aula de laboratório. Por que ele via “A inclinação da reta tangente ao gráfico das funções ficando paralela” e o que mais?
**A.F.:** Paralela ao eixo *x*.
**Professora:** Nessa aqui oh! Nessa parte aqui de baixo. Essa aqui é antes do 1 na questão 4. A derivada antes do 1. Ela é o quê? Menor que 0! O que quer dizer menor que 0?
**A.F.:** Que as retas tangentes com a função seriam decrescentes.
**Professora:** Então você quer dizer que uma reta tangente a essa função aqui teria que estar como?
**A.F.:** Teria que estar pra baixo aqui...
**Professora:** Pra baixo pra lá? Ou até aonde? Mostra com o dedo.
**A.F.:** A reta tangente?

**Professora:** Como é que deveria estar a função?
**A.F.:** A função deveria estar côncava para cima descendo até o ponto 1

* O nome verdadeiro do estudante foi alterado a fim de preservar sua real identidade.

ie
você pensou. Você me confirma ou não. Eu achei que você pensou que como era negativo você tinha que botar valores para baixo.
**A.F.:** Sim, foi.
**Professora:** Então daí nessa hora você confundiu que era o ângulo.
**A.F.:** Eu confundi a derivada com o valor de *y*.
**Professora:** Mas isso não acontece sempre contigo. Será que aqui você confundiu com a função também, mesmo sendo positiva?
**A.F.:** Foi só depois.... que eu tracei esse traço até aqui....
**Professora:** Primeiro você traçou depois você foi ver se tinha derivada ou não?
**A.F.:** Não.
**Professora:** Porque assim... Olhando essa questão agora eu verifico que você marcou certinho o ponto *(1, -1)*. Mas esse pedaço aqui você fez só porque estava positivo. E esse aqui você fez porque estava negativo. Não pensou na inclinação das retas tangentes.
**A.F.:** É, foi!
**Professora:** Isso que eu interpretei. Então aqui você esqueceu que a derivada seria a inclinação da reta tangente. Mas qual a relação que existe entre esta questão e essa aqui? Por que essa aqui você fez tudo certinho? A questão 3, por quê a 3 você interpretou legal, você derivou, você disse que aqui a derivada é positiva, então a reta era crescente? Então derivada positiva, reta crescente, derivada negativa, reta decrescente. Ou aqui você pensou em reta crescente e não pensou na função? Só aqui você confundiu com a função porque você já estava cansado de fazer a prova?
**A.F.:** É que aqui é no *y*. Como a derivada é maior que 0 eu achei que o *y* aumentava pra cima. E ia aumentando de 1 em 1. E aqui como *y* era menor, quer dizer, a derivada era menor que 0, eu achei que ia diminuindo.
**Professora:** Você viu que aqui você botou o *y,* e aqui a derivada, daí já é outra coisa. Então nessa aqui você confundiu a derivada com valor de *y*?
**A.F.:** Sim! Derivada com função!
**Professora:** Nessa aqui (questão 5 do pós-teste) como é que você pensou? Você pensou exatamente igual ao colega M.P. O quê aconteceu, aqui as retas tangentes de 0 até1, como é que eram essas retas?
**A.F.:** Eram todas crescentes.

**Professora:** Todas crescentes. Por isso você marcou seu gráfico em cima. Sim ou não?
**A.F.:** Sim.
**Professora:** E por que o gráfico está descendo, sai do 1 e vai lá pro 0?
**A.F.:** Porque quando chega no ponto 1 a tangente dele a função é 0.
**Professora:** Ok.
**Professora:** E do 1 até o 2. O que está acontecendo com as retas tangentes?
**A.F.:** Do 1 até o 2 elas estão decrescendo.
**Professora:** Decrescendo para você é negativo, aumentando o valor ou diminuindo o valor. O que quer dizer decrescente para ti? No 1 ela é 0.
**A.F.:** Ok.
**Professora:** Daí eu estou indo para o 2. Está mudando meu ângulo?
**A.F.:** Sim.
**Professora:** Cheguei no 2. Meu angulo é 0?
**A.F.:** Não.
**Professora:** Realmente você não colocou 0 no 2. Você colocou um valor bem alto.
**A.F.:** É que eu confundi aqui.
**Professora:** Não, mas não está totalmente errado. Mas essas retas tangentes aqui (entre 1 e 2) são crescentes ou decrescentes?
**A.F.:** São decrescentes.
**Professora:** São decrescentes. Por isso você disse que a sua...
**A.F.:** Era pra descer aqui!
**Professora:** Sim! Por isso você disse que eram decrescentes. Entendeu? A primeira palavra que você disse pra mim, é que de 1 até 2 essas retas são decrescentes. Não foi isso que você falou?
**A.F.:** Sim.
**Professora:** E o que você quis dizer com decrescente?
**A.F.:** Vai diminuindo.
**Professora:** O que vai diminuindo?
**A.F.:** O valor da derivada.
**Professora:** O valor da derivada. Sai de 0 e vai para o valor... Negativo! Viu?
**A.F.:** Certo.
**Professora:** Mas agora vai dar um problema. O que está acontecendo entre 2 e 3? O que vai acontecer com as retas tangentes à função de 2 até 3?
**A.F.:** A função está decrescente, só que vai se aproximando do 0.
**Professora:** O que vai se aproximando do 0?
**A.F.:** A derivada.
**Professora:** E como vai ficar o seu gráfico?
**A.F.:** Ela...do 2 até o 3 começava a crescer até o 0.
**Professora:** Isso aí!
**A.F.:** Certo! Então depois do 3 é uma reta crescente... aumenta.
**Professora:** Ótimo. Isso te lembrou da aula de laboratório?
**A.F.:** É!
**Professora:** Qual parte?
**A.F.:** Eu lembrei da aula do laboratório a parte que as retas crescentes ficavam pra cima.
**Professora:** Tá, mas isso naquelas atividades do carrinho, ou não?
**A.F.:** É. Eu lembrei daquela aula dos gráficos. Quer dizer quando tinha retas tangentes crescentes, ela ficava a cima do eixo *x*.
**Professora:** Tá mas nós fizemos isto no quadro ou no computador?

**A.F.:** Quadro.
**Professora:** E a atividade no computador?
**Professora:** Aquelas bolinhas (rastro) da atividade te fizeram compreender alguma coisa?
**A.F.:** Fizeram compreender...
**Professora:** O que te fizeram compreender?
**A.F.:** Aquilo de aumentar a distância e diminuir a distância... O caminhão perdia a velocidade.
**Professora:** M.P. disse que aquilo ali, fez ela compreender o que significa taxa de variação. Que pra ela a taxa de variação tinha um conceito muito abstrato e para ela aquelas bolinhas ajudaram a compreender o que era taxa de variação. Para você, ajudou isso, ou tanto faz? Você já tinha esse conhecimento?
**A.F.:** Taxa de variação? Eu não liguei muito! O que importou para mim foi a velocidade.
**Professora:** Onde que você identificou a velocidade?
**A.F.:** Naquela variação da distância das bolinhas.
**Professora:** Você concorda que velocidade é uma taxa de variação?
**A.F.:** Concordo.
**Professora:** E a reta tangente ao gráfico te ajudou em quê? Te ajudou para fazer essa prova? Lembra que quando a gente apertava naquelas flechinhas azuis que ficava o carrinho assim, todo hora para lá e para cá? Daí aparecia uma reta tangente ao gráfico. Te ajudou para fazer essa prova, ter aquela visualização, ou não muito?
**A.F.:** É a mesma coisa das bolinhas. Chegava num ponto que ela virava mais e terminava menos.
**Professora:** Tá e visualizar isso, te ajudou para fazer essa prova?
**A.F.:** Acho que ajudou.
**Professora:** Você estudou bastante em casa?
**A.F.:** Estudei.
**Professora:** Viu como é bom?

---

**5. Estudante G.E.:**

**Professora:** A questão 1 do teste 2 (pós-teste) é semelhante a qual do teste 1 (pré-teste)?
**G.E.:** É semelhante a questão 3.
**Professora:** Você usou alguma coisa da aula de laboratório para resolver a questão 1 do teste 2?
**G.E.:** O que ajudou bastante para resolver esta questão foi aquele princípio da utilização do gráfico na aula do laboratório, que conforme ia variando a reta tangente eu conseguia visualizar realmente o quanto iria modificar.
**Professora:** Modificar o quê?
**G.E.:** O que variava assim no gráfico, né, os valores em si.
**Professora:** Especificamente pra essa questão, o que a reta tangente te dizia, que informações ela te dá?
**G.E.:** Ela me mostrava o momento em que a velocidade variava muito então a reta em si, também ia variando, foi com isso que eu tomei como base pra resolver essa questão. Foi o que me esclareceu mais.

**Professora:** Ok.
**Professora:** Vamos pra questão 2 do teste 2, tem alguma questão parecida no teste 1?
**G.E.:** Tem, a questão 3 do teste 1.
**Professora:** O que você fez pra resolver a questão 2 do teste 2?
**G.E.:** Eu fui imaginando conforme o gráfico ia passando os tempos, então eu ia imaginando conforme a reta tangente ia variando.
**Professora:** E por que você derivou a posição de cada uma delas?
**G.E.:** Eu derivei justamente pra ver a variação da reta tangente a cada instante de tempo.
**Professora:** Mas a questão não pedia velocidade?
**G.E.:** Isso, mas com a variação da reta eu consigo enxergar isso também, não é?
**Professora:** Ok. Vamos pra próxima.
**Professora:** A questão 3 do teste 2 é semelhante a qual do teste 1?
**G.E.:** É semelhante a questão 1 do teste 1.
**Professora:** Isso. O que você fez pra resolver essa questão?
**G.E.:** No teste 1, primeiramente eu achei o ponto.
**Professora:** No teste 1 é pedido a equação da reta tangente e no teste 2 ele pede para quais valores de *x* a reta tangente é crescente e decrescente. Por que você derivou e igualou a 0 aqui no teste 2?
**G.E.:** Pra achar esse valor, o 1.
**Professora:** O que esse valor representa?
**G.E.:** É onde a reta tangente passa, corta ?
**Professora:** Não, não é isso. Vou fazer outra pergunta. Você usou a aula de laboratório pra fazer essa questão?
**G.E.:** Não. O que eu me lembro, realmente, da aula de laboratório foi da variação do gráfico em si relacionando a variação da reta tangente com a velocidade.
**Professora:** Quando você usou a derivada na questão 2 do teste 2 você disse que a derivada te dá a variação da inclinação reta tangente?
**G.E.:** Isso!
**Professora:** E o que me fornece a inclinação da reta tangente? Não é o coeficiente angular?
**G.E.:** Ah!!! Certo.
**Professora:** E não é o coeficiente angular que me diz se a reta é crescente ou decrescente?
**G.E.:** É. Então esse 1 seria o valor do coeficiente angular da reta?
**Professora:** Vamos ver: se a derivada é o coeficiente angular...
**G.E.:** Certo, isso!
**Professora:** E se você pegar esse valor e colocar ali (na função derivada) vai dar o quê?
**G.E.:** Zero.
**Professora:** Porque você já tinha igualado a 0 a função derivada, para encontrar esse valor. E o que quer dizer coeficiente angular igual a 0?
**G.E.:** Uma reta paralela ao eixo *x*.
**Professora:** Então se a reta é paralela ao eixo *x* quando *x* é igual a 1, isso quer dizer que antes do 1 ela pode ser crescente ou decrescente e depois do 1 também ela pode ser crescente ou decrescente. E conforme o teu desenho, como antes do 1 a função derivada é positiva, as retas tangentes à função são crescentes ...
**G.E.:** E depois do 1 decrescentes.
**Professora:** Isso aí. Vamos para a próxima questão.

**Professora:** Como você resolveu a questão 4 do teste 2?
**G.E.:** Conforme os dados que foram passados na questão onde *x* valeria 1 e *y* –1, eu tracejei ali no próprio gráfico e achei onde seria o ponto que a reta passaria. Que seria a reta tangente limite dos dois.
**Professora:** Por que você esboçou uma curva com a concavidade pra cima depois desse ponto *(1, -1)* e também antes desse ponto?
**G.E.:** Porque aqui (apontou para a expressão $f'(x) > 0$ se $x > 1$) *x* é maior que 0 e depois seria o contrário.
**Professora:** A primeira derivada é maior que 0 se *x* é maior que 1. Então lá no gráfico nós vamos ter o quê?
**G.E.:** Uma reta a partir do ponto 1 pra cima, crescente.
**Professora:** Ok. Obrigada.